

CRISTINA BERNDT PENTEADO

**CONCEPÇÕES DO PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO RELATIVAS À
DENSIDADE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS E SUAS REAÇÕES FRENTE
A PROCEDIMENTOS PARA A ABORDAGEM DESTA PROPRIEDADE**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC / SP
SÃO PAULO**

2004

CRISTINA BERNDT PENTEADO

**CONCEPÇÕES DO PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO RELATIVAS À
DENSIDADE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS E SUAS REAÇÕES FRENTE
A PROCEDIMENTOS PARA A ABORDAGEM DESTA PROPRIEDADE**

**Dissertação apresentada como requisito
parcial à obtenção do grau de Mestre em
Educação Matemática do Curso de
Mestrado Acadêmico do Programa de
Estudos Pós-Graduados em Educação
Matemática da Pontifícia Universidade
Católica – PUC/SP.**

**Orientador: Prof. Dr. Benedito Antonio
da Silva**

**PUC / SP
SÃO PAULO
2004**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço àqueles que viabilizaram este trabalho.

André Berndt Penteado

Antonio Carlos Brolezzi

Armando Traldi Junior

Benedito Antonio da Silva

Célia Maria Carolino Pires

Cibele de Almeida Souza

Eliane Cabariti

Francisco Olimpio da Silva

Gabriela Berndt Penteado

Lulu Healy

Marcelo Benedito Ruffini Penteado

Maria Thereza Goulart Dubus

Milena Gonçalves Santos

Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes

Sujeitos da pesquisa

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	1
Capítulo 1: PROBLEMÁTICA	5
Capítulo 2: A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS	13
Capítulo 3: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
Capítulo 4: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	39
Princípios da Engenharia Didática	39
Descrição geral das sessões	42
Os sujeitos	43
As questões	44
Atividade I	44
Atividade II	52
Atividade III	54
Atividade IV	56
Atividade V	59
Atividade VI	62
Atividade VII	66
Atividade VIII	69
Atividade XI	71
Atividade X	73
Capítulo 5 : ANÁLISE DOS RESULTADOS	78
Atividade I	78
Atividade II	89
Atividade III	93
Atividade IV	98
Atividade V	104
Atividade VI	111
Atividade VII	117
Atividade VIII	125
Atividade XI	133
Atividade X	138
Avaliação do Experimento	148
Reaplicação de questões	155
CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES	169
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	175
ANEXOS	
Anexo 1: A Seqüência	
Anexo 2: Questionário: Perfil Acadêmico e Profissional e Autorização de divulgação de resultados	
Anexo 3: Protocolos	
Anexo 4: Instrumento de Avaliação do Experimento	

RESUMO

O trabalho aborda o tema da densidade dos números reais, aqui tomada no sentido da existência de infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais distintos. Várias pesquisas evidenciam dificuldades dos alunos na classificação de números racionais e irracionais, bem como o desconhecimento da propriedade da densidade do conjunto dos números reais. O objetivo do estudo é investigar a concepção e a reação dos professores do Ensino Médio frente aos diferentes registros de representações dos números, quando analisada a propriedade da densidade, tanto a densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais quanto a dos irracionais nos reais. Propõe-se a investigar a viabilidade de dois tipos de procedimentos distintos para a obtenção de números reais entre dois dados: o procedimento da média aritmética e outro inspirado no processo de diagonal de Cantor, utilizando a representação decimal dos números reais. Para tanto foi realizada uma intervenção por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência de ensino, composta de dez atividades, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A sequência de ensino foi fundamentada em princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue. Apesar de constatar envolvimento dos participantes, algumas dificuldades identificadas nas pesquisas persistem como por exemplo, a associação da representação infinita com irracionalidade e a identificação de um número racional como sendo somente aquele que tem representação finita. Alguns professores demonstraram a intenção de aplicar questões similares às da sequência, aos seus alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Números Racionais; Números Irracionais; Densidade; Registro de Representação; Representação Decimal dos Números Reais.

SUMMARY

The work approaches the subject of the density of the real numbers, here taking in the direction of the existence of infinite rational numbers and infinite irrationals between two distinct real numbers. Some research evidences difficulties of the students in the classification of rational numbers and irrationals, as well as the unfamiliarity of the property of the density of the set of the real numbers. The objective of the study is to investigate the conception and the reaction of the teachers of high-school front to the different registers of representations of the numbers, when analyzed the property of the density, as much the density of the set of the rational numbers in the set of the real numbers how much of the irrationals in reals. Is considered to investigate it the viability of two types of distinct procedures for the attainment of real numbers between two supplied: the procedure of the arithmetic mean and other inspired in the process of diagonal line of Cantor, using the representation decimal of the real numbers. For in such a way it was carried through an intervention by means of the elaboration, application and analysis of an education sequence, composed of ten activities, based in the Theory of the Registers of Representation Semiotics of Raymond Duval. The education sequence was based on principles of the Didactic Engineering of Michèle Artigue. Although to evidence involvement of the participants, some difficulties identified in the research persist as for example, the association of the infinite representation with irrationality and the identification of a rational number as being only that one that has finite representation. Some teachers had demonstrated the intention to apply similar questions to the ones of the sequence, to its students of high-school.

Word-key: Rational Numbers; Irrational Numbers; Density; Register of Representation; Representation Decimal of the Real Numbers

APRESENTAÇÃO

A noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática, como por exemplo no estudo de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de variável real.

Abordaremos a densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais e a densidade do conjunto dos números irracionais no conjunto dos números reais, e segundo Lima (1977, p. 73-74): “O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Também o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais”. Neste trabalho empregaremos o termo densidade no sentido dado por Caraça (1989, p. 56): “um conjunto é denso se entre dois dos seus elementos quaisquer exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto”.

Pesquisas nacionais e internacionais evidenciam que muitas dificuldades dos alunos na aprendizagem de limites e continuidade de funções são decorrentes da falta de compreensão do conjunto dos números reais.

Dentre estas dificuldades, destacamos que foram identificadas as seguintes concepções: a de que duas grandezas são sempre comensuráveis, que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais, a não distinção da cardinalidade dos naturais e a dos reais, a afirmação de que existem mais números naturais que ímpares, a identificação entre as representações 3,1416 e π e também entre 2,7182 e e , a classificação de 3,1416 como sendo a de um número irracional, a identificação entre uma representação fracionária com número racional independentemente da natureza do numerador e do denominador, a não identificação das representações 1,999... e 2 como sendo de um mesmo número, a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação com raízes, a confusão entre número e sua aproximação atribuindo o mesmo significado, a transposição dos números naturais para os reais, noção de sucessor para os números reais, o desconhecimento da existência de infinitos números, a de que um número racional é exato ou inteiro, a de que um número irracional é aquele que possui

uma representação decimal ilimitada ou um número que não é exato, que não é inteiro ou que é negativo e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

Em particular, a associação do número com sua representação, a confusão na classificação de números racionais e irracionais e quanto às noções de representação decimal, o desconhecimento da propriedade de densidade dos números racionais nos reais bem como o desconhecimento desta propriedade no modelo de reta real são noções que escolhemos abordar em nossa pesquisa. Estas dificuldades estão presentes apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) sugerirem a introdução do estudo de números irracionais já no 4º ciclo (a partir da 7ª série). Este documento, no que se refere aos conceitos e procedimentos, sugere que se criem oportunidades para a “constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do π , da $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc.).” (p.87)

Que concepções são explicitadas por professores do Ensino Médio a respeito da densidade do conjunto dos números reais, tanto a densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais quanto a dos irracionais nos reais? Como eles reagem frente a questões que discutem o conceito de densidade enfocando diferentes registros de representação? Pretendemos investigar a viabilidade de dois tipos de procedimentos distintos: primeiro, a obtenção de números racionais entre dois racionais dados, por meio da média aritmética, segundo, a obtenção de números irracionais entre dois reais dados a partir da troca de um ou mais algarismos, da representação decimal de um deles. Este último procedimento foi inspirado na diagonalização de Cantor. Também analisaremos a reação dos professores diante destes procedimentos.

Para tanto foi realizada uma intervenção por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência de ensino, composta de dez atividades, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica do psicólogo francês Raymond Duval, utilizando os registros da língua natural, decimal, fracionário e gráfico, bem como a transição entre eles. Duval enfatiza a necessidade de se trabalhar com no mínimo dois registros de representação diferentes e de se realizar a articulação entre eles, criando, com isso, mais possibilidades para ocorrer a aquisição do conhecimento.

Quanto aos procedimentos metodológicos, foram utilizados alguns princípios da Engenharia Didática segundo Michèle Artigue: a elaboração e análise *a priori* da seqüência de ensino e a análise *a posteriori*, que é a análise comparativa da análise *a priori* com os dados colhidos.

A seqüência de ensino propõe dois tipos de procedimentos distintos para abordar a densidade da reta. O primeiro procedimento, utilizado para discutir a densidade do conjunto dos números racionais nos reais, envolve o registro de representação gráfico, localização de pontos na reta real e o registro numérico, sugerindo um tratamento que é trabalhado na Educação Básica, a média aritmética.

No entanto, para discutir a densidade do conjunto dos números irracionais no conjunto dos reais, tal procedimento não se aplica. Neste caso, apelamos para um procedimento, inspirado no processo de diagonal de Cantor, utilizando a representação decimal dos números reais, indicando a troca de um ou mais algarismos nesta representação, permitindo neste registro a realização de vários tratamentos em seu interior. Utilizamos também os registros de representação da língua natural e gráfico.

O público alvo foi um grupo professores do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo. Tal escolha se deu pelo fato de o professor ser o agente do processo ensino-aprendizagem que tem influência sobre um grande número de alunos e assim poderá dispor de mais informações para ensinar.

Apesar de constatar envolvimento e crescimento dos participantes, algumas dificuldades identificadas nas pesquisas persistem como por exemplo, a associação da representação infinita com irracionalidade e a identificação de um número racional como sendo somente aquele que tem representação finita.

A seguir descreveremos o conteúdo de cada capítulo.

No capítulo 1 é exposta a problemática, o objetivo, a relevância do estudo citando pesquisas pertinentes, tanto nacionais como internacionais, e a formulação das questões da pesquisa.

No capítulo 2 são apresentadas considerações a respeito da representação decimal de um número real.

No capítulo 3 é exibido um resumo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que destaca a importância de uma análise cognitiva para compreender o processo de aprendizagem, esta Teoria põe em evidência as diferentes representações que um objeto matemático possui.

O capítulo 4 refere-se aos procedimentos metodológicos. Primeiramente são apresentados alguns princípios da Engenharia Didática segundo Michèle Artigue utilizados na elaboração, aplicação e análise da sequência de ensino. Em seguida são citados os aspectos acadêmicos e profissionais dos sujeitos. Depois são descritas as sessões de um modo geral e, por fim, são expostas a elaboração da sequência de ensino, a escolha e ordenação das questões e a organização delas nas atividades, bem como as expectativas em relação às respostas (análise a priori).

No capítulo 5 é feita a análise das atividades, observando os protocolos, as gravações de áudio e as anotações da pesquisadora e do observador.

Finalmente no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e considerações finais.

Após as referências bibliográficas constam em anexos, os modelos dos instrumentos utilizados: a sequência de ensino, o questionário do perfil acadêmico e profissional, a autorização de divulgação dos resultados, alguns protocolos e o instrumento de avaliação do experimento.

Em relação aos protocolos, selecionamos aqueles que julgamos mais reveladores. Para facilitar a leitura, em alguns casos, colocamos todos os enunciados, ainda que repetidos.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA

Esta pesquisa está inserida na linha de pesquisa do Curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP: “História, Epistemologia e Didática da Matemática” que tem por objetivo analisar a inter-relação entre a epistemologia, história e didática da Matemática com vistas à melhor compreensão dos fenômenos ligados ao ensino/aprendizagem da Matemática, às relações entre saberes científicos e escolares e à constituição histórico-cultural da Matemática.

A noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática, como por exemplo no estudo de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de variável real.

Pesquisas nacionais e internacionais evidenciam que muitas dificuldades dos alunos na aprendizagem de limites e continuidade de funções vêm da confusão na classificação de números racionais e irracionais, bem como do desconhecimento da propriedade da densidade do conjunto dos números reais, isto é, a existência de infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais quaisquer. Algumas pesquisas também validam a confusão existente quanto às mesmas noções, existente entre os professores. Por exemplo as pesquisas de FISCHBEIN, E., JEHIAM, R. e COHEN, D. (1995); ROBINET, J. (1993) e TIROSH, D. (1995) apontam certas dificuldades dos alunos em alguns conteúdos devido a falta de conhecimento a respeito dos números reais e suas propriedades como por exemplo, a noção da distinção entre números racionais e irracionais, e a noção de densidade. A primeira pesquisa foi realizada na França junto a alunos dos equivalentes últimos anos do Ensino Médio brasileiro e o primeiro ano de graduação, com o objetivo de investigar a interação entre as concepções dos alunos sobre os números reais e a aprendizagem das noções de análise.

A pesquisa de Robinet teve como objetivo avaliar, em que medida, os obstáculos na conceituação dos irracionais como, por exemplo, a existência de grandezas incomensuráveis e o fato de o conjunto dos racionais ser denso no conjunto dos reais e

não cobrir a reta toda (isto é, na reta existem “buracos” que são preenchidos pelos números irracionais), constituem obstáculos de aprendizagem. Esta pesquisa foi realizada em Tel Aviv com estudantes que estavam terminando o Ensino Médio e também com iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática.

A pesquisa de Tirosh teve como objetivo avaliar as concepções que os alunos têm sobre o infinito. Esta pesquisa também foi realizada em Tel Aviv com estudantes entre 11 e 17 anos.

Em relação às três pesquisas, algumas conclusões são importantes para destacar: a concepção de que número irracional é aquele que possui uma representação ilimitada, mesmo sendo uma representação decimal periódica, foi apresentada por alunos nas duas primeiras pesquisas. A dificuldade de distinguir a cardinalidade do conjunto dos números naturais e a dos reais esteve presente nas três pesquisas. Na primeira pesquisa foi detectada a associação entre número racional e representação decimal.

A associação de número irracional a um número que não é exato apareceu na pesquisa de J. Robinet e na de E. Fischbein. A concepção de que um número irracional é um número que não é inteiro ou que é negativo foi revelada na pesquisa de E. Fischbein. Também em E. Fischbein, percebeu-se que os alunos consideram que duas grandezas são sempre comensuráveis alegando que basta diminuir a unidade o quanto for necessário. Nas duas primeiras pesquisas foi revelado que o modelo geométrico da reta não corresponde à reta de Dedekind pois suas propriedades permaneciam válidas mesmo quando a reta fosse desprovida dos irracionais ou composta apenas por racionais.

Duas pesquisas brasileiras foram inspiradas nas anteriores, a primeira de IGLIORI, S. B. C. e SILVA, B. A. (2001) realizada com alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e com finalistas do curso de licenciatura em Matemática, concluiu que para os alunos investigados, a reta real não considera a propriedade da densidade.

Esta primeira pesquisa evidenciou também a confusão entre os conceitos de número racional e irracional quanto à representação decimal, ao sucessor e existência

de infinitos números. Alguns alunos definem número irracional como sendo infinito ou aquele que contém infinitos dígitos após a vírgula ou ainda, as raízes. Definem número racional como sendo exato ou inteiro. Percebeu-se também que o símbolo de reticências causa instabilidade nas respostas, mesmo se houver um número finito de casas, associando-o a um número irracional, como por exemplo a representação $1,333...3$, que indica a última casa decimal, apesar de não se conhecerem os Algarismos entre a terceira e a última casa decimal. A irracionalidade foi considerada sinônimo de número negativo em algumas respostas. A grande maioria dos entrevistados não identifica a igualdade entre as representações $1,999...$ e 2 . ARTIGUE (1995, p. 113, tradução nossa) também descreve que:

Em muitas investigações, se tem pedido aos estudantes universitários comparar os números $0,9999...$ e 1 . A frequência das respostas erradas bem como a força das convicções que nelas se manifestam, demonstra a dificuldade que existe para perceber a notação $0,9999...$ como algo diferente de um processo dinâmico que não se detém jamais, e [demonstra a dificuldade] a fim de retornar para a designação de um número.

Segundo ROGALSKI (1994, p. 166) não é raro encontrar estudantes do curso que corresponde ao curso de licenciatura em Matemática no Brasil, que não sabem com certeza se $0,999...$ é igual ou não ao número 1 , e até mesmo aqueles que foram convencidos não conseguem convencer aqueles que duvidam disso,

Num problema da igualdade entre 1 e $0,999...$, os estudantes em geral resistem muito. Uma frase freqüente é “isto jamais é igual, falta sempre qualquer coisa pequena”. O método da série geométrica só convence aqueles que tem uma certa intuição do conceito de convergência. A observação que $3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,333... = 0,999...$, donde que o “número” vale 1 , convence outros. Pode-se também utilizar o seguinte método análogo $\frac{1}{2} \cdot (1 + 0,999...) = 0,999...$ (mas geralmente é muito instrutivo pedir aos estudantes para determinar um real z entre dois reais x e y dados). Mas o argumento que dá melhores resultados é aquele onde a dificuldade fica escondida: pondo-se $x = 0,999...$ então $10x - 9 = x$ e então se deduz formalmente que $x = 1$. Definitivamente, parece que x “é” um número para os estudantes muito mais porque se pode calculá-lo formalmente como acima do que porque ele representa um processo de aproximação.

Esta questão foi abordada em 2002 no Exame Nacional de Cursos - Provão/MEC como sendo uma das questões chamadas de objetivas destinada para o bacharelado e para a licenciatura em Matemática:

“No texto a seguir há uma argumentação e uma conclusão.

Como $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, multiplicando ambos os membros por 3 encontramos

$1 = 0,999\dots$. Portanto $0,999\dots = 1$. Assim podemos afirmar que:

- a) a conclusão está incorreta, pois $0,999\dots < 1$
- b) a argumentação está incorreta, pois $\frac{1}{3}$ não é igual a $0,333\dots$
- c) a argumentação está incorreta, pois $3 \cdot 0,333\dots$ não é igual a $0,999\dots$
- d) a argumentação e a conclusão estão incorretas
- e) a argumentação e a conclusão estão corretas”.

A resposta correta, a alternativa e) foi assinalada por 33,7 % dos formandos, enquanto que a resposta mais freqüente foi a alternativa a) com 36,7 % das respostas.

Tanto na citação de ROGALSKI quanto na questão proposta pelo Provão, é considerada a possibilidade de se realizar a multiplicação de um número natural por um racional na sua representação decimal periódica infinita a saber: $3 \times 0,333\dots$. Como seria realizada, por exemplo, a multiplicação de um número natural por um irracional, na sua representação decimal infinita? Talvez a questão do Provão possa induzir à idéia de que a multiplicação de um número natural por um outro, escrito no registro de representação decimal infinita, seja possível.

Ainda na pesquisa brasileira referida anteriormente, a maioria dos alunos identifica a existência de infinitos números racionais entre dois racionais mas não considera a existência de infinitos irracionais neste mesmo intervalo. Duas questões tinham o objetivo de avaliar o efeito do uso da calculadora no comportamento dos alunos sobre a relação entre um número e suas aproximações, e para alguns alunos

um número e uma de suas aproximações pareceram ter o mesmo significado. ARTIGUE¹, citada por IGLIORI e SILVA (2001, p. 40) afirma que:

esta associação tende a ser reforçada pelo uso de calculadora [...] Do mesmo modo que para os estudantes, P compreende categorias diferentes de números (os inteiros, as frações, os decimais, os números que se expressam com radicais e outros como π), todas estas categorias tendem a se confundir na associação entre número real e número decimal (com um número decimal reduzido).

Uma outra conclusão da pesquisa de IGLIORI e SILVA, foi que a comparação entre as concepções dos alunos franceses e israelenses com as dos brasileiros, quanto ao modelo concebido para a reta real, na comparação entre conjuntos infinitos, revelaram-se semelhantes. O desempenho dos alunos iniciantes e finalistas manteve-se praticamente o mesmo.

Uma segunda pesquisa brasileira realizada por SOARES, E. F. E., FERREIRA, M. C. C. e MOREIRA, P. C. (1999) com 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC identificou que

o significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passam ao largo de quase todas as respostas. Esse parece ser o ponto central das dificuldades na compreensão de uma série de conceitos ligados à estrutura dos reais [...] Esta 'imagem' de Θ e de P como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento mínimo (e/ou máximo) pode criar obstáculos à compreensão da noção de irracionalidade e da própria natureza do contínuo numérico. (SOARES, 1999, p. 99).

Esta pesquisa identificou as seguintes concepções dos alunos: um número irracional é aquele que não é exato, ou que possui infinitas casas decimais, isto é, associam os irracionais com tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido, ou ainda, número irracional é associado à imprecisão e a não exatidão. Assim como na pesquisa de IGLIORI (1999), existe a noção de que toda medida é expressa por um número racional. Muitos alunos não identificaram a existência de números irracionais entre dois números racionais dados no registro de representação fracionária e associaram as dízimas periódicas com a irracionalidade. Mais de 50% dos alunos não

¹ ARTIGUE, M. IREM, Paris VII, 1989.

estavam completamente seguros da possibilidade (teórica) de subdivisão infinita de um segmento.

Algumas dissertações de Mestrado abordaram temas semelhantes ou próximos à nossa proposta como por exemplo, a dissertação de M. S. Dias da PUC/SP que foi baseada numa pesquisa diagnóstica a respeito do conceito de reta real junto a professores do Ensino Fundamental, confirmou sua hipótese de que as concepções destes professores eram as mesmas concepções identificadas em pesquisas nacionais e internacionais realizadas junto aos estudantes.

Já Catto (PUC/SP) analisou livros didáticos por meio dos registros de representação dos números racionais, segundo a ótica de Duval. Concluiu que ambas as coleções analisadas trabalham os tratamentos², uma priorizando os tratamentos no registro numérico e a outra no registro figural. Quanto à conversão, ambas as coleções a desenvolvem num único sentido e entre dois registros.

O estudo dos números irracionais é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 81) que já se iniciem na 7^a série do Ensino Fundamental:

[...] ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais; resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Em relação às diversas representações dos números reais, os PCN (1998, p. 71 e 87) propõem:

Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações

² Este termo será explorado no capítulo 3. Em termos gerais, Duval define tratamento como sendo uma transformação de uma representação, no interior de um mesmo registro.

entre essas representações [...] Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (2000, p.114 e 116) também sugerem a utilização de vários registros de representação, bem como a identificação de um objeto nas suas diferentes representações, como se pode observar na citação:

Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentadas sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez [...] Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto [...] Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra.

Estas pesquisas e as recomendações contidas nos PCN corroboram para a pertinência de nosso estudo tanto junto ao público-alvo dos professores do Ensino Médio quanto à escolha do tema: a densidade do conjunto dos números reais. Segundo Lima (1977, p. 73-74): “O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Também o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais”. Neste trabalho empregaremos o termo densidade no sentido dado por Caraça (1989, p. 56): “um conjunto é denso se entre dois dos seus elementos quaisquer exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto”.

Enquanto a dissertação de Dias realizou uma pesquisa diagnóstica a respeito da concepção dos professores quanto a reta real porém, segundo a fundamentação teórica do conceito imagem e conceito definição, e a dissertação de Catto analisou livros didáticos segundo a ótica de Duval, a presente pesquisa se propõe a uma abordagem diferente das duas primeiras. Nossa proposta é realizar uma intervenção por meio de uma seqüência de ensino junto a Professores do Ensino Médio. A escolha do público-alvo se deu pelo fato de o professor ser o agente do processo ensino-aprendizagem

que tem influência sobre um grande número de alunos e assim poderá dispor de mais informações para ensinar.

Interessa-nos saber: Que concepções são explicitadas por professores do Ensino Médio a respeito da densidade do conjunto dos números reais, tanto a densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais quanto a dos irracionais nos reais? Como eles reagem frente a questões que discutem o conceito de densidade enfocando diferentes registros de representação?

Pretendemos investigar a viabilidade de dois tipos de procedimentos distintos: primeiro, a obtenção de números racionais entre dois racionais dados, por meio da média aritmética, segundo, a obtenção de números irracionais entre dois reais dados a partir da troca de um ou mais algarismos, da representação decimal de um deles. Este último procedimento foi inspirado no processo diagonal de Cantor. Também analisaremos a reação dos professores diante destes procedimentos.

Para tanto foi realizada uma intervenção por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência de ensino, composta de dez atividades, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica do psicólogo francês Raymond Duval, utilizando os registros da língua natural, decimal, fracionário e gráfico, bem como a transição entre eles.

A expectativa é a de que estas atividades proporcionem uma reflexão a respeito da propriedade da densidade da reta, pois sugerimos questões que podem fazer aflorar algumas noções e particularidades da reta que, em geral, não são enfatizadas no ensino.

CAPÍTULO 2: A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS

A afirmação: “Deus criou os números inteiros; todo o resto é obra do homem”, atribuída ao Matemático alemão Leopold Kronecker (1823 – 1891), evidencia que a matemática de sua época era fundamentada nos números inteiros e em combinações finitas destes números.

Até o século XVI era utilizado o sistema de numeração romana, mas lentamente com o desenvolvimento das notações matemáticas, este foi substituído pelo sistema arábico de numeração. Antes da introdução dos algarismos arábicos, as letras de um alfabeto eram usadas com esse propósito e isso pode justificar em parte o grande sucesso que a Geometria tinha nesses dias.

Segundo Dantzig (1970, p. 22) em sua obra *Impressões Digitais*: “É a seus dez dedos articulados que o homem deve seu sucesso nos cálculos”. Os dedos foram os responsáveis pelo ensino da contagem e pela extensão do alcance do número e talvez a técnica numérica do homem poderia não ter avançado além do senso numérico. Em todas as línguas indo-européias, assim como na semita, mongol e na maioria das línguas primitivas, a base da numeração é dez. Duas citações de Dantzig (1970) explicitam o importante papel que o número de dedos representou no processo de elaboração do sistema decimal: “A adoção do sistema decimal deveu-se a um incidente fisiológico” (p. 27) e “Na verdade, não pode haver engano quanto à influência de nossos dez dedos na ‘seleção’ da base de nosso sistema numérico” (p. 24).

A idéia de número está intrinsecamente ligada ao processo de medida, número é o resultado da medida de uma grandeza. Quando se trata de uma grandeza discreta, o resultado de sua medida (que nesse caso se chama contagem) será um número natural. Se se tratar de uma grandeza contínua, o processo de medida consiste em comparar um segmento arbitrário com outro fixado como unidade, o que conduz aos diversos tipos de números reais positivos: inteiros, racionais e irracionais.

A numeração posicional foi usada por muitos séculos antes que se percebesse que entre as vantagens do método, estava sua grande facilidade de manipular as frações. Esta representação posicional foi inventada pelos Babilônios há cerca de 4.000

anos e tem como característica, o fato de os símbolos receberem valores que dependem de suas posições relativas na representação de um número.

O sistema decimal era comum à maioria das civilizações antigas e por volta de 1.800 a.c. na Mesopotâmia, esse sistema foi substituído pelo de base sessenta. Não se sabe com certeza o motivo dessa mudança. Há hipóteses dela ser devida a considerações astronômicas ou a combinação natural de dois sistemas antigos, o decimal o de base seis. Uma justificativa da escolha da base sexagesimal é a conveniência de o número sessenta possuir muitos divisores não triviais, a saber: dois, três, quatro, cinco, seis, dez, doze, quinze, vinte e trinta. A vantagem de haver um grande número de divisores é a facilidade de realizar cálculos na prática. Se não se sabe sua origem, conhece-se sua influência, nas unidades de tempo e nas de medidas de ângulos.

As frações decimais já eram utilizadas na China antiga, Arábia medieval e na Europa do renascimento, descobertas em manuscritos medievais. Antes do aparecimento da impressão, operações com frações foram utilizadas por muito tempo, embora não sendo freqüentemente achadas. Já desde 1430, o matemático e astrônomo árabe Ghiath Al Din Jamshid al-Kashi antecipou o mesmo simbolismo utilizado na Europa um século e meio mais tarde. Ele foi o primeiro a dar a π mais de dez casas decimais, mais precisamente dezesseis, além disso elaborou um dispositivo para simplificar cálculos de importantes tempos associados aos eclipses lunares. Com o desenvolvimento dos métodos de cálculo baseados no sistema de posição decimal, no começo do século XV, este sistema ficou completo incorporando as frações decimais na representação dos números. No comércio, a fração decimal não era necessária e na astronomia, a fração sexagesimal era adequada. No entanto, com o advento da impressão, alguns escritores, empolgados com tal acontecimento, cometeram excessos, usando frações muito além da necessidade comercial.

Algumas regras que foram estabelecidas contribuíram para a invenção da fração decimal, como por exemplo procedimentos para se representar valores aproximados de raízes enésimas, $\sqrt[n]{a}$, sem a utilização de decimais. Esta regra que já era conhecida desde os hindus e dos árabes e o aparecimento das tabelas de raízes quadradas

favoreceu o desenvolvimento da fração decimal. A regra usada para extrair a $\sqrt[n]{a}$ expressa em símbolos modernos é $\frac{\sqrt[n]{a \cdot 10^{kn}}}{10^k}$, por exemplo, $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{30000}}{100}$ ou $\frac{\sqrt{3000000}}{1000}$.

Se os radicandos fossem multiplicados por 1.000.000 por exemplo, suas raízes quadradas seriam 1.000 vezes maior. Segundo Smith (1958, p. 236) este procedimento foi utilizado também na Trigonometria com o objetivo de se evitar os decimais.

Smith (1958, p. 237) transcreve de Adam Riese's arithmetic, Rechnung auff der Linien und Federn (Erfurt, 1522) a tabela a seguir:

Tabula Radicum quadratarum.						
1	1	1000	17	123	33	747
2	4	414	18	242	34	833
3	9	732	19	358	35	917
4	16	1000	20	472	36	1000
5	25	334	21	584	37	82
6	36	449	22	692	38	103
7	49	545	23	767	39	244
8	64	818	24	900	40	824
9	81	1000	25	1000	41	408
10	100	162	26	98	42	481
11	121	316	27	195	43	558
12	144	445	28	290	44	634
13	169	606	29	384	45	709
14	196	741	30	477	46	733
15	225	873	31	567	47	856
16	256	1000	32	659	48	918

Ela contém as raízes quadradas cujos algarismos representativos da parte decimal, aparecem sem qualquer explicitação para separar a parte inteira da decimal. É composta por três faixas. Por sua vez, cada uma delas é subdividida em outras três colunas. A primeira faixa refere-se às raízes quadradas dos números de 1 a 16, na segunda figuram as raízes dos números de 17 a 32 e na terceira de 33 a 48.

Relativamente à primeira faixa, observa-se que na segunda coluna figuram os números inteiros de 1 a 16; a primeira coluna é composta pelos números de 1 a 4 situados à esquerda de 1, 4, 9 e 16 respectivamente. A terceira coluna refere-se às

representações das aproximações decimais das raízes correspondentes aos números da segunda coluna. Estas aproximações são registradas como sendo números inteiros. Assim a raiz quadrada aproximada de 13 é obtida buscando o primeiro número imediatamente acima, que figura na primeira coluna, isto é, 3, e tomando a parte decimal que está à direita de 13, ou seja, 606. Isto na linguagem atual significaria $\sqrt{13} \cong 3,606$. A construção das outras duas faixas segue o mesmo padrão.

Em 1424 havia uma forma de representar estas frações que consistia em deixar uma lacuna entre a parte inteira e a decimal, 3 14159.

Já em 1492 usava-se o ponto expressando 46.52 ou uma barra vertical, representando 46|52, para escrever 46,52. Em 1539, já era usada a fração decimal nas operações de divisão como por exemplo $503:10 = 50\frac{3}{10}$. Outra influência precedente da invenção das frações decimais foi uma regra para dividir por números da forma $a \cdot 10^n$, atribuída a Cardan em 1539. Estes passos não aconteceram somente no ocidente mas também no oriente.

Segundo Smith (1958), Francesco Pellizzati conhecido por Pellos (1450 – 1500) também utilizou uma lacuna para separar a parte inteira da parte decimal. Em 1492 usou o ponto decimal para denotar a divisão de um número por uma potência de dez, pela primeira vez em um trabalho impresso, onde outros usavam uma barra vertical. No entanto, apesar de ter escrito a respeito da aritmética essencialmente com aplicações comerciais, a noção de fração decimal não foi desenvolvida por ele. Em 1530 Christoff Rudolff escreveu sobre as frações, ele poderia ser considerado o inventor das frações decimais assim como alguns de seus predecessores. Foi o primeiro a mostrar que compreendeu completamente o significado das frações decimais usando uma barra no lugar do ponto decimal, 413|4375. Segundo Smith (1958) esse autor aparentemente sabia operar com essas formas tão bem quanto escreveu sobre elas, assim como vários predecessores fizeram. Entretanto seu trabalho não foi reconhecido e aparentemente não foi entendido, esta situação permaneceu até 1585 quando as frações decimais foram explicadas com clareza por um escritor chamado Simon Stevin.

Até o século XVI aceitava-se as idéias gregas para as quantidades, considerando que tinham dois componentes disjuntos: o discreto (número) e o contínuo (grandeza). Estes componentes refletiram na Matemática como o estudo das grandezas e números, isto é, como o estudo da Geometria e da Aritmética.

Este cenário mudou radicalmente com o trabalho de Simon Stevin de Bugres (1548–1620), principal Matemático dos países Baixos. O conceito grego de número foi desenvolvido como um resultado de um processo de abstração aplicado ao mundo material.

Em 1585 Simon Stevin publicou seu livro *L'Arithmetique* produzindo um avanço epistêmico no conhecimento matemático. Esta obra é um tratado sobre os aspectos teóricos e práticos da aritmética e apresenta um novo conceito de número: “número é aquilo através do qual os aspectos quantitativos de cada coisa são revelados” (trad. de: Moreno – Armella; Waldegg, 2002, p.186). Stevin eliminou a dicotomia entre o discreto e o contínuo, essas quantidades tornaram-se propriedades circunstanciais do objeto quantificado. Por exemplo, referindo-se a pessoa, o número “um” era discreto, entretanto ligado a uma jarda, o número “um” era contínuo. Deste modo não poderia haver distinção entre o objeto de estudo da Aritmética (discreto) e da Geometria (contínuo).

