FERNANDO EDUARDO DE SOUZA

A Integral na Visão de Professores de Cálculo Diferencial e Integral Frente à Produção de Alunos.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

FERNANDO EDUARDO DE SOUZA

A Integral na Visão de Professores de Cálculo diferencial e Integral Frente à Produção de Alunos.

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. BENEDITO ANTONIO DA SILVA.***

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

Aos meus pais José Carlos e Maria de Lourdes de Souza que sempre acreditaram no meu potencial e tanto fizeram para que eu chegasse aonde agora cheguei sem medir esforços e sem economizar amor.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

A Deus, pelas oportunidades propiciadas, as quais permitiu-me chegar até aqui.

Ao Professor Dr. Benedito Antonio da Silva além de grande amigo, meu orientador, pelas palavras de incentivo, apoio e dedicação durante todo o tempo da realização deste trabalho. Apesar de minhas ausências sempre se mostrou presente.

Ao Professor Doutor Victor Giraldo e à Professora Dra. Janete Bolite Frant por terem aceitado fazer parte de nossa banca examinadora e pelas contribuições que tanto nos ajudaram a construir o trabalho.

Aos professores do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelos seus ensinamentos que me foram úteis não só para esta pesquisa, mas também para o cotidiano do meu trabalho.

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa mestrado.

Aos colegas de mestrado pela amizade e companheirismo em todo o momento do curso que, de forma direta ou indireta, contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos amigos mais próximos, Luís, Mendes, Luciano e tantos outros, meu sincero obrigado pelo incentivo e incansável auxílio nos momentos mais difíceis desta jornada.

Não poderia deixar de agradecer aos atores principais deste trabalho, os professores de Cálculo que dispuseram de seu tempo, precioso e rico, muito obrigado.

RESUMO

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral consta do currículo de vários cursos da área de Ciências Exatas ou Humanas, tais como Engenharia, Física, Química, Ciências da Computação, Administração e outros. Seu ensino tem se apoiado muitas vezes numa prática metodológica “tradicional” baseada em: definições, teoremas, propriedades, exemplos e exercícios. Inúmeras pesquisas demonstram que esta metodologia tem redundado em um índice muito alto de retenção. O presente trabalho busca analisar as relações entre as concepções sobre o conceito de Integral revelada por professores, bem como suas maneiras de analisarem a produção dos alunos, de forma a obtermos indícios sobre as práticas educativas desses profissionais. Para atender a esse objetivo, utilizamos dois instrumentos metodológicos, um questionário e entrevistas. O primeiro, objetivando produzir dados para as entrevista, foi aplicado a trinta alunos de duas universidades particulares de São Paulo, abordando diferentes aspectos do conceito de Integral, como: definições, representações, técnicas de integração e aplicações. Analisamos as respostas produzidas à luz do referencial teórico de Conceito Imagem e Conceito Definição de Tall & Vinner. As entrevistas foram realizadas com três professores de uma universidade particular de São Paulo, baseadas nas propostas metodológicas de Bogdan & Binklen e de Gaskell, G. sobre entrevistas em grupo e foram analisadas de acordo com as idéias de Paul Ernest acerca da Filosofia Absolutista e Filosofia Falibilista da Matemática. Notamos que as concepções sustentadas pelos professores se aproximam mais à visão absolutista da matemática, pois na maioria das produções analisadas, todos parecem aceitar que essa ciência é o domínio das verdades absolutas e que o conhecimento em matemática consiste em descrições dos entes matemáticos, das relações entre eles e da estrutura lógica que os sustenta. No entanto, os professores entrevistados manifestam a possibilidade de que o conhecimento matemático seja falível ou esteja aberto a críticas e correções.

Palavras-Chave: Ensino e aprendizagem, Integral, Concepções e Práticas Educativas, Entrevista em Grupo, Filosofia da Matemática.

ABSTRACT

It discipline Differential and Integral Calculus appear of the resume of some courses of the area of Exacts or Human Sciences, such as Engineering, Physics, Chemistry, Computer Sciences, Administration and others. Its teaching if has supported many times in one practical "traditional" methodological based in: definitions, theorems, properties, examples and exercises. Innumerable research demonstrates that this methodology has resulted in a very high index of retention. The present work search to analyze the relations between the conceptions on the concept of Integral disclosed for professors, as well as its ways to analyze the production of the pupils, of form to get practical indications on the educative ones of these professionals. To deal of this objective, we use two methodological instruments, a questionnaire and interviews. The first one, objectifying to produce information for the interview, was applied the thirty pupils of two particular universities of São Paulo, having approached different aspects of the concept of Integral, as: definitions, representations, techniques of integration and applications. We analyze the answers produced to the light of the theoretical reference of Concept Image and Concept Definition of Tall & Vinner. The interviews had been carried through with three professors of a particular university of São Paulo, based in the methodological proposals of Bogdan & Binklen and Gaskell, G. on interviews in group and had been analyzed in accordance with the ideas of Paul Ernest concerning the Philosophy Absolutist and Fallibilist Philosophy of the Mathematics. We understand that the conceptions supported for the professors if approach more to the view absolutist of the mathematics, therefore in the majority of the productions analyzed, all seem to accept that this science is the domain of the absolute truths and that the knowledge in mathematics consists of descriptions of the mathematical beings, of the relations between them and of the logical structure that supports them. However, the professors interviewed manifest the possibility of that the mathematical knowledge be it fallible or opened the critical and corrections.

Keywords: Teaching and learning; Integral; Conception and Educative Practical; Interviews Group; Philosophy of the Mathematics.

SUMÁRIO

Lista de Figuras xi

Lista de Tabelas xiv

APRESENTAÇÃO... 15

1. PROBLEMÁTICA... 18

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 26

2.1 Conceito Imagem e Conceito Definição.. 27

2.2 Crenças e Concepções: A Visão Absolutista e Falibilista da matemática. 31

3. METODOLOGIA 37

3.1 Entrevistas em grupo.. 39

3.2 Caracterização dos sujeitos de pesquisa 42

3.3 O questionário 44

3.4 Categorização das produções. 54

4. ESTUDO EXPLORATÓRIO... 68

4.1 Teste do Instrumento de Pesquisa 70

4.2 Relato e análise da entrevista com o Professor 78

4.3 Conclusões sobre o Estudo Exploratório....................................... 97

5. O EXPERIMENTO... 102

5.1 As Produções dos Alunos... 104

5.2 Descrição e Análise das Entrevistas.. 112

5.2.1 Relato e Análise das Entrevistas com o Grupo 1113

5.2.2 Idéias expressas por Alfa 129

5.2.3 Idéias expressas por Beta... 130

5.2.4 Idéias expressas por Gama.. 132

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 134

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS... 138

Anexo 1: Termo de Compromisso... 143

Anexo 2: Perfil Acadêmico e Profissional dos Professores participantes 144

Anexo 3: Transcrição da entrevista: Fase Exploratória. 146

Anexo 4:Questões Analisadas pelos Professores..................................... 149

Anexo 5: Transcrição de Episódios da Entrevista..................................... 160

Lista de Figuras

Figura 1: As relações simplificadas entre filosofias pessoais da matemática, valores e imagem da sala de aula da matemática: 35
Figura 2: Protocolos: Q1a – A1; Q1a – A2; Q1a – A3. 70
Figura 3: Protocolos: Q2 – A1; Q2 – A2; Q2 – A3. 71
Figura 4: Protocolos: Q3 – A1; Q3 – A2; Q3 – A3. 72
Figura 5: Protocolos: Q4 – A1; Q4 – A2; Q4 – A3. 72
Figura 6: Protocolos: Q5 – A1; Q5 – A2; Q5 – A3. 73
Figura 7: Protocolos: Q6 – A1; Q6 – A2; Q6 – A3. 73
Figura 8: Protocolos: Q7 – A1; Q7 – A2; Q7 – A3. 74
Figura 9: Protocolos: Q8 – A1; Q8 – A2; Q8 – A3. 74
Figura 10: Protocolos: Q9 – A1; Q – A2; Q9 – A3. 75
Figura 11: Protocolos: Q10 – A1; Q10 – A2; Q10 – A3. 75
Figura 12: Protocolo Q1a-A1. 79
Figura 13: Anotações do Professor referente ao protocolo Q1-A1. 79
Figura 14: Protocolo Q1a – A3 80
Figura 15: Protocolo Q2 – A2 81
Figura 16: Protocolo Q2 – A3 81
Figura 17: Anotações do Professor referente ao protocolo Q2-A3. 82
Figura 18: Protocolo Q3-A3. 83
Figura 19: Anotações do Professor referente ao protocolo Q3-A1. 84
Figura 20: Protocolo Q3 – A2 84
Figura 21: Protocolo Q4 – A1. 85
Figura 22: Protocolo Q4 – A2. 85
Figura 23: Anotações do Professor referente ao protocolo Q4-A1 86
Figura 24: Anotações do Professor referente ao protocolo Q4-A1 86
Figura 25: Protocolo Q5 – A2 87
Figura 26: Protocolo Q5 – A3. 88
Figura 27: Anotações do Professor referente ao protocolo Q5-A3 88
Figura 28: Protocolo Q6 –A2. 88
Figura 29: Protocolo Q6 – A3 89
Figura 30: Anotação referente ao protocolo Q6-A3. 89

Figura 31: Protocolo Q7 – A1. 90
Figura 32: Anotações referente ao protocolo Q7-A1. 90
Figura 33: Resolução referente ao protocolo Q7-A1. 91
Figura 34: Protocolo Q7 – A2. 91
Figura 35: Anotações do Professor referente ao protocolo Q7-A2. 92
Figura 36: Protocolo Q8 – A3. 92
Figura 37: Anotações do Professor referente ao protocolo Q8-A3. 93
Figura 38: Protocolo Q8 – A1. 93
Figura 39: Anotações do Professor referente ao protocolo Q8-A1. 93
Figura 40: Protocolo Q9 – A1. 94
Figura 41: Anotações do Professor referente ao protocolo Q9-A1. 94
Figura 42: Protocolo Q9 – A2. 94
Figura 43: Anotações do Professor referente ao protocolo Q9-A2. 95
Figura 44: Protocolo - Q10 – A1. 95
Figura 45: Protocolo - Q10 – A3. 96
Figura 46: Anotações do Professor referente ao protocolo Q10-A1. 96
Figura 47: Alteração referente à Questão Q1a. 97
Figura 48: Protocolos: Q1a – A9; Q1a – A28; Q1a – A17 104
Figura 49: Protocolos: Q1b – A26-Ia; Q1b – A12-Ib; Q1b – A20-IIb....................105
Figura 50: Protocolos: Q2 – A15-Ib; Q2 – A1-Ic; Q2 – A24-III...........................106
Figura 51: Protocolos: Q3 – A12-II; Q3 – A19-III; Q3 – A14-IV. 106
Figura 52: Protocolos: Q4 – A22-I; Q4 – A10-II; Q4 – A13-III. 107
Figura 53: Protocolos: Q5 – A15-Ia; Q5 – A3-IIa; Q5 – A7-III. 108
Figura 54: Protocolos: Q6 – A27-IIa; Q6 – A14-IIb; Q6 – A6-III. 108
Figura 55: Protocolos: Q7 – A1-Ia; Q7 – A10-Ib; Q7 – A8-II. 109
Figura 56: Protocolos: Q8 – A17-Ia; Q8 – A21-Ib; Q8 – A3-II. 110
Figura 57: Protocolos: Q9 – A4-I; Q9 – A15-I. 110
Figura 58: Protocolos: Q10 – A11-Ia; Q10 – A29-Ib; Q10 – A18-II......................111
Figura 59: Anotações realizada por Beta em Q1a-A19-Ib 113
Figura 60: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q1a-A17-III 114
Figura 61: Figura 61: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q1b-A12-Ib......116
Figura 62: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q2-A1-Ic 117
Figura 63: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q3-A12-II 119
Figura 64: Anotações realizadas por Gama em Q3-A19-III................................120

Figura 65: Anotações realizadas por Gama em Q4-A19-III.................................121
Figura 66: Anotações realizadas por Beta em Q4-A19-III. 121
Figura 67: Anotações realizadas por Beta em Q6-A27-IIa. 123
Figura 68: Anotações realizadas por Beta em Q6-A6-III 124
Figura 69: Anotações realizadas por Beta em Q7-A1-Ia 125
Figura 70: Anotações realizadas por Beta em Q7-A8-II 125
Figura 71: Anotações realizadas por Gama em Q7-A8-II....................................126
Figura 72: Anotações realizadas por Beta em Q10-A11-Ia 127

Lista de Tabelas

Tabela 1: Síntese da indicação de entrevistas individuais e grupais....................40

Tabela 2: Distribuição das Categorias para Questão 1_a : 56

Tabela 3: Distribuição das Categorias para Questão 1_b :.....................................56

Tabela 4: Distribuição das Categorias para Questão 2..58

Tabela 5: Distribuição das Categorias para Questão 3..59

Tabela 6: Distribuição das Categorias para Questão 4..60

Tabela 7: Distribuição das Categorias para Questão 5..61

Tabela 8: Distribuição das Categorias para Questão 6..63

Tabela 9: Distribuição das Categorias para Questão 7..64

Tabela 10: Distribuição das Categorias para Questão 8......................................65

Tabela 11: Distribuição das Categorias para Questão 9......................................66

Tabela 12: Distribuição das Categorias para Questão 10....................................67

Apresentação

*"A conquista do sucesso não é uma coisa de ocasião.
Ela é planejada e trabalhada até que se atinja a exaustão.
E quando já estivermos cansados de lutar pelo sucesso,
aí sim ele virá,
com um gosto surpreendentemente maravilhoso de vitória."*
Prof. Nelson Lage

O Cálculo Diferencial e Integral consta atualmente da grade curricular de vários cursos das chamadas Ciências Exatas e Ciências Humanas, como Matemática, Engenharia, Física, Química, Ciências da Computação e outros. No pouco tempo que tenho trabalhado com esta disciplina, percebemos que não são poucos os alunos que sentem dificuldades para a compreensão dos conceitos tanto de Derivada como de Integral de função de uma variável.

Desde muito cedo sentimos muito desconforto e insatisfação com o desempenho de nossos alunos. O alto índice de retenção e a performance insatisfatória dos estudantes nos moveram a buscar conhecimentos sobre o ensino de Cálculo que pudessem nos esclarecer como poderíamos interferir nessa situação que julgamos incompatível como o papel de educador que nos cabia.

A princípio, imaginamos que o "problema" poderia ser nosso, pelo "jeito" de explicar, pela maneira como ministro às aulas. Posteriormente pelo depoimento de colegas, que também trabalham com esta disciplina, percebi que a dificuldades não ocorriam somente com os estudantes de minhas turmas, e assim me interessei em pesquisar sobre o assunto.

Constatamos que pesquisas nacionais e internacionais evidenciam dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina e diagnosticar as causas da dificuldade na compreensão das noções fundamentais de Cálculo pelos alunos, tem sido crescentemente, objeto de estudo de pesquisadores em Educação Matemática.

De nossas leituras sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, destacamos a seguinte frase de Barufi (1999, p. 3). "Cálculo é uma ferramenta extremamente útil, pois a variação de grandezas e a necessidade de aproximações locais são uma problemática presente em praticamente todas as áreas do conhecimento”.

Em 2004, com todas essas inquietações ingressei como aluno regular no Curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, integrando o grupo G2, que tem como tema de pesquisa: *"Matemática no ensino superior: Didática do Cálculo"*, com a idéia de pesquisar algo relacionado ao Ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Tinha a princípio apenas a intenção de realizar um estudo sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo e assim nos orientaram a realizar um levantamento de pesquisas produzidas, começando uma busca intensa por artigos, dissertações e teses. Mas, foi em um encontro com meu orientador, logo após a apresentação do trabalho desenvolvido pela Profª. Dr.ª Elena Nardi, realizado junto a alguns Educadores Matemáticos e Matemáticos ingleses, sobre as concepções e crenças existentes em relação à produção de alunos, que decidimos realizar um estudo inspirado no trabalho da profª. Nardi.

Com a idéia um pouco mais delineada sobre o trabalho a ser desenvolvido, cujo tema central fundamentava-se em Crenças e Concepções de professores, definimos também o público alvo: professores de Cálculo Diferencial e Integral, e com o passar do tempo, outras decisões foram vindo. Qual a metodologia utilizaremos? Qual o referencial teórico? Por fim, decidimos investigar sobre *a visão dos Professores de Cálculo Diferencial e Integral, em relação à produção de alunos* em relativa ao conceito de Integral.

As dificuldades apontadas pelas pesquisas por nós ‘visitadas’ sobre o ensino e aprendizagem do cálculo nos deram indícios que tais dificuldades mais se evidenciam quanto se estudam noções que possam explicitar crenças, valorizando conhecimentos matemáticos relativos aos processos ou à conceituação e aplicações de tais noções. Avaliamos que a Integral é uma noção adequada para esse fim e tendo isso em vista, pretendemos realizar um estudo que possa compreender quais as concepções e crenças de professores de

Cálculo, no momento em que analisa ou corrige com a produção do aluno, de forma a obtermos indícios sobre as práticas educativas desses profissionais.

Organizamos o trabalho em seis capítulos. No primeiro, apresentamos a escolha do tema, o objetivo e a problemática envolvida, assim como a relevância do estudo, citando algumas pesquisas concernentes ao tema proposto. Incluímos ao final do capítulo as questões de pesquisas.

No capítulo 2 apresentamos a fundamentação teórica, discorreremos sobre a teoria de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* assim como Tall & Vinner conceberam em 1981. Apresentaremos uma das vertentes sobre a filosofia da matemática: A *Filosofia Absolutista* e *Filosofia Falibilista* de Paul Ernest.

No Capítulo 3, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados nos dois instrumentos de pesquisa: o questionário e as entrevistas. Relativamente ao primeiro, expomos um conjunto de ações referente a um questionário acerca do conceito de Integral de uma variável, produzidas por trinta estudantes de duas universidades de São Paulo. Apresentamos uma pré-análise das 11 questões, assim como a categorização das produções dos alunos de acordo com a teoria de Conceito Imagem e Conceito Definição, dos quais selecionamos duas ou três de cada questão, a serem analisadas posteriormente pelo grupo de professores. Quanto às entrevistas, primeiramente realizamos uma breve caracterização dos sujeitos pesquisados, logo após discorremos sobre as entrevistas em grupo, de acordo com as idéias de Bogdan & Binken (1994) e de Gaskell, G. (2002) sobre Entrevistas em Grupos.

Dividimos o estudo de campo em duas partes, a primeira descrita no capítulo 4 é dedicada à apresentação da fase exploratória que foi realizada com a participação de um único professor com o propósito de testar a pertinência do instrumento e buscar contribuições para a reformulação adaptação do questionário e do roteiro final. Em seguida, no capítulo 5, apresentamos a segunda parte do estudo de campo, denominada O Experimento que foi realizado com a participação de três professores de uma Universidade do estado de são Paulo. Iniciamos o capítulo com uma descrição dos professores, seguido da apresentação das produções selecionadas. O relato e a análise das entrevistas realizadas com os professores são expostos na seqüência.

Finalmente, no capítulo 6, apresentamos as considerações finais do estudo realizado. Este capítulo é seguido pelas referências bibliográficas e anexos.

CAPÍTULO 1:

PROBLEMÁTICA

Pesquisas nacionais e internacionais em Educação Matemática, evidenciam dificuldades de alunos e professores, relacionadas ao ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Elas revelam e analisam dificuldades encontradas na compreensão de noções fundamentais ligadas a números reais, funções, limites, derivada e integral.

Barufi (1999) faz um estudo que investiga de que maneira é feita a negociação do conhecimento nos cursos de Cálculo I, no sentido de possibilitar a construção de significados por parte do aluno. Para isso, busca em um conjunto de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral e alguns de Análise Real, respostas às suas questões. A autora entende que o livro escolhido pelo professor pode deixar transparecer suas crenças e, realizando uma análise desses livros é possível compreender como o professor pode vir a abordar os conteúdos de Cálculo, constituindo um forte indício do tratamento que será dado em sala de aula.

Após a análise desses livros, Barufi conclui que todos eles apresentam propostas válidas e que podem ser apreciadas num determinado contexto. A utilização do livro, conforme os critérios do professor, pode ser um instrumento mais ou menos facilitador dos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo. Ademais, para a autora o papel do professor é “absolutamente necessário”, no sentido, em que este tem a capacidade de encontrar problemas adequados, pertinentes e compatíveis com o grupo de alunos, que propicie uma maior ou menor vivência dos significados que podem otimizar a construção do conhecimento.

Segundo a pesquisa realizada por Oliveira (2004), que trata sobre a abordagem da noção de Integral em dois livros didáticos de Cálculo, sendo eles o *Calculus* de Spivak, M e *Cálculo* de Stewart, J, nos aspectos operacional e estrutural de acordo com a teoria de Sfard. Ficou evidenciado que o tratamento formalizado no livro de Spivak, vai em direção oposta da teoria de Sfard, enquanto que o livro de Stewart, o tratamento utilizado respeita o postulado, ou seja, de que uma noção deve ser concebida primeiramente como um processo, no qual suas características são evidenciadas, depois ela passa a ser vista como um objeto, sem enfatizar seus detalhes.

Nessa mesma linha, Silva (2004) realiza um estudo, também de dois livros didáticos, o primeiro de Guidorizzi, H, L. *Um Curso de Cálculo*, V.1 e o segundo de Stewart, J. *Cálculo*. Procurando mostrar os tratamentos e as conversões, entre os registros usados pelos autores, segundo a teoria de Duval. Seus resultados indicam que se os livros forem bem explorados, pode levar o aluno a um maior entendimento, por meio da utilização das conversões, com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora.

Hsia (2006), realiza um estudo que visa investigar como os alunos utilizam o livro didático e como eles mobilizam os registros de representação contidos em um texto sobre a noção de Integral. A autora propôs aos alunos que utilizassem dois livros didáticos como referência, Calculus de M. Spivak e Cálculo de J. Stewart. Em seus resultados, a autora destaca que a maioria dos alunos mostrou interesse em iniciar o estudo de um conceito, por meio da utilização do livro didático, diferentemente da aula que comumente é expositiva, destacando entre as manifestações dos alunos, a frase: *“Gostei de saber que os conceitos que eu estudo tem aplicação na vida prática”*.

Godoy (2004) em sua pesquisa, sobre os registros de representação semiótica de Derivada, investiga quais registros os alunos reconhecem, incluindo suas competências quanto à mobilização de tratamentos e conversões. Verifica em seus estudos preliminares, que podem ser encontrados dois tipos de enfoques no ensino de Derivadas, o teórico, ligado aos conceitos e definições e o técnico, voltado mais para os processos e algoritmos.

Melo (2002) em seu estudo, sobre o ensino e aprendizagem do conceito de integral, ao abordar questões relativas ao Cálculo, escreve que:

> Villarreal (1999) afirma que o ensino de Cálculo, muitas vezes, é baseado numa pratica metodológica "tradicional" embasado no modelo da exposição teórica: definições, teoremas, exemplos e exercícios. Desse modo, o ensino de Cálculo acaba sendo algoritmizado, e sua aprendizagem se reduz conseqüentemente, à memorização e à aplicação de uma série de técnicas, regras e procedimentos, que também terminam por algoritmizá-las. ... De acordo com esse quadro, o professor passa a valorizar no ensino os

> conteúdos e a privilegiar as técnicas de aula expositiva para "transmitir" o conhecimento. Dessa forma, as avaliações são feitas para verificar o grau de assimilação das informações que os alunos conseguiram reter. (Melo, 2002, p.4)

Assim, se as avaliações visam verificar o grau de assimilação do conteúdo ministrado durante as aulas, cabe indagar quais são as concepções que o professor manifesta durante a análise ou correção das questões que compõem essas avaliações.

Para fundamentar esta investigação, examinamos várias pesquisas que abordam o tema sobre crenças e concepções de professores a respeito da Matemática. No decorrer das leituras, notamos não haver concordância entre os autores quanto ao uso dos termos *crença* e *concepção*, chegando essa utilização ser, às vezes, conflitante. Propusemo-nos, então, a aprofundar o assunto, para poder optar por uma determinada abordagem, a ser utilizada em nosso trabalho. Entretanto, gostaríamos de salientar a dificuldade na tradução dos termos utilizados pelos autores: em vários momentos tivemos a impressão de que os termos crença e concepção eram utilizados como sinônimos.

Ernest (1991) utiliza os termos, *concepções*, *crenças* e *opiniões*, referindo-se à natureza da Matemática e a seu ensino e aprendizagem. Para ele, os componentes principais das crenças dos professores são: suas opiniões ou concepções sobre a natureza da Matemática, sobre a natureza do ensino e sobre os processos de aprendizagem dessa disciplina.

No nosso entender o autor indica que as concepções englobam as crenças, de forma a tornarem-se sinônimos de *sistema de crenças.* Ele diz que a concepção do professor sobre a natureza da Matemática é seu sistema de crenças relativamente à ciência de uma maneira global.

Golafshani (2002) realiza um estudo sobre as concepções de professores relativos a natureza da matemática e suas influências em suas práticas de ensino. O autor verifica que as práticas são influenciadas por muitos fatores, como: O sistema de crenças dos professores sobre o ensino e aprendizagem da matemática, o contexto social da situação de ensino e o nível de reflexão do ensino.

Nessa mesma linha de pesquisa se enquadra, Cury (1994), que realiza um estudo sobre as relações entre as concepções de Matemática assumidas pelos professores e suas formas de considerarem os erros dos alunos. Ela realizou a análise de questionários propostos e das entrevistas realizadas com seis professores, propondo ao final, a formação de grupos de estudo e discussão sobre os mais variados temas, incluindo a História e Filosofia da Matemática.

Cury apresenta uma proposta de reformulação do ensino nos cursos de Licenciatura em Matemática, que contemple:

> "... uma concepção falibilista da Matemática - que procure reproduzir, nas aulas de cada disciplina, o trabalho real do matemático, um trabalho social, em constante mudança, sofrendo correções ao longo do tempo; que aceite os erros cometidos pelos alunos e os aproveite para entender os seus processos de cognição; que avalie não só o trabalho individual, mas também aqueles que são gerados na interação com o professor e com os colegas, só serão possíveis se os professores do curso em questão estiverem imbuídos desses ideais e compartilharem suas experiências, seus sucesso e fracassos." (Ibid. p. 238)

Thompson (1992) descreve em seu artigo, um levantamento de várias outras pesquisas sobre crenças e concepções de professores a respeito da matemática. A autora verifica que alguns educadores, que habitualmente tratam suas crenças como conhecimentos, discutem que não é interessante para os pesquisadores a busca de distinções entre o conhecimento e a crença, mas, pesquisar como e porque essas crenças afetam sua prática educacional.

A autora entende que as crenças são freqüentemente sustentadas por razões que não são encontradas em determinadas situações, ou seja, incluem-se nos sentimentos afetivos, memórias de experiências pessoais. Em seu trabalho, detalha e emprega os termos *concepções* e *crenças.* Para ela, concepção de um professor sobre a natureza da matemática pode ser vista como as crenças conscientes ou subconscientes desse professor, os conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências, relacionadas com o conteúdo trabalhado.

Ponte (1992, 1994), manifesta que as *concepções* têm uma natureza essencialmente cognitiva atuando como uma espécie de filtro, formam-se num processo simultaneamente individual, como resultado da elaboração sobre a nossa própria experiência, e social, como resultado do confronto de nossas elaborações com as dos outros. Desempenham um papel importante no processo de pensamento e de ação e distinguem - se das crenças, pois estas têm não só uma conotação mais afetiva como um caráter mais proposital.

Outros pesquisadores como Barbara Jaworski e Elena Nardi, têm direcionado seus trabalhos em um projeto que visa desenvolver uma aproximação e a colaboração entre alguns professores de ensino universitário, em especial, os matemáticos e educadores matemáticos.

Segundo Jaworski (2000, p.1), esse projeto foi elaborado num momento em que o relacionamento, entre matemáticos e educadores matemáticos, estava abalado devido aos desentendimentos de como o ensino da matemática deve ser realizado. Enquanto os matemáticos visam um ensino mais teórico, privilegiando conceitos, demonstrações e técnicas, os educadores matemáticos se preocupam no processo de ensino e aprendizagem, tentando encontrar práticas para a aquisição dos conceitos matemáticos. Este desentendimento ficou conhecido como a "guerra da Matemática" conduzida principalmente nos Estados Unidos.

Tal projeto visa promover a colaboração entre matemáticos e educadores matemáticos e tem por objetivos principais:

1. Contribuir para o conhecimento, psicologicamente, pedagogicamente e matematicamente, relacionado ao ensino e à aprendizagem da matemática avançada;

2. Identificar as práticas no ensino da matemática no primeiro ano da universidade, e (identificar) os pensamentos e as crenças subjacentes às práticas;

3. Examinar tais práticas e processos em uma parceria com os professores universitários de matemática para desenvolver um discurso pedagógico baseado na reflexão colaborativa destas práticas por investigadores e por parceiros;

4. Informar professores universitários sobre a natureza e as implicações de práticas e processos existentes e as possíveis alternativas. A pesquisa explorará o impacto destas implicações nos atuais pensamentos e crenças.

5. Fornecer indicadores para a pesquisa nas práticas mais amplas do ensino da matemática no ensino universitário.

Neste estudo, foram realizados encontros periódicos, em que eram efetuadas entrevistas semi-estruturadas com os educadores e matemáticos participantes, em que eram fornecidas produções, respostas de determinadas questões, de alguns estudantes de assuntos que os sujeitos do estudo julgaram necessário discutir. Ao término dos encontros, Jaworski conclui que o relacionamento e o entendimento entre os Educadores e Matemáticos estava mais próximo do que no começo da pesquisa. Porém, indica que com a complexidade do material coletado, seria necessária uma análise mais detalhada desses dados, propondo um estudo mais aprofundado sobre as crenças e concepções de educadores e matemáticos.

Em nossas leituras percebemos que há poucos estudos direcionados na investigação de como o professor analisa as produções dos alunos. As pesquisas que analisamos até o momento visam diagnosticar e entender as possíveis causas dos problemas existentes, no ensino e aprendizagem do Cálculo, que estão relacionados e dizem respeito ao aluno, ao professor e às práticas pedagógicas. Acreditamos que a forma com que o professor avalia a produção de um aluno também pode influenciar no processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo.

Santos & Neto (1994), fazem uma análise de possíveis causas de falhas que, de acordo eles, estão relacionados a fatores internos ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e que dizem respeito ao aluno, recomendando uma série de alternativas com o objetivo de melhorar o desempenho desses alunos no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo, entre elas:

> Utilizar a avaliação como uma tarefa didática necessária e permanente do trabalho docente, que deve acompanhar passo a passo o processo de ensino e aprendizagem, e não como um simples ato de aplicar provas, atribuir notas e classificar alunos em aprovados e reprovados. Nesta visão, podemos definir a avaliação como um componente do processo de ensino que visa, através da verificação e qualificação dos resultados obtidos, a determinar a correspondência destas com os objetivos propostos, daí orientar a tomada de decisões em relação às atividades didáticas seguintes; (p.8)

Acreditamos que conhecendo o funcionamento das avaliações, pode-se controlá-las melhor e fazer melhores previsões. A partir desses pressupostos, pretendemos realizar um estudo que possa identificar e compreender as concepções e crenças de professores de Cálculo Diferencial e Integral, de forma a obtermos indícios sobre as práticas educativas desses profissionais, ao analisar o momento em que interage com a produção do aluno, prática comum durante sua atividade docente.

Ponte (1992), em seu levantamento sobre pesquisas que estudam as concepções de professores, afirma que os estudos, geralmente, procuram identificar as concepções por meio de entrevistas, só então procuram investigar as práticas (quando as observam) no intuito de verificar se existem inconsistências. Desta forma, tendem a indicar como concepções em relação à Matemática, apenas indícios, que em alguns casos parecem ter pouca relação com as práticas pedagógicas. Mesmo no que se refere às concepções sobre o ensino da Matemática, os professores tendem a responder algo entre o que pensam que o investigador gostaria de ouvir e o que realmente ocorre em sua atividade docente.

O autor entende que este resultado não se deve associar a má vontade dos professores ou uma intenção de enganar o investigador. Trata-se de um fenômeno que pode ser explicado de outra forma: as situações de aula são muito distintas da interação numa entrevista, pois correspondem a mundos de experiência bem diversos, cada um com as suas características próprias, os seus valores, os seus quadros de referência.

Diante disso, elegemos o conceito de integral de função de uma variável para operacionalizar nosso problema e viabilizar nossa questão central. Pretendemos investigar:

Que concepções o professor de Cálculo exterioriza sobre o conceito de integral, frente à produção de um aluno?

Qual a reação de um professor que se depara com a produção de um aluno, que não condiz com suas expectativas? Ao analisar a produção de um aluno, quais representações o professor exterioriza?

CAPÍTULO 2:

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fim de tentarmos responder as questões levantadas no final do capítulo anterior, buscamos uma fundamentação teórica que nos auxiliasse a alicerçar nossa pesquisa. Utilizamos a teoria de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* de Tall e Vinner (1981) para a escolha das produções dos alunos. Acreditamos que à luz desse referencial teórico consigamos apresentar aos professores algumas produções que possam provocá-los a exteriorizar suas crenças e concepções. Para isso, selecionamos um portfólio[1] que contém resoluções de questões relacionadas ao conceito de Integral de função de uma variável.

Para as entrevistas com os professores e a análise dos dados obtidos, utilizaremos as idéias de *Entrevista em Grupo* de Bogdan & Biklen (1994) e Grupo focal apresentado em Gaskell, G (2002). Os pressupostos deste último autor foram utilizados também por Nardi (2002) e são alicerçados na Filosofia da Matemática idealizada por Paul Ernest, que consiste na teoria sobre a Filosofia Absolutista e Falibilista da Matemática. (1991, 2004)

2.1 Conceito Imagem e Conceito Definição.

A *formação dos conceitos* é um dos tópicos de maior importância na psicologia da aprendizagem. No entanto, existem dificuldades para se compreender esta questão, uma delas se refere à própria noção de *conceito*, outra é saber quando podemos determinar que este *conceito* está formado na mente de uma pessoa. Muitos estudos e teorias foram desenvolvidos com a intenção de compreender melhor a formação de conceitos.

Nesta pesquisa, utilizaremos as noções de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição*, apresentadas por Tall e Vinner (1981), para a escolha das produções dos alunos. Esta teoria mostra a diferença entre o processo pelo qual um determinado conceito é concebido e quando ele é formalmente definido, estabelecendo "uma distinção entre a matemática como atividade mental e a matemática como um instrumento formal" (Meyer, 2003. p.17).

Segundo Tall e Vinner (1981) o conceito imagem:

> "[...] descreve toda estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as imagens mentais e propriedades a elas associadas e os processos. É desenvolvido ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando tanto quando o indivíduo encontra novos estímulos quanto quando amadurece. (p. 152)"

O conceito imagem está ligado à primeira visão ou impressão daquilo do que vem à mente de um indivíduo ao ler ou ouvir algo, ou seja, é algo não verbal associado ao conceito na sua mente, isto pode ser uma representação visual deste conceito. Por exemplo, ao ler a palavra "casa", em que tipo de casa ele pensa? Nesse momento, pode vir a imagem de um sobrado, de uma casa em uma rua tranqüila, etc. É o conceito imagem que este indivíduo tem a respeito da palavra "casa". Uma outra pessoa pode imaginar a casa onde reside ou a casa de seus sonhos, este será o "seu" conceito imagem referente a essa palavra. Esse conceito pode ser alterado a partir do momento em que o indivíduo vivencia novas experiências.

Para os autores, a parcela do conceito imagem que é ativada em um momento particular é chamado de *conceito imagem evocado*. Em horas diferentes, imagens aparentemente conflitantes podem ser evocadas. Somente quando os aspectos conflitantes são evocados simultaneamente é que podemos ter algum sentido real do conflito ou da confusão.

---

[1] Estamos chamando de portfólio o conjunto de resoluções de questões selecionadas de um questionário aplicado a alguns alunos.

Parece-nos interessante comentar sobre a existência de duas nuanças de significados diferentes atribuídos ao termo *conceito imagem*, por Shlomo Vinner e por David Tall. Este último declara que a definição de Vinner foi: "... filosoficamente baseada e foi um experimento pensado para analisar o que acontece quando estudantes focam de forma diferente sobre imagens e definições".(Tall, 2002). No entanto, ao discursar sobre sua definição de conceito imagem, compara a com a de Vinner, dizendo que:

> "[...] Minha percepção foi baseada em trabalhos com alunos, de forma que onde Shlomo falava sobre 'a mente' e a pensava separada do cérebro em um sentido cartesiano, eu sempre pensei na mente como a forma do cérebro trabalhar, de forma que ela é uma parte indivisível da estrutura do cérebro. Shlomo tem escrito sempre sobre 'conceito imagem' e 'conceito definição' como sendo 'duas células distintas' o que capacita a fazer análises refinadas das diferentes formas de trabalhar as duas idéias distintas. Como o 'conceito definição é uma forma de palavras que pode ser escrita ou falada, eu considero esta uma parte e parcela do total 'conceito imagem' na mente/cérebro." (Tall, 2003)

Consideraremos nesta pesquisa, a definição inicialmente apresentada por Tall e Vinner (1981). Entendemos que o conceito definição é toda forma de palavras utilizadas para explicar o conceito imagem. Segundo Tall e Vinner (Ibid.) o conceito definição pode ser explicado, também como sendo:

> [...] uma reconstrução pessoal da definição feita pelo estudante. É então o tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem (evocado). Se os conceitos definição lhe são dados ou construídos por si mesmo, pode variar de tempo em tempo. Desta maneira um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática.

No processo de aprendizagem o professor espera que o estudante ative o seu *conceito definição*. No entanto, um indivíduo pode gerar a cada conceito definição o seu próprio conceito imagem, ou seja, "a imagem do conceito definição". Ademais, o que é esperado pode não ocorrer, pois, na maioria das vezes, as respostas para uma tarefa cognitiva são representadas via conceito imagem.

Mas nem sempre esses conceitos (Imagem e Definição) desenvolvidos são coerentes. Tall e Vinner chamam a parte do conceito imagem ou do conceito definição que pode se opor a outra parte do conceito imagem ou do conceito definição de *fator de conflito potencial*. Alguns fatores não precisam ser necessariamente evocados em circunstâncias que causam um conflito cognitivo. No entanto, se estes fatores forem evocados são chamados de *fatores de conflito cognitivo*.

Em determinadas circunstâncias os fatores de conflito cognitivos podem ser evocados subconscientemente e o conflito que se manifesta somente por uma vaga sensação de incômodo. Os autores sugerem que esta é a causa subjacente para tais sentimentos ou comportamentos que provocam a iniciativa para resolver um problema quando o indivíduo detecta algo errado em algum lugar; podendo ser até mesmo um tempo depois que a razão do conflito seja conscientemente entendida.

Vinner (1997) entende que o comportamento conceitual (*conceptual behavior*) é baseado na aprendizagem significativa[2] e na compreensão conceitual. É um resultado dos processos do pensamento em que os conceitos foram considerados, assim como as relações entre o conceito e as idéias que o envolvem, as conexões lógicas, e assim por diante. Tais processos do pensamento que denomina “pensamento conceitual”. Assim, o comportamento conceitual é um resultado de pensar conceitual.

Vinner (1997. pp.100) usa o termo comportamento pseudoconceitual para descrever um comportamento que talvez se pudesse olhar como um comportamento conceitual, mas que de fato é produzido pelos processos mentais que não o caracterizam como tal. O comportamento pseudoconceitual é produzido pelo processo de pensamento conceitual falso. Em outras palavras, os processos pseudoconceituais do pensamento caracterizam-se como os processos em que faltam os elementos cruciais dos verdadeiros processos conceituais do pensamento, por exemplo: um aluno que expressa,

$$\mathbf{-x^{-1} + x = 2x}$$

como conclusão para um problema, deve provavelmente ter cometido uma confusão entre $-x^{-1}$ e $-(-x)$.

---

[2] Aprendizagem significativa de Ausubel In MOREIRA, Marco e MASINI, Elcie. "Aprendizagem Significativa - A teoria de David Ausubel". São Paulo: Editora Moraes. 1982.

Assim, com o apoio da teoria de Tall e Vinner, pretendemos selecionar algumas produções de alunos que mostrem os diferentes aspectos do conceito de Integral, de acordo com o conceito imagem e conceito definição de cada aluno, aspectos como: definições, representações, técnicas de integrações e aplicações.

2.2 Crenças e concepções: A Visão Absolutista e Falibilista da Matemática.

Pesquisas têm confirmado que as visões, as crenças e as preferências dos professores sobre a matemática influenciam em sua prática pedagógica. De acordo com Ernest (1991), toda a filosofia da matemática, incluindo a sua própria, tem muitas conseqüências, educacionais e pedagógicas, quando incorporadas às crenças, aos desenvolvimentos curriculares ou aos sistemas de avaliação dos professores.

O autor utiliza os termos, *concepções*, *crenças* e *opiniões*, referindo-se à natureza da Matemática e a seu ensino e aprendizagem. Primeiramente, ele diz que os conteúdos ou esquemas mentais dos professores de matemática incluem o conhecimento, as crenças sobre a matemática e seu ensino e aprendizagem e outros fatores. Em seguida diz que “os componentes principais das crenças dos professores são: suas opiniões ou concepções sobre a natureza da matemática, seu modelo ou opinião sobre a natureza do ensino e da aprendizagem da matemática”.

No entanto, o autor indica que as concepções englobam as crenças, de forma a tornarem-se sinônimos de *sistema de crenças*:

> "A concepção do professor sobre a natureza da matemática é seu sistema de crenças relativamente à matemática como um todo. Tais pontos de vista formam a base da filosofia da matemática, embora as opiniões de alguns professores podem não ter sido elaboradas em filosofias completamente articuladas. (...) As concepções do professor sobre a natureza da matemática não precisam ser opiniões conscientemente definidas; antes, elas podem ser filosofias implicitamente mantidas".(Ibid. 1991).

Segundo Thompson (1992), as crenças são freqüentemente sustentadas ou justificadas por razões que não são encontradas em determinadas situações, ou seja, incluem-se nos sentimentos afetivos, memórias de experiências pessoais vivenciadas ou até mesmo em suposições sobre a existência de extraterrestres ou a existência de mundos alternativos. Dessa forma, as crenças são caracterizadas como uma falta de acordo em como devem ser avaliadas ou julgadas suas validades.

Entretanto, os educadores, que habitualmente tratam suas crenças como conhecimentos, discutem que não é interessante para os investigadores a busca de distinções entre o conhecimento e a crença, mas, pesquisar como e porque essas crenças afetam sua prática educacional. Thompson afirma que:

> [...] a consciência significativa do papel que as crenças desempenham no comportamento cognitivo e o subseqüente interesse no sistema de crenças como um tópico de estudo, parece ter se desenvolvido ao mesmo tempo, ainda que independentemente, entre pesquisadores em educação matemática, interessados na cognição tanto de professores quanto de estudantes. Para ambos os grupos, o estudo das crenças emergiu recentemente como uma importante e legítima linha de pesquisa [...] amplamente reconhecida na educação matemática. (Thompson. 1992. p. 131)

No desenvolvimento de seu trabalho, Thompson detalha e emprega os termos *concepções* e *crenças* e fala, ainda, de *opiniões*. Para a autora;

> "A concepção de um professor sobre a natureza da matemática pode ser vista como as crenças conscientes ou subconscientes daquele professor, os conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências relacionadas com a disciplina. Essas crenças, conceitos, opiniões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia da matemática, embora para alguns professores elas podem não estar desenvolvidas e articuladas em uma filosofia coerente".(Ibid, p.132).

Ponte (1992) enfatiza que as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Atuando como uma espécie de filtro, formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros). Dessa forma, as concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que estamos habituados a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes. A Matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter concepções, pois instiga medo e admiração.

Em outro texto, o autor diz que as concepções podem ser caracterizadas como:

> "... um substrato conceitual, que desempenha um papel importante no processo de pensamento e de ação. Distinguem-se dos conceitos, pois não dizem respeitos a objetos ou ações específicas, mas antes constituem formas de ver o mundo e pensar. Distinguem-se também das crenças, pois estas têm não só uma conotação mais afetiva como um caráter mais proposital"(1994, p. 7).

Ao observarmos os significados utilizados pelos diversos autores que trabalham com os conceitos de *concepções*, *crenças*, *opiniões* e *visões* sobre a Matemática e as diversas definições encontradas em dicionários, optamos pela utilização do termo *concepção*, porque engloba toda a Filosofia Particular de um professor, quando ele *concebe* idéias e interpreta o mundo a partir dessas idéias. Vamos estabelecer, a partir de agora, o sentido com que vamos empregar o termo *concepção*.

Acreditamos que os professores de Matemática formam idéias sobre a natureza da Matemática, em um primeiro momento, a partir das experiências que obtiveram ainda como alunos com o conhecimento que construíram a partir das opiniões, crenças e concepções de seus mestres. A essas idéias somam-se todas as opiniões, visões e crenças que estes professores formam sobre a Matemática durante a sua atividade docente, tanto como conteúdos como sobre o seu ensino e aprendizagem, sobre seu papel como professores, idéias essas nem sempre bem justificadas ou enraizadas. Por exemplo, um professor pode ter visões conflitantes a respeito da matemática, pois elas dependem das experiências vividas e das influências sofridas em momentos diferentes de sua vida pessoal e profissional. Mais ainda, essas visões podem entrar em choque em sua prática docente, porque em algum momento de sua vida, este professor pode ter utilizado critérios diferentes para, de acordo com Ponte, 'filtrar' suas experiências.

Acreditamos que as concepções desses professores podem influenciar as suas práticas docentes e a verificação disto só poderá ser possível através de uma reflexão sobre suas concepções e práticas em que realiza o seu ofício.

Ernest (1991) chama de *uma* filosofia da matemática, a filosofia particular de cada professor, no sentido de que não existam duas pessoas com vivências e experiências iguais. Nesta idéia de filosofia da matemática existem duas classificações que se opõem, de um lado a visão *Absolutista da matemática*, que vê essa ciência como um corpo absoluto, objetivo, determinado e isento de erros (inalterada) do conhecimento, que repousa nas fundações da lógica dedutiva. De outro lado, existe a visão *Falibilista da matemática* propondo uma diferente visão e imagem oposta da matemática, como humana, sujeita a erros e aberta a mudanças. De acordo com Ernest (2004),

> [...] As filosofias Falibilistas da matemática vê a matemática como o resultado de processos sociais. O conhecimento matemático é compreendido como sendo eternamente aberto à revisão, nos termos de suas provas e de seus conceitos. Consequentemente esta visão abarca as práticas dos matemáticos, sua história e aplicações, o lugar da matemática na cultura humana, incluindo introduções dos valores e da instrução como interesses filosóficos legítimos. A visão do falibilismo não rejeita o papel da lógica e da estrutura na matemática, apenas a noção que há uma única e fixa estrutura hierárquica, resistindo permanentemente. Em vez disso, aceita a visão de que a matemática é composta de muitas estruturas sobrepostas que, sobre o curso da história crescem, dissolvem-se e então crescem de novo.[...] (Ibid. p. 7)

Ernest escreve que o Falibilismo rejeita a imagem do Absolutismo da matemática como um corpo do conhecimento abstrato, puro e perfeito que existe em um terreno super-humano e objetivo. (Davis 1972 apud Ernest 2004). Em vez disso, o associa à prática social, às pessoas, às instituições e posição social, formas simbólicas, propostas e relações de poder.

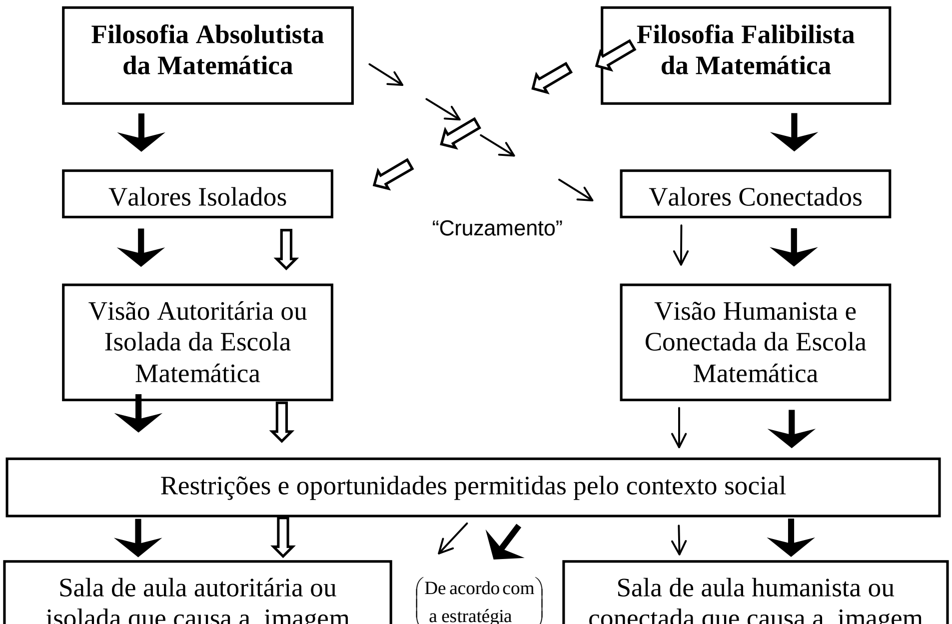
Em seu trabalho apresentado no *International Congress on Mathematical Education* (ICME) em 2004, Ernest escreve que é importante distinguir entre uma epistemologia do falibilismo (ou do absolutismo) da matemática e um relato do falibilismo (ou do absolutismo) da natureza da matemática. A primeira é uma posição filosófica estritamente definida a respeito dos fundamentos e da justificação epistemológica do conhecimento matemático. O último é um relato descritivo mais brando da matemática em um sentido mais amplo.