Stevin organizou o aspecto operacional no trabalho intitulado *De Thiende* (O décimo) com versão em francês *La Disme*, publicado um pouco antes de *L'Arithmetique*, apresentando uma sistematização com algumas inovações da notação decimal já conhecida na época. Neste trabalho “identificou grandeza e número, atribuindo propriedades numéricas a quantidades contínuas e continuidade a números” (trad. de: Moreno – Armella; Waldegg, 2002, p.187). A partir daí, não era possível, para os matemáticos, separarem o conceito de quantidade de sua representação simbólica.

A nova representação, proposta por Stevin, era flexível no sentido de lidar com problemas de quantidade discreta e simultaneamente com os problemas de divisibilidade. Esta representação que lidava com partes da unidade era a notação decimal que acabou com a tensão entre o discreto e o contínuo.

Com o surgimento do problema da incomensurabilidade já no séc. IV a.c., Eudoxio propôs a utilização de aproximações para designar quantidades tais como, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado um. No entanto, foi Stevin que reconheceu tais aproximações como números, dando-lhes o status de número decimal.

Para Stevin, número revelava a quantidade de cada coisa, assim operações aritméticas eram sustentadas ou apoiadas por transformações que eram praticadas sobre quantidades. Considerando então, os resultados de operações aritméticas, feitas com números, como números. Foi encaminhada assim, a ampliação do domínio numérico. Deste modo propôs uma estrutura teórica baseada no processo de medida pelo qual um número é associado a uma grandeza.

Com o novo conceito de número, é iniciada a transição do pensamento aritmético para o algébrico:

O conceito de número é justificado não somente porque poderia acomodar todo o cálculo necessário, mas também porque o caráter simbólico do trabalho de Stevin estava de acordo com o desenvolvimento da Álgebra. Ele falava sobre 'números aritméticos' e 'números geométricos'. (trad. de: Moreno–Armella; Waldegg, 2002, p.188).

A identificação de um número com um símbolo usado para representá-lo leva a uma conceitualização de número como uma entidade mental, não mais como o algoritmo grego usado para contar coisas materiais.

Resumindo, foi estabelecido um conceito de número capaz de lidar com quantidades discretas e grandezas contínuas e também uma nova linguagem algébrica que enfatizava o estudo dos processos matemáticos. A contribuição de Stevin foi unificar as noções gregas de número discreto e grandeza contínua, por meio da introdução de decimais. O número e grandeza contínua tornaram-se integradas num mesmo conceito.

Apesar de não ter sido o inventor nem o primeiro a recomendar a utilização das frações decimais foi o primeiro a explicar o sistema divulgando-o entre o povo e os usuários de Matemática. Já em 1579, o matemático François Viète (1540–1603) tinha

recomendado insistentemente o uso de frações decimais em vez de sexagesimais. Mas foi Stevin quem as ensinou através de um sistema elementar e completo, concentrava-se nos décimos, centésimos e milésimos, etc, das frações como sendo numeradores inteiros não escrevendo suas expressões decimais como um denominador; como fazia Viète. Em vez disso escrevia num círculo acima ou depois de cada dígito, a potência de dez assumida como denominador. Segundo sua representação, o valor aproximado de π expressava-se como:

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 6 & \end{array} \quad \text{ou} \quad 3\textcircled{0}1\textcircled{1}4\textcircled{2}1\textcircled{3}6\textcircled{4}$$

Uma outra representação sugerida por Stevin encontrada em Dantzig (1970, p. 223) é:

$$24\ 3^{(1)}\ 7^{(2)}\ 5^{(3)},$$

para a representação atual de 24.375, fugindo da notação fracionária até então utilizada, isto é, $\frac{375}{1000}$. Aqui os círculos colocados acima dos dígitos são substituídos por parênteses acima e à direita dos mesmos e omitindo o círculo com o zero para indicar a parte inteira do número.

Stevin foi além disso, ao sugerir que tais notações fossem usadas também para potências fracionárias. Embora não tivesse oportunidade de usar a notação com índice fracionário, ele manifestou explicitamente que $\frac{1}{2}$ dentro de um círculo significava raiz quadrada e que $\frac{3}{2}$ dentro de um círculo indicaria a raiz quadrada de um cubo.

Segue a reprodução de uma página do trabalho de Stevin:

**SECONDE PARTIE DE
LA DISME DE L'OPÉ.
R A T I O N,
PROPOSITION I, DE
L'ADDITION.**

Etant donnez nombres de Disme à ajoûter : Trouver leur somme :

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⑥ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⑥ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisieme 875 ⑥ 7 ① 8 ② 1 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.*

	⑥ ① ② ③
2 7 8 4 7	
3 7 6 7 5	
8 7 5 7 8 2	
9 4 1 3 0 4	

On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioûtant selon la vulgaire maniere d'aioûter nombres entiers; en ceste sorte:

Donne somme (par le 1^{er} probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⑥ 3 ① 0 ② 4 ③. Je di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⑥ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, sont (par la 3^e definition) $27 \frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, ensemble $27 \frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⑥ 8 ① 7 ② 5 ③ valent $37 \frac{675}{1000}$, & les 875 ⑥ 7 ① 8 ② 1 ③ feront $875 \frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27 \frac{847}{1000}, 37 \frac{675}{1000}, 875 \frac{782}{1000}$, sont ensemble (par le 10^e probleme de l'Arith.) $941 \frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⑥ 3 ① 0 ② 4 ③, c'est

A PAGE FROM STEVIN'S WORK, 1634 EDITION

From the first work devoted to decimal fractions. The first edition was published at Leyden, 1585

A obra de Stevin possibilitou ensinar de uma maneira simples, todas as computações necessárias sem utilizar frações e seu autor sugeriu que o Governo de seu país adotasse o sistema decimal, antecipando o sistema métrico decimal.

Embora Stevin tenha tido uma total compreensão da teoria, expondo-a claramente, a simbologia utilizada revelou-se pobre. O progresso do simbolismo foi devido basicamente a Bürgi, Kepler e Beyer. Napier utilizou a teoria dos decimais sem contribuir para o desenvolvimento do simbolismo. Bürgi utilizou duas maneiras de representação para a fração decimal empregando a lacuna ou a vírgula para representar o ponto decimal, até que em 1592, optou pelo uso da vírgula.

Vários autores usaram a notação de Stevin, entretanto houve outras sugestões para representar a separação da parte inteira da parte decimal. Tais sugestões atrasaram a adoção do ponto decimal para tal fim. Por exemplo na Inglaterra, o Professor Cajori usou $0|\underline{56}$ para 0.56.

Segundo Boyer (1974) o uso da vírgula decimal como separatriz é atribuída a Giovanni A. Magini (1555 – 1617) em 1592 que era um cartógrafo contemporâneo de Kepler e a popularização do ponto decimal se deu em 1613 com John Napier (1550 – 1617).

Stevin e Rudolff foram os responsáveis por chamar a atenção para o mundo do novo sistema de numeração.

Durante algum tempo acreditava-se que não existissem segmentos incomensuráveis. Isto é, não haveria dois segmentos que não admitissem uma unidade de comprimento, não importa quão pequeno, que não coubesse um número inteiro de vezes em cada um deles. Desse modo, os números inteiros e as razões entre eles (ou seja, os números racionais), eram suficientes para medir todas as grandezas. Já na época de Pitágoras, no século V a.c., descobriu-se a incomensurabilidade da diagonal e do lado de um quadrado, isto é, a impossibilidade de se medir a diagonal dispondo-se apenas dos números racionais. Este fato é somente uma visão geométrica da irracionalidade da $\sqrt{2}$ (medida da diagonal do quadrado de lado um). Theodorus os Cyrene 425 a.c. conduziu estudos a respeito da incomensurabilidade; de grandezas resultando no que hoje seria a irracionalidade das raízes de três e de cinco. Para os gregos esta foi uma descoberta embaraçosa pois em muitas de suas demonstrações geométricas eles supunham que dois segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade comum de comprimento.

Demonstra-se que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis. A demonstração da incomensurabilidade de segmentos, pelo processo geométrico, encontra-se, dentre outras obras, em Katz (1993, p. 73-74). A irracionalidade da $\sqrt{2}$ pelo processo algébrico, pode ser consultada, por exemplo, em Ávila (2001, p. 8).

O tratamento geométrico da incomensurabilidade conduziu naturalmente para o tratamento aritmético e algébrico dos números irracionais. Desde Pitágoras até Weierstrass, os irracionais ocuparam as atenções de uma parte considerável do mundo que se empenhou em achar um valor aproximado para expressões como $\sqrt{2}$.

O matemático grego Eudócio 408-355 a.c., resolveu temporariamente o problema da irracionalidade e foi o primeiro a lidar com grandezas incomensuráveis há 25 séculos. Sugeriu que para se conhecer um número irracional basta utilizar aproximações racionais deste número por falta e por excesso. Por exemplo, $\sqrt{2}$ pode ser aproximada por valores racionais como $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, isto significa que $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$.

Segundo Caraça (1989, p. 80), com o problema da incomensurabilidade, que só poderia ser explicado pelo conceito “quantitativo de infinito”, isto é, a estrutura contínua da reta, cai a escola Pitagórica que acreditava que, dados dois segmentos quaisquer $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sempre seria possível encontrar um terceiro $\overline{EF}$ contido um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e outro número inteiro de vezes em $\overline{CD}$, ou seja, que dois segmentos seriam sempre comensuráveis.

Segundo Niven (1984, p. 3) a Geometria oferece um esquema simples e intuitivo para descrever os números reais, ou seja, os números necessários para medir, por exemplo, todos os possíveis comprimentos em termos de uma dada unidade de comprimento. Se considerarmos a representação dos números no registro gráfico, como pontos de uma reta, qualquer segmento independente de seu tamanho contém, além de uma infinidade de pontos racionais, também muitos outros pontos como $\sqrt{2}$, e , $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, π , etc, medindo comprimentos que não podem ser expressos por números

racionais. Estes números, chamados de irracionais, juntamente com os racionais constituem o conjunto dos números reais.

Considerando agora todos os números reais, todo ponto da reta corresponde a um número real e todo número real corresponde a um ponto da reta. O fato de todos os comprimentos poderem ser expressos como números reais é conhecido como a propriedade da completude destes números. Tal propriedade é chamada de Axioma de Dedekind-Cantor: “É possível associar a qualquer ponto na reta um único número real e, inversamente, qualquer número real pode ser representado de maneira única por um ponto numa reta” (Dantzig, 1970, p. 157).

A partir de agora discutiremos a representação decimal dos números reais. Iniciaremos observando que há números que têm representação decimal finita e outros, infinita.

Por exemplo o número 7,25 tem representação decimal finita.

Já o número 0,333... tem representação decimal periódica infinita.

Enquanto que o número 0,1010010001000010000010000001... tem representação decimal infinita não periódica.

O número que admite uma representação decimal finita: $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ é racional, uma vez que pode ser representado na forma fracionária: $\frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}$. No exemplo citado, o número representado por 7,25 pode ser escrito por $\frac{725}{10^2}$.

Por outro lado, se o número racional for dado no registro fracionário e seu denominador contiver apenas os fatores 2 e/ou 5, este número admitirá uma representação decimal finita.

De fato, sendo dado $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^m \cdot 5^n}$,

Se $m \geq n$ basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n} , obtendo-se $\frac{p \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{p \cdot 5^{m-n}}{10^m} = \frac{c}{10^m}$, portanto $\frac{p}{q}$ admite uma representação com m casas decimais.

Se $n \geq m$ basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por 2^{n-m} e obter $\frac{p \cdot 2^{n-m}}{10^n} = \frac{d}{10^n}$, portanto $\frac{p}{q}$ admite uma representação com n casas decimais.

Por exemplo, os números a seguir têm representação decimal finita:

a) $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 0,04$, seu denominador só apresenta o fator 5,

b) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 0,0625$, seu denominador só apresenta o fator 2,

c) $\frac{69}{80} = \frac{3.23}{2^4 \cdot 5} = 0,8625$, seu denominador apresenta os fatores 2 e 5.

Resumindo, os números que têm representação decimal finita são aqueles que, ao serem representados no registro fracionário $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, o denominador q somente possui os fatores primos 2 e/ou 5. Se q for divisível por algum número primo diferente de 2 e de 5, o número racional não terá uma representação decimal finita.

Se o número tiver representação decimal infinita, esta pode ser periódica ou não periódica. Uma representação decimal periódica é aquela que contém um grupo de algarismos que repete indefinidamente. A representação 0,333... é periódica. A representação 0,1010010001000010000010000001... é não periódica.

Se o número tiver representação decimal infinita e periódica será racional.

De fato este número pode ser interpretado como sendo a soma de uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{10^n}$, sendo n o número de algarismos que compõe o período. Como a razão é menor que um, está justificada que esta série tem soma e que é dada por $\frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo da série.

Por exemplo,

$$\text{a) } 0,333...=0,3+0,03+0,003+...=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$\text{b) } 0,1666...=0,1+0,0666...=0,1+0,06+0,006+0,0006+...=$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+...=\frac{1}{10}+\frac{\frac{6}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{6}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}.$$

$$\text{c) } 0,0636363...=0,063+0,00063+0,0000063+...=$$

$$=\frac{63}{10^3}+\frac{63}{10^5}+\frac{63}{10^7}+...=\frac{\frac{63}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{\frac{63}{10^3}}{\frac{99}{100}}=\frac{63}{990}=\frac{7}{110}.$$

Pode-se observar que a representação no registro fracionário destes três números, possui em seu denominador, fatores diferentes de 2 e de 5. A sua representação decimal infinita contém um grupo de algarismos que se repete indefinidamente, nem sempre a partir da primeira casa decimal.

Resumindo, se na representação fracionária $\frac{p}{q}$ de um número racional, o denominador admitir um fator diferente de 2 e de 5, este número terá uma representação decimal infinita periódica.

Esta repetição de algarismos no quociente de p por q ocorre porque cada etapa da divisão apresenta um resto. Estes restos formam um grupo que completam um ciclo, voltando a se repetir, gerando os mesmos algarismos que compõem o quociente.

Para $\frac{2}{7}$, os restos de cada etapa são respectivamente 6, 4, 5, 1, 3 e 2, nesta ordem. Ao se obter o resto 2 recomeça o ciclo destes restos gerando novamente no quociente, os algarismos 2, 8, 5, 7, 1 e 4 e o resultado será uma representação decimal infinita. Neste caso o decimal resultante é periódica, como se pode observar a seguir:

The image shows a handwritten long division of 2 by 7. The dividend is 2,000000 and the divisor is 7. The quotient is 0,285714. The division process is shown with horizontal lines and subtractions. The remainders are 6, 4, 5, 1, 3, and 2. A curved arrow points from the remainder 2 back to the start of the division, indicating the cycle repeats.

$$\begin{array}{r}
 2,000000 \quad | \quad 7 \\
 \hline
 14 \\
 \hline
 60 \\
 \hline
 56 \\
 \hline
 40 \\
 \hline
 35 \\
 \hline
 50 \\
 \hline
 49 \\
 \hline
 10 \\
 \hline
 7 \\
 \hline
 30 \\
 \hline
 28 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

Deste modo $\frac{2}{7} = 0,285714285714285714\ldots$ Para esta última representação pode ser usada a seguinte notação: $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$. Este traço indica que os algarismos abaixo dele constituem o período.

Um número racional que possui uma representação decimal finita também admite uma representação decimal infinita. Ao escrevemos 6,8 na sua representação finita por exemplo, a representação decimal infinita da qual estamos falando não é a mais óbvia: 6,8000..., com uma infinidade de zeros, mas sim 6,8 representado por 6,7999... . O número racional que possui uma representação decimal finita como 0,5 também pode ser expresso por uma representação decimal infinita 0,4999...

No entanto, existem números racionais que somente admitem representações decimais infinitas como por exemplo $\frac{1}{3}=0,333\dots$.

Há representações decimais infinitas que não são periódicas como por exemplo 0,1010010001000010000010000001... , formada por uma sequência de '1' separados por '0' : inicialmente um zero, depois dois, depois três e assim por diante, este número é irracional porque a sua 'lei' de formação indica que não há período na sua representação decimal infinita.

Resumindo, no caso de a representação decimal ter um número finito de casas: $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$, esta refere-se a um número racional. No caso de a representação decimal infinita ser periódica, esta refere-se também a um número racional. No caso de a representação decimal infinita ser não periódica, esta refere-se a um número irracional.

No sistema de numeração decimal todo número real pode ser representado na forma: $r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$ onde a_0 é um número inteiro não negativo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ são inteiros que satisfazem $0 \leq a_i \leq 9$. Deste modo, r pode ser escrito no registro de representação decimal por $r = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, onde a_0 representa a parte inteira de r e $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ representa a parte decimal de r .

Desse modo, todo número real possui uma representação decimal infinita.

Cantor utilizou um argumento baseado no princípio posicional do sistema decimal para provar a não enumerabilidade do conjunto dos números reais. Este argumento é conhecido como o processo diagonal de Cantor, ao qual nos referiremos logo após a apresentação de alguns dados e realizações deste eminente Matemático.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em março de 1845 em San Petersburgo. Ainda muito jovem mudou-se com sua família para a Alemanha começando aí a estudar Matemática e, em 1868, recebeu o título de Doutor pela Universidade de Berlin. Dedicou sua vida à obra "Aritmética dos transfinitos".

O maior feito de Cantor consistiu em demonstrar, com rigor matemático, que o infinito não era uma noção indiferenciada: nem todos os conjuntos infinitos são de “igual tamanho”, conseqüentemente, é possível estabelecer comparação entre eles. O conjunto de todos os pontos de uma reta e o conjunto de todos os números fracionários são ambos, conjuntos infinitos, no entanto o primeiro deles tem “mais elementos” que o segundo³.

Uma das maiores dificuldades encontradas por Cantor, no estudo dos números reais foi quanto aos números que não são racionais, isto é, os irracionais. Ele propôs, já em 1872, que todo número irracional poderia ser representado por uma sucessão infinita de números racionais. Assim, por exemplo, o número $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma sucessão infinita de aproximações racionais: 1; 1,4 ; 1,41 ; Desta forma, todos os números irracionais podem ser imaginados como pontos geométricos situados na reta numérica, igualmente como se fazia com os números racionais.

Cantor não foi o único a estudar as propriedades do contínuo. Nesse mesmo ano simultaneamente foi publicado um artigo seu e também um sobre a análise do contínuo, baseado em conjuntos infinitos por um Matemático alemão chamado Richard Dedekind. Em seu artigo, Dedekind expôs a idéia: “A reta é infinitamente mais rica em pontos individuais do que o domínio... dos números racionais em números individuais” (Dauben, 1983, p. 85, tradução nossa).

Os pontos irracionais como $\sqrt{2}$, caem entre pontos racionais. Isto indica que, apesar de o conjunto dos números racionais ser denso na reta, encontram-se ‘poros’, indicando que esse conjunto não é contínuo.

Dois anos mais tarde, Cantor mostrou que os números racionais podiam ser colocados biunivocamente em correspondência com os números inteiros. Chamou de numeráveis, aqueles conjuntos cujos elementos podem ser colocados em correspondência, um a um, com os números do conjunto dos números inteiros positivos. Isto equivale a se poder contar seus elementos. Demonstrou também que

³ Na linguagem atual esta comparação significa que o segundo conjunto é enumerável e o primeiro não.

não pode existir nenhuma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros positivos e o conjunto dos pontos de uma reta e em conseqüência, entre o primeiro conjunto e o conjunto dos números reais.

Cantor aprimorou esta demonstração da não enumerabilidade do conjunto dos números reais. Nela considerou apenas as representações decimais infinitas de cada número, como por exemplo: $0,4 = 0,3999\dots$, para que cada um deles tenha apenas uma única representação decimal.

Um esboço das principais idéias, contidas em tal demonstração, é descrito a seguir:

Supõe-se que fosse possível estabelecer uma correspondência um a um entre os números do intervalo $[0,1]$ e os números inteiros positivos. Ou seja, os números deste intervalo são elementos de uma seqüência $x_1, x_2, x_3, \dots$ escritos em suas representações decimais da seguinte forma:

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots ;$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots ;$$

$$x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \dots ;$$

...

$$x_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots ;$$

...

$$\text{onde } 0 \leq a_{ij} \leq 9.$$

Cantor demonstrou ser possível produzir um número do intervalo $[0,1]$ que não esteja nessa lista.

Para tanto, constrói-se um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante. Este número não coincidirá com nenhum dos números da lista acima pois difere de cada um deles em, no mínimo, um algarismo.

Para estabelecer uma regra numérica específica, seja $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ este número, onde $b_i = 9$ se $a_{ii} = 1$ e $b_i = 1$ se $a_{ii} \neq 1$. Como x não está na lista acima, chega-se a uma contradição ao estabelecimento da existência de uma correspondência um a um dos números do intervalo $[0, 1]$ com os números inteiros positivos. Portanto o conjunto dos números reais não é enumerável.

Este procedimento hoje conhecido por processo de diagonalização de Cantor, o de troca de algarismos de uma representação decimal, deu-nos idéia de sugestão de procedimento na obtenção de números irracionais entre dois reais quaisquer, nas atividades que proporemos.

CAPÍTULO 3: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O referencial teórico escolhido para alicerçar nossa pesquisa é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica do psicólogo francês Raymond Duval. Para abordarmos a densidade do conjunto dos números reais essencialmente trabalhamos com os registros de representação decimal e gráfico dos números. Duval (2003, p.14 - 15) afirma que: “O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar. [...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.”

Segundo Damm (1999, p. 137) “A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação”.

Para auxiliar o entendimento dessa teoria fomos buscar a origem da ciência chamada Semiótica junto ao seu idealizador, o americano Charles Sanders Peirce (1839-1914), intitulado cientista-lógico-filósofo.

A palavra Semiótica vem do grego *Semeion* que quer dizer signo, no sentido de linguagem, ou seja, é a ciência geral de todas as linguagens. A matemática é uma ciência que lança mão de representações para ser compreendida e desenvolvida. A principal forma de linguagem é a língua, por ser um meio de comunicação privilegiado pois se constitui em sistemas sociais e históricos de representação do mundo, podendo ser verbal: oral ou escrita. Resumindo, linguagem é o conjunto de todas as formas sociais de comunicação e de significação, ou seja, todos os sistemas de produção de sentido.

As representações possibilitam conhecer vários pontos de vista sobre um mesmo objeto, cada signo é uma representação parcial deste objeto, de um certo modo e numa certa capacidade.

A noção de signo pode ser tão genérica que pode referir-se também às linguagens dos computadores. No entanto, tratando-se de aprendizagem, a definição de signo a seguir, envolve o pensamento na mente:

Um signo intenta representar, em parte pelo menos, um objeto que é, portanto, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo que este represente seu objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afete uma mente, de tal modo que, de certa maneira, determine naquela mente algo que é mediatamente devido ao objeto. Esta determinação da qual a causa imediata é o signo, e da qual a causa indireta é o objeto chama-se interpretante. (Peirce in Santaella, 1983, p. 58).

O signo não é o objeto, apenas está no lugar dele, e só o representa para um intérprete, pois produz em sua mente, um outro signo que traduz o significado do primeiro e que se chama interpretante. Interpretante é um processo que se cria na mente do intérprete, é um signo que traduz o significado do signo que se relaciona com o objeto.

O objetivo de Peirce foi fornecer às outras ciências, como à Matemática, fundações lógicas para a construção de sua linguagem.

Duval (2003, p. 13) afirma que as representações semióticas têm importância primordial:

É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Ora, a importância das representações semióticas se deve a duas razões fundamentais. Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. Por exemplo, o sistema de numeração decimal de posição oferece mais possibilidades que os sistemas grego ou romano de numeração e, no entanto, a aquisição desse sistema de numeração pelos alunos não é simples.

O desenvolvimento das representações possibilitou a evolução do pensamento matemático. O acesso aos objetos em Matemática só é possível por meio das representações semióticas e a evolução dos conhecimentos matemáticos se deu paralelamente ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação.

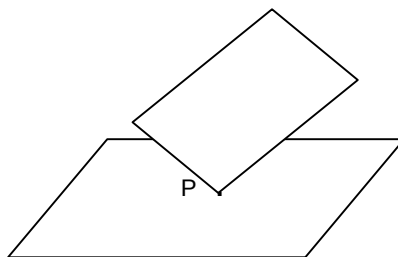
Em relação a variedade de representações semióticas utilizadas em matemática, Duval (2003, p. 14) descreve:

Além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente. Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática, falaremos parodiando Descartes, de “registro” de representação.

Primeiramente é fundamental diferenciar o objeto de sua representação, que é parcial, para não confundi-los. Esta não é o próprio objeto, e também não é suficiente para descrevê-lo, ou seja, uma representação não explica ou mostra o objeto na sua totalidade, nem mesmo evidencia todas as suas propriedades e relações com outros objetos.

A representação é necessária e carrega o poder de substituir o objeto matemático mas não é ele próprio. Duas representações de um mesmo objeto, em diferentes registros, não possuem o mesmo conteúdo, explicam propriedades e aspectos diferentes em cada um deles. Segundo Duval, a articulação deles possibilitará o acesso à compreensão em Matemática. É importante mencionar que “um sucesso Matemático não corresponde a um sucesso cognitivo” (Duval, 2003, p. 27). Pois nem sempre quem manipula adequadamente os algoritmos tem total compreensão do significado do objeto envolvido

Por exemplo, na representação de um plano, por meio de um desenho de um paralelogramo, não se está evidenciando a sua não limitação, poderia se concluir que o plano é limitado ou que dois deles podem se interceptar em um único ponto, como sugere a seguinte figura:



Um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo não somente a comunicação mas também o tratamento da informação e a objetivação. “As representações semióticas são produções, constituídas pelo uso de símbolos, pertencendo a um sistema de representação que tem condições próprias de significado e de funcionamento.” (Duval, 1994, p.39)

A questão que motivou Duval a desenvolver sua teoria cognitiva foi:

Como se processa a aprendizagem em Matemática?

O autor tenta responder sua questão propondo que, pelo fato de haver várias representações para um mesmo objeto, a sua apreensão efetiva pode ser alcançada a partir do momento em que o sujeito consegue transitar de uma representação a outra utilizando os diferentes tipos de registros de representação: o numérico, algébrico, gráfico, geométrico ou da língua natural.

Os registros podem ser monofuncionais ou multifuncionais. Os do primeiro tipo são aqueles algoritmizáveis e os do segundo os não algoritmizáveis. Ambos podem ter representação discursiva como a língua natural e sistemas de escritas, ou não discursiva, como as figuras geométricas e gráficos cartesianos.

Duval defende que uma condição necessária para possibilitar a apreensão do objeto matemático é a articulação entre, pelo menos, dois registros de representação semiótica. Esta articulação, no entanto, nem sempre ocorre espontaneamente.

A representação semiótica é um sistema particular de signos, por exemplo enunciados, em linguagem natural, notações, escritas algébricas, gráficos cartesianos, figuras geométricas, cada um com suas dificuldades próprias de significado e funcionamento.

Duval define dois elementos fundamentais e inseparáveis em sua teoria: *Sémiosis* e *Noésis*. *Sémiosis* é a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e *Noésis* é a apreensão conceitual de um objeto, ou seja, sua conceitualização. Sendo a *Sémiosis* fase indispensável para a obtenção da *Noésis*, Duval sugere que podem residir aí as dificuldades dos sujeitos na apreensão do objeto matemático podem ser devidas a não ocorrência desta segunda fase. Ou seja, é necessário produzir uma representação para se chegar à conceitualização.

Quanto às representações, elas devem ser identificáveis, ou seja, análogas às descrições de um enunciado. Esta descrição por sua vez, respeita regras já estabelecidas culturalmente, tanto lingüísticas, como da construção de figuras e símbolos matemáticos. Estas regras devem ser utilizadas para reconhecer as representações. Será uma representação identificável se houver uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado. O sujeito deve portanto, conhecer, compreender e saber como utilizar essas tais regras, por exemplo: o reconhecimento do sistema de numeração hindo-arábico, o desenho de uma figura ou a escrita de uma fórmula.

Surge então uma questão: Como um sujeito apreende um conceito por meio da coordenação de vários registros de representação?

Para responder a esta questão é necessário mobilizar os dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento e a conversão.

O tratamento é a transformação de uma representação no interior de um mesmo registro, sendo assim trata-se de uma modificação interna do registro. Cada um deles possui um conjunto de regras específicas de tratamento que não necessariamente são válidas em um outro. Os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo matemático, no sentido de que um mesmo objeto matemático pode ter duas representações diferentes, com seus respectivos tratamentos que também possuem graus diferentes de dificuldade. Por exemplo, no registro de representação decimal dos números racionais e irracionais: “o tratamento exige a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sem a compreensão destas regras, a representação algorítmica não tem sentido, ou seja, não existe tratamento significativo.” (Damm, 1999, p. 145)

Outros exemplos:

a) tratamento no registro numérico fracionário: $\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) tratamento no registro numérico decimal: $0,5 = 0,50 = 0,500$

c) tratamento no registro numérico da notação científica:

$$5 \cdot 10^{-2} = 50 \cdot 10^{-3} = 500 \cdot 10^{-4}$$

O tratamento, que ocorre dentro de um mesmo registro, pode auxiliar no procedimento de justificação ou prova.

A segunda transformação, chamada conversão, processa-se entre dois diferentes registros. A realização de conversões pode possibilitar a compreensão de vários aspectos de um mesmo objeto, pois cada representação explicita apenas alguns aspectos componentes do objeto.

A coordenação entre ao menos dois registros de representação, segundo Duval, possibilita a apreensão do objeto matemático, a conceitualização pois ela estabelece as relações entre os registros evidenciando vários pontos de vista diferentes de um mesmo objeto matemático. Isto não se alcança somente com a habilidade de realizar tratamentos em cada registro separadamente. Cada linguagem oferece possibilidades diferentes de representações e seus respectivos tratamentos, e a coordenação deles oferece possibilidades de novas aprendizagens.

Os diferentes registros que representam o mesmo número têm significação diferente e custos de tratamento também diferentes.

Exemplos de conversão:

a) do registro numérico fracionário para o decimal: $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

b) do registro numérico fracionário para o decimal e deste para o da notação

científica: $\frac{1}{4} = 0,25 = 25 \cdot 10^{-2}$

c) do registro numérico de porcentagem para o fracionário e deste para o

decimal: $10\% = \frac{10}{100} = 0,1$.

A conversão de registros, conserva a referência aos mesmos objetos e, assim, conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. Porém, na conversão pode ocorrer o fenômeno da não-congruência, ou seja, o fato de os sujeitos não reconhecerem o mesmo objeto representado em dois registros diferentes, em que a representação final não transparece na representação inicial.

O fato de se privilegiar em apenas um sentido, a conversão entre dois registros, não significa que a conversão no outro sentido seja automaticamente contemplada no aprendizado. Por exemplo, para a conversão do registro numérico fracionário, $\frac{1}{6}$ para o decimal 0,1666..., basta dividir o numerador pelo denominador. No entanto, para realizar a conversão deste registro para o fracionário, é necessário considerar a representação 0,1666... como a soma de termos de uma série geométrica de razão $\frac{1}{10}$

(a partir do segundo termo):

$$0,1666... = 0,1 + 0,0666... = 0,1 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + ... =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + ... = \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Duval preconiza que para se processar a aquisição de um objeto matemático é necessário haver a conversão entre, pelo menos, dois registros. Sugere que a escolha destes registros seja realizada em função do custo do tratamento podendo economizar tempo e cálculos, tornando a resolução de um problema mais simples, mais rápida e mais próxima da língua natural.

Segundo Duval (2003, p. 27), a constituição de seqüências de tarefas deve satisfazer duas condições:

Quando se trata da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, duas condições devem ser efetivamente respeitadas: primeiramente, a seqüência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos *dois sentidos da conversão*; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e *casos mais ou menos complexos de não-congruência*.

Deve haver tarefas tanto de produção, quanto de reconhecimento, isto é, identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais.

Numa visão mais ampla, a aprendizagem dos diversos registros de representação pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais do indivíduo.

Segundo Dantzig (1970, p. 224)

O limitado alcance do senso numérico do homem faz que seja quase impossível nomear um dado número segundo qualquer coleção modelo da qual ele seja a “medida cardinal”. A alternativa é associar o número aos símbolos usados em seu registro.

A Teoria de Duval alicerça a nossa pesquisa, na medida em que elaboramos uma seqüência de ensino para investigar as reações dos professores do Ensino Médio frente às representações e aos procedimentos para a obtenção de números racionais e irracionais entre dois números reais distintos, ou seja, abordando a propriedade da densidade dos números reais. Buscamos elaborar questões que criassem condições mais favoráveis para a apreensão destes conceitos, privilegiando as conversões entre os diferentes registros de representação, bem como tentando propiciar tratamentos das representações em cada registro, tanto no procedimento da média aritmética quanto naquele inspirado na diagonalização de Cantor.

No procedimento da média aritmética, tentamos privilegiar os registros fracionário, decimal e gráfico. No procedimento inspirado na diagonalização de Cantor, apelamos principalmente para os registros de representação decimal e gráfico.

A ausência da articulação entre registros, enfatizando-se apenas os tratamentos no interior de cada um deles, pode impedir a apreensão do objeto, talvez residindo aí algumas das muitas dificuldades encontradas nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

É possível que, privilegiando as conversões para registros dos números racionais e irracionais que possibilitem maior número de tratamentos adequados no seu interior, sejam minimizadas algumas das dificuldades referentes à propriedade da densidade do conjunto dos números reais.

CAPÍTULO 4: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentaremos os princípios da Engenharia Didática que nortearam a metodologia da pesquisa. Descreveremos as sessões, de um modo geral, quanto a dinâmica da aplicação, da resolução e da discussão das questões das atividades. Em seguida exporemos os aspectos acadêmicos e profissionais dos sujeitos da pesquisa. Finalmente, faremos a análise *a priori* da seqüência de ensino, justificando as escolhas e a ordenação das questões das dez atividades, expondo o objetivo e as expectativas de cada uma delas.

PRINCÍPIOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA.

Os procedimentos metodológicos foram baseados na metodologia de pesquisa chamada Engenharia Didática, que segundo Michèle Artigue citado em Machado (1999, p. 198)

[...] esse termo foi ‘cunhado’ para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Esta metodologia de investigação surgiu no início dos anos 80 na área da didática da matemática e possui duas preocupações básicas: relacionar o ensino e a pesquisa, e escolher as realizações didáticas dentro desta metodologia. Quanto ao ensino é necessário definir a ação e os meios para a ação.

A Engenharia Didática desempenha basicamente duas funções:

- 1^a) Uma produção para o ensino baseada em resultados de investigação que usa metodologias externas.
- 2^a) Uma metodologia de investigação específica.

Como metodologia de investigação, a Engenharia Didática é um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em classe, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de seqüências didáticas.

A Engenharia Didática é baseada nos registros de estudo de caso cuja validação é essencialmente interna, baseada na comparação entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*.

Uma perspectiva da Engenharia Didática clássica é considerar o funcionamento de um sistema didático pouco satisfatório, identificar as limitações e determinar condições para um funcionamento mais satisfatório. As restrições são divididas em três dimensões:

- 1ª) Epistemológica, ligada ao saber em jogo.
- 2ª) Cognitiva, de acordo com o público-alvo. Principalmente quanto as concepções dos estudantes, as dificuldades e erros mais freqüentes.
- 3ª) Didática, conforme o funcionamento do sistema de ensino.

Os objetivos desta metodologia podem ser diversos, porém o objetivo principal é o de provocar, de maneira controlada, a evolução das concepções.

A seqüência didática será elaborada à luz dos princípios da Engenharia Didática. Segundo Machado (1999, p.198):

A noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da Matemática com essa dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

Artigue, citado por Machado (1999, p. 199) caracteriza a engenharia didática: “[...] como um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino.”

Esta metodologia é composta por quatro fases com distinção temporal do processo experimental:

1^a) Análises preliminares com a função de apoiar a concepção da engenharia. Considerando o quadro teórico didático e os conhecimentos didáticos sobre o objeto matemático quanto:

- a) a análise epistemológica dos conteúdos contemplados no ensino.
- b) a análise do ensino tradicional.
- c) a análise das concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos.
- d) a análise do campo das limitações onde se situará a efetiva realização didática.
- e) os objetivos específicos da investigação.

2^a) Concepção e análise *a priori* das situações didáticas que orientadas pelas análises preliminares, limita um certo número de variáveis pertinentes ao sistema. Há a tomada de decisão de atuar sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelas limitações, chamadas de variáveis de comando. As variáveis de comando podem ser macro-didáticas: em relação à organização geral da engenharia ou micro-didáticas: em relação à organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma sequência ou de uma fase ou sessão. O objetivo da análise *a priori* é determinar o que controla os comportamentos dos alunos e seus significados a partir das escolhas realizadas. Deve constar cada escolha feita, analisar o desafio da situação para o aluno e prever os comportamentos possíveis.

3^a) Experimentação se dá no contato do pesquisador com os alunos-objeto da investigação. Deve constar o objetivo e condições da realização da pesquisa, aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações, mantendo, se possível, as escolhas feitas nas análises *a priori*, como por exemplo a duração da sessão ou a decisão de haver ou não, intervenção do pesquisador. Se for prevista mais de uma sessão, deve-se fazer uma análise *a posteriori* a cada sessão e comparar com a análise *a priori* para corrigir eventuais problemas.

4^a) Análise *a posteriori* e validação. São considerados nesta fase todos os dados colhidos durante a experimentação e a produção dos alunos em classe ou extraclasse. Às vezes são necessários questionários, entrevistas individuais ou em grupos para

complementar os dados. Assim, confrontando-se as análises *a priori* e *a posteriori* validam-se ou não as hipóteses levantadas no início da engenharia didática.

DESCRIÇÃO GERAL DAS SESSÕES.

Chamamos de sessão, o dia de trabalho. Por atividade chamamos o conjunto de questões e sua respectiva discussão, tanto no interior de cada grupo como a geral.

Houve cinco sessões compostas por duas atividades cada uma. Ao saberem que o trabalho seria realizado em duplas, os participantes se agruparam espontaneamente. Em todas elas dois grupos foram gravados em áudio e contamos com um observador.

A pesquisadora e o observador estabeleceram um código de numeração para os grupos a fim de que pudessem se referir às observações feitas por eles, tanto no momento da resolução como no da discussão, para ter elementos de análise quanto a coerência dos comentários deles frente a uma mesma questão, comparando os registros na língua natural com seu discurso.

A ação do observador se restringiu a anotar os comentários sem conversar com os participantes. A pesquisadora observou, anotando como o observador, mas também fez intervenções quando requisitada, alguns destes diálogos estão transcritos nas análises de cada uma das atividades.

Durante as sessões foram respondidas as questões da primeira atividade e ao seu término foi entregue à pesquisadora, um protocolo por grupo, e iniciada a resolução das questões da segunda atividade do dia, ao seu término também foi recolhido um protocolo por grupo. No momento de entrega do protocolo do último grupo, aquele que levou mais tempo, era iniciada a discussão ocorrendo também as institucionalizações locais de cada uma das atividades. O tempo médio entre o término do primeiro e último grupo foi de dez minutos. Destacamos, além disso, que a primeira sessão iniciou com o preenchimento do questionário do perfil acadêmico e profissional e a última teve o preenchimento do questionário de avaliação da sequência de ensino.

OS SUJEITOS.

Os sujeitos da pesquisa eram professores participantes do PEC – Projeto de Educação Continuada. Este projeto visa capacitar o professor da rede pública por meio de palestras, aulas e oficinas distribuídas em 80 horas. A seqüência de ensino foi aplicada a onze professores do Ensino Médio, como oficinas pertencentes a este projeto, numa Instituição de Ensino na grande São Paulo.

No início da primeira sessão, os sujeitos responderam a um questionário cujo objetivo era obter informações sobre o público-alvo, quanto ao seu perfil acadêmico e profissional, como por exemplo se é professor somente do Ensino Médio ou também do Ensino Fundamental, e se é exclusivo da rede pública ou também da rede privada. Outra informação obtida por meio deste questionário, é a respeito de sua vida acadêmica: se fez uma graduação ou mais e se fez ou está fazendo alguma especialização.

Com este questionário obtivemos os seguintes dados: todos os onze professores trabalham somente na rede pública. Dentre eles, seis professores ensinam, além de Matemática, também Física. Atualmente sete professores, além de lecionarem no Ensino Médio, também trabalham no Ensino Fundamental. Em média, estes professores têm 6 anos de experiência.

Quanto à formação acadêmica, nove professores têm graduação em Matemática e os outros dois, um em Ciências e em Pedagogia e o outro em Química. Dois professores que têm graduação em Matemática, possuem também especialização, um em Metodologia e Didática no Ensino Superior e o outro em Análise de Sistemas.

Destacamos que estes professores estavam em busca de aperfeiçoamento e que o ambiente de participação ativa e interação, entre os participantes, e entre eles e a pesquisadora, pareceu propiciar mais descontração no sentido de ser permitido errar e possibilitar uma abertura para discutir questões sem ter o receio de serem avaliados. Foram nítidos, de um modo geral, a motivação e o empenho durante a resolução das questões em todas as atividades. Os trabalhos fluíram num clima de concentração e seriedade num ambiente sem tensão.

ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES

A sequência de ensino foi dividida em dez atividades. Cada atividade é composta por um conjunto de questões e sua respectiva discussão, tanto no interior de cada grupo como a geral.

Para explorar os critérios de classificação dos números racionais e irracionais bem como a densidade do conjunto dos números reais, descrevemos, em cada uma das atividades, o objetivo específico, as justificativas de escolha dos números e dos registros de representação semiótica e a indicação de alguns procedimentos. Além disso, também exporemos as expectativas em relação às possíveis respostas.

Segue a análise das questões de cada uma das atividades.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE I

As questões foram elaboradas com base na pesquisa de Iglioni e Silva (2001). Elas foram escolhidas com o objetivo de chamar à atenção quanto a classificação dos números reais em racionais e irracionais e também para iniciar um trabalho a respeito da noção de densidade do conjunto dos números reais. A intenção foi a de um “aquecimento” e uma apresentação geral do conteúdo que pretendemos contemplar com a sequência.

Na primeira questão, os participantes deverão classificar os números reais em racionais ou irracionais.

A frase: “Utilize todos os espaços em branco para os rascunhos que forem necessários” foi colocada para que o entrevistado se sentisse à vontade, para escrever algo que fosse necessário, para que ele tomasse a decisão de ser racional ou irracional o número dado.

Se o sujeito utilizar a conversão do registro fracionário para o registro decimal ou vice-versa, será mais fácil analisar esta evidência pela análise da utilização do rascunho.

Os seguintes quadros contêm, cada um, as questões relativas à atividade I.

1ª questão

Indique com um X se o número abaixo é racional (Q) ou irracional (R-Q):

Número	Racional	Irracional
0		
$\sqrt{5}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{3}$		
0,333...3		
4,21222324...		
4,212121...		
π		
3,1416		
$-\frac{3}{7}$		
$\frac{\pi}{10}$		
e		
2,7182		
1,999...		
2		
$\sqrt{9}$		
$\frac{\sqrt{3}}{4}$		

A respeito da seleção dos números e suas representações destacamos que foram escolhidos:

O número zero, pois sabe-se historicamente que houve dificuldade dele atingir o status de número.

A $\sqrt{5}$ como número irracional pois é menos enfatizado que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ no Ensino Médio.

As representações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ pois referem-se a números racionais escritos no registro fracionário, e que se convertidos para o registro decimal terão respectivamente uma representação finita e infinita, e também para verificar se existe uma identificação entre infinitas casas decimais e irracionalidade.

O número racional representado por 0,333...3 , escrito no registro decimal finito para se verificar o efeito das reticências como possível associação com um número irracional.

O número representado por 4,21222324... para investigar as conjecturas possíveis: será racional se houver período a partir de alguma casa não representada. Será irracional se não houver período.

Os números representados por 4,212121... e 1,999... , no registro decimal infinito, para investigar a reação dos sujeitos diante da repetição de alguns algarismos. Poderá ser classificado como racional se a representação decimal for interpretada como periódica. Será irracional se não valer o acordo tácito da repetição de algarismos. Estas representações também têm o objetivo de verificar o efeito das reticências, que podem ser interpretadas como sendo referentes a números irracionais. Talvez alguns convertam para sua representação fracionária (determinando sua geratriz) considerando-os racionais.

O número representado por π que é visto como um dos representantes-padrão dos números irracionais.

O número racional representado por 3,1416 pode ser inadequadamente identificado a π talvez pelo uso de aproximações feito pela calculadora.

O número racional representado por $-\frac{3}{7}$, com o objetivo de verificar a possibilidade de associação do número negativo à irracionalidade.

Os números irracionais representados por $\frac{\pi}{10}$ e $\frac{\sqrt{3}}{4}$ para verificar se ocorre ou não a associação da representação fracionária com número racional sem prestar à atenção na natureza do numerador e do denominador, ou seja, no caso do numerador ser irracional.

O número representado por **e** por ser outro representante-padrão de números irracionais.

O número racional representado por 2,7182 que pode ser identificado inadequadamente ao número **e** pelo uso de aproximação feito pelas calculadoras.

O número racional representado por 2 por se tratar de uma outra representação do número 1,999..., para verificar a classificação de um mesmo número escrito por meio de duas representações diferentes.

O número inteiro representado por 3 escrito na representação $\sqrt{9}$ para investigar o efeito do radical.

Nesta questão, as alterações feitas por nós em relação à pesquisa Iglioni (2001) foram: inserimos os números $\sqrt{9}$ e $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e alteramos a $\sqrt{3}$ para $\sqrt{5}$.

2ª questão) Explique o critério que você usou para tomar a decisão na questão 1.

Para responder à primeira questão, o sujeito baseou-se em critérios para a decisão de um número ser racional ou irracional, assim terá oportunidade de refletir a respeito destes critérios na segunda questão, que propiciará uma melhor análise quanto às noções de número racional e irracional.

Usaremos a classificação de critério correto se for especificado o número racional como sendo possível colocá-lo no registro de representação fracionária, sendo numerador e denominador inteiros com o denominador diferente de zero, tanto na língua natural como por meio de símbolos matemáticos, ou ainda, se forem utilizadas as duas linguagens. Incorreto se o conteúdo da resposta estiver completamente diferente

do correto. Ou incompleto se por exemplo estiver faltando a especificação da natureza do numerador e do denominador. Para número irracional será usado o critério do número não ser racional.

Após a reflexão e escrita a respeito dos critérios, poderá acontecer que alguns dos participantes retornem à primeira questão alterando sua classificação. Pretendemos analisar a coerência da classificação com o critério explicitado.

Na terceira questão, já se inicia a abordagem da densidade dos números reais.

3ª questão) Existe um número real compreendido entre os números abaixo?
No caso afirmativo escreva algum(ns).

Números	Não	Sim	Qual(is)
1) Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$			
2) Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$			
3) Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...			
4) Entre 0,999... e 1			

Em relação aos quatro pares de representações, introduzimos a numeração para facilitar a análise.

1) Entre as representações $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$ são esperadas quatro possibilidades de respostas:

a) Não há números entre eles, provavelmente se houver a transferência da ordem dos números naturais.

b) A representação $\frac{3,5}{11}$. Esta resposta pode significar que talvez não esteja claro o registro fracionário de um número racional, como razão de dois números inteiros.

c) Um número entre $0,\overline{27}^4$ e $0,\overline{36}$ escrito na representação decimal, se for realizada a conversão do registro de representação fracionária para o registro decimal, como sugere Duval, para assim determinar pelo menos um número entre eles.

d) A representação $\frac{7}{22}$, se o participante não optar pela conversão de registros, e realizar um tratamento nas frações e assim obter um número entre eles:

$$\frac{3}{11} = \frac{6}{22} \text{ e } \frac{4}{11} = \frac{8}{22}.$$

2) As representações 2,13 e $\frac{214}{100}$ foram escritas no registro decimal e no fracionário para analisar a possível realização de conversão. Ou converte-se o 2,13 para uma de suas representações fracionárias como $\frac{213}{100}$, ou $\frac{214}{100}$ converte-se para o registro decimal finito 2,14. Assim, ambos os números estarão no mesmo registro de representação e poderão ser comparados para obter entre eles, por exemplo o número 2,135, em sua representação decimal finita ou $\frac{2135}{1000}$ na representação fracionária.

3) O número $\frac{1}{3} = 0,333...$ foi escrito em dois registros diferentes, um fracionário e outro decimal infinito, para avaliar o fato de que ambos são representações do mesmo número, e portanto não há números entre eles.

Se o sujeito converter $\frac{1}{3}$ para 0,333 ou identificar o segundo registro 0,333... com 0,333, haverá possibilidade de encontrar números entre eles.

4) Em relação às representações 0,999... e 1, como já foi analisado em pesquisas na França, em Israel e em São Paulo, citadas anteriormente, é possível que os participantes expressem que estas não são representações do mesmo número, encontrando 0,9999 ou 0,9999... entre eles. Se isto ocorrer, no momento da plenária do

⁴ A representação $0,\overline{27}$ indica que os algarismos sob a barra horizontal se repetem indefinidamente, caracterizando uma dízima periódica.

fechamento da atividade, poderá haver polêmica e serão necessárias tentativas de argumentos.

Por exemplo, 0,999... como a soma dos termos da sequência:

$$(a_n) = (0,9; 0,09; 0,009; \dots) = \left(\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \dots \right), \text{ onde o primeiro termo é } a_1 = \frac{9}{10}, \text{ a razão}$$

$$\text{é } q = \frac{1}{10} \text{ e a soma dos termos é dada por: } S_n = \frac{a_1}{1-q}, \text{ então } S_n = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Outro argumento, chamando 0,999... de x , temos $x = 0,999...$, e multiplicando por dez: $10.x = 9,999... \Rightarrow 10.x = 9 + 0,999... \Rightarrow 10.x = 9 + x \Rightarrow 9.x = 9 \Rightarrow x = 1$, então $0,999... = 1$.

Um terceiro argumento poderá ser utilizado, se $\frac{1}{3} = 0,333...$ então multiplicando por 3: $3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0,333... \Rightarrow 1 = 0,999...$

Destacamos que nem sempre é possível operar com representações decimais infinitas, pois podem não ser conhecidos todos os seus algarismos. Neste caso, como 0,333... trata-se de uma dízima periódica, e todos os seus algarismos são iguais a '3', fez-se a multiplicação de 3 por 3 obtendo-se 9. Extrapolando-se esta multiplicação para todas as casas decimais obteve-se: $3 \times 0,333... = 0,999...$. Tal procedimento pode induzir que sempre é possível operar com números na sua representação decimal infinita.

Nesta questão, as alterações feitas por nós em relação à pesquisa Igliori (2001) foram: Inserimos o item 4) 0,999... e 1 e alteramos a representação 2,14 para $\frac{214}{100}$.

4ª questão) Considere o conjunto $J = \{ x \in \mathbb{Q} / 0 < x \leq \sqrt{2} \}$

(Ou seja, o conjunto J formado pelos números racionais compreendidos entre zero e raiz de dois, inclusive)

a) J tem um último elemento?

(Isto é, o elemento que vem exatamente antes de $\sqrt{2}$?)

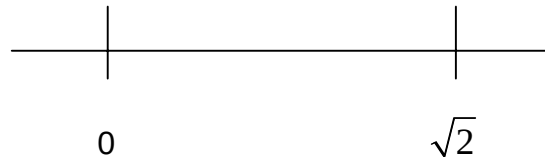
Sim	Não
☐	☐

b) Se sim, qual é esse elemento? Se não, por quê?

A quarta questão, que está apresentada da mesma maneira que na pesquisa de Igliori e Silva (2001), tem como objetivo explorar a densidade em P . Pretende-se provocar discussões a respeito da existência ou não do último número e também analisar a interpretação dos sujeitos quanto ao sinal $\leq$, como eles vêem $0 < x \leq \sqrt{2}$?

O enunciado, que pode apresentar dificuldade, é dado nas representações simbólica e da língua natural, a fim de evitar que haja impedimento da interpretação dos símbolos prejudicando nosso foco, que é a densidade dos números reais, além de chamar à atenção de que J é um conjunto de números racionais já que se espera que o entrevistado saiba que $\sqrt{2}$ é um número irracional, o que justifica a sua escolha. No item a) entre parênteses explicamos a pergunta no registro da língua natural, novamente para ajudar na interpretação do que se pede. É possível que haja discussão a respeito da $\sqrt{2}$ ser racional ou irracional, pertencer ou não ao conjunto J .

Espera-se também a possibilidade de que o entrevistado realize uma conversão do registro numérico para o registro gráfico, ou seja, a representação dos números 0 e $\sqrt{2}$ na reta real, como tentativa de auxílio na visualização dos pontos da reta.



Pelo item a), pretende-se avaliar qual a concepção da reta real, ou seja, mais especificamente o reconhecimento da propriedade de densidade da reta. É possível que algumas respostas sejam favoráveis a J ter um último número porém seja difícil encontrá-lo, pois talvez saibam que o conjunto dos números racionais é denso em P (isto é, entre dois números reais existem infinitos números racionais).

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE II

As questões da atividade II foram elaboradas para atingir mais pontualmente a noção de densidade, escrita no registro da língua natural. São catorze afirmações de âmbito geral para serem julgadas em verdadeiras ou falsas. Pede-se também para comentar o critério usado e será neste momento que a análise poderá ser mais rica. São cinco questões verdadeiras e nove falsas para fugir da metade verdadeira e metade falsa.

Foram contempladas as seguintes situações para discussão: entre dois números racionais existem infinitos números racionais e infinitos irracionais, entre dois números irracionais existem infinitos números racionais e infinitos irracionais e também entre um número racional (ou irracional) e um número irracional (ou racional) existem infinitos números racionais e infinitos irracionais. Em todas as afirmações, em que consta 'entre dois números', referem-se a dois números distintos.

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F) e comente o critério utilizado.

1. () Entre dois números racionais existe um único número racional.
2. () Entre dois números racionais não existe número irracional.
3. () Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional.
4. () Entre dois números irracionais existe um número racional.
5. () Entre dois números irracionais não existe número irracional.
6. () Entre dois números irracionais não existe número racional.
7. () Entre um número racional e um irracional existe número racional.
8. () Entre um número irracional e um número racional não existe número racional.
9. () Entre um número irracional e um número racional existe um único número irracional.
10. () Entre um número racional e um número irracional não existe número irracional.
11. () Entre dois números reais não existe número irracional.
12. () Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.
13. () Entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.
14. () Entre dois números reais existem infinitos números racionais.

Se algum sujeito supuser que os dois números do enunciado são iguais em 'entre dois números', haverá uma intervenção para complementar o enunciado explicando que trata-se de dois números distintos.

Abordando certas palavras e expressões como 'existem infinitos', 'não existe', 'existe um único', 'existe exatamente um' e 'existe um' pretende-se verificar a interpretação delas. No momento da discussão, frases com sentidos diferentes como por exemplo 'existe um' e 'existe um único' devem ser enfatizadas.

Niven (1984) a partir da página 38 aborda as diversas maneiras de enunciar proposições e discute suas recíprocas. Segundo ele: "[...] uma afirmação e sua recíproca são duas coisas diferentes. Uma pode ser verdadeira e a outra, falsa; ambas podem ser verdadeiras ou ambas podem ser falsas, dependendo das circunstâncias." (Niven, 1984, p.43). Nesse sentido procuramos formular questões que exploram várias situações envolvendo números racionais e irracionais. Abordamos a mesma pergunta em questões distintas de maneiras diferentes, onde uma proposição direta é falsa e sua recíproca nem sempre. Contemplamos também a situação onde uma proposição é verdadeira mas a sua recíproca não é necessariamente verdadeira também.

Este é o primeiro momento em que a densidade é abordada explicitamente e tem como objetivo chamar à atenção para a questão principal que entre dois números reais distintos existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Pretendemos repetir estas mesmas questões, após dois meses do término da última, para discutirmos os conceitos envolvidos e investigarmos as concepções após o fim da seqüência, principalmente quanto aos argumentos.

É possível que no decorrer da atividade, alguma questão dê subsídios para uma outra questão anteriormente respondida, modificando-a.

Com esta atividade de verdadeiro ou falso pretendemos abrir discussões, a respeito das várias situações, que permanecerão em todas as tarefas da seqüência daqui por diante.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE III

As questões desta atividade propõem um trabalho específico quanto a apreensão da noção de densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais. Começamos escolhendo dois números “próximos”, ou seja, menos de dois décimos de distância e escritos no registro de representação fracionária com denominadores diferentes.

Dados dois números racionais: $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

1. Ache a média aritmética entre eles.
 2. Este número é racional ou irracional?
 3. Represente os três números na reta.
 4. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 1 ?
 5. Este número (obtido na questão nº 4) é racional ou irracional?
 6. Represente na reta estes quatro números.
 7. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 4 ?
 8. Este número (obtido na questão nº 7) é racional ou irracional?
 9. Represente na reta estes cinco números.
 10. É possível achar a média entre este número (obtido na questão nº 7) e $\frac{3}{5}$?
 11. O processo de tirar a média repetidamente tem fim? Por quê?
 12. Ache a média entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{3}{4}$.
 13. Represente estes três números na reta.
 14. Você pode repetir este processo utilizado da questão nº 1 até a questão nº 7, partindo do número obtido na questão nº 12 e o $\frac{3}{4}$?
- Caso seja possível, represente alguns números na reta.
15. Escolha agora dois números racionais diferentes destes todos, e responda se entre eles existe algum outro número racional? Quantos?
 16. Se você tivesse escolhido outros dois números diferentes daqueles da questão anterior, o resultado seria o mesmo? Por quê?

A escolha dos denominadores diferentes talvez dificulte a comparação das representações no registro fracionário, tal como foram dados, possibilitando a

realização de uma conversão de registros, de ambos os números, para o registro decimal. Se algum sujeito escolher trabalhar no registro fracionário, é provável que reduza ambas as frações ao mesmo denominador para poder compará-las.

Para atingir o objetivo, o processo escolhido foi a utilização da média aritmética, por ser um procedimento familiar trabalhado na Educação Básica. Para tanto, a expectativa é a de que $\frac{3}{5}$ seja convertido para 0,6 e $\frac{3}{4}$ seja convertido para 0,75; e assim seja calculada a média aritmética entre eles. No entanto, é possível que alguns participantes trabalhem no registro fracionário reduzindo as frações a um mesmo denominador.

Num primeiro momento, o objetivo é perceber que é possível encontrar um número entre dois números racionais dados e observar que este número é também racional, já que no enunciado foi fornecida a informação de que ambos são números racionais. A pergunta a respeito da média obtida ser um número racional ou irracional, além do objetivo de classificá-lo em racional, inicia também uma reflexão para preparação para a próxima atividade que evidenciará a existência de número irracional entre dois números racionais.

O passo seguinte pede a representação dos números na reta, isto é, no registro gráfico. A representação destes três números na reta pode propiciar uma oportunidade a mais para se perceber a existência de números entre dois números racionais. Se o participante esteve trabalhando até agora no registro fracionário, é bem provável que neste momento, efetue a conversão para o registro decimal para assim localizá-los na reta.

As etapas de se calcular a média, de se classificar o número obtido em racional ou irracional e a localização deles serão repetidas três vezes entre $\frac{3}{5}$ e uma das médias, com o objetivo de se chegar à resposta de quantas vezes este processo pode ser repetido. Para que se perceba que este processo pode ser repetido a partir do outro número dado, pede-se uma vez que se calcule a média aritmética entre a primeira média, obtida pelos sujeitos, e $\frac{3}{4}$. É perguntado se este processo pode ser repetido

tanto à esquerda quanto à direita para que a noção de densidade seja mais uma vez explorada.

A expectativa de resposta à pergunta: “O processo de tirar a média repetidamente tem fim? Por quê?” é a de que a maioria perceba que este processo pode ser repetido infinitamente porque o ponto não tem dimensões físicas e sempre será possível encontrar um outro ponto, no caso a média aritmética, entre dois números racionais quaisquer.

A penúltima questão desta atividade pede para que se escolham dois números racionais quaisquer, desde que diferentes de todos os números obtidos anteriormente, e pergunta-se se entre eles existe algum número racional, e no caso afirmativo, quantos? Espera-se que os sujeitos respondam que há infinitos números racionais entre os dois sugeridos por eles.

Quanto à última questão que pede para serem modificados os dois números escolhidos pelos sujeitos na questão anterior, não há uma expectativa específica, trata-se de uma questão investigativa podendo sinalizar a necessidade de mudanças nas próximas atividades (acrescentar, modificar ou alterar questões).

As duas últimas questões têm o intuito de generalizar e fazer o fechamento da atividade, e se possível, chegar à conclusão de que entre dois números racionais distintos existem infinitos números racionais.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE IV

O objetivo desta atividade é discutir a situação de que entre dois números irracionais distintos, existem infinitos números irracionais.

São dados dois números irracionais: 1,232425... e 1,332425..., cuja parte decimal sugere uma seqüência. Estes números não são classificados especificamente como irracionais e diferem apenas em um algarismo, a primeira casa decimal. Estes números foram representados com seis casas decimais para haver mais possibilidades de algarismos para serem modificados.

Pretende-se chamar à atenção de que é necessário e suficiente modificar apenas um algarismo na representação de um número para outro, para que se tornem diferentes, permanecendo na mesma categoria de irracionais. Este procedimento intenta sugerir o mesmo processo adiante quando se pede para inserir um número irracional entre eles.

Seja um número cuja representação decimal não periódica é 1,232425... Compare-o com o número cuja representação é 1,332425... que difere do primeiro apenas em um algarismo.

1. O segundo número é uma dízima periódica? Por quê?
2. O 2º número é racional ou irracional? E o 1º? Comente sua resposta.
3. O segundo número é maior ou menor que o primeiro? Ordene-os.
4. Dê a representação decimal de um número irracional entre estes dois números.
5. Ordene estes três números.
6. Dê a representação decimal de um número irracional entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 4.
7. Ordene estes quatro números.
8. Dê a representação decimal de um número irracional entre o número obtido na questão nº 4 e 1,332425...
9. Ordene todos estes cinco números.
10. Ache um número irracional entre os números obtidos nas questões nº 6 e nº 8.
11. Quantos números irracionais diferentes existem entre 1,232425... e 1,332425...? Comente sua resposta.
12. Se você iniciasse escolhendo dois números irracionais quaisquer, seria possível encontrar números irracionais entre eles? Quantos? Por quê?

Segundo Ávila (2001, p. 7): “É fácil produzir números irracionais; basta inventar uma regra de formação que não permita aparecer período, por exemplo: 0,20200200020000...; 0,35355355535555... .”

O primeiro número é apresentado como decimal não periódico e é perguntado se o segundo número é ou não uma dízima periódica e por quê? Com este primeiro item temos o intuito de chamar à atenção para o que é dízima periódica e o que não o é, para que a seguir seja retomado o critério de classificação de números racionais e irracionais.

É pedido então que os dois números sejam classificados e ordenados para que se prepare o ambiente para a obtenção de um número irracional entre eles. Obtido este número irracional pede-se novamente para que sejam ordenados. Com a ordenação tenta-se evidenciar a possibilidade da existência de números entre dois números dados. Espera-se que a prática da ordenação facilite a percepção de que se pode modificar vários algarismos, um de cada vez, no número à esquerda e gerar números diferentes deste primeiro, mas que seja ainda menor que o segundo. A ordenação neste caso tem a mesma função da representação na reta real realizada nas questões da atividade anterior. São esperadas quatro possibilidades de respostas quanto a ordenação dos números: entre pontos e vírgulas, entre sinais de menor ou maior ou ainda, a localização deles na reta real.

Pela impossibilidade de se tirar a média aritmética entre dois números irracionais na representação decimal, que é infinita, optamos em encontrar um número irracional inserido entre dois números irracionais, modificando no mínimo um algarismo de uma dessas representações.

Se o participante não perceber o processo sugerido no enunciado (a troca de um algarismo), talvez seja necessário fazer uma intervenção no caso dos participantes apresentarem dificuldades neste ponto (questão 4), o que impossibilitaria a continuação da atividade.

Realiza-se este processo, descrito acima, quatro vezes, primeiro entre os dois números dados inicialmente, depois entre o 1,232425... e o primeiro obtido, a seguir outro irracional entre o primeiro obtido e 1,332425... e finalmente entre os dois últimos obtidos.

Ao ser perguntado a respeito de quantos números irracionais existem entre os dois números irracionais dados, temos o objetivo de iniciar o processo de generalização, para possibilitar a chegada à conclusão de que existem infinitos números irracionais entre os dois números irracionais dados.

Cada um dos grupos poderá encontrar três ou quatro números irracionais diferentes dos iniciais (o número da questão 10 poderá coincidir com o da questão 4), e estas possibilidades podem indicar que não existem apenas estes números

encontrados. Isto poderá ser usado como argumento para responder quantos números irracionais são possíveis entre os dois números dados.

Na última questão, é perguntado se os números iniciais fossem outros, quantos números irracionais seria possível encontrar e porquê. Espera-se que os participantes percebam que há infinitos números irracionais entre dois irracionais distintos, e para tanto, que basta modificar os algarismos de suas representações decimais, que por serem infinitas, possibilitam, teoricamente, infinitas trocas dos mesmos.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE V

Esta atividade contém 11 questões, sendo que as duas primeiras abordam novamente os critérios de números racionais e irracionais, porém somente no registro de representação decimal. Estas questões têm o objetivo de chamar à atenção quanto a relação entre periodicidade ou não da representação e a racionalidade ou não do número, preparando o sujeito para as questões que se seguem pois pode haver alguma dificuldade por se tratarem de representações decimais infinitas que são pouco usuais.

Os números que serão inicialmente trabalhados na terceira questão são os mesmos que já foram utilizados nas questões da atividade anterior, na representação decimal não periódica. Deste modo evitamos sugerir somente os tradicionais: e , π e $\sqrt{2}$.

Porém na atividade IV, foi abordado o caso de haver infinitos números irracionais entre dois irracionais e nesta atividade será proposta a obtenção de números racionais entre dois irracionais como um principal objetivo.

Mantendo-se os mesmos números já utilizados, pode facilitar a inserção de números racionais num intervalo de reta onde foram introduzidos números irracionais anteriormente. Os números que deverão ser inseridos, a menos de dízimas periódicas, não deverão ser decimais infinitos, espera-se que nesta questão, a maioria das representações de números racionais seja de decimais finitos por serem mais usualmente trabalhados na Educação Básica.

1. Identifique os seguintes números.

- a) 2,3145 -----
- b) 3,5724...-----
- c) 2,666... -----
- d) 0,9802...-----

2. Quais os critérios para a representação decimal utilizados na questão anterior?

3. Seja um número cuja representação decimal não periódica é 1,232425... Compare-o com o número cuja representação é 1,332425... que difere do primeiro apenas em um algarismo.

- a) Escreva um número racional entre 1,232425... e 1,332425...? Ordene estes três números.
- b) Este número tem representação decimal finita ou infinita?

4. Você é capaz de achar outro número entre os dois números fornecidos na questão nº 3, escritos numa representação decimal diferente daquela sugerida acima? (Ou seja, se você achou um número racional com representação finita, ache agora um número racional com representação decimal infinita, ou vice-versa).

5. Dê as representações fracionárias dos números obtidos nas questões nº 3a) e nº 4.

6. Ache um número racional compreendido entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 3a).

7. Ache um número racional compreendido entre o número obtido na questão nº 3a) e 1,332425... .

8. Ache um número racional compreendido entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 4.

9. Ache um número racional compreendido entre o número obtido na questão nº 4 e 1,332425... .

10. Ordene todos os números que apareceram até agora.

11. Entre os números 1,232425... e 1,332425..., quantos números racionais diferentes existem?
Comente sua resposta.

Já na obtenção do primeiro número racional entre os dois dados, pede-se para ordená-los, o sujeito pode utilizar as desigualdades ou usar a representação na reta real.

Para discutir que há duas possibilidades de representações decimais para os números racionais, a representação finita ou a representação infinita, pergunta-se em qual dessas duas representações o número obtido foi escrito e pede-se para expressar um segundo número na outra representação.

Para tentar explorar as possibilidades de representação do número racional pede-se para realizar uma conversão, dos números racionais obtidos pelos sujeitos, do registro de representação decimal para o registro fracionário.

O procedimento sugerido nesta atividade é semelhante ao desenvolvido na atividade anterior no sentido de troca de Algarismos, ou a retirada das reticências. Este procedimento escolhido ocasiona uma ampliação do objetivo inicial recaindo no caso de número racional entre um número irracional e outro racional.

A questão seguinte pede para se achar outro número racional, desta vez compreendido entre o número irracional representado por $1,232425\dots$ e o número racional obtido logo no início na questão 3a. É possível que a partir da questão 4 seja sugerida uma maior quantidade de números em suas representações infinitas e deste modo, as representações decimais finitas e infinitas aparecerão mais ou menos na mesma proporção. Este processo será repetido quatro vezes, para tentar aumentar a probabilidade de apreensão da noção de densidade, tanto em direção ao número do extremo esquerdo (duas vezes) como para o direito (duas vezes).

Em seguida será pedida a ordenação de todos os números que apareceram até o momento para que o participante se organize a respeito destes números para a próxima questão. Acreditamos serem oito números diferentes obtidos até esta fase, mas consideramos a possibilidade de ocorrer duas vezes a escolha de um número já obtido anteriormente.

Na última questão, retomando os dois números irracionais fornecidos inicialmente, perguntam-se quantos números racionais existem entre eles. Pode ser que o sujeito já seja capaz de responder que existem infinitos números neste intervalo e o objetivo começará a ser atingido. Se ele responder que há somente oito números, surgirá uma oportunidade para levantar a questão, e na discussão poderemos lançar mão dos outros resultados dos colegas para começar a questionar as possibilidades de números e com isto ir ao encontro da resposta.

Poderá haver dificuldades com a representação decimal infinita, já que é provável ser pouco discutida no Ensino Básico, e por este motivo será repetido este procedimento nas atividades seguintes.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE VI

Com esta atividade pretendemos discutir a existência de infinitos números irracionais entre dois racionais. Além disso, as questões 1 e 2 têm o objetivo de retomar o processo da média aritmética entre dois números racionais, abordada na atividade III, para introduzir a discussão de que a obtenção de números irracionais neste intervalo não pode ser realizada pelo mesmo procedimento.

Dados dois números racionais $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$:

1. Ambos os números têm representação decimal infinita. Por quê eles são racionais?
2. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.
3. Dado o número $0,222\dots$, qual é a 732ª casa decimal? Este número é racional ou irracional? Por quê?
4. Considere o número não periódico $0,123456789101112\dots$. Este número é racional ou irracional? Por quê?
5. Ordene estes dois números (questões nº 3 e 4).
6. Dê a representação decimal infinita de um número irracional entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$?
7. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 6.
8. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 7.
9. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 8.
10. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 6 e $\frac{4}{3}$.
11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 10 e $\frac{4}{3}$.
12. Ordene todos os números irracionais que apareceram a partir da questão 6.
13. Quantos números irracionais existem entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

Nas questões de 1 a 5, temos dois objetivos, primeiro chamar à atenção de que a representação decimal infinita não é critério de classificação de número racional nem irracional e fornecer uma sugestão de procedimento.

Para tentar evitar que os participantes fiquem com a falsa noção de que só existem números racionais entre dois racionais, queremos também explorar o fato de existirem infinitos números irracionais entre dois racionais e para isso elaboramos 8 questões (da 6ª até a 13ª). Nestas questões também são abordadas as situações de

existência de número irracional entre um racional e outro irracional, e a existência de número irracional entre um número irracional e outro racional.

Nas questões desta atividade são fornecidos dois números racionais com registros diferentes, um deles escrito na representação decimal infinita e o outro na representação fracionária. Foram escolhidos os números $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$ cuja diferença é de uma unidade.

Em relação ao $\frac{4}{3}$, é provável que o entrevistado realize uma conversão do registro fracionário para o decimal. Por ser mais usual no ensino, a conversão para o registro decimal, espera-se que a maioria o escolha, embora haja a possibilidade de algum participante converter o número $0,333\dots$ para o registro fracionário. Se estes dois números estiverem representados no registro decimal infinito poderá facilitar a obtenção de números irracionais entre eles neste registro.

Na primeira questão retoma-se o critério de classificação dos números reais na representação decimal infinita e espera-se que o sujeito justifique que o número $0,333\dots$ é racional por ser periódico e o número $\frac{4}{3}$ é racional por ser representado por meio de uma fração (se for realizada uma conversão, o número $1,333\dots$ também é racional por ser periódico).

A expectativa é de que na segunda questão, em que se pergunta quantos números racionais existem entre os dois racionais dados, o entrevistado, comentando sua resposta, argumente pela média aritmética como um processo sempre possível para obtenção de números racionais entre dois números racionais.

Na terceira questão é fornecido o número $0,222\dots$ e pergunta-se qual é a 732^a casa decimal para avaliarmos se o sujeito identifica a representação como sendo dízima periódica e o classifique como número racional. Ou, não aceite acordos tácitos e o classifique como número irracional se não considerar a representação como sendo periódica. Investigaremos portanto, se há a generalização quanto à repetição dos algarismos na representação decimal.

Pretendemos explorar a questão de que entre dois números racionais existem infinitos irracionais e para tanto, o procedimento do cálculo da média aritmética não se aplica, este ponto é crucial na construção dos números reais. Pelo fato de não podermos operar com os números irracionais escritos na representação decimal, torna-se mais difícil a obtenção de números irracionais num intervalo determinado. Com essa finalidade, elaboramos a questão 4 como sugestão de um procedimento (as casas decimais são compostas por algarismos formando uma seqüência) para a obtenção de números irracionais entre dois racionais, a partir da questão 6.

O participante poderá ou não seguir a nossa sugestão de “seqüência” de algarismos de uma representação decimal de um número irracional 0,123456789101112..., não periódico. Se o sujeito seguir nossa sugestão, partirá de uma das duas representações, fornecidas no enunciado, e trocará um ou mais algarismos desta, como por exemplo 0,345... . Se não, deve sugerir um número entre eles, como por exemplo 0,425... . Em ambas situações seria necessário explicitar que a representação escolhida é não periódica. Também é possível que o participante sugira uma representação sem que seus algarismos formem uma seqüência como em 0,372..., não periódico.

Em seguida, é pedido para que se ordenem os números 0,222... e 0,123456789101112... (não periódico), com o objetivo de perceber que se obteve um número irracional menor do que o número racional fornecido na questão anterior. É possível que alguns sujeitos os representem na reta real.

Poderá haver a necessidade de intervenções na questão 6. Por exemplo, poderá ocorrer a discussão de que a ação de modificar um algarismo “3” do número 0,333... não torna o novo número irracional, nem mesmo com a mudança de um número finito de algarismos, são obtidos números irracionais. É necessário que o sujeito explicita que com a mudança de casas decimais torna a representação não periódica, isto é, o participante deverá colocar a observação, ao lado do novo número, de que nas reticências de sua representação não há período.

Na atividade anterior foi explorada a propriedade de que entre um número irracional e um número racional há números racionais. Nesta atividade, a partir da sexta questão será explorado o fato de que entre um número racional e um número irracional existem números irracionais, propiciando então um processo que tem como objetivo chegar à conclusão de que entre dois números racionais existem infinitos irracionais.

Nesta etapa, a partir da questão 6, a expectativa é de que o participante troque algarismos para gerar números irracionais diferentes, por exemplo, a representação do número racional 0,333... pode sofrer modificações a partir da segunda casa decimal para se obter um outro número como o 0,3456789101112... (não periódico), já que os critérios de classificação foram discutidos e institucionalizados nas questões das atividades anteriores.

Como foi previsto, haverá intervenção se os sujeitos não perceberem que basta eliminar a periodicidade, trocando algarismos e indicando com as reticências que o número tem representação decimal infinita, e ainda que nos algarismos ocultos (aqueles que são representados pelas reticências) não há periodicidade.

Nas questões 7, 8 e 9, pede-se para serem encontrados outros números irracionais, primeiro entre o racional 0,333... e o número irracional obtido na questão 6, a seguir pede-se um número irracional entre o 0,333... e o número irracional obtido na questão 7 e depois um número irracional entre 0,333... e o número irracional obtido na questão 8.

A partir do momento da obtenção do primeiro número irracional na questão 6, trata-se de interpolar um segundo número irracional, porém agora entre um número racional e um irracional. Esta situação será explorada nas questões de 7 a 9.

Em relação às questões 10 e 11, é pedido que se encontrem números irracionais, primeiro entre o número irracional obtido pelo sujeito na questão 6 e $\frac{4}{3}$ e a seguir um número irracional entre este número, obtido na questão 10, e $\frac{4}{3}$.

Pelo fato de serem pedidos quatro números irracionais entre 0,333... e o irracional obtido anteriormente, e depois pedido que se encontrem dois números irracionais entre

o primeiro irracional encontrado e $\frac{4}{3}$, e entre este irracional obtido na questão anterior e $\frac{4}{3}$, o participante encontrará seis números irracionais diferentes. Na questão 12 é pedido que se ordenem estes números, é possível que alguns participantes não utilizem nem ponto e vírgula nem as relações de maior ou menor e sim os representem na reta real. É provável que a localização dos números na reta real ou a ordenação dos números obtidos, auxilie na compreensão da noção de densidade.

Este procedimento de se achar um número entre dois números dados, e depois encontrar outro número entre o obtido pelo entrevistado e um dos números dados inicialmente, tem o objetivo de propiciar a apreensão da noção de densidade do conjunto dos números reais, já que em todos os casos até então, é enfatizado o fato de que sempre é possível, por um método ou outro, encontrar um terceiro número compreendido entre dois números dados.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE VII

Esta atividade contém questões semelhantes às da anterior e outras semelhantes às da atividade III. Uma grande diferença é o fato de que os dois números fornecidos são mais “próximos” do que aqueles da anterior. Por mais que as duas atividades se assemelhem, esta nos parece necessária, já que não basta uma discussão ou um momento de institucionalização para que haja a apreensão de um objeto matemático.

Nas questões da atividade anterior, os números racionais e irracionais a serem obtidos estavam entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$, que têm representação decimal infinita, e nesta, os números racionais e irracionais deverão estar compreendidos entre $1,333$ e $\frac{4}{3}$, um com representação decimal finita e o outro infinita. Portanto com a “aproximação” destes números na reta real, diminuindo-se a distância entre eles, pretende-se investigar a concepção da noção de densidade, uma vez que, por mais que se aproximem os números sempre haverá infinitos números entre eles.

Dados dois números racionais $1,333$ e $\frac{4}{3}$:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.
2. Ache um número racional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 1.
3. Ache um número racional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 2.
4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{4}{3}$.
5. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 4 e $\frac{4}{3}$.
6. Represente na reta todos os números que apareceram até aqui.
7. Quantos números racionais existem entre $1,333$ e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.
8. Existe um número irracional entre $1,333$ e $\frac{4}{3}$? Se sim, exemplifique.
9. Ache um número irracional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 8.
10. Ache um número irracional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 9.
11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e $\frac{4}{3}$.
12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e $\frac{4}{3}$.
13. Ordene todos os números que apareceram até agora.
14. Quanto números irracionais existem entre $1,333$ e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

Para poder comparar estes dois números é necessária a realização de conversão de registros, a expectativa é a de que o registro fracionário $\frac{4}{3}$ seja convertido para o registro decimal infinito $1,333...$. A conversão no sentido inverso parece-nos pouco provável, apesar de possível. A partir da conversão para o registro decimal teremos oportunidade de avaliar se os sujeitos fazem a associação destas representações considerando-as como sendo de um mesmo número, como preconiza Duval.

Nas questões de 1 a 5 são pedidos números racionais entre 1,333 e $\frac{4}{3}$. Para tanto se os sujeitos sugerirem na questão 1, uma representação decimal finita, é esperada a utilização da média aritmética entre eles nas questões 2 e 3, visto que já foi sugerido e trabalhado na atividade III. Este procedimento será repetido quatro vezes pois a partir da obtenção do primeiro número, é solicitada a obtenção de outro número racional compreendido entre 1,333 e este número conseguido anteriormente. Novamente um número racional entre 1,333 e este que acaba de ser obtido. Em seguida é pedido que se encontre um número racional entre o primeiro racional descoberto e $\frac{4}{3}$, e assim mais um racional entre este último e $\frac{4}{3}$.

Se os sujeitos sugerirem na questão 1 um número racional na representação decimal infinita e converterem $\frac{4}{3}$ para o registro decimal, poderão utilizar o procedimento sugerido de troca de algarismos, para obterem números racionais entre eles, nas questões de 2 a 5.

Na questão 6 pede-se para representar estes números na reta e na questão seguinte espera-se que os participantes respondam que há infinitos números racionais entre dois números racionais.

A obtenção de números irracionais, entre dois números, será solicitada nas questões 8 a 12. As perguntas para se encontrarem números irracionais entre os números dados, foram elaboradas da mesma maneira daquelas para a obtenção de números racionais, primeiro entre os dois números iniciais, depois entre o 1,333 e o obtido anteriormente e a seguir entre 1,333 e este encontrado por último. Continuando, é pedido um número irracional entre o primeiro obtido e $\frac{4}{3}$ e em seguida outro irracional entre este último e $\frac{4}{3}$.

Nestas questões, além de ser abordada a situação de que entre dois números racionais existe número irracional, também contemplaram-se as seguintes situações: números irracionais entre um número racional e outro irracional, e também números irracionais entre um número irracional e outro racional.

É pedido que se ordenem estes números e esperamos que os sujeitos utilizem os sinais de maior ou menor ou os representem na reta real.

É possível a utilização, pelos sujeitos, do procedimento sugerido na atividade anterior, por exemplo, um número irracional compreendido entre 1,333 e 1,333... poderia ser o **1,333**01234567891011... ou **1,333**1234567891011... , ambos não periódicos.

Para que sejam escritos números racionais e irracionais entre 1,333 e 1,333... , o participante deverá representar pelo menos as quatro primeiras casas decimais, já que as três primeiras e o inteiro serão necessariamente iguais a 1,333.

Esperamos que os sujeitos concluam que existem infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números racionais distintos.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE VIII

As questões da atividade VIII foram elaboradas com a mesma estrutura das questões da atividade anterior, ou seja, é pedida a obtenção de números racionais e irracionais entre dois números dados tanto em direção à esquerda (ao menor número) quanto para a direita (ao maior número).

Porém os números “muito próximos” escolhidos para esta sessão são um racional e o outro irracional, são eles, o 3,14 e o π .

Além dos objetivos de se obter números racionais e irracionais entre um número racional e outro irracional dados, também pretende-se investigar se os sujeitos associam estas duas representações como sendo a de um mesmo número. Em geral esta falsa associação pode ter sido reforçada com o uso de calculadoras pela limitação do número finito de casas, o que conseqüentemente só permite trabalhar com números racionais.

Dados um número racional 3,14 e um número irracional π , responda:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.
2. Ache um número racional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 1.
3. Ache um número racional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 2.
4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e π .
5. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 4 e π .
6. Ordene todos os números que apareceram até aqui.
7. Quantos números racionais existem entre 3,14 e π ? Comente sua resposta.
8. Existe um número irracional entre 3,14 e π ? Se sim, exemplifique.
9. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 8.
10. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 9.
11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e π .
12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e π .
13. Ordene todos os números que apareceram até agora.
14. Quantos números irracionais existem entre 3,14 e π ? Comente sua resposta.

Provavelmente alguns entrevistados escrevam que ambos os números são iguais e no momento de discussão surgirão novamente os critérios de classificação dos números, abordados desde a atividade I, chamando à atenção para o fato de que π é um número irracional portanto possui infinitas casas decimais não periódicas e o número 3,14, que tem representação decimal finita, pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, isto é, $3,14 = \frac{314}{100}$ é racional. Logo, estes números não podem ser iguais.

É curioso observar que segundo Eves (1995, p.478) o primeiro matemático que provou que o número π é irracional foi Johann Heinrich Lambert (1728–1777) em 1767:

“Ele mostrou que se x é racional, $x \neq 0$, então $\operatorname{tg} x$ não pode ser racional; e como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, segue-se que $\frac{\pi}{4}$ não pode ser racional; logo, o mesmo acontece também com π ”.

Pretendemos com as questões desta atividade encaminhar o entrevistado ao objetivo citado anteriormente, passando pelas etapas de obtenção de números racionais entre dois racionais, e a de números irracionais entre dois irracionais, retomando assim abordagens já discutidas em atividades anteriores.

Durante a resolução das questões desta atividade também serão contempladas as seguintes situações: a existência de número racional entre um número racional e outro irracional, e de número irracional entre um racional e um irracional.

É pedido para que se ordenem os números podendo-se assim compará-los e fornecer mais subsídios para a compreensão da densidade e se chegar à questão final de quantos números racionais e irracionais existem entre 3,14 e π .

É provável que nesta atividade, haja menos dúvidas e que a maioria responda que há infinitos números racionais e infinitos irracionais entre 3,14 e π porque questões análogas a estas já foram abordadas e os resultados discutidos.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE IX

Nas questões da atividade IX são fornecidos dois números irracionais abordando a existência de números, tanto racionais quanto irracionais, entre eles. Esta atividade engloba e repete os objetivos de duas outras, na atividade IV foi trabalhada a existência de números irracionais entre dois irracionais, e na atividade V o enfoque foi na obtenção de números racionais entre dois irracionais. Também retoma os critérios de classificação de números racionais e irracionais na representação decimal infinita.

Os números dados foram representados com as primeiras onze casas decimais e nas reticências não estão implícitos períodos, são eles: 0,10100100001... e 0,10100100010... . Nas onze primeiras casas decimais de cada representação, o que os diferencia são a 10^a e 11^a casas decimais.

Dados dois números irracionais $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.
2. Existe um número irracional entre eles? Se sim, exemplifique.
3. Se estes números são irracionais, pode haver repetições de algarismos após a 12^a casa? E isto significa que a representação possui período?
4. A parte da representação decimal que está “oculta” (substituído por reticências) pode ser a mesma nos dois números? Se isto acontecer, os números serão iguais?
5. Estes números serão racionais ou irracionais?
6. Qual número será maior?
7. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.
8. Quantos números irracionais existem entre eles? Comente sua resposta.

No início desta atividade pergunta-se a respeito da possibilidade de existência de números racionais e irracionais entre eles, pedindo-se exemplos. Para a obtenção destes exemplos, espera-se que os sujeitos modifiquem a 11^a casa decimal na representação dada, podendo ou não explicitar que, no caso de ser irracional, não há período em sua representação. Com as duas primeiras questões, é retomado o critério de classificação de números reais. Estas duas situações já foram abordadas anteriormente em que foi institucionalizado que há infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números irracionais distintos.

Na questão 3 pergunta-se a respeito da possibilidade dos algarismos representados pelas reticências formarem um período, sabendo-se que estes números são irracionais. Novamente pretende-se refletir sobre a infinitude da representação decimal e seu efeito na classificação do número. Pretendemos investigar se há a identificação da representação infinita, mesmo se periódica, com a irracionalidade do número.

Na questão 4 é indagado se os algarismos ‘ocultos’ podiam ser os mesmos nos dois números e no caso dos algarismos ‘ocultos’ serem iguais, pergunta-se se os números são iguais. Se algum sujeito responder que os números são iguais, discutiremos que, apesar de infinitas casas decimais de ambas as representações

serem iguais, os números não são os mesmos pois possuem duas casas decimais diferentes, a 10^a e 11^a .

Em seguida pede-se que classifiquem estes dois números em que as casas decimais não representadas supostamente são iguais. No caso de algum participante classificá-los como racionais, será feita uma discussão local e estabelecido que os números são irracionais e diferentes, mesmo que a parte 'oculta' seja a mesma pois os números originalmente dados são irracionais.

Após uma possível intervenção, não se espera que na questão 6 haja identificação dos números. A expectativa é que os sujeitos respondam que o segundo número é maior que o primeiro, preparando a situação para responderem as duas últimas questões.

No final das questões desta atividade, numa tentativa de generalização, questiona-se a quantidade de números racionais e irracionais entre eles, pedindo-se para fazer um comentário. Por meio dos comentários, poderá se investigar a noção dos sujeitos a respeito da densidade.

Por terem sido trabalhadas questões semelhantes em atividades anteriores, espera-se que os sujeitos possam trabalhar com uma relativa independência. Entretanto, pela proximidade dos números e a semelhança na representação podem propiciar algumas dificuldades na obtenção de números entre eles. Investigaremos a reação deles diante deste fato.

ANÁLISE DAS QUESTÕES – ATIVIDADE X

A última atividade é composta por afirmações para serem julgadas em verdadeiras ou falsas. As questões desta atividade são semelhantes as da segunda porém espera-se um índice de acertos maior, já que deve ter havido muitas discussões ao final de cada uma das atividades.

São catorze questões envolvendo os critérios de classificação dos números reais e a propriedade da densidade, mais especificamente objetiva verificar se há concepções como a identificação de número irracional com a representação decimal

infinita, identificação da representação fracionária como número racional e a possível identificação de número irracional com sua aproximação a um número racional.

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F) e comente sua resposta.

1. () É possível calcular a média aritmética de dois números racionais quaisquer.
2. () Todo número que tem representação decimal infinita é um número irracional.
3. () $\frac{\pi}{2}$ é racional.
4. () Entre um número racional e um número irracional existem números racionais e números irracionais.
5. () Não existe número racional entre dois números irracionais.
6. () Entre dois números racionais não existe nenhum número irracional.
7. () 0,333...3 é irracional.
8. () Não é possível encontrar um número racional entre um número racional e um irracional.
9. () É sempre possível tirar a média de dois números irracionais.
10. () $\sqrt{2}$ e 1,41 representam o mesmo número.
11. () A média de dois números racionais é um número racional.
12. () É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números irracionais.
13. () 1,333... é irracional.
14. () Existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais entre dois números reais

São contempladas todas as situações abordadas nas atividades anteriores. Em cada questão foram deixadas duas linhas para que o participante comente sua resposta e é justamente por meio destas respostas que teremos subsídios para analisar as concepções existentes ao final do trabalho. Esperamos que os argumentos utilizados nesta atividade sejam mais consistentes e revelem um aprimoramento se comparados à segunda.

O objetivo é avaliar a reação quanto às noções trabalhadas anteriormente, isto é, a propriedade da densidade dos números reais, a classificação de um número racional na representação decimal infinita e verificar se há a identificação entre um número irracional e sua aproximação racional. Neste caso, discutiremos que a aproximação é

uma representação limitada mas é necessária em alguns momentos do ensino. Enfatizaremos que um número irracional possui uma representação decimal infinita e não finita.

Na primeira questão esperamos que o sujeito responda que é possível tirar a média aritmética entre dois números racionais quaisquer pois a soma de dois números racionais é também racional, e este procedimento já foi efetivamente trabalhado na atividade III.

A questão 2 trata da associação da representação decimal infinita a um número irracional, a expectativa é a de que o participante comente que número racional, quando periódico, também possui representação decimal infinita.

Esperamos que o número irracional $\frac{\pi}{2}$, e o número racional 0,333...3 não sejam erroneamente classificados, pois em pesquisas citadas anteriormente, muitos alunos e professores entrevistados associam fração ao número racional sem observar a natureza do numerador e do denominador, e também identificam um número com reticências como sendo irracional sem prestar atenção na finitude da representação.

Em relação à representação 1,333... , são possíveis ambas respostas. Esperamos as seguintes justificativas, se for classificado como racional deve ser pela suposição de periodicidade na representação. Se for classificado como irracional deverá ser pela possibilidade de não haver periodicidade na representação, já que não há indicações que isto deva ocorrer. Ainda há a possibilidade de que algum sujeito efetivamente responda que esta afirmação pode ser verdadeira ou falsa dependendo da interpretação dos algarismos que compõem as casas decimais não representadas.

Nas questões 4, 5, 6, 8 e 12 são abordadas as seguintes situações: primeiro a existência de números racionais e irracionais entre um racional e outro irracional, depois o fato de haver número racional entre dois números irracionais, em seguida número irracional compreendido entre dois números racionais, e ainda, número racional entre um número racional e outro irracional e por último, a existência de números irracionais entre dois irracionais. Nestes casos, se os participantes optarem por fornecer exemplos, esperamos que eles lancem mão da representação decimal e troquem algarismos como

foi sugerido em atividade anterior, ao invés de tentar tirar a média entre eles. Estas situações descritas poderão nos fornecer subsídios para avaliar se as atividades deram conta delas, auxiliando na percepção da existência de números entre dois dados.

Em relação à questão 12, pelo fato da questão precedente afirmar que a média entre dois números racionais é um número racional, é possível que influencie a resposta à esta questão induzindo tentar tirar a média de dois números irracionais por meio de suas aproximações racionais.

Na questão 9, a respeito da possibilidade de se tirar a média de dois números irracionais, é um procedimento que não se aplica pelo fato de não podermos operar com os números irracionais escritos na representação decimal. Apesar disso, é possível que alguns sujeitos aleguem poder utilizar aproximações racionais destes números e assim tirar a média. É possível que haja alguma resposta do tipo $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, no registro simbólico, que apesar de poder representar a média aritmética entre dois números irracionais, não é possível conhecer este número, ou seja, todas as suas casas decimais.

A questão 10 trata da possibilidade de os sujeitos identificarem um número irracional com sua aproximação racional.

Finalmente, a última questão onde é abordada a situação geral: “Existem infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais”, é uma oportunidade para se investigar a concepção que os sujeitos têm a respeito da densidade no final da sequência.

Quanto às expressões ‘é sempre possível’, ‘não existe número’, ‘não é possível’, ‘existem infinitos números’ esperamos que não suscitem dúvidas nesta fase.

A discussão deverá ser feita questão por questão, propiciando uma outra oportunidade para reflexão sobre as propriedades dos números reais tratadas neste trabalho, principalmente sobre a questão da densidade dos números reais.

No final de cada atividade haverá a institucionalização local e neste ponto deverá haver uma institucionalização global contemplando os seguintes assuntos:

- a) representação decimal infinita periódica refere-se a um número racional.
- b) representação decimal infinita não periódica refere-se a um número irracional.
- c) representação fracionária será referente a um número racional se as naturezas do numerador e do denominador forem números inteiros com o denominador diferente de zero.
- d) representação decimal finita refere-se a um número racional.
- e) a densidade do conjunto dos números reais, isto é, entre dois números reais distintos existem infinitos números reais, tanto racionais quanto irracionais.

CAPÍTULO 5: ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo analisaremos os dados dos protocolos das questões de cada atividade juntamente com alguns comentários feitos durante a resolução das questões (anotados pela pesquisadora e pelo observador, e pelas gravações em áudio) e aqueles feitos durante a discussão final. Esta análise será pautada nos objetivos e expectativas da análise a priori feitos no capítulo 4, que serão retomados resumidamente em cada uma das atividades, para facilitar a comparação com os dados colhidos. Ao final da análise de cada atividade, exporemos o que foi institucionalizado.

Após a análise das questões das dez atividades, examinaremos o instrumento de avaliação do experimento, respondido pelos participantes no final da última sessão, que tem como objetivo a investigação da concepção dos sujeitos quanto aos assuntos trabalhados com a sequência. Por último a análise da reaplicação da atividade II após dois meses.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE I

QUESTÃO 1

Nesta questão era solicitada a classificação dos números em racionais ou irracionais, com o objetivo de investigar as concepções quanto aos critérios desta classificação.

Com poucas exceções, a maioria classificou corretamente os números dados constantes no quadro a seguir.

O quadro a seguir mostra que um grupo deixou em branco a classificação de $4,21222324...$ e outro grupo deixou em branco a classificação de $4,212121...$ Isto pode ter sido motivado pela não garantia de periodicidade informada em ambas as representações. Desse modo, os números representados poderiam ser interpretados com sendo racionais ou irracionais, dependendo do entendimento quanto aos algarismos não representados, isto é, se fosse considerado um período ou não.

Número	Racional	Irracional	Racional e Irracional	Em branco
0	4		1	
$\sqrt{5}$		5		
$\frac{1}{2}$	5			
$\frac{1}{3}$	5			
0,333...3	5			
4,21222324...	1	3		1
4,212121...	4			1
π		5		
3,1416	3	2		
$-\frac{3}{7}$	2	3		
$\frac{\pi}{10}$		5		
e		5		
2,7182	4	1		
1,999...	5			
2	5			
$\sqrt{9}$	5			
$\frac{\sqrt{3}}{4}$		5		

Quanto ao zero, que historicamente teve dificuldade em ser aceito como número, foi classificado por um grupo, como sendo ao mesmo tempo racional e irracional. Na discussão que precedeu a decisão, houve oportunidade de se registrar o seguinte diálogo:

Sujeito: “Deixamos o zero por último”

Pesquisadora: “Por quê?”

Sujeito: “Porque o zero está em todos inclusive nos reais”

Pesquisadora: “Mas é racional ou irracional?”

Sujeito: “Está no meio.”

A expressão “Está no meio”, para este grupo, significa que o ‘zero’ está na interseção dos dois conjuntos, o dos números racionais e o dos irracionais.

Pudemos perceber que um grupo precisou utilizar a calculadora para converter $\frac{1}{3}$ para 0,333... e assim concluir que se tratava de uma representação de um número racional. Talvez não esteja claro para este grupo que o registro fracionário $\frac{1}{3}$ refere-se a um número racional.

Um participante de outro grupo analisando 0,333...3 comentou:

“ $\frac{1}{3}$ e 0,333...3 é a mesma coisa”. Mas em seguida seu parceiro argumentou que a representação 0,333...3 era finita e por este motivo era a de um número racional, o primeiro concordou.

As representações $\sqrt{5}$, e , π , $\frac{\pi}{10}$ e $\frac{\sqrt{3}}{4}$ não suscitaram dúvidas apesar de termos previsto que $\frac{\pi}{10}$ e $\frac{\sqrt{3}}{4}$ pudessem ser associados a uma representação de um número racional, por se tratarem de frações.

Quanto à discussão de $\frac{\pi}{10}$ registramos o seguinte comentário:

“A divisão de irracional por racional é irracional”. O que valida a classificação em irracional.

O objetivo das representações 4,21222324... e 4,212121... era problematizar e levantar questionamentos a respeito dos Algarismos ‘ocultos’ nas reticências e discutir os possíveis acordos tácitos. Será que pode haver período na representação

4,21222324...? Será que os algarismos '2' e '1' na representação 4,212121... formam um período necessariamente?

O número representado por 4,21222324... foi classificado em racional por um grupo que conjecturou a respeito das casas decimais representadas por reticências dizendo:

“4,21222324... não tem período mas e depois?”.

Este grupo evitou o acordo tácito, mas os demais, na ausência de algarismos repetidos, que pudessem caracterizar um possível período, classificaram-no como irracional, sem questionamentos.

Enquanto que o número representado por 4,212121... foi classificado em racional por quatro grupos que interpretaram o '21' como algarismos que formariam um período, registramos o comentário a seguir:

“4,212121... tem período 21 e tem uma regra pra voltar, só não lembro”. O que justifica que é racional mas mostra também que o participante sabe que existe uma regra mas esqueceu.

Um outro grupo, apesar de tê-lo classificado como número racional conjecturou:

“No número 4,212121... poderia não se repetir o 21, então não seria racional”. Talvez sinalizando que é preciso uma confirmação de periodicidade para classificá-lo com segurança, não aceitando acordos tácitos.

Nos protocolos, dois grupos classificaram o número representado por 3,1416 como sendo irracional. E um grupo classificou 2,7182 como sendo irracional. No momento da discussão pareceu-nos que alguns associam 3,1416 com π (três grupos), assim como 2,7182 com e (dois grupos).

Na plenária registramos os seguintes comentários de três participantes que tiveram o intuito de convencer os outros quanto à classificação de 3,1416 e de 2,7182:

“O e não é só 2,71, tem, infinitos”.

“2,7182 se aparecer só assim é racional”.

“3,1416 é racional”.

O registro $-\frac{3}{7}$ foi classificado como uma representação de um número racional por dois grupos, um deles converteu para o registro decimal e constatou ser uma dízima e assim concluiu ser racional. Os outros três grupos, após a divisão, não identificaram a periodicidade e classificaram-no como irracional. Talvez tenha havido uma associação de número na representação decimal infinita com a irracionalidade. Não foi identificada a associação de número negativo com irracionalidade.

QUESTÃO 2

Explique o critério que você usou para tomar a decisão na questão 1.

O objetivo era propiciar uma oportunidade de refletir a respeito destes critérios para uma melhor análise quanto às noções de número racional e irracional.

Nenhum grupo respondeu que: Número racional é aquele que é possível colocá-lo no registro de representação fracionária, sendo numerador e denominador inteiros com o denominador diferente de zero, no registro da língua natural ou no registro simbólico ou ainda utilizando os dois registros.

Foram consideradas incompletas duas delas em que faltava a especificação da natureza do numerador e do denominador. Em nenhuma delas número irracional foi citado explicitamente. Segue um dos protocolos:

A possibilidade do número ser
representado na forma de $\frac{p}{q}$
com $q \neq 0$.

Duas respostas referiram-se às representações dos números dando exemplos de números racionais e irracionais sem explicitação dos critérios. Seguem algumas destas

citações: “Racionais: todos números fracionários”, “Irracionais: todos os números de raízes inexatas e números decimais não periódicos e de infinitas casas”, “ $Q = (Z, \text{dízimas periódicas simples e compostas})$ ”, “ $R - Q = (\text{dízima periódica sem período definido}, \pi, e, \text{raízes não exatas})$ ”.

Alguns comentários que percebemos durante a discussão dentro de um grupo:

“Se eu conseguir transformar para fração é racional”.

“Uma dízima periódica eu acho que é racional”.