As duas visões, inerentes à filosofia da matemática apesar de distintas, estão ligadas entre si, ou seja, é possível que o absolutismo promova alguns aspectos da visão do falibilismo a respeito da natureza da matemática, como: as pessoas podem descobrir o conhecimento matemático por vários meios, os conceitos da matemática são construções históricas (mas suas verdades são objetivas), uma abordagem humanista ao ensino e a aprendizagem da matemática é aconselhável, etc.

Do mesmo modo, o falibilismo pode discutir sobre o conhecimento matemático como se fosse uma inesperada construção social, por mais que fique reconhecido pela comunidade matemática ele é fixo e deve ser transmitida aos estudantes desta forma. As perguntas dos matemáticos são excepcionalmente decididas como certo ou errado em referência ao corpo convencional do conhecimento.

Num modelo simplificado Ernest (2004), ilustra como um "critério de valor" de um professor, do desenvolvimento curricular ou de uma escola desempenha um papel vital na mediação entre filosofias pessoais da matemática, e a imagem da matemática, comunicada na sala de aula.

O esquema a seguir mostra como uma filosofia absolutista da matemática combinada com os valores isolados pode causar uma visão compartimentalizada da matemática escolar. Do mesmo modo, uma filosofia falibilista da matemática combinada com os valores conectados pode causar uma visão conectada da matemática escolar.



Estes dois possíveis jogos das relações são mostrados por setas verticais grossas (⬇). Elas representam os relacionamentos mais diretos entre as filosofias, valores e práticas da sala de aula de matemática.

As setas finas (↓) ilustram um compromisso profundo aos ideais do ensino progressista da matemática pode e freqüentemente coexistir com uma opinião não objetiva ou neutra da matemática, em especial entre os professores de matemática e educadores. O Falibilismo não tem nenhum monopólio sobre isto. Nos casos, como estes, os valores conectados são associados freqüentemente ao ensino e a concepção da matemática escolar.

Ernest acredita que é teoricamente possível que uma filosofia falibilista da matemática possa combinar com os valores isolados, tendo por resultado uma visão autoritária ou isolada da matemática escolar. Isto, em contato com as restrições e as oportunidades proporcionadas pelo contexto social, acarreta em uma sala de aula autoritária ou isolada que causa a imagem isolada da matemática. Isto é mostrado pelas setas duplas (⇩), e é provavelmente infreqüente, por causa da associação comum do falibilismo com visões pedagógicas progressistas na comunidade de ensino da matemática.

Finalmente, é possível que várias restrições do contexto social no ensino possam ser tão poderosas ao ponto que um professor com valores conectados e uma visão humanista da matemática da escola é forçado a utilizar determinadas estratégias que resultam em uma sala de aula autoritária ou isolada que causa a imagem isolada da matemática. Esta situação pode ser observada no esquema pelas setas, grossa e fina, que podem se desviar à esquerda, seguidas das restrições e oportunidade permitida pelo contexto social.

De acordo com Ernest (2004), alguns trabalhos ligados à filosofia da educação da matemática visam explorar a ligação entre as filosofias da matemática implícitas nas crenças e concepções dos professores, no currículo de matemática, nos sistemas e práticas da avaliação matemática. É neste contexto que se insere esta pesquisa, uma vez nessa questão principal é obter indícios de quais concepções professores de Cálculo exteriorizam no momento em que avaliam a produção de um aluno.

Acreditamos que a teoria sobre a filosofia falibilista e absolutista da matemática, possa nos guiar a uma compreensão maior das concepções exteriorizadas no discurso dos professores, no momento das entrevistas.

CAPÍTULO 3:

METODOLOGIA

Visando investigar as crenças e concepções de professores de Cálculo Diferencial e Integral frente a produções de alunos, realizamos um estudo de caso, que segundo Bogdan & Biklen (1994) é um método utilizado em pesquisa qualitativa que se destina à observação detalhada de um contexto, um indivíduo ou um pequeno grupo de pessoas. Assim, não temos a ambição de encontrar uma resposta universal ou geral para essas concepções, mas investigar a dinâmica entre um grupo de professores, no sentido de obter indícios de suas crenças e concepções

Para a investigação da dinâmica estabelecida pelo grupo de professores, elaboramos um questionário contendo onze itens relacionados ao Conceito de Integral de função de uma variável, (denominado de Q1a, Q1b, Q2, Q3,..., Q9, Q10.) e aplicamos a alunos de duas universidades particulares de São Paulo que cursavam (ou já cursaram) a disciplina de Cálculo nos cursos de Engenharia, ciência da Computação e Administração. A seguir apresentamos as produções dos estudantes aos professores para que estes as avaliassem.

O estudo foi realizado em dois momentos. O primeiro chamado de “Estudo Exploratório” foi estruturado em duas etapas, a primeira destinada à escolha das produções a ser apresentadas a um único professor entrevistado. Nesta etapa, elaboramos, analisamos e aplicamos o questionário contendo 11 questões a um grupo de 28 alunos. Na segunda etapa, apresentamos duas produções de cada questão ao professor participante. O objetivo desse “Estudo Exploratório” foi testar a pertinência das questões com vistas à elaboração do questionário final.

No segundo momento é apresentado o Experimento, fase final da pesquisa em que é realizada a seleção das produções integrantes do portfólio referente ao questionário já adaptado e aplicado novamente a outros trinta alunos. Em seguida os protocolos dos alunos foram analisados e categorizados à luz do referencial teórico de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* de Tall e Vinner (1981), Vinner (1997) e Tall e Rasslan (2002).

Selecionamos em média três protocolos (produzidos pelos alunos) de cada questão e apresentamos a um grupo de três professores de uma universidade particular de São Paulo, que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharia Civil e de Produção Mecânica e Ciência da Computação.

A escolha por professores de Cálculo de três cursos diferentes se deu, por acreditarmos que essa pluralidade possa enriquecer a tentativa de respostas da questão da pesquisa: *Que concepções o professor de Cálculo exterioriza sobre o conceito de integral, frente à produção de um aluno?* Dessa forma, iniciamos um debate entre estes professores, por meio de entrevistas em grupo, propiciando "uma troca de pontos de vistas, idéias e experiências, embora expressas emocionalmente e sem lógica, mas sem privilegiar indivíduos particulares ou posições" Gaskell, G. (2002).

3.1. Entrevistas em Grupo

As entrevistas foram realizadas com o grupo de professores de Cálculo, em dois encontros, que julgamos suficientes para discutirmos os diferentes aspectos do conceito de integral.

Apoiamo-nos nas idéias de Bogdan & Biklen (1994) e de Gaskell, G (2002) sobre a metodologia de *entrevistas em grupo* e *grupo focal*, respectivamente.

Segundo Bogdan & Binklen, as entrevistas em grupos podem ser úteis para inserir o entrevistador no 'universo' dos sujeitos. Além disso, várias pessoas juntas são encorajadas a falarem sobre um tema de interesse ou proposto, em que geralmente, se revela uma boa forma de obter novas idéias sobre temas a discutir em entrevistas individuais ou então tende a estimular os sujeitos a discutir entre eles, gerando idéias que podem ser exploradas mais tarde.

De acordo com Gaskel (2002), o “objetivo do grupo focal é estimular os participantes a falar e reagir àquilo que outras pessoas no grupo dizem. É uma interação social mais autêntica do que a entrevista em profundidade” ou individual, mostrando-se como um ambiente mais natural e holístico em que os participantes levam em consideração os pontos de vista dos outros na formulação de suas respostas e comentam suas próprias experiências e as dos outros.

Percebemos que foram necessárias algumas habilidades para conduzir a entrevista em grupo, não muito diferente daquelas exigidas para a entrevista individual. Tivemos deve ser flexível, objetivo, empático e persuasivo, além de ser um bom ouvinte, pois não queria ‘cortar’ ou atrapalhar o raciocínio dos professores.

Tradicionalmente este tipo de entrevista é realizado por meio de uma conversa aparentemente informal com os participantes em um tom de cordialidade. O entrevistador ‘quebra o gelo’ com questões comuns de seu dia a dia, seguindo gradualmente com perguntas mais específicas.

As entrevistas em grupo apresentam algumas vantagens em relação às individuais: são relativamente mais flexíveis de conduzir e produzem freqüentemente dados mais ricos, pois são cumulativos e mais elaborados, podendo estimular o debate entre os participantes. No entanto, devemos estar atentos para não deixar com que um dos participantes ‘domine’ o grupo, tentando incentivar todo o grupo a participar e exporem suas concepções, de modo a assegurar o balanceamento e gerenciamento do grupo.

Gaskell (2002) apresenta uma comparação, sintetizada, apontando vantagens e limitações entre entrevistas grupais e individuais que reproduzimos a seguir.

Entrevista individual	***Entrevista grupal***
Quando o objetivo da pesquisa é:	
Explorar em profundidade o mundo da vida do indivíduo. Fazer estudos de caso com entrevistas repetidas no tempo. Testar um instrumento, ou questionário (entrevista cognitiva).	Orientar o pesquisador para um campo de investigação e para linguagem local. Explorar o espectro de atitudes, opiniões e comportamentos. Observar os processos de consenso e divergência. Adicionar detalhes contextuais a achados quantitativos.
Quando o tópico se refere a:	
Experiências individuais detalhadas,	Assuntos de interesse público a

escolhas e biografias pessoais. Assuntos de sensibilidade particular que podem provocar ansiedade.	preocupação comum, por exemplo, política, mídia, comportamento de consumidores, lazer, novas tecnologias. Assuntos e questões de natureza relativamente não familiar, ou hipotética.
Quando os entrevistados são:	
Difíceis de recrutar, por exemplo, pessoas de idade, mães com filhos pequenos, pessoas doentes. Entrevistados da elite ou de alto *status.*	Não pertencentes a origens tão diversas que possam inibir a participação na discussão do tópico.

Tabela 1: Uma síntese da indicação de entrevistas individuais e grupais (Gaskell. 2002, p. 78).

Com as análises das entrevistas, tivemos a oportunidade de observar o momento em que o professor interage com a produção dos alunos, prática comum de sua atividade docente, de modo a obter indícios de suas práticas de ensino. Ponte (1992, p.11), em seu levantamento sobre pesquisas que estudam as concepções de professores, afirma que grande parte dos estudos analisados por ele procura identificar as concepções por meio de entrevistas, só então partem para as observações das práticas, isso quando há observação, obtendo, dessa forma, concepções que geralmente não têm relação com a prática pedagógica.

Optamos por realizar um estudo em que pudéssemos mesclar tanto as entrevistas (em grupo) como a observação de suas práticas educativas, por meio da observação desses profissionais no momento da análise da produção do aluno.

As entrevistas se deram em dois encontros. Na primeira sessão, é apresentada aos professores uma série de produções referentes às questões Q1a, Q1b, Q2, Q3, Q4 e Q5. As três primeiras contêm questões relacionadas às concepções dos alunos, que envolvem o conceito de Integral. As duas seguintes referem-se ao cálculo da Integral de uma função com uma variável, com ou sem o auxílio da representação gráfica dessa função. A última questão apresentada (Q5) é referente à técnica de integração.

Produções referentes às questões Q6, Q7 e Q8, Q9 e Q10 são apresentados na segunda sessão de entrevistas, com a intenção de estimular entre os participantes, a discussão a respeito das técnicas e métodos de integração e aplicações do conceito de Integral.

Para evitarmos a perda de algum comentário durante essas sessões, as entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas posteriormente.

De nossas leituras depreendemos que, normalmente em entrevistas devemos tomar cuidados para que não tenhamos situações inesperadas. Por exemplo, se o entrevistado desviar-se do assunto por um motivo qualquer, acreditamos que seja uma falta de tato interrompê-lo e é algo que pode ser evitado, simplesmente esperando que ele termine seu raciocínio. Algumas pesquisas mostram que é mais útil estimulá-lo positivamente, buscando traze-lo aos assuntos abordados inicialmente, do que interrompê-lo causando certos desconfortos.

Gaskell (2002) indica que à medida que a entrevista avança, o entrevistador poderá trocar a perspectiva abordada em relação ao grupo, do geral para o particular ou vice versa, com perguntas simples, por exemplo, se uma afirmação é feita por um dos entrevistados podemos pedir um exemplo dela, e endereçar aos outros participantes, perguntas como: “Pode trazer outro fato semelhante ao apontado?” “Na sua experiência, isso é típico dos alunos?” Ou “Poderia dar um exemplo específico disso?”.

Realizar algumas proposições positivas é uma forma de verificar o raciocínio do professor. Exemplos:

Pode dizer-me mais sobre...? O que vem a mente quando você pensa em... ? Por que pensa que ocorreu isso? O que acha que o aluno deve ter pensado?

Se o professor disser algo que pensamos que seja um exagero ou necessite de um aprofundamento ou que talvez ele mesmo pudesse comentar mais, este fato requer outro tipo de sondagem. Podemos simplesmente dizer: Como assim,...? Você está dizendo que... ? Na verdade crê que... ? E reformulamos a afirmação.

Ao término das sessões pergunta-se aos professores se estariam dispostos a reverem e alterarem se necessário, suas afirmações registradas em nossa transcrição. De acordo nossas leituras, verificamos que encontrar ou revelar resultados significativos é muitas vezes complicado, inclusive quando temos as respostas gravadas. Às vezes temos que escutar várias vezes ao áudio gravado, tentando entender os significados. Uma vez que tenhamos compreendido, poderemos responder nossa questão de pesquisa.

3.2. Caracterização dos sujeitos de pesquisa.

Os sujeitos desta pesquisa são professores de uma Instituição Particular de Ensino Superior do Estado de São Paulo, que ministram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Ciência da Computação, Engenharia Civil e de Produção Mecânica e de Licenciatura em Matemática.

Na primeira parte do estudo, que denominamos de fase exploratória, trabalhamos com a participação de um único professor de uma Instituição de Ensino particular de São Paulo, com a intenção de promover melhoria e adaptar as questões e o roteiro de entrevista. Tivemos a oportunidade de conhecer um pouco mais sobre a carreira acadêmica e profissional a partir das informações apresentadas por ele ao preencher o questionário que consta no anexo 2.

O professor entrevistado é formado em Licenciatura em Matemática e também bacharelado em Engenharia Civil, com especialização em Educação Matemática. Leciona há cinco anos em uma Instituição de Ensino Superior da rede particular, não possuindo experiência no Ensino Básico. No semestre em que foi entrevistado, ministrava suas aulas em regime de trabalho parcial de 20 horas/aulas semanais, distribuídas entre as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral III, Estáticas dos Sólidos e Fenômenos de Transportes.

Em termos de publicações, não temos informações, pois o questionário não contemplava tal quesito. Corrigimos essa falha no questionário apresentado aos professores do estudo final.

Na segunda parte do estudo realizamos as entrevistas com um grupo de três professores, com idades variando entre 41 e 57 anos, estando a maioria na faixa dos 40 anos, sendo todos são do sexo masculino.

Nesta fase, para garantir a preservação das identidades dos entrevistados, nomeamos os professores com letras gregas, tais como: Alfa, Beta e Gama.

De posse do questionário de perfil acadêmico e profissional respondido pelos professores, pudemos verificar que, em termos de formação acadêmica, Beta e Gama possuem curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática; enquanto Alfa tem apenas Licenciatura em Ciência Matemática. Todos têm cursos de Pós-Graduação: sendo que Beta e Gama têm Especialização em Educação Matemática, e Alfa em Engenharia de Controle de Qualidade. Dois dos professores entrevistados estão cursando mestrado, Beta está cursando Mestrado em Engenharia Mecânica, na área de conversão de energia enquanto que Alfa cursa mestrado em Educação Matemática.

Os professores possuem ampla experiência docente: lecionam há mais de 15 anos (o tempo de magistério varia entre 15 anos e 36 anos), sendo que todos têm experiências tanto do Ensino Básico como no Superior. Atualmente Gama está lecionando apenas no Ensino Superior. Os que lecionam no Ensino Fundamental ou Médio, possuem experiências em escolas públicas e particulares. Quanto ao Ensino Superior, todos trabalham na mesma instituição particular de ensino.

O tempo de trabalho dos professores na Instituição varia de 2 e 20 anos. Quanto ao regime de trabalho, todos são horistas, trabalhando em regime parcial. O número de horas/aula semanais, ministradas no semestre em que foram entrevistados é em média de 20 horas por semana.

As disciplinas que lecionam são Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, para cursos de Matemática, Engenharia, Ciência da Computação e Administração.

Em termos de publicações, nenhum dos professores apresenta muitas produções. O professor Alfa possui um artigo publicado, e duas comunicações orais em congresso. Beta possui três oficinas realizadas e duas palestras apresentadas em Semana da Matemática na Instituição em que leciona. O professor Gama não tem nenhuma publicação.

3.3. O questionário.

Chamaremos de produções dos alunos, as respostas dadas a um questionário elaborado previamente. Estas produções podem provocar discussões entre os professores participantes, estimulando-os a exteriorizarem suas crenças e concepções, mostrando afinal qual é a sua filosofia particular relativa a matemática. Para a elaboração do questionário, adaptamos alguns problemas apresentados nos *provões*[3] do curso de matemática, questões utilizadas em outras pesquisas, questões de livros didáticos ou selecionadas nos processos de avaliação de disciplina de algumas universidades.

Aplicamos o questionário a alunos dos cursos de Engenharia, Matemática e Ciências da Computação de duas universidades particulares de São Paulo. Esses estudantes já cursaram a disciplina de Cálculo e não são alunos dos professores entrevistados na pesquisa. Acreditamos que se fossem, poderiam responder o questionário fornecendo uma amostra viciada, ou seja, suas produções poderiam não mostrar nenhuma situação nova, para provocar o discurso dos professores. Isto se deve ao fato de que estes alunos responderiam aquilo e da forma como o professor espera que ele responda.

As produções analisadas pelos professores participantes foram selecionadas com o auxílio do referencial teórico: Conceito Imagem e Conceito Definição de Tall & Vinner (1981).

Na tentativa de detalhar os possíveis indícios da prática do professor, realizamos uma análise prévia das questões que compõem este questionário, levando em consideração, em um primeiro momento, as possíveis respostas dos alunos, pois, conhecendo melhor os conteúdos das questões propostas, pudemos

---

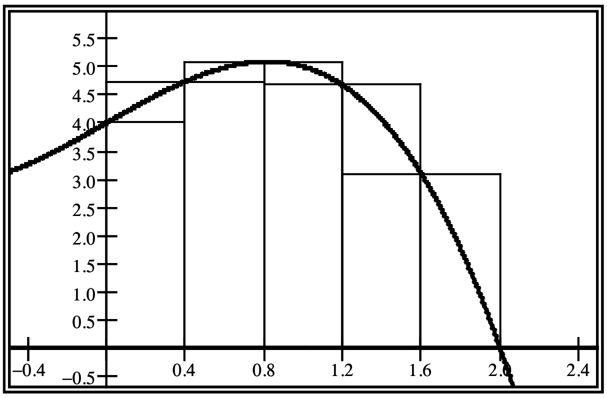
[3] Antigo Exame Nacional de Cursos elaborado pelo Ministério da Educação, hoje substituído pela ENADE - Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes, que é parte integrante do SINAES - Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior.

elaborar um roteiro de entrevista mais pormenorizado, tentando prever situações e possibilidades que possam surgir nas sessões de entrevistas.

Os encontros se deram em duas sessões. No primeiro apresentamos aos professores os protocolos das questões Q1a, Q1b, Q2, Q3, Q4 e Q5. As três primeiras visam, de uma maneira geral, tratar das concepções que envolvem o conceito de Integral. A primeira e a segunda são semelhantes, no sentido que se tratam da mesma região plana que se deseja determinar a área, sendo diferenciadas apenas por meio da visualização dos retângulos inferiores e superiores ao gráfico da função, na questão Q1a. Pressupomos que os alunos mobilizassem conhecimentos e raciocínios diferenciados ao produzirem as respostas destas questões, tendo em vista que eles tiveram contato apenas com uma das questões, ou seja, o aluno que respondeu a questão Q1a não recebeu a Q1b para responder.

Q1a

Observe o gráfico ao lado e determine a área da região limitada pelo eixo *x*, o gráfico da função $f(x) = -x^3 + 2x + 4$, e as retas $x = 0$ e $x = 2$.



Ao apresentar aos professores as produções dos alunos referentes a essa questão, queremos verificar o que eles analisam quando o aluno resolveu uma tarefa em que pode associar a área da região limitada pelo do gráfico de uma função com a integral de *f*, em um intervalo dado. Quanto ao aluno, nossa expectativa é que ele a resolva utilizando diferentes procedimentos, como por exemplo:

- Calcule o valor numérico da área total dos retângulos com alturas inferiores e superiores ao gráfico *f*, em seguida calcule a área total dos retângulos inferiores e apresente a média;

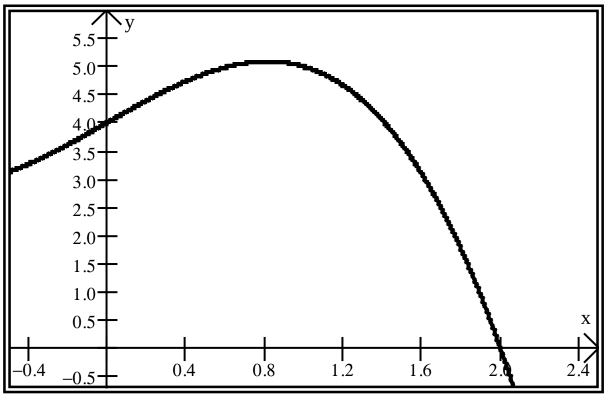
- Hachure ou não a área da região plana abaixo do gráfico da função e calcule a integral definida no intervalo indicado e associando dessa forma, a área da região plana abaixo do gráfico com o cálculo da integral;

- Não hachure a área da região abaixo do gráfico, calculando somente o valor numérico da função para as abscissas *x*=0 e *x*=2, respectivamente.

- Não consiga interpretar a questão, deixando-a sem resposta. Neste caso, desconsideraremos o protocolo no sentido da apresentação deste para os professores participantes.

Q1b.

Observe o gráfico ao lado e determine a área da região limitada pelo o eixo *x*, o gráfico da função $f(x) = -x^3 + 2x + 4$, e as retas $x = 0$ e $x = 2$.



O objetivo desta questão é similar ao da questão Q1a, isto é, verificar o que o professor analisa quando o aluno responde a uma questão em que pode associar a área da região abaixo do gráfico de uma função com a integral de *f*, em um intervalo dado. No entanto, o gráfico apresentado, não fornece ao aluno a representação dos retângulos inferiores e superiores ao gráfico como os representados na questão Q1a. Prevemos que o aluno que responder a esta questão possa resolvê-la de diferentes formas. Vejamos algumas:

- Estabelecer algumas formas geométricas (retângulos, quadrados, trapézios,...) na região abaixo do gráfico de *f*, e tomar a soma dos valores das áreas desses polígonos como sendo o valor aproximado da área da região;

- Hachurar ou não a área da região plana abaixo do gráfico da função e calcular a integral de *f*, indicando ou não o resultado como unidade de área, apresentando indícios de que associou o cálculo da área da região abaixo do gráfico com a integral;

- Hachurar ou não a área da região plana abaixo do gráfico e calcular somente o valor numérico da função, ou seja, apresentar apenas os valores de *f*(0) e *f*(2);

Q2.

Determine uma função $y = y(x)$, definida em R, tal que:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$$

O objetivo desta tarefa é verificar o que o professor considera, quando o aluno responde a uma questão em que pode associar a integral indefinida com a derivada de uma função *y*(*x*). Quanto ao que se refere à produção do aluno em relação a esta questão, prevemos que ele possa responder de inúmeras formas, dentre elas:

- Calcular a integral indefinida de $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$, identificando a primitiva de $\frac{dy}{dx}$, atribuindo ou não um valor numérico para a constante *c*;

- Calcular a integral indefinida de *y*(*x*) com a primitiva de $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$, porém calculando-a forma incorreta;

- Não identificar a integral indefinida de $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$ como sendo a primitiva de $\frac{dy}{dx}$, calculando a derivada dessa sentença;

Apresentamos a seguir, a pré-análise das questões Q3, Q4 e Q5, as duas primeiras referentes ao cálculo da área da região plana limitada pelo gráfico da função e o eixo *x*, num intervalo indicado, enquanto que a última é referente a regras de integração. Na Q3 é dada somente a representação algébrica da função, o que pode provocar dificuldades na visualização da superfície. Na questão seguinte é apresentado o gráfico da função.

Q3.

Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, pelo eixo x e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$

Com esta questão visamos verificar qual a reação do professor quando um aluno responde uma questão em que pode associar a área da região plana limitada pelo o gráfico de uma função e o eixo *x*, com a integral, região esta localizada, parte abaixo e parte acima do eixo *x*. Neste caso a função é dada pela sua expressão algébrica, o que pode exigir do aluno a mobilização de outros conhecimentos para realizar a representação gráfica. Dentre as possibilidades de resolução desta questão, prevemos que os estudantes podem:

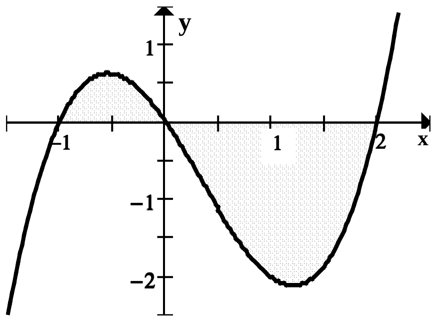
- Esboçar o gráfico de *f*, identificando a região limitada, abaixo e acima do eixo *x*, associando sua área à integral da função, calculando-a nos intervalos de [-π,0] e [0, π], somando o módulo dos resultados;
- Apresentar indícios de que visualizou o gráfico de *f* mentalmente, porém não o esboça, pois ele divide o intervalo de [-π,π] em [-π,0] e [0, π], calculando a

integral da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ nesses intervalos, no entanto, somar o módulo dos resultados ou somar os resultados na forma com que foram obtidos;

- Esboçar ou não o gráfico de *f* , mostrando que identificou a área da região plana limitada pelo gráfico da função com a integral de *f* , entretanto, calculá-la no intervalo de [-π , π], obtendo zero como resposta;

Q4.

Determine a área da região limitada entre o eixo *x* e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $(-1 \le x \le 2)$



Esta questão tem o mesmo objetivo da questão Q3, sendo que aqui é dada a representação gráfica da função, em que a região plana limitada é apresentada sombreada. As expectativas de resolução são semelhantes as da Q3, porém, agora contando com as facilidades representadas pelo fornecimento do gráfico.

A questão Q5 em que se pede para calcular a integral indefinida $\int (x^3 + 3x + 1) dx$, visa identificar o que o professor espera da resposta de um aluno quanto a regras de integração. Dentre os possíveis caminhos que um aluno tem para resolver esta questão, acreditamos que ele possa optar por:

- Calcular a integral indefinida de *f* indicando a utilização da propriedade de “integral da soma de funções”, apresentando ou não a constante *c*;

- Calcular a integral indefinida da função sem indicar a utilização dessa propriedade, apresentando a constante *c*;

- Calcular a integral indefinida de *f* indicando ou não a utilização da propriedade aditiva da integral, no entanto, comete algum de cálculo;

No segundo encontro, os professores participantes analisaram os protocolos das questões Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10. As três primeiras são referentes a técnica de integração.

Na questão Q6 é pedido ao aluno que calcule $\int x^3(x^4-1)dx$, e visa investigar o que o professor espera da resposta de um aluno quando este necessita utilizar uma técnica de integração, expondo os mesmos conhecimentos que dispõe. É com essa intenção que propomos a resolução da integral indefinida de uma função, em que pode ou não utilizar a técnica de *substituição*. Das possibilidades de resolução, supomos que os alunos possam resolvê-la:

- Calculando a integral indefinida, utilizando a técnica de substituição pondo $u = x^4 - 1$, obtendo $du = 4x^3dx$, e calculando a integral;

- Efetuando a multiplicação dos polinômios, calculando em seguida a integral, apresentando ou não indícios da utilização da propriedade aditiva;

- Efetuando a integração de cada um dos fatores, ou seja, calcular a $\int x^3dx$ e a $\int (x^4-1)dx$, apresentando erroneamente o produto dessas integrais como solução;

Ademais, prevemos para as mesmas situações a possibilidade de que o aluno represente ou não a constante *c*, ou ainda que atribua um valor numérico para ela.

Já nas questões Q7 e Q8, objetivamos verificar como o professor analisa a produção de um aluno que resolve uma tarefa que necessite da utilização de técnicas de integração específicas: substituição e integração por partes, respectivamente.

Ao resolver a questão Q7, em que se pede o cálculo da integral $\int\left(\frac{4x^3-6x^2}{x^4-2x^3+1}\right)dx$, o aluno pode produzir uma resposta desenvolvendo sua argumentação segundo um dos caminhos:

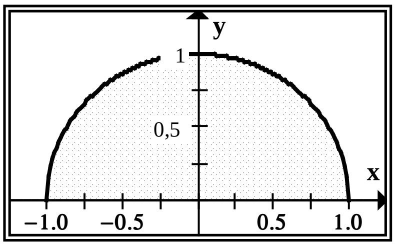
- Utilizar a técnica de substituição, apresentando indicações de ter tomado, $u = x^4 - 2x^3 + 1$, e determinando $du = \left(4x^3 - 6x^2\right)dx$, em seguida calculando a $\int \frac{du}{u}$;
- Calcular a integral indefinida de *f* apresentando indícios da utilização da técnica de substituição, no entanto, comete algum erro de cálculo em sua resolução;
- Resolver a questão mostrando diretamente a resposta, sem mencionar ou mostrar qualquer passagem;
- Efetuar a integração de cada um dos termos da fração, ou seja, calcular a $\int\left(4x^3 - 6x^2\right)dx$ e também a $\int\left(x^4 - 2x^3 + 1\right)dx$, apresentando o quociente dessas integrais como solução;

Ao pedir que o aluno calcule a integral $\int x \cos x \, dx$ na questão Q8, pretendíamos verificar como o professor analisa essa produção, quando é apresentada uma resposta obtida:

- Utilizando a técnica de integração por partes, expressando o uso da fórmula: $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$;
- Efetuando a integração de cada um dos fatores, ou seja, calculando a $\int x\,dx$ e $\int cos\, x\,dx$, apresentando a resposta como sendo o produto dos resultados obtidos;
- Resolvendo a questão mostrando diretamente a resposta, sem indicar ou mostrar qualquer passagem.

As questões Q9 e Q10 são relativas a aplicações de Integral. A primeira, foi selecionada com a expectativa de que os estudantes determinassem o valor da área da região localizada entre o gráfico da função $y=\sqrt{1-x^2}$ e o eixo *x* no o intervalo $\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$. Em sua resolução podem ser utilizadas algumas técnicas como a determinação das áreas de figuras internas à região (tais como, quadriláteros ou triângulos) ou o uso da técnica de integração por substituição trigonométrica. Enquanto, que com a última esperávamos que os alunos interpretassem o enunciado e mobilizem conhecimentos em Física associando-os aos de Cálculo.

Q9



O aluno de um curso de Exatas nem sempre se dá conta da relação entre o curso da Universidade e os conhecimentos que utilizará no dia a dia. A Integral de Riemann, por exemplo, esclarece a definição de área. Tanto o cálculo da integral pode servir para o cálculo de áreas quanto vice-versa. Observe o gráfico de $y=\sqrt{1-x^2}$ para $(0 \le x \le 1)$, representado ao lado, e calcule o valor da integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ por meio de sua interpretação como área no plano.

Na questão Q9, transcrita acima, temos como objetivo verificar quais concepções os professores exteriorizam quando alguns estudantes a resolvem utilizando procedimentos como os que seguem:

- O aluno, calcula a integral associando-a à área da região abaixo do gráfico, sombreando-a ou apresentando a "fórmula" $|A| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = |f(b) - f(a)|$, utilizando a técnica de substituição trigonométrica;
- Somente calcula a integral indefinida da função, utilizando a técnica de substituição trigonométrica;

- Os estudantes não determina a integral, calcula apenas o valor numérico de *f* para as abscissas $x = 0$ e $x = 1$,sem apresentar qualquer hachura no gráfico ou indícios da associação da área da região abaixo do gráfico com a Integral;

- Calcular a área de um quarto de círculo de raio 1;

- Determina figuras, como triângulo, retângulos, quadrados e trapézios, cujas áreas possam ser calculadas, e aproximar o valor achado ao da área da região pretendida;

Reproduzimos a seguir a última questão.

Q10.

Durante a concretagem de uma laje num canteiro de obras, a bomba hidráulica que bombeava o concreto a partir do solo até a altura (*h*) de 20 metros quebrou, dessa forma a saída para não parar o serviço, foi utilizar o guindaste disponível na obra, que eleva verticalmente uma carga de concreto, içando-a até a laje. Sabendo que essa carga vaza a uma taxa constate, determine o trabalho produzido pelo guindaste, considerando que este trabalho é realizado por uma força de $F(h) = 1280 - 5h$ (N).

Temos o objetivo de verificar de que forma um professor analisa ou corrige a produção de um aluno que apresenta, por exemplo, resoluções:

- Mobilizando alguns conceitos de Física relacionando-os à Integral, em seguida calcula a integral definida da função força, para o intervalo [0,20];

- Calculando a integral indefinida de *f* indicando a utilização da propriedade de “integral da soma de funções”, sem apresentar a resposta numérica;

- Não interpretando o Trabalho realizado como a integral da função força e calcular o valor numérico da função força para a altura de 20 metros, ou apenas substituir a fórmula específica da função força na integral definida.

3.4. Categorização das produções.

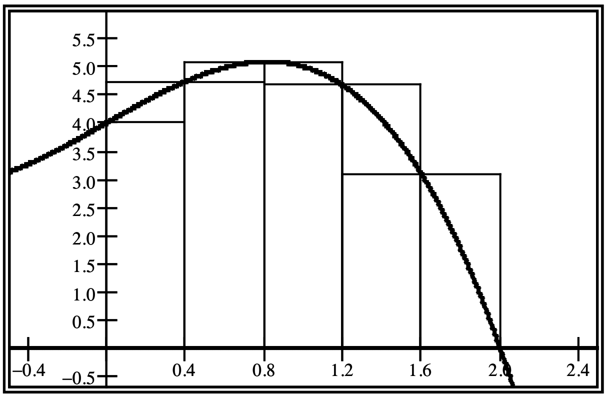
Após a formulação, adaptação e reformulação do questionário foi possível aplicá-lo a trinta alunos de duas instituições de ensino superior de São Paulo. De posse dessas produções, as analisamos a luz da teoria de Conceito imagem e Conceito Definição de Tall e Vinner (1981), Vinner (1997) e Tall e Rasslan (2002).

Realizamos uma categorização das produções dos estudantes, segundo aspectos do conceito imagem e o conceito definição, relativos à Integral, de forma que possamos selecionar protocolos que estimulem os professores participantes a exteriorizarem suas concepções.

Salientamos que nas duas primeiras questões, Q1a e Q1b, dezesseis alunos responderam a questão Q1a e os outros quatorze responderam a questão Q1b, ou seja, os estudantes resolveram apenas uma dessas questões. Elas diferenciam-se apenas pela apresentação de retângulos superiores e inferiores ao gráfico da função. A seguir é apresentada a categorização das produções dos alunos, questão a questão.

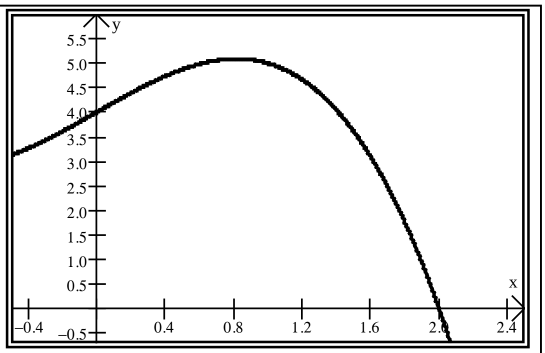
Questão 1a.

Observe o gráfico ao lado e determine a área da região limitada pelo eixo *x*, o gráfico da função $f(x) = -x^3 + 2x + 4$, e as retas $x = 0$ e $x = 2$.



Questão 1b

Observe o gráfico ao lado e determine a área da região limitada pelo o eixo *x*, o gráfico da função $f(x) = -x^3 + 2x + 4$, e as retas $x = 0$ e $x = 2$.



Categoria I : A área da região entre o gráfico da função e o eixo *x* em [0, 2] é a integral.

Categoria I_a: Como acima, com a apresentação correta da resolução da integral, sugerindo a mobilização do conceito definição que constitui a interpretação da área de uma região plana como a integral definida em um dado intervalo.

Exemplo: $A = \int_0^2 \left(-x^3 + 2x + 4\right)dx = -\frac{x^4}{4} + x^2 + 4x\Big|_0^2 = -4 + 4 + 8 = 8ua$

Categoria I_b : Como acima, com a apresentação falha da resolução da integral. Interpretamos tal fato como a ocorrência de um conflito na mobilização do conceito imagem evocado e do conceito definição, já que os estudantes apresentam elementos conflitantes nos procedimentos de cálculo.

Exemplo:

$$A=\int_0^2\left(-x^3+2x+4\right)dx=\int_0^2 x^3+2\int_0^2 x+\int\ 4=-\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2+\left.\frac{2x^2}{2}\right|_0^2+4x\Big|_0^2=-4+4-8=-8ua$$

Categoria II[4] : Respostas sem indícios de interpretação da área como resultado da integral definida, ou seja, a integral é considerada apenas como um procedimento do cálculo. As produções desta categoria apresentam indícios da mobilização do conceito imagem evocado.

Categoria II_a: Como acima, com cálculo correto da integral definida.

Exemplo: $\int_0^2\left(-x^3+2x+4\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^2+4x\right]_0^2=8-0=8\text{ ua}$

Categoria II_b: Como acima, mas com cálculo errado. Uso incorreto dos procedimentos de cálculo.

Exemplo: $\int_0^2\left(-x^3+2x+4\right)dx=-\left.\frac{x^4}{4}+x^2+4x\right|_0^2=\frac{16}{4}+4+8=16$

Categoria III : Resoluções erradas, na maioria baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento. As produções desta categoria sugerem que os estudantes não mobilizam o conceito imagem da área de uma região plana como sendo a integral de função de uma variável num dado intervalo.

---

[4] Temos a consciência de que um aluno que resolva a questão dessa maneira pode ter interpretado a integral de *f* como a área de uma região limitada, no entanto, entendemos, neste momento, que essa resolução pode indicar apenas a mecanização, pois em nenhum momento o aluno indicou a unidade de área.

Exemplo. $f(x) = -(0)^3 + 2(0) + 4 - (2)^3 + 2.2 + 4 = 4 - 12 + 4 + 4 = 0$. A superfície apresentada acima do eixo x, assim o sinal da integral é positivo e não nulo.

Categoria IV : Nenhuma resposta.

Resumo das categorias, relativas a $Q1_a$:

Categoria	I_b	II_a	II_b	III	IV	Total
Distribuição	2	6	2	5	1	16

Tabela 2: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 1_a (N=16)

Resumo das categorias, relativas a $Q1_b$:

Categoria	I_a	I_b	II_a	II_b	III	IV	Total
Distribuição	1	2	4	5	1	1	14

Tabela 3: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 1_b (N=14)

Questão 2.

Determine uma função $y = y(x)$, definida em R, tal que:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$$

Categoria I : Cálculo da Integral Indefinida como a primitiva de $\frac{dy}{dx}$. As respostas das categorias I_a e I_b sugerem a mobilização do conceito definição, que inclui a primitiva de uma função como a integral indefinida. Já na categoria I_c estão produções que indicam conflitos na utilização do conceito imagem e conceito definição mobilizados.

Categoria I_a: Resposta com indicação da constante arbitrária c, sem atribuir um valor a ela.

Exemplo: $\int \left(x^3 - x + 1\right) dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + x + c$.

Categoria I_b: Resposta com indicação da constante c atribuindo um valor a ela.

Exemplo: $\int \left(x^3 - x + 1\right) dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + x + 3$

Categoria I_c: Resposta incorreta, é apresentada uma resolução com erro na regra de integração.

Exemplo: $\int \left(x^3 - x + 1\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 1$

Categoria II : Uso incorreto do conceito da integração como operação inversa da derivação. Os estudantes efetuam o cálculo da derivada de $\frac{dy}{dx}$, indicando que existe falhas no conceito imagem evocado.

Exemplo: $\int \left(x^3 - x + 1\right) dx = 3x^2 - 1$

Categoria III: Nenhuma resposta.

Resumo das categorias.

Categoria	I_a	I_b	I_c	II	III
Distribuição	4	3	2	17	4

Tabela 4: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 2 (N=30)

Questão 3.

Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, pelo eixo x e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$

Categoria I : A área é a integral de *f* no intervalo $[-\pi, \pi]$. Os estudantes não apresentam indícios da interpretação do gráfico da função, o que sugere a mobilização do conceito imagem evocado sem atingir um conceito definição que envolve a integral como a área da superfície da região limitada pelo seu gráfico.

Exemplo: $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos(-\pi)) = 0$

Categoria II : As respostas produzidas pelos estudantes sugerem a mobilização tanto do conceito imagem como do conceito definição, no que se refere ao cálculo da integral como a área da região limitada pelo gráfico da função, quando são apresentados indícios do esboço de seu gráfico.

Exemplo: $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 + 1 = 2ua$

Categoria III: A área é a integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Em momento algum é referenciado o sinal da função em $[-\pi, \pi]$, indicando falha no conceito imagem evocado.

Exemplo: $\int_{-\pi}^{\pi} sen\, xdx = -\, cos\, x\Big|_{-\pi}^{\pi} = (-\, cos\, \pi) - (-\, cos(-\pi)) = 1 - 1 = 0$

Categoria IV : Respostas na modalidade pseudoconceitual ou aparentemente sem sentido. Sugerindo que os estudantes que responderam de acordo com esta categoria não mobilizam nenhum conceito imagem sobre a noção.

Exemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \pi = 0$

Categoria V : Sem Resposta.

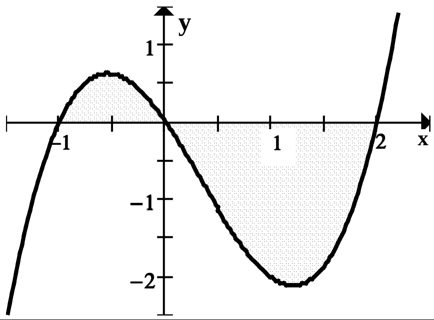
Resumo das categorias.

Categoria	I	II	III	IV	V
Distribuição	3	5	11	3	8

Tabela 5: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 3 (N=30)

Questão 4.

Determine a área da região limitada entre o eixo *x* e o gráfico de $f(x)=x^3-x^2-2x$, $(-1\le x\le 2)$



Categoria I : Resposta visual: os estudantes visualizam a região do gráfico da função e calcula a área da região abaixo e da região área acima do eixo *x* separadamente. No entanto, apresenta erro de cálculo aritmético. Entendemos que as respostas produzidas de acordo com esta categoria, apresentam a mobilização tanto do conceito imagem como do conceito definição referente ao cálculo da área da região sombreada.

Exemplo:

$$A=\left|\int_{-1}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx\right|=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{5}{12}-\frac{8}{3}=-\frac{37}{12}$$

Categoria II : Resposta sem a interpretação do gráfico, a área é interpretada como a integral definida. Os estudantes não separam os intervalos de integração, o que sugere que mobilizam o conceito definição, que inclui a área da região em questão como sendo a integral definida em $[-1,2]$.

Exemplo: $\int_{-1}^{2}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{27}{12}u.a.$

Categoria III : Resposta baseadas na modalidade pseudoconceitual ou aparentemente sem sentido, sugerindo que os estudantes não mobilizaram nenhum conceito imagem ou conceito definição sobre o tema.

Exemplo: $f(x) = x^3 - x^2 - 2x = 3x^2 - 2x - 2$

Categoria IV : Não responderam.

Categoria	I	II	III	IV
Distribuição	7	17	4	2

Tabela 6: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 4 (N=30)

Questão 5.

Calcule a integral $\int\left(x^3 + 3x + 1\right)dx$.

Categoria I : Agrupamos nesta categoria as produções que sugerem uma alternância na mobilização de dois elementos específicos do conceito imagem para o cálculo da integral indefinida, a saber, a indicação da utilização da propriedade aditiva e a interpretação ou não da integral como uma família de funções por meio da indicação da constante arbitrária *c*.

Categoria I_a: Com a representação da constante.

Exemplo: $\int\left(x^3+3x+1\right)dx=\int x^3dx+\int 3xdx+\int dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+x+c$

Categoria $\mathrm{I_b}$: Sem a representação da constante.

Exemplo: $\int\left(x^3+3x+1\right)dx=\int x^3dx+\int 3xdx+\int dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+x$

Categoria II : Resposta direta, sem explicitação do cálculo. Interpretamos que as produções pertencentes a esta categoria resultam da mobilização do conceito imagem do aluno, referente ao cálculo da integral indefinida de uma função de uma variável.

Categoria $\mathrm{II_a}$: Com a representação da constante arbitrária *c*.

Exemplo: $\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+x+c$

Categoria $\mathrm{II_b}$: Sem a representação da constante arbitrária *c* ou adotando uma constante particular.

Exemplo: $\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+x+5$

Categoria III : Respostas baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou de respostas erradas. As produções aqui enquadradas, apresentam indícios de que os estudantes mobilizam alguns elementos específicos do conceito imagem, referente ao cálculo da integral indefinida no entanto apresentam falhas de técnica de integração.

Exemplos: $\int\left(x^3+3x+1\right)dx= \quad x^4+\frac{3x^2}{2}+x$

Resumo das categorias.

Categoria	$\mathrm{I_a}$	$\mathrm{I_b}$	$\mathrm{II_a}$	$\mathrm{II_b}$	III

Distribuição	6	1	10	8	5

Tabela 7: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 5 (N=30)

Questão 6.

Calcule a integral $\int x^3 \left(x^4 - 1\right) dx$.

Categoria I : Cálculo da Integral indefinida efetuando a multiplicação e utilizando-se de propriedades de integral de soma de funções. As produções desta categoria sugerem uma alternância na mobilização do conceito imagem evocado para o cálculo da integral indefinida, por exemplo, a indicação da utilização da propriedade de integração da soma de funções, e a interpretação ou não da integral como uma família de funções por meio da indicação da constante arbitrária *c.*

Exemplo: $\int x^3 \left(x^4 - 1\right) dx = \int x^7 dx - \int x^3 dx = \frac{x^8}{8} - \frac{x^4}{4} + c$

Categoria II : Resposta utilizando as regras de integração. Estas produções apresentam indícios da mobilização do conceito definição referentes à utilização de técnicas de integração.

Categoria II$_a$: Cálculo correto da técnica de substituição de variável.

Exemplo: $\int x^3 \left(x^4 - 1\right) dx = \int u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u du = \frac{u^2}{8} = \frac{\left(x^4 - 1\right)^2}{8} + c$

Categoria II$_b$: Com o uso incorreto de procedimentos algébricos.

Exemplo: $\int x^3 \left(x^4 - 1\right)dx = 4\int udu = 4\frac{u^2}{2} = 2\left(x^4 - 1\right)^2$

Categoria III : Respostas baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou de respostas erradas, grande parte destas produções apresentam falhas em elementos específicos do conceito imagem, por exemplo, a integral o produto de funções não é o produto das integrais dessas funções, no mais foram apresentados erros de procedimentos algébricos como falha na propriedade de distributividade.

Exemplos: $\int x^3 \left(x^4 - 1\right)dx = \int \left(x^{12} - x^3\right)dx = \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^4}{4}$

ou

$$\int x^3 \left(x^4 - 1\right)dx = \frac{x^4}{4}\left(\frac{x^5}{5} - x\right)$$

Categoria IV : Nenhuma resposta.

Resumos das categorias.

Categoria	I	II_a	II_b	III	IV
Distribuição	2	9	5	12	2

Tabela 8: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 6 (N=30)

As categorias interpretadas aqui na questão 6 representam, em grande parte, as mesmas motivações apresentadas nas questões Q7 e Q8. Assim, admitiremos parte das interpretações analisadas na questão 6 e indicando quando for necessária a interpretação mais específica.

Questão 7.

Calcule a integral $\int \frac{4x^3 - 6x^2}{x^4 - 2x^3 + 1} dx$.

Categoria I : Resposta utilizando técnicas de integração:

Categoria I_a: Cálculo correto da técnica de substituição de variável.

Exemplo: $\int \frac{4x^3 - 6x^2}{x^4 - 2x^3 + 1} dx = \int \frac{du}{u} = ln\left|x^4 - 2x^3 + 1\right| + c$

Categoria I_b: Uso incorreto de propriedades de integração.

Exemplo: $\int \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{x^4 - 2x^3 + 1}\right) dx = \int \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{u}\right) \frac{du}{\left(4x^3 - 6x^2\right)} = \int \frac{1}{u} du = \int u^{-1} du = \frac{u^{-2}}{-2} + c$

Categoria II : Respostas baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou de respostas erradas.

Exemplo: $\int \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{x^4 - 2x^3 + 1}\right) dx = \frac{\int \left(4x^3 - 6x^2\right) dx}{\int \left(x^4 - 2x^3 + 1\right) dx} = \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x + 1}$

Categoria III : Nenhuma resposta.

Resumo das categorias.

Categoria	I_a	I_b	II	III
Distribuição	4	6	14	6

Tabela 9: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 7 (N=30)

Questão 8.

Calcule a Integral $\int x \cos x \, dx$.

Categoria I : Resposta utilizando técnicas de integração:

Categoria I_a: Cálculo correto da técnica de integração por partes: $\int u dv = uv - \int v du$.

Exemplo: $\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c$

Categoria I_b: Uso incorreto da técnica.

Exemplo: $\int x \, cos \, xdx = uv - \int vdu = - sen \, x^2 - cos \, x$

Categoria II : Respostas baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou de respostas erradas.