QUESTÃO 3

Existe um número real compreendido entre os números abaixo?
No caso afirmativo escreva algum(ns).

Números	Não	Sim	Qual(is)
1) Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$			
2) Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$			
3) Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...			
4) Entre 0,999... e 1			

Nesta questão se inicia a abordagem da densidade dos números reais. Pedia-se para verificar a existência de números reais entre dois números dados, e no caso afirmativo dar exemplos.

Em relação aos quatro pares de números:

1) Todos os grupos perceberam a existência de números reais entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$ e entre 2,13 e $\frac{214}{100}$.

Dois grupos converteram $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$ para o registro decimal, respectivamente 0,272727... e 0,363636..., para encontrar números entre eles e registramos uma fala de um deles:

“Decimal é mais fácil”. Esta explicitação faz parecer que a conversão é familiar e torna o registro decimal mais fácil de se trabalhar.

Um destes grupos usou calculadora para mudar os registros fracionários $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$ para os registros decimais e o outro registrou as divisões em seu protocolo.

Um grupo não converteu e escreveu: $\frac{3,1}{11}$ e $\frac{3,2}{11}$, sem o cuidado de representar o número racional como quociente de dois números inteiros.

Um grupo que não converteu, errou sugerindo um número na representação fracionária porém fora do intervalo dado, é o caso dos sujeitos que responderam $\frac{1}{22}$.

2) O número $\frac{214}{100}$ foi representado por 2,14 por quatro grupos que escreveram no registro decimal, números entre eles.

Um grupo colocou no registro fracionário $\frac{1}{200}$ que não está no intervalo dado.

3) Também todos identificaram as representações $\frac{1}{3}$ e 0,333... como sendo a de um mesmo número respondendo que não havia números entre eles.

Apesar de um grupo ter respondido que não havia números entre $\frac{1}{3}$ e 0,333..., durante a discussão no grupo, que precedeu a resposta, foi detectado o seguinte comentário:

“Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333... não tem número real, tem irracional”. Parece apontar que para este grupo não está claro o significado de número irracional e real.

4) O único par de números em que foi identificada dúvida foi em relação às representações $0,999\dots$ e 1 , três grupos responderam que não há números entre eles.

Um grupo respondeu que sim colocando $0,001$, e um grupo deixou em branco apesar de se notar uma rasura pois foi apagada a resposta *não* e tinha sido colocada a representação $\rightarrow 1$. Parece não dar o mesmo significado para as expressões: “tende a” e “tem limite n ”, e isto é reforçado por outro grupo que comentou:

“O $0,999\dots$ tende a 1 mas não chega a 1 ”. O que foi evidenciado por pesquisas anteriormente citadas como Rogalski (1994) e Artigue (1995).

Na plenária foi apresentada a seguinte tentativa de argumentação:

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots \Rightarrow 3 \times \frac{1}{3} = 0,333\dots \times 3 \Rightarrow 1 = 0,999\dots$$

Esta apresentação não serviu como justificativa para um grupo que não identificou $0,999\dots$ e 1 . Esta não aceitação não é surpreendente e parece que esta tentativa de explicação é falha e insuficiente, apesar de ter sido utilizada como argumento por Niven (1984, p. 53), por Rogalski (1994, p. 166) e também no Provão para o bacharelado e licenciatura em Matemática, em 2002. Como se opera com representações infinitas? É sempre possível?

Outra dupla, discordando no início de que 1 e $0,999\dots$ são representações de um mesmo número, decidiu optar pela identificação delas.

Seguem alguns protocolos para ilustrar as respostas analisadas.

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$		X	0,28 0,30, 0,359
Entre $2,13$ e $\frac{214}{100}$		X	2,133 e 2,139 2,13879
Entre $\frac{1}{3}$ e $0,333\dots$	X		
Entre $0,999\dots$ e 1	X		

$$\begin{array}{r} 213 \\ 100 \\ \hline 2,13 \end{array} \quad 2,14$$

2,133

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 11} \\ 80 \\ \hline 30 \end{array} \quad 0,2727$$

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 11} \\ 33 \\ \hline 70 \end{array} \quad 0,36$$

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$		X	$\frac{1}{22}$
Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$		X	$\frac{1}{200}$
Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...	X		#
Entre 0,999... e 1			

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$		X	$\frac{31}{11}, \frac{32}{11}$
Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$		X	2,131; 2,132
Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...	X		
Entre 0,999... e 1	X		

QUESTÃO 4

Considere o conjunto $J = \{x \in \mathbb{Q} / 0 < x \leq \sqrt{2}\}$
(Ou seja, o conjunto J formado pelos números racionais compreendidos entre zero e raiz de dois, inclusive)

a) J tem um último elemento?
(Isto é, o elemento que vem exatamente antes de $\sqrt{2}$?)

Sim	Não

b) Se sim, qual é esse elemento? Se não, por quê?

Esta questão tem como objetivo explorar a densidade em $\mathbb{P}$. O enunciado é dado nas representações simbólica e da língua natural, a fim de evitar que a dificuldade na

leitura e interpretação dos símbolos prejudique nosso foco que é a densidade dos números reais, além de chamar à atenção de que J é um conjunto de números racionais.

Em relação ao item a), houve duas respostas 'sim' e três 'não'.

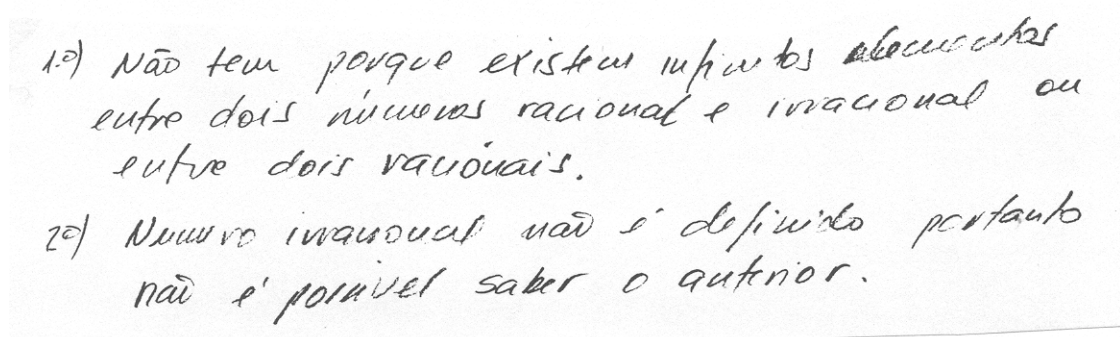
Em relação ao item b), apesar do registro simbólico algébrico ter sido convertido para o da língua natural, dois grupos responderam *sim* ao item a), não percebendo que o conjunto era composto por números racionais, um deles escreveu como exemplo a $\sqrt{2}$, e o outro colocou " $\sqrt{2} - n / n \in \Theta$ ", com isso talvez o sujeito estivesse pensando que houvesse números racionais menores, pois n é variável, mas a questão pedia o último número.

Um grupo que respondeu *não* no item a) escreveu:

"Não, porque $\sqrt{2}$ está dentro do conjunto". Apesar deste grupo ter escrito na linguagem natural, não percebeu que $\sqrt{2}$ não está no conjunto e, além disso, se $\sqrt{2}$ estivesse no conjunto, ele próprio seria o último elemento. Talvez tenham sido induzidos pela frase do enunciado 'números racionais compreendidos entre zero e raiz de dois inclusive'.

Outro grupo que respondeu *não* no item a) escreveu: "Tem infinitos números", o que não foi muito esclarecedor e talvez não tenha ficado evidente que não existe um último elemento naquele conjunto.

Um terceiro grupo adepto do *não*, expressou-se:



1.ª) Não tem porque existem infinitos ~~aleatorios~~ entre dois números racional e irracional ou entre dois racionais.

2.ª) Número irracional não é definido portanto não é possível saber o anterior.

Parece que, para este grupo, número irracional não tem significado.

No momento da discussão, um sujeito interveio dizendo:

“mas não há um último elemento, é infinito”. Conseguiu convencer outro grupo, enquanto que um terceiro grupo ficou com desconforto (o mesmo grupo que não concordou com $0,999... = 1$).

Um sujeito falou durante a discussão no grupo:

“Antes do $\sqrt{2}$ tem um número que não se pode achar”. Esta frase pode estar dizendo que muitas vezes o fato de não poder achar um último elemento significa a sua não existência, fato este que já tinha sido detectado em pesquisas anteriores.

Um sujeito questionou a representação do conjunto J expressando:

“O $\sqrt{2}$ não é racional, então está errada a pergunta $\sqrt{2}$ inclusive”. O que pode representar a dificuldade do sujeito em interpretar o significado de uma dupla desigualdade. Este comentário levanta a discussão de se poder colocar $\leq \sqrt{2}$ se a $\sqrt{2}$ não pertencer ao conjunto dos números racionais em questão.

Durante a discussão, alguns participantes fizeram referências ao $\sqrt{2}$, o que pode significar uma leitura minuciosa do conjunto, quanto a análise de a $\sqrt{2}$ fazer parte ou não do conjunto J por não ser racional:

“A única coisa que estou com desconforto é a questão do $\sqrt{2}$ ”.

“Como vou saber se é o fim? O último não é o $\sqrt{2}$?”.

“Se você não sabe o $\sqrt{2}$, como vai saber o que está encostado nele?”.

Usando a calculadora para $\sqrt{2}$ comentou :

“Só não tem mais um porque não tem como”. Referindo-se a limitação do número de casas decimais pela calculadora.

“É, não dá pra definir este número”.

Talvez fosse melhor definir o conjunto da seguinte maneira:

$J = \{ x \in \mathbb{Q} / x > 0 \text{ e } x^2 \leq 2 \}$, de sorte que não figurasse explicitamente nesse conjunto de números racionais a representação de um número irracional.

Tanto os protocolos dos professores quanto os comentários durante a discussão em grupos, apontam que foi encaminhado naturalmente para a discussão geral em que

foi institucionalizado que o número racional é aquele que é possível colocá-lo no registro de representação fracionária, sendo numerador e denominador inteiros com o denominador diferente de zero. Número irracional é aquele que não é racional.

Os sujeitos que tiveram dificuldade em classificar os números, mostraram aceitar prontamente os argumentos dos colegas que apontavam para a institucionalização feita.

Outro objetivo desta atividade era investigar se os sujeitos percebiam a existência de números reais entre dois racionais dados. Todos acertaram as questões que envolviam este fato, inclusive fornecendo exemplos, na sua maioria, de números racionais. Baseados nos resultados apresentados pelos participantes, foram elaboradas as questões das atividades seguintes.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE II

As questões desta atividade foram elaboradas para atingir mais pontualmente a noção de densidade, expressa no registro da língua natural. São catorze afirmações de âmbito geral para serem classificadas como sendo verdadeiras ou falsas, contemplando situações de existência de números racionais e irracionais entre dois reais. Pedia-se também para comentar o critério usado. Esta atividade além do seu caráter diagnóstico, também visa à preparação das questões das próximas atividades.

Numa primeira análise quantitativa obtivemos o seguinte desempenho:

Dois grupos erraram apenas uma questão, outros dois erraram duas questões e um grupo errou seis questões. A questão que mais apresentou respostas erradas foi: “Entre dois números irracionais existe um número racional”.

Aquelas respostas que continham comentários, foram sempre exemplos de números como limites inferior e superior do intervalo e inserindo números entre eles. Por exemplo:

“Entre 1 e 3 existe o $\sqrt{2}$ ”.

Um grupo sublinhou as palavras-chave como “um único número”, “não existe”, “exatamente um”, “não existe” e “um único”, talvez pela influência do registro de representação da língua natural para o entendimento da frase, corroborada pelo comentário de um sujeito durante a resolução das questões:

“Pega no Português: um número ou um único número?”.

Ou pela fala de outro participante quando questionado pela falta de comentários em suas respostas:

“Porque o argumento é sempre com exemplos e estamos cansados”.

Ou ainda, “O problema não é a Matemática, é a interpretação, é o Português”, como se ambas as representações fossem separadas e independentes.

Estes comentários evidenciam o poder e a necessidade da representação da língua natural, além da linguagem matemática, para o entendimento como defende Duval em sua Teoria.

Em seguida faremos um panorama geral das respostas apresentadas pelos sujeitos.

Analisando-se apenas as respostas de uma parte da questão: verdadeiro ou falso, o desempenho poderia ser avaliado em bom, mas nenhum grupo comentou todas as questões, dificultando a análise. Mesmo depois de termos percebido que os participantes não estavam comentando por escrito seus critérios e de termos pedido para que eles o fizessem, três grupos não justificaram nenhuma questão. Parece haver uma grande dificuldade em formalizar por escrito, justificando a escolha de verdadeiro ou falso.

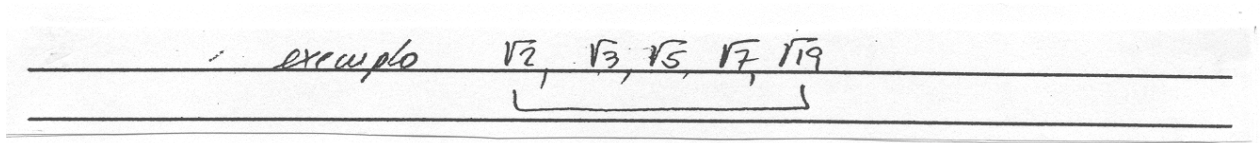
Um grupo comentou quatro delas e colocou *idem a tal questão* em três outras. O grupo que forneceu mais justificativas, o fez em sete questões dando exemplos como:

2. (F) Entre dois números racionais não existe número irracional.

Pode existir (1, $\sqrt{2}$, 3).

Os sujeitos sabem que muitas 'raízes' são estereótipos de número irracional, deste modo o $\sqrt{2}$, sendo um representante-padrão de irracional, é escolhido para depois serem inseridos dois racionais, um menor e outro maior que ele, embora também pudessem colocar 2 ao invés de 3 para o extremo superior.

Um segundo grupo escreveu para a pergunta em que se questionava a existência de número irracional entre dois irracionais:



Novamente as raízes aparecem como símbolos de irracionais, este grupo uniu por um traço o $\sqrt{2}$ e o $\sqrt{19}$, provavelmente indicando os extremos de um intervalo para serem inseridos os números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$.

Outra resposta, agora referindo-se à existência de número racional entre dois irracionais:

"Exemplo $\sqrt{2}$, 2 e $\sqrt{5}$ ". A $\sqrt{2}$ aparece mais uma vez. Como este grupo decidiu pelo 2 como representante de número racional, os sujeitos puseram o $\sqrt{5}$ como o outro extremo, poderiam ter colocado um número racional entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ como por exemplo 1,5, mas talvez seja mais fácil achar raízes que gerem um intervalo que compreenda o 2 por exemplo $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$, do que fixar as raízes $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ para depois achar por exemplo, o 1,5 compreendido entre eles.

Em relação à primeira questão: "Entre dois números racionais existe um único número racional", houve uma resposta:

"Existem infinitos". Parece que este grupo percebeu que no enunciado, a expressão: *um único* não era adequada pois fazia restrições ao número de elementos contidos num intervalo.

Na questão: “Entre dois números irracionais não existe número irracional”, escreveram:

“contra exemplo”. Mas não o explicitaram, talvez tenham percebido que *não existe número* estivesse errado e que fosse necessário colocar um contra-exemplo para provar que existe pelo menos um número irracional entre dois irracionais. Ou ainda aprenderam a repetir, sem apreenderem o sentido disso, que no caso de uma afirmação ser falsa basta dar um contra-exemplo.

Um grupo, para exemplificar a existência do número racional entre um racional e outro irracional, colocou:

“1 ; 1,1 ; $\sqrt{2}$ ”. Nota-se que em muitos exemplos, o $\sqrt{2}$ está presente como representante de número irracional.

Em relação à questão: “Entre dois números racionais existe um único número racional” outro grupo escreveu:

“O 1 e o 2 por exemplo, são dois números racionais e entre eles existem muitos outros números”. Percebeu que não existe somente um, porém não deu exemplos.

Este mesmo grupo na questão: “Entre dois números racionais não existe número irracional”, escreveu:

Por entre 3 e 4 existe, por exemplo o π , que é um número irracional.

Escolhido o representante de número irracional π , determinou o 3 e o 4 como extremos deste intervalo, neste caso, o exemplo não foi o $\sqrt{2}$ como a maioria escolheu.

Na questão: “Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional”, um grupo justificou escrevendo que entre 1 e 2 estão o $\sqrt{2}$ e o $\sqrt{3}$, mostrando a existência de dois números, o que nega a unicidade do número entre eles. Dois grupos escolheram o 1 e o 2, como se ao falar em dois números lembrassem dos dois primeiros naturais.

A respeito da transferência da ordem dos naturais para os reais, podemos anotar alguns comentários como por exemplo:

“Está perguntando se existem dois irracionais colados e um irracional no meio?”.

“Estes números, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são sucessores”.

“São consecutivos estes números?”.

Estes comentários parecem evidenciar a confusão sobre o conceito de sucessor.

Na discussão salientamos que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ não são, nem admitem, sucessores um do outro muito menos que este conceito se aplique a números reais.

No final da discussão foram apresentados dois comentários que julgamos relevantes e estimulantes para a nossa pesquisa:

“Vou estudar isso e depois a gente conversa”. Referindo-se à igualdade: $0,999...=1$.

Um segundo comentário de outro participante:

“Percebi como tenho defasagem, a gente só estuda o que dá aula”. Mostrando que esta atividade provocou, como se pretendia, inquietações e motivações para o estudo.

As raízes e o π foram os únicos citados como representantes de número irracional. Nenhum grupo utilizou o registro de representação decimal para um número irracional.

Pudemos, durante a discussão, institucionalizar o registro decimal para representar tanto um número irracional quanto um racional, bem como a existência de duas categorias de números entre dois dados. Além disso, que a representação decimal de um número não é um registro que caracterize ser um número racional, mesmo infinito, ou irracional. Nas próximas atividades iremos trabalhar com o registro de representação decimal.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE III

A situação abordada nesta atividade foi a existência de números racionais entre dois racionais, para tanto, o processo escolhido foi a utilização da média aritmética, por

ser um procedimento familiar. Também utilizamos o registro gráfico, pedindo a representação destes números racionais na reta real.

Foram escolhidos dois números no registro de representação fracionária com denominadores diferentes possibilitando a conversão de ambos os números para o registro decimal.

Foi comunicado que seria permitido o uso de calculadora, porém um grupo recusou-se a utilizá-la, alegando que no concurso para professor da rede estadual, que prestaram na semana anterior, não era permitido seu uso.

Parece que o processo de tirar média é considerado fácil e a maioria (exceto um grupo) realizou a conversão do registro fracionário para o registro decimal. Um dos grupos converteu $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$ para 0,6 e 0,75 respectivamente e calculou a média no registro decimal em todas as questões:

4. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 1 ?

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

$$0,6 + 0,675 = 1,275 : 2 = 0,6375$$

Um outro grupo manteve o registro fracionário para calcular a média e depois de ter chegado a $\frac{27}{40}$ converteu para 0,675; mas a partir da quarta questão, converteu também o $\frac{3}{5}$ e trabalhou, daí por diante, no registro decimal:

1. Ache a média aritmética entre eles.

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{4} = \frac{12+15}{20} = \frac{27}{20} : 2 = \frac{27}{40} = 0,675$$

Um terceiro grupo utilizou o registro fracionário na primeira questão mas já, a partir da terceira, (representação na reta) converteu as representações fracionárias para decimais e assim as manteve até o final das questões.

Estes três grupos realizaram a conversão para o registro decimal em momentos diferentes e a partir deles, trabalharam no registro decimal.

Um único grupo calculou todas as médias no registro fracionário, alegando que no concurso público realizado recentemente, não era permitido o uso de calculadoras, portanto, parece que para este grupo, era mais fácil trabalhar no registro fracionário. Para tanto realizou um tratamento no interior deste registro, já desde o início, ao substituir as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$ por frações semelhantes com o mesmo denominador para poder realizar a adição. Na questão 7, ainda a média foi calculada no registro fracionário, mas realizaram uma conversão para o registro decimal, provavelmente para localizá-lo na reta real.

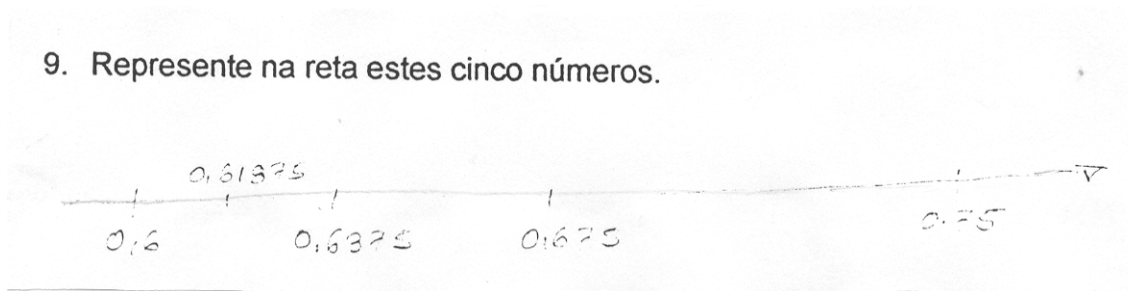
7. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 4 ?

$$0,612 \quad \frac{3}{5} + \frac{51}{80} = \frac{48+51}{80} = \frac{99}{80} = \frac{99}{160}$$

$\begin{array}{r} 990 \quad (160) \\ 8 \quad 6 \quad 12 \\ \hline 30 \quad 140 \end{array}$

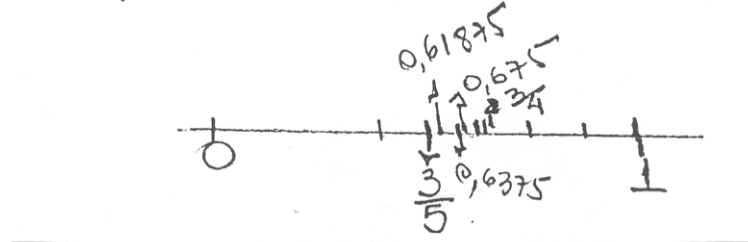
Um dos grupos, para representar os números no registro gráfico, os converteu para o registro decimal:

9. Represente na reta estes cinco números.



Enquanto que outro grupo, que trabalhou no registro decimal, manteve as duas representações fracionárias iniciais:

9. Represente na reta estes cinco números.



Durante a resolução das questões, parece que os critérios de classificação de números reais, discutidos na primeira atividade, foram utilizados corretamente, como se pode perceber nos comentários dos sujeitos:

“É racional pois a divisão deu exata”, referindo-se ao 0,6375.

“Se o número cabe na calculadora, ele tem fim, se tem fim, não é irracional”.

“Claro que é número racional está representado por $\frac{a}{b}$ ” em relação ao $\frac{27}{40}$.

“Posso dividir à vontade e sempre tirar a média e será racional”.

O que aponta para o fato de que este último sujeito provavelmente percebeu que entre dois racionais existem infinitos racionais.

Ainda em relação à possibilidade do processo de tirar a média não ter fim, anotamos uma fala de um dos participantes:

“A média vai se aproximar cada vez mais de um número, o espaço entre eles sempre vai existir, mas vai diminuir”, o que indica, possivelmente, a compreensão da noção de densidade.

Um sujeito parece admitir que a noção de densidade dos números racionais é difícil e que não é facilmente aceita por todos:

“Vamos pegar os números 0,61 e 0,611 para mostrar que existem números entre eles, muita gente acha que não tem”.

A conversão de registros de representação semiótica mostrou-se necessária para que se pudesse escolher o registro no qual os tratamentos são mais convenientes como se percebe nos comentários:

“Era mais fácil saber a média em decimal”.

“Vamos colocar em decimal isto daqui”.

“Usei uma linguagem decimal”.

“Fração é mais difícil, mmc”.

Em relação à conversão de registros para a representação gráfica, a maioria sentiu necessidade de aumentar a escala para representar os números pois eles ficaram cada vez mais próximos como se evidenciou nos seguintes comentários de vários sujeitos:

“Quanto menor o número, tenho que aumentar minha escala”.

“Na hora de representar na reta, vou colocar a média um pouco mais para frente”.

“Vamos ter que aumentar ainda mais a escala”.

“Vou fazer um espaço bem grande aqui”.

Esta atividade pareceu mais trabalhosa que as duas anteriores pelo fato de serem necessários muitos cálculos, porém apresentou poucas dificuldades.

Ao final, parece que todos chegaram à conclusão de haver infinitos números racionais entre dois racionais, pois todos os grupos, em relação à questão: “Escolha agora dois números racionais diferentes destes todos, e responda se entre eles existe algum outro número racional. Quantos?”, que tratava de um exemplo particular de dois números escolhidos pelos sujeitos, responderam que havia infinitos racionais.

Enquanto que na questão seguinte: “Se você tivesse escolhido outros dois números diferentes daqueles do item anterior, o resultado seria o mesmo? Por quê?” que tratava de dois números particulares, o que já poderia ser o início de uma tentativa de uma generalização, um grupo respondeu:

Sim, porque aumentaria os casos decimais.

Este grupo referia-se ao número de casas decimais representadas, por exemplo, a média de 0,6 e 0,75 é 0,657, que possui três algarismos em sua representação decimal, enquanto que as duas primeiras representações possuem uma e duas casas decimais respectivamente.

Considerando esta mesma questão, escolhemos o protocolo de um outro grupo como fechamento da análise desta atividade:

Sim, infinitos porque dentro dos irracionais há infinitos números.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE IV

O objetivo desta atividade é discutir a existência de infinitos números irracionais entre dois números irracionais quaisquer. Para a obtenção de tais números, o procedimento da média aritmética já não se aplica, então foi necessário apelar para a representação decimal de um número real.

Foram dados os seguintes números: 1,232425... e 1,332425..., que não são denominados explicitamente como irracionais, mas foi escrito que eram não periódicos e que diferiam em apenas um algarismo, a primeira casa decimal. Nas questões era pedido para se encontrar números irracionais entre eles e entre um deles e outro irracional, e além disso que se ordenassem os números.

A leitura e interpretação do enunciado apresenta alguma dificuldade como se observa no seguinte comentário:

“O primeiro número não é periódico e o segundo não fala nada?”. Neste momento relemos o enunciado juntos e assim concluíram que o segundo número também era não periódico.

O tempo de resolução das questões desta atividade foi um pouco menor do que o tempo da anterior, porém suscitou muito mais dúvidas e discussões, como era esperado, porque número irracional não é, com raras exceções, familiarmente apresentado em sua representação decimal infinita não periódica no Ensino Médio.

Um grupo verbalizou a dificuldade de se achar números irracionais no registro decimal entre dois irracionais, alegando ser mais fácil achar um número entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ pois haveria $\sqrt{3}$, este é um exemplo bem cômodo, mas o que dizer sobre a existência de números irracionais entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$? Houve confusão quanto a sugestão de uma seqüência: 22, 23, 24, 25,... para os algarismos, na representação decimal infinita e uma possível periodicidade na representação quando um sujeito comentou:

“É dízima pois 1,22232425...”. Provavelmente ele se referiu à dízima periódica.

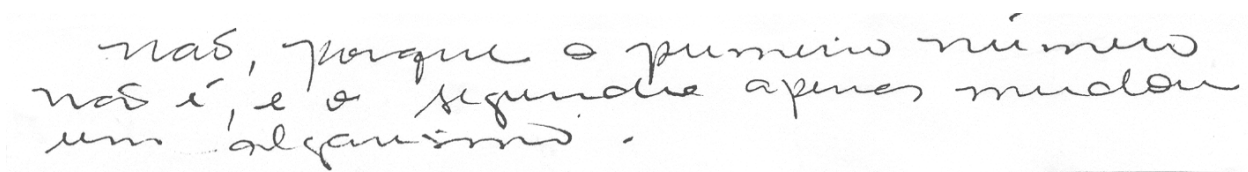
Mais uma vez a $\sqrt{2}$ aparece como sendo o paradigma de número irracional no comentário:

“Entre os dois não tem ninguém, não sei ... o $\sqrt{2}$ não cabe aí”.

Os protocolos contêm respostas corretas em relação à primeira questão: “O segundo número é uma dízima periódica? Por quê?”

“Não é uma dízima periódica pois não há período de repetição”.

“Se o primeiro não é dízima, logo o segundo também não é dízima”.



nao, porque o primeiro número nao é, e o segundo apenas mudou um algarismo.

Estes comentários que, à primeira vista, podem sugerir uma contradição em relação as anteriores, são resultados das discussões ocorridas no interior de cada grupo e parece apontar que as questões das atividades anteriores colaboraram para estas respostas no esclarecimento de critérios de classificação de números reais.

Destacamos alguns comentários relativos à questão: “O segundo número é racional ou irracional? E o primeiro? Comente sua resposta”:

“Os dois são irracionais, não apresentam dízimas periódicas”.

“É irracional pois não tem período”.

“Irracional porque a dízima não repete”.

*Os dois números são irracionais
pois não é uma dízima periódica*

É provável que por exclusão do critério que caracteriza a racionalidade, trabalhado na atividade anterior, chegou-se a essas conclusões, o que pode ser observado nos seguintes comentários de dois participantes:

“Está escrito não periódico. Não é periódico é irracional”.

“Irracional não pode escrever em fração”.

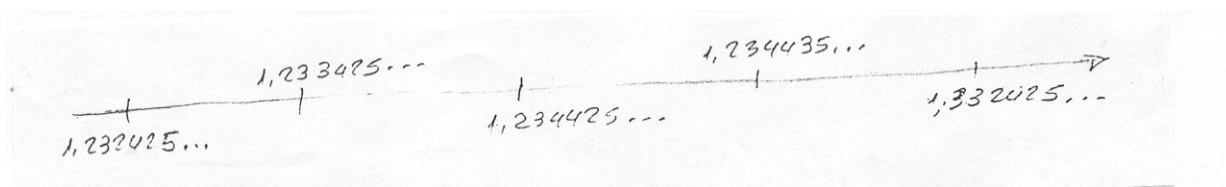
Estes comentários evidenciam que os participantes definem um critério para número irracional, que não seja somente a negação do racional, mas caracterizando-o pela sua representação infinita não periódica.

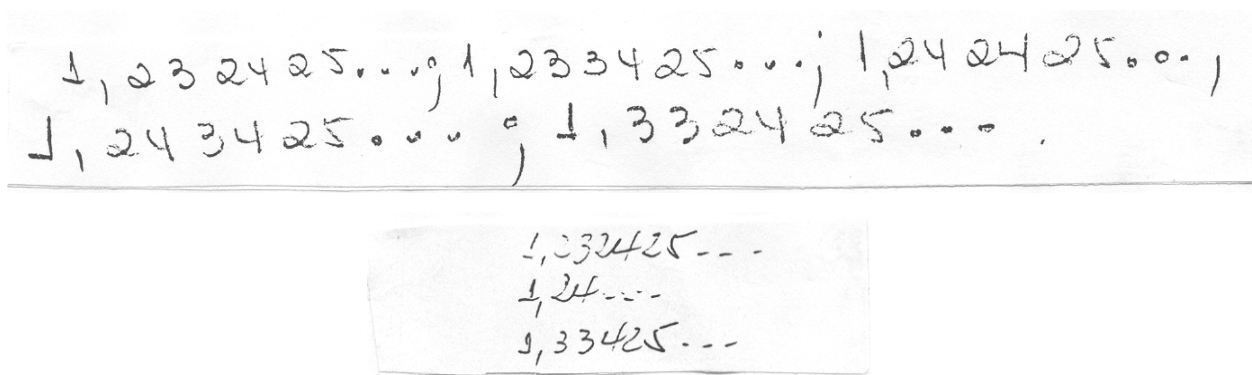
Nas questões em era pedida a ordenação, registramos o seguinte diálogo entre dois participantes do mesmo grupo:

“Ordenar? Mas não está pedindo a reta real?”.

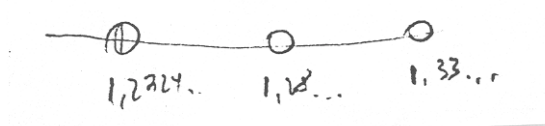
“Sempre é bom por na reta real para ordenar”.

Houve várias representações: um grupo localizou os números na reta real, não deixou de registrar as reticências e orientou o eixo no sentido crescente. Outro grupo colocou os números entre pontos e vírgulas e também não deixou de escrever nenhuma reticências. Um terceiro grupo escreveu os números um abaixo do outro e pôs as reticências em todos os números.





Um dos grupos não estava seguro quanto à ordenação, entenderam como representação na reta real e assim concluíram que não dava para representá-los pois haveria sempre imprecisão. Entreviemos dizendo que era justamente a representação de um número irracional e que mesmo no caso da atividade anterior envolvendo número racional também havia a imprecisão, mas o foco não é este e sim colocá-lo na reta e compará-lo com os outros números. Finalmente o grupo os localizou na reta porém representando-os com 'bolinha aberta' alegando que pela infinitude de casas decimais não era possível a localização exata deles, apesar de terem sido alertados que se tratava de uma representação, mantiveram a sua própria.



Este grupo não tomou cuidado com as reticências, omitindo algumas vezes sua representação. Foi registrada um fala de um dos sujeitos deste grupo:

“Não podemos por na reta, não terá precisão, não pode colocar um ponto na reta, pois se colocarmos na reta ele torna-se finito ... com bola aberta posso colocar”.

Nenhum dos grupos utilizou sinais de $<$ ou $>$ para ordenar os números.

Apenas um grupo e em uma única questão, em que se pedia a obtenção de um número irracional entre dois encontrados anteriormente, especificou que os números representados não possuíam período. Este grupo verbalizou mas não aplicou:

“Se não deixar claro que não tem período, só por reticências, não vai ser irracional”.

Este comentário evidencia que os participantes não se sentem seguros em afirmar que uma representação decimal infinita, aparentemente sem período, é de um número irracional. Para eles, é necessário especificar, por escrito, que a representação é não periódica para garantir que nas reticências também não há periodicidade. Isto denota uma postura crítica que refuta possíveis acordos tácitos e interpretações pessoais.