Exemplos: $\int x \cos x \, dx = 1 \operatorname{sen} x + c$

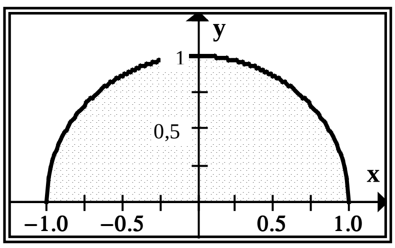
Categoria III : Nenhuma resposta.

Resumo das categorias.

Categoria	I_a	I_b	II	III
Distribuição	4	7	10	9

Tabela 10: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 8 (N=30)

Questão 9.



O aluno de um curso de Exatas nem sempre se dá conta da relação entre o curso da Universidade e os conhecimentos que utilizará no dia a dia. A Integral de Riemann, por exemplo, esclarece a definição de área. Tanto o cálculo da integral pode servir para o cálculo de áreas quanto vice-versa. Observe o gráfico de $y = \sqrt{1-x^2}$ para $(0 \le x \le 1)$, representado ao lado, e calcule o valor da integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ por meio de sua interpretação como área no plano.

Categoria I : Respostas baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou de respostas erradas. As respostas enquadradas nesta categoria apresentam alguns *conflitos potenciais*, por exemplo, a distributividade de expoentes para a soma não é válida. Estes conflitos indicam que os estudantes mobilizam o conceito imagem referente à integral definida de função de uma variável, no entanto apresentaram concepções com a definição formal da técnica de substituição trigonométrica.

Exemplo: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \left(\sqrt{1} - \sqrt{x^2}\right) dx = \int (1-x)\,dx = x + \dfrac{x^2}{2}$

Categoria II : Não responderam.

Resumo das categorias.

Categoria	I	II
Distribuição	16	14

Tabela 11: Distribuição (Número de respostas) das Categorias para Questão 9 (N=30)

Questão 10.

Durante a concretagem de uma laje num canteiro de obras, a bomba hidráulica que bombeava o concreto a partir do solo até a altura (*h*) de 20 metros quebrou, dessa forma a saída para não parar o serviço, foi utilizar o guindaste disponível na obra, que eleva verticalmente uma carga de concreto, içando-a até a laje. Sabendo que essa carga vaza a uma taxa constate, determine o trabalho produzido pelo guindaste, considerando que este trabalho é realizado por uma força de $F(h)=1280-5h$ (N).

Categoria I : Cálculo do Trabalho como a integral definida. Entendemos que as produções desta categoria, sugerem uma alternância na mobilização de dois elementos específicos do conceito imagem necessários para o cálculo da integral da função força no intervalo [0, 20], a saber, a indicação da utilização de propriedades da integral de funções de uma variável (como a integral de soma de funções e a integral da função potência), e a interpretação ou não da integral como sendo o Trabalho (τ) realizado por meio da indicação da unidade J (Joule).

Categoria I_a: Cálculo correto da integral definida em [0, 20], mobilizando os conceitos de Física, no entanto apresentando a unidade N (Newton).

Exemplo: $\tau=\int_0^{20}(1280-5h)dh=\left[1280h-\frac{5h^2}{2}\right]_0^{20}=24600N$

Categoria I_b: Cálculo correto da integral definida, no entanto apresentando erro computacional.

Exemplo: $\int_0^{20}(1280-5h)dh=\left[1280h-\frac{5h^2}{2}\right]_0^{20}=25400J$

Categoria II : Respostas baseadas na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou de respostas erradas. As produções desta categoria sugerem que os estudantes não mobilizam o conceito imagem do Trabalho (τ) realizado como sendo a integral da função força num dado intervalo.

Exemplo: $\int_0^{20} (1280 - 5h)dx = 1280 - 5(20) = 1180N$

Categoria III : Nenhuma resposta.

Categoria	I_a	I_b	II	III
Distribuição	4	2	13	11

Tabela 12: Distribuição (Número de respostas) das categorias para Questão 10 (N=30)

CAPÍTULO 4:

ESTUDO EXPLORATÓRIO

Este estudo tem o objetivo de realizar os ajustes necessários no instrumento de pesquisa composto pelo questionário, portfólio (questões selecionadas) e roteiro das entrevistas. A intenção de promover esta verificação foi de confirmar a elaboração de questões que conseguissem expor a mobilização do conceito imagem evocado pelos estudantes que conseqüentemente possam propiciar entrevistas mais ricas junto aos professores. Ademais ela nos permitiu-nos apresentar antecipadamente algumas características dos conceitos imagem e definição que esses estudantes apresentam sobre o conceito de Integral.

Segue uma breve exposição sobre as escolhas que realizamos em relação aos protocolos utilizados na entrevista. Por último, apresentamos o relato e a interpretação da entrevista realizada com um professor que é formado em Licenciatura em Matemática e é bacharel em Engenharia Civil, com especialização em Educação Matemática. Atualmente leciona em uma Instituição de Ensino Superior da rede particular, não possuindo experiência no Ensino Básica. Essa entrevista nos permitiu entrar em contato com possíveis reações dos docentes que encontraremos ao efetivarmos o estudo de campo. A seguir apresentamos as conclusões relativas a este estudo exploratório

4.1. *Teste do Instrumento de Pesquisa.*

Para este estudo inicial, optamos por analisar as produções realizadas por **três** dos vinte e oito estudantes que responderam o questionário, nesta fase. Estas produções foram escolhidas aleatoriamente, por se tratar de um teste deste instrumento de pesquisa. Inicialmente apresentamos uma descrição da resolução apresentada pelos três alunos, sem relacionarmos com o referencial teórico. E, seguida, para cada questão, elegemos dois dentre os três protocolos, tentando relacionar a produção com o conceito imagem e conceito definição.

A seguir é apresentada a descrição inicial, na qual omitimos a questão Q1b, por acharmos que poderia não trazer informações relevantes, além daquelas já fornecidas pela questão Q1a.

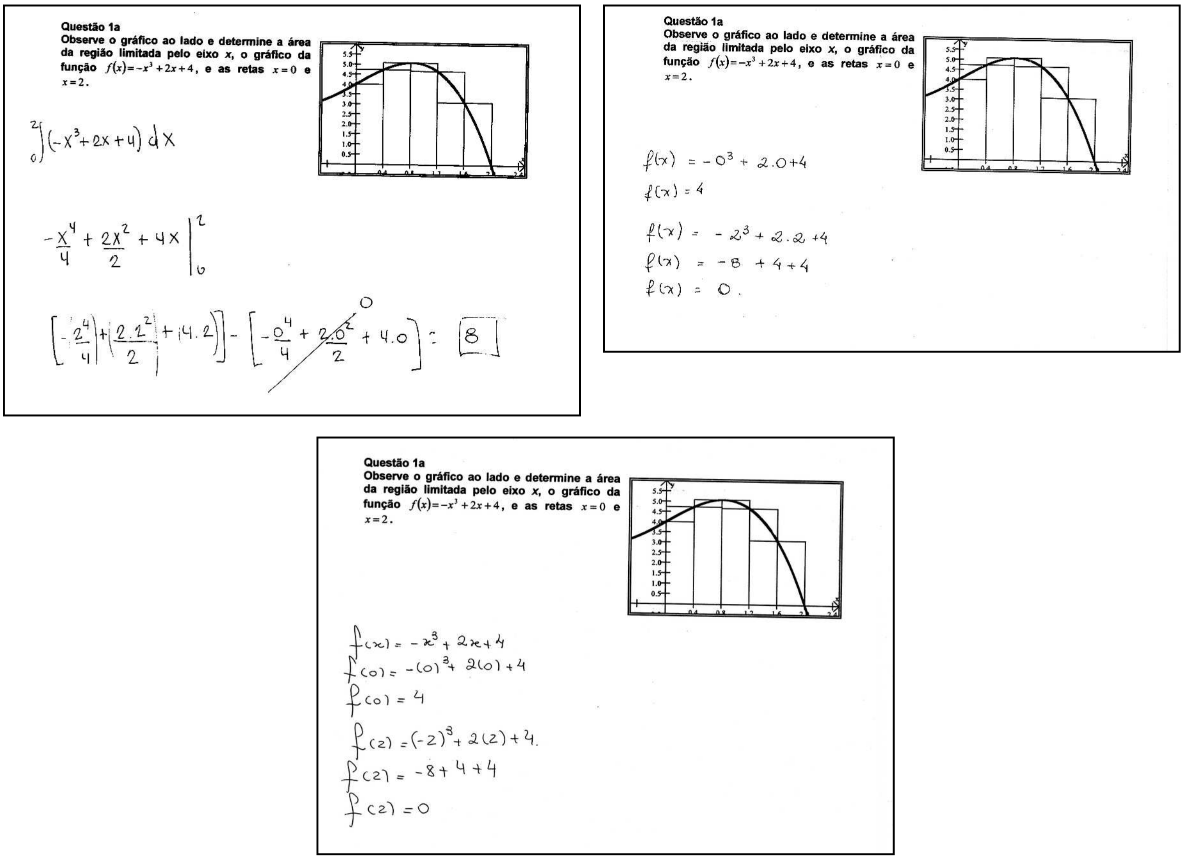


Figura 2: Protocolos: Q1a – A1; Q1a – A2; Q1a – A3 (Sentido horário)

Na questão Q1a apenas o aluno A1 associou o cálculo da área da região abaixo do gráfico de *f* com a integral, ou seja, nas resoluções dos alunos A2 e A3, não foi encontrado nenhum indício, tal como: hachuras nos gráficos ou o uso da fórmula $|A| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = |f(b) - f(a)|$, que mostrasse a associação. Enquanto que os alunos A2 e A3 calculam apenas o valor numérico da função para as abscissas x=0 e x=2, o aluno A1 calculou a integral definida no intervalo indicado, mostrando que utilizou a fórmula $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$, associando de certa forma a área da região pretendida como sendo a integral definida da função em questão.

Escolhemos para apresentar ao professor as produções dos alunos A1 e A3.

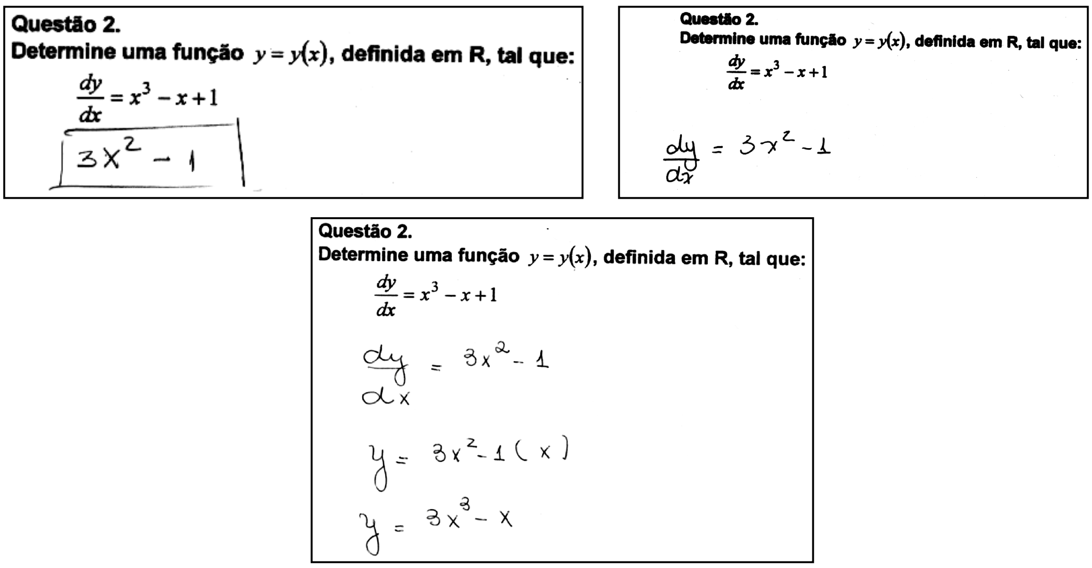


Figura 3: Protocolos Q2-A1; Q2-A2; Q2-A3 (sentido horário)

Na questão Q2, os três alunos não conseguiram interpretar corretamente a questão e derivaram a função. Os alunos A1 e A2 deram o resultado $\left[\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 1\right]$ e o aluno A3 depois de derivar multiplicou o resultado por *x* chegando a $y = 3x^3 - x$. As questões escolhidas foram as produções dos alunos A1 e A3.

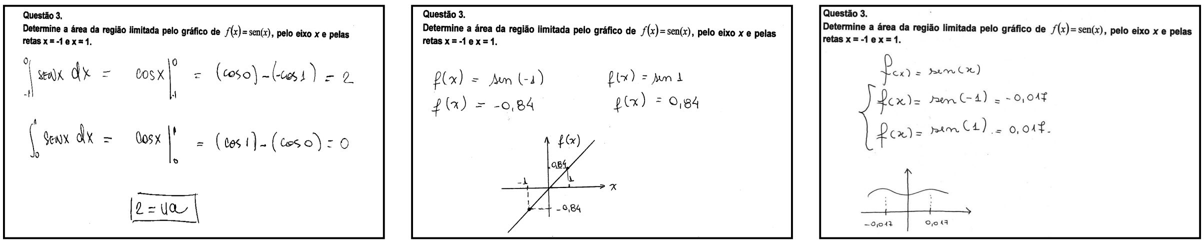
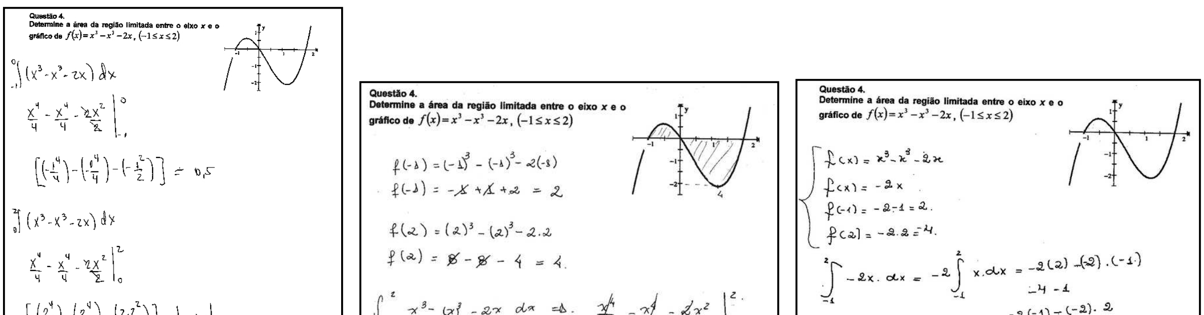


Figura 4 – Protocolos Q3 – A1; Q3 – A2; Q3 – A3.

No que se refere à questão Q3, o aluno A1 identificou a relação entre a área da região limitada pelo gráfico da função e o eixo *x* com a integral definida, apresentando indício de que o gráfico da função se encontra parte acima e parte abaixo do eixo x, mas não desenhou ou fez qualquer menção à sua representação gráfica. Calculando a integral escolhendo erroneamente os intervalos [-1,0] e [0,1] e, além disso, realizou cálculos errados. Quanto aos alunos A2 e A3, eles apresentaram uma representação gráfica que não tem qualquer relação com a função seno e realizaram apenas o cálculo do valor numérico de *f*, nos extremos do intervalo, chegando aos resultados $\begin{cases} f(-1) = sen(-1) = -0{,}84 \\ f(1) = sen(1) = 0{,}84 \end{cases}$ e $\begin{cases} f(-1) = sen(-1) = -0{,}017 \\ f(1) = sen(1) = 0{,}017 \end{cases}$, respectivamente. Para apresentar ao professor foram escolhidas as questões dos alunos A1 e A2



Na questão Q4, cometemos um erro na digitação na expressão algébrica da função: ao invés de $f(x)=x^3-x^2-2x$ aparece $f(x)=x^3-x^3-2x$, que não condiz com o gráfico apresentado. Só percebemos esse fato depois de termos aplicado o questionário. No momento da aplicação não houve comentários quanto à função nem quanto ao gráfico apresentado.

O aluno A1 apresentou indícios de que utilizou o gráfico de *f* para a resolução, quando calculou a integral da função dada, nos intervalos de [-1,0] e [0,2], somando o módulo dos valores encontrados. O aluno A2, hachurou a região entre o gráfico da função e o eixo x, relacionando a área da região abaixo do gráfico de *f* com sua integral, calculando-a para o intervalo [-1,2]. Já o aluno A3, percebeu que a função da maneira como foi apresentada é $f(x)=-2x$, indicando a integral no intervalo [-1,2], tomando para primitiva de $g(x)=x$ ela mesma.

Os protocolos produzidos pelos alunos A1 e A2, foram escolhidos para apresentar ao professor.

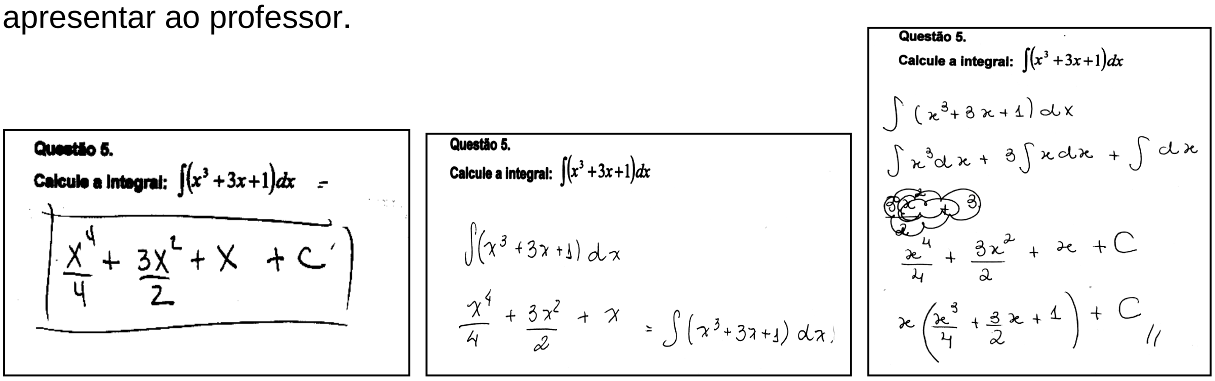


Figura 6: Protocolos Q5 – A1; Q5 – A2; Q5 – A3.

Na resolução da questão Q5, o aluno A1 apresentou diretamente a resposta, sem explicitar indícios da forma ou esquema que utilizou para a resolução. Os alunos A2 e A3 resolveram com algumas passagens e o primeiro destes não representou a constante de integração em sua solução. Foram escolhidas as produções dos alunos A2 e A3

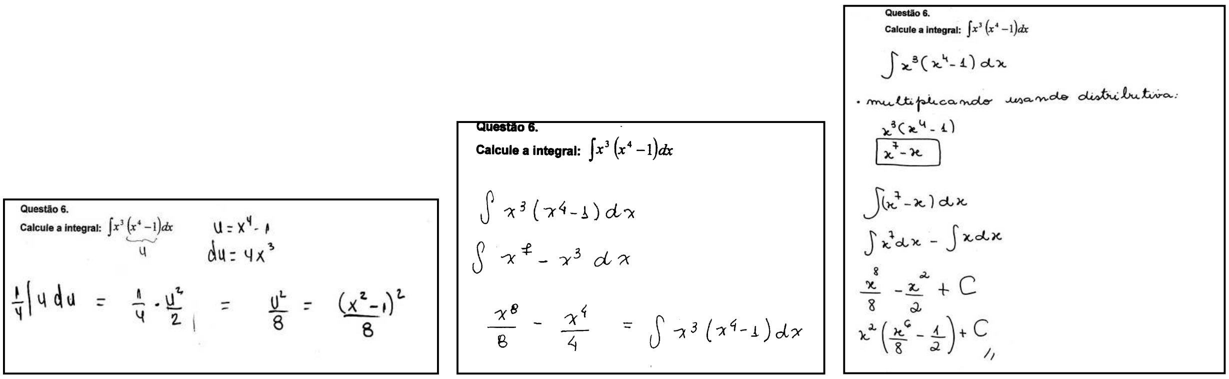


Figura 7: Protocolos Q6 –A1; Q6 –A2; Q6 –A3.

Para a questão Q6, os alunos A2 e A3 utilizaram a multiplicação dos polinômios. O primeiro destes não representou a constante de integração em sua solução e o segundo cometeu um erro de cálculo ao efetuar a multiplicação. Já o aluno A1 utilizou em sua resolução, a técnica de substituição, cometendo um erro ao voltar para a variável *x*. Escolhemos as produções dos alunos A2 e A3.

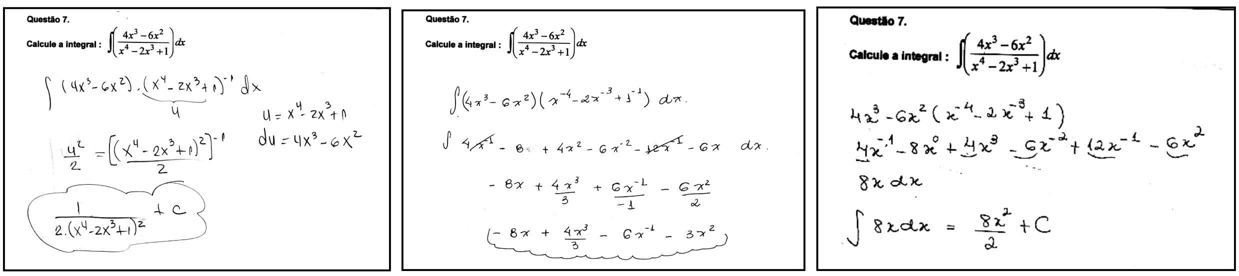


Figura 8: Protocolos Q7 – A1; Q7 – A2; Q7 – A3.

Ao resolver a questão Q7, o aluno A1 utilizou a técnica de substituição de variável, cometendo um erro durante o processo de integração. Os alunos A2 e A3 cometeram erros de procedimentos algébricos durante a resolução da questão, ademais A2 deixou de expressar a constante em sua resposta. Para a apresentação ao professor foram escolhidas as produções dos alunos A1 e A2.

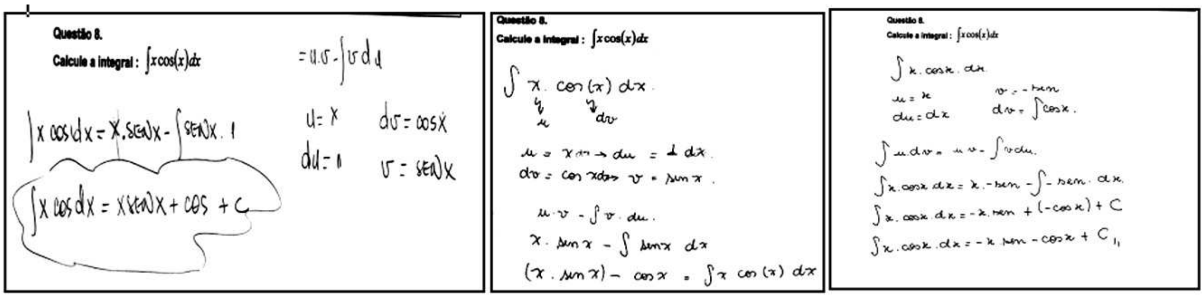


Figura 9 – Protocolos Q8 – A1; Q8 – A2; Q8 – A3.

Quanto às produções referentes à questão Q8, os três alunos utilizaram a técnica de integração por partes: A1 cometeu dois erros na substituição da fórmula, explicitando a expressão "$\int x\cos dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x.1$" ao invés de $\int x\, cos\, x\, dx = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx$ e a falta do argumento "x" em $cos\, x$. Os alunos A2 e A3 cometeram um erro em admitir a resposta da integral $\int senx\, dx$ com sinal trocado. Além disso, A2 deixou de indicar a constante de integração.

Escolhemos as produções dos alunos A1 e A3.

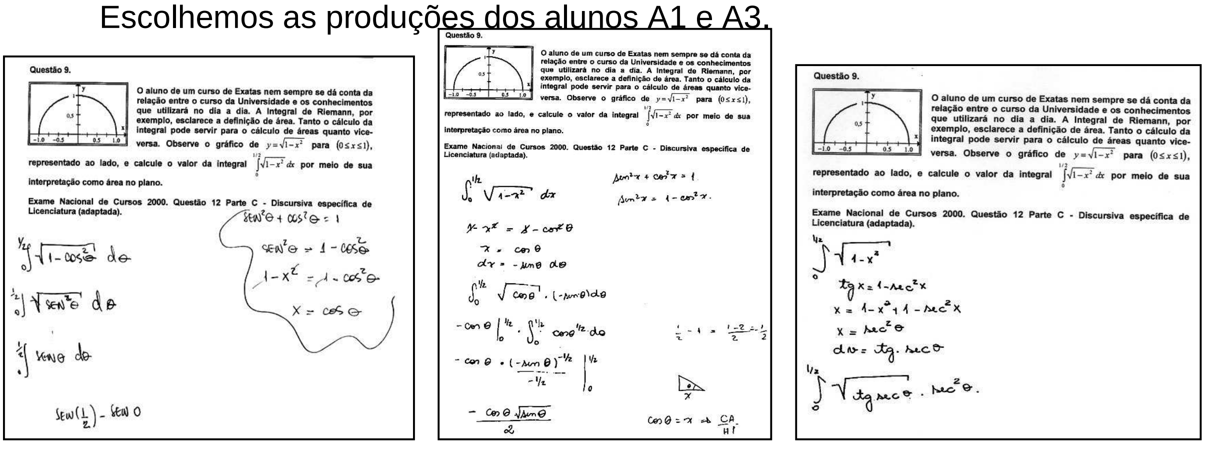


Figura 10: Protocolos Q9 – A1; Q9 – A2; Q9 – A3.

Verificamos na resolução da Q9 que os três alunos iniciaram com a utilização da técnica de substituição trigonométrica. Os alunos A1 e A2 partiram tomando $x = a\,cos\,\theta$ e o primeiro destes cometeu um erro ao omitir a substituição de *dx* por $-sen\theta\,d\theta$ e o aluno A2 utilizou erroneamente a igualdade $1 - x^2 = cos\,\theta$, no entanto, mostra em sua resolução indícios de que teria pensado na substituição dos intervalos de integração. O Aluno A3, admitiu a substituição $x = a\,sec\,\theta$, deixando indicado a integral $\int_0^{1/2} \sqrt{tg.sec\,\theta}.sec^2\,\theta\,d\theta$.

Escolhemos para apresentar ao professor os protocolos produzidos pelos alunos A1 e A2.

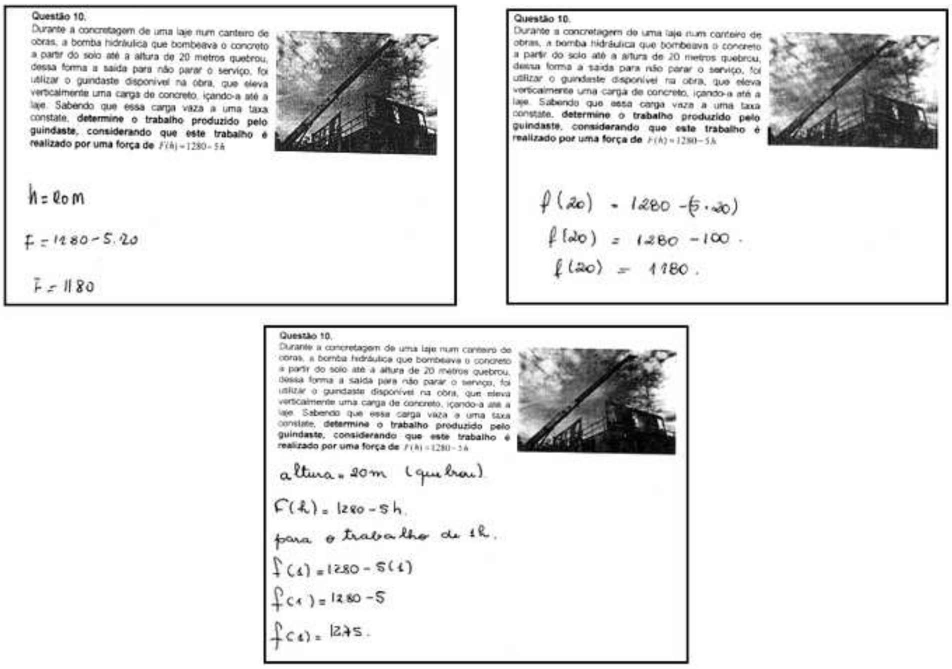


Figura 11: Protocolos - Q10 – A1; Q10 – A2; Q10 – A3 (Sentido horário)

Nenhum dos três alunos conseguiu interpretar corretamente o enunciado da última questão fornecida. Os alunos A1 e A2 calcularam apenas a força no momento em que a altura é 20 metros, no entanto o primeiro deixa explícita essa interpretação enquanto o último não mostra em sua resolução o que teria interpretado quanto ao valor substituído na fórmula de força. Já o aluno A3 indica que na altura de 20 m o guindaste quebrou, admitindo em seguida o Trabalho para “1 hora”, nenhum dos estudantes calculou a integral da função força para o intervalo [0,20]. Apresentamos ao professor as produções dos alunos A1 e A3.

Essa descrição, como já dissemos anteriormente, foi realizada primeiramente pela simples verificação das produções dos alunos. Quanto às duas produções apresentadas ao Professor, foram escolhidas por meio de uma breve análise, utilizando a teoria de Conceito Imagem e Conceito Definição de Tall & Vinner. Neste momento, não tivemos a intenção de analisar totalmente essas produções, apenas apresentar o modelo que seguimos para a análise das produções do questionário adaptado. A seguir apresentamos uma tabela com nossa interpretação sobre as produções analisadas.

Questão	*Aluno*	**Interpretações sobre o Conceito Imagem ou Conceito Definição apresentado pelos alunos.**
Q1a	A1	Sugere a mobilização do conceito imagem referente ao cálculo correto da integral definida de f, pois o aluno a associou com a área da região abaixo do gráfico da função.
	A3	Cálculo do valor numérico da função, apresentado uma resposta no modelo pseudoconceitual, ou seja, baseado de um conceito imagem falso ou inacabado.
Q2	A1 e A3	Os estudantes apresentam indícios de que não possuem nenhum elemento do conceito imagem referente ao cálculo da integral como sendo a primitiva de uma função, caracterizando respostas na modalidade pseudoconceitual ou aparentemente sem sentido. Cálculo da derivada de *f*.
Q3	A1	Cálculo da integral definida associando-a com a área, No entanto, o estudante não se refere ao sinal da função em [a, b], com cálculo computacional incorreto, Sugerindo que possui algum elemento do conceito imagem, ainda falho, que se refere ao cálculo da integral de uma função.

	A2	O estudante apenas desenha o gráfico incorreto da função, sem explanação do cálculo da integral definida em relação com a área, sugerindo que ainda não formou o conceito imagem sobre o assunto.
Q4	A1 e A2	Os estudantes calculam da integral definida associando-a com a área da região limitada pelo eixo x e o gráfico da função, no entanto, efetuam os cálculos computacionais incorretos. O que sugere uma mobilização do conceito definição referente ao cálculo da integral de uma função polinomial.
Q5	A2 e A3	Os alunos apresentam o cálculo correto da integral indefinida, sugerindo a mobilização do conceito definição referente ao cálculo da integral de uma função polinomial. No entanto, o aluno A2 apresenta sua solução sem a constante de integração, e o aluno A3, deixa explícita a propriedade da soma de integrais.
Q6	A2 e A3	As produções sugerem a mobilização do conceito imagem que se refere ao cálculo da integral indefinida de uma função polinomial. No entanto, o aluno A2 não indica a constante de integração, enquanto que A3 efetua multiplicação por meio da distributiva de forma errônea.
Q7	A1	O aluno apresenta o cálculo errado da integral indefinida, efetuando incorretamente a técnica de integração por substituição de variável, sugerindo que contém falhas em seu conceito imagem referente à utilização desta técnica.
	A2	A produção apresenta o uso incorreto de propriedades de potência, sugerindo uma resposta no modelo Pseudoconceitual, ou seja, baseado de um conceito imagem falso ou inacabado.
Q8	A1 e A3	As produções demonstram o cálculo correto da integral indefinida, em que os estudantes mobilizam a definição da técnica de integração por partes, entretanto, apresentam falhas no conceito imagem, o aluno A1 não indica os argumentos “x” em *cosx*, e A3 apresenta o cálculo da integral de *senx* com o sinal invertido.
Q9	A1 e A2	Os estudantes indicam a mobilização de elementos do conceito imagem referentes à técnica de integração por substituição trigonométrica. No entanto, A1 não apresenta o cálculo da integral definida, e A2 efetua o cálculo incorreto dessa integral.
Q10	A1 e A3	Estas produções sugerem respostas que se enquadram no modelo pseudoconceitual, ou seja, baseadas em um conceito imagem falso ou inacabado referentes ao cálculo integral da função força como Trabalho.

4.2. Relato e análise da entrevista com o Professor.

O professor optou por marcar a entrevista em um dos períodos disponíveis para atendimento aos alunos, em um dos campi da universidade em que trabalha. A recepção foi muito cordial, mostrando de início, disponibilidade e disposição em conceder a entrevista.

Não conseguimos realizar a entrevista em um único encontro como tínhamos combinado. Este primeiro encontro durou aproximadamente uma hora e meia, incluindo nossa conversa inicial. Neste período foram analisados os protocolos das questões Q1a até Q7, enquanto que o segundo encontro, que se realizou na semana seguinte, no mesmo local e hora, durou cerca de 25 minutos e nele foram analisados os protocolos das questões Q8 a Q10.

No primeiro encontro, com o gravador desligado, entabulamos uma conversa amigável, em que eu agradeci a entrevista a ser concedida, e sobre assuntos cotidianos: como estava a semana de trabalho, do andamento das turmas e etc. Durante essa conversa, expliquei ao professor o motivo do trabalho: que os dados coletados neste momento serão utilizados para reavaliar o roteiro final das sessões a se realizar com um grupo de professores. Verificamos também se por meio das questões formuladas e aplicadas, conseguiríamos propiciar situações que estimulassem os alunos a produzir respostas “interessantes” para que os professores possam analisar posteriormente.

O professor, de forma bem humorada, concordou com os motivos que apresentamos, mostrando disposição para começar. Prontamente organizei o material e iniciamos os trabalhos.

No início de nossa entrevista, agora com o gravador ligado, explicamos novamente o motivo da mesma e relatamos que seriam entregues duas respostas de alunos de cada questão, uma por vez. Momento esse seguido pela apresentação do primeiro protocolo referente a questão Q1a.

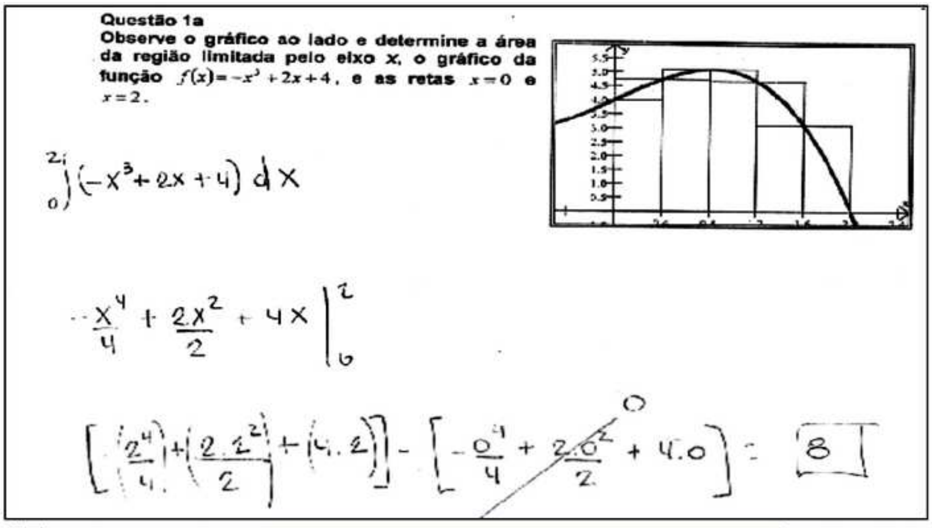


Figura 12: Protocolo Q1a-A1

Nesta questão, como já dissemos anteriormente, o objetivo é verificar de que maneira um professor interpreta a resolução apresentada por um aluno que pode associar a área da região abaixo do gráfico de uma função com a integral de *f*, em um intervalo dado.

Primeiramente, o Professor analisa o enunciado da questão, perguntando em seguida o que realmente desejamos que ele faça. Informamos que gostaríamos que ele analisasse as questões como se estivesse corrigindo uma atividade de um aluno. Dado por satisfeito, parte para a análise da resposta do aluno. Após alguns segundos, diz que o aluno “errou uma continha” pois “o resultado dele não está batendo” e verifica mais uma vez, refazendo a anotação de seu argumento no protocolo:

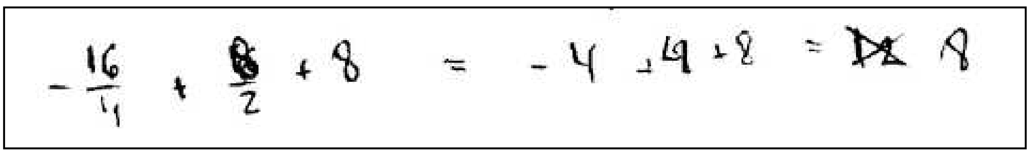


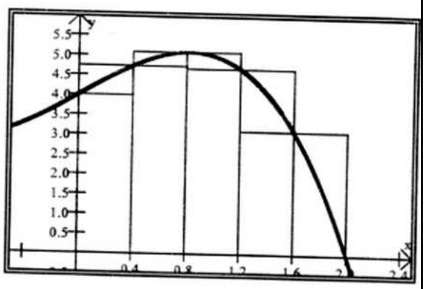
Figura 13: Anotações do Professor referente ao protocolo Q1-A1.

O Professor corrige sua afirmação anterior, dizendo que o resultado do aluno está certo. Questionado sobre o procedimento adotado pelo estudante na resolução da questão, responde que foi um procedimento padrão, resolvendo a integral, e ele (aluno) poderia ter resolvido de uma forma diferente, “calculando as áreas de figuras internas e externas (dos retângulos) e logo depois fazendo a média entre elas”.

Desta forma, manifesta que espera de um aluno, que já teve um curso de Cálculo, a interpretação da área da região limitada pelo eixo *x* e o gráfico de *f*, como sendo a integral de *f* no intervalo dado, calculando-a e apresentando o resultado com unidade de área. Exteriorizou, em certo momento, que também consideraria certo uma resolução por meios “não convencionais”, como o cálculo das áreas dos retângulos, internos e externos, apresentados na representação gráfica de *f*, sem relacioná-las ao cálculo da Integral (vale lembrar que neste caso o resultado obtido é uma aproximação da área solicitada), apresentado indício de uma visão falibilista da matemática, pois considera a compreensão e aplicações de um conceito são mais importantes do que a forma com que a solução é apresentada.

Questão 1a

Observe o gráfico ao lado e determine a área da região limitada pelo eixo *x*, o gráfico da função $f(x)=-x^3+2x+4$, **e as retas** $x=0$ **e** $x=2$.



$f(x) = -x^3 + 2x + 4$

$f(0) = -(0)^3 + 2(0) + 4$

$f(0) = 4$

$f(2) = (-2)^3 + 2(2) + 4.$

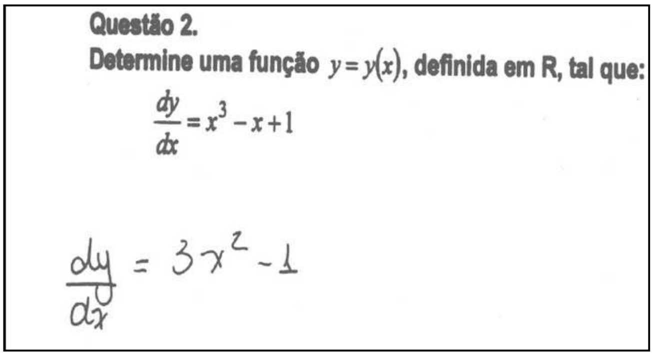
$f(2) = -8 + 4 + 4$

$f(2) = 0$

Figura 14: Protocolo Q1a – A3

Ao entregarmos o protocolo Q1a-A3, o professor sem analisar muito a resolução, expõe que o aluno não fez nada e “se fosse para dar uma nota eu daria zero”. Quando perguntamos se gostaria de comentar algo mais sobre a resposta, respondeu que “não tem o que comentar, está errado!”, mostrando neste momento que a visão absolutista da matemática está presente em seu critério de avaliação.

Partimos então para a análise da Q2 em que se pede para determinar uma função $y=(y)$, tal que $\frac{dy}{dx}= x^3 - x + 1$.Temos interesse de obter indícios de como o professor considera a resolução de uma questão em que se pode associar a integral indefinida com uma primitiva da sua derivada.



Questão 2.
Determine uma função $y=y(x)$, definida em R, tal que:

$$\frac{dy}{dx}=x^3-x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-1$$

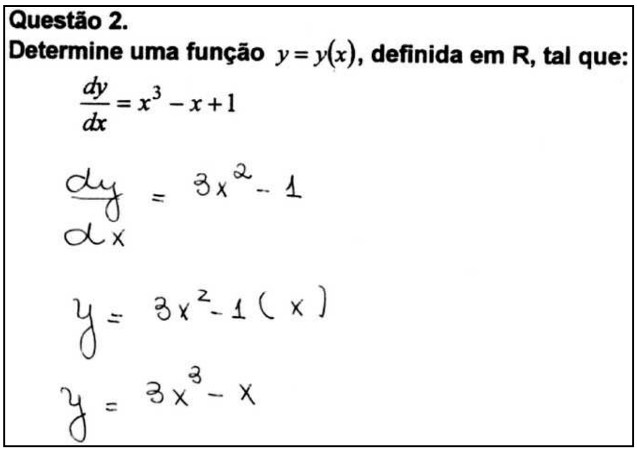
Figura 15: Protocolo Q2 – A2

Professor:

“o aluno não mostrou uma função que quando derivada dê $x^3 - x + 1$”

Ao analisar a resolução, o Professor afirma que está errada, pois o aluno derivou a função dada. Questionado quanto ao que ele esperava como resposta, declara que esperava que o aluno calculasse a integral da função na variável *x*, que quando derivada resultasse $\frac{dy}{dx}$, apontando para o protocolo.

Sem mais a comentar sobre o primeiro, recebe o segundo protocolo Q2-A3, em que comenta que não faz a menor idéia do que o aluno fez, pois “ele multiplicou um *x* aqui” apontando para o protocolo. Quando questionado sobre o que queria dizer, o Professor analisa a resolução do aluno com mais



Questão 2.
Determine uma função $y=y(x)$, definida em R, tal que:

$$\frac{dy}{dx}=x^3-x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-1$$

$$y=3x^2-1(x)$$

$$y=3x^3-x$$

Figura 16: Protocolo Q2 – A3

intensidade e comenta que ele fez o mesmo que o anterior, derivando a função, além de multiplicar por *x* no final, diz que possivelmente o aluno tenha "retirado" o *x* do termo $y=(y)$ que aparece no enunciado, supondo que tenha pensado que era uma multiplicação.

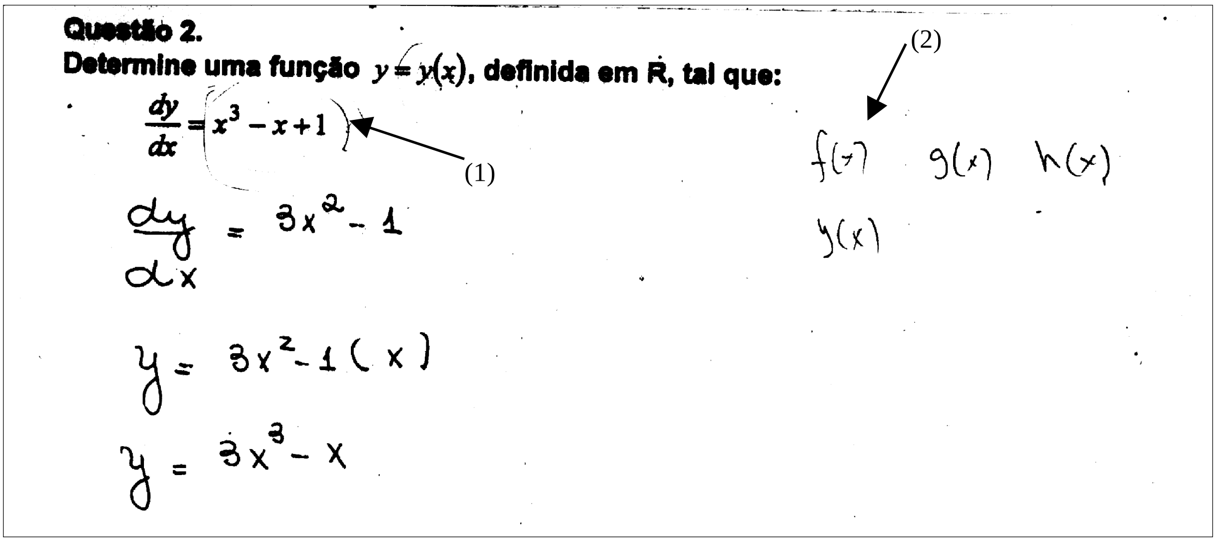
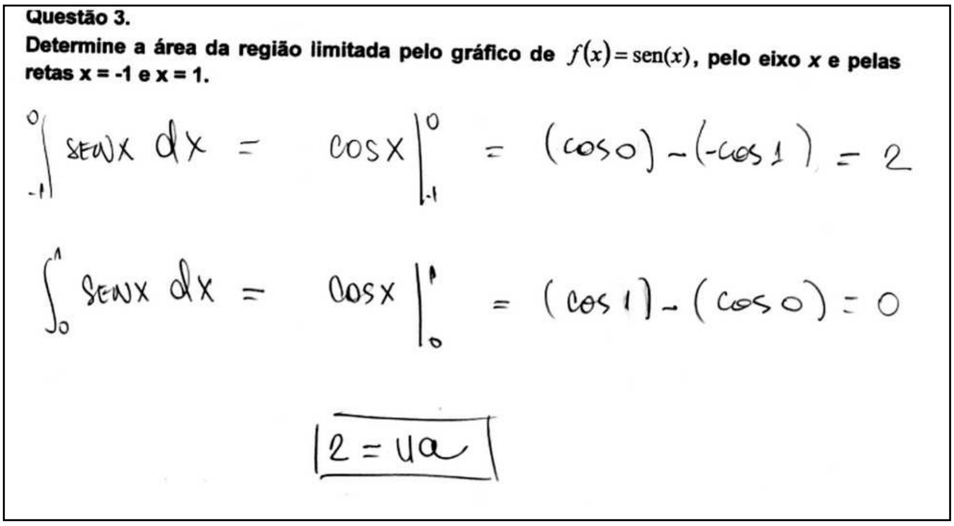


Figura 17: Anotações do Professor referente ao protocolo Q2-A3.

Ao perguntamos o que achava que o aluno poderia ter pensado, o professor responde que acredita que ele tenha confundido a nomenclatura de uma função como sendo um produto. Ademais, já que estávamos conversando sobre as formas de como o aluno tenha supostamente pensado em resolver a questão, questionamos ao Professor o que ele falaria se um aluno dele entregasse uma resolução dessas. Diz que a princípio nada, mas se um aluno lhe perguntasse, gostaria de saber o que ele fez em sua resolução. A partir daí, explicaria a ele as nomenclaturas utilizadas para função, indicando-as no protocolo [ver figura 17, indicação (2)], além disso, mostraria "que para que ele encontre uma função $y=(y)$ que quando derivada dê isso" [apontando para $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$ no protocolo, ver figura 17, indicação (1)], que ele deveria encontrar a primitiva da função $\frac{dy}{dx}$, ou seja, calcular a integral e não a derivada.

Parece-nos que neste momento, sua visão assemelha-se à identificação de Kush e Ball apresentado no texto de Thompson (1992), em que relata os modelos de ensino da matemática, sendo um deles “focado no conteúdo e com ênfase no desempenho”. O Professor exterioriza que, em certos momentos, em sua prática de ensino da matemática pode enfatizar o desempenho do estudante relacionando-o ao domínio de regras e procedimentos matemáticos.



Questão 3.

Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x)=\mathrm{sen}(x)$, pelo eixo x e pelas retas x = -1 e x = 1.

$\int_{-1}^{0} senx\, dx = cos x \Big|_{-1}^{0} = (cos 0) - (-cos 1) = 2$

$\int_{0}^{1} senx\, dx = cos x \Big|_{0}^{1} = (cos 1) - (cos 0) = 0$

$\boxed{2 = ua}$

Figura 18: Protocolo Q3-A1.

Em seguida, apresentamos o protocolo Q3-A1, tendo a intenção de verificar qual a reação de um professor quando um aluno responde uma questão em que se pode associar a área da região limitada pelo o gráfico de uma função e o eixo *x*, com a integral de *f* no intervalo dado, no caso em que a região limitada está localizada, parte abaixo e parte acima do eixo *x*. Após uma análise mais detalhada desta vez, o Professor comenta que o aluno errou a questão, pois a $\int senx\, dx = -cos\, x$, sem dar tempo para que nós pudéssemos questionar algo, continuam seus comentários quanto aos extremos de integração, em que considerou correta a divisão do intervalo, acreditando que o aluno não tenha pensado no cálculo da área, e afirma que “com certeza ele não pensou no gráfico”. Ao expor isso, iniciamos a tentativa de questionar o porquê, mas apenas com o nosso gesto ele entendeu a interrupção e respondeu:

> “Provavelmente ele confundiu o –1 à 1 e trocou o eixo x pelo eixo y. Dá para ver pela resposta dele, normalmente nós trabalhamos de –π à π ou de –π/2 à π/2. Então ele já havia resolvido um exercício similar só que trabalhando com radianos e mais, ele errou os valores do cosseno.”

Questionamos se o fato de o aluno ter separado o intervalo de integração não possa apresentar indícios de que tenha pensado no gráfico e não representou. Responde que não acredita nisso, e que em sua opinião, o estudante tenha apenas memorizado a resolução de um exercício parecido.

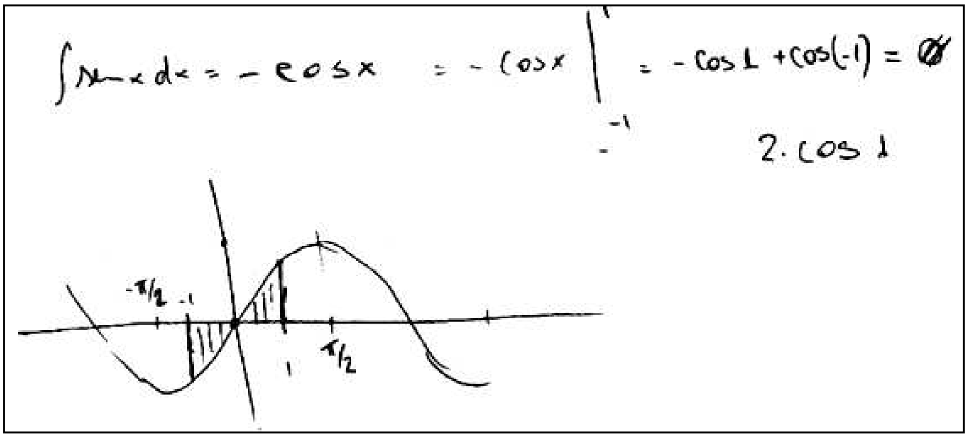


Figura 19: Anotações do Professor referente ao protocolo Q3-A1.

Entendemos que o Professor ao realizar a correção das atividades de verificação da aprendizagem, procura clareza e coerência nas respostas apresentadas, procurando quando necessário, observar não só a resolução, mas ‘ver’ os meios utilizados e justificados pelo aluno como complemento de sua aprendizagem. Novamente apresenta indícios de uma visão absolutista, desta vez na versão formalista, pois o Professor salienta uma preocupação com o desenvolvimento da questão, referenciando ao seu encadeamento lógico.

Observamos que ao apresentarmos o protocolo Q3-A2, (Figura ao lado), sem demora comenta que o “aluno não tem a menor idéia sobre gráfico de função”, salientando que o estudante não respondeu a questão, que era para determinar a área da região, afirmando que o aluno mostrou apenas encontrar o valor da função numa abscissa dada, nada mais do que isso. Mostrando assim, que para ele a visualização da representação gráfica, torna-se um fato importante na compreensão e resolução da mesma, quando apresentado corretamente.

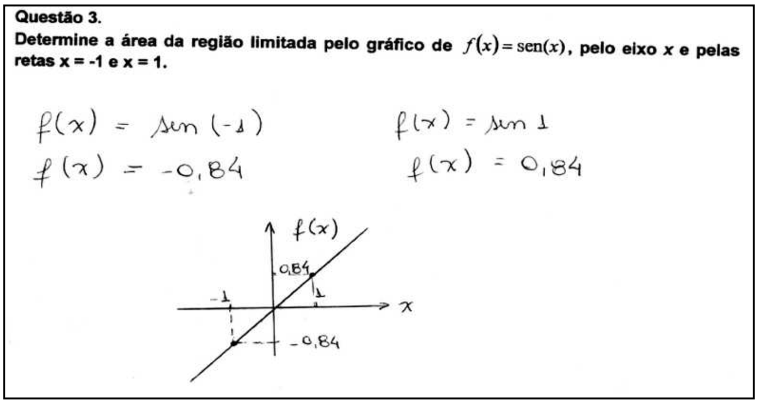


Figura 20: Protocolo Q3 – A2

Terminada a análise dos protocolos referentes à questão três, apresentamos ao Professor as duas produções selecionadas da questão quatro. Ao analisar a primeira (Figura 21), intriga-se quanto ao enunciado, motivo já esperado, pois como já tínhamos mencionado, tivemos um contra tempo, já que, ao invés de aparecer a função $f(x)=x^3-x^2-2x$, digitamos $f(x)=x^3-x^3-2x$, situação prontamente percebida pelo professor.

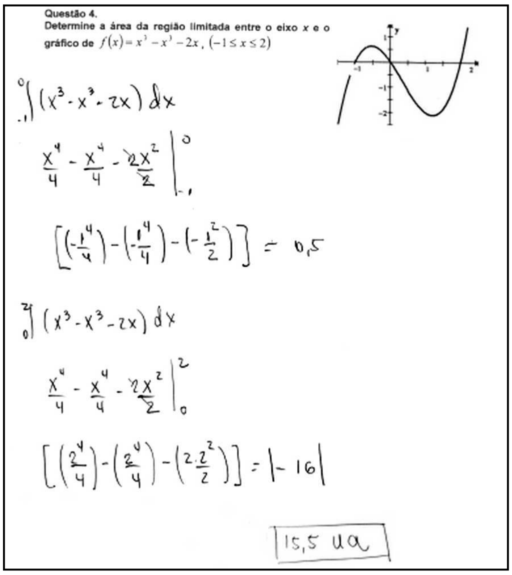


Figura 21: Protocolo Q4 – A1.

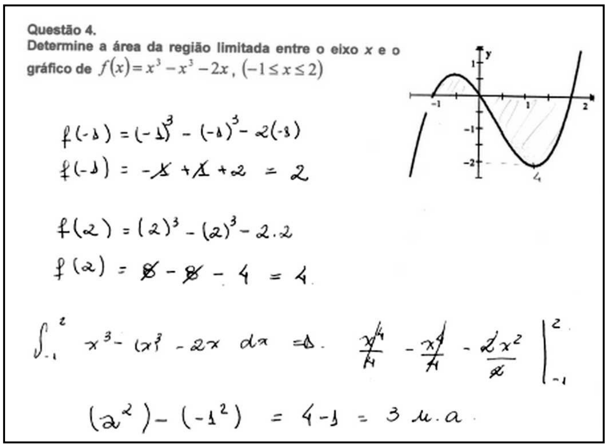


Figura 22: Protocolo Q4 – A2.

Questionamos o que faria se isso ocorresse em sua prática. Comenta que se formulasse uma questão com esse tipo de erro, esperaria que o aluno cancelasse o x^3 com o - x^3 e resolvesse a questão com $f(x) = -2x$, além de calcular a área corretamente. Perguntamos como consideraria a resolução do aluno, afirma que com os erros, da função e da representação gráfica que não é a de *f*. Provavelmente cancelaria a questão, mesmo assim efetua a análise do protocolo, a nosso pedido.

Após uma análise detalhada (ver figura 23) considera que o aluno encontrou a primitiva corretamente, mesmo não tendo cancelado o x^3, dividiu em dois intervalos, porém cometeu o erro na substituição dos extremos de integração, "pelo fato dele ter colocado o parênteses no lugar errado". No entanto, diz perceber que o aluno realizou erroneamente a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, um erro freqüente cometido pelos alunos. Além de cortar esse dois com esse [indicação (1), (2) e (3)], apontando para o protocolo, chegando ao resultado 0,5 [indicação (4)].

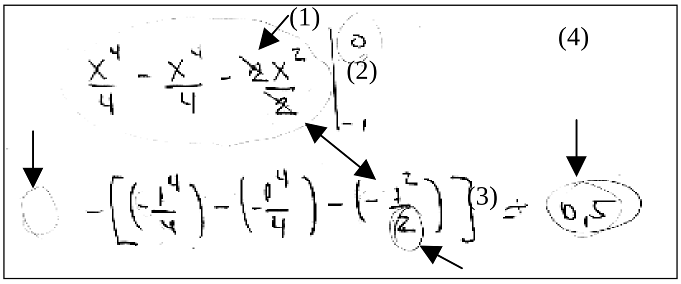


Figura 23: Anotações do Professor referente ao protocolo Q4-A1

Pedimos ao professor para comentar a resolução do aluno quanto ao que ele esperava como resposta. Após comentar sobre a resolução do aluno, enfatiza de que "não está de todo errado, mas tem falhas conceituais, não necessariamente no cálculo da integral, mas nos algoritmos".

Percebemos mais uma vez, que ao analisar a produção de um aluno, o Professor procura esmiuçar essa resolução, verificando o que o estudante mobiliza ou não dos conhecimentos trabalhados e associados aos conteúdos abordados.

Seguem as anotações que o Professor fez ao protocolo no momento de sua análise.

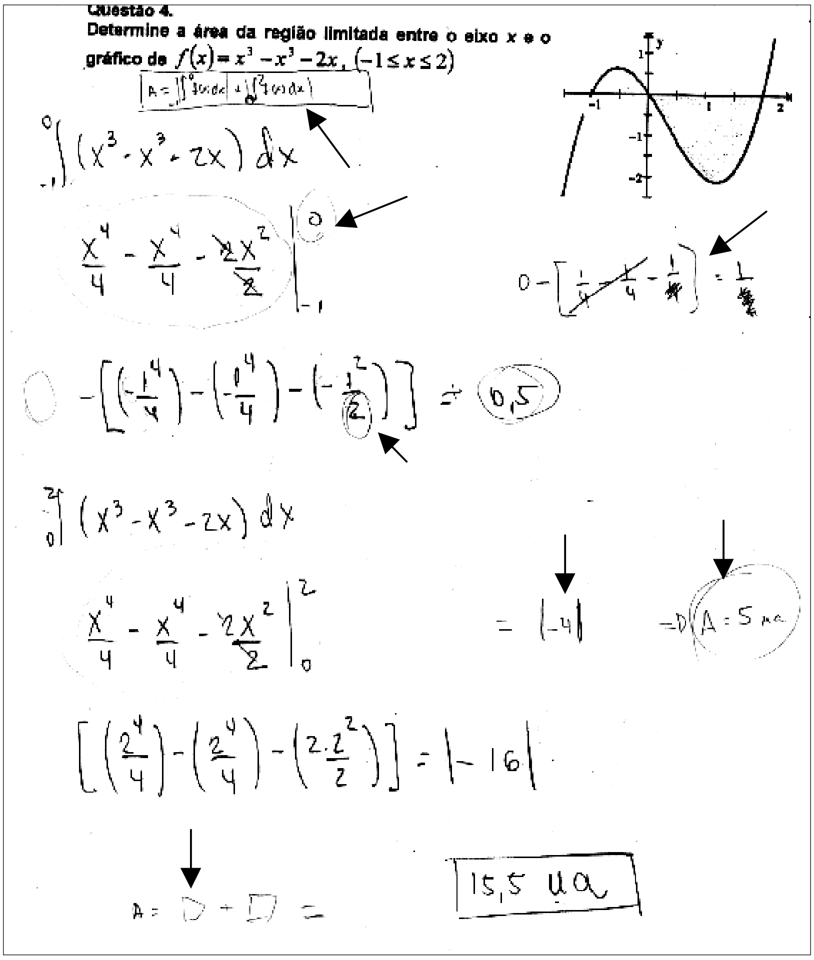
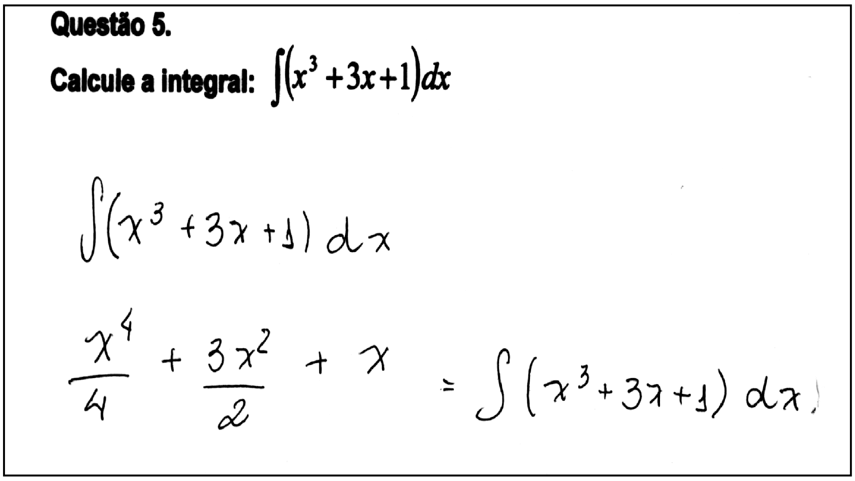


Figura 24: Anotações do Professor referente ao protocolo Q4-A1:

Quanto à análise do segundo protocolo da questão 4 (Figura 22), comenta que o aluno não percebeu o gráfico, pois calculou os valores da função *f* nos extremos de integração sem associá-los ao gráfico, além de não utilizá-los para nada. Verifica que ele (o aluno) não calculou a área procurada, pois não separou o intervalo de integração.

Prosseguimos com nossa entrevista com a análise dos protocolos referentes às questões Q5, Q6, Q7 e Q8, visando a identificação de indícios de como o professor interpreta a resposta de um aluno quando este resolve exercícios que envolvem técnicas de integração, ou seja, situações em que deve dispor de conhecimentos de teoremas, propriedades, métodos e técnicas de integração.



Questão 5.

Calcule a integral: $\int (x^3 + 3x + 1)dx$

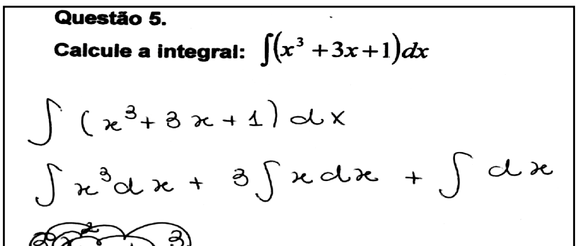
$$\int (x^3 + 3x + 1)\, dx$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x = \int (x^3 + 3x + 1)\, dx$$

Figura 25: Protocolo Q5 – A2

Ao analisar o protocolo Q5 – A2, o Professor comenta que o aluno "não colocou uma constante" exteriorizando que "apesar deles não darem muito valor para isso, é muito importante". Perguntamos o que o motiva pensar isso, respondeu:

> "A constante é realmente importante, pois quando você determina a integral como sendo a primitiva da função, na verdade nós calculamos, como eu falo para eles, uma família de funções. [...] e deixando de colocar essa constante, apesar de ser uma única letrinha, ele está representando apenas uma função, uma das infinitas funções possíveis que quando derivada me dê essa função que estamos integrando, então é um erro!. Mas, sinceramente eu não considero um erro que fizesse eu cancelar a questão do aluno."



Questão 5.

Calcule a integral: $\int (x^3 + 3x + 1)dx$

$$\int (x^3 + 3x + 1)\, dx$$

$$\int x^3 dx + 3\int x\, dx + \int dx$$

Quanto ao próximo protocolo (Q5-A3), revela que não há nada de diferente, pois não encontrou nenhum erro na resolução do aluno, cita apenas que não é usual a apresentação da segunda passagem (Figura 27), a não ser quando se inicia o estudo de integral.

$$\int x^3 dx + 3\int x\, dx + \int dx$$

Figura 27: Anotações do Professor referente ao protocolo Q5-A3.

Em seguida entregamos o protocolo Q6-A2.

Questão 6.

Calcule a integral: $\int x^3 \left(x^4 - 1\right) dx$

$$\int x^3 (x^4 - 1)\, dx$$

$$\int x^7 - x^3\, dx$$

$$\frac{x^8}{8} - \frac{x^4}{4} = \int x^3 (x^4 - 1)\, dx$$

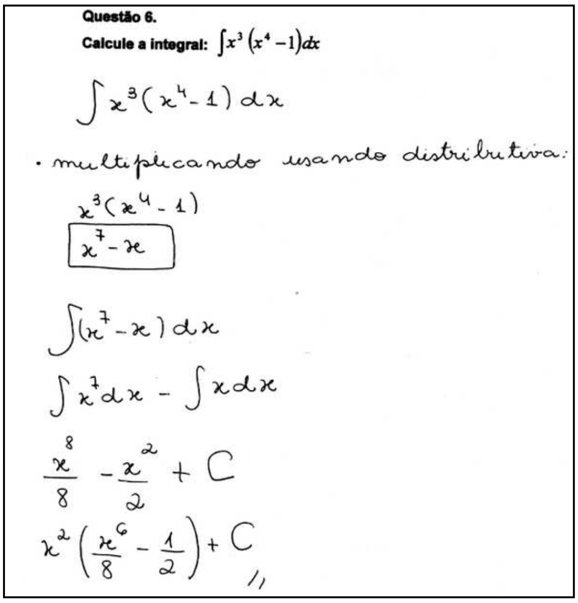
Figura 28: Protocolo Q6 –A2.

O Professor observa prontamente que o aluno não representou a constante de integração, comentando que a forma escolhida para resolução foi muito boa, efetuando antes a multiplicação e depois calculando da integral corretamente.

Notamos que ao analisar uma produção, que pede para calcular a integral de um polinômio, o Professor espera que o aluno resolva-a diretamente, exteriorizando que o uso de teoremas e propriedades pode ser considerado implicitamente uma vez que no começo do estudo de Integral, os alunos tiveram contato com esses teoremas e propriedades e não necessitam explicitarem.

Dessa forma, podemos verificar que os indícios de uma prática embasada na visão absolutista se tornam mais forte, pois admite a resolução do aluno como sendo o produto do saber acumulado, neste caso sem a necessidade de demonstrações.

Em outra resolução (protocolo Q6 - A3) verificou que o aluno errou a multiplicação (ver figura 30), e que se ele estivesse mais atento, aplicando a propriedade da distributiva corretamente teria acertado a questão, pois mostrou que sabe integrar uma função polinomial.



Questão 6.

Calcule a integral: $\int x^3(x^4-1)dx$

$\int x^3(x^4-1)\,dx$

• multiplicando usando distributiva:

$x^3(x^4-1)$

$\boxed{x^7-x}$

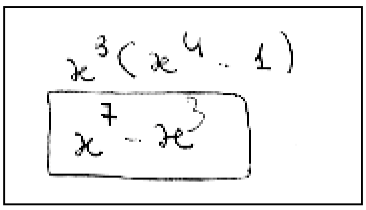
$\int (x^7-x)\,dx$

$\int x^7dx - \int x\,dx$

$\frac{x^8}{8} - \frac{x^2}{2} + C$

$x^2\left(\frac{x^6}{8}-\frac{1}{2}\right)+C$ //

Figura: 29: Protocolo Q6 – A3



$x^3(x^4-1)$

$\boxed{x^7-x^3}$

Figura 30: Anotação referente ao protocolo Q6-A3.

Apresentamos o primeiro protocolo da questão sete (Q7-A1).

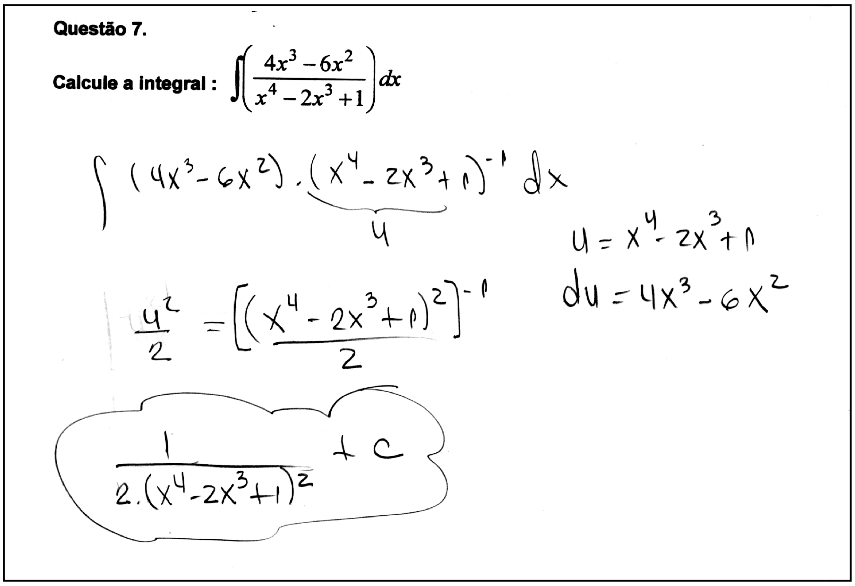


Figura 31: Protocolo Q7 – A1.

Ao analisá-la o Professor comenta que normalmente os alunos esquecem de colocar o *dx*, indicando no protocolo (Figura 32), no entanto, vale o comentário que o professor também esquece de colocar parênteses em $du=\left(4x^3-6x^2\right)dx$ deixando somente o $-6x^2$ multiplicado por dx.

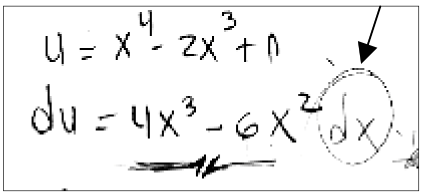


Figura 32: Anotação referente ao protocolo Q7-A1.

A seguir, comenta que de certa forma o aluno sabe calcular a primitiva por substituição, porém a partir de certo momento, se confundiu, indicando no protocolo qual deveria ser a resolução.

Questionado sobre o que deveria ter motivado o aluno responder dessa forma, exterioriza que provavelmente ele tenha resolvido muito rápido e não fez a substituição corretamente, afirmando que “parece até que é uma forma de memorizar, ele memorizou até aqui”, apontando para o protocolo.

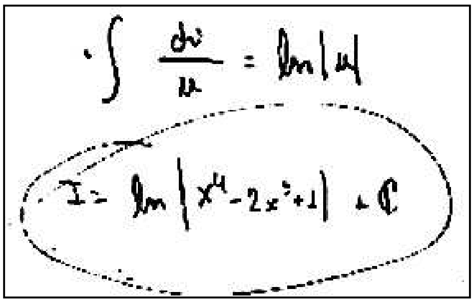
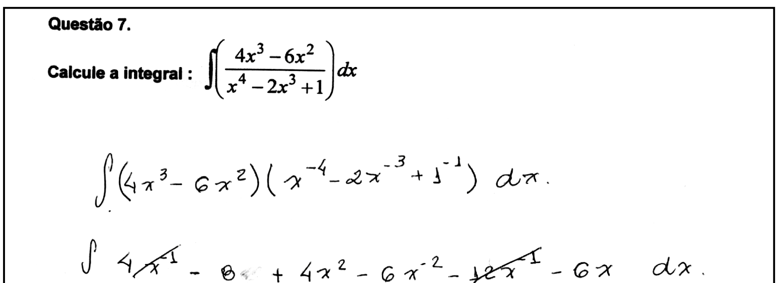


Figura 33: Resolução do Professor referente ao protocolo Q7-A1.

O Professor comenta que costuma valorizar aquilo o que o aluno faz certo, mesmo que seja uma simples identificação do tipo de exercício proposto, no entanto desconta com rigor os erros apresentados. Entendemos, dessa forma, que ao corrigir uma avaliação em que o aluno tenha justificado cada passa das demonstrações, livre de qualquer contradição, inclusive nas questões que envolvem algoritmos, o professor tem a expectativa de que execute os cálculos na seqüência certa, esperando do aluno uma postura formalista, da forma: faz assim - aplica essa definição - demonstra dessa forma.

Outra indicação dessa visão é apresentada ao analisar o segundo protocolo Q7-A2.



Questão 7.

Calcule a integral : $\int\left(\frac{4x^3-6x^2}{x^4-2x^3+1}\right)dx$

$\int (4x^3-6x^2)(x^{-4}-2x^{-3}+1^{-1})\, dx.$

$\int \cancel{4x^{-1}} - 8 + 4x^2 - 6x^{-2} - \cancel{12x^{-1}} - 6x \quad dx.$

O Professor diz que nesta questão não consideraria nada! Questionado sobre o motivo, explica que em sala de aula, diz que existe erro que não consideraria nada e um desses foi o cometido pelo aluno, pois ele mostrou que não sabe aplicar a propriedade distributiva e não tem a menor noção de potenciação, situações que tornam difícil a análise de uma questão como essa.

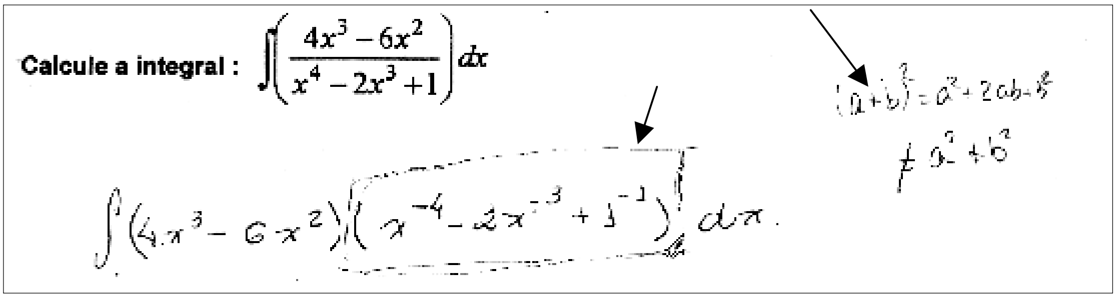
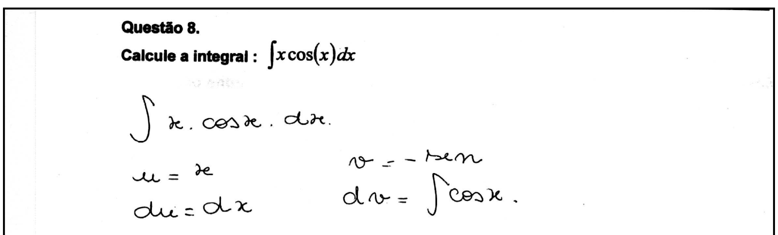


Figura 35: Anotações do Professor referente ao protocolo Q7-A2.

Neste momento o Professor solicita para encerrarmos, confirmando em seguida sua disponibilidade para nosso próximo encontro.

Nosso segundo encontro, após a recepção cordial e amigável que recebemos de nosso entrevistado, retomamos a entrevista que teve início há uma semana, entregando lhe um dos protocolos da questão oito (Q8-A3).



Após analisar a produção do aluno, ele verifica que a resolução está quase certa, a não ser pelo símbolo da integral e por não apresentar o argumento da função trigonométrica (indicações (1) e (2), respectivamente, apresentados no protocolo, Figura 37).

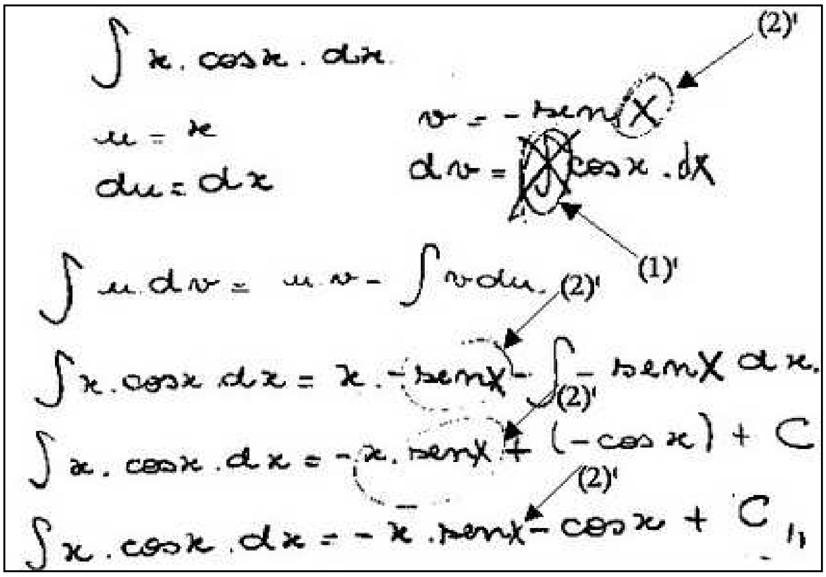


Figura 37: Anotações do Professor referente ao protocolo Q8-A3.

Ao analisar a segunda produção oferecida, (Q8-A1), percebe que o aluno cometeu o mesmo erro escrevendo $\cos dx$. O Professor relata que é algo comum entre os alunos escreverem *sen* ou *cos* de nada, dizendo que se não fosse esses erros, indicados no protocolo (Figura 39), teria pouca coisa a ser descontado.

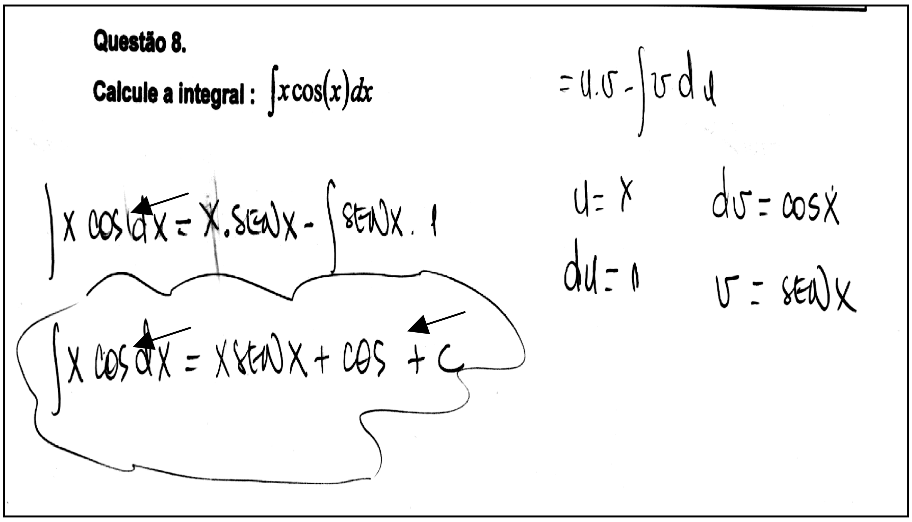


Figura 38 – Protocolo Q8 – A1.

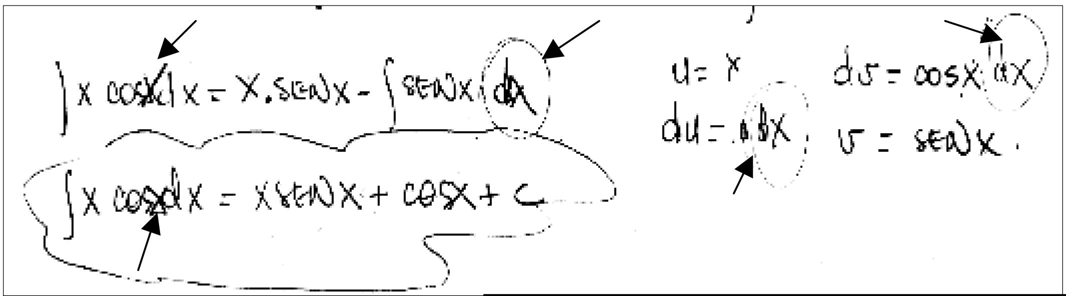


Figura 39: Anotações do Pro

Em seguida, apresentamos ao Professor, o protocolo (Q9-A1), para que o analise.

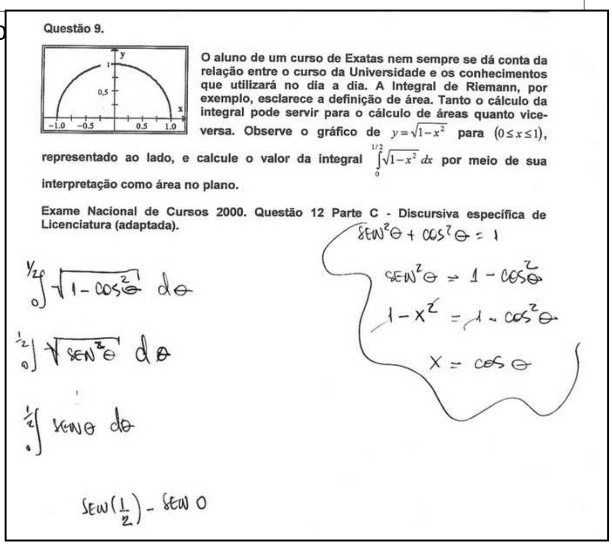


Figura 40: Protocolo Q9 – A1

O Professor comenta que o aluno realizou a mudança de variável, mas não mexeu nos extremos de integração e não resolveu a integral como pedido na questão. A nosso pedido, esclareceu que se levar em consideração a resolução por substituição trigonométrica, o aluno deveria ter alterado os extremos de integração, indicando no protocolo (Figura 41), diz que o aluno não resolveu a integral substituindo os extremos em $\operatorname{sen}\pi$.

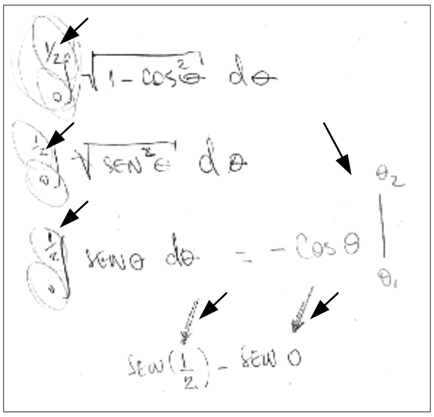
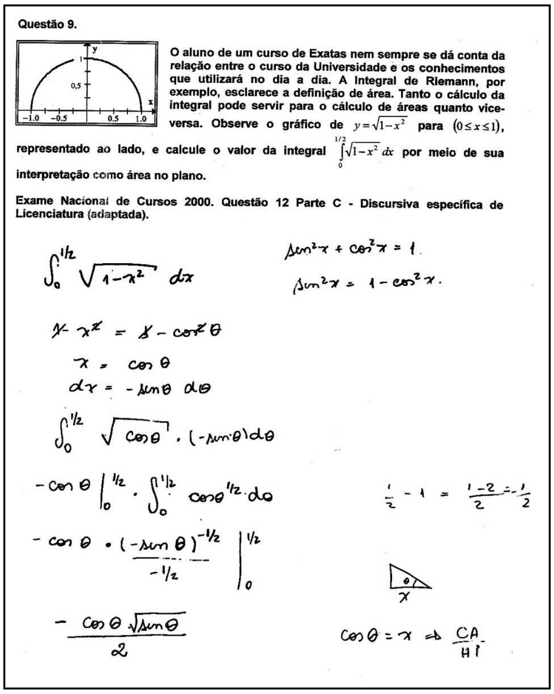


Figura 41: Anotações do Professor referente ao protocolo Q9-A1.



Questão 9.

O aluno de um curso de Exatas nem sempre se dá conta da relação entre o curso da Universidade e os conhecimentos que utilizará no dia a dia. A Integral de Riemann, por exemplo, esclarece a definição de área. Tanto o cálculo da integral pode servir para o cálculo de áreas quanto vice-versa. Observe o gráfico de $y=\sqrt{1-x^2}$ para $(0\le x\le 1)$, representado ao lado, e calcule o valor da integral $\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx$ por meio de sua interpretação como área no plano.

Exame Nacional de Cursos 2000. Questão 12 Parte C - Discursiva específica de Licenciatura (adaptada).

Figura 42: Protocolo Q9 – A2

Ao analisar o protocolo Q9-A2, referente à mesma questão, verifica que o aluno também não responde o que a questão pede que seja o cálculo da área. Observou que o aluno não realizou a substituição trigonométrica, anotando seus comentários no protocolo (ver figura 43).

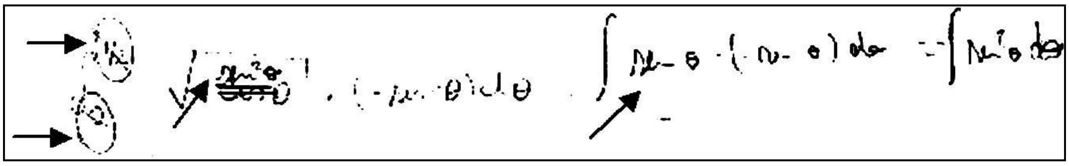


Figura 43: Anotações do Professor referente ao protocolo Q9-A2.

Verificamos em sua explanação como trabalharia essa questão em sua prática. O Professor preza a interpretação de questões aplicadas, pois faz observações sobre a importância dos conteúdos trabalhados em sala de aula, mostrando as diferentes formas que podem ser resolvidos os exercícios.

Em seguida iniciamos nossos questionamentos sobre a última questão, apresentando o protocolo Q10-A1.

Questão 10.
Durante a concretagem de uma laje num canteiro de obras, a bomba hidráulica que bombeava o concreto a partir do solo até a altura de 20 metros quebrou, dessa forma a saída para não parar o serviço, foi utilizar o guindaste disponível na obra, que eleva verticalmente uma carga de concreto, içando-a até a laje. Sabendo que essa carga vaza a uma taxa constate, **determine o trabalho produzido pelo guindaste, considerando que este trabalho é realizado por uma força de** $F(h) = 1280 - 5h$

$h = 20\,m$

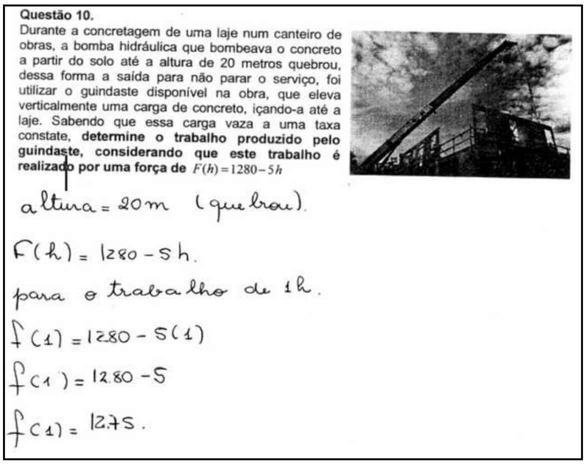
$F = 1280 - 5 \cdot 20$

$F = 1180$

Figura 44: Protocolo - Q10 – A1.

O Professor começa seus comentários sobre o enunciado, que “não se sabe se essa força está em função do tempo ou da altura”. Explicamos que o objetivo nesta questão era que considerasse a força em relação a altura, e que a analisasse nesse sentido. Em seguida, exterioriza que o aluno considerou a função força em função do tempo, no entanto não respondeu nada, determinando a força apenas para uma hora.

Apresentamos em seguida o último protocolo de nossa entrevista (Figura 45), em que o Professor verifica que o aluno considerou o *h* como altura, mas como o exercício pede trabalho e o aluno exibe sua resposta como força. O professor declara que o estudante “não tem a menor idéia do que vai fazer e nem de Física”.


Questão 10.
Durante a concretagem de uma laje num canteiro de obras, a bomba hidráulica que bombeava o concreto a partir do solo até a altura de 20 metros quebrou, dessa forma a saída para não parar o serviço, foi utilizar o guindaste disponível na obra, que eleva verticalmente uma carga de concreto, içando-a até a laje. Sabendo que essa carga vaza a uma taxa constate, **determine o trabalho produzido pelo guindaste, considerando que este trabalho é realizado por uma força de** $F(h)=1280-5h$

altura = 20m (quebrou).
$F(h) = 1280 - 5h$.
para o trabalho de 1h.
$f(1) = 1280 - 5(1)$
$f(1) = 1280 - 5$
$f(1) = 1275$.

Figura 45: Protocolo - Q10 – A3.

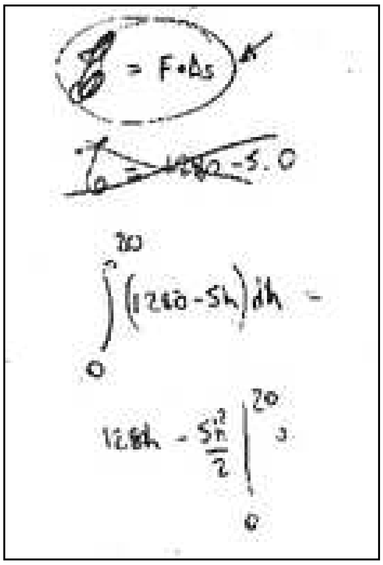


Figura 46: Anotações do Professor referente ao protocolo Q10-A1.

Questionamos sobre o que ele esperaria que esse aluno respondesse, elabora uma interpretação, indicando no protocolo (Figura 46) uma possível solução para a questão,

Terminada a análise, o Professor comenta sobre o enunciado dessa última questão, que é interessante colocar as unidades, pois sempre que trabalhamos com exercícios de Física é bom fazê-lo. Agradecemos pela disposição em conceder a entrevista e em responder nossas perguntas.

Já com o gravador desligado, combinamos uma outra data para que ou verificasse a transcrição ou complementasse possíveis dúvidas sobre sua fala. Na data combinada, conversamos sobre algumas colocações que havia feito, fato que não provocou alterações em nossas interpretações, porém o Professor pediu para que ficasse com uma cópia da transcrição para que analisasse melhor, prometendo que me entregaria em alguns dias.

Com a entrega da transcrição, perguntamos se gostaria de adicionar ou retificar alguns dos comentários feitos sobre as resoluções. Prontamente afirmou que não! Ficando satisfeito pela transcrição realizada. Percebemos, na revisão da transcrição entregue que o Professor não adicionou nenhuma alteração, correção ou comentário à sua fala, apenas correções quanto à digitação.

4.3. Conclusão do Estudo Exploratório.

Ao realizar o estudo exploratório, tivemos como principal objetivo a verificação e adaptação do instrumento de pesquisa que é composto pelo questionário, e roteiro da entrevista.

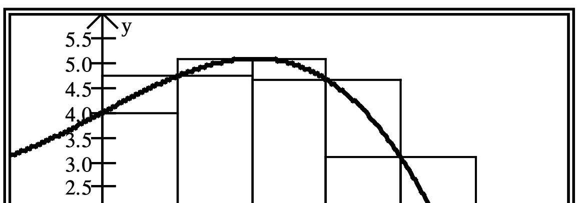
Com a realização da fase exploratória, tivemos a oportunidade de verificar a validade de nossas hipóteses, ou seja, se a forma com que planejávamos nosso experimento era viável ou não. Dividiremos nossos argumentos em três tópicos: quanto às questões que compõem o questionário, à categorização dos protocolos e ao roteiro das entrevistas a ser realizada com o grupo de professores.

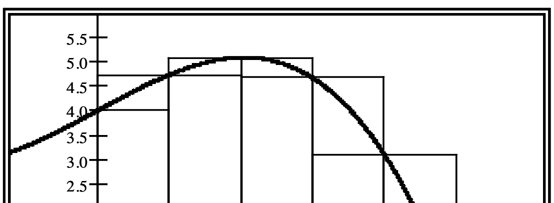
Verificamos através da análise dos protocolos que alguns dos enunciados deveriam ser reformulados, no sentido de apresentar condições mais favoráveis para que esses estudantes pudessem interpretar e formular respostas contendo indícios do conceito imagem e conceito definição sobre a Integral.

O questionário foi aplicado novamente a um grupo de trinta estudantes, com as alterações realizadas nos enunciados de algumas questões. O procedimento para a aplicação desse questionário aos estudantes permaneceu o mesmo.

Apresentaremos a seguir as mudanças efetuadas no questionário. Nas questões Q1a e Q1b foram refeitos os gráficos, pois as coordenadas representadas no eixo *x* estavam 'cortadas' ao meio, a intenção foi deixar evidenciados os valores das abscissas. As duas questões são muito semelhantes, sendo diferenciadas apenas pela representação de retângulos inferiores e superiores ao gráfico de f.

De: Para:





A questão dois não sofreu alterações, já a terceira foi alterada tanto na forma com que a função é representada como nos intervalos de integração. Passou de:

Q3 Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = sen(x)$, pelo eixo x e pelas retas x = -1 e x = 1.

Para:

Q3 Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = senx$ pelo eixo x e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$

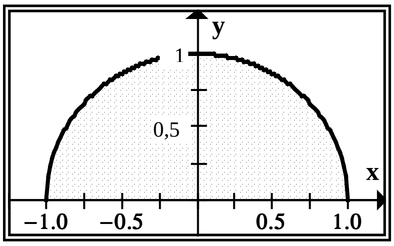
Quanto à questão quatro, já tínhamos percebido a necessidade de alterarmos e reaplicá-la e durante a entrevista com o professor, tornou-se mais evidente essa necessidade. Na versão aplicada primeiramente a função estava expressa por $f(x) = x^3 - x^3 - 2x$ e alteramos para $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

As questões Q5, Q6, Q7, não sofreram alterações, enquanto que na questão Q8 alteramos apenas a forma com que a função estava sendo expressa, de $\int x\,cos(x)\,dx$ para $\int x\,cos\,x\,dx$.

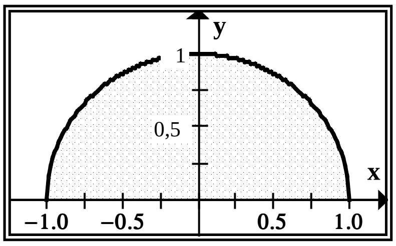
Na questão Q9, alteramos o enunciado e o intervalo de integração, visando uma maior interligação com o enunciado.

Passando de:

O aluno de um curso de Exatas nem sempre se dá conta da relação entre o curso da Universidade e os conhecimentos que utilizará no dia a dia. A Integral de Riemann, por exemplo, esclarece a definição de área. Tanto o cálculo da integral pode servir para o cálculo de áreas quanto vice-versa. Observe o gráfico de $y=\sqrt{1-x^2}$ para $(0 \le x \le 1)$, representado ao lado, e calcule o valor da integral $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}$ por meio de sua interpretação como área no plano.



Para:



O aluno de um curso de Exatas nem sempre se dá conta da relação entre o curso da Universidade e os conhecimentos que utilizará no dia a dia. A Integral de Riemann, pode ser interpretada como área. Tanto o cálculo da integral pode servir para o cálculo de áreas quanto vice-versa. Observe o gráfico de $y=\sqrt{1-x^2}$ para $(0 \le x \le 1)$, representado ao lado, e calcule o valor da integral $\int_0^{1} \sqrt{1-x^2}$ por meio de sua interpretação como área no plano.

Com esta modificação, o estudante poderá dar a resposta diretamente, pois a superfície em pauta é um quarto de círculo de raio 1.

Na última questão, adicionamos a variável *h* para a altura e a unidade para a função força seguindo as recomendações do professor.

Acreditamos que essas mudanças tornaram-se necessárias para que pudéssemos realizar uma categorização mais abrangente dos protocolos produzidos pelos estudantes, relacionando-os com o referencial teórico. No entanto a necessidade de alterações em algumas questões tornou-se evidente na entrevista que realizamos com o Professor, como no enunciado da questão quatro, que apresentava o erro de digitação ou na questão dez, quando o Professor relatou suas experiências em questões que utilizam os conceitos de Física, orientando para fornecer as unidades dos dados apresentados no enunciado.

Optamos em descartar todas as produções que tínhamos coletados e analisados inicialmente, motivados pelas alterações que realizamos nos enunciados das questões. Alguns dos estudantes colocaram-se à disposição para refazer o questionário. O questionário reformulado foi aplicado a outros estudantes para compor um novo rol de protocolos, suficientemente válidos a fazerem partes das produções a serem apresentadas aos professores.

Ademais, a entrevista com o Professor apresentou indicações interessantes de como proceder nas sessões de entrevistas. Tivemos a oportunidade de testar se o roteiro de entrevistas se mostrou válido, de acordo com o programado. Vimos que mesmo que a entrevista tenha ocorrido com um único professor, precisaremos de um tempo maior para que os professores possam analisar as questões.

Permaneceremos com o eixo central do roteiro, sendo realizados dois encontros que em alguns momentos chamamos de sessões. Na primeira, foram apresentados alguns protocolos referentes às questões Q1a, Q1b, Q2, Q3, Q4 e Q5, que visavam investigar as concepções que envolvem o conceito de Integral a respeito das noções relativas à representação gráfica de uma função para o cálculo de sua Integral, assim como qual a importância da utilização de seu gráfico.

Na segunda, foram analisadas algumas produções das questões Q6, Q7 e Q8, Q9 e Q10 com a intenção de estimular a discussão a respeito das técnicas e métodos de integração, assim como a aplicação deste conceito em outras áreas do conhecimento.

Um grupo de três professores que ministram a disciplina de Cálculo em uma mesma instituição, no entanto para cursos diferentes, se reuniram em encontros que chamaremos de sessões. Nesses encontros os professores analisaram os mesmos protocolos, já que entregamos uma cópia, por vez, de cada protocolo a cada um dos professores, para que analisassem em conjunto, havendo um tempo suficiente para que discutam sobre a produção do aluno.

A entrevista com o Professor foi tranqüila, apresentamos os protocolos um a um não havendo interrupções desnecessárias. O entrevistado mostrou-se empolgado pela sua contribuição com este estudo, esclarecendo todas as respostas aos questionamentos e perguntas que fizemos, colocando-se ainda à nossa disposição para quaisquer esclarecimentos adicionais.

De forma geral, o Professor transmitiu em seu discurso, a aparência de ter uma prática educacional baseada na Filosofia Absolutista, com indícios da visão formalista, pois enfatiza a importância dos conteúdos, conduzindo a aula de forma a apresentar a teoria, exemplificá-la e propor problemas, esperando que o aluno possa respondê-los assumindo as regras de forma rígida, sem falhas ou desvios.

No momento da análise da produção de um aluno, o Professor demonstra que exige não só os tópicos apresentados em sala de aula, mas também os recursos matemáticos necessários, como a observação da representação gráfica de uma função, no cálculo da área da região limitada entre o gráfico da função e o eixo x e o desenvolvimento matemático apresentado.

CAPÍTULO 5:

O EXPERIMENTO

Neste capítulo, é apresentado o que chamamos de Experimento, ou seja, a atividade que envolve as escolhas dos protocolos produzidos pelos estudantes, as entrevistas realizadas com o grupo de professores durante os dois encontros e as anotações realizadas por eles.

Uma vez que a caracterização dos participantes já foi apresentada na secção 3.2, iniciamos com um breve comentário dos protocolos selecionados de acordo com o referencial teórico escolhido. Gostaríamos de salientar que não apresentaremos “todas” as respostas produzidas pelos estudantes, forneceremos apenas as produções escolhidas em virtude do grande número de produções.

Para as entrevistas contamos com a participação de um grupo com três professores que ministram a disciplina de Cálculo em uma mesma instituição, no entanto para cursos diferentes, se reuniram em dois encontros. Nesses encontros os professores analisaram os mesmos protocolos, e entregamos-lhes uma cópia por vez de cada protocolo a cada um dos professores, para que analisassem em conjunto, havendo um tempo suficiente para que discutissem sobre a produção do aluno.