Quanto à questão central desta atividade que era a obtenção de um número irracional entre dois previamente estabelecidos, a maioria percebeu que era necessário trocar um ou mais algarismos numa representação decimal infinita para gerar outro irracional, e não calcular a média como na atividade anterior, como registramos numa fala de um sujeito:

“Não podemos somar e tirar a média entre eles pois só pegaremos um pedaço”. Parece que percebeu a aproximação racional que seria feita nesta situação.

Porém pelo fato da representação decimal, dos números do enunciado, apresentar explicitamente seis dígitos após a vírgula, nem todos perceberam que não se poderia colocar um algarismo para a 7^a casa pois ela estava representada por reticências e não se sabia qual seria o algarismo a ocupá-la. Eis alguns comentários:

“Para achar um irracional basta pegar um algarismo e trocá-lo prestando atenção nos algarismos e nas reticências, não é dízima”,

“O estudo se limita às seis casas. Não se pode trocar a 7^a casa”,

“Não pode porque não conhecemos o 7^o número”. Provavelmente querendo se referir ao 7^o algarismo após a vírgula.

Parece que a conclusão de que há infinitos números irracionais entre dois irracionais não se dá instantaneamente. Houve muita discussão e um grupo recusou-se a responder às questões por não terem chegado a um acordo: “Quantos números irracionais diferentes existem entre 1,232425... e 1,332425... ? Comente sua resposta” e “Se você iniciasse escolhendo dois números irracionais quaisquer, seria possível encontrar números irracionais entre eles? Quantos? Por quê?”

Eis um diálogo entre eles:

“Existem vários.”

“Eu sei que não é infinito.”

“Um só não existe. Entre dois racionais existem irracionais”.

“Mas quantos? Pergunta chata”.

“Existem muitos mas não sei quantos. Está considerando entre os dois”.

“Infinitos não podem ser. Não considero infinitos”.

Somente no momento da discussão geral o sujeito que não aceitava a infinitude, parece ter concordado com os argumentos dos colegas.

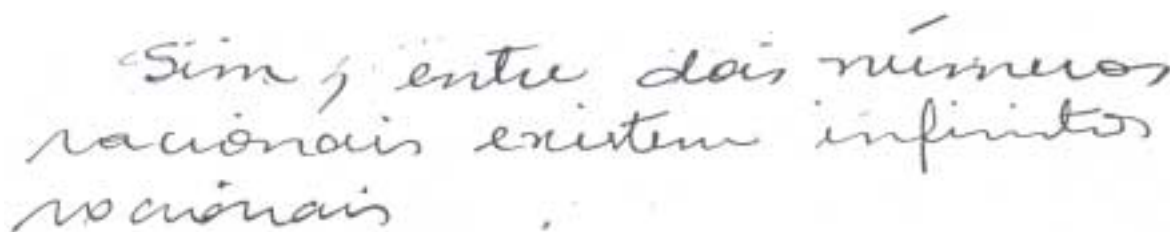
Os outros três grupos concluíram:

“Infinitos, aumenta a casa decimal”.

“Sim, infinitos”.

“Existem infinitos números irracionais”.

“Infinitos, pois entre dois irracionais existem infinitos irracionais”.



Sim, entre dois números racionais existem infinitos irracionais.

Às vezes, as respostas apresentadas nos protocolos não estão muito precisas, como esta última, mas pela observação das discussões parciais, pareceu-nos que estes grupos perceberam a existência de infinitos números irracionais entre dois irracionais quaisquer, uma vez que oralmente a sua expressão é muito mais próxima desta noção.

Durante a plenária, houve uma discussão a respeito da quantidade de números irracionais entre dois irracionais dados. Um sujeito insistiu no fato de que na atividade poderiam ser trocados seis algarismos de cada representação e assim a possibilidade de alteração das casas decimais nos dois números irracionais (representadas apenas as seis primeiras casas) seria finita, deste modo haveria finitos números irracionais

entre eles. Houve argumentações afirmando veementemente que havia infinitos números irracionais neste intervalo mas o participante em questão não concordava. Por fim dissemos a ele que precisava abstrair além da nossa atividade pois no papel e num tempo finito não poderíamos esgotar todas as possibilidades. Ainda que, provavelmente ele estava se esquecendo dos algarismos 'ocultos', aqueles que estavam representados por reticências, eram infinitos algarismos em cada um deles, assim poderíamos trocar infinitos dígitos em cada representação, um de cada vez, gerando infinitos números.

Julgamos que esta discussão foi interessante pois os participantes não saíram enquanto não tivesse cessada a sessão, o que aconteceu meia hora após o término previsto para o encerramento desta oficina. O valor de uma discussão mediada pode ser traduzido pela fala:

“O bacana disso é a discussão depois”.

As questões da atividade III envolviam a obtenção de números racionais pelo procedimento da média aritmética, que é um processo familiar. Este procedimento não é possível de ser repetido para a obtenção de um número irracional, em sua representação decimal, entre dois irracionais. Neste caso, apelamos para a representação decimal dos números reais, propondo na atividade IV um novo procedimento não usual, a saber, a troca de algarismos na representação decimal de números irracionais. Apesar disso, os participantes não apresentaram dificuldades e conseguiram responder a todas as questões. Parece que chegaram à conclusão de que existem infinitos números irracionais entre dois irracionais. Este mesmo procedimento será utilizado nas questões das atividades seguintes.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE V

Esta atividade é composta por 11 questões sendo que as duas primeiras abordam novamente os critérios de classificação dos números racionais e irracionais porém somente no registro de representação decimal, preparando os sujeitos para as questões que se seguem pois julgamos que possa haver alguma dificuldade por se tratarem de representações decimais infinitas que são pouco usuais.

Os números trabalhados na terceira questão foram os mesmos utilizados na atividade anterior mas com o objetivo de procurar números racionais entre dois irracionais. O que justifica a escolha da ordem dos casos abordados, na quarta atividade buscaram-se números irracionais entre dois irracionais dados e em seguida, utilizando os mesmos números irracionais, pediam-se números racionais entre eles.

Em relação ao enunciado da primeira questão: “Identifique os seguintes números?”, apesar de não ter havido dificuldade na compreensão, teria sido mais adequado escrever “classifique” ao invés de “identifique”, além da supressão da interrogação no final desta frase. Também o enunciado da segunda questão: “Quais os critérios para a representação decimal utilizados na questão anterior?” seria mais conveniente se expresso: “Quais os critérios para a sua análise na questão anterior?”.

Na primeira questão, um grupo tomou iniciativa de já explicar o critério adotado destacando:

“2,3145 é racional porque é finito”.

“3,5724... e 0,9802... são irracionais se não houver período”. Conjecturando a respeito dos algarismos ‘ocultos’, representados por reticências. Talvez as questões anteriores tenham contribuído para a reflexão em relação à segunda questão:

Pensamos na possibilidade da existência de períodos ou não, após a última casa decimal

Porém dois grupos apresentaram respostas generalizadas e incompletas à esta mesma questão:

“Decimal finito é racional”.

Os números racionais são finitos e os irracionais infinitos

Parece que para estes dois grupos não estão claros os critérios de racionalidade e irracionalidade para a classificação dos números; a questão da infinitude ser

associada à irracionalidade parece evidente. Certos comentários indicam algumas destas concepções:

“Se é racional tem que ser finito”.

“Não dá, pois é tudo infinito. É irracional”.

Alguns deles indicam que há questionamentos e conjecturas sendo feitas, não apenas escrever uma classificação qualquer e partir para a questão seguinte:

“Se o número vier decimal, nada garante que é dízima se não disser, pois pode a partir da 201^a casa não ter período ou começar o período. Só garante se o número decimal vier da fração tipo $\frac{1}{3}$ ”.

“Se depois do terceiro seis no 2,666... vier um 7 por exemplo,... pode ser os dois, tanto racional quanto irracional”.

“Acho que ela quis induzir que não há período, é melhor escrever que é irracional se não houver período”.

“Paramos a análise nas casas decimais após as casas escritas”. Provavelmente querendo dizer que só se podem analisar as casas decimais representadas.

Estes comentários indicam preocupação dos sujeitos com a representação e apontam que elas não são suficientemente claras e precisas para classificar um número.

Na questão em que se pedia a obtenção de um número racional entre 1,232425... e 1,332425..., quatro grupos sugeriram números na representação finita, e puseram corretamente *representação finita* quando se perguntou que tipo de representação era esta. Destacamos os seguintes comentários:

“Podemos colocar o mesmo sem os pontinhos”.

“Se tirarmos as reticências já é um número racional, já é racional”. Referindo-se aos números inicialmente dados.

A partir dos dois números dados, os sujeitos obtiveram números racionais entre eles suprimindo as reticências, ou as reticências e alguns algarismos, como confirmam estes comentários.

Dois grupos representaram os números com seis casas decimais e outros dois com duas casas, é provável que a representação finita seja mais facilmente associada como sendo a de um número racional. Porém um grupo, escolheu a representação infinita $1,233425...$ que não garante ser a de um número racional, responderam que a representação escolhida no item anterior era infinita, sem indicar que deveria haver periodicidade. Seguem dois protocolos, um no registro decimal infinito e outro no finito:

Handwritten mathematical expressions and a division problem:

$$1,233425...$$

$$1,232425..., 1,233425..., 1,332425...$$

$$\begin{array}{r} 0,05 \\ 1,282425 \end{array}$$

$$1,232425 < 1,282425 < 1,332425...$$

Na questão em se pedia a conversão para o registro fracionário, este mesmo grupo indicou que $1,233425...$ não poderia ser escrito na representação fracionária pois era irracional. Na questão em se pedia outra representação de número racional, escreveram corretamente $1,233425$. Ou os critérios não estão claros ou o grupo não leu corretamente o enunciado que pedia a representação de um número racional.

Outros grupos responderam corretamente a esta questão, e um deles imediatamente falou:

“Podemos colocar uma dízima $1,232323...$, se for dízima será racional, mas tem que escrever se não disser que é dízima não é certeza”.

Um grupo registrou duas representações finitas, sendo que eram pedidas uma finita e outra infinita, e outro discutiu a questão das representações:

“Tem que representar de forma decimal, não indicado em forma de fração e tem que vir sem os pontinhos”.

Na questão em que se pedia as representações fracionárias dos dois números racionais encontrados pelos sujeitos, nenhum grupo soube converter a representação decimal infinita de um número racional. Os acertos ocorreram apenas no caso de conversão das representações finitas como registramos num comentário:

“É só colocar o número de zeros que tem depois da vírgula”. Mesmo assim houve um erro: de 1,242425 para $\frac{1,242425}{1000000}$, mantendo a vírgula no numerador:

The image shows two handwritten examples of incorrect conversions. On the left, the decimal 1,242425 is written above a horizontal line, and below the line are seven zeros. A comma is present in the numerator. On the right, the decimal 1,233425 is written above a horizontal line, and below the line are seven zeros. A comma is also present in the numerator. Both examples show a misunderstanding of how to convert a decimal to a fraction by removing the decimal point.

Eis alguns exemplos de conversões incorretas: um grupo converteu 1,253... para $\frac{500}{399}$, que equivale aproximadamente a 1,2531328..., não havendo a preocupação de se verificar se há período na representação 1,253... para ser racional. Apesar de o grupo só ter representado três casas decimais e não ter indicado a periodicidade, já que se pedia a representação de um número racional, não teve condições para conhecer as casas decimais além da 7ª por causa da limitação da calculadora. Procuraram a resposta por tentativa e erro partindo de uma fração que se aproximasse do número pedido iniciando por $\frac{5}{3,99}$, levaram cinco minutos para chegar à representação $\frac{500}{399}$, como fração de dois inteiros.

Este procedimento parece indicar que o grupo, para provar que 1,253... é racional, preocupou-se apenas em descobrir uma fração com numerador e denominador inteiros, e não considerou que aquele é apenas uma aproximação deste valor. Mas se está registrado na calculadora “é lei”:

Outro grupo converteu 1,28282828 para $\frac{127}{99}$; parece haver uma confusão entre uma representação finita e outra infinita: 1,28282828 e $1,2\overline{8}$.

Um grupo sugeriu a representação $1,2824\overline{25}$... mas nem tentou convertê-la para o registro fracionário.

Em relação às questões que pediam a obtenção de números racionais entre um dos irracionais dados no enunciado e o racional obtido pelos sujeitos, quatro grupos escreveram os números pedidos no registro decimal finito e apenas um deles no registro fracionário como por exemplo:

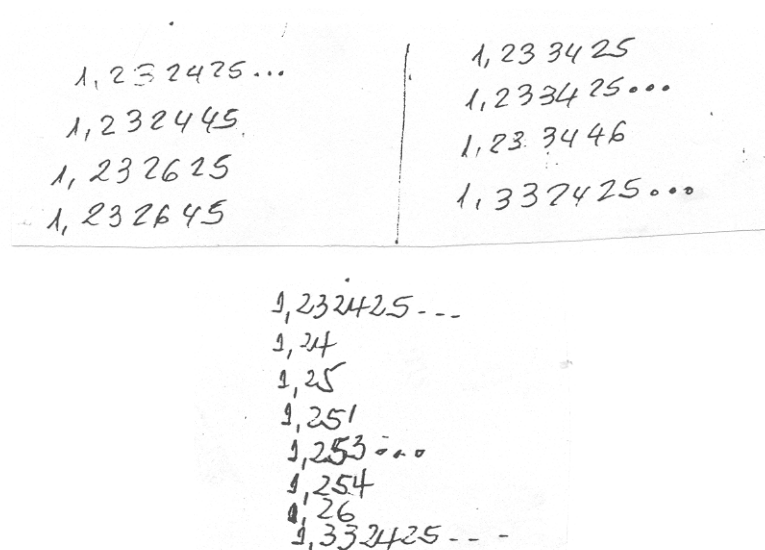
Questão 3 não é possível porque é irracional.
 $4 \Rightarrow \frac{1\,233\,425}{10^6}$

Dentre aqueles que escolheram o registro decimal, dois puseram seis casas decimais, um deles representou duas casas e o último usou ora duas, ora três casas.

Na questão em que era pedido para se ordenar os números obtidos, alguns deles poderiam ser repetidos. Dois grupos escreveram oito números, um grupo sugeriu sete números pois um deles coincidiu. Outro grupo colocou seis números pois dois deles coincidiram, e por último, um grupo, que apesar de ter achado os números pedidos corretamente, no momento de ordená-los escreveram apenas três deles, pareceu falta de atenção e não falta de entendimento do enunciado pois o número representado por $1,232425...$ foi escrito por eles como $1,2324$ e o próprio número sugerido pelo grupo representado por $1,28282828$ foi escrito $1,2828$. Aqui também o uso de aproximações levou à interpretação de um número irracional $1,232425...$ para um racional $1,2324$. Num segundo momento este mesmo grupo aproximou o número obtido por eles representado por $1,28282828$ para $1,2828$.

Quanto à disposição dos números na ordenação: um grupo colocou duas colunas com quatro números cada uma, outros dois grupos numa única coluna verticalmente e uma outra disposição dos números, entre vírgulas. Sendo que nenhum deles usou sinal de $<$ ou de $>$.

$1,232425...$, $1,232525$, $1,233425$, $1,242425$,
 $1,243425$, $1,252425$, $1,332425...$



Quanto à última questão em que era perguntado quantos números racionais diferentes existem entre os números $1,232425\dots$ e $1,332425\dots$, seguem algumas respostas:

“Infinitos. Um subconjunto dos números racionais é um conjunto infinito”.

“Existem infinitos números, aumentam as casas decimais”.

Este grupo parece ter percebido a questão da densidade. A seguinte frase indica que parece ter atingido a generalização expressando que:

“Existem infinitos números racionais entre dois números irracionais”.

*Nela atividade encontramos
finitos, porém os infinitos se
continuam.*

Durante a discussão entre os participantes, no interior do grupo, registramos o seguinte diálogo:

“Coloquei infinitos”.

“Coloquei 100.000, ou eu fiz besteira?, subtrai os dois números e deu 100.000”.

“É infinito pois aumentam as casas decimais. Quantos números há nos 3 pontinhos?”.

“Infinitos”.

“Então responde tudo”. Chegando a um acordo de que há infinitos números racionais neste intervalo.

Investigando o raciocínio para que o sujeito chegasse a 100.000 números, descobrimos que ele aproximou 1,232425... e 1,332425... para racionais e além disso retirou a vírgula e subtraiu: $1232425 - 1332425 = 100.000$. Esta situação corrobora com nossa escolha de que a resolução da atividade em duplas, ou pequenos grupos, é enriquecida pelas discussões e muitas vezes cria oportunidade para a percepção de outros pontos de vista sobre um mesmo objeto matemático.

Durante a plenária foi comentado:

“Há tantos números quanto quisermos entre dois reais”.

“Entre dois reais há infinitos, se abrangermos os reais”.

Parece que já na metade da sequência surgiu a generalização a que objetivamos.

Alguns comentários também corroboram para a pertinência da escolha das questões e alguns sujeitos mencionaram atividades anteriores:

“A tática é semelhante a anterior, peguei números difíceis antes, hoje peguei números mais fáceis”.

“A atividade anterior foi de grande ajuda como preliminar a esta”.

“Tinha uma idéia meio fechada, bloqueada na última aula”.

“Vou olhar as anotações anteriores, pois tem mais alguma coisa”.

“Eu estudei, eu fui estudar, mudou muita coisa que eu pensava que era e não é”.

“Não é igual a da semana passada?”.

Parece estar presente na memória, de uma semana a outra, os números utilizados; esta era a intenção, que a familiaridade com eles facilitasse a resolução das questões da atividade seguinte.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE VI

Esta atividade é composta por 11 questões sendo que as duas primeiras abordam novamente os critérios de classificação dos números racionais e irracionais

porém somente no registro de representação decimal, preparando os sujeitos para as questões que se seguem pois julgamos que possa haver alguma dificuldade por se tratarem de representações decimais infinitas que são pouco usuais.

As questões desta atividade abordam a existência de infinitos números irracionais entre dois racionais. As duas primeiras visam retomar o processo da média aritmética entre dois números racionais, trabalhada na atividade anterior, para investigar se este procedimento pode ou não ser aplicado para a obtenção de números irracionais.

Um dos objetivos é indagar se a representação decimal infinita é critério de classificação de número racional ou irracional. Pretendemos fornecer uma sugestão de procedimento e avaliar a reação dos sujeitos.

Nas questões são fornecidos dois números racionais em registros diferentes, um deles escrito na representação decimal infinita e o outro na representação fracionária.

Foram escolhidos os números $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$ que diferem de uma unidade.

Logo no início um grupo comentou:

“É mais fácil esta atividade que a anterior”.

“É só ir na casa anterior e ajustar”. Parece corroborar com a adequação de nossa escolha e ordenação das tarefas propostas.

No entanto, percebemos que a representação das reticências suscita dúvidas como se pode perceber no diálogo:

“Posso por mais um ‘3’ no $0,333\dots$ ficando $0,3333\dots$. Qual a diferença?”.

“Nenhuma”.

Uma preocupação com as reticências também ficou evidente no diálogo de outro grupo:

“ $0,222\dots$ não poderia ter outro número depois do dois?. O que garante que sempre é dois?”.

“Também não sei, será que eu preciso escrever três vezes o ‘2’ ou apenas uma vez?. Tem alguma regra?”.

“Quando coloca os pontinhos é tudo igual”.

“Sim”.

“Não é isso não, senão sempre teríamos números racionais. Então 0,2... é o que?”.

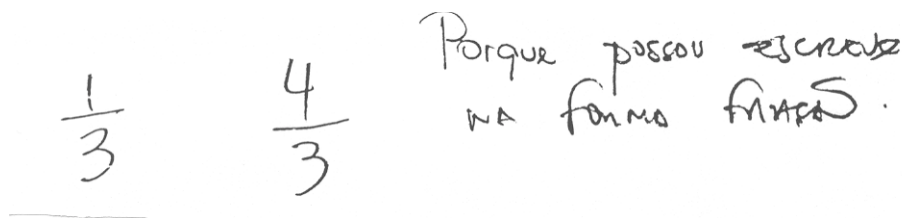
“0,2.... e 0,222... são iguais?”.

“Acho que não, senão 0,456... seria 0,456456....”.

Esta discussão parece indicar que este grupo percebeu que as reticências indicam infinitude e que pode tanto representar repetição de algarismos quanto a não repetição, dízimas periódicas ou não. Aqui parece não haver acordos tácitos nem falsas generalizações.

Dentre os protocolos, três identificaram o critério de classificação de número racional na primeira questão escrevendo que os números eram racionais pois eram dízimas periódicas. Apesar de um dos números ter sido representado no registro fracionário, estes grupos não explicitaram nenhum procedimento de conversão deste para o registro decimal. Um grupo argumentou serem números racionais pois eram dízimas periódicas e também pela possibilidade de serem escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$.

O último grupo respondeu à questão: “Dados dois números racionais 0,333... e $\frac{4}{3}$. Ambos os números têm representação decimal infinita. Por quê eles são racionais?”:



Handwritten work showing the fractions $\frac{1}{3}$ and $\frac{4}{3}$, and a handwritten note in Portuguese: "Porque posso escrever na forma fraco." (Because I can write in fractional form).

Em relação à existência de números racionais entre dois dados, todos responderam que há infinitos números racionais entre os dois racionais dados, apesar de nenhum deles ter comentado a resposta como pedíamos. Tínhamos previsto que, baseados nas atividades anteriores, poderiam ter argumentado que sempre seria possível tirar a média aritmética entre dois números racionais gerando ainda um número racional.

Na questão em que se pedia a 732ª casa decimal de 0,222... perguntando se este número é racional ou irracional, dois grupos entenderam que a representação 0,222... é uma dízima periódica respondendo que a 732ª casa decimal seria '2'.

Um outro grupo também respondeu que é '2', porém justificou expressando ser este o último algarismo:

R: Racional é o 732º e 2, porque sabemos o último número

Isto pode ter comprometido a compreensão de sua resposta afirmando que se trata de número racional, não explicitando se é pelo fato de ser periódico ou por ser uma representação finita. Ainda há a possibilidade de uma dificuldade anterior a da classificação dos números racional e irracional, ou seja, a confusão entre representação decimal finita e infinita como se pode perceber no seguinte comentário:

“Se é uma dízima periódica é finito, pois você sempre conhece o último número”. Não é pelo fato de se conhecerem todos os algarismos que o número tem representação decimal finita.

Um grupo não respondeu a esta mesma questão e outro fez conjecturas escrevendo:

se for racional é 2, se for irracional não sabemos, pois para os irracionais faltam dados.

Este mesmo grupo falou durante a resolução:

“Não posso responder esta questão, pode ser um ou outro. Podemos considerar que vai repetir o período ou temos que analisar o 2”.

“Se não falar se é racional ou não, não podemos concluir”. Mostrando sua preocupação quanto a necessidade de se evidenciar se o número representado é periódico ou não. Também neste caso, parece que não está presente uma falsa generalização.

Um grupo escreveu que a representação $0,123456789101112\dots$ era de um número irracional por não possuir período e outro justificou que não era dízima periódica. Ainda um outro grupo o classificou também como irracional por não poder ser representado como fração. Um quarto grupo escreveu irracional e não justificou e o último expressou:

R: É irracional, porque não sabemos o último número.

Novamente este grupo usou “último número” possivelmente querendo se referir aos algarismos ocultos nas reticências, pois se o número tivesse representação decimal finita seria racional e não irracional.

Um deles verbalizou a importância da representação na língua natural:

“A resposta está no texto”. Referindo-se ao fato de que número com representação decimal infinita não periódica é irracional.

Apesar de não ter surgido nenhum questionamento a respeito da questão, não ficou evidente se os sujeitos perceberam que a resposta já constava do enunciado. Seria oportuno não figurar do enunciado a expressão ‘não periódico’, para o sujeito poder ter a chance de considerar as duas possibilidades e classificar o número em racional ou irracional, conforme a sua escolha.

Quanto à ordenação dos dois números: $0,222\dots$ e $0,123456789101112\dots$, todos puseram na ordem crescente, um grupo colocou-os um embaixo do outro, um deles utilizou o sinal de menor, apesar de terem sido pedidas outras ordenações anteriormente, esta é a primeira vez em que foi utilizado o sinal de menor. Os demais grupos usaram a vírgula entre eles.

Em relação às questões em que se pediam números irracionais, dois grupos escreveram números racionais $0,666\dots$ e $(0,333\dots + 0,1) = 0,433\dots$. O número $0,333\dots$ figurava no enunciado de diversas questões, o que pode ter contribuído para a obtenção destas respostas. Os demais, acertadamente, obtiveram números irracionais. Dentre estes, dois deles escreveram $0,3338\dots$ e $0,33342\dots$ sem fazer referência à impossibilidade de haver repetição de algarismos e portanto não-periódicos. Um grupo,

em todas as questões, representou o número irracional utilizando o registro simbólico de radicais para chegar à representação decimal infinita, como por exemplo:

$$0,333 < \sqrt{1,5} < 1,333$$

Mas este grupo omitiu as reticências das representações dos dois números racionais.

Um grupo parece inseguro na obtenção de números entre dois números “próximos” como percebe no comentário:

“entre 0,333... e 0,888... vamos usar 0,555..., pois se usarmos 0,777... teremos problemas para escolher entre 0,777... e 0,888...”.

Não previmos esta dificuldade, já que em atividades anteriores já contemplamos o procedimento de modificar um algarismo para se obter um outro número compreendido entre dois dados. Novamente é possível que a representação do número racional que figura nos enunciados: 0,333..., que apresenta sempre o mesmo algarismo, tenha inspirado este comentário.

Na questão da ordenação dos números, um dos grupos escreveu:

$$0,333... < 1,18321... < 1,2247... \text{. Abaixo dos números colocou: } \sqrt{1,4} \text{ e } \sqrt{1,5}.$$

Parece que para este grupo as raízes são um forte representante de número irracional pois necessitaram desta representação para depois convertê-las para o registro decimal.

Seguem dois protocolos da ordenação dos números, um entre sinal de menor e outro entre ponto e vírgula:

$$1,0954... < 1,1401... < 1,1832... < 1,2247... < 1,2649... < 1,3038...$$

$$0,3334..., 0,334..., 0,343..., 0,433..., 0,533..., 0,633...$$

Todos os grupos parecem ter concluído que há infinitos números irracionais entre dois racionais dados, porém somente um grupo comentou sua resposta argumentando:

Existem infinitos números, aumentam os algarismos após o vírgula.

Parece que nossa tentativa de analisar sistematicamente cada caso, em relação à questão da densidade, pode ter deixado um grupo cansado como revela uma fala:

“Pergunta-se três vezes a mesma coisa, há infinitos números. Tanto faz se são racionais ou irracionais”.

Isto pode indicar que, para este grupo, menos questões seriam suficientes para discutir a propriedade da densidade do conjunto dos números reais. Com exceção deste grupo, os outros se mantiveram aparentemente entretidos e envolvidos com as questões não demonstrando cansaço em respondê-las. As discussões no interior de cada grupo se mostraram muito ricas, evidenciando o empenho de seus componentes.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE VII

Esta atividade envolveu questões semelhantes as da anterior porém sendo os dois números fornecidos mais “próximos”. Deste modo os números racionais e irracionais a serem obtidos deveriam estar compreendidos entre $1,333$ e $\frac{4}{3}$, o primeiro na sua representação decimal finita e o outro, infinita. Em relação à escolha e à proximidade dos números, destacamos os comentários:

“Ela limitou aqui”, referindo-se à dízima $1,333\dots$

“Ele está reduzindo os espaços”.

“Pode colocar qualquer casa maior que 3, por exemplo $1,3334$ ”.

“Não posso colocar 4 pois o limite é 3”.

Os dois primeiros comentários apontam que o número $1,333$ está associado a $\frac{4}{3}$, que é igual a $1,333\dots$. O último indica que a palavra ‘limite’ foi usada no sentido da limitação do número de casas decimais.

Para um grupo, apesar da semelhança com as questões da atividade anterior, observamos que a infinitude da representação é associada à irracionalidade do número, que é traduzida no comentário:

“Um número racional é sem reticências”.

“Por quê?”.

“Igual na aula passada”.

Porém para outro grupo, esta associação não ocorreu como se observa na frase:

“Dízima é racional”.

As primeiras conjecturas dos participantes a respeito da comparação dos dois números dados, expressos por 1,333 e $\frac{4}{3}$ são:

“ $\frac{4}{3}$ é um número infinito e para 1,333 chegar até ele tem que colocar infinitos números”.

“ $\frac{4}{3}$ está indo para o infinito portanto é bem maior que 1,333”.

Talvez não estivessem se referindo à grandeza do número $\frac{4}{3}$ e sim às infinitas casas decimais que sua representação possui. Estes grupos parecem não confundir infinitude de casas decimais com irracionalidade.

Nas questões em que se pediam números racionais entre dois racionais dados, dois grupos puseram números racionais com representação decimal finita, inserindo ou trocando um algarismo em um dos dois extremos do intervalo, e colocaram as reticências ao efetuarem a conversão de $\frac{4}{3}$ para 1,333... .

Nenhum grupo efetuou a conversão de 1,333 para o registro fracionário que, em muitas situações, é menos estimulada na Educação Básica. Um deles colocou apenas a representação do número pedido e um outro colocou o número obtido entre os dois números dados e entre vírgulas. Porém em uma das questões, um destes grupos escreveu 1,3330 entre 1,333 e 1,3331, registrando:

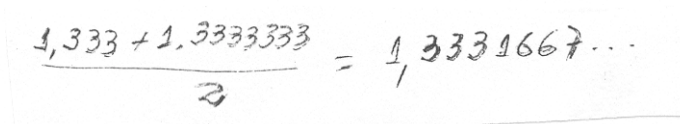
1,333 , 1,3330, 1,3331

Provavelmente este grupo confundiu número com sua representação: como a representação 1,3330 possui mais algarismos que 1,333, aquele foi considerado maior que este último. Duval defende que esta associação prejudica a apreensão do objeto.

Outro grupo ao responder à primeira questão, representou corretamente os três números utilizando sinal de $<$, e não converteu $\frac{4}{3}$ para a representação decimal. Ainda um outro grupo discutiu:

“Posso somar e dividir por 2 para achar um número entre eles?”.

“Pode”. Decidiu, então, converter $\frac{4}{3}$ para a representação decimal, e depois aproximou para representação decimal finita 1,3333333 para tirar a média entre este número e 1,333 e assim obter um número racional entre eles. Mas ao invés de representarem a média que é 1,33316665, utilizaram 1,3331667... :



$$\frac{1,333 + 1,3333333}{2} = 1,3331667\dots$$

Possivelmente os sujeitos realizaram uma aproximação na 7ª casa decimal e como originalmente a representação decimal de $\frac{4}{3}$ apresentava reticências, ‘devolveram’ este símbolo à representação obtida. Para tirar a média envolvendo números racionais com representação decimal infinita, nas questões seguintes, este grupo repetiu este mesmo processo. O procedimento de tirar a média para se obter um número racional entre dois outros, fora sugerido nas questões das atividades anteriores, no caso dos números terem representações finitas. Este grupo manteve a sugestão da média tentando adaptar para o caso da representação infinita.

Registramos uma primeira conclusão de um grupo logo no início da atividade:

“Mesmo diminuindo o intervalo continuam tendo infinitos números”.

Para outro grupo não foi tão imediata a conclusão, demonstrando insegurança quanto às representações serem ou não de um mesmo número como se observa no diálogo:

“1,333 é menor que 1,3330?”.

“Qual a 4ª casa de 1,333?”.

“Zero?”.

Outro diálogo onde se observa a preocupação com os Algarismos não representados, no registro decimal, para poder comparar os números:

“1,3331... é menor que 1,33311?”.

“Você sabe qual é a 5ª casa de 1,3331...?”.

“É melhor colocar 2 no 1,3332 pois senão, não dará para achar números entre os dois”.

Nesta altura, voltaram à questão 1 e mudaram o resultado anteriormente sugerido que era 1,3331 para 1,3332. Este fato só foi possível de ser detectado através da gravação. Analisando apenas o protocolo, isto não poderia ser percebido.

Continuando, o diálogo prosseguiu com:

“Como entre 1,3332 e 1,333... continua o $\frac{4}{3}$?”.

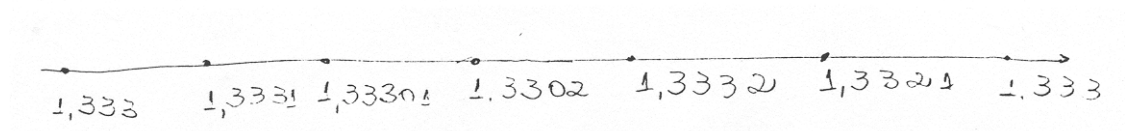
“Posso por zero, 1,33320 entre 1,3332 e 1,333...?”.

“Não, fica igual”.

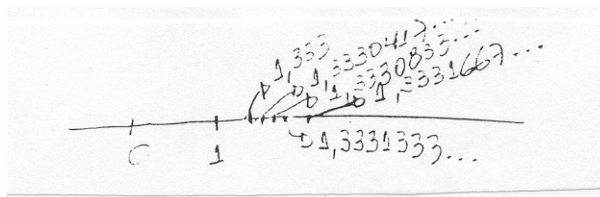
“Num momento pensei que não havia mais números pois estavam muito próximos”.

Parece que neste momento mudou de idéia refletindo a respeito da existência de números num intervalo “pequeno”. Novamente surgiu a questão da confusão entre o número e sua representação: aquela que tem maior quantidade de algarismos indica o maior número, mesmo que alguns destes algarismos sejam zero.

Na questão em que era pedida a representação na reta, todos localizaram os sete números que tinham aparecido até então, no registro decimal, com exceção de um grupo que colocou na reta a representação fracionária $\frac{4}{3}$. Dois grupos puseram orientação na reta à direita ($\rightarrow$) e um grupo ainda escreveu $\rightarrow$.



Somente um grupo não utilizou toda a largura da folha para a representação na reta, fixou uma unidade com aproximadamente um centímetro e a representação dos números ficou confusa num espaço pequeno e indicado com flechas.



Aqueles que se preocuparam com a escala a ser utilizada falaram durante a resolução desta questão:

“Meu intervalo está pequeno, está acabando”.