As entrevistas com os participantes foram tranqüilas, apresentamos os protocolos um a um e tentamos explorar todas as manifestações dentro do possível. Os entrevistados mostraram-se dispostos durante as entrevistas, esclarecendo todas as respostas aos questionamentos, perguntas e situações que criamos, colocando-se ainda à nossa disposição para quaisquer esclarecimentos adicionais, futuramente.

5.1. *As Produções dos Alunos.*

Após a fase exploratória, reformulamos o questionário e o aplicamos a trinta alunos de duas instituições de ensino superior de São Paulo. De posse das produções, realizamos uma categorização à luz do referencial teórico de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* de Tall e Vinner (1981), Vinner (1997) e Tall e Rasslan (2002), de forma que foi possível selecionar em média três protocolos de cada questão. Tal seleção está descrita na secção 3.4 da metodologia. Em seguida, as apresentamos a um grupo de três professores que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em uma universidade particular de São Paulo.

Apresentamos a seguir os protocolos selecionados com uma breve descrição da categoria em que as enquadramos, algumas vezes a produção entregue aos professores não apresentava uma situação peculiar, no entanto, acreditamos que são exatamente essas produções que mais se aproximam da prática docente dos professores. Os protocolos receberam o seguinte código:

Q2 – A18-IV

Questão Dois | Aluno Dezoito | Categoria Quatro

Vejamos quais os protocolos selecionados.

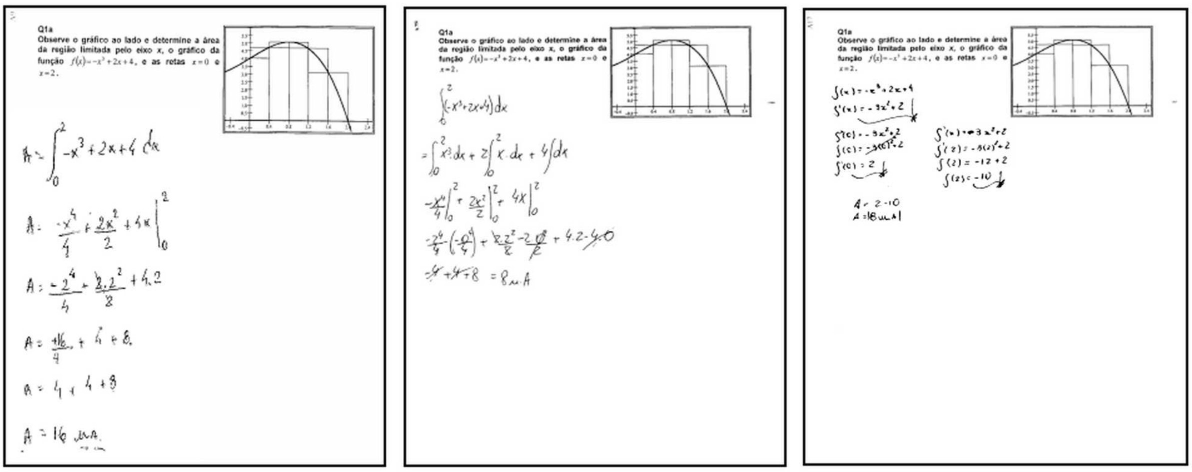


Figura 48: Protocolos: Q1a – A9-Ib; Q1a – A28-Ia; Q1a – A17-III.

O primeiro protocolo entregue aos professores (Q1a-A9-Ib) pertence à categoria em que a área da região abaixo do gráfico da função está associada aa Integral, como incorreções na resolução. Apresenta uma falha nos procedimento de cálculo $\left[-4^2 \neq (-4)^2\right]$, entendemos que isso representa um conflito na mobilização do conceito imagem evocado e do conceito definição. No segundo (Q1a-A28-Ia) é apresentada a resolução correta da integral, sugerindo a mobilização do *conceito definição* que constitui a interpretação da área de uma região plana como a integral de uma função de uma variável, em um dado intervalo. Já o terceiro protocolo, é baseado na modalidade pseudoconceitual de pensamento, esta produção sugere que o aluno não mobiliza os conceitos imagens necessários para a interpretação da integral como área de uma região plana.

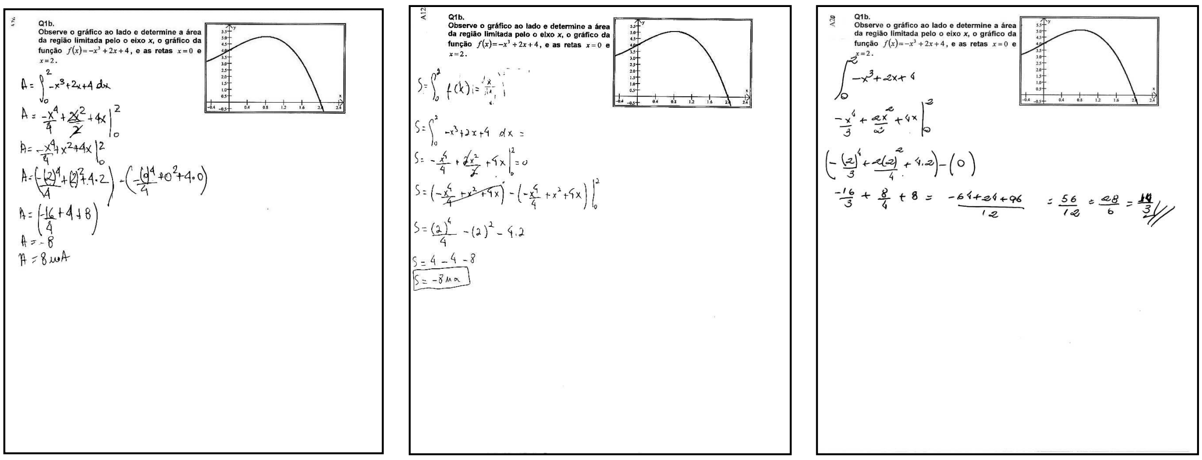


Figura 49: Protocolos: Q1b – A26-Ia; Q1b – A12-Ib; Q1b – A20-IIb.

O primeiro protocolo da questão Q1b (Q1b-A26-Ia) apresenta a resolução correta da integral, o que sugere a mobilização do *conceito definição* que se traduz pela a interpretação da área de uma região plana como a integral de uma função. No entanto, a segunda produção apresenta uma falha conceitual relativa à Integral uma vez que, o aluno efetua $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$ ao invés de $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Já o terceiro protocolo apresenta indícios da mobilização do conceito imagem evocado, no entanto o aluno efetua procedimentos incorretos do Cálculo.

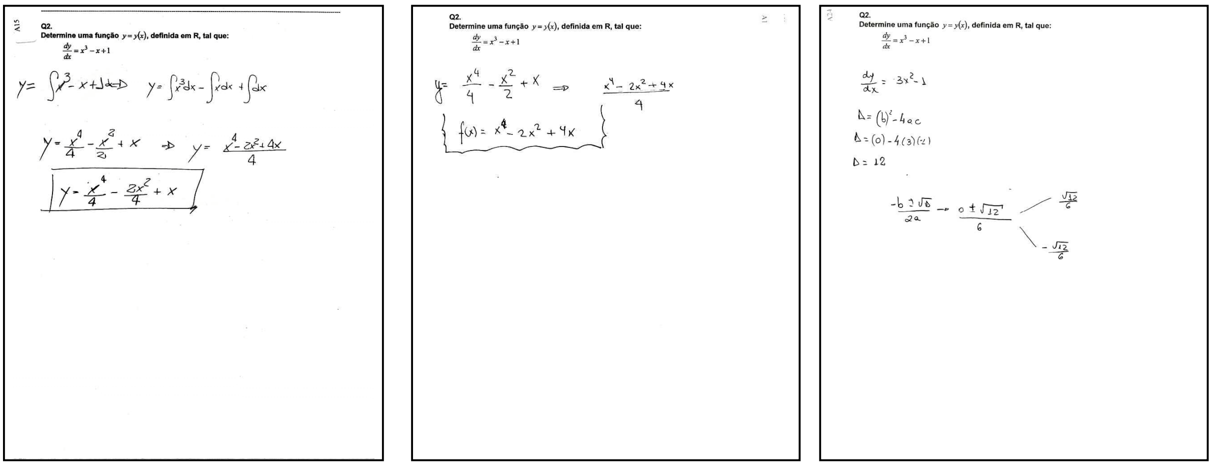
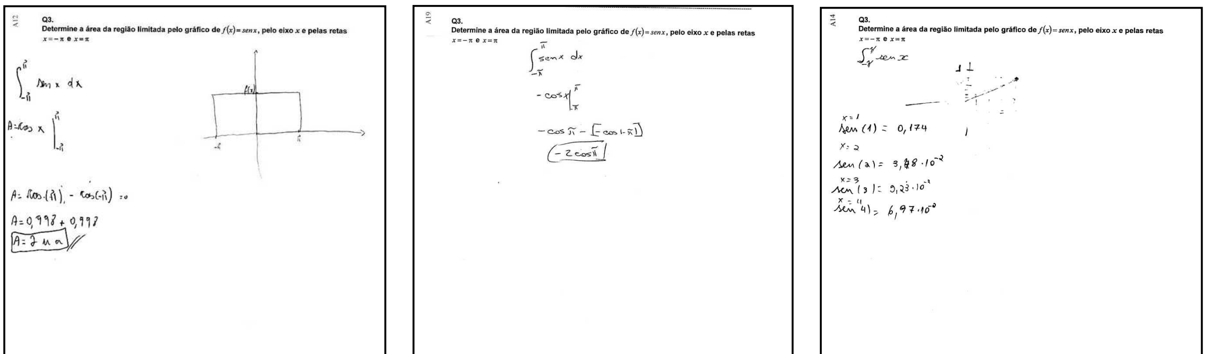


Figura 50: Protocolos: Q2 – A15-Ib; Q2 – A1-Ic; Q2 – A24-II.

O protocolo Q2-A15-Ib sugere a mobilização do conceito definição que relaciona a primitiva de uma função como a integral indefinida, atribuindo o valor 0 (zero) para a constante arbitrária. O segundo Protocolo (Q2-A1-Ic) indica conflitos na mobilização do conceito imagem e do conceito definição, pois o aluno apresenta erros de procedimento. Na produção Q2-A24-II verificamos uma falha no conceito imagem evocado relacionado a conceitos de Cálculo, pois o estudante aplica a derivação em $\frac{dy}{dx}$.



Quanto à questão três, esperávamos respostas que evidenciassem principalmente à confecção e utilização do gráfico, no entanto foram poucos os alunos que apresentaram indícios de sua utilização. O protocolo Q3-A12-II sugere a mobilização do conceito imagem e do conceito definição, no que se refere ao cálculo da integral como área da região limitada pelo gráfico da função, já a resolução contida no protocolo Q3-A19-III indica falha no conceito imagem evocado: o aluno apresenta a resolução da integral corretamente, mas não percebe que a região limitada pelo gráfico está localizada parte abaixo e parte acima do eixo x. A resolução apresentada pelo aluno A14 se enquadra na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou aparentemente sem sentido; esta produção sugere que este aluno não mobiliza os conceitos imagens básicos referentes ao cálculo da integral como área de uma região limitada pelo gráfico.

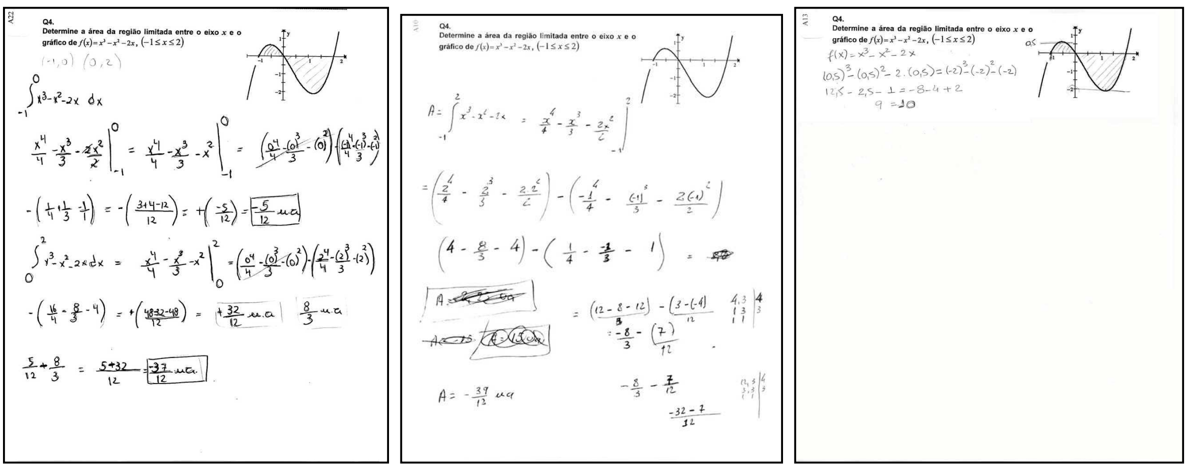


Figura 52: Protocolos: Q4 – A22-I; Q4 – A10-II; Q4 – A13-III.

Depois de apresentar a questão três, cujo enunciado não apresenta a representação gráfica, segue a questão quatro em que o enunciado exibe o gráfico da função. O primeiro protocolo selecionado (Q4-A22-I) indica a mobilização do conceito imagem e do conceito definição referente ao cálculo da área da região limitada, em que o estudante visualiza e hachura a região plana em questão, no entanto comete erros de cálculo.

No segundo protocolo (Q4-A10-II) percebemos que o aluno não interpretou a representação gráfica da função, pois efetuou o cálculo da intergral para os extremos x= –1 e x=2, esta resolução indica a mobilização do conceito definição, que interpreta a área da região em questão como sendo a integral definida em [-1, 2]. Já o último protocolo selecionado desta questão apresenta uma resolução baseada na modalidade pseudoconceitual do pensamento, o estudante não mobiliza nenhum conceito imagem sobre o assunto.

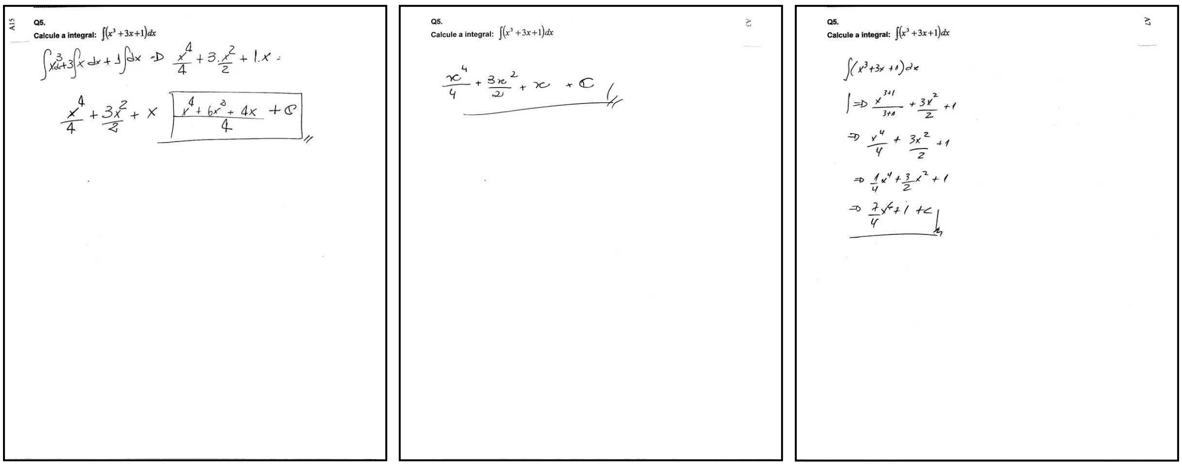


Figura 53: Protocolos: Q5 – A15-Ia; Q5 – A3-IIa; Q5 – A7-III.

O protocolo produzido pelo aluno 15 referente à questão cinco, apresenta dois elementos específicos do conceito imagem para o cálculo da integral indefinida: a indicação da utilização da propriedade aditiva de integração e a interpretação da integral como uma família de funções por meio da indicação da constante arbitrária *c*. O segundo protocolo, produzido pelo aluno 3 apresenta uma resposta direta, sem explicitação do cálculo; entendemos que existe uma mobilização do conceito imagem e conceito definição, mas esta afirmação ainda pode criar questionamentos.

O protoloco Q5-A7-III é categorizado na modalidade pseudoconceitual de pensamento ou em respostas erradas. Esta produção apresenta indícios de que o estudante mobiliza alguns elementos específicos do conceito imagem, como o cálculo da integral da função potência, no entanto apresenta falhas em cálculo.

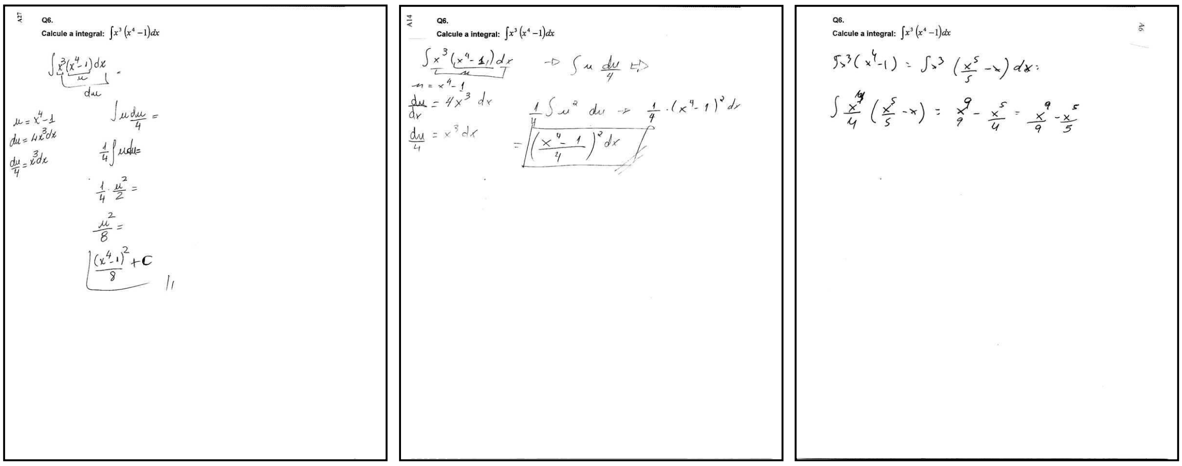
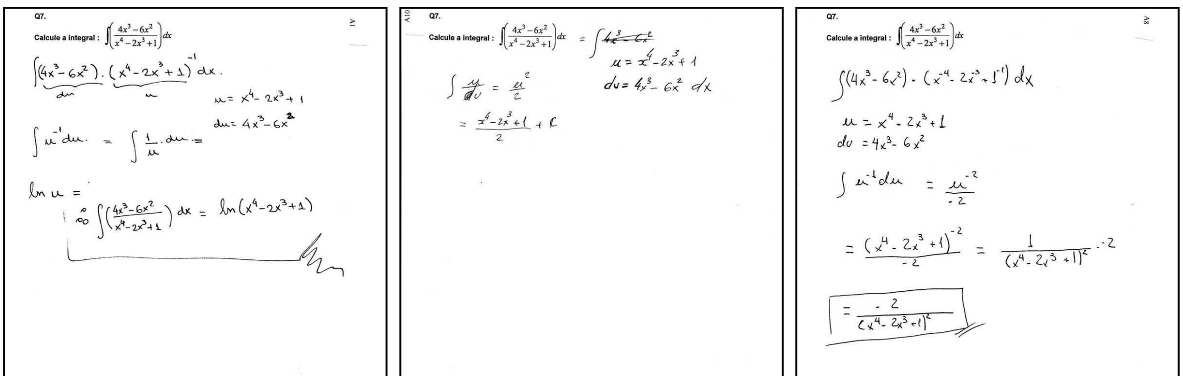


Figura 54: Protocolos: Q6 – A27-IIa; Q6 – A14-IIb; Q6 – A6-III.

Tanto o primeiro como o segundo protocolo selecionado da questão seis (Q6-A27-IIa e Q6-A14-IIb) apresentam elementos específicos que indicam que o aluno mobiliza o conceito imagem referente à utilização da técnica de substituição de variável, ainda que o segundo apresente uso incorreto de procedimentos algébricos. A terceira produção (Q6-A6-III) apresenta indícios de falhas na mobilização do conceito imagem do estudante, relacionada ao cálculo da integral de uma função de uma variável: a integral da multiplicação de funções não é a multiplicação das integrais dessas funções.



Nesta questão, selecionamos o protocolo produzido pelo aluno A1, em que apresenta elementos que indicam a mobilização de conceito imagem e conceito definição referente ao cálculo da integral de uma função de uma variável por meio da utilização da técnica de substituição de variável. Já o protocolo (Q7-A10-Ib) também contém indícios dessa mobilização, no entanto apresenta o uso incorreto de propriedades da integração. A produção do aluno A8 apresenta indícios de uma resposta baseada na modalidade pseudoconceitual de pensamento: o estudante apresenta desconhecimento das propriedades de potências e comete equívocos na efetuação do cálculo da integral.

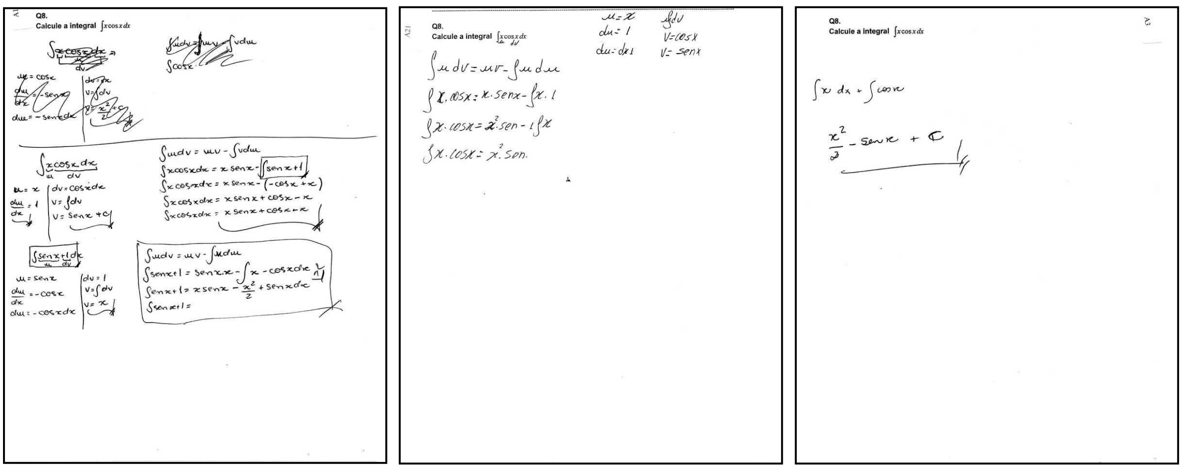
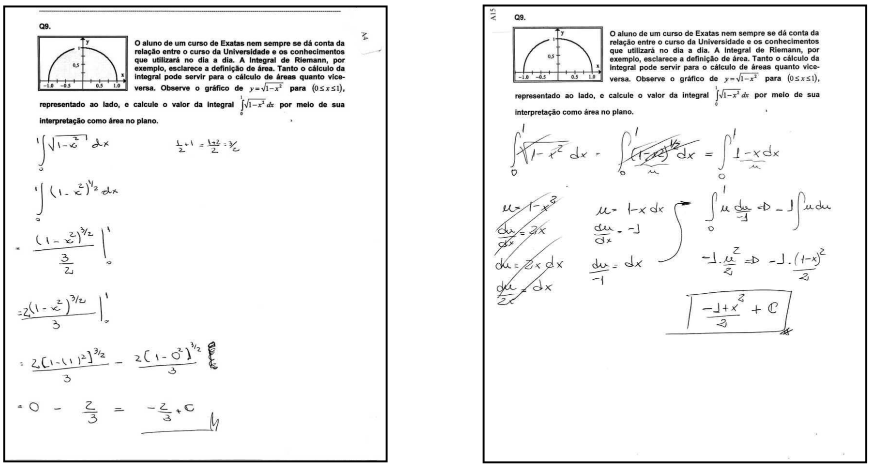


Figura 56: Protocolos: Q8 – A17-Ia; Q8 – A21-Ib; Q8 – A3-II.

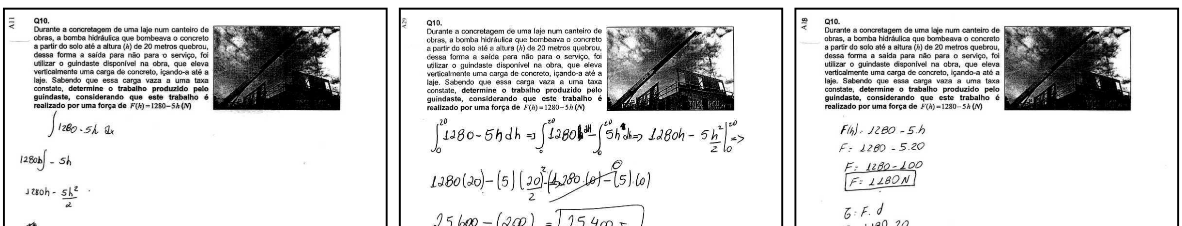
O primeiro e o segundo protocolo selecionados referentes às respostas da questão oito (Q9-A17-Ia e Q8-A21-Ib) apresentam indícios da mobilização de elementos específicos do conceito imagem e conceito definição no que diz respeito ao cálculo da integral utilizando a técnica de integração por partes; enquanto que na primeira o aluno explicita as passagens evidenciando os procedimentos, o aluno 21 efetua incorretamente a técnica de integração. O terceiro protocolo produzido pelo aluno A3, apresenta indícios da modalidade pseudoconceitual de pensamento.


Q9.

O aluno de um curso de Exatas nem sempre se dá conta da relação entre o curso da Universidade e os conhecimentos que utilizará no dia a dia. A Integral de Riemann, por exemplo, esclarece a definição de área. Tanto o cálculo da integral pode servir para o cálculo de áreas quanto vice-versa. Observe o gráfico de $y=\sqrt{1-x^2}$ para $(0 \le x \le 1)$, representado ao lado, e calcule o valor da integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ por meio de sua interpretação como área no plano.

Figura 57: Protocolos: Q9 – A4-I; Q9 – A15-I.

Para a questão nove selecionamos apenas dois protocolos. Por se tratar de uma questão muito específica, as respostas obtidas não foram de todo as esperadas: ou os alunos responderam com indícios de mobilização do conceito imagem acerca da integral de uma função por meio da técnica de substituição trigonométrica ou não responderam. As duas produções selecionadas apresentam alguns conflitos conceituais, como na primeira (Q9-A4-I) em que a distribuição de expoentes para a soma não é válida.


Q10.

Durante a concretagem de uma laje num canteiro de obras, a bomba hidráulica que bombeava o concreto a partir do solo até a altura (h) de 20 metros quebrou, dessa forma a saída para não para o serviço, foi utilizar o guindaste disponível na obra, que eleva verticalmente uma carga de concreto, içando-a até a laje. Sabendo que essa carga vaza a uma taxa constate, **determine o trabalho produzido pelo guindaste, considerando que este trabalho é realizado por uma força de** $F(h)=1280-5h\,(N)$

Tanto o primeiro como o segundo protocolo referentes à questão dez, selecionados para apreciação dos professores (Q10-A11-Ia e Q10-A29-Ib) sugerem alguns indícios na mobilização de dois elementos específicos do conceito imagem necessários para o cálculo da integral da função força indicada na questão, como também alguns resquícios da utilização das propriedades de integração e a interpretação da integral como sendo o Trabalho (τ) realizado. Já o terceiro protocolo selecionado (Q10-A18-II) sugere que o estudante não mobiliza o conceito imagem do Trabalho (τ) realizado como sendo a integral da função num dado intervalo, pois interpreta o Trabalho como se a força fosse constante o intervalo.

Ao analisarmos as produções desses alunos, percebemos que os estudantes normalmente respondem as questões propostas por meio de seus conceitos imagens e muitas vezes, nós professores esperamos que utilizem a definição formal.

Outro fato muito importante que pudemos perceber é a falta de conhecimento de base (ensino básico) que a maioria dos alunos apresentaram; as dificuldades apresentadas são tamanhas e muitas vezes os tópicos de Integral acabam prejudicados por tais dificuldades.

5.2. Descrição e Análise das Entrevistas.

As entrevistas com o grupo de professores, aqui denominados por Alfa, Beta e Gama, foram realizadas em uma das unidades da universidade em que lecionam, até mesmo para facilitar o acesso e a participação de todos. A recepção por Alfa e Beta foi muito cordial, mostrando certa disponibilidade e disposição em conceder a entrevista. Não contamos com a presença de Gama para o início da entrevista, pois ele se atrasou, alegando problemas de trânsito, juntando-se a nós durante a análise do segundo protocolo selecionado da questão três.

Como previsto não conseguimos realizar a entrevista em um único encontro, sendo marcado o segundo para a semana seguinte. O primeiro durou aproximadamente duas horas, incluindo nossa conversa inicial na espera ao professor Gama. Nesta seção foram analisados os protocolos das questões Q1a até Q5, enquanto que no segundo encontro, que realizamos no mesmo local e hora, durou cerca de uma hora e trinta minutos e nele foram analisados os protocolos das questões Q6 a Q10.

As entrevistas foram gravadas e ao término de suas transcrições, percebemos que as respostas e posicionamentos instigados pelos protolocos selecionados de cada questão se completam em um conjunto de concepções expressas pelos três professores. Dessa forma, para facilitar o nosso trabalho durante a análise das idéias expressas pelos professores referentes aos protocolos analisados por eles, optamos chamar de ‘Episódios’ as análises referentes a cada uma das questões, ou seja, Episódio um para as questões Q1a e Q1b, Episódio dois para a questão 2 e assim por diante. Vale lembrar que o termo *Episódio* empregado aqui não tem em relação com termo utilizado no Modelo de Estratégia Argumentativa – MEA.

5.2.1. Relato e Análise das Entrevistas com o Grupo

No início do primeiro encontro, com o gravador desligado, realizamos uma conversa amigável sobre assuntos cotidianos, pois estávamos esperando o professor Gama chegar. Aguardamos por cerca de quinze minutos e mesmo sem a presença do professor Gama demos início à nossa entrevista. Com o gravador ligado, agradecemos novamente a participação dos professores e explicamos que eles analisariam três produções de cada questão fornecida, como se fosse a avaliação de uma atividade de seu aluno. A seguir apresentaremos o relato das entrevistas divididas em episódios.

EPISÓDIO UM.

Este episódio contém o relato e análise de seis protolocos referentes às questões Q1a e Q1b. Apresentamos primeiramente o protocolo Q1a-A9-Ib aos professores que inicialmente resolveram a questão proposta. Quando questionados sobre o que acharam da questão e da resolução, Beta aparentando um certo desconforto ou receio quanto ao ter sua fala gravada, respondeu ser muito crítico quanto à falta da apresentação dos parênteses (indicação 1 na Figura 59), indicando a preocupação com os procedimentos de cálculo, dizendo em seguida que gosta de mostrar para os alunos que se deve substituir a variável da função primitiva pelos extremos de integração, mesmo se um destes for zero (Ver indicação 2).

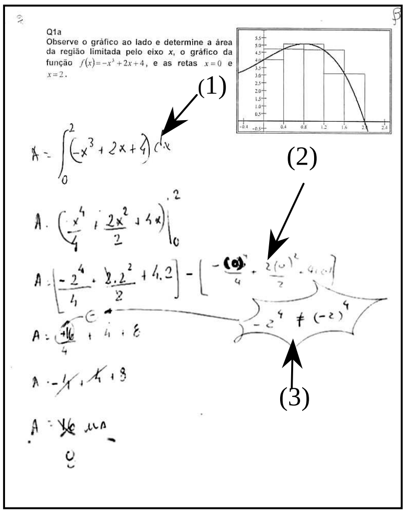


Figura 59: Anotações realizada por Beta em Q1a-A9-Ib

Tanto Alfa como Beta consideram uma situação clássica o erro de sinal apresentado $-2^4 \neq (-2)^4$ indicada por (3) na figura 59; Alfa comenta que “é um estigma que eles trazem lá do fundamental ou médio”.

Os professores exteriorizam em sua fala que o grande problema do aluno não se encontra no Cálculo Diferencial e Integral e sim na falta de conhecimentos anteriores.

De acordo com os professores:

> Beta: “O conceito de Integral está perfeito, mas o problema dele qual que foi? Matemática!”
>
> Alfa: “É, esse é um tema interessante. Costumo falar para eles (os alunos) que o problema deles não é o conceito de Integral, até que isso eles absorvem fácil, mas o problema está na ‘matemática fundamental’”.

No segundo protocolo apresentado, os professores ao analisarem a produção comentam que ela está correta. Questionados quanto à resolução apresentada, Beta diz que o aluno seguiu um procedimento de “baixo risco”, ou seja, aplicou a propriedade de soma de integrais, preferindo separar em partes menores. Já no terceiro protocolo, os professores discutiram que o aluno não resolveu nada, no entanto, quando questionados se o aluno não respondeu o pedido, revelam:

> Alfa: Não, não resolveu. “…” Normalmente quando eu corrijo, eu faço isso aqui, “isto é uma derivada?” (Figura 60, indicação (2)) “Isso daqui é o que? Um f ou um símbolo de integral” (1)?
> Beta: Para mim isso é um “f” (1), mas coloquei em dúvida, pois fui eu quem o colocou. Então colocaria, “derivada?” (2), em seguida “coincidência”(3), e colocaria o que deveria ser feito (4). Eu faço isso!

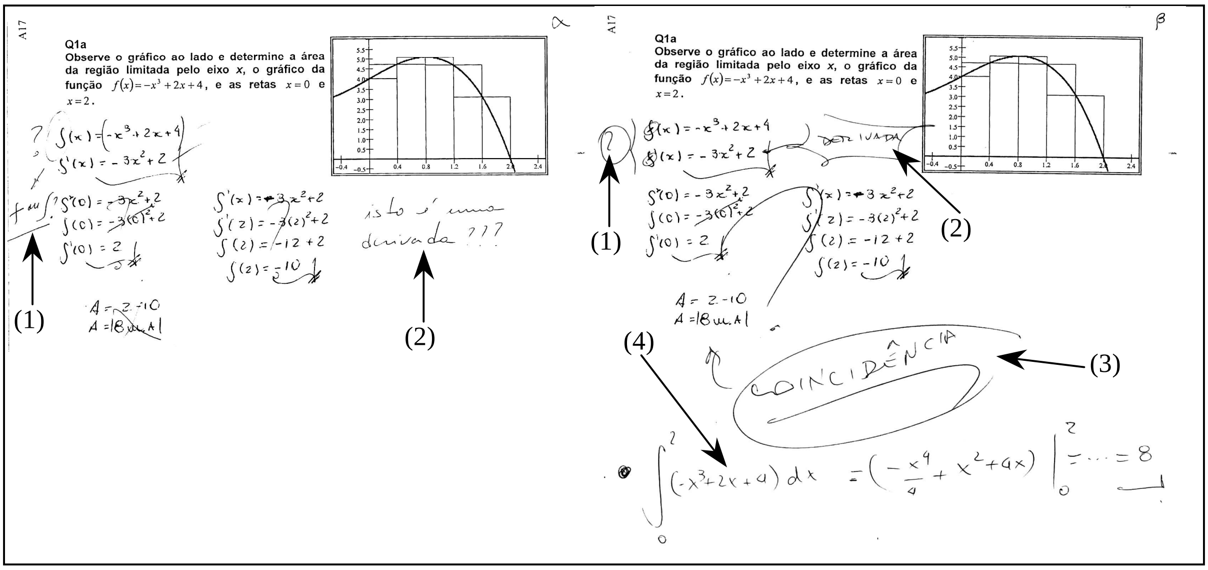


Figura 60: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q1a-A17-III

Continuamos a entrevista com a entrega do protocolo Q1b-A26-Ia Beta ficou intrigado com nossa fala a respeito da diferença entre a Q1a e Q1b, sobre a presença de retângulos inferiores e superiores. Mesmo com a iniciativa de discussão proporcionada por Alfa sobre a importância dos procedimentos matemáticos envolvidos, Beta argumenta que está corrigindo a questão como sendo de Cálculo Diferencial e Integral e questionado sobre como reagiria se o aluno resolvesse o exercício utilizando os retângulos, responde:

> Beta: **Eu estou dando aula de Cálculo diferencial e Integral, então eu não aceito!** É a mesma coisa que eu pegar um aluno fazendo multiplicação... Ele faz dois mais dois mais dois, ... vai dar Mil, mas eu quero saber se ele sabe multiplicar, não se ele sabe somar! Eu estou vendo por essa perspectiva, OK? Isso me chamou a atenção, pois no outro você falou sobre retângulos e esse ...

Sua fala indica que não admitiria nenhuma resposta diferente, insinuando que o aluno não iria calcular a área dos retângulos. Notamos neste momento que Beta exterioriza concepções embasadas na visão absolutista da matemática, considerando a resposta pretendida como corpo absoluto, devendo ser estruturada e baseada nos conhecimentos trabalhados em sala de aula. Por sua vez, Alfa aparenta ter suas concepções baseadas na visão falibilista da matemática, pois durante a correção da produção de um aluno, procura verificar o desenvolvimento, utilizando o erro como um ente do processo de ensino e aprendizagem.

A seu pedido, apresentamos a produção Q1b-A12-Ib. Beta comenta, novamente, a falta dos parênteses e do diferencial (*dx*) (veja a indicação (1) na figura 61) e logo depois os dois verificam que o aluno inverteu a ordem dos limites de integração (2), calculando $\int_2^0 f(x)dx$ ao invés de $\int_0^2 f(x)dx$. Questionamos sobre o que eles considerariam a parte conceitual ou a parte técnica. Responderam:

> Beta: Não, não a parte conceitual.
>
> Alfa: Ele errou parte da parte conceitual.
>
> Beta: Isso mesmo, ao invés de fazer o de cima menos o de baixo, ele fez o de baixo menos o de cima.
>
> Alfa: É, ele inverteu o intervalo de integração.

Beta: Talvez, se ele tivesse colocado o módulo poderia ter salvado a questão.

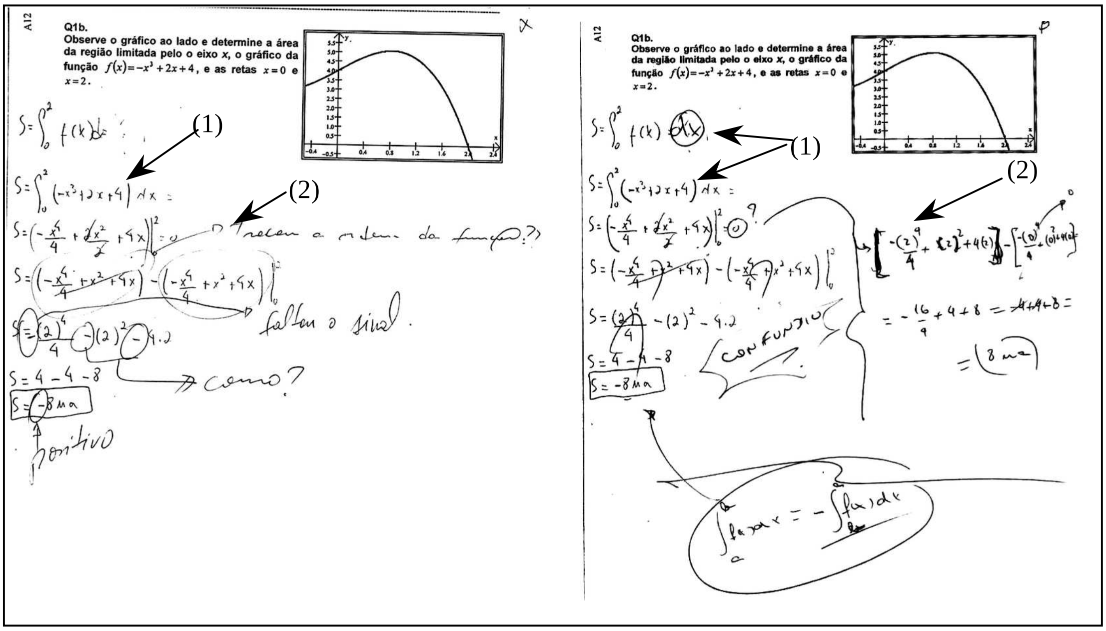


Figura 61: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q1b-A12-Ib

Percebemos que mesmo considerando apenas parte da resposta do aluno, eles utilizam o erro do aluno em favor do processo de ensino e aprendizagem. Beta refaz aquilo que acha correto mostrando para o aluno aquilo que esperava como resposta, enquanto que Alfa escreve na produção alguns questionamentos investigando o aluno a pensar sobre o que foi feito, procurando uma abordagem mais humanista da matemática, apresentando assim, indício de uma visão falibilista da matemática.

Quanto ao último protocolo mostrado deste episódio, Q1b-A20-IIb, os professores dizem que o aluno não demonstra o conhecimento das propriedades, cometendo erros por falta de atenção, além de não mostrar formalismo. Expondo seus pontos de vista sobre o protocolo, afirmam:

> Beta: Faltou o formalismo, ele não mostrou o formalismo correto da questão. ... Eu diria que não é que ele não saiba,..., ele foi com pressa! Porque aqui, [apontando para o protocolo] ele fez $\frac{x^4}{3}$ isso não justifica, se é $n+1$ é $n+1$, Pressa!. Veja aqui, é uma falta de atenção tamanha, de onde ele tirou esse quatro? **Nem olhei o restante para saber se ele multiplicou certo porque daqui você já vê que está errado.**
>
> Alfa: **Eu vou direto pro resultado! Está errado!**.
>
> Beta: É, aí eu coloquei o que eu achava que fosse certo, e acabou.
>
> Alfa: Eu não tenho o costume de colocar o que está certo ou errado. Normalmente eu mostro o gabarito e ele compara o gabarito.
>
> Beta: Apesar de eles terem o gabarito, eu mostro também o que eles erraram ... eu ponho o que está errado e o que deveria ser para o cara não reclamar, entendeu?

Mostrando mais uma vez a preocupação de Beta em apresentar ao aluno a resolução que esperava. Mas desta vez eles não considerariam nada, certo, contrariando outras análises de produções já discutidas.

EPISÓDIO DOIS.

O primeiro protocolo analisado pelos professores não provocou nenhuma reação que considerássemos relevante, julgaram a resolução certa e nada mais. Dessa forma apresentamos, em seguida, o protocolo Q2-A1-Ic e após a análise da produção, os professores discutem sobre o que considerariam certo. Beta: "daria meio certo" enquanto que Alfa critica a ação do colega,

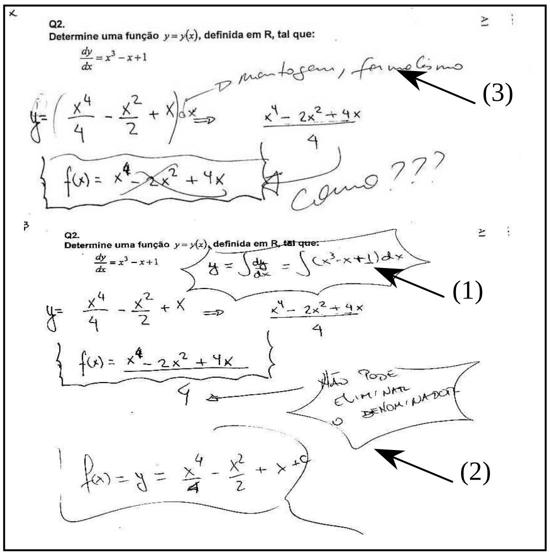


Figura 62: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q2-A1-Ic

perguntando o por que? Beta responde que o aluno respondeu direto, no entanto “mostra que ele sabe que a função é integral da derivada” (ver indicação 1 na figura 62) e que gostaria que ele demonstrasse, observando que o estudante errou somente a eliminação do denominador (indicação 2). Alfa comenta que esperava um pouco mais de formalismo (indicação 3).

Beta diz: “... repara que o problema não é o cálculo. É que ele fez de cabeça, mas com o conceito, certinho. Isso é a integral da derivada”. Reafirmando sua opinião de que o aluno acertou quase que a totalidade da questão.

Observamos que, de acordo com Ernest (1991), Beta desenvolve uma filosofia particular que transita entre a visão absolutista e a falibilista.

Encerrada a discussão em torno do segundo protocolo apresentamos o terceiro desse episódio. Nessa produção do aluno A24, os professores após uma rápida análise exteriorizam que o aluno não reconhece nem a notação dy/dx, dizendo:

> Alfa: **Não apresenta conceito nenhum**! ... Ele derivou, e tentou resolver como uma equação do segundo grau.
> Beta: Ele pegou a derivada, derivou de novo... É, e nem sei se ele resolveu certo, vamos ver!
> Alfa: Parece certo!
> Beta: Pelo menos isso, não é? Se fosse uma equação do segundo grau, tudo bem.
> Beta: **Nesta nada, nada**...

Os três professores exteriorizando que não considerariam nada nesta questão. Neste episódio, parece-nos que a visão absolutista está predominante na concepção dos professores. Acreditamos que no momento em que construíram o gabarito [mesmo que mentalmente] desta questão, estabeleceram apenas uma resolução certa que deveria ser seguida pelos alunos.

A seguir apresentaremos o relato do episódio três.

EPISÓDIO TRÊS.

Durante a análise do protocolo produzido pelo aluno A12, os professores comentaram que é estranha a resolução apresentada, e em conjunto construíram o gráfico de seno (ver indicação 1 na Figura 63), percebendo que o aluno deveria calcular a integral para os intervalos $[-\pi, 0]$ e $[0, \pi]$, Beta diz que não daria uma questão dessa sem trabalhar exercícios como esse antes, pois acredita que o professor;

... tem que mostrar isso para o aluno, senão ele não pode dar uma questão dessas, **temos que ver como o professor deu o enfoque**. Jogando isso daqui (o intervalo) ... sempre dá zero. E particularmente, eu não daria uma questão dessa sem mostrar bem isso, porque na verdade a área que estou querendo é essa (indicação 2).

Beta exterioriza, com a concordância de Alfa, que esta é uma questão perigosa, pois deve levar-se em consideração se o professor trabalhou ou não, esse conteúdo em sala. No entanto, Alfa nos deu a oportunidade de explorar um pouco a utilização do gráfico, pois comentou que “o aluno não precisa esboçar o gráfico”.

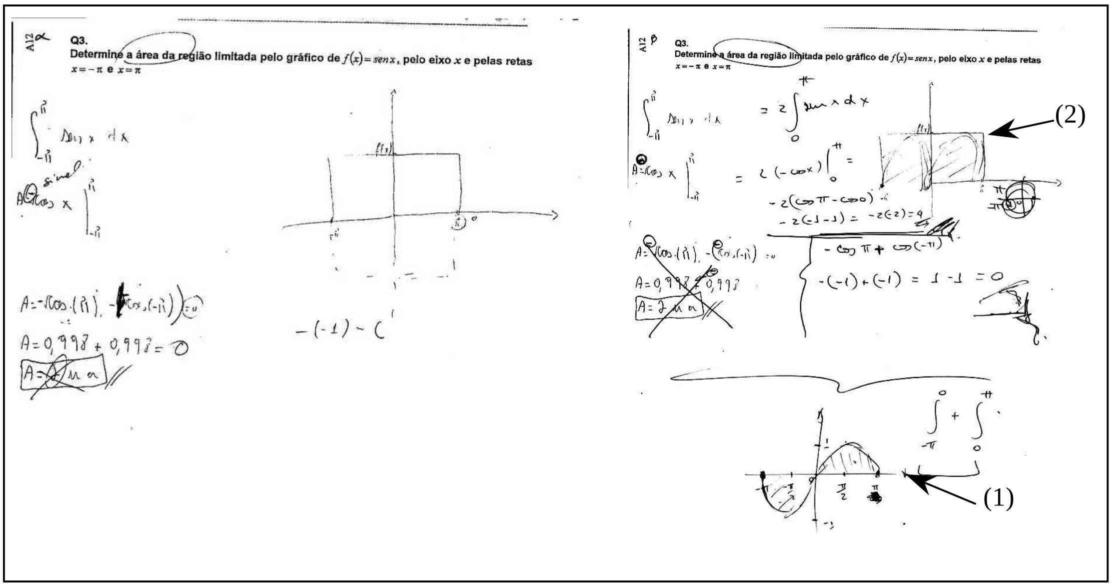


Figura 63: Anotações realizadas por Alfa e Beta em Q3-A12-II

Questionamos se consideram importante ou se esperam que o aluno construa o gráfico; prontamente responderam:

> Alfa: Como professor, **eu vejo o gráfico como um fator fundamental** para a resolução do exercício...
>
> Beta: Mas não integrante, **ele é um facilitador**. Ele não faz parte da resolução, no entanto se você visualiza a coisa fica mais fácil.
>
> Alfa: Por isso que eu sempre comento que os alunos têm uma grande dificuldade em construção de gráficos, faltou um pouco de base para eles poderem acompanhar legal a disciplina.

Mas, apesar de considerar iniciativas importantes por parte do aluno, consideraram a resolução toda errada, não levando em consideração os assuntos abordados ou comentados durante a entrevista. A visão absolutista da matemática é evidenciada pelos professores, pois ao negarem (ou não considerarem) os procedimentos explicitados pelos alunos, como a construção do gráfico, exteriorizam que a matemática e um corpo absoluto de conhecimentos, isento de erros.

Com a chegada do professor Gama, entregamos o segundo protocolo (Q2-A19-III). Após a análise da resolução voltamos à discussão sobre a representação gráfica, pois, apesar de Alfa comentar que o aluno soube formalizar a questão, Beta diz que o estudante não conseguiu visualizar graficamente. Após uma pequena discussão sobre como abordam a utilização de gráficos em sala, perguntamos aos professores, como eles avaliariam a resposta, se fosse pedido para o aluno que respondesse essa questão, tendo como hipótese de que foi trabalhado isso em sala. Beta respondeu que consideraria errado, Alfa diz que se foi pedido “determine a área da região limitada pelo gráfico!” está subtendido que foi trabalhado em sala, logo considera errado. Enquanto Gama, que pouco se expôs, diz que concorda, e é rígido nesta parte, emendando um outro exemplo (figura 64), e todos concordam que em um caso com o cálculo da área de uma região delimitada pelo gráfico, o valor deve ser diferente de zero.

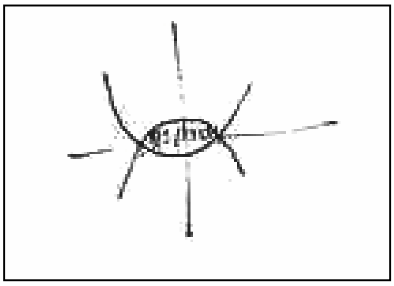


Figura 64: Anotações realizadas por Gama em Q3-A19-III

O terceiro protocolo não apresentou uma resolução que provocasse uma discussão mais profunda, todos comentaram que o aluno não tem noção do pedido ou não apresentou raciocínio algum.

Neste episódio observamos que durante a correção das produções, a visão absolutista da matemática, em relação ao conceito e procedimentos referentes à integral foi predominante, apesar de que em certos momentos os professores terem enfatizado a compreensão dos estudantes sobre o processo de resolução, apresentando indícios de um dos modelos de ensino da matemática, definidos por Kuhs e Ball (1986, apud em Thompson 1992) caracterizado pelo ensino focado no conteúdo com ênfase na compreensão.

EPISÓDIO QUATRO.

Conseguimos provocar algumas discussões interessantes com a análise do primeiro protocolo (Q4-A22-I). Após acompanhar o desenvolvimento da resolução realizado pelo aluno, Beta exterioriza um procedimento comum na prática educacional ao se corrigir exercícios, o de manter sempre um gabarito próximo. Pois de acordo com ele “com o gabarito, a gente não precisa fazer continhas, já sabe que isso da aquilo!”.

Gama percebe que o aluno considerou o valor da integral errado (Figura 65), no entanto, Beta complementa que o aluno também cometeu erro conceitual, (Observe a Figura 66) voltando a analisar a questão.

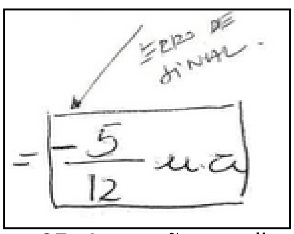


Figura 65: Anotações realizadas por Gama em Q4-A19-III.

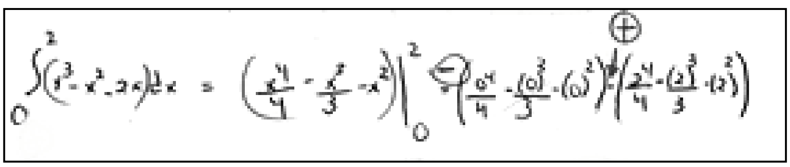


Figura 66: Anotações realizadas por Beta em Q4-A19-III.

Alfa e Beta entram em uma discussão sobre como avaliar a questão, Beta diz que consideraria meio certo, no entanto, Alfa o contraria justificando que o aluno cometeu o mesmo erro conceitual comentado em outra produção.

Beta justifica que seria pena considerar a resolução toda errada, seguido dos comentários de Gama que admite que o aluno apresenta um bom raciocínio. Para tentar provocar mais discussões, perguntamos sobre o hachurado feito pelo aluno no gráfico, mas não tivemos o efeito esperado, pois eles estavam mais interessados em saber como cada um iria avaliar a questão, em relação à pontuação a ser considerada:

> Gama: Mas falando de 100% eu daria uns 80%
> Beta: Não de jeito nenhum...
> Alfa: Não 50 %
> Beta: No máximo 50%..
> Fernando: Por que você daria 80%?
> Gama: Por que, no geral eu acho que ele foi apenas desatencioso.
> Beta: Não,ele errou um conceito grave, foi um erro conceitual forte.
> Gama: Mas você lapidando ele ...
> Alfa: Então 50%, para você não perder o aluno!
> Beta: Então, de uma questão de dois eu daria ... 0,75, mas na hora de contar se desse 5,75 daria seis. Creio que seria aquele 0,75 moral! Mas se precisar dar um chorinho eu daria um chorinho para o cara!
> Gama: Dessa forma até que eu concordo...

Fechamos este protocolo com essa discussão, apresentando a segunda e a terceira produção, Q4-A10-II e Q4-A13-III, respectivamente. Após a análise, os professores exteriorizaram que não considerariam nada das resoluções, pois estava tudo errado e entregaram o protocolo. Tentando provocá-los, perguntamos se no caso do primeiro não poderiam considerar nem mesmo a integral calculada, mas todos responderam que não! Enquanto que sobre a última nem quiseram comentar.

Percebemos que ao analisarem as questões deste episódio, os professores apresentaram indícios de uma visão absolutista. Logo de início, Beta indaga sobre a falta do gabarito, indicando que já estabeleceram uma verdade única, chegando a ser isolada da realidade dos alunos. Para Alfa, os procedimento e regras tornam-se mais importantes do que o próprio conceito de integral, quanto a Gama, ainda não conseguimos observar com mais clareza suas concepções, aparentemente mostra-se receoso em expor suas opiniões.

EPISÓDIO CINCO.

Finalizando a primeira sessão de nossa entrevista, apresentamos o protocolo Q5-A15-Ia, em que os professores, após analisarem, verificam que essa é a resposta que esperavam, com exceção de Alfa, que esperava que o aluno apresentasse a resposta com a simplificação máxima, mas que , no entanto, não retiraria nota nenhuma pelo descuido. Ao entregarmos o protocolo seguinte, em que é apresentada uma resolução direta, sem a explicitação dos procedimentos intermediários. Gama e Beta a admitem como certa, entretanto, Alfa contrariado, diz: “É que normalmente eu ... coloco no cabeçalho, só será válido se apresentado o desenvolvimento!”, Beta e Gama exaltados questionam que neste caso não existe. Para não provocar qualquer desgaste entre os elementos do grupo, interviemos perguntando a Alfa o que ele quer dizer com a apresentação do desenvolvimento, as quê respondeu:

Eu sempre peço o desenvolvimento para mostrar para eles, no coletivo, as propriedades, não que isso daqui estivesse errado. Eu dou certo numa boa, mas também se tivesse um sinal de negativo estaria tudo errado, mas se tivesse o desenvolvimento você já pára pra pensar.

Concordando com a justificativa do colega, Beta citando o exemplo, $\int x^3 dx = \int \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{3}$, não é igual a $\frac{x^4}{4}$, então neste caso daria para considerarem algo.

Aproveitando a discussão em torno desse tema, recolhi os protocolos analisados e entreguei a última produção do encontro. Após uma análise em que os professores foram comentando o realizado pelo aluno A7, Alfa comenta que nesta produção é possível acompanhar o raciocínio, com o que Beta concorda comentando que se o aluno tivesse colocado direto consideraria tudo errado. Questionamos um caso específico: se o professor, ao aplicar essa questão em sala e se o aluno resolvesse da forma como foi apresentado, seria considerado digamos 0,25 ou 0,50 ponto, mas se o estudante resolver direto e só errar o sinal? Eles respondem que consideraria errado, pois não conseguiriam diagnosticar o erro do aluno.

Notamos neste episódio que ao analisar as produções, os professores Beta e Gama esperam que os alunos resolvam-na diretamente, uma vez que esse já tiveram contato com os teoremas e propriedades, não necessitam explicitarem. Dessa forma, podemos verificar que os indícios de uma prática embasada na visão absolutista se tornam mais forte por parte de Beta e Gama, pois admitem a resolução do aluno como sendo o produto do saber acumulado, neste caso sem a necessidade de demonstrações, ao contrário de Alfa, que contraria os colegas e exige dos alunos a apresentação dos procedimentos com a alegação de que prefere acompanhar o raciocínio do aluno.

Terminamos o primeiro encontro agradecendo novamente o tempo disponível, e pelas respostas esclarecedoras que tivemos o prazer de presenciar, marcando o próximo encontro para a próxima semana e mesmo horário.

No segundo encontro, no horário combinado, contávamos apenas com a presença dos professores Beta e Gama, pois o professor Alfa, nos informou um pouco antes que iria se atrasar por motivos particulares. Convidei os professores para um café, com o intuito de podermos esperar um pouco o professor Alfa, que não demorou e logo se juntou ao grupo. Assim demos início à segunda parte de nossa entrevista, com a presença de todos os professores.

EPISÓDIO SEIS.

A primeira produção entregue foi elaborada pelo aluno A27. Após a análise da resolução, Beta comenta que "não tem nada a falar", que por um breve momento imaginamos que não estaria disposto a colaborar com afinco à entrevista, mas foi apenas impressão. Alfa e Gama comentam que o aluno foi direto, enquanto Beta diz que não gosta da notação utilizada, questionado por Gama, respondendo que:

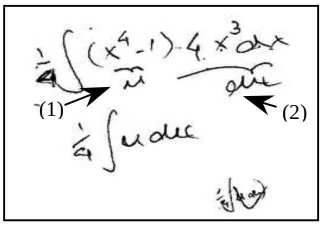


Figura 67: Anotações realizadas por Beta em Q6-A27-IIa.

Eu faço assim, eu reescrevo (Figura 67) Isto aqui é *u* e isto (indicação (1)) não é a derivada de *u* (indicação (2)), para ser a derivada de *u* precisa do quatro, então eu multiplico por quatro e divido por quatro! Então temos $\frac{1}{4}\int u\,du$, eu só faço assim eu não gosta de trabalhar o $\frac{du}{4}$ e esse negocio todo não! Mas a idéia é a mesma!

Alfa comenta que pede para que eles façam separados, pois crê que têm dificuldades nesta montagem. Beta reafirma que prefere efetuar dessa forma, pois fica mais apresentável, Gama complementa que formaliza a operação.

Entregamos em seguida o próximo protocolo, Q6-A14-Iib. Gama declara que exigiria do aluno a apresentação da constante de integração e Beta afirma que não é só isso, pois o aluno errou a integral também, dizendo que;

Ele reescreveu $\frac{1}{4}\int u^2\,du$, então está errado, o certo seria $\frac{1}{4}\int u\,du$, que é $\frac{1}{4}.\frac{u^2}{2}$, então teria que dar oito e ele esqueceu o denominador.

Tendo em vista nossas observações, questionamos se eles considerariam alguma coisa na correção da questão. Beta já tinha comentado que daria meio ponto para o aluno, no entanto, justifica que parte da substituição ele acertou, e mostrou que sabe integrar uma função. Alfa alega que o problema dele não é o conceito da Integral e sim os procedimentos envolvidos. Já Gama acredita que o aluno apresenta uma ligeira lembrança do conceito.

Entregamos a terceira produção da questão seis e os professores não precisam de muito tempo para analisar e comentam que o aluno fez uma tentativa desesperada. Beta expõe que alguns alunos não lembram da propriedade da interpreta do produto de funções (Figura 68), enquanto que Gama observa que o aluno só lembrou que tinha que integrar, multiplicando depois os resultados. Todos os professores neste momento não consideraram nada da resolução.

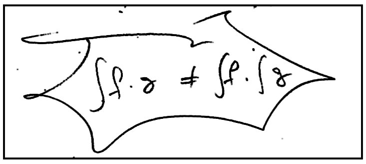


Figura 68: Anotações realizadas por Beta em Q6-A6-III.

Na correção dos dois primeiros protocolos deste episódio, surge em nossa opinião, indícios de uma visão falibilista da matemática, pois os professores procuram avaliar os procedimentos e técnicas utilizadas pelos alunos, considerando parte da questão e motivando o aluno.

EPISÓDIO SETE.

Após a análise do protocolo Q7-A1-Ia, Beta comenta que reescreveria a função novamente, indicando no protocolo (indicação 1 na Figura 69), Gama verifica a falta da constante de integração, comentando que daria apenas meio certo. No entanto, Beta contrariado, exterioriza para o grupo que sempre adiciona a constante e anota a falta de atenção (indicação 2), mas considera a questão toda certa. Alfa comenta que para analisar melhor depende do curso em que ministra aulas.

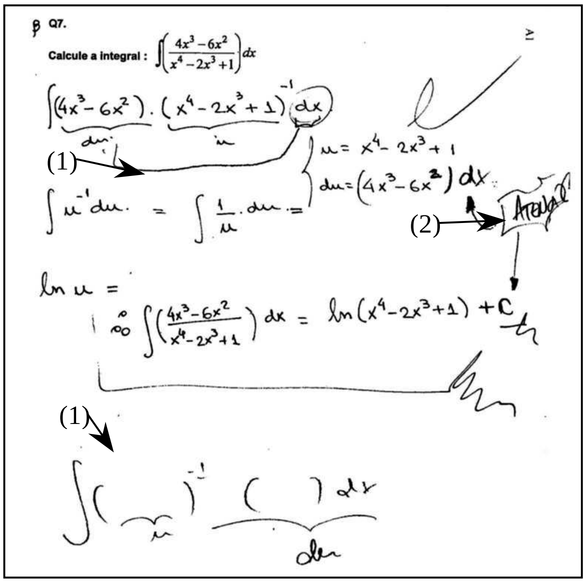


Figura 69: Anotações realizadas por Beta em Q7-A1-Ia.

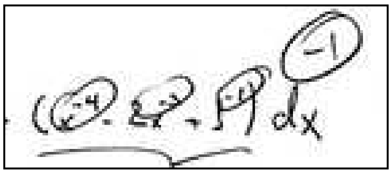


Figura 70: Anotações realizadas por Beta em Q7-A8-II.

O segundo protocolo todos consideraram incorreto, e não conseguimos que os professores explicassem mais. Já o terceiro protocolo, Q7-A8-II, os professores Gama e Alfa não admitem que o aluno tenha cometido o erro apresentado (Figura 70) beta só se deu conta com as observações de Gama. Beta comenta que foi um erro tão inesperado que nem observou o início da questão, foi direto para o cálculo da integral, dizendo que "... na linha seguinte ele desconsiderou tudo o ele fez, tinha um monte de sinal negativo e na linha de baixo sumiu tudo...".

Neste episódio, em que são propostas produções que envolvem a utilização de técnicas de integração, verificamos que o grupo de professores, diferentemente do ocorrido no primeiro encontro, em que predominava a visão absolutista, agora se preocupam em avaliar os procedimentos e as técnicas utilizadas pelos alunos, sugerindo, neste momento, uma visão falibilista, em que a matemática e uma atividade humana, sujeita a erros. No entanto, mantêm traços da visão absolutista.

EPISÓDIO OITO.

Apresentada a nova questão, os professores a analisam com cuidado, levando até um tempo mais do nas outras, pois na produção é apresentado um quadro desnecessário (Figura 71), de acordo com Gama. Os professores a considerariam correta, sem uma explicação mais detalhada. Perguntamos se gostariam de comentar algo mais, mas sem surtir efeito.

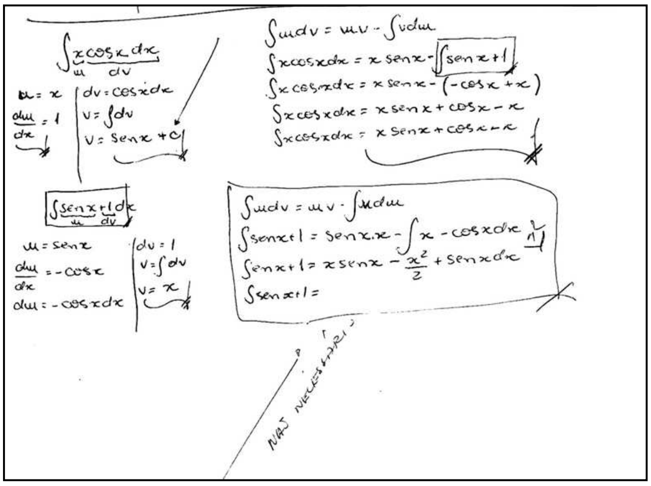


Figura 71: Anotações realizadas por Gama em Q8-A17-Ia.

Dessa forma, apresentamos o segundo protocolo, Q8-A21-Ib, mas ao questionar sobre o que poderiam considerar, respondem que o aluno não sabe o que faz. Beta indica que o aluno não soube aplicar a fórmula, $\int udv = uv - \int vdu$, afirmando que ele não iria acertar nunca. Alfa diz que o aluno não tem conceito de integral.

Quanto a última produção entregue, os professores não consideram nada, pois o aluno apresenta: $\int x\cos x\, dx = \int x\, dx + \int \cos x$, finalizando com um resultado na forma de $\frac{x^2}{2} - sen\, x + c$.

Com a análise dos protocolos apresentados neste episódio, pudemos observar que os professores manifestam concepções que transitam entre a visão Absolutista e a visão Falibilista da matemática, pois apesar de considerarem os erros dos alunos como ponto de partida para novas explorações, ainda sinalizam que suas verdades são inabaláveis, contendo a certeza do domínio absoluto do conhecimento.

EPISÓDIO NOVE.

Neste episódio apresentamos ao professores apenas dois protocolos, produzidos pelos alunos A4 e A15. Os entrevistados começam, do mesmo modo que procederam nas outras, analisando a questão individualmente e depois abrindo a discussão sobre a correção da resposta. Inicialmente, apesar de intrigados, a consideram certa, mas Gama sugere que não pode ser resolvida por substituição de variável, Beta diz;

Então, tem mais coisa errada aqui... Sim, ele não pode resolver isso assim, ... porque não tem $2x$, então não pode udu, então tenho que usar um outro tipo de resolução, uma substituição trigonométrica.

Percebendo do equivoco, Alfa comenta que normalmente não trabalha a técnica de substituição trigonométrica com os alunos da Ciência da Computação. Questionamos se o aluno teria outras possibilidades de resolver a questão, pois no exercício está sendo pedido “o valor da integral”, e que pode ser admitido um quarto da área de uma circunferência de raio um. Beta crê que “não teria a presença de espírito para não calcular a integral”.

Quanto ao segundo protocolo, Beta diz que se o aluno não lembra como se resolve a substituição trigonométrica, ele não faz. Alfa reafirma que quase não trabalha com esse tópico, não considerando a resolução.

Neste episódio, a dificuldade envolvida no enunciado da questão ficou evidenciada logo de inicio com o engano dos professores no momento que realizavam a resolução da mesma. Os protocolos produzidos pelos alunos não motivaram o grupo a ponto de fazer com que pudéssemos captar indícios de suas concepções.

EPISÓDIO DEZ.

Os professores analisam a resposta do aluno, neste momento Beta resolve a questão anotando seus resultados no protocolo (Figura 72). Em seguida, Alfa comenta que o aluno fez corretamente, já descartando o zero e mantendo o vinte. Gama crê que o aluno entendeu o exercício, pois admite que a resposta é a apresentada. Beta não gosta da falta de formalismo apresentado no protocolo. Ademais, Alfa exterioriza que a idéia de "trabalhar com o formalismo ou não, depende do professor", pois é ele quem vai decidir se exige ou não.

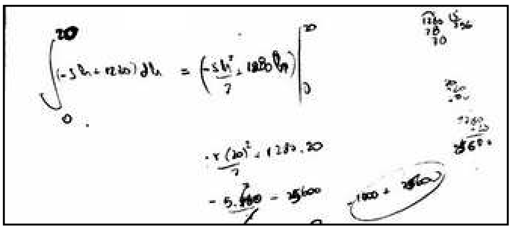


Figura 72: Anotações realizadas por Beta em O10-A11-Ia

Passamos a analisar o segundo protocolo da questão dez, ao mesmo tempo em que eles vão resolvendo a questão comentam sobre o resolvido e sobre o que o aluno errou:

> Beta: "………" Ele errou na conta
> Alfa: "………" E o formalismo também...
> Beta: Olha o que ele errou aqui, no formalismo
> Gama: "………" Os parênteses...
> Beta: Faltou os parênteses, aqui ele viu que ele esqueceu do *dh* e colocou...
> Gama: Ele notou, tem noção...

Beta: Ele errou em conta...

Questionamos sobre o que acharam da resolução, Beta diz que o aluno errou bobeira se comparado com a resolução do aluno anterior, Gama confirma o dito por Beta, mas verifica que o aluno errou no formalismo.

Encerrando o segundo encontro, entregamos o último protocolo, Q10-A18-II, neste os professores não consideraram nada, de acordo com Gama, "o aluno não tem conceito nenhum em mostrar o que ele estava fazendo..." Beta e Alfa discutem sobre o que o aluno apresentou como resposta, Alfa, admite esse exercício como um exercício de física, e já aplicou semelhante no ensino médio,no mais observa que o aluno calculou a força para a altura vinte metros, calculando depois o trabalho.

Neste ultimo episódio, os professores por meio de suas declarações reforçam os indícios de que em determinadas situações exteriorizam diferentes tipos de concepções, variando muitas vezes de um extremo a outro.

Terminamos assim nossa entrevista com o grupo de professores, agradecendo a participação, não só pelo tempo disponibilizado, mas também como a disposição em que estiveram durante todos os encontros. No final da entrevista, já com o gravador desligado, os professores manifestaram sua satisfação em poder discutir suas concepções e práticas; comentaram que, normalmente, não tem oportunidades de promoverem conversas sobre esses temas.

5.2.2. Idéias expressas por Alfa.

Nas colocações feitas por Alfa, percebemos que, em primeiro lugar, se destaca a sua procura em verificar os procedimentos efetuados pelos estudantes. Ele explicita sua preocupação em passar para os alunos uma visão geral dos conteúdos abordados em cada momento, ou seja, a essência da matemática intrínseca ao conceito de Integral. Refere-se, mais de uma vez, a essas estruturas das idéias matemáticas, como exemplificando a seguir.

No primeiro episódio destaca que: "... costumo falar para os alunos que o problema deles não é o conceito de Integral, até que isso eles absorvem fácil, mas o problema está na *matemática fundamental*". No episodio dois salienta: "... é o que eu digo, como saiu daqui e chegou até aqui?", relatando sobre a falta de desenvolvimento de uma resolução. Ou ainda, durante o episódio cinco, relata que

"... normalmente,... coloco no cabeçalho, só será válido se apresentado o desenvolvimento".

Poderíamos pensar, inicialmente, que sua concepção de Integral é tendenciosa ao formalismo. Entendemos que essa visão formalista que valorizaria as regras e os algoritmos que Alfa parece buscar nas resoluções, indica uma proximidade à visão da filosofia absolutista da matemática. No entanto, durante a entrevista, ficou nítida a sua preocupação em motivar o aluno através das anotações e indagações realizadas nos protocolos, por exemplo, na análise do protocolo Q1a-A17-III, ele anota no protocolo: "Isto é uma derivada?" vide Figura 60, na pagina 118, indaga também, se "isso daqui é um $\int$ ou um símbolo de integral?".

Também na avaliação, observamos que Alfa mostra alguns conflitos quanto às possíveis formas de avaliar o rendimento do estudante. Durante o primeiro episódio, na verificação do protocolo produzido pelo aluno A9, diz que a análise depende "... da linha de trabalho, ou seja, da turma...", reforçando sua crença logo depois, ao exteriorizar que "vai depender da exigência que a turma requer ou daquilo que é solicitado dentro do grupo de professores e tudo mais...". Entendemos que este aspecto é indicado por Ernest (1991) sobre a influência do contexto social sobre as possíveis relações entre concepções e práticas, pois, considera que os modelos de ensino e aprendizagem expostos pelo professor acabam sendo submetidos às pressões dos alunos, dos colegas e também da Instituição, transformam-se em 'modelos oficializados'.

Em cada etapa de sua atividade, surgem idéias que não se adequam a uma 'postura tradicional'. Apesar de ter afirmado que, o aluno deve apresentar ou demonstrar o conhecimento assimilado, Alfa não parece acreditar que a aprendizagem se dê pela acumulação passiva dos conteúdos ensinados, pois exige participação constante dos alunos, no momento em que lhes devolve as perguntas feitas os incita a descobrirem sozinhos as respostas.

Tanto Alfa como Beta parecem debater-se entre tendências diversas, apresentando, em alguns aspectos, atitudes bastante incoerentes, quanto à forma de lidar com os erros apresentados pelos alunos, instigando-os a partir das observações feitas na produção. No entanto, não verificam se isso os ajuda a aprender, eles se preocupam em colocar questões em que o aluno mostre uma compreensão global dos conceitos e técnicas de Integral, mas insiste em referir-se à pontuação que estabelecem para cada parte da questão.

5.2.3. Idéias expressas por Beta.

Dos participantes da entrevista, Beta foi o professor que mais se expôs, procurou responder todas as dúvidas e esclarecer seu ponto de vista, quando solicitado. Sobre a forma com que corrige a produção do aluno, Beta está preocupado em dar a visão global do conteúdo. Durante o primeiro episódio diz que apesar de apresentar o gabarito para os estudantes, também apresenta “... o que está certo ou errado,... e o que deveria ser (produzido) para o aluno não reclamar”. Parece-nos que, nesse aspecto, ele está pensando na matemática como um corpo absoluto, determinado e isento de erros do conhecimento, consistindo de verdades e estruturas interconectados, como aponta ERNEST (2004), em que a única verdade é a apresentada por ele.

Há, no entanto, alguns aspectos nas colocações de Beta que nos fazem pensar que sua concepção absolutista de ensino e aprendizagem não seja tão determinante. Ele exterioriza, em certos momentos, que não tem preferências quanto à forma de resolução do aluno, e sim que “ele escolha uma e faça direito”. Durante o segundo protocolo do episódio dois, comenta que o aluno “... sabe que a função é a integral da derivada, ele não demonstrou, mostra que ele sabe,... o erro dele foi... que ele eliminou o denominador”, afirmando que neste caso aceitaria ou consideraria a resposta, sugerindo uma concepção próxima à visão falibilista da matemática, em que considera o erro como um fator do processo social.

Observamos que para esse professor, a aprendizagem não se apresenta como uma atividade individual ou autônoma, em que o aluno trabalha com o livro, convencendo-se de que algo lhe foi ensinado, no entanto, avalia o aluno por meio da realização de testes e/ou provas. Para ele o processo de aprendizagem é uma atividade social, o aluno deve aprender compartilhando suas experiências com o professor. Durante o episódio oito, exterioriza, ao analisar a primeira produção (vide Figura 71), que anotaria um ponto de interrogação e consideraria a questão certa, e caso o aluno questionasse a interrogação, "falaria para ele que essa integração não existe, pois ele fez certo até aqui...".

No processo de avaliação desenvolvido por Beta, parecem estar presentes aspectos rigorosos e exigentes, pois se preocupa em analisar a questão em todos os detalhes, valorizando o que estiver certo e penalizando os erros. Esta observação está evidenciada no episódio três, quando sugere que a forma com que o professor trabalha em sala de aula interfere no momento de analisar a produção do aluno, no momento em que:

> ... Essa daqui é uma questão perigosa! Só é bom ser dada uma questão dessa se o aluno entender direitinho o conceito,... Na pior das hipóteses, se o professor esqueceu de comentar, ele deve aceitar a resposta zero, enquanto que se o ele comentou o assunto em sala, a resposta deve ser quatro!

No mesmo episódio, comentamos sobre a confecção de gráficos das funções para auxiliar a resolução, Beta comenta que é muito importante, principalmente, para poder entender melhor o exercício, entretanto, não o considera como parte integrante da resolução, sendo apenas um facilitador para a resolução da questão. Entendemos que novamente, a visão absolutista é exteriorizada, pois o professor considera as regras formais que envolvem o conceito de Integral, salientando a importância do desenvolvimento da resolução, mas não considera a capacidade crítica do aluno ao apresentar sua compreensão sobre o enunciado, por meio da representação gráfica da função.

Percebemos que, ao analisar os protocolos que poderiam ser resolvidos com a utilização de técnicas de integração, Beta aceita que o aluno resolva diretamente, fazendo uso de teoremas e propriedades que podem ser considerados implicitamente. Observamos que apresenta uma prática baseada na visão absolutista, pois admite a resolução do aluno como sendo o produto do saber acumulado, mas em algumas situações avalia o processo de desenvolvimento realizado pelo aluno, no sentido de verificar seu encadeamento lógico, consistindo um indício da visão falibilista da matemática.

5.2.4. Idéias expressas por Gama.

Quanto às idéias expressas por Gama, não temos dados referentes aos dois primeiros episódios, no entanto sua participação na entrevista, por mais que tentássemos incluí-lo, só se tornou mais efetiva a partir do episódio cinco. Gama apesar de larga experiência docente se sentiu pressionado, e pouco contribuiu durante o primeiro encontro.

Pudemos observar por meio de suas anotações nos protocolos analisados, que ele não se preocupa em discutir os erros com os alunos. Poucas vezes anota alguns comentários, tais como: “erro conceitual” ou “não necessário”.

Não descartamos a possibilidade da ocorrência de outros aspectos, tanto em relação às concepções quanto às práticas de Gama, pois dispomos, para análise, apenas os depoimentos oriundos das entrevistas e os protocolos analisados por ele. As dificuldades evidenciadas em seu discurso, em assumir uma determinada concepção de acordo com a resolução de um aluno, podem ser um indicativo da coexistência de outros fatores, não detectados por nós.

Observamos que ao analisar os protocolos nos episódios cinco ao oito, Gama aceita que o aluno resolva diretamente, sem a demonstração de teoremas ou propriedades. Verificamos que o professor apresenta uma prática embasada na visão absolutista da matemática, considerando-a como domínio das verdades absolutas, de conhecimentos incontestáveis. Os indícios de que Gama também mobiliza concepções falibilistas estão muito implícitos em seu discurso.

CAPÍTULO 6:

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso propósito ao iniciar este trabalho era identificar e compreender as concepções de professores de Cálculo Diferencial e Integral, de forma a obtermos indícios de suas práticas educativas, ao analisar o momento em que o interagem com a produção do aluno, prática comum durante sua atividade docente.

O estudo das dissertações e teses relativas a crenças e concepções e outras pesquisas em Educação Matemática que versam sobre as dificuldades existentes na disciplina de Cálculo nos nortearam nas escolhas que fizemos durante a construção do trabalho.

Nos procedimentos metodológicos foram utilizados dois instrumentos de pesquisa: um questionário e as entrevistas. O primeiro, é um questionário contendo 10 questões acerca do conceito de Integral de uma variável, que foram categorizadas de acordo com teoria de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* de Tall, D. e Vinner, S. Foram selecionadas duas ou três produções de cada questão para serem analisadas pelo grupo de professores. As entrevistas foram estruturadas de acordo com as idéias de Bogdan & Binken (1994) e de Gaskell, G. (2002) sobre Entrevistas em Grupos.

Acreditamos que a escolha por entrevista em grupos com professores para analisar produções de aluno, é uma prática inédita (ou pelo menos pouco difundida) na literatura sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Essa metodologia nos permitiu preparar o material para efetuar uma análise mais detalhada dos dados coletados.

Para alicerçar nossa pesquisa, utilizamos a teoria de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* de Tall e Vinner (1981) para a escolha das produções dos alunos. Com esse referencial conseguimos apresentar aos professores produções que os forçaram a exteriorizar suas concepções em torno da Integral de uma função de uma variável, com exceção da questão nove, pois não tivemos resoluções que permitissem uma análise mais detalhada, tanto por nós como pelos entrevistados.

A utilização da teoria de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* para a categorização das produções se mostrou como uma das etapas mais trabalhosa de todo o desenvolvimento deste trabalho, no entanto apresentou grande eficácia para a seleção dos protocolos que foram analisados pelos professores.

Para analisar as entrevistas, optamos em utilizar a teoria de Ernest, P. (1994, 2004) sobre Filosofia da Matemática, consistindo na visão absolutista e falibilista da matemática. Este referencial foi primordial para que pudéssemos responder nossa pergunta de pesquisa: *Que concepções o professor de Cálculo exterioriza sobre o conceito de integral, frente à produção de um aluno*? Notamos que as concepções sustentadas por Alfa, Beta e Gama, se aproximam mais à *visão absolutista da Matemática*, pois na maioria das produções analisadas, todos parecem aceitar que essa ciência é o domínio das verdades absolutas e que o conhecimento em matemática consiste em descrições dos entes matemáticos, das relações entre eles e da estrutura lógica que os sustenta. No entanto, os professores entrevistados mencionam em algumas das análises dos protocolos, a possibilidade de que o conhecimento matemático seja falível ou esteja aberto a críticas e correções.

De uma maneira geral, podemos dizer que os três professores entrevistados apresentam um mix da *visão absolutista* e da *visão falibilista* da matemática, ou seja, consideram que o conhecimento matemático é constituído de verdades absolutas, organizadas em um sistema lógico, coerente e rigoroso. Mas, no momento da correção da produção do aluno, podem admitir o erro do aluno como fator integrante do ensino e da aprendizagem, considerando a matemática em torno da Integral de uma função de uma variável "como um campo em constante mudança, cujo conhecimento nasce da atividade humana, como parte de um processo social" (Cury, 1994).

Durante o desenvolvimento do trabalho nos deparamos com inúmeros percalços. O mais difícil de superar, podemos dizer que foi reunir os professores: passamos por três grupos de professores, até que pudéssemos concluir os encontros com o terceiro, pois é difícil encontrar um profissional que queira se expor e, sobretudo reuni-los em um mesmo local e horário.

Entretanto, em uma conversa, após o término da segunda sessão de entrevista, os professores manifestaram uma grande satisfação em poder discutir suas concepções e práticas; comentaram que, normalmente, não tem oportunidades de promoverem conversas sobre esses temas.

De acordo com Cury (1994, p. 211) a capacidade de refletir sobre nossa prática, possibilita uma conscientização da existência de alternativas para exercê-la, a sensibilidade para escolher e implementar estratégias coerentes com as nossas concepções são fatores que segundo Ernest (1991), possibilitariam que refletíssemos sobre as incoerências entre nossas concepções e práticas, desenvolvendo uma prática indispensável à implementação de um ensino crítico.

Aprendemos muito com esta pesquisa, e acreditamos ser um próximo passo para novas pesquisas a busca de uma melhor compreensão da natureza das concepções apresentadas. Outro passo importante poderia ser a analise de entrevistas em grupo com professores de universidades oficiais.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo. 1999. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos***.* Porto: Porto Editora, 1994.

CURY, H. N. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos.** Tese de Doutorado em Educação. Porto Alegre, UFRGS, 1994.

ERNEST, P. **The impact of beliefs on the teaching of mathematics**. In: ERNEST, Paul. (ed.). *Mathematics teaching*: the state of the art. 2. ed. London: Falmer, 1991. p.249-254.

ERNEST, P**. What is The Philosophy of Mathematics Education?** In Philosophy of Mathematics Education Journal 18. 2004. Disponível em http:// www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome18/PhoM_%20for_ICME_04.htm .

GASKELL, G. **Entrevistas Individuais e Grupais**. In : BAUER, M.; GASKELL, G. Pesquisa Qualitativa com Texto , Imagem e som: um Manual Prático. Rio de Janeiro. Ed. Vozes, 2002.

GODOY, L. F. S. **Registro de representação da noção de derivadas e o processo de aprendizagem**. São Paulo. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

GOLAFSHANI, N. **Teachers' Conceptions of Matehematics and their Instructional Practices**. In Philosophy of Mathematics Education Journal 15, POME Journal 15, 1-14. Disponível em: **<**http://www.people.ex.ac.uk/Pernest /pome15/golafshani.pdf >. Acesso em: 12 dez.2005.

HSIA, Y. W. **A Utilização do Livro Didática pelo Aluno ao Estudar Integral.** São Paulo. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

JAWORSKI, B. **Collaborating with Mathematics Tutors to explore Undergraduate Teaching. In** ESRC Teaching and Learning Research Programme Conference 2000. Disponível em:< http://www.tlrp.org/pub/documents /Jaworski2000.pdf> Acesso em 09/08/2004.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral : uma proposta para seu ensino e aprendizagem.** São Paulo. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MEYER, Cristina. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. São Paulo. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

NARDI E and JAWORSKI B **Developing a Pedagogic Discourse in the Teaching of Undergraduate Mathematics: On Tutors' Uses of Generic Examples and Other Pedagogical Techniques**, Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Undergraduate Mathematics, 1-6 July 2002, Crete, Greece. Disponível em: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/

PONTE, J. P. **Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação**. In em J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1992. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/92-Ponte(Ericeira).doc> Acesso em : 09/08/2004.

OLIVEIRA, A. H. **A noção de Integral no Contexto das Concepções Operacional e Estrutural**. São Paulo. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

OLIVEIRA, H. PONTE, J. P. **Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional de professores de Matemática.** In: SIEM, 7., 1997, Lisboa. Actas... Lisboa: APM, 1997. P. 2-23. Disponível http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-Oliveira-Ponte%20(SIEM).Pdf Acesso em: 09/08/2004

SANTOS, R. M. & NETO, H. B. **Avaliação do Desempenho no Processo de Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I (O Caso Da UFC)**.

(1994) Disponível em <http://www.multimeios.ufc.br/producao_cientifica/pdf/ artigos/artigo-avaliacao-do-desempenho-no-processo-de-ensinoeaprendizagem .pdf> Acesso em 30/10/2004

SILVA. C. A. **A Noção de Integral em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica**. São Paulo. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

TALL, D. O. **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer: Holland, 1991. p.3–21. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991k-psychology-of-amt.pdf. Acesso em 05/07/2004.

TALL, D. O. **The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof.**. In Grouws D. A. (ed.). HandBook of Reserch on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan, New York, p.495–511. 1991. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991k-psychology -of-amt.pdf. Acesso em 05/07/2004.

TALL, D., O. & VINNER, S. **Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. 1981. Disponível em http://schule.mupad.de/material/mikrowelten/literatur/tall81ci.pdf. Acesso em 11/06/2005

TALL, D. O. & RASSLAN, S. **Definitions and Images for the Definite Integral Concept**. Proceedings of the 24 st. PME. 2002. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002h-pme26-rasslan.pdf. Acesso em 11/08/2004.

TALL, D. O. **Concept Image and Concept Definition**. Última modificação: 11/02/2003. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/ concept-image.html Acesso em 11/08/2004.

THOMPSON, A. G. **Theachers' Beliefs and Conceptions: a Sybthesis of the Research**. In Grouws D. A. (ed.). HandBook of Reserch on Mathematics Teaching and Learning. NCTM, p. 127-146. 1992.

VINNER, S. **The Pseudo-Conceptual and the Pseudo Analytical Thought Processes.** Mathematics Learning. In Educational Studies in Mathematics 34, 97-129. 1997.

ANEXOS

Anexo 1

Campus Marquês de Paranaguá – PUC - SP

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Mestrado Acadêmico

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente no que tange a utilização dos dados nela coletados.

O material coletado, as atividades realizadas, as gravações de áudio e/ou vídeo, as transcrições e os registros escritos, servirão de base para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção e análise de significados. O acesso aos registros em áudio e/ou vídeo será exclusivo do grupo de pesquisa em que estou inserido. Os nomes dos sujeitos citados nas transcrições, assim como nos registros escritos, serão trocados por pseudônimos, preservando suas identidades em sigilo. A demais, as pesquisas que utilizarem o material coletado não será feita menção à Instituição onde o sujeito leciona ou estuda.

As informações provenientes da análise desse material poderão, ainda, serem utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos.

São Paulo ____, ____________de 2005.

____

Prof. Fernando Eduardo de Souza

Anexo 2

Perfil Acadêmico e Profissional

Este questionário tem a única finalidade de conhecer o participante desta pesquisa. Caso queira utilizar um pseudônimo sinta-se a vontade, pois de acordo com o termo de compromisso, seus dados pessoais não serão divulgados.

1. Dados de Identificação

Nome: ____.

Idade: _____

Sexo: ( ) Feminino ( ) Masculino

2. Formação Acadêmica.

2.1. Graduação.

Curso 1:	Curso 2:
Instituição:	Instituição:
Término:	Término:

2.2. Pós-Graduação:

2.2.1. Especialização.

Curso 1:	Curso 2:
Instituição:	Instituição:
Término:	Término:

2.2.2. Mestrado.

Curso 1:

Instituição:

Término:

2.2.3. Doutorado.

Curso 1:

Instituição:

Término:

3. Experiência Docente:

   3.1. Tempo de magistério em anos:

   3.2. Instituição em que já lecionou (Ensino Básico e Ensino Superior), incluindo aquelas que trabalha atualmente;

Instituição A:	Nível de ensino:
Instituição B:	Nível de ensino:
Instituição C:	Nível de ensino:
Instituição D:	Nível de ensino:
Instituição E:	Nível de ensino:
Instituição F:	Nível de ensino:

   3.3. Dados relativos à docência na Instituição pela qual responde:

      3.3.1. Tempo de trabalho na Instituição:

      3.3.2. Regime de trabalho.

      Tempo parcial ( ) Tempo integral ( ) Dedicação exclusiva ( )

      3.3.3. Número de horas ministrada neste semestre:

      3.3.4. Disciplina que leciona neste semestre:

Nome da disciplina:	Nível:
Nome da disciplina:	Nível:
Nome da disciplina:	Nível:
Nome da disciplina:	Nível:

4. Publicações

   4.1. Livros publicados (quantidade):

   4.2. Capítulos em livros publicados (quantidade):

   4.3. Artigos publicados (quantidade):

   4.4. Trabalhos completos ou resumos em Congressos (quantidade):

Anexo 3

Transcrição da entrevista: Fase Exploratória.

Transcrição da Entrevista piloto.

Entrevista realizada em 05/09/2005.

Apresentaremos a transcrição da entrevista realizada com um professor, referente à análise de algumas produções de alunos. Para essa apresentação utilizamos as seguintes abreviações:
P = Professor.
E = Investigador.
"..." = Pausa na fala do professor.
"........." = Observação da questão.
Negrito ressalta a ênfase na fala.
[ ] = gestos do professor durante a análise da resposta.

E: Boa tarde.
E: Meu nome é Fernando, estou realizando uma pesquisa sobre crenças e concepções de professores. Esta entrevista é um pré-teste, servindo para ajustes e melhorias do roteiro final.
P: OK !. Vamos lá?
E: Claro! A entrevista ou dinâmica se pudermos dizer assim, será realizada da seguinte forma.:
Vou apresentar a você algumas respostas que alunos produziram sobre um questionário preparado anteriormente, e gostaria que você analisasse como se fosse a correção de uma questão, tudo bem?
P: Tudo bem!
Apresentamos o protocolo Q1a – A1.

E: Esta é uma resposta a respeito da primeira questão, caso queira, pode discutir a questão e depois comentar a resposta do aluno, ok!
"........." [o prof. Observa a questão]
P: Então você precisa que eu olhe essa questão "..." e?
E: Analise a resposta desse aluno, na verdade é como se você estivesse corrigindo uma questão de um aluno.
"........." [o prof. Observa a resposta do aluno]
P: O aluno errou a resposta aqui, aparentemente ele errou numa continha,
"..." E daria uma nota para essa questão, é isso?
E: Poderia, caso queira
P: Variando de ?
E: Vamos dizer um ponto é razoável?
P: Um ponto!, Eu daria 0,75 para ele, por que na verdade ele mostrou todo o conceito, e o resultado dele não está batendo!
Deixa eu verificar mais uma vez "..." Pode ser que eu tenha errado essa conta aqui. "........." Bom eu que errei isso aqui. É o resultado do aluno está certo.
E: o que você achou do procedimento que o aluno escolheu para resolver a questão?
P: Bom o foi o procedimento padrão, não teve nada de especial!
Ele resolveu a integral, variando de Zero até Dois, "..." Não teve nenhuma inovação aqui, ele poderia ter resolvido de uma forma diferente, talvez não tão

aproximado como foi resolvido. Calculando as áreas internas e externas e logo depois fazendo a média entre elas.
Bom, a resolução dele está bem padrão para quem já fez o Cálculo.
E: Gostaria de falar algo mais?
P: Não, acho que quanto a esta resposta não tem mais nada!
E: Tudo bem, "..."
Apresentamos ao professor o protocolo Q1a – A3.
E: Estou entregando mais uma resposta da mesma questão que você acabou de ver, o que você poderia falar a respeito da resposta desse aluno?.
P: A mesma questão não é?
Bom nessa questão o aluno não fez nada de mais, ele não fez nada na verdade. Se fosse para dar uma nota eu daria Zero.
E: O que você esperava que ele respondesse?
P: A área da região limitada, ele me respondeu o valor da função nos pontos, nos extremos, de x. Pelo que estou vendo o enunciado está bem claro! Determine a área da região limitada entre o eixo x e o gráfico de *f*.
E: Tudo bem, mas gostaria de comentar algo mais sobre a resposta do aluno?
P: Não tem o que comentar, está errado!
E: OK! Agora lhe entrego uma resposta de outra questão, a questão 2.
Entregamos ao professor o protocolo Q2 – A2.
Então o que você pode dizer sobre a resposta ou se quiser comentar sobre a questão em sí, fique a vontade.
P: Bom, esta resolução está errada, ele não me mostrou uma função que quando derivada dê "x ao cubo menos x mais um", ele simplesmente derivou a função que foi dada.
E: E o que você esperava que...
P: O esperado, pelo enunciado, seria o cálculo de uma integral. Ele pegaria a função integraria em x, encontraria a função que quando derivada dê essa daqui [apontado para a função dy/dx].
E: OK! Nesta folha uma outra resolução dessa mesma questão.
Apresentamos ao professor o protocolo Q2 – A3.
P: Cara, não faço a menor idéia do que esse aluno fez aqui! Ele simplesmente multiplicou um *x* aqui "..." talvez o erro dele deve ter sido mais grave do que o anterior.
E: Como assim? O que provoca isso?
P: Acho que o que ele fez aqui! Ele derivou a função, como o outro também derivou, no final ele multiplicou um x aqui [apontando para a resolução do aluno] que não se sabe de onde veio. Bom, acho que estou entendendo de onde ele tirou esse x, ele pegou daqui, [apontado para o enunciado da função] desse y(x) ele deve ter imaginado que fosse uma multiplicação, talvez tenha sido isso![rindo]
E: E o você acha desse ponto de vista, o por que o aluno respondeu dessa forma?
P: Porque quem resolveu isso não tinha menor idéia do que era para ser feito! [rindo] Só consigo enxergar isso! Ele confundiu a nomenclatura de uma função com um produto, creio que foi isso que ele tenha confundido e ele resolveu dessa forma
E: Legal, mas já que estamos falando de como o aluno talvez tenha pensado, o que você falaria para um aluno que lhe entregasse uma resolução dessa? Você falaria alguma coisa?
P: Bom, num primeiro momento não falaria nada, mas se ele viesse me perguntar, antes de mais nada perguntaria o que ele fez aqui! E se a resposta fosse:
Há isso não era uma multiplicação?

Eu iria mostrar para ele todas as formas de nomenclatura que utilizamos para função, o porque posso escrever uma função como f(x) ou y(x) quando escrevo g(x) ou então h(x), o que tem de novo em colocar uma y(x)?
Poderia mostrar que para que ele encontre uma função y(x) que quando derivada de isso [apontando novamente para o enunciado]. Se a derivada é isso daqui, como é **que vou encontrar uma função que quando derivada me dê isso!** [idem] **Estou encontrando a primitiva dela**, pois quando eu derivo a primitiva consigo chegar nessa daqui. Ou seja, não seria calcular uma derivada mas sim um integral!
E: Poxa, muito bem, gostaria de um professor assim [risos...] Mas, vamos lá, apresento agora, uma resolução de uma outra questão. Diga me o que acha!
Entregamos o protocolo Q3 – A1.
P: "........." Bom primeiro que ele errou no resultado da integral! A integral de seno é menos coseno, ele fez certo em "..." dividir em dois intervalos, ele pegou o intervalo de x e dividiu em dois. Não acredito que ele tenha feito isso pensando, realmente, no cálculo da área, ele dividiu isso porque é uma parte da área que está abaixo do eixo x e outra está para cima do eixo, se ele calcular vai dar zero, e deve se calcular uma área limitada pela função e o eixo x quando acontece isso costumamos dividir em duas, **com certeza ele não pensou no gráfico!**, porque estou dizendo isso? Provavelmente ele confundiu o –1 à 1 e trocou o eixo x pelo eixo y. Dá para ver pela resposta dele, normalmente nós trabalhamos de –π à π ou de –π/2 à π/2. Então ele já havia resolvido um exercício similar só que trabalhando com radianos e mais, ele errou os valores do coseno.
E: Bom, a respeito do gráfico, o fato dele ter separado os intervalos de –1 a 0 e depois de 0 a 1, não pode dar indícios de que ele possa ter pensado no gráfico mas não o representou?
P: Eu acredito que não! Na minha opinião que esse aluno simplesmente memorizou como foi feito o exercício, ou seja o exercício foi memorizado e ele sabia que deveria ser dividido em dois, talvez por que o professor já tinha resolvido na lousa, ou ele já tinha visto isso alguma vez.
E: Mas e se ele apresentasse o gráfico na resolução dele?
P: Cara é difícil falar isso! Se! Depende, não dá para saber, só que da forma com que foi feito aqui sem mostrar o gráfico eu acredito que ele tenha simplesmente memorizado e pronto, "..." apesar que é difícil analisar isso no aluno.
E: É tenho que concordar as vezes é difícil de ver o que o aluno quer "passar" na resolução.
E: Tenho aqui mais uma resolução da mesma questão, o que você pode analisar sobre essa resolução.
Entregamos o protocolo Q3 – A2.
P: "........." Esse aluno não tem a menor idéia sobre gráfico de função, **"não tem a menor noção"** com certeza porque o gráfico de uma função seno não é uma reta! E ele desenhou aqui o gráfico da função seno como uma reta. Simplesmente encontrou dois pontos, ligou encontrou uma reta e disse que isso daí é o gráfico da função seno de x. Outra! ele não respondeu a pergunta que foi questionada, que era para determinar a área da região.
E: E como você consideraria essa resolução?
P: O que ele conseguiu mostra que sabe fazer, é encontrar o valor da função no ponto, mas só isso e nada mais do que isso!
E: Isso em relação a questão?
P: Em relação a questão não vale nada!
E: OK! Aqui está uma resolução de uma nova questão.