“Representar na reta... é bem pequeno, um bem próximo do outro, vou colocar um espaço maior”.

“Vou tomar cuidado, um é próximo do outro, precisa de um maior espaço”.

É provável que saibam da existência de números no intervalo da reta por menor que seja, e talvez, a noção da densidade dos números reais também.

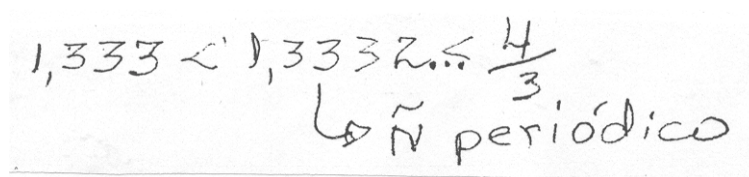
Três grupos responderam haver infinitos números racionais entre dois racionais, mas não comentaram suas respostas, como era pedido. Porém numa resposta houve confusão no critério de irracionalidade quando puseram que havia infinitos números racionais entre um racional e outro irracional referindo-se ao $\frac{4}{3}$, possivelmente evidenciando a concepção de que representação decimal infinita é referente a um número irracional.

Um grupo escreveu:

No processo de tirar a média aumenta as casas decimais,
Infinito.

Talvez querendo dizer ser este processo sempre possível e a cada divisão mais uma casa decimal pode, às vezes, ser representada.

A partir da obtenção de números irracionais, todos os grupos colocaram as reticências, dois deles representaram apenas os números obtidos, os outros dois escreveram além do número obtido por eles, os dois números do enunciado. Um grupo representou os três números entre vírgulas e outro utilizou sinal de $<$. O grupo que utilizou sinal de menor escreveu em todas as questões que o número obtido era não periódico:



$$1,333 < 1,3332 \leq \frac{4}{3}$$

↳ Ñ periódico

Durante a resolução desta questão, houve, neste mesmo grupo, o comentário:

“Precisa explicar que os números são não-periódicos”.

O seguinte diálogo parece mostrar que este grupo não aceita acordos tácitos e evita falsas generalizações:

“Só colocar reticências resolve?”.

“Não, você tem que mudar a última casa. Mude as duas casas e tem que escrever que ele não é periódico, só por as reticências não garante. Não esqueça de escrever que é não-periódico”.

Um grupo fez uma aproximação racional de um número irracional obtido e tirou a média aritmética entre ele e 1,333 e depois acrescentou as reticências explicando ser não-periódico como se verifica no diálogo:

“Pego a média entre os dois”.

“Aí você terá um número racional”.

“É só colocar reticências e escrever que não é periódico”.

Durante a resolução um sujeito explicou para seu companheiro:

“Não podemos mudar nem colocar números nas casas decimais que não são dadas”. Referindo-se à impossibilidade de troca de algarismos que não estão representados no registro decimal, quando não forem conhecidos.

Em relação à comparação entre dois números:

“1,33321... é menor que 1,333215... é menor que $\frac{4}{3}$ ”.

Seu companheiro percebeu o erro na comparação dos dois números:

“Tem que deixar claro que o final que garante, senão, poderia ser o mesmo número”.

O primeiro sujeito não conjecturou a respeito das possibilidades para sexta casa decimal de 1,33321... e não poderia afirmar que ele é necessariamente menor que 1,333215... , porém não modificaram sua resposta:

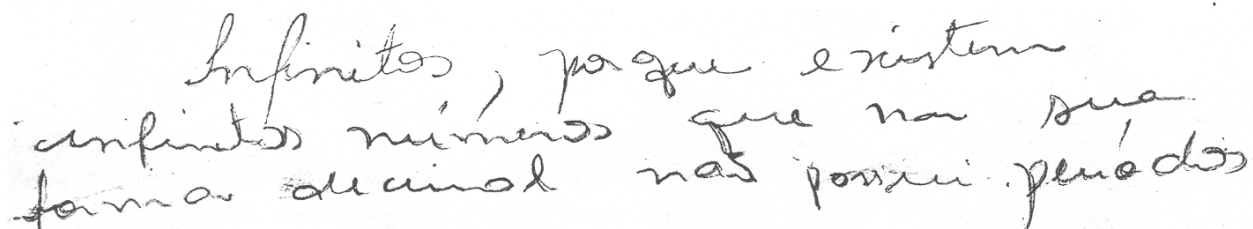
1,333 < 1,33305... < 1,3332... < 1,33321... <
< 1,333215... < $\frac{4}{3}$. Todos os números
com reticências não são periódicos

Na ordenação dos sete números obtidos, um grupo colocou-os entre vírgulas, outro entre sinal de <, outro os colocou um abaixo do outro e ainda uma outra representação, os localizou na reta explicitando a orientação desta por meio de uma flecha. Os dois últimos grupos fizeram coincidir uma das representações, achando ao todo apenas seis números.

Um dos grupos, além dos seis números irracionais obtidos nesta fase, também ordenou os sete números racionais obtidos no início desta atividade, totalizando treze (ou doze) números. Não tínhamos previsto esta situação, pretendíamos ordenar num primeiro momento apenas os números racionais dos extremos e os irracionais entre eles, e não todos os números manipulados nesta atividade. Segue um protocolo onde constam doze representações decimais destes números:

1,333	1,333123 ---
1,333047...	1,333124 ---
1,3330823---	1,3331333---
1,3331...	1,3331667---
1,333126...	1,3333333...
1,333120...	
1,333121...	

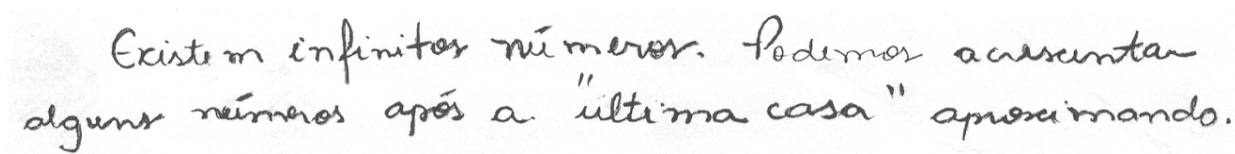
Quanto à última questão que perguntava quantos números irracionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$, dois grupos responderam simplesmente que havia infinitos números irracionais entre dois racionais. Um tentou justificar escrevendo:



Infinitos, porque existem infinitos números que na sua forma decimal não possui períodos.

Sua explicação contém apenas o critério de irracionalidade mas não citando as infinitas possibilidades de se trocar e inserir algarismos.

Outro grupo colocou:



Existem infinitos números. Podemos acrescentar alguns números após a "última casa" aproximando.

Provavelmente querendo dizer que, pelo fato de existirem infinitas casas decimais, ao representar uma a mais do que o número de algarismos escritos numa representação, ou modificar a última, possibilita compará-los, por exemplo: partindo da representação 1,333 obtém-se 1,3324..., que é menor que o primeiro. Ou ainda a partir de 1,333241... chega-se a 1,333242..., que é maior que o primeiro.

Registramos o seguinte comentário que evidencia a noção da propriedade de densidade:

"Tanto faz ser racional ou irracional que há racionais e irracionais".

Referindo-se à irrelevância da categoria dos números dos extremos do intervalo dado em relação aos números compreendidos entre eles.

Outro comentário evidencia o infinito:

"Está sempre repetindo o infinito". Referindo-se às últimas questões da maioria das atividades.

Na análise global alguém falou:

“Depois que acha o primeiro fica fácil achar os outros, você vai aumentando”.

Este comentário provavelmente corrobora com a seqüência das questões.

Durante a discussão, um sujeito comentou uma possível abordagem deste tema junto aos seus alunos:

“Acho que o aluno do Ensino Médio acompanha o raciocínio se for bem devagar, primeiro racional entre dois racionais e assim vai indo”.

Esta questão fez aflorar em outro participante uma antiga insegurança:

“Sempre tenho esta dúvida: como explico aos meus alunos que tenho infinitos números num intervalo, se parto do 1 e chego no 2?”.

É possível que algumas questões, aqui discutidas, tragam elementos para a reflexão dos professores que possam se refletir nas suas práticas docentes.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE VIII

O objetivo é instigar os participantes a obter números racionais e irracionais entre números “muito próximos”, um número racional: 3,14 e outro irracional: π , dados. Pretende-se também investigar se os sujeitos associam estas duas representações a de um mesmo número.

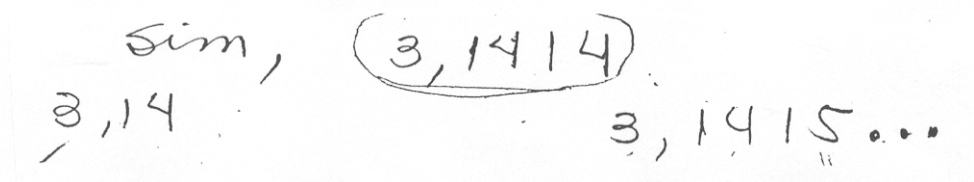
Logo no início da atividade esta “proximidade” dos números foi comentada por um participante:

“Está diminuindo o intervalo”.

Percebemos que um grupo teve a preocupação de olhar o que estava sendo solicitado nas próximas questões para poder escolher os primeiros números, e outro modificou posteriormente:

“Ajustei a questão 1 para responder a questão 4, fica mais fácil colocar na ordem”. Com *ajustar a questão*, o grupo estava se referindo à resposta dada à questão 1. Esta preocupação mostra que a escolha de dois números “próximos” pode exigir uma tomada de posição na escolha dos números entre eles.

Entre as questões em que se pediam números racionais entre 3,14 e π , todos os protocolos contêm números racionais na sua representação decimal finita. Dois deles puseram apenas a representação do número pedido e os outros dois escreveram as representações dos três números, um deles entre ponto e vírgula, não se esquecendo das reticências conforme o protocolo a seguir:

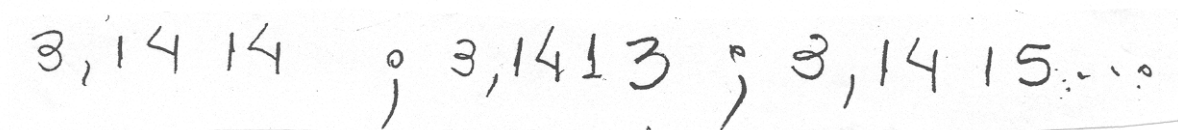


Handwritten student response: "Sim, 3,14", "(3,1414)", "3,1415..."

O primeiro número foi dado no enunciado, o último nada mais é que uma conversão do registro simbólico do número π dado, para o registro decimal 3,1415... . O segundo número foi, provavelmente, obtido fazendo um tratamento neste registro, isto é, substituindo o algarismo '5' explicitamente representado, pelo '4'.

Outro grupo que escreveu os três números, manteve o registro simbólico π e usou o sinal de menor escrevendo: " $3,14 < 3,141 < \pi$ ". É provável que, apesar de manter o registro simbólico π , o número intermediário 3,141 foi obtido a partir do valor aproximado de π , 3,1416, utilizado com frequência no Ensino.

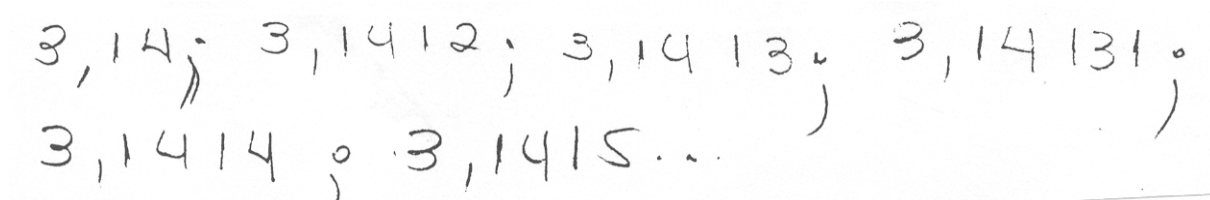
Na questão em que se pedia um número racional entre 3,14 e aquele obtido pelos participantes na questão anterior, o grupo colocou:



Handwritten student response: "3,1414", "3,1413", "3,1415..."

Durante a atividade pudemos observar que os participantes, de um modo geral, escrevem os dois números dados para daí inserir o número pedido, este procedimento não foi diferente neste grupo e no entanto mesmo visualizando as duas representações errou ao sugerir 3,1413 entre 3,1414 e 3,1415... .

Porém na questão que era para ordenar os dois números dados além dos números obtidos, este mesmo grupo acertou, não se dando conta da contradição existente entre as respostas por ele obtidas em duas questões diferentes porém “próximas” (questões 4 e 6).



Handwritten mathematical expressions showing decimal approximations of π :

$$3,14; 3,1412; 3,1413; 3,14131; \\ 3,1414; 3,1415...$$

Não houve evidências de que algum sujeito tenha considerado as duas representações como a de um mesmo número. Os próprios enunciados das questões “encaminham” para esta não associação quando na primeira questão se perguntava se existia algum número racional entre eles, no caso afirmativo escrever um deles, e na segunda pedia-se diretamente um número racional entre 3,14 e o número obtido na questão anterior.

Nesta atividade houve apenas um grupo que tirou a média aritmética entre 3,14 e alguma possível aproximação racional de π , como ocorreu na atividade anterior que foi realizada no mesmo dia.

Outro grupo aproximou π para 3,141 e tirou a média entre 3,14 e 3,141. Durante a resolução registramos o seguinte diálogo:

“Sem a calculadora seria fácil?”.

“Não, seria outra técnica”.

Como optaram por tirar a média aritmética por acharem mais fácil, deixam a indicação de que ainda não se apropriaram do procedimento, de trocar algarismos na representação decimal para gerar outro número maior ou menor que o primeiro.

No momento em que um sujeito sugeriu 3,1416 como representação de um número menor que π , seu companheiro argumentou corretamente:

“Se puser 3,1416 extrapola o π ”. A sugestão do primeiro participante indica que ele escolheu corretamente uma aproximação racional do número π , apesar desta escolha não ser adequada como apontou o seu companheiro do grupo. Este diálogo

evidencia que o trabalho em grupo pode trazer à tona certas concepções que num trabalho individual poderia não ter sido notado.

Para ordenar os números dados e os racionais obtidos, um grupo utilizou ponto e vírgula, outro usou sinal de menor, o terceiro os colocou um abaixo do outro, e o último localizou-os na reta orientada para a direita, mas dentre os sete números que apareceram, só representaram seis. Um grupo utilizou corretamente o mesmo número em duas questões diferentes ordenando somente seis números. Para π dois grupos o representaram neste mesmo registro simbólico, um deles escreveu 3,1415... e o outro 3,1415927... .

Em relação à questão que perguntava quantos números racionais existem entre 3,14 e π , dois grupos responderam simplesmente que havia infinitos. Um deles escreveu:

“Existem infinitos. É necessário acrescentar as casas”. Parece que tentou explicar o procedimento de obtenção destes números, isto é, que percebeu que a quantidade de possibilidades ilimitada de inserção ou representação de uma casa decimal a mais a cada número buscado. Partiu do 3,14 e se baseou na representação decimal infinita de π , 3,14159..., percebendo que há infinitas possibilidades para sugerir e trocar algarismos nesta representação. Sugeriu então 3,1405 entre os dois números dados.

Outro grupo respondeu:

“Infinitos, pois sua forma decimal não possui período”. Este grupo não justificou, apenas comentou o critério utilizado para classificar o número π que não possui período em sua representação decimal, e somente isso não justifica a existência de infinitos números naquele intervalo.

A propriedade da densidade da reta, no sentido que está sendo usado neste trabalho, não está clara para todos como ficou evidenciado no diálogo:

“Só tem racional entre dois racionais”.

“Não, tanto faz ser racional e racional ou irracional, trabalhamos com eles juntos, misturados. É a idéia de infinito”.

Com a discussão no grupo, percebemos que quando o sujeito disse *tanto faz ser racional e racional ou irracional*, estava se referindo a existência de números reais entre dois racionais ou entre um número racional e outro irracional.

Talvez a *idéia de infinito*, expressa pelo segundo sujeito, signifique a existência de infinitos números no intervalo determinado pelos números dados.

A palavra *período* não tem o mesmo significado para todos. Um participante parece designá-la como sinônimo de infinitas as casas decimais, como o que acontece com a representação decimal de π , como se observa no comentário:

“O período prova que tem infinitos números porque retorna sempre uma casa em direção ao 3,14”. Este procedimento parece ser semelhante ao descrito anteriormente, o sujeito parte da representação decimal infinita de π , em que trocará algarismos, e observa o 3,14 para que o número inserido não seja menor que ele.

O arredondamento sem critérios de um número irracional para a representação decimal finita parece ser permitido para alguns, um sujeito propôs arredondar o π para 3,1416 surpreendendo seu parceiro, que discorda:

“Se você colocar 3,1416 tá maior que o π , não pode”.

“Tá arredondado”.

“Não pode”.

Esta aproximação é justificável pois ela é feita no Ensino, mas neste caso a aproximação por excesso origina um número que não está entre os dois números dados, como próprio sujeito afirmou que a aproximação é maior que o próprio número. Mais uma vez, foi evidenciado que em muitas ocasiões, o diálogo num trabalho em grupo enriquece muito, possibilitando o levantamento de conjecturas que talvez o sujeito sozinho não considerasse.

Na segunda parte das questões desta atividade o foco é a obtenção de números irracionais entre 3,14 e π dados inicialmente. Todos os grupos prestaram atenção e puseram as reticências na representação decimal do número irracional obtido. Um dos grupos escreveu que as representações eram não periódicas, o que mostra a preocupação com a caracterização correta do número irracional, sem que haja dúvidas e também sem confiar em acordos tácitos.

Em relação às primeiras questões que pediam a obtenção de números irracionais entre os dois números dados, os grupos procederam da mesma maneira que na primeira parte onde eram pedidos números racionais. Dois deles puseram apenas a representação do número pedido. Um destes errou ao escrever que 3,1415... era menor que 3,141555..., provavelmente não percebeu que pelo fato de não se conhecer a quinta casa decimal de 3,1415... não poderia afirmar que um número era menor do que o outro. Este erro se repetiu nas duas questões seguintes deste mesmo grupo.

Uma das duplas representou os três números entre ponto e vírgula e desta vez também houve um erro, similar ao anteriormente apontado, pois não fez conjecturas a respeito da quinta casa decimal de 3,1412... , que poderia ser maior que 1, assim 3,1412... poderia ser maior que 3,14121... e não menor como supôs, poderia ter colocado 3,1413... .

3,1412... ; 3,14121... ; 3,1415...

Talvez o fato de não ter sido representada a quinta casa decimal de 3,1412..., o grupo atribuisse zero a ela e substituísse o zero atribuído por 1 para obter o número 3,14121... Alguns grupos já verbalizaram, nas atividades anteriores, que a troca de algarismos deveria sempre ocorrer nas casas decimais conhecidas, mas este grupo parece que não percebeu. Este mesmo grupo, na questão da ordenação, escreveu todas as sete representações, mantendo coerentemente a suposição feita anteriormente que 3,1412... é menor que 3,14121... .

O último grupo também representou os três números porém entre sinal de menor, utilizando o registro simbólico π :

Sim.
 $3,14 < 3,1415 \leq \pi$
 $\hookrightarrow \tilde{N}$ periódico

Mas este mesmo grupo cometeu duas vezes o mesmo erro que o grupo anterior:

$$\begin{array}{l}
 3,1415... < 3,14157... < \pi \\
 \hookrightarrow \tilde{N} \text{ periódico} \\
 3,14157... < 3,141572... < \pi \\
 \hookrightarrow \tilde{N} \text{ periódico}
 \end{array}$$

Também aqui é possível que não fizeram conjecturas sobre as possibilidades de algarismos para a quinta casa decimal que não foi representada em 3,1415..., não havendo garantia de que fosse menor que 3,14157... . No momento da ordenação, os sujeitos foram coerentes, o que caracteriza que provavelmente não tenha sido apenas uma distração, pois para ordená-los, haveria a necessidade de comparar uma a uma as casas decimais, até que fosse estabelecida a ordem. Neste caso, mesmo analisando todas as casas decimais representadas, não seria possível estabelecer tal ordem. O que chama atenção é que isto ocorreu apesar deste ser um dos grupos que mais demonstrou cuidado nas respostas, principalmente ao explicar que suas representações são não periódicas.

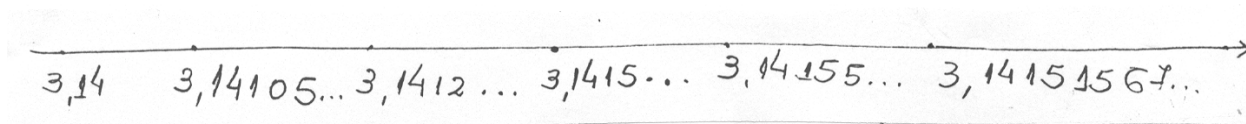
Novamente um dos grupos percebeu a necessidade de modificar um número anteriormente obtido, para facilitar a obtenção de um segundo número:

“Na questão 8 vou abaixar um número”. Este grupo percebeu, após ter respondido a questão 8, que para responder a questão 9 deveria substituí-lo pois o número escolhido inicialmente trouxe dificuldades para a escolha do seguinte.

Uma das duplas, na questão da ordenação, procedeu da seguinte forma: listou todos os doze números que apareceram nesta atividade, da mesma maneira que listara os números da atividade anterior, escrevendo-os um abaixo do outro em duas colunas:

3,14	3,1407...
3,1402	3,1408...
3,1403	3,1409...
3,1404	3,1410...
3,1405	3,1411...
3,1406	3,1415927...

Outro grupo localizou-os na reta orientada para a direita, mas se esqueceu de um dos números.



Os demais grupos ordenaram os números obtidos utilizando sinal de menor ou ponto e vírgula entre eles como se observa nos protocolos:

$3,14 < 3,140375... < 3,14075... < 3,1415... <$
 $< 3,14157... < 3,141572... < \pi$
 * Todos estes números que tendem ao infinito não são periódicos.

$3,14; 3,1410...; 3,1411...; 3,1412...;$
 $3,14121...; 3,1413...; 3,1415...$

A questão final, a respeito da quantidade de números irracionais existentes entre 3,14 e π , dois grupos escreveram que o intervalo determinado por esses números continha infinitos números porém sem comentários adicionais. Um grupo repetiu o que havia escrito na primeira parte da atividade:

“Infinitos, pois sua forma decimal não possui período”.

Um deles modificou sua resposta anterior escrevendo:

“Existem infinitos números. É necessário acrescentar um número após a última casa e suas reticências”. Parece que tentou explicar a necessidade de representar uma casa decimal a mais em relação a um número obtido numa fase anterior, como por exemplo a partir de 3,1412... se obtém um número menor 3,14105.... Talvez não tenha percebido que a casa alterada foi a quarta e que não haveria necessidade de

representar a quinta, neste caso. Também nem sempre vale tal justificativa, como este mesmo grupo cometeu um deslize ao escrever que $3,1415\dots$ é menor que $3,141555\dots$, possivelmente considerando apenas o fato de ter representado maior número de algarismos, sem considerar as possibilidades do primeiro não representado poder ser maior que '5'.

A representação decimal infinita parece suscitar dúvidas, talvez pelo fato de não ser enfatizada no Ensino. Não é surpreendente haver esta dificuldade pois sabe-se que historicamente a noção de infinito causou polêmica e dificuldade entre os Matemáticos.

A possibilidade da identificação entre o objeto e sua representação, ou seja, a representação que contém maior número de casas decimais é identificada como sendo o número maior do que aquele cuja representação tenha menor número de casas. Justamente esta identificação entre o objeto e sua representação que Duval destaca que deve ser evitada.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE IX

As questões desta atividade têm como objetivo obter números tanto racionais quanto irracionais entre dois números irracionais dados: $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$. Nas onze primeiras casas decimais de cada representação, o que os diferencia são a 10^a e 11^a casas decimais. Esta praticamente engloba as situações das atividades anteriores.

Logo no início da resolução das questões registramos o seguinte comentário:

“Cada dia ela está diminuindo mais, mas nunca vai conseguir, pois é infinito”.

Parece que este sujeito percebe que apesar da diminuição da distância entre os números, sempre haverá infinitos números entre eles.

Na primeira questão era necessário achar um número racional entre os dois números irracionais dados. Todos propuseram um número na sua representação decimal finita. No entanto um grupo errou ao sugerir: $0,101001$, sem perceber que era menor que o primeiro número dado e justificou:

0,101001
 Apesar de não poder tirar a média de n° irracional aproxima-se os dois n° e consegue então uma média

Na prática estes sujeitos utilizaram uma calculadora que trabalha com oito dígitos, ao aproximarem consideraram os dois números iguais a 0,1010010 e, conseqüentemente, obtiveram como média ele mesmo. Este grupo não utilizou a sugestão de procedimento, de trocar um ou mais algarismos em uma representação decimal, para gerar um novo número entre os números dados. Talvez a aproximação evidencie a dificuldade em entender e trabalhar com a representação decimal infinita, além dela ser reforçada pelo uso de calculadoras como mostra o comentário:

“Não cabe na calculadora”.

Ainda na questão que pedia um número racional entre os dois irracionais dados, um outro grupo antecipou uma das questões finais desta atividade escrevendo:

Sim. 0,10100100001
Entre dois números irracionais existem inf. N^{os} racionais

Parece que para este grupo um dos objetivos da investigação já foi atingido

Na segunda questão em que era pedido um número irracional entre eles, dois grupos acertaram não se esquecendo das reticências. Um destes colocou:

Sim, 0,101.001.000.06...
desde que não periódico

Esta resposta denota a preocupação de precisão quanto à representação decimal infinita explicitando que, provavelmente, não está confundindo a representação com o objeto representado, como preconiza Duval. Outro grupo generalizou:

“Existem infinitos números irracionais entre dois irracionais”.

Porém, o mesmo grupo que errou a primeira questão, também errou esta pois sugeriu 0,101001... Novamente este grupo não percebeu que o número sugerido poderia ser menor que 0,10100100001... e que deveria ter representado no mínimo as onze primeiras casas decimais para poder compará-los e ordená-los com segurança.

Um sujeito de outro grupo, propôs tirar a média aritmética entre os dois números irracionais para obter outro número irracional, registramos um diálogo:

“E os três pontinhos?”.

“Considerarei finito...aproximei para racional”.

“A média aproximada é racional, para transformar em irracional é só por três pontinhos”.

Este grupo fez a aproximação para permitir efetuar o cálculo da média aritmética, depois colocou reticências na representação decimal finita obtida pela média tornando-a infinita e com este procedimento obteve um número irracional.

Outro grupo percebeu que o número dado não era uma dízima periódica:

“0,101001000... não é período”.

Porém a representação decimal infinita suscita dúvidas para alguns, como revelam os comentários de vários grupos:

“Se é representação decimal é irracional”.

“Se tem reticências é irracional”.

“O racional é finito e o irracional é infinito”.

“A notação ‘...’ já diz que é irracional”.

Apesar de termos discutido a questão da representação decimal infinita, parece que não é um assunto fácil de ser apreendido pois alguns sujeitos a associam ao número irracional, fato que já tinha sido evidenciado em algumas das pesquisas citadas.

Na terceira questão era perguntado se poderia haver repetições de algarismos após a 12^a casa e se isto significaria haver período. Os grupos perceberam que pelo fato de os números serem irracionais não poderiam ter período a partir da 12^a casa decimal. Mas um deles apesar de indicar que o fato dos números apresentarem algarismos diferentes na representação decimal, já ser garantia que são números diferentes, parece não saber converter o registro da língua natural: um décimo, para o registro decimal: 0,1 quando disse:

“Não serão iguais pois um número é maior que o outro, tem um décimo entre eles”.

Outro sujeito enfatizou:

“Tem reticências e não tem período, é irracional, não vou imaginar que na 200^a casa tem período...”.

Isto mostra que o critério de classificação dos números com representação infinita, provavelmente, está claro para este sujeito.

O enunciado desta questão precisa de uma correção: no lugar da expressão ‘haver repetições’ deveria figurar ‘haver período’.

Em relação à quarta questão, que indagava a respeito da possibilidade de os números serem iguais caso as casas decimais não representadas fossem iguais, dois grupos responderam que a parte oculta dos dois números poderia ser igual, mas os números ainda continuariam diferentes pois já eram diferentes considerando-se suas representações até a 10^a casa decimal, como se observam nas justificativas:

Podem ser a mesma, mas os números não são iguais.

Sim.. Não.. porque são inicialmente diferentes

Outro grupo escreveu:

não porque se são irracionais nunca serão iguais

Este comentário se refere aos números irracionais inicialmente dados que já eram diferentes antes mesmo de se supor que as casas decimais ‘ocultas’ de ambos fossem iguais, portanto resumidamente este grupo respondeu que os números irracionais eram diferentes pois originalmente eram diferentes.

Todos os grupos responderam corretamente à quinta questão que pedia para classificar em racionais ou irracionais os dois números da questão anterior.

Na questão que perguntava qual dos dois números $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$ era maior, todos os grupos puseram o segundo número.

Nas duas últimas questões que indagavam a respeito da quantidade de números racionais e irracionais entre os dois inicialmente dados, todos concluíram que há infinitos números racionais e infinitos irracionais entre os dois números irracionais. Somente um grupo fez algum comentário tentando justificar:

“Infinitos números, aumentam as casas decimais”.

Provavelmente não percebeu que não se pode aumentar as casas decimais pois a partir da 12^a casa os algarismos não são conhecidos, somente seria possível modificar as duas últimas casas representadas, a 10^a e 11^a.

Analisando os protocolos das outras atividades e os diálogos deste mesmo grupo pareceu-nos que, aumentar as casas decimais significa por exemplo que para obter números entre 0,1 e 0,2 é necessário partir de 0,1 e escrever uma representação com casas decimais a mais, como por exemplo 0,15 ou 0,199, mas no caso desta atividade este raciocínio não se aplica por causa da natureza das representações inicialmente dadas. Para encontrar números entre 0,1 e 0,2 basta escrever um número que tenha necessariamente a parte inteira igual a zero e a primeira casa decimal igual a um, a partir da segunda casa decimal pode-se escolher qualquer algarismo. Portanto este número terá no mínimo duas casas decimais, diferentes de zero, conhecidas.

No entanto para se achar um número entre $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$, como suas representações diferem na 10^a e 11^a casa decimal e a partir da 12^a casa não são conhecidos seus algarismos, somente é possível modificar a 11^a casa da primeira representação, não se alterando o número de casas decimais conhecidas como no exemplo anterior. Por este motivo que o argumento de *aumentar as casas decimais* não é uma justificativa neste caso.

É possível que este grupo tenha criado uma resposta-padrão que serviu para a maioria das atividades até aqui. Com exceção da natureza das representações utilizadas nas respostas às questões desta atividade, a justificativa usada por eles se mostrou coerente e correta. As representações decimais finitas dos números fornecidos anteriormente, possibilitavam o aumento do número de casas decimais representadas,

como no caso de se encontrar números entre 1,333 e 1,333... Nesta situação basta modificar os algarismos da quarta casa decimal em diante para sugerir por exemplo o número 1,3331 ou 1,33332 entre os dois inicialmente dados. Os dois números sugeridos, 1,3331 e 1,33332, têm na sua representação, quatro e cinco casas decimais conhecidas, respectivamente, portanto mais casas decimais representadas do que em 1,333.

Outro grupo respondeu à mesma questão conforme o seguinte protocolo:

Infinitos números. Entre dois N.ºs irracionais existem infinitos números irracionais.

Em atividades anteriores, houve várias vezes comentários de sujeitos a respeito da impossibilidade de serem modificadas as casas decimais que não estavam representadas, esta concepção existe apenas para um grupo.

ANÁLISE DOS DADOS – ATIVIDADE X

A última atividade da seqüência é composta por catorze afirmações para serem julgadas em verdadeiras ou falsas. As questões envolvem os critérios de classificação dos números reais e a propriedade da densidade, mais especificamente objetiva comparar as concepções identificadas na atividade II, como por exemplo a identificação de número irracional com a representação decimal infinita, identificação da representação fracionária como número racional e a possível identificação de número irracional com sua aproximação racional. Pretende-se também analisar a evolução dos argumentos e conjecturas em relação ao início da seqüência.

Em relação à classificação das afirmações em verdadeiras ou falsas, a maioria acertou. Apenas um dos grupos errou a questão 1 e outro a questão 9.

O desempenho nesta atividade, dois erros em catorze questões melhorou consideravelmente se comparado com o da atividade II que foi doze erros em catorze questões. Houve mais acertos em relação à classificação em verdadeiro ou falso e também maior número de justificativas apresentadas, além de argumentos mais elucidativos.

A seguir são transcritas as questões e feita sua análise.

1. () É possível calcular a média aritmética de dois números racionais quaisquer.

Um grupo classificou a afirmação como sendo falsa, apresentando o comentário:

“Não, porque uma dízima não periódica é um número irracional e portanto não se faz a média entre eles”.

Esta resposta estaria coerente se no enunciado constasse números reais no lugar de racionais, já que o grupo identificou corretamente uma dízima não periódica como sendo um número irracional. Ou então pode ter equivocadamente lido irracional onde está escrito racional. Estas confusões podem indicar dificuldade de entendimento do registro da língua natural.

Outro grupo, apesar de ter classificado a questão como verdadeira, confundiu-se na justificativa:

1. (V)

Sim. Porque o número é finito.

Evidenciando que a concepção de número racional é aquele que tem somente a representação decimal finita, ainda persiste.

Os demais classificaram corretamente em verdadeiras ou falsas todas as questões.

2. () Todo número que tem representação decimal infinita é um número irracional.

Nesta questão, os comentários parecem estar mais elaborados que no início da sequência como se observa a seguir:

“Porque a representação decimal infinita pode ser periódica ou não periódica”.

2. (F)

Não, pois o número que aparecer período é racional.

2. (F)

$\frac{1}{3}$ tem periodicidade na sua representação decimal e nem por isso é um nº irracional

Este último grupo realizou uma conversão do registro fracionário para o registro decimal infinito e identificou as duas representações com um mesmo número, evidenciando a possibilidade de uma representação decimal infinita ser referente a um número racional. Durante a resolução registramos a fala de um sujeito a respeito das reticências da representação decimal infinita:

“Nem todo número com reticências é irracional, pode ser racional”.