Apresentamos ao Professor o Protocolo Q4- A1.
P: "........." Esse enunciado está errado não é?
E: Está! Percebi esse erro depois de ter aplicado as questões. Mas se ocorresse isto em sua prática !
P: Se essa questão fosse proposta para o aluno! Se eu fosse o aluno para resolver isso daqui, colocaria f(x) = - 2x, mas isso em relação a questão que fiz, se está certo esse expoente, não é?
E: ok !!
P: Então se eu fizesse essa questão, sei lá, e cometesse esse erro, se é que isso é um erro! Eu esperaria que o aluno cancelasse isso daqui [circulando para a função dada no enunciado] e resolvesse a questão como f(x) = -2x, claro que esse gráfico [apontando para o gráfico representado na questão] está errado. Pois seria uma reta e que ele calculasse a área correta!, poxa mas é difícil!
E: Mas e quanto a resolução dele...
P: A resolução dele, num caso desse como já foi dado o gráfico! O problema da função, fica meio complicado mudar isso, neste caso provavelmente cancelaria essa questão. Bom, neste caso, vou analisar a resolução dele.
"........." ele dividiu em dois intervalos "........." Bom, talvez por uma grande coincidência ele se enrolou com os sinais e conseguiu fazer alguma coisa. Vamos conferir esse resultado, "..." Bom, ele consegui resolver a integral indefinida, ou seja encontrar a primitiva da função corretamente, mesmo não tendo cancelado o x ao "cubo". O próximo passo ele calculou o correto, mas na hora de substituir os intervalos de integração "..." pelo fato dele ter colocado os parênteses no lugar errado, na minha opinião, pois ele não pegou o sinal de negativo, "..." ele acabou errando mas também porque ele cortou esse dois com esse daqui [apontando para a resolução do aluno] e ficou com esse resultado aqui em baixo.
Agora, se ele tivesse colocado isso aqui certo ele acertaria o resultado mas não sei se seria por coincidência, você entendeu o que eu falei, não?
E: Entendi, mas.
P: Porque ele substitui os intervalos corretamente mas como ele não mostrou os sinais negativos lá fica difícil de enxergar se na hora de jogar o um aqui, ele colocou o –1 (menos um) a quarta e de onde veio esse sinal de negativo fica difícil de enxergar de onde veio, não é? Quando eu resolvo um exercício desse na lousa, nunca coloco direto, mesmo sabendo que vai dar zero nunca deixa de escrever o zero por isso.
E: A respeito da resolução da questão em relação ao enunciado proposto, o que você podia esperar da resposta dele com o que ele realmente fez?
P: Bom, diria que não esta muito bem organizada essa resposta dele, primeiro que a resposta de acordo com o resultado dele está errada, começando por aí. Ele encontrou que isso era uma área e ainda colocou em módulo, mas considerou negativo para somar com o outro 'meio', além disso ele resolveu direto, de uma forma muito rápida ficando de uma forma muito desorganizada. Está faltando alguma coisa, principalmente no começo, de indicar o que ele realmente vai calcular, né. Essa área seria a integral de – 1 a 0 da função mais a integral de 0 a 2 da função e cada uma dessas deve estar em módulo pois é o cálculo de um número que pode ser negativo e representa uma área e não pode ser negativa. Feito isso, aí sim ele poderia proceder dessa forma, aí nessa parte final ele colocaria a área igual a esse [apontando para a resposta do aluno] primeiro resultado dele mais o outro resultado que seria igual a isto. Essa é a forma mais clara que considero de resolver essa

5

questão. Bom não está de todo errado mais tem falhas conceituais, não necessariamente no cálculo da integral mas nos cálculos elementares.

E: Beleza, aqui está uma outra resolução dessa mesma questão.

Entregamos o protocolo Q4-A2.

P: "........." Bom, só por ter encontrado o valor da função no ponto x=1 dando dois e no gráfico está dando zero e no ponto 2 esta dando f(2)=4 e no gráfico dá zero. É um negocio bem complicado, isso indica que ele não percebeu o gráfico. Pois ele deveria ter percebido o erro ou do gráfico ou da própria função, neste caso o da função. É estranho pois ele fez esse cálculos e não utilizou para nada!

É se ele fosse considerar o gráfico ele teria que separar o intervalo em duas partes, pois uma parte do gráfico está para cima do eixo x e a outra está para baixo, uma vai descontar da outra e o que ele está calculando não é respectivamente a área procurada, considerando esse gráfico como o correto.

E: Mais uma vez, quanto a resolução?

P: É, quanto a resolução ele faz uns cálculos que não sei por que? Sinceramente eu não sei de onde ele imaginou que isso fosse ajudar a resolver a questão

E: O.K.! Então prosseguindo essa é uma resposta a uma outra questão, o que você pode dizer sobre ela.

Entregamos ao professor o protocolo Q5 – A2.

P: "........." "x à quarta sobre quatro mais 3x quadrado sobre dois mais x" ... Ele não colocou uma constante aqui! "..." Ele deveria colocar a constante, pois apesar deles não darem muito valor para isso, é muito importante!

Mas a resolução de certa forma está correta, só faltou essa constante, o que achei meio incomum foi ele colocar ...

E: A resposta igual a integral?

P: Isso, exatamente, não é algo muito comum deles fazerem, colocar a pergunta novamente!

E: Você comentou algo sobre a constante, que é "algo muito importante e que o aluno deveria colocá-la", que lhe motiva a pensar isso?

P: Bom, a constante é realmente importante, pois quando você determina a integral como sendo a primitiva da função, na verdade nós calculamos, como eu falo para eles, uma família de funções. Uma família de funções e deixando de colocar essa constante, apesar de ser uma única letrinha, ele está representando apenas uma função, uma das infinitas funções possíveis que quando derivada me dê essa função que estamos integrando, então é um erro! Mas, sinceramente eu não considero um erro que fizesse eu cancelar a questão do aluno.

E: Tá legal, então vamos para uma outra resolução.

Apresentamos o protocolo Q5 – A3.

P: "........." Bom, não tem nada de anormal na questão. "..." é isso aqui [apontando para a resolução] na verdade não é uma coisa muito comum de se ver, colocar o x em evidência na é muito comum, agora ...

E: O que você quer dizer com "não tem nada de anormal", você espera uma resposta padrão?

P: Não, não uma resposta padrão, o que eu falei de anormal é que não encontrei nenhum erro na resolução dele. A única coisa que foge da regra ou que não encontro nas avaliações é o fato dele ter colocado o x em evidência. "..." E essa segunda passagem, também não é muito usual, a não ser no começo do estudo de integral que os alunos resolvem por aqui [apontando para a resolução], normalmente, quando temos uma integral de um polinômio os alunos resolvem direto.

6

E: Feito, mais uma questão, o que você pode comentar.

Entregamos o protocolo Q6 – A2.

P: Mais uma que está faltando a constante, "..." essa forma de resolução é a mais freqüentemente, o de não utilizar as propriedades.

E: Como assim, o de responder direto, como disse anteriormente?

P: Sim, foi boa a resolução, por ele ter enxergado a distributiva, e além da distributiva ele fez as operações corretamente. Normalmente, o aluno separa isso daqui em suas integrais, ele faz a integral de "x ao cubo dx" vezes a integral de "x a quarta menos um dx" e esse aluno não resolveu assim. E mais uma vez aparece o enunciado na resposta, não é?

E: Pois é, mais uma resposta de um outro aluno. .

Entregamos o protocolo Q6 – A3.

P: "........." Bom, esse errou na distributiva. Se ele estivesse acertado a distributiva, em que ele aplica a propriedade, provavelmente acertaria a questão. Ele mostrou que sabe integrar, ele se equivocou ou errou na hora de fazer a multiplicação dessa distributiva, "..." é isso.

E: Quanto a resolução desse aluno, você consideraria de todo errado?

P: Totalmente errado não! Olha, eu acho que o objetivo de uma questão dessa, além de ... enfim quando proponho uma questão com essa configuração, o que deseja é que ele realize essa distributiva, com a intenção de verificar se ele está atento ao exercício. É lógico que ele terá nota descontada, mas a resolução da integral, quando ele tem o polinômio pronto ele mostrou que sabe fazer. Isso ele mostrou que consegue integrar sem problema nenhum, ou seja uma parte do objetivo aqui, de saber se ele sabe fazer realmente esse tipo de coisa não foi cumprido pelo aluno. Então ele teria uns quarenta por cento da questão descontado.

E: Mais uma?

P: Vamos!

E: Essa é a questão sete, o que você poderia dizer da analise desta?

Apresentamos ao professor o protocolo Q7 – A1.

P: "........." Eles normalmente esquecem de colocar isso, [apontando para o protocolo] "........." O aluno enxergou que deveria realizar uma substituição, "..." De certa forma ele mostrou que sabe resolver por substituição, mas ele parou aqui. A partir daqui eu não sei se ele se confundiu, ou se ele chutou não sei o que aconteceu. Pois a substituição que ele deveria fazer era "du sobre u" que daria o "ln de módulo de u", "..." ele deve ter se confundido pois isso ficaria "integral de u du" e ele não escreveu, por isso ele não encontrou a solução.

E: E O que você acha que de ter acontecido, ou melhor, o que deve ter motivado o aluno responder dessa forma?

P: Pelo fato dele ter tentado resolver muito rápido, ele não fez a substituição que deveria, ele fez até aqui[apontando para o protocolo] corretamente e a partir daqui que era só escrever a integral ele não fez, talvez por preguiça ou pressa.

E: você acha que se ele tivesse feito a integral de "du sobre u", conforme você falou, ele teria acertado a questão?

P: Acredito que sim! Acredito que sim! Ele vem aqui e chama de "u ao quadrado sobre dois" então provavelmente ele pensou em "integral de u du", aí ficaria de "u ao quadrado sobre dois" assim "..." na verdade na hora de fazer essa substituição aqui ele já "..." pelo fato dele ter colocado o menos um aqui acredito que nem foi esse o erro dele, tá errado! Por que se ele fala que "..." esse denominador é o u "..." que raio ele fez aqui? "..." Cara, não sei não!

E: Quanto a resolução dele o que você consideraria?

7

P: Consideraria até aqui, ele veio com a técnica da substituição correta! Mas normalmente um exercício desse não é só para analisar a técnica da substituição, até aqui ele veio numa boa, parece até que é uma forma de memorizar, ele memorizou até aqui, talvez tenha até enxergado que seria uma boa substituição, mas daqui para baixo ele não soube o que fazer com a substituição.

E: OK! Mais uma resolução. .

Entregamos o protocolo Q7 – A2.

P: Nesta questão eu já não consideraria nada.

E: Por qual motivo?

P: Bom Ele começo com um erro, em sala de aula eu digo que não consideraria nada, esse é um desses! Nesses erros, eu mostro para eles que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e que é diferente de $a^2 + b^2$, o mesmo para o cubo da soma e outros. Esse tipo de erro é uma falha conceitual imperdoável. Na minha opinião é imperdoável.

E: Mas fora esse erro você chegaria analisar um pouco mais a questão?

P: Bom, é como eu falei só com esse erro já não corrigiria a questão dele, já estaria totalmente incorreta. "..." Mas mesmo assim ele vem com uma sucessão de erros absurdos, que não tem a menor condição, ele não sabe aplicar a distributiva não tem a menor noção de potenciação, é muito difícil de analisar uma questão com uma resolução dessa.

Neste momento o professor pede para encerrarmos a entrevista, a retomamos na semana seguinte. Apresentando inicialmente o protocolo Q8 – A1.

E: Esta é uma das respostas da questão oito, o que você pode comentar sobre ela.

P: "........." Bom aqui já começou, "..." Eles tem a mania de escrever seno de nada!

Essa substituição também tá um pouco estranha, vou por o símbolo da integral aqui, o 'udv' seria $\cos x dx$. Aí sim o v seria $-senx$ "..." Olhando assim, rapidamente, está quase certa, pois levando em consideração esse seno de x.

E: O.K. Mas, quando você diz "quase certo" é em relação ao arco que está faltando?

8

E: Mas quanto ao que ele resolveu ou pelo menos tentou resolver?

P: Ele até que estava indo pelo caminho certo se levarmos em consideração a resolução por substituição trigonométrica. "..." considerando essa saída , que boa até! "..." Que acabou 'comendo bola' no meio do caminho.

E: como assim?

P: Bom, ele fez a substituição trigonométrica e não mudou os extremos, ele não mexeu em nada nos extremos, se passa do x para o θ ele teria que mudar aqui [apontando para o protocolo] Ele resolveu isso aqui em baixo, $sen\theta d\theta$, **não resolveu a integral**, e colocou direto os extremos de integração, enfim. Ele teria muita pouca nota aqui!

E: Tá legal.

P: Tá faltando muita coisa.

E: Mais uma resolução da mesma questão.

Entregamos ao professor o protocolo Q9 – A2.

P: "........." Mesmo erro dos extremos, e aqui x^2, (cadê a substituição que foi feita?) $x = \cos\theta$ então aqui seria $sen^2\theta$, ai sairia $sen\theta$, vezes o $-\frac{sen\theta}{\theta}$, menos $\int sen\theta d\theta$.

Também não respondeu o que o exercício pede, que é o cálculo da área.

E: Quando você disse que este aluno cometeu o mesmo erro do outro, ou seja que o aluno não fez a mudança dos extremos de integração, como você considera isso, é algo comum ou que ele deveria realizar isso mesmo?

P: O que acontece é o seguinte, a gente trabalha de uma forma, pelo menos é a forma com que trabalho com meus alunos. "..." Quando eu trabalho substituição trigonométrica, eu tiro os extremos de integração, ou seja eu trabalho sem os extremos, ai eu resolvo a integral como se fosse uma integral indefinida. No final, volto para a variável original, no caso x, com esse resultado eu aplico o conceito da integral definida. Eu costumo resolver o exercício assim, mas eu mostro que quando

E: Esta é a última resolução.

Entregamos ao professor o último protocolo, o Q10 – A3.

P: $h = 20m$ é isso? Bom, este já considerou que o h é altura, "..." o exercício pede o trabalho, ele responde força, esse cara não em a menor noção do que vai fazer e nem de física.

E: O que você poderia espera que ele respondesse?

P: Bom trabalho é força vezes o deslocamento, além disso a carga vaza a uma taxa, então na verdade o que ele quer dizer é que a força varia a uma taxa constante, e eu enxergo aqui que a derivada dessa força em relação ao *h* me dá o "–5" que é a taxa que ela vai vazar. Pois se ele está vazando vai diminuir essa força, então o que é que acontece, se essa variação de força é constante posso dizer que o trabalho vai ser "..." o somatório das forças vezes o deslocamento, acho que é isso, somaria a força em cada altura vezes o deslocamento, então tenho cada parcela de força vezes um pequeno deslocamento variando de zero até vinte.

E: Bom, era isso mesmo que pensei no momento em que formulei a questão.

P: É, agora só para criticar um pouquinho seu trabalho, já que foi sua questão, dá para enxergar que isso é delta, creio que seja uma dúvida que o aluno teria, mas a princípio dá para perceber que isso daqui é em função da altura, acho que está faltando colocar as unidades, acho que deveriam ser colocadas, pois sempre que trabalhamos com exercícios de física é bom colocar as unidades, né. E se eu tivesse elaborado a questão teria especificado o *h* para não causar dúvidas. Acho que basicamente é isso.

E: Legal, mas a idéia da questão era que quando o aluno fosse resolver, pudesse lembrar a fórmula do trabalho que é a força vezes o deslocamento, mas também de colocar um pequeno impecílio que a força acaba variando também, né. Fazendo com que ele achasse a integral dessa força.

P: Que é pegar cada pedacinho de força e cada pequeno deslocamento e fazer o somatório de todos eles.

E: Exato.

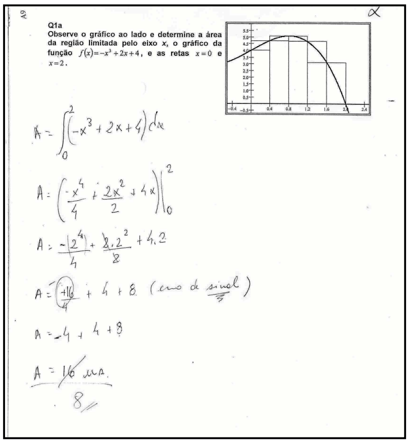
P: É uma questão muito boa.

E: Gostaria de agradecer sua disposição, suas contribuições ao questionário e pela entrevista concedida. Boa noite.

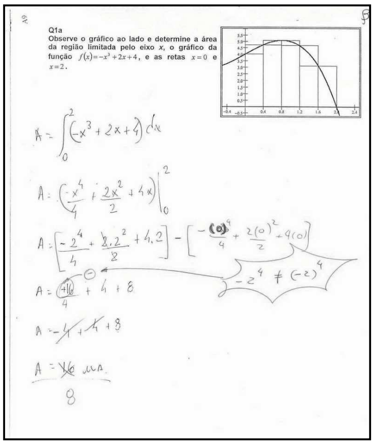
Anexo 4

Questões Analisadas pelos Professores.