3. () $\frac{\pi}{2}$ é racional

Nesta questão, todos os grupos classificaram corretamente como falsa. Destacamos as justificativas apresentadas pelos sujeitos:

3. (F)

Não, pois ele é apenas uma representação e não uma fração.

Provavelmente o grupo percebeu que esta representação não é a de um número racional pois não obedece ao critério da natureza dos números que compõem a representação fracionária.

A seguinte resposta talvez indique que este grupo avalie que o quociente entre um número irracional por um racional continua sendo irracional.

“Porque o valor de π é irracional”.

A justificativa a seguir parece indicar que para estes sujeitos, a maneira de eliminar o problema da irracionalidade é a aproximação para racional no registro de representação decimal finito, como propôs Eudóximo no século IV a.c.

“Você o torna racional, por aproximação”.

4. () Entre um número racional e um número irracional existem números racionais e números irracionais.

Todos os grupos classificaram corretamente a afirmação como sendo verdadeira.

Nesta questão, o último grupo referido na questão anterior, utilizou novamente o procedimento da aproximação como mostra a justificativa:

4. (V)

$$\text{Sim: } \frac{1}{3} + \sqrt{2} / 2 = 0,873773448.$$

para deixá-lo irracional, basta colocar reticências

Este grupo utilizou uma aproximação do número irracional $\sqrt{2}$ para racional, efetuou a média aritmética entre este número e $\frac{1}{3}$, e depois acrescentou as reticências, obtendo no seu modo de ver, um número irracional. Parece que para este grupo houve confusão quanto às sugestões de procedimentos: tirar a média aritmética de dois números racionais no registro de representação decimal finita ou no registro fracionário. Havendo número irracional, foi sugerido outro procedimento.

Os outros grupos praticamente copiaram o enunciado da questão em suas justificativas, principalmente em relação às questões 5 e 6, todos os grupos repetiram os enunciados:

5. () Não existe número racional entre dois números irracionais e

6. () Entre dois números racionais não existe nenhum número irracional.

Apesar de todos os sujeitos terem colocado falso nestas duas questões, não justificaram sua resposta por meio de exemplos. No entanto, na atividade II em que estas mesmas questões foram propostas, houve muitas justificativas ilustradas com exemplos.

7. () 0,333...3 é irracional

Esta questão foi classificada corretamente como falsa por todos os participantes. Logo no início da resolução, um sujeito afirmou:

“Todo racional é finito”.

Mas seus companheiros o convenceram do contrário.

Outros dois grupos erraram em suas justificativas colocando:

“É um decimal periódico”.

7.(F)

É uma dízima periódica

Mas antes da conclusão deste último grupo, um sujeito comentou:

“Pela calculadora não dá para saber se é racional ou irracional”.

Talvez os fatos de se repetirem algumas vezes o algarismo 3 e da representação decimal ter reticências, bastam para concluir ser dízima periódica e assim constatar que é referente a um número racional. Este grupo, provavelmente, não percebeu que se tratava de uma representação decimal de número racional por ser finita e não por conter reticências e periodicidade. Um dos sujeitos, durante a resolução, falou:

“Não tem condições de avaliar. As reticências não estão no final, estão no meio, é finito, não é infinito”.

Outro sujeito argumentou:

“Quem garante que nos três pontinhos continue 3?”.

Este sujeito indagou corretamente a possibilidade dos algarismos representados pelas reticências serem diferentes de ‘3’, não há garantia da repetição deles, mas o relevante nesta representação é o fato dela ser finita.

Ainda em relação a esta mesma questão, registramos o seguinte diálogo:

“É racional, é $\frac{1}{3}$ ”, referindo-se ao 0,333...3 ,

“0,333...3 é racional pois termina, pois é finito, não é $\frac{1}{3}$, que é infinito”,

“Como colocar em fração 0,333...3? Não sabemos quantos 3 existem”.

Para alguns sujeitos houve uma confusão quanto a localização das reticências identificando as duas representações: $\frac{1}{3}$ e 0,333...3. Porém há concepções corretas no grupo, defendendo que ambas representações não são referentes ao mesmo número.

Um sujeito converteu $\frac{1}{3}$ para a representação decimal verificando ser infinita, o que evidencia o importante papel que representa a conversão de registros para a aquisição do conhecimento.

8. () Não é possível encontrar um número racional entre um racional e um irracional.

Em relação a esta questão, todos os grupos responderam que é falsa. Apenas um deles apresentou a seguinte justificativa:

8. (F)
É possível desde que faça a aproximação

Parece fazer referência à sugestão de procedimento: a partir da representação do número irracional obter uma aproximação racional, retirando as reticências.

9. () É sempre possível tirar a média de dois números irracionais.

Esta questão foi classificada como falsa por todos os sujeitos. Duas justificativas dos participantes mencionam a impossibilidade de se operar com infinitas casas decimais:

9. (F)
Não é possível dividir um número infinito por qual-
 quer outro número. Usa-se um intervalo fechado.

Este comentário possivelmente indica que houve a identificação entre o objeto representado e sua representação. Apesar de Duval prever esta identificação, considera-a como impedimento à apreensão do objeto.

Durante a discussão registramos o seguinte comentário:

“Média entre irracionais não dá”.

10. () $\sqrt{2}$ e 1,41 representam o mesmo número

Todos os sujeitos responderam falso a esta questão. Nenhum grupo identificou as representações $\sqrt{2}$ e 1,41 como sendo a de um mesmo número. Um deles ainda explicou:

10. (F)

Não pois $\sqrt{2}$ representa um número irracional e 1,41 representa um número racional. $\sqrt{2} > 1,41$

Provavelmente para estabelecer esta comparação, este grupo tenha realizado uma conversão do registro simbólico $\sqrt{2}$ para o decimal infinito.

Um sujeito citou novamente a aproximação:

“Quando se aproxima, deixa de ser irracional e torna-se racional”.

Talvez pelo fato da $\sqrt{2}$ ser um dos representantes-padrão de número irracional, não houve associação entre as representações $\sqrt{2}$ e 1,41.

11. () A média de dois números racionais é um número racional.

Nesta questão, todos os grupos atribuíram verdadeira. Um grupo justificou:

“Média só se faz de número racional”.

Um outro apresentou este protocolo:

11. (V)

$2 + 3 = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{2} = 6.414213562$ (racional)

Não se identifica nesta resposta uma média aritmética e além disso, a presença de um número irracional, que não figura no enunciado da questão. Para efetuar $5 + \sqrt{2}$, o grupo parece ter repetido procedimentos adotados anteriormente em outro tipo de questões.

Este grupo realizou uma conversão do registro simbólico $\sqrt{2}$ para o decimal infinito, em seguida, suprimindo as reticências, obteve uma aproximação racional deste número. Depois efetuou a adição de dois números racionais obtendo um número racional. Mesmo assim, ainda faltou a divisão por 2 para obter a média.

12. () É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números irracionais.

Todos os sujeitos consideraram verdadeira esta questão.

Um grupo foi além, evidenciando a percepção da noção de continuidade da reta em seu comentário:

12. (V)

sim, porque se assim não fosse, a reta
real teria falha

13. () 1,333... é irracional.

Todos os sujeitos afirmaram ser falsa esta questão.

Nenhum grupo parece identificar as reticências como sendo característica da representação de um número irracional. Dois grupos declararam que se tratava de uma dízima periódica, o que evidencia que interpretaram a representação como periódica e, assim sendo, referindo-se a um número racional, eis o protocolo de um dos grupos:

13. (F)

É uma dízima periódica.

Outro grupo realizou a conversão do registro decimal infinito para o fracionário e comentou:

“Se passar para fração, seria $\frac{4}{3}$ ”.

Este grupo parece que utilizou a definição de número racional, isto é, aquele que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$.

Nenhum grupo questionou a respeito da possibilidade do algarismo '3' não se repetir indefinidamente, o que caracterizaria um número irracional.

14. () Existem infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais.

Todos os participantes responderam que esta última questão é verdadeira.

Um grupo mencionou a continuidade da reta:

14. (✓)

Sim pois a reta real não tem
buracos.

Outro escreveu:

14. (✓)

Definição de conjuntos reais.

Esta resposta talvez queira se referir à densidade dos números reais.

Para justificar a existência de números irracionais e de números racionais entre dois reais distintos, em mais de uma ocasião, os sujeitos apelaram para a “continuidade” da reta, o que não seria necessário, bastando que se reportassem à propriedade da densidade dos números reais.

Esse pensamento dos sujeitos também foi motivo de conjecturas por parte de cientistas renomados como pode se depreender da citação de Boyer (1974, p.410):

“Galileu e Leibniz tinham julgado que a ‘continuidade’ de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade – isto é, do fato que entre dois números quaisquer existe sempre um terceiro. Porém os números racionais têm essa propriedade, no entanto não formam um *continuum*”.

Durante a plenária, dois comentários chamaram nossa atenção:

“A maior inquietação é o $0,999... = 1$ ”.

Este comentário se deu pelo fato de o sujeito não concordar e ao mesmo tempo, estar muito incomodado com esta igualdade.

O seguinte comentário parece indicar que, para este sujeito, a seqüência provavelmente teve uma ordenação adequada quanto às dificuldades apresentadas:

“Se esta folha fosse no primeiro dia, não estaria tão claro”.

Comparando algumas respostas apresentadas na atividade II com aquelas apresentadas nesta atividade, para questões assemelhadas, parece que os argumentos estão mais bem elaborados.

Podemos destacar alguns exemplos: enquanto que na atividade II para justificar que a afirmação: “Entre dois números irracionais não existe número irracional”, é falsa, os sujeitos escreveram:

“contra-exemplo”. Mas não o explicitaram, talvez tenham percebido que *não existe número* estivesse errado e que fosse necessário colocar um contra-exemplo para provar que existe pelo menos um número irracional entre dois irracionais. Ou ainda aprenderam a repetir, sem apreenderem o sentido disso, que no caso de uma afirmação ser falsa basta dar um contra-exemplo.

Em relação à outra questão da atividade II: “Entre dois números racionais existe um único número racional”, um grupo escreveu:

“O 1 e o 2 por exemplo, são dois números racionais e entre eles existem muitos outros números”. Os sujeitos perceberam que não existe somente um, mas muitos, porém não deram exemplos.

Já nesta última atividade, na questão: “É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números irracionais”, um grupo escreveu:

“Sim porque se assim não fosse, a reta real teria falhas”.

Outro exemplo de justificativa apresentada nesta atividade foi na seguinte questão: “Existem infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais”, um grupo justificou:

“Sim, pois a reta real não tem buracos”.

Na questão: “1,333... é irracional”, um grupo respondeu:

“Se passar para fração, seria $\frac{4}{3}$ ”.

Com estes exemplos, podemos observar maior consistência das argumentações dos sujeitos, inclusive lançando mão, nesta última justificativa, da conversão de registros para ilustrar sua resposta.

AVALIAÇÃO DO EXPERIMENTO

No final da última sessão, os participantes responderam individualmente a um questionário sobre sua opinião a respeito da seqüência: do que tratou, os três tópicos relevantes, o que aprendeu, as dúvidas que ficaram, se recomendaria essa atividade para um amigo e que sugestões de mudanças apresentaria.

Os professores destacaram alguns temas abordados pela seqüência. Nosso foco era buscar investigar o comportamento dos sujeitos frente à propriedade da densidade dos números reais. A classificação dos números reais foi trabalhada inicialmente por ser necessária para o desenvolvimento das outras atividades. No entanto, muitos professores salientaram a classificação dos números racionais e irracionais nas suas diferentes representações como assunto principal.

Os temas elencados estão a seguir bem como alguns comentários destes professores.

Quanto à primeira questão:

C
a

1. Como você contaria a um amigo, que não participou desta oficina, a respeito do que foi trabalhado?

tegorizamos em:

a) Densidade do conjunto dos números reais.

Analisamos a quantidade de números existentes em um intervalo numérico até chegar a conclusão de que em um intervalo infinitamente pequeno existem infinitos números.

- b) Representação dos números por pontos na reta (conversão do registro de representação numérico para o gráfico):

Nesta oficina, você pode mostrar a seus alunos os n.ºs racionais e irracionais de uma visão mais ampla e cada atividade trabalhada e mostrar eles na reta

- c) Números racionais e irracionais:

Particpei de um módulo do curso teci do saber que era específico para abordagem de números racionais e irracionais

- d) Diferentes registros de representação:

Aplicando as atividades com números, de forma que pudessem encontrar outros entre eles primeiros, usando as diferentes representações e suas definições.

Este último sujeito parece ter achado interessante trabalhar com as diferentes representações.

Os sujeitos destacaram entre os tópicos abordados, aqueles que mais proporcionaram trocas, discussões e reflexão. A separação absoluta por categoria foi muito difícil, e por isso, há protocolos que poderiam ter sido colocados em duas delas. Selecionamos alguns protocolos para ilustrar as opiniões dos professores em relação à segunda pergunta:

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.
--

a) Classificação de números racionais e irracionais.

- números racionais
- " " irracionais
- Infinitos.

Os números racionais, irracionais e os números decimais

Apesar deste protocolo ser categorizado em classificação de números racionais e irracionais, o último tópico, números decimais, cabe na categoria das representações.

b) Diferentes representações.

- A definição de racionais e irracionais (números)
- Os diferentes tipos de representações numéricas.
- O que representa um número infinito (se é racional ou irracional).

Este sujeito também evidenciou as diferentes representações numéricas.

- As representações, dízimas e média

O primeiro tópico deste último protocolo é de representação mas o último, média, cabe na categoria seguinte.

c) Média entre dois números.

NÃO SE TIRA A Média entre dois n.º irracionais simplesmente porque não cabe no display da calculadora.

Este sujeito refere-se a impossibilidade de se calcular a média aritmética de dois números irracionais no registro de representação decimal infinita, por não se conhecerem todos os seus algarismos.

Porém outro participante apresentou um jeito de se tirar a média aritmética de dois números irracionais, se eles estiverem no registro de representação simbólico:

$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$. Mas nem todo número irracional possui uma representação simbólica, enquanto que uma representação decimal todos têm.

d) Trabalho em grupos.

- ✓ Situações que não geraram dupla interpretação.
- ✓ Situações que criaram dupla interpretação e que impossibilitaram a classificação em racionais ou irracionais
- ✓ Discussão em grupo.

→ método de apresentação,
→ discussão em grupo,
→ interferências

Com *dupla interpretação*, provavelmente o sujeito quis dizer que pelo fato do trabalho ter sido realizado em duplas, de início poderia haver duas opiniões diferentes, mas com a discussão chegavam a um acordo quanto à resposta. Isto confirmam que, para alguns sujeitos, o trabalho em grupos proporciona discussões ricas e muitas trocas.

Em relação à questão:

3. O que mais aprendi.

Selecionamos alguns protocolos que tentamos categorizar. Novamente há protocolos que contêm mais de um tema e poderiam ser colocados em uma categoria diferente da qual está.

- a) Conceito de números racionais e irracionais.

Ampliação do conceito de números racionais e irracionais e suas representações nas diversas linguagens matemáticas

A palavra 'conceito' deste último protocolo, provavelmente esteja se referindo à concepção.

- b) As diferentes representações dos números.

Todos os conjuntos mencionados (irracionais e racionais) - as representações dos números.

Esta categoria foi novamente a mais lembrada.

- c) Entre dois números racionais ou irracionais existem infinitos números racionais e irracionais.

Ficou claro nas atividades e definições que entre dois números racionais ou irracionais existem infinitos números racionais e irracionais.

Que entre dois números existe infinitos números

Apesar de não ser o tema mais citado, a noção de densidade esteve presente em alguns protocolos.

Dentre os tópicos citados, houve maior incidência na questão da classificação em números racionais e irracionais, do que propriamente da propriedade da densidade dos números reais.

É possível que isto tenha se dado pelo fato de que na maioria das questões, apesar de visarem a propriedade da densidade dos números reais, sempre era destacada a questão da classificação de número racional e de número irracional, utilizando suas diferentes representações.

Ou ainda, há a possibilidade de que os participantes tenham percebido, durante este trabalho, que havia concepções diferentes quanto aos critérios de classificação dos números e que as discussões tenham se concentrado sobre este tema destacando-o como principal.

Uma outra resposta à mesma questão:

Que eu sei muito pouco.

Em relação à questão:

4. Dúvidas que ficaram.

Um sujeito respondeu:

Em relação à "densidade" nenhuma.

A maioria dos sujeitos escreveu que não ficou com dúvidas, alguns deixaram esta questão em branco e outros demonstraram incômodo com os números irracionais.

Um dos sujeitos registrou a seguinte resposta:

O que é um número irracional? Como prová-lo

Em relação à questão:

5. Você recomendaria a algum amigo que fizesse este mesmo trabalho?

Se sim, que sugestões de mudanças você apresentaria?

Todos responderam que sim. A maioria não deu sugestões, porém um deles acrescentaria a utilização de recursos audiovisuais, outro aumentaria o tempo estabelecido para a resolução das questões e outro sugeriu adequá-la para ser aplicada no Ensino Fundamental como se observa no comentário:

Apenas que adequassemos as atividades para que fossem aplicadas a alunos do Ensino fundamental, um pouco mais direta.

O seguinte comentário pode significar que avaliou que o trabalho é inédito:

Sim, uma visão diferente dos livros didáticos.

Destacamos alguns protocolos que parecem evidenciar que houve satisfação em desenvolver este trabalho e que ele foi produtivo.

Trabalhar com outra visão os Números Reais

Amigo você perdeu uma oportunidade e tanto pois nem na universidade se vê o que vimos neste curso.

Devia continuar, estendendo este curso p/ os colegas que perderam.

De um modo geral, parece que o trabalho foi considerado válido, pelas reflexões e discussões ricas que ele proporcionou e que os sujeitos gostariam que ele continuasse.

ANÁLISE DA REAPLICAÇÃO DAS QUESTÕES DA ATIVIDADE II

Após dois meses do término da aplicação da seqüência, propusemos novamente a resolução das questões da Atividade II, que é constituída por catorze afirmações para serem classificadas em verdadeiras ou falsas, com justificativa. Escolhemos esta atividade porque envolve questões gerais enfocando especificamente o tema principal da pesquisa, qual seja, a questão da densidade dos números reais.

Esta atividade foi desenvolvida individualmente para analisarmos se os sujeitos continuavam ou não apresentando as noções verbalizadas nas discussões, tanto nas duplas quanto nas plenárias, além daquelas apresentadas nos protocolos.

Ao receber as questões um sujeito percebeu que já havia feito algo semelhante e comentou:

“Algumas palavras foram mudadas. Não é igual ao que já fizemos? É parecida.”

Os participantes procederam da seguinte maneira: primeiro leram e classificaram todas as questões em verdadeiras ou falsas e voltaram à primeira questão iniciando suas justificativas. Após alguns minutos, um sujeito quis entregar seu protocolo, mas pedimos para ele comentar todas as afirmações e ele respondeu:

“A minha dificuldade é escrever”.

Apesar de assumir esta dificuldade tentou justificar as suas respostas, porém, na maioria delas este sujeito praticamente copiou seus enunciados, fornecendo exemplos numéricos apenas em algumas das questões.

Outro sujeito logo no início da resolução da atividade comentou:

“Esse negócio de número é complicado”.

Todos os sujeitos classificaram corretamente as questões em verdadeiras ou falsas, com exceção de um deles que errou a seguinte questão: “Entre dois números irracionais existe um número racional”. Classificou-a como falsa e justificou escrevendo:

4. (F)

R: Existe infinitos N's racionais.

Seu comentário indica que ele considera a existência de infinitos números racionais entre dois irracionais. É possível que o enunciado no registro da língua natural não esteja claro para este sujeito, que talvez tenha 'lido' *existe um único número racional*, ao invés de *existe um número racional*.

Os participantes justificaram todas as questões. Quando responderam pela primeira vez esta mesma atividade, o número de respostas justificadas foi bem menor.

A seguir apresentamos a análise de cada questão.

1. () Entre dois números racionais existe um único número racional.

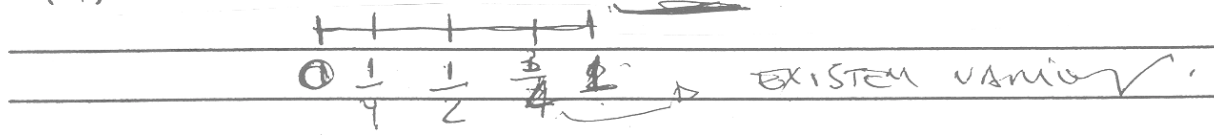
Nesta questão, apesar de um participante tê-la classificado corretamente como falsa, apresentou o seguinte argumento incompleto:

1. (F)
Por exemplo: entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ não existe só $\frac{2}{4}$ como número racional

Esta justificativa não exemplifica mais de um número racional entre dois racionais, já que o sujeito escreveu apenas o número $\frac{2}{4}$ entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Para contestar a unicidade que figura no enunciado, deveria apresentar pelo menos dois exemplos. Utilizou o registro de representação fracionária com mesmo denominador possivelmente para facilitar a inserção de um número entre os dois. Para este sujeito parece estar claro que este registro de representação fracionária refere-se a um número racional.

Outro sujeito, que também classificou esta mesma questão como falsa, justificou por meio de exemplos, utilizando os registros numérico e gráfico, localizando os números num segmento de reta

1. (F) Entre dois números racionais existe um único número racional.


 ① $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1 → EXISTEM vários ✓

Este protocolo também pode traduzir a reflexão deste sujeito a respeito do enunciado evidenciado pelo ato de sublinhar a expressão “um único”, que é relevante para acertar a questão.

2. () Entre dois números racionais não existe número irracional.

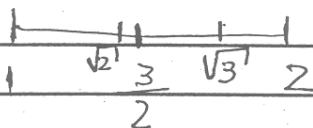
Todos os sujeitos escreveram falso nesta questão. Seguem dois protocolos em que aparecem um dos representantes-padrão de número irracional, $\sqrt{2}$:

2. (F)

Exemplo: Entre os números 2 e 3
existe a $\sqrt{2}$

2. (F)

Falso



O primeiro sujeito não percebeu que a $\sqrt{2}$ não está compreendida entre 2 e 3. Poderia ter escolhido a $\sqrt{5}$ entre 2 e 3, ou ter mantido a $\sqrt{2}$ mas alterado o 2 para 1. Enquanto que o segundo participante sugeriu corretamente a $\sqrt{2}$ e a $\sqrt{3}$. É provável que depois da sugestão, ele tenha realizado uma conversão dos registros simbólicos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ para o registro de representação decimal infinita, para certificar-se que estes dois números estão entre 1 e 2 e também que o primeiro deles está entre os racionais 1 e $\frac{3}{2}$ e que o segundo está entre os racionais $\frac{3}{2}$ e 2 .

3. () Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional.

Todos os sujeitos acertaram a classificação justificando haver infinitos números irracionais entre dois irracionais sem apresentar exemplos. Possivelmente esta afirmação tenha favorecido a associação entre o que propunha e o que fora discutido e explicitado durante o trabalho da sequência.

Segue um protocolo como ilustração:

3. (F)

Os são infinitos os números

4. () Entre dois números irracionais existe um número racional.

Ao ler a afirmação um sujeito comentou:

“Os irracionais são os infinitos”.

Este comentário parece evidenciar a concepção de que a representação decimal infinita refere-se somente a um número irracional.

Dentre os participantes que consideraram verdadeira esta afirmação, destacamos as justificativas:

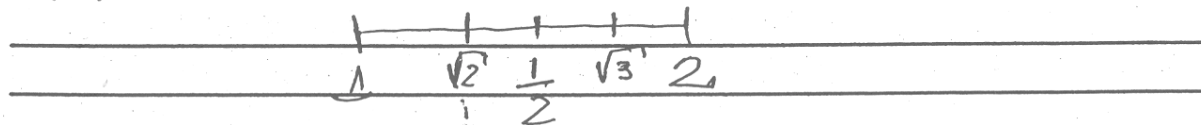
4. (V)

Por exemplo entre $\sqrt{2}$ e o número π existe o número 2,5.

Este participante exemplificou um número racional na sua representação decimal finita, entre dois representantes-padrão de número irracional, $\sqrt{2}$ e π . Provavelmente realizou uma conversão dos registros simbólicos $\sqrt{2}$ e π para o decimal infinito, para então poder inserir um número entre eles. É interessante destacar que ao contrário do que comumente se observa nas respostas, entre estes dois números há dois números inteiros, foi escolhido o 2,5 como resposta.

Outro sujeito justificou de uma maneira semelhante utilizada por ele na questão 2. Para justificar que a afirmação é falsa utilizou o seguinte argumento:

4. (V)



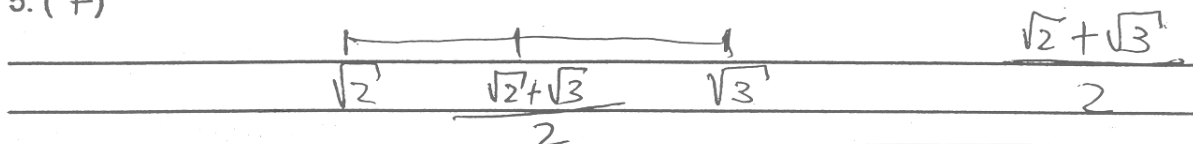
Nesta resposta este sujeito trocou o $\frac{3}{2}$, utilizado por ele na questão 2, pelo $\frac{1}{2}$.

Não observou que $\frac{1}{2}$ não está entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

5. () Entre dois números irracionais não existe número irracional.

Todos atribuíram 'falso' a esta afirmação. Um sujeito para justificar sua resposta, indicou o procedimento da média aritmética no registro simbólico e utilizou o registro gráfico para localizar essa média entre os dois números irracionais por ele escolhidos, como se vê a seguir:

5. (F)



Outro sujeito comentou:

“O difícil é justificar”.

Em seu protocolo este sujeito escreveu apenas:

5. (F)

existem

Para responder a esta questão, nenhum sujeito utilizou a representação decimal infinita do número irracional, que foi utilizada em outras situações em que as representações dos dois números iniciais eram fornecidas. Este fato pode indicar que questões envolvendo o infinito representam grande dificuldade para o ensino-aprendizagem.

6. () Entre dois números irracionais não existe número racional.

Os sujeitos classificaram esta questão como falsa. Um deles repetiu o mesmo exemplo já usado, para justificar que entre dois números irracionais existe um número racional:

6. (F)

Exemplo: $\sqrt{2}$ e π existe o número 2,5

Este participante percebeu que um exemplo anteriormente escolhido era adequado também neste caso.

Observamos que antes dele ter escolhido esta resposta, havia dado outra:

“Exemplo: entre os números 0,333... e 0,666... existe o número 0,5”.

Este participante havia sugerido inicialmente $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{6}$ como sendo números irracionais. Para ele não está claro que o registro de representação fracionário com numerador e denominador não nulo, inteiros refere-se a um número racional. Depois realizou uma conversão desse para o registro decimal, mas errou a divisão e escreveu $\frac{1}{6} = 0,666....$. Pensando um pouco, sem nossa intervenção, este sujeito concluiu ser esta a representação de uma dízima periódica, e assim, ser referente a um número racional. Neste momento comentou:

“Irracional é infinito e não periódico, ambos acima são periódicos. Fiz besteira”.

Esta fala talvez possa indicar que certas regras no registro da língua natural são memorizadas e muitas vezes o objeto nelas contido não é identificado quando dado em outro registro. Isto é o que Duval classifica como uma conversão de registros não-congruente.

O sujeito referia-se aos números $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{6}$, classificados anteriormente como irracionais. A conversão de $\frac{3}{6}$ para 0,5 e de $\frac{2}{6}$ para 0,333... foi realizada corretamente. Parece que isto auxiliou na classificação correta dos números.

Depois desta primeira sugestão, este sujeito apagou tudo, com exceção das conversões reproduzidas a seguir, e escolheu mais apropriadamente os números $\sqrt{2}$ e π como representantes de números irracionais e o número racional 2,5. Esta sugestão já estava pronta pois tinha sido utilizada pelo sujeito numa questão anterior.

Segue o protocolo das conversões e dos tratamentos:

$$\begin{array}{r} \text{Yb} \\ 10 \overline{) 6} \\ 40 \quad 0,666... \\ \underline{40} \quad \quad \quad \\ \quad 40 \quad \quad \quad \\ \quad \underline{40} \quad \quad \quad \\ \quad \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{6}} \\ 20 \overline{) 6} \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 2 \end{array}$$

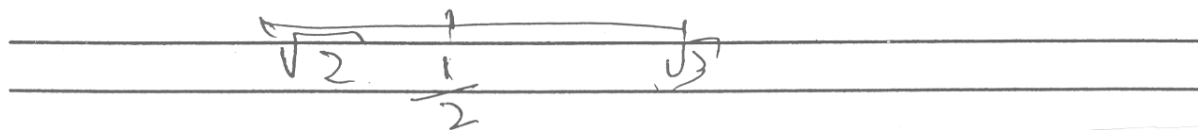
$$20 \overline{) 6} = 0,333\dots$$

$$30 \overline{) 6} = 0,5$$

$$\begin{array}{r}
 10 \overline{) 0,14285711} \\
 \underline{30} \\
 20 \\
 \underline{60} \\
 40 \\
 \underline{50} \\
 10
 \end{array}$$

Outro sujeito representou graficamente três números por ele escolhidos, sem perceber que o número racional sugerido não está compreendido entre os dois números irracionais previamente escolhidos:

6. (F)

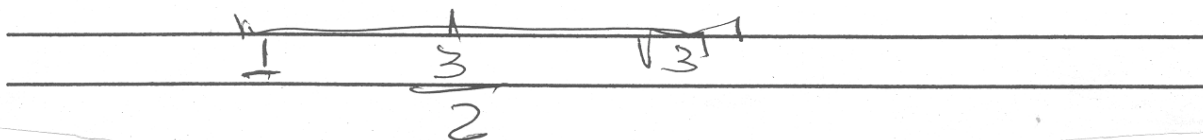


Este sujeito cometeu o mesmo erro duas vezes. É possível que ele não tenha realizado uma conversão, pois se o tivesse feito poderia compará-los no registro de representação decimal diminuindo suas chances de errar.

7. () Entre um número racional e um irracional existe número racional.

Os sujeitos classificaram esta questão como verdadeira. O último sujeito citado na questão anterior, colocou nesta, corretamente sua justificativa no registro de representação gráfico:

7. (✓)



Um outro sujeito ‘recitou’ uma regra expressa no registro da língua natural:

7. (✓)

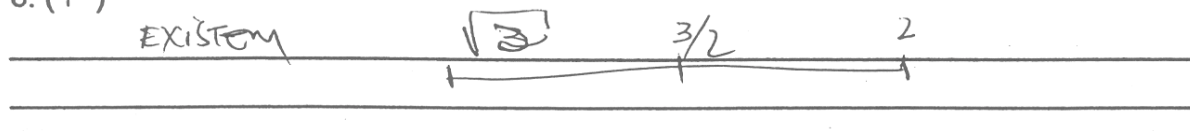
7. (1/1) Pois entre um número racional e um número irracional, existem vários racionais.

Enquanto que o primeiro sujeito forneceu um exemplo, o segundo citou 'infinitos', porém sem dar exemplos.

8. () Entre um número irracional e um número racional não existe número racional.

Todos os participantes atribuíram 'falso' a esta afirmação. Destacamos as justificativas:

8. (F)



Pelo fato deste sujeito ter escrito à tinta e rasurado sua resposta, pudemos perceber que ele tinha representado inicialmente um número irracional por $\sqrt{3}$, mas provavelmente percebeu que o número racional escolhido, $\frac{3}{2}$ não está entre $\sqrt{3}$ e 2, então trocou $\sqrt{3}$ por $\sqrt{2}$, tornando adequados todos os números escolhidos.

Enquanto que este sujeito utilizou os registros de representação simbólico e fracionário, outro participante usou o registro de representação decimal sugerindo para número irracional, 3,1416... . Talvez tenha se baseado no π , usando uma aproximação racional dele, 3,1416 e acrescentando as reticências:

8. (F)

entre 3,1416... e 3,5 existem outros racionais como por exemplo 3,25.

Como era esperado, todos os participantes conservaram a ordem dos números expressa nos enunciados. Por terem acertado a questão anterior também acertaram esta. Na anterior eram dados um número racional e um irracional e nesta, a ordem foi trocada para um irracional e outro racional.

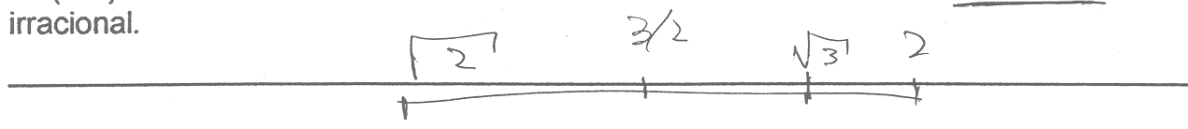
9. () Entre um número irracional e um racional existe um único número irracional.

Apesar de os sujeitos atribuírem falso a esta questão, não houve justificativa correta. Os sujeitos ou copiaram a afirmação:

“Existem infinitos números irracionais”.

Ou apresentaram protocolos inadequados, como por exemplo os seguintes:

9. (F) Entre um número irracional e um número racional existe um único número irracional.



Neste exemplo, entre o irracional $\sqrt{2}$ e o racional 2, o sujeito registrou somente um único número irracional, ou seja, a $\sqrt{3}$. Isto é incoerente com sua classificação correta da afirmação como sendo falsa.

Este sujeito sublinhou a expressão *um único* evidenciando estar aí a causa da falsidade da questão, porém se não existe somente um único número, então que apresentasse pelo menos dois deles, mas sugeriu apenas um, o $\sqrt{3}$, o que não é um contra-exemplo para esta afirmação. Neste caso o $\frac{3}{2}$ não tem função alguma.

Possivelmente a escolha errada de $\frac{3}{2}$ se deva ao fato dele ter escolhido este número na questão anterior cujo protocolo se encontra na página 162, repetindo os três números lá representados e inserindo