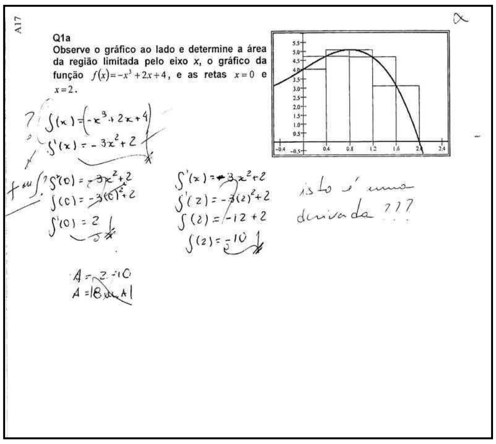
Questão Q1a



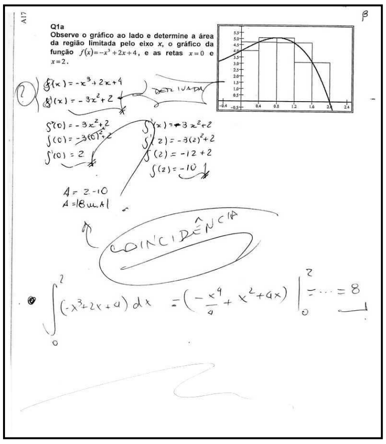
Q1a-A09-Ib-α



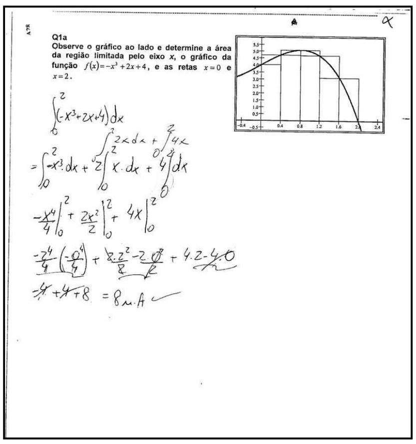
Q1a-A09-Ib-β



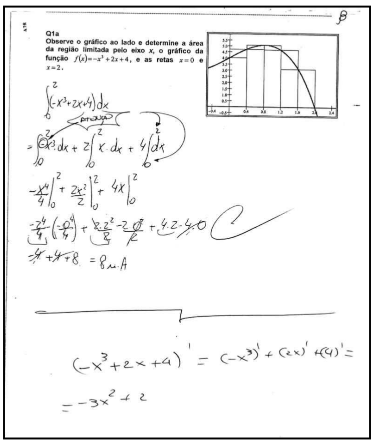
Q1a-A17-III-α



Q1a-A17-III-β

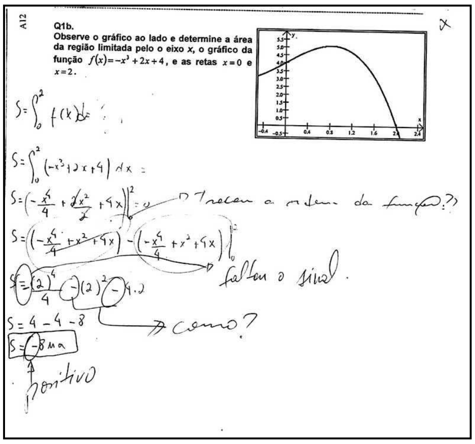


Q1a-A28-IIa-α

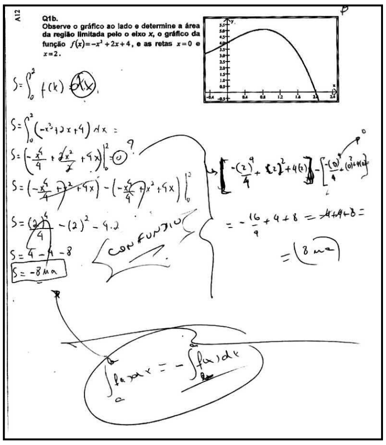


Q1a-A28-IIa-β

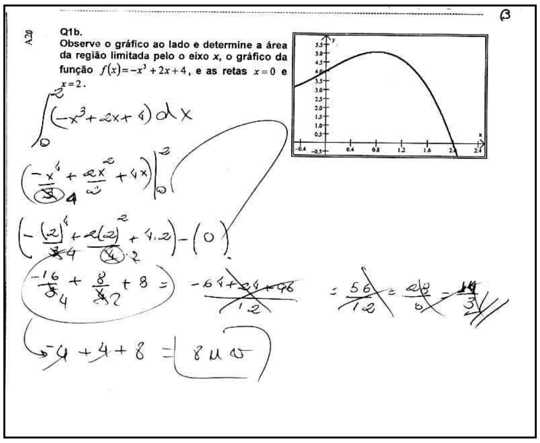
Questão Q1b



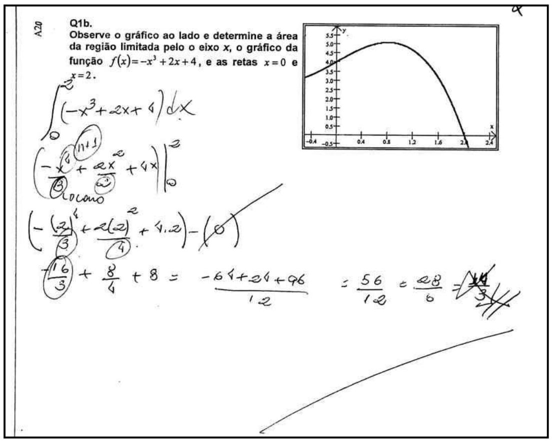
Q1b-A12-Ib-α



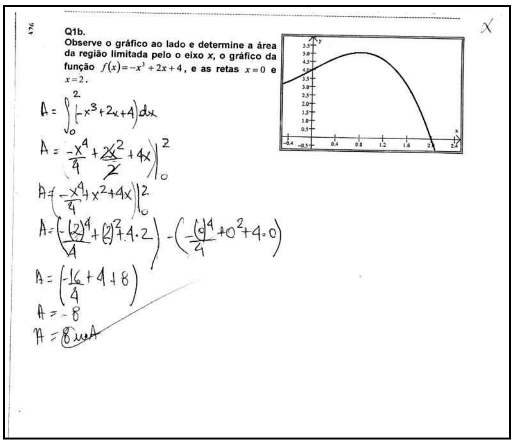
Q1b-A12-Ib-β



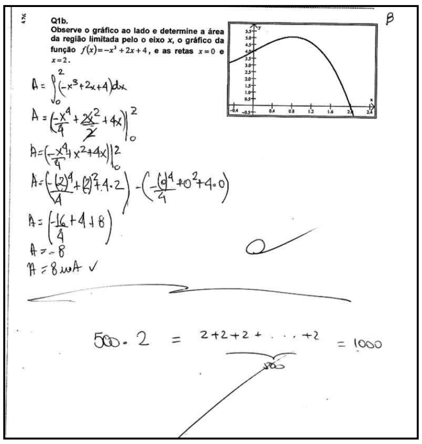
Q1b-A20-IIb-α



Q1b-A20-IIb-β

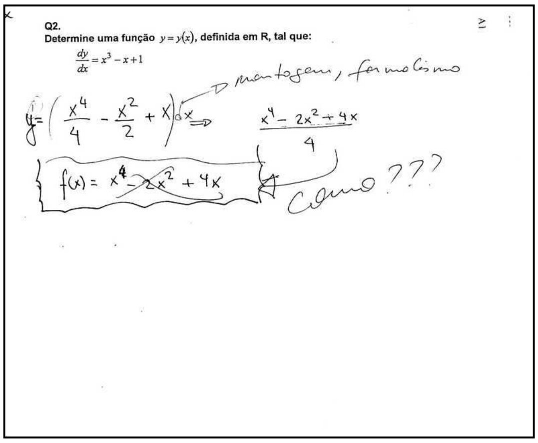


Q1b-A26-Ia-α

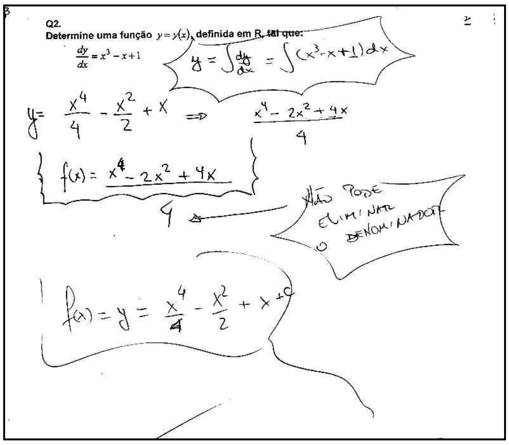


Q1b-A26-Ia-β

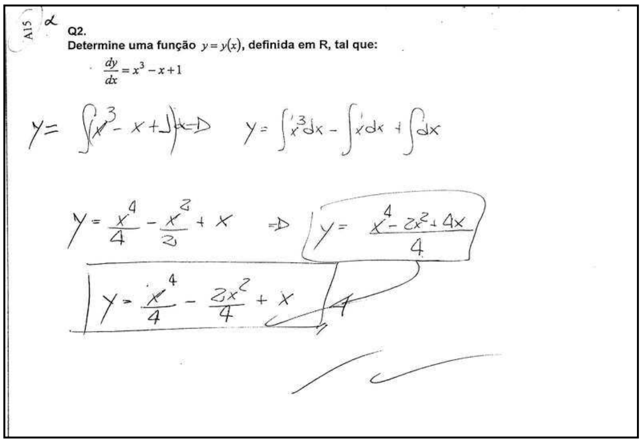
Questão Q2



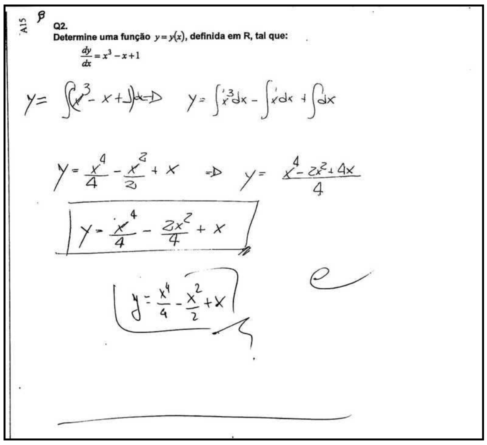
Q2-A01-Ic-α



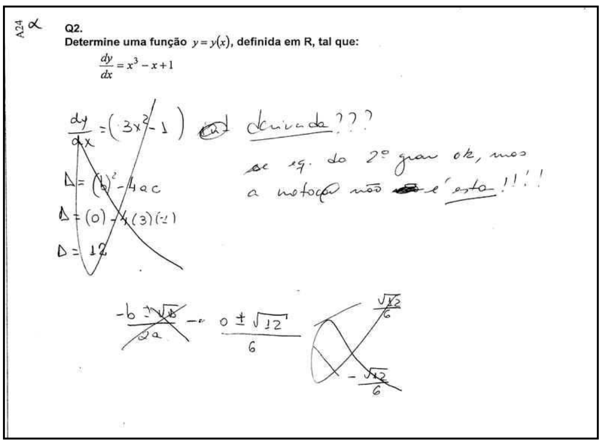
Q2-A01-Ic-β



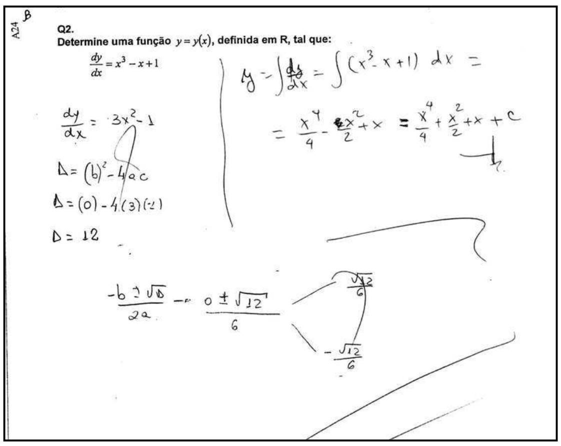
Q2-A15-Ib-α



Q2-A15-Ib-β

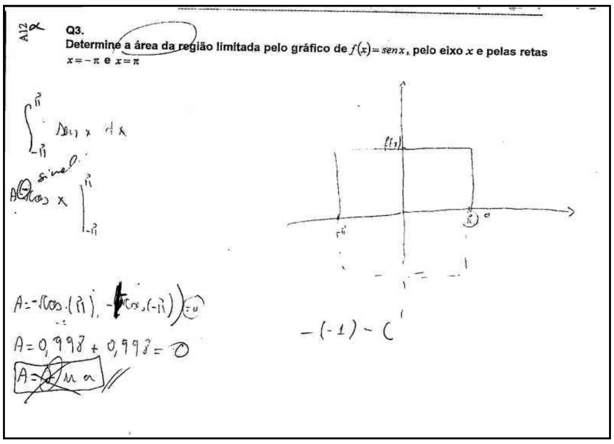


Q2-A24-III-α

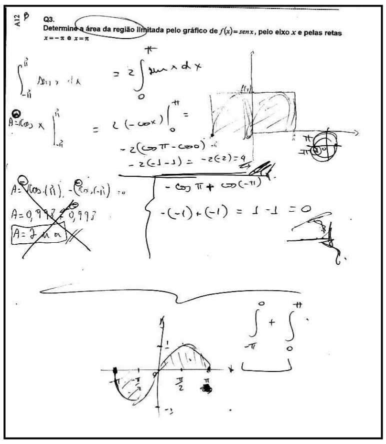


Q2-A24-III-β

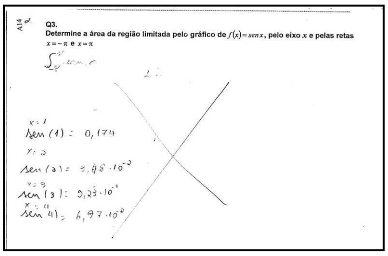
Questão Q3



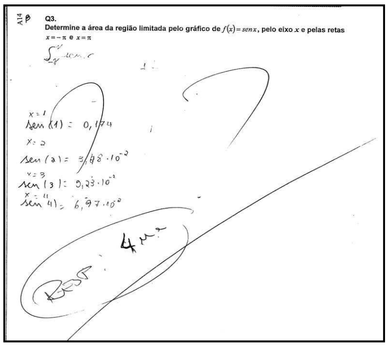
Q3-A12-II-α



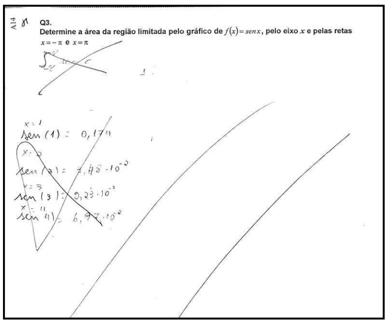
Q3-A12-II-β



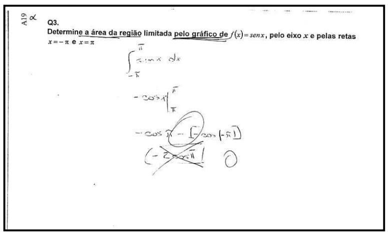
Q3-A14-IV-α



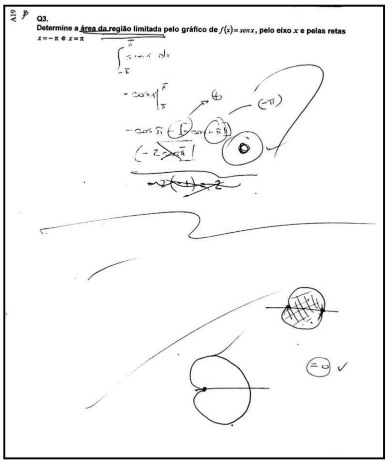
Q3-A14-IV-β



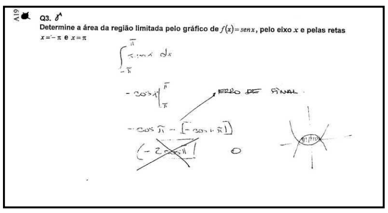
Q3-A14-IV-γ



Q3-A19-III-α

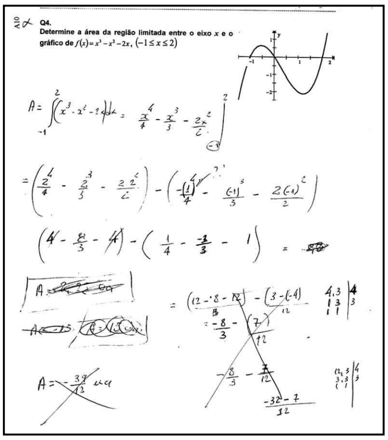


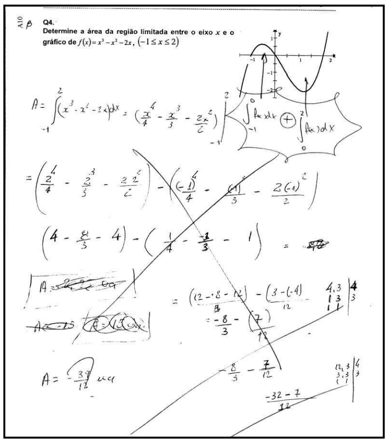
Q3-A19-III-β

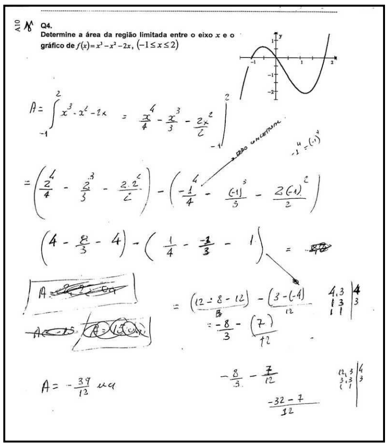


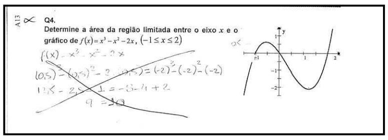
Q3-A19-III-γ

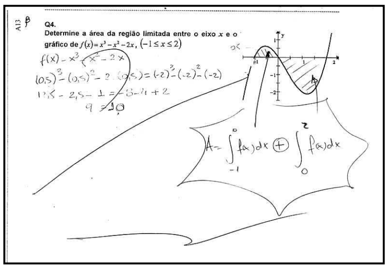
Questão Q4

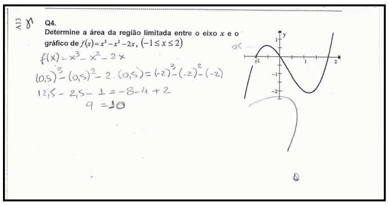

Q4-A10-II-α

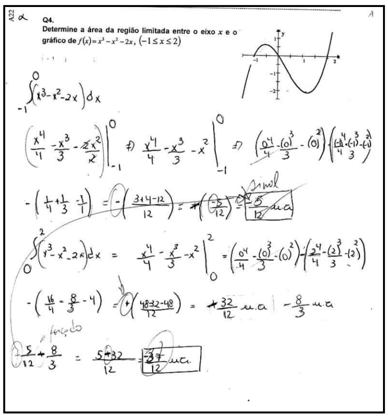

Q4-A10-II-β

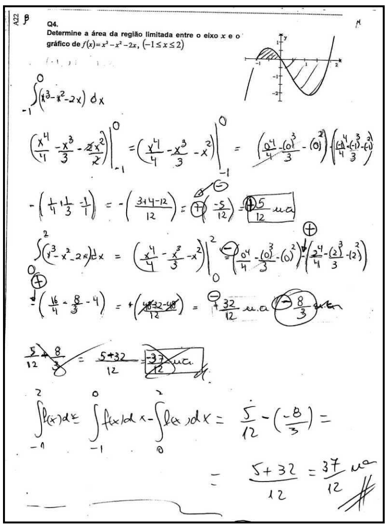

Q4-A10-II-γ

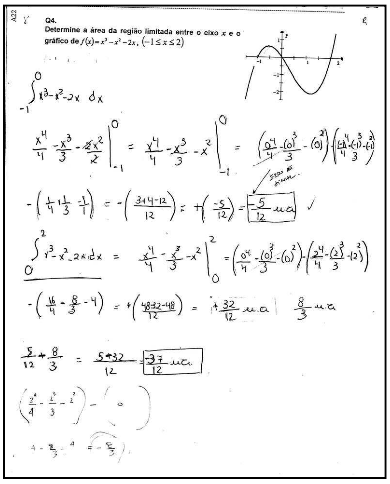

Q4-A13-III-α


Q4-A13-III-β

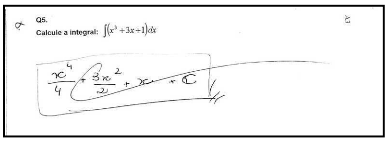

Q4-A13-III-γ


Q4-A22-I-α

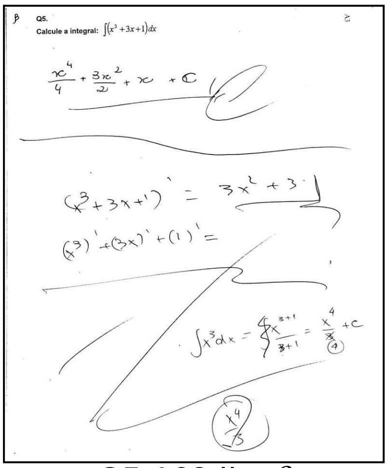

Q4-A22-I-β


Q4-A22-I-γ

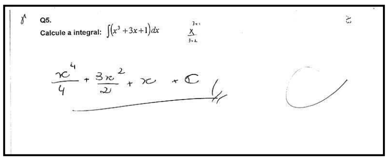
Questão Q5



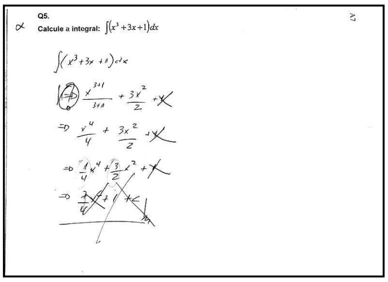
Q5-A03-IIa-α



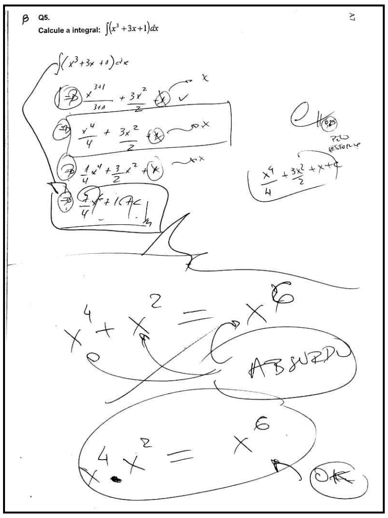
Q5-A03-IIa-β



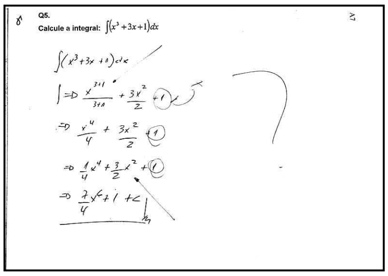
Q5-A03-IIa-γ



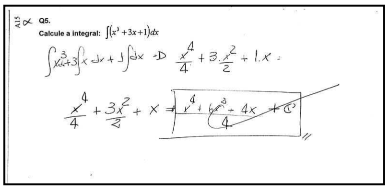
Q5-A07-III-α



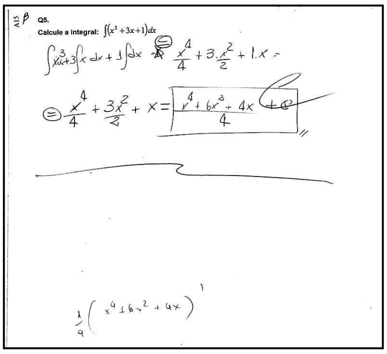
Q5-A07-III-β



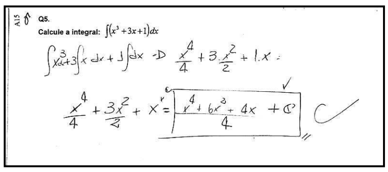
Q5-A07-III-γ



Q5-A15-Ia-α

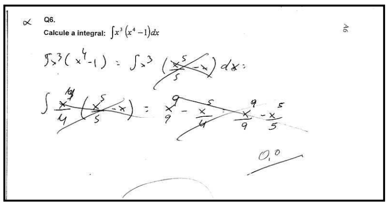


Q5-A15-Ia-β

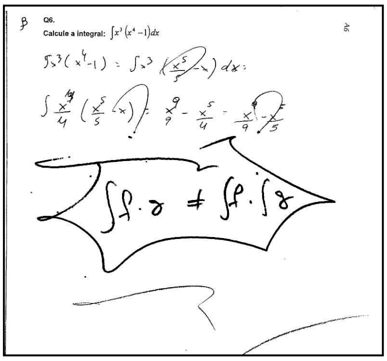


Q5-A15-Ia-γ

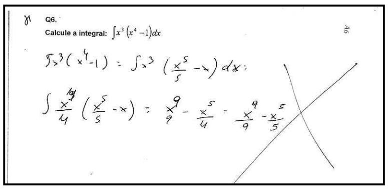
Questão Q6



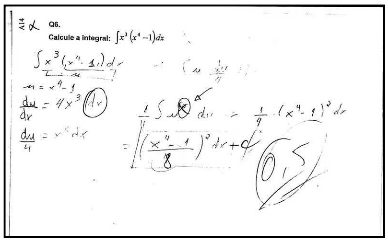
Q6-A06-III-α



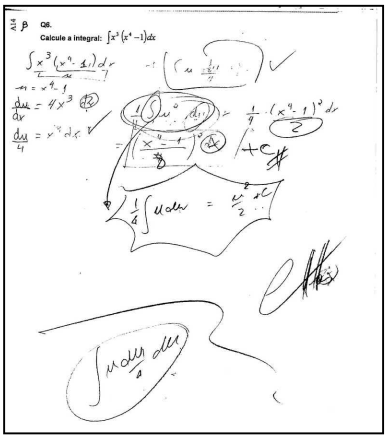
Q6-A06-III-β



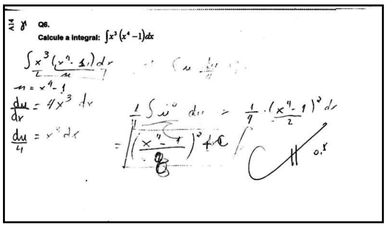
Q6-A06-III-γ



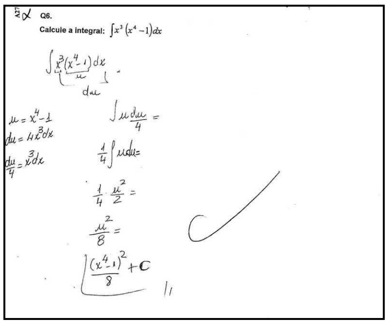
Q6-A14-IIb-α



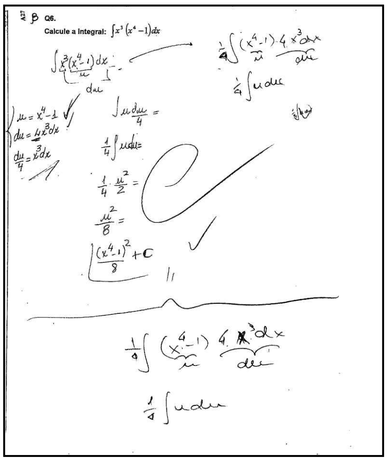
Q6-A14-IIb-β



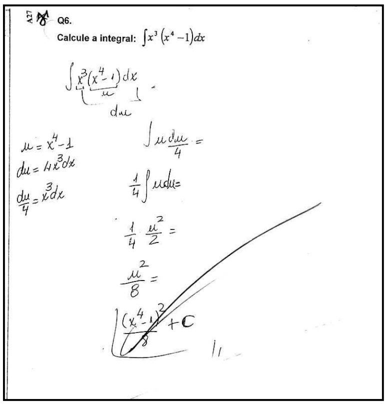
Q6-A14-IIb-γ



Q6-A27-IIa-α

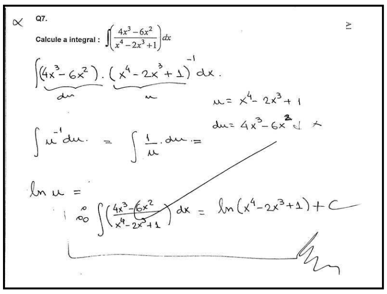


Q6-A27-IIa-β

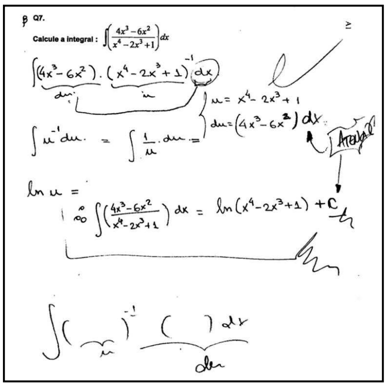


Q6-A27-IIa-γ

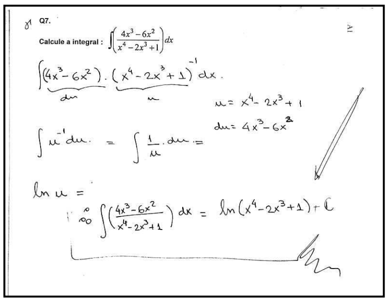
Questão Q7



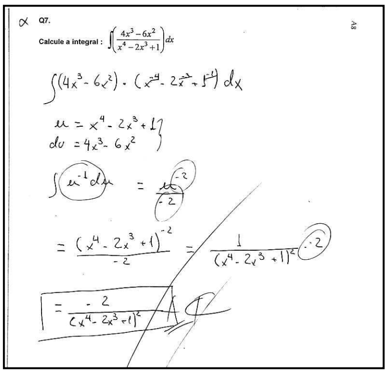
Q7-A01-Ia-α



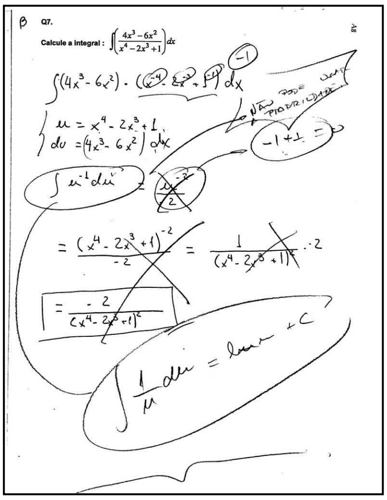
Q7-A01-Ia-β



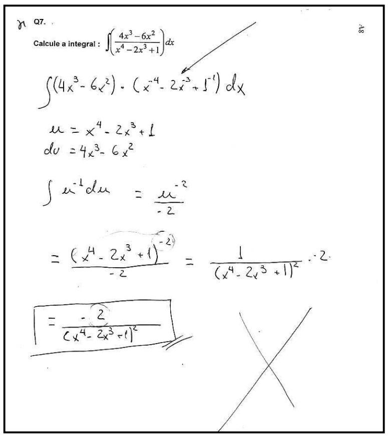
Q7-A01-Ia-γ



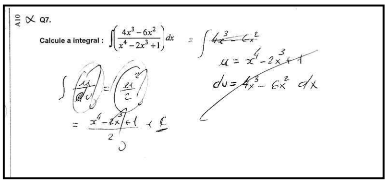
Q7-A08-II-α



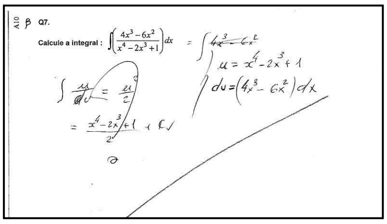
Q7-A08-II-β



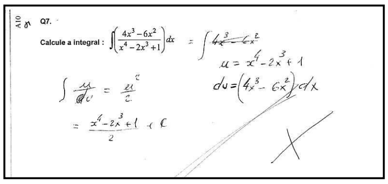
Q7-A08-II-γ



Q7-A10-Ib-α

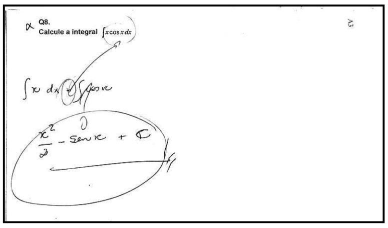


Q7-A10-Ib-β

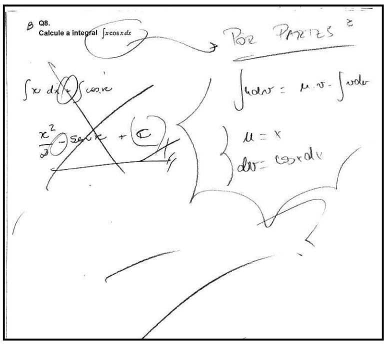


Q7-A10-Ib-γ

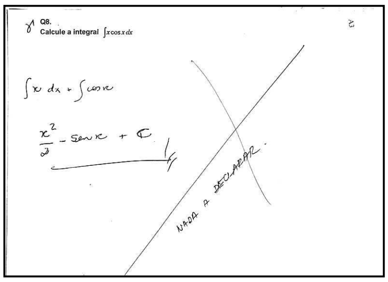
Questão Q8



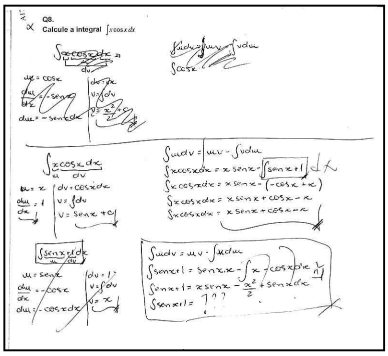
Q8-A03-II-α



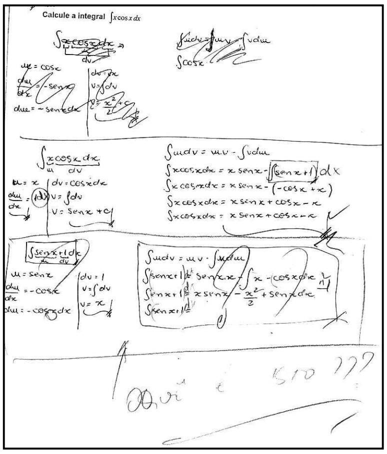
Q8-A03-II-β



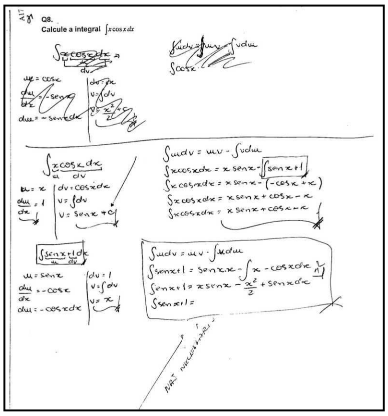
Q8-A03-II-γ



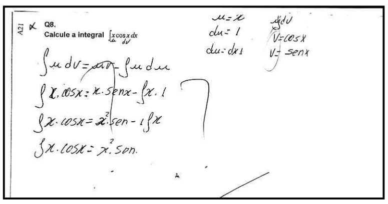
Q8-A17-Ia-α



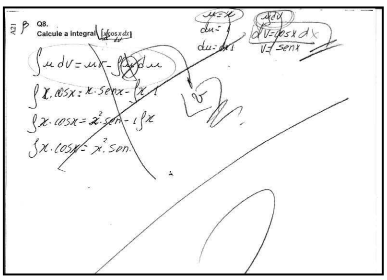
Q8- A17-Ia - β



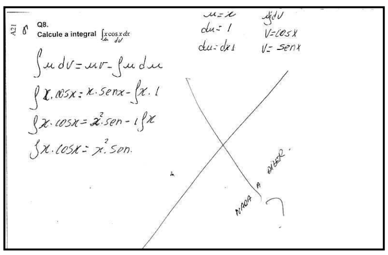
Q8- A17-Ia - γ



Q8-A21-Ib-α

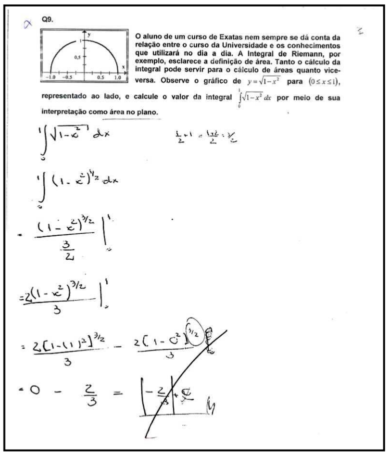


Q8-A21-Ib-β

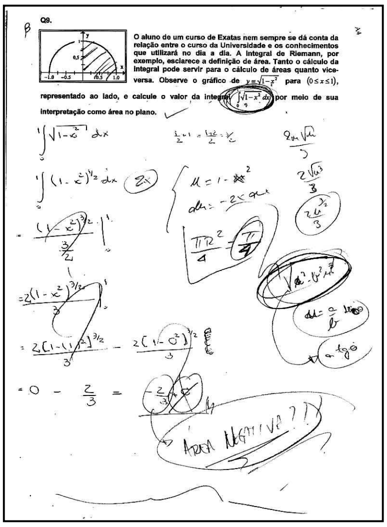


Q8-A21-Ib-γ

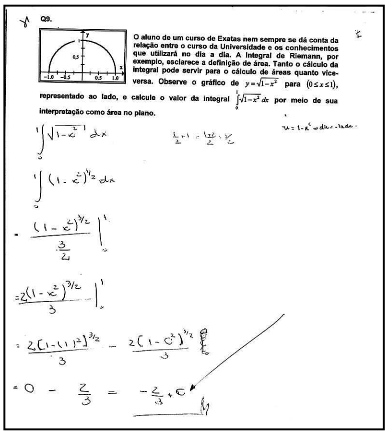
Questão Q9



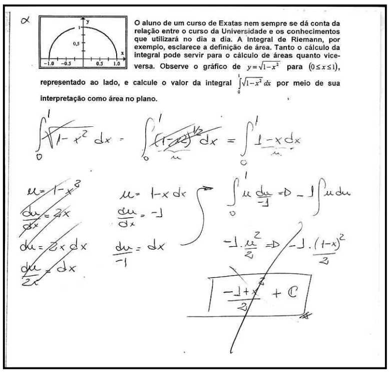
Q9-A04-I-α



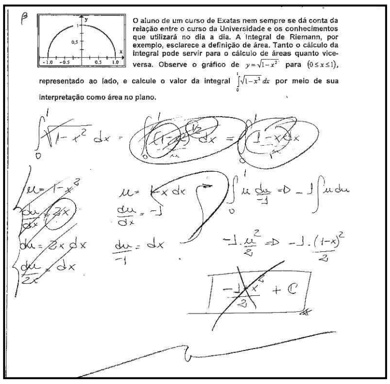
Q9-A04-I-β



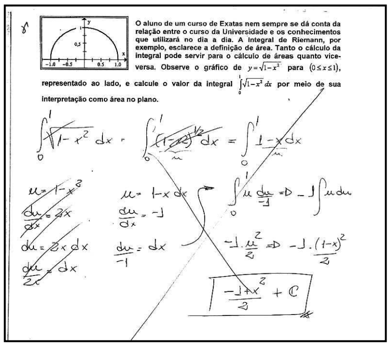
Q9-A04-I-γ



Q9-A15-I-α

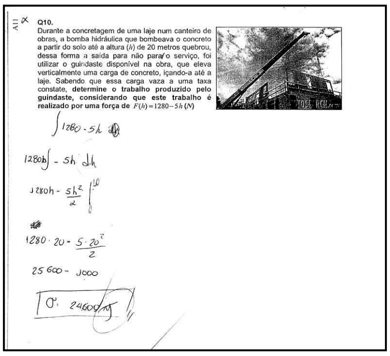


Q9- A15-I-β

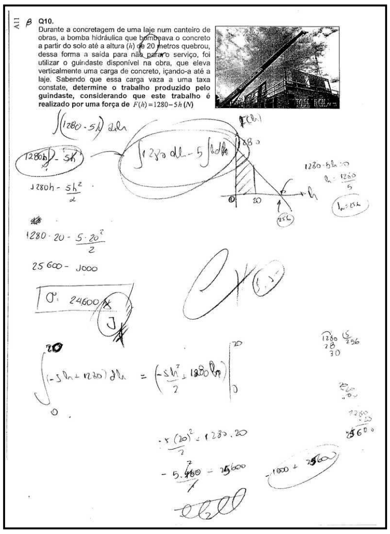


Q9- A15-I-γ

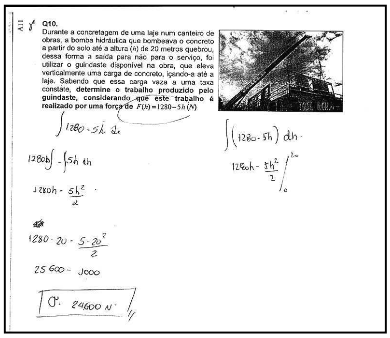
Questão Q10



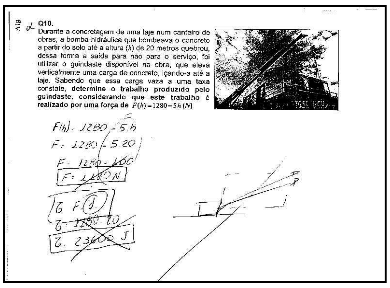
Q10-A11-Ia-α



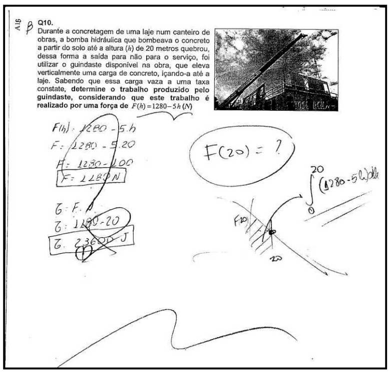
Q10-A11-Ia-β



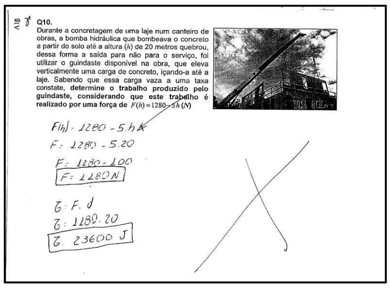
Q10-A11-Ia-γ



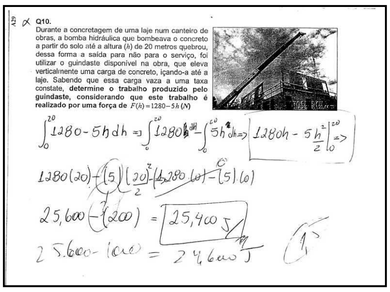
Q10-A18-II-α



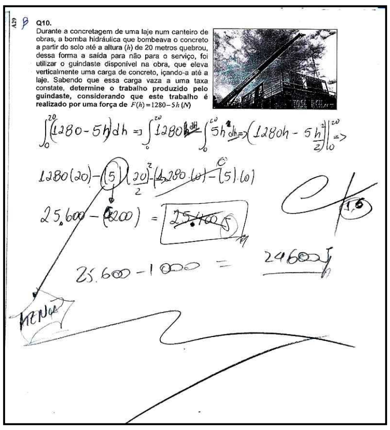
Q10-A18-II-β



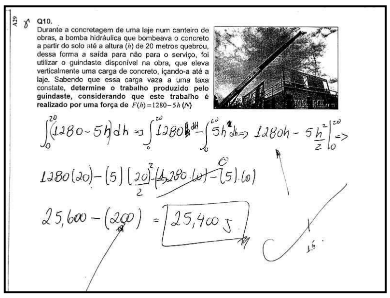
Q10-A18-II-γ



Q10-A29-Ib-α



Q10-A29-Ib-β



Q10-A29-Ib-γ

Anexo 5

Transcrição de Episódios da Entrevista.

Transcrição da Entrevista com Grupo de Professores.

Apresentaremos a seguir a Primeira parte da transcrição da entrevista realizada com o grupo de professores, referente à análise das respostas produzidas por alguns alunos que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Para essa apresentação utilizamos as seguintes abreviações:

Alfa = Professor 1.
Beta = Professor 2.
Gama = Professor 3
F = Investigador.
"..." = Pausa na fala do professor.
"........." = Observação da questão.
[ ] = gestos do professor durante a análise da resposta.

Começamos esta primeira parte da entrevista com a presença dos professores **Alfa** e **Beta**, o professor **Gama** se atrasou, se juntando a nós durante a análise da questão três.

F: Boa Tarde. Gostaria de expressar minha gratidão pelo tempo concedido. Sei que o pouco tempo que vocês têm é muito precioso e fico honrado em tê-los presente para a realização desta entrevista.

Gostaria também de conversar e como nós vamos proceder à entrevista, estarei apresentando a vocês algumas respostas que alguns alunos produziram sobre um questionário que eu já tínhamos elaborado antes e gostaria que vocês pudessem analisar como se fosse a correção de uma questão, de uma avaliação ou atividade que vocês aplicam no dia a dia, no sentido de saber como vocês analisariam esta produção do aluno, tudo bem?

Alfa: Tudo bem!

Beta: OK!

F: Primeiramente, gostaria de entregar a vocês o Termo de Compromisso significando que suas identidades não serão reveladas no texto do trabalho e que todo material, como a gravação e as anotações que fizerem poderá fazer parte do trabalho.

Beta: Tudo Bem! Vamos começar?

EPISÓDIO UM

Apresentamos o protocolo Q1a – A9.

F: Esta é a primeira resposta a respeito da primeira questão e a idéia é de fornecer sempre três resoluções de uma mesma questão.

Alfa: Três respostas da mesma questão? "........." [o prof. Observando a questão]

F: Sim, até mesmo para que se torne um pouco mais próximo daquilo que acontece no dia a dia.

Beta: Compreendi!!

"......" [os professores analisam a resolução. Respondendo primeiramente a questão].

F: Se quiserem comentar as questões, em um primeiro momento, depois podem discutir sobre a resolução do aluno.

Beta: Posso fazer anotações aqui, não é? [apontando para a produção]

F: Sim, sinta-se à vontade, pois as anotações também farão parte dos dados da pesquisa.

"........." [os professores observam a resposta do aluno, fazendo anotações no protocolo.]

F: Pronto? Então, o que vocês acharam da questão, da resolução do aluno, ou seja, o que.

Beta: Bom, eu sou muito crítico enquanto a isso [se referindo a anotação dos parênteses entre a função], isso sem parênteses não quer dizer nada, o que eu vejo sem o parênteses, eu vejo um sinal de Integral menos x ao cubo, sem o diferencial, mais dois x mais quatro com o sinal de diferencial, então isso não quer dizer nada.

Certo, eu costumo falar para os alunos para deixar bem claro, que isso aqui é um ente só, que eu estou integrando toda a função, não é isso? [perguntando ao professor **Alfa**].

Alfa: Concordo, essa é a primeira coisa.

Beta: A mesma coisa aqui, olha, quando eu resolvo coloco entre parênteses, pois é o integrando todo, isso aqui [apontado para o protocolo]. Enquanto a Segunda parte nem sempre vejo a necessidade, porém, eu gosto de mostrar para o aluno que devemos fazer o de cima menos o de baixo [comentando sobre os extremos de integração] para mostra que o aluno entendeu, por que amanhã, por exemplo, tem lá:

$4 + x$

Alfa: Quatro "mais" o x, uma soma, não é? Se trocarmos a operação para a soma

Beta: É, não é verdade. Muitas vezes eu vejo isso. O aluno "quando é zero é zero", não!! E quando é quatro mais x? Ou Raiz quadrada de x mais dois? Para x igual a zero não dá zero! Então eu gosto de colocar para isso.

F: É, faz sentido, essa situação já aconteceu comigo.

Beta: Olha outra situação clássica, "menos dois a quarta o aluno colocou mais dezesseis" e é menos dezesseis, geralmente eu faço isso daqui ($-2^4 \neq (-2)^4$) [anotando no protocolo]

Alfa: Ou é um número negativo ou uma operação na frente, Nessa o aluno dança!

Beta: É, o aluno dança.

Alfa: Mas olha só isso é normal, é um estigma que eles trazem lá do fundamental ou ensino médio, vocês dão aula no ensino médio sabem como é! [falando com Beta e o Investigador]

Isso daí vem...

Beta: Lá de traz.

Alfa: É muito forte desde a quinta série, é uma briga!

Beta: Mas professor, não é "menos dois a quarta, não têm que dar dezesseis", não!

Alfa: Assim como as "regrinhas de sinais"

Beta: É, isso é uma coisa totalmente diferente da outra, não é?

F: É, quando trabalho lá no ensino médio ou até mesmo aqui no ensino superior e aparece uma situação dessas, tento bater nessa tecla, para eles perceberem bem.

Beta: Bom, eu corrigiria esta questão assim! [apresentando o protocolo com as anotações]. Como eu sempre falo, o problema deles não está no Cálculo Diferencial e Integral, quanto ao conceito de integração ele acertou, integrou um polinômio, até que esse daqui fez aquilo que eu gostaria que fizesse mesmo. Manteve o dois x ao quadrado sobre dois, poderia ter ido para x ao quadrado direto, mas prefiro assim.

Alfa: Eu também, passo a passo.

Beta: O conceito de Integral está perfeito, mas o problema dele qual que foi? Matemática!

Alfa: É esse é um tema interessante, costumo falar para os alunos que o problema deles não é o conceito de Integral, até que isso eles absorvem fácil, mas o problema está na "matemática fundamental".

Beta: é isso mesmo!

Alfa: O que é um número negativo? O que um sinal de adição ou subtração?

Beta: É trabalhar a função para que ela possa ser integrada!

Alfa: Isso mesmo é trabalhar com os conceitos matemáticos para que ela seja integrada.

F: Mas finalmente, e se fossemos considerar o que ele fez vocês considerariam errado, certo, parcial?

Beta: Parcial!

Alfa: Bom dependendo da linha de trabalho, ou seja, da turma, eu poderia considerar errado!

F: Como assim? Explique-me melhor!

Alfa: Bom, a parte conceitual de Integral ele resolve, que é até aqui [apontando para o protocolo], daqui para baixo é aplicação de "matemática elementar". Dependendo da área que você estiver trabalhando como Engenharia, Administração.

No caso de administração tudo bem, mas se fosse engenharia, matemática na área de exatas eu riscaria.

Beta: Eu não daria tudo errado!

Alfa: Vai depender da exigência que a turma requer ou daquilo que é solicitado dentro do grupo de professores e tudo mais.

Beta: Geralmente eu dou cinco questões valendo dois cada um, neste caso eu daria meio ponto, de meio a zero setenta e cinco.

Alfa: Isso é o trivial, se a questão vale dois, meio ponto, pois o aluno desenvolveu pelo menos a parte conceitual, como eu trabalho com o pessoal da computação e eles não tanta exigência como os da Engenharia.

F: Tudo bem, "..."

Apresentamos ao professor o protocolo Q1a – A28.

F: Esta é uma outra resolução, realizada por outro aluno sobre a mesma questão, o que você poderia falar a respeito da resposta desse aluno?

Beta: E já tem uns erros aqui.

"........." [os professores observam a resposta do aluno, fazendo anotações no protocolo.]

Alfa: Poxa isso é bacana, achei interessante a forma com que ele fez isso daqui [apontando para o protocolo]

F: De ele montar a integral já com os extremos de integração?

Alfa: É, ele já montou separando pelos extremos.

F: Mas e quanto à resolução apresentada?

Beta: Tirando esse detalhe dele esquece o menos aqui [apontando para o protocolo]

Alfa: É, aqui não é?

Beta: É! Uma resolução,... , vamos dizer de "baixo risco".

F: Como assim, de "Baixo Risco"?

Beta: Ele aplicou exatamente a propriedade de soma de integrais, ou seja, a integral da soma é a soma das integrais, então ele preferiu separar os problemas...

Alfa: Em pequenas partes...

Beta: É, demorou um pouco mais? Demorou, mas ele foi ao baixo risco,

Beta: Eu não tenho preferência quanto a isso não tenho preferência, eu quero que ele.... , bom tem dez formas de resolver eu quero que escolha uma e faça direito eu aceito.

Alfa: Se ele seguiu a lógica, não é? Ok!

Beta: Com o tempo, ou o tempo vai fazer o aluno amadurecer, entendeu, porque eu tenho certeza que.... Posso escrever aqui? [perguntando se poderia fazer anotações no protocolo]

F: Claro!

Beta: Se ele fosse fazer isso daqui olha, a derivada $(-x^3+2x+4)'$, se ele fosse fazer a derivada disso, ele não iria fazer "menos x ao cubo", derivando mais "dois x" derivando mais "quatro" derivando, ele não iria fazer isso.

F: Ele iria fazer direto?

Beta: Sim, ele iria fazer direto, porque ele tem mais segurança de fazer a derivada.

Alfa: Quando eu trabalho Integral, acho que a Integral mete um pouco de medo, em média.

Beta: É. A Integral não é tanto conceitual como a Derivada, a derivada é conceitual você têm regrinha para tudo, já a integral não, ele tem que resolver de cabeça, então o que ele tem que fazer.

Alfa: Cálculo mental envolvido constantemente.

Beta: Entendeu, ou seja, ele não tem tanta segurança, muito não tem tanta segurança, eu incentivo a ter a segurança, mas nem todos têm. Fez assim, está ótimo, não tem problema nenhum.

F: Realmente, quando estamos trabalhando com os alunos, vejo que quando o aluno começa a resolver um exercício ele questiona: "Bom, como vou começar, que técnica"? Propriedade?

Beta: E não tem tantas técnicas, existem cinco propriedades em que três são básicas, entendeu? Então aqui ele saiu...

Alfa: Pelo Baixo Risco.

Beta: Bom, vou separar em três, resolvo cada uma separada, beleza.

Alfa: Bom a única coisa que eu comentaria, é que aqui [apontando para o protocolo] ele começou de uma forma e logo em seguida ele já "jogou para fora" ele deu uma separada nos termos.

Beta: Sim, é fato, pois é a integral da constante, não é?

Alfa: Sim, mas aqui ele poderia ter colocado ele para fora também, é só por isso.

Beta: Sim ele poderia!

Alfa: Olha, é a mesma coisa aqui olha [apontado para o protocolo] esse passo é um passo inútil, ele colocou "quatro integral de um", ele trocou "quatro por integral de um". Eles não vêem que aqui é "quatro vezes a integral de um", mas foi o que eu falei, ele jogou pelo... Pelo básico,

Beta: Sim, pelo básico, pelas regras.

F: Poxa, eu gostei desse jargão, "baixo risco" é interessante.

Entregamos aos professores o protocolo Q1a – A17.

F: Bom, senhores este é a terceira resposta da mesma questão eu vocês acabaram de verificar.

Beta: A mesma questão?

F: Sim, mas com resolução de outro aluno.

Alfa: Ok. "........."

Beta: "........." Isso daqui é um "f"?

Alfa: É um "f" ou um símbolo de integral?

5

Beta: Tudo bem, mais isso é um "f", porque ele copia "..." é um "f"
Alfa: Não é, ele não cortou esse "f", isso é uma integral!
Beta: É sim, olha ele colocou, o $f(x) = -x^3$ "...", e a derivada é isso! [apontando para o protocolo].
Alfa: É realmente, aparenta ser um "f" !
"........."
Alfa: Mas, "..." ele derivou!
Beta: Que coisa é uma grande coincidência. [o professor escreve no protocolo].
Alfa: Bom aqui ele apenas derivou, não fez nada.
F: Ele não resolveu o que foi pedido?
Alfa: Não, não resolveu. "..." Normalmente quando eu corrijo, eu faço isso aqui, "isto é uma derivada?" "isso daqui é o que um f ou um símbolo de integral"?
F: Então você questiona o aluno?
Alfa: Sim eu questiono o aluno, mas isso aqui eu considero errado, e viro para ele e falo: Bom está aqui! Me explique o que você fez? Porque normalmente eu entrego a prova uma a um e eles assinam. .
Beta: Eu resolveria assim.
F: Poderia ser um pouco mais claro?
Beta: Para mim isso é um "f", mas coloquei em dúvida, pois foi eu quem o colocou. Então colocaria, "derivada?", em seguida "coincidência", e colocaria o que deveria ser feito. Eu faço isso! [apontando para o protocolo].
F: Então nesta resolução, vocês não considerariam nada?
Beta: Não. Nada, nada, ..., nada.
Alfa: Nesta "so sorry", nada, isso é bolinha.
F: Ok.

Apresentamos ao professor o protocolo Q1b – A26

F: entrego agora uma Segunda questão, ela é aparentemente semelhante à anterior.
Alfa: não é a mesma questão!
F: Em parte, altera-se apenas o próprio gráfico, o anterior, tínhamos alguns triângulos inferiores e superiores.
Alfa: Bom, a única coisa que eu colocaria "..."
Beta: Tem umas passagens aqui, "..." mas tudo bem vai.
Alfa: Aqui ele fez aquilo que Beta tinha comentado antes "..." aqui em baixo na quarta linha.
Beta: É porque ele simplificou e escreveu...
Alfa: É aqui em baixo ele separa o "..." sinal da operação.
F: O momento em que ele coloca o negativo para fora?
Beta: É isso mesmo o que ele quer, isso mesmo o que tem que ser.
Alfa: e é o que normalmente eu insisto em com meus alunos, digo: "observem qual o sinal do número, se é negativo ou positivo!"
Beta: Posso fazer uma pergunta?
F: Claro, fique a vontade!
Beta: Eu estou corrigindo isso daqui como sendo de Cálculo diferencial e Integral, como Cálculo, tudo bem!
F: OK, mas o por que da pergunta?
Beta: É, mas, o aluno pode dizer, "mas professor eu não sei integral , mas...". Não! Eu estou corrigindo como Cálculo, ou seja, vou utilizar a integral para resolver o trem.
F: Tudo bem, mas e se o aluno resolvesse o exercício utilizando os retângulos? Já que você tocou nesse assunto.
Beta: Eu estou dando aula de Cálculo diferencial e Integral, então eu não aceito! É a mesma coisa eu pegar um aluno multiplicação, eu falo para ele:

6

Multiplique quinhentos vezes dois. Ele faz dois mais dois mais dois,
Alfa: Quinhentas vezes!
Beta: É, e vai dar lá Mil, mas eu quero saber se ele sabe multiplicar, não se ele sabe somar! Eu estou vendo por essa perspectiva, está OK? Isso me chamou a atenção, pois no outro você falou sobre retângulos e esse ...
Alfa: A mesma coisa acontece com a derivada, quando você o pede pela fundamental, ou seja, pelo limite ou então pelas propriedades.
Beta: Se eu pedir pelo limite, então o aluno vai ter que resolver pelo limite!
F: O interessante é que você acabou percebendo isso.
Beta: OK!
F: Claro!, que a intenção era da gente tentar bolar esses dois exercícios, de tal forma que nós pudéssemos buscar dos alunos diferentes formas de como ele poderia resolver esse exercício. Sendo que no próprio exercício, não está falando nada que é para calcular a integral.
Beta: É mesmo, não está falando nada que é para calcular a integral. É não está falando!
Alfa: É ele pede a área da região limitada! Por outro lado, você nos induziu falando a respeito de cálculo diferencial e integral!
Beta: Mas mesmo assim, isso aqui continua sendo uma coincidência. Por que nunca ele pegar um pedaço aqui e outro ali, com certeza ele não calcularia!
Alfa: Não tenha dúvida!
Beta: Então continua...

Entregamos o protocolo Q1b – A12.

F: Mais uma...
Beta: Da mesma questão...
F: Sim!
Beta: Opa!, agora eu não estou vendo aqui. [apontando para o novo protocolo]
Alfa: É! Isso que eu iria lhe falar, você tem alguma que seja mais visível?
F: Creio que tenha a original.
Alfa: Então por gentileza!
Beta: Olha, ... Isso daqui foi feito por aluno mesmo?
F: Sim, foram feitas por alunos de...
Beta: "A grande maioria despreza...isso por que eu não vi nenhum sem colocar o "dx"! Aqui, faltou o dx aqui, olhe!
Alfa: É, mas não está dando para enxergar,
Beta: Tem um igual em cima, só se o aluno colocou por cima!, está vendo?
Alfa: Sim, mas está muito esquisito.
F: Veja o original! [apresentei a produção original]
Alfa: Aqui em cima ele não escreveu nada!
F: Sim , não é nada!
Alfa: Ele apagou!, ele iria começar algo, mas apagou.
Beta: Mas faltou um dx aqui. Mas tudo bem, ele só colocou a integral de f(x), mas faltou um dx. Porque sem o diferencial não justifica.
Alfa: "........." aqui ele fecha!...
Beta: "........."
Alfa: Bom, não sei se estou enganado, mas o cidadão deu uma invertida aqui em baixo, [apontando para o protocolo]. Não é que ele esqueceu o sinal, a impressão que tenho é que ele colocou o zero na primeira, aqui ele fez um "tipo de distributiva"!
Beta: É, eu seria um pouco mais malvado!
F: Como assim? O que você quer dizer com isso?
Beta: Não tem para que repetir isso poderia ser ou o de cima ou o debaixo!, nesse sentido que seria um pouco mais malvado, mais cruel nesta correção!

7

Alfa: A impressa que dá é que ele pegou o ...
Beta: O e Baixo e inverteu...
Alfa: É ele inverteu, ao invés de fazer "de zero a dois" ele fez "de dois a zero"
Beta: Então ele fez o de baixo menos o de cima?
Alfa: É. Essa é a impressão que dá. Se você coloca o zero aqui, vai sobra esse daqui! Assim ele faz a distributiva, menos com menos dá mais, dá menos, e menos aqui olhe!
Beta: É, Então ele fez isso! Então eu daria ...
Alfa: Meio pontos para não perder a estima.
Beta: Depende se valesse dois pontos eu daria meio.
F: Então vamos deixar claro, vocês considerariam aparte conceitual, ou...
Beta: Não, não a conceitual.
Alfa: Ele errou parte da parte conceitual.
Beta: Isso mesmo, ao invés de fazer o de cima menos o de baixo, ele fez o de baixo menos o de cima.
Alfa: é ele inverteu o intervalo de integração.
F: Então a inversão do sinal se deve a essa inversão,
Alfa: Sim,
Beta: Talvez, se ele tivesse colocado o módulo poderia ter salvado a questão.
Alfa: com o módulo ele "mataria" a questão.
Beta: Se fosse com o módulo eu aceitaria a questão, quer dizer aceitaria mais ou menos.
Alfa: Se essa questão fosse de teste, ele acertaria.
Beta: se eu estivesse preparando um teste, colocaria como uma das soluções o menos oito, justamente para pegar o erro da aluno. Assim eu esperaria o módulo de menos oito, pois pelo menos assim a gente vê que o aluno percebeu que área não pode ser negativa, não é?
Alfa: Principalmente, você pede para calcular a área e o aluno responde com área negativa, não dá!
Beta: Em sala de aula, eu até falo para os alunos, "Olha pessoal, vocês podem até erra isso daqui, mas se deu negativo, você errou o sinal!. Digamos que vocês

8

Alfa: Ele respondeu com pressa...
Beta: É ele foi na pressa! Porque aqui, [apontando para o protocolo] ele fez $x^4/_3$ isso não justifica, se é $n+1$ é $n+1$. Pressa!. Veja aqui, é uma falta de atenção tamanha, de onde ele tirou esse quatro? Nem olhei o restante para saber se ele multiplicou certo porque daqui você já vê que ta errado.
Alfa: Eu vou direto pro resultado! Ta errado.
Beta: É, aí eu coloquei o que eu achava que fosse certo, e acabou.
Alfa: Eu não tenho o costume de colocar o que está certo ou errado. Normalmente eu mostro o gabarito e ele compara o gabarito.
Beta: Apesar deles terem o gabarito, eu mostro também o que eles erraram para evitar aquelas coisas, "Ai prof. O que eu errei?" "Ai prof. O que eu errei?", então eu ponho o que está errado e o que deveria ser para o alunos não reclamar, entendeu?
Alfa: entendi!

<u>EPISÓDIO TRÊS</u>

Apresentamos o protocolo Q3 – A12.

F: Bom, aquelas foram referentes à questão dois, agora vamos para a questão três.
Beta: Só tem mais esse monte de questões... rsrs
F: Mas, devemos levar em consideração que são cópias para quatro pessoas e temos, no momento apenas três!
Alfa: Que é o Mestre *Gama*.
Beta: Hi! Já falho!
Alfa: "........."
Beta: "........."
Alfa: Posso perguntar uma coisa?
F: À vontade!

Beta: Então, o que está acontecendo, é que o correto seria fazer a integral de menos PI à zero, mais a integral de zero à PI, geometricamente é isso que está acontecendo.
Alfa: Mas se você fizer assim...
Beta: Se eu desse isso... Como está falando área... O professor tem que mostrar isso pro aluno se não ele não pode dar uma questão dessa, tem que ver como o professor deu o enfoque. Jogando isso daqui da zero, sempre que dá zero, eu falo para os alunos, "tem problema aqui!". E particularmente, eu não daria uma questão dessa sem mostrar bem isso, porque na verdade a área que estou querendo e essa [indicando o gráfico feito].
Alfa: a área sempre tem que ser positiva.
Beta: Sim, mas essa área equivale a $2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$, então teríamos $2[-\cos x]_0^{\pi}$ aí temos, $-2[\cos\pi - \cos 0]$.
Alfa: Cosseno de PI é um, Cosseno de zero é menos um...
Beta: Dá "menos dois vezes menos dois"
Alfa: Dá Quatro!
Beta: É eu colocaria isso!
Alfa: Esse é discutível, não é?
Beta: Eu não colocaria essa integral dessa forma, para o cálculo de área é fogo. Tem um teorema, se eu posso dizer assim, que diz o seguinte: Se existe uma função que está localizada pedaço abaixo e pedaço acima do eixo de referência, a integral não sabe distinguir, então ela dá o resultado final, então por isso que algumas vezes dá zero, volume negativo, ou seja, tem mais função para baixo do que para cima. Entendeu, então essa daqui é uma questão perigosa! Só é bom ser dada uma questão dessa se o aluno [o aluno] entender direitinho o conceito, na verdade a resposta é essa daqui [indicando no protocolo a resposta zero]. Na pior das hipóteses se o professor se esqueceu de comentar, ele deve aceitar a resposta zero, enquanto que se o professor comentou o assunto em sala a resposta deve ser quatro!
F: Então você levaria em consideração se o professor abordou ou não o assunto em sala de aula?
Beta: Sim, mas aqui a resposta do aluno está errada, porque ele errou sinal! Começa por aí! Agora, resposta: Zero! – Errada, porém, dentro do critério de cálculo está certa.
Alfa: Conceitualmente está certa...
Beta: A parte analítica talvez, mas se considerarmos a parte geométrica está errada.
Alfa: Sim, por que um subtrai o outro, não é?
Beta: Sim o que está acontecendo é isso! [**Beta** hachura a região abaixo e acima do eixo x delimitada pelo gráfico de *f*] A de cima é igual à de baixo isso dá zero! Mas se você fosse construir isso deveríamos fazer...
Alfa: separar os intervalos.
Beta: Sim! de $\int_{-\pi}^{0}$ e $\int_{0}^{\pi}$.
F: Espera um pouco, vocês estão cogitando duas situações, a primeira se o professor trabalhou isso em sala de aula e a outra se ele não trabalhou...
Beta: Se ele não trabalhou dá Zero!
Alfa: É Zero!
F: Então se ele não trabalhou e o aluno resolveu e acertasse o sinal, tudo bem?
Beta: É, considerando que o professor não tenha trabalhado! Como eu não sei...
F: Eu sou o professor, por exemplo, trabalhei em sala de aula isso...
Alfa: Geometricamente deveria dar quatro! [Neste momento o prof.**Gama** chega]

F: Tudo bem, mas o aluno não colocou o gráfico, ele resolveu deu quatro.
Beta: Deu quatro? Não! Não!. Deu quatro então está certo!
Alfa: Ele não precisa demonstrar o gráfico, o aluno pode ter efetuado a analise separado!
F: Ok! Mas e a construção do gráfico, vocês acham importante?
Beta: Claro! É muito importante! Principalmente para ele poder ver isso!
F: Então vocês esperariam que o aluno construísse e visualizasse o gráfico para a resolução da questão?
Beta: Seria legal, se ele conseguisse seria interessante.
Alfa: Como professor, eu vejo o gráfico como um fator fundamental para a resolução do exercício...
Beta: Mas não integrante, ele é um facilitador. Ele não faz parte da resolução, no entanto se você visualiza a coisa fica mais fácil.
Alfa: Por isso que eu sempre comento, os aluno tem uma grande dificuldade em construção de gráficos, faltou um pouco de base para eles poderem acompanhar legal a disciplina.
Beta: Se você tirar do enunciado determine a área da região limitada pelo gráfico e colocar "integre" vai dar zero!
Alfa: Tanto é que quando você diz "da região limitada pelo gráfico", você não colocou o gráfico!
Beta: Mas teoricamente sim, ele colocou! E os alunos deveriam perceber isso!
Alfa: Sim, e é por isso que os alunos deveriam no mínimo construir o gráfico!
Beta: Ou pelo menos visualizar. Agora, se você pedisse, para o aluno integral a função de $f(x) = \operatorname{sen} x$ de $-\pi$ a π, então o resultado é um valor adimensional, aí dá zero.
Alfa: Por isso esse cidadão fez esse desenho pensando algo relacionado ao gráfico.
Beta: E até que foi legal, ele tentou esboçar o gráfico.
Alfa: Mas ele desenhou os dois lados para cima!
Beta: Isso vê que ele deve ter pegado essa parte e rebatido.
Alfa: Ele pode ter pensado no módulo!
Gama: Mas será que ele não dever ter pensado que o cálculo de área não é negativo, por que o professor pode ter falado para ele!
Beta: Mas como aqui ele fez algo muito grosseiro, não dá para considerar nada.
Alfa: Ele não constrói o gráfico, bem dizer!
Gama: Que aluno é esse?
F: É um aluno que já cursou cálculo diferencial!
Gama: Ele já cursou!
F: Sim!
Beta: Infelizmente está errado!

Com a chegada do prof. Gama, nós entregamos o termo de compromisso e também o protocolo Q3 – A19 para os três professores.

F: Essa é uma resolução da mesma questão que estávamos debatendo, mas feita por um outro aluno.
Gama: Feita por outro aluno?
F: Sim.
Alfa: "........."
Beta: "........."
Gama: "........."
Alfa: Já cai na discussão de... Hi já errou aqui!
Gama: então?
F: A idéia é realizar uma correção de uma atividade ou avaliação do aluno!
Gama: OK. Então, aqui é mais, não é? Dá zero!

11

Beta: Esse pelo menos acertou a integral!
Alfa: Ele soube também formalizar o negócio.
Beta: Sim, mas ele não visualizou graficamente!
Alfa: Então eu volto a dizer, quando você pede "determine a área delimitada pelo GRÁFICO..." Você ta forçando ele pensar no gráfico!
Gama: Mas você trabalha gráfico? [para os professores]
Beta: Sim, quando trabalhamos área entre curvas temos mostrar gráficos.
Gama: E quando falamos de cálculo de área, trabalhamos principalmente gráficos, não é?
Beta: Então é isso, não é? [indicando a figura feita no protocolo] é o que eu digo, quando der zero a área, tem alguma coisa aí! Quando dá zero faça o gráfico, mas se quando não der? Também tinha que ter feito, mas pelo menos não chama tanto a atenção! Eu trabalho um gráfico, uma cardióide, que é assim olhe [indicando a figura feita no protocolo] dá zero também, mas eu deixo claro para os alunos, dá zero porque tem metade acima e metade abaixo, só que eu aceito a resposta igual a zero, mas seu mostro para eles. E ainda falo "Gente se vocês forem calcular isso não e zero, é duas vezes daqui até aqui" [indicando a figura]. E, além disso, eu aceito zero porque estou mais interessado no ... no.
Alfa: No conceitual!
Beta: Até mesmo porque eu não quero complicar a vida de ninguém, entendeu!
Gama: O cara mudou muito, meu!
Alfa: Pó, ele está gravando!
Beta: Não, não tem nada, até mesmo porque aqui ele errou sinal, pela resolução, se valesse dois eu daria meio, daria uma fração, aqui sim. Porque o que esse aluno errou foi sinal, não é? Pelo amor de Deus!
F: Mesmo se o exercício está pedindo a área da região limitada pelo gráfico você considera certo o zero?
Beta:É aí que ta!
Alfa: Particularmente eu considero errado! Mesmo que comentado.
Beta: Bem, se eu não aceitasse daria errado!
F: Vamos admitir o...
Beta: É como eu falei, quando eu dou esse gráfico aqui [a cardióide] eu considero a área zero, mas eu faço todo o comentário e até deixo os alunos darem a resposta igual a zero, mas vou até mudar meus paradigmas.
F: OK. Mas então, vamos supor a seguinte situação, se você pedisse para o aluno "determine a área da região limitada" temos como hipótese que você já trabalhou isso antes!
Beta: Nesse caso ta errado.
Alfa: Por isso quando eu disse "determine a região...", no mínimo subtendesse que você trabalhou uma construção gráfica em sala de aula, ou seja, você mostrou para seus alunos o que você espera da construção gráfica. Principalmente quando se tem o gráfico parte positiva parte negativa não vamos subtrair, então nós devemos ter muito cuidado na escrita das questões.
Beta: Ou seja, está errado!
F: E Você **Gama**, o que você acha?
Gama: Eu concordo, sou rígido nessa parte de área,... Da forma como **Beta** disse. [o prof. Desenha um esboço de gráficos no protocolo] Em um gráfico como esse, uma mesma função, invertida.
Alfa: Depende onde você vai pedir o hachurado!
Gama: Espera aí, vou pedir aqui [hachurando a região do gráfico] Neste caso seria zero, pois uma anula a outra!
Beta: Neste caso não, porque são duas funções diferentes!
Alfa: tem que se calcular para uma função e para a outra.
Beta: Aí não vai dar zero!
Gama: De acordo com o exemplo que você (**Beta**) comentou antes

12

Alfa: O da cardióide?
Gama: Sim!
Beta: Há, então é duas vezes...
Gama: Isso, então respondeu..
Beta: Beleza.
F: então essa foi a segunda produção e temos mais uma de outro aluno!

Entregamos o protocolo Q3 – A14.

Gama: Cara! esqueci meus óculos, virou borrão isso.
Alfa: É a mesma questão.
Gama: Você vê como eu to enxergando bem.
Alfa: "........."
Beta: "........."
Gama: "........."
Beta: Nossa!
Alfa: Bom, creio que ele tentou fazer alguma coisa, você tem a original?
F: Sim tenho.
Alfa: Acho que ele tentou fazer o gráfico, olha o um e alguma coisa.
F: Aqui está o protocolo original.
Gama: Não tem noção nenhuma!
Alfa: Não é nada não [analisando o original] Esse...
Beta: Rsrs, esse é daqueles, então erro conceitual...
Gama: Nenhum raciocínio.
Beta: Resposta: quatro. [Escreve no protocolo]
F: Algo mais, senhores.
Alfa: Sem comentários...
Gama: como? Rsrs.
F: OK. Agora a questão Quatro...

EPISÓDIO CINCO

Entregamos aos professores o protocolo Q5 – A15.

F: Então simplesmente Calcule a integral.
Alfa: É direto, seca? "........."
Beta: "........."
Gama: A primitiva calcule a integral indefinida?"........."
Beta: A resolução de Baixo risco, não é?
Gama: Essa daqui?
Alfa: É, de baixo risco!
Gama: Não há a necessidade de chegar até aqui!
Beta: Está certinha! A melhor resposta é essa mesmo.
Alfa: A menos que você queira que ele simplifique...
Beta: Mas a melhor resposta é essa mesmo, numa fração só!
Alfa: Mas, normalmente eu exijo do aluno um..
Beta: Igual?
Alfa: É um igual ou algo que indique o final.
Beta: Detalhes. Não tiraria nota.
Alfa: Não eu não tiraria nota, não!
Gama: Eu também não tiro nota disso. Mas eu gostaria que ele entendesse aqui, por que eu mostro para ele que o uma é inversa da outra, eu mando voltar nessa simples [apontado par a resposta anterior do aluno] Não estou dizendo que isso daqui não está certo.
Alfa: Mas tem muito livro que vai para a simplificação máxima.

13

Beta: Eu prefiro assim, depende de cada um.
F: Mas e quando a constante de integração, eu vi que você anotou no protocolo!
Gama: Eu sou rígido! Por que eu explico para eles que isso daqui não é única é uma das...
F: Ta legal. Essa é uma outra resolução, da mesma questão.

Apresentamos o protocolo Q5 – A3.

Gama: "..." O que eu vou falar?
Beta: Meu Certo!
Gama: Isso é verdade, sem falar nada.
Alfa: Não!
Beta: Como? É a mesma coisa que você falar para o aluno derive (x^3+3x+1)
Alfa: não é isso.
Beta: Quanto daria? $3x^2+3$!
Alfa: Ninguém falou que está errado, não. É que normalmente eu, veja bem é questão de particularidade, eu coloco no cabeçalho, só será válido se apresentado o desenvolvimento!
Gama: Aqui não tem!
Beta: Mas que desenvolvimento?
F: Mas qual seria esse desenvolvimento que você diz?
Alfa: Eu gosto que o aluno apresente as partes, separe e aí vai, por uma questão didática apenas.
Gama: Mas é aplicação de fórmula apenas!
Beta: O que eu faria aqui é o seguinte, se por acaso temos $\frac{x^4}{4}+3$... ele coloca negativo, Tudo errado!
Gama: Ele foi direto.
Beta: Sim, então tudo errado.
F: Ótimo eu iria questionar isso também...
Beta: Da mesma forma que está certo seria tudo errado.
F: Ta, porque da mesma forma como você está aceitando, exatamente da forma com que **Alfa** está falando sem o uso de propriedades, demonstração e etc. Se ele errou um sinal apenas...
Beta: Tudo errado! Porque eu não tenho o que ele fez.
Alfa: Eu falo isso para eles, quando eles comentam: Pô professor só errei um sinal!"Ta, mas onde está o desenvolvimento para saber onde você errou?".
Beta: Mas e se tivesse pedindo a derivada disso, você iria pedir que desenvolvimento? Não tem desenvolvimento.
Alfa: Eu não vou dar errado!
F: Espera um pouco, estou vendo uma leve contradição. Digamos assim, você tem com concepção que aluno tem de responder direto, pois é polinomial e simples...
Beta: Pode responder direto!
F: Mas se responder uma coisinha está tudo errado?
Beta: Exatamente, por que ele foi direto!

14

desenvolvimento para mostrar para eles no coletivo as propriedades, não que isso daqui estivesse errado. Eu dou certo numa boa, mas também se tivesse um sinal de negativo estaria tudo errado, mas se tivesse o desenvolvimento você já pára para pensar.
Beta: Com o desenvolvimento você até considera...
Alfa: Por isso que ...
Beta: Por exemplo, se o aluno coloca lá: $\int x^3dx=\int\frac{x^{3+1}}{3+1}=\frac{x^4}{3}$ não é $\frac{x^4}{4}$.
Alfa: Exatamente, como teve um aluno que fez isso lá traz.
F: Se ele mostra todo o desenvolvimento e erra um sinal, tem como considerar algo!
Alfa: Isso.
Beta: Mas se o aluno vai direto e faz $\frac{x^4}{3}$, espera aí, ta errado!.
F: OK!, eu comentei isso porque da forma com que **Alfa** falou e você retrucou, eu fique intrigado sobre a opinião de você sobre esta próxima resolução...

Entregamos aos professores o protocolo Q5 – A7.

Gama: Pô, como você queria, olha aí.
Alfa: Não como eu queria, mas...
Beta: Começa ... que isso daqui não existe, vai...
Gama, não existe. Errado pensamento...
Beta: Ta vendo?
Alfa: Ele mostra e...
Gama: Ele mostra um pedaço e pára.
Alfa: Até aqui tudo bem.
Beta: $\frac{x^4}{4}$ mas olha! Aqui está errado não é "mais um".
Alfa: é x.
Gama: Ele esqueceu...
Beta: Nossa...
Alfa: Rapaz ele juntou o x^4 com x^3, é isso?
Gama: É ele somou,
Alfa: Você está entendendo, aqui você consegue acompanhar o raciocínio.
Beta: Se o aluno tivesse colocado $\frac{7}{4}x^6$ vezes... aqui estaria tudo errado, mas aqui daria uns...
Alfa: Meio certo?
Beta: Não, Valendo dois? Meio ponto pelo esforço...
Alfa: É.
Gama: Aqui?
Beta: Eu faço bem assim...porque ele acertou!
Alfa: Pelo esforço!
Gama: Nesse?

Beta: "Poxa professor não dá para dar nem meio ponto?"

Gama: Mas qual foi a idéia dele ter continuado isso daí?

Beta: MATEMÁTICA! É o que eu acho os alunos não precisam de monitor de cálculo e sim de matemática, o aluno fez $x^4 + x^2 = x^6$ isso é absurdo.

Alfa: Mas problema do aluno não foi o cálculo foi a matemática.

F: Mas sabe o que passou pela minha cabeça? Se em uma prova que você desse em sala de aula, você pedisse para o aluno fazer isso e um fulano resolve com esse absurdo e mesmo assim você considera, 0,25 ou meio ponto, mas o aluno que resolveu direto, mas só errou um sinal.

Alfa: Está tudo errado!

Beta: Claro, eu não vi a linha de raciocínio dele, aqui eu vi. Se ele tivesse pulado daqui para cá [anotando com uma seta o protocolo] não teria como, mas dessa forma eu consigo diagnosticar o erro do aluno, eu sei que o erro do cara não é na integral é na matemática, no produto notável ou no que for. E se fosse direto não, Se fosse direto eu iria divagar. Eu nunca que iria chegar nesse seis.

F: Beleza!

Gama: Se ele for direto não dá margem para discussão.

F: Creio que ficou claro, se o aluno desenvolver temos como avaliar até onde ele acertou...

Beta: Sim ver até onde ele acertou, por isso que eu não sou daqueles que: Olha a resposta se está errado, Tudo errado! Ou se está certo, aí que vou analisar,não!

Teve uma vez, que eu fiz uma prova de cálculo numérico, três folhas! A resposta era por exemplo, $x \in [0,2]$ eu coloquei $x = [0,2]$, o professor deu meio ponto, eu falei: A questão toda a única coisa que errei foi... e o Professor disse, "Então você diz que um número é igual a um intervalo?" Tudo Bem, me deixa arrumar sua nota, deu tudo errado.

Gama: Bem feito, vai reclamar?

Beta: Estava errado estava, eu acho que foi cruel o que ele fez, mas ele não estava errado! Mas pelo menos até hoje eu não esqueci.

Gama: Eu acho que ele está certo!

Beta: Eu não faria isso! Eu daria certo, colocaria: Atenção!

F: Bom, então terminamos por aqui, **Beta** terá que nos deixar e **Gama** tem aula logo, confirmamos para a próxima semana?

Beta: OK!

Alfa: Beleza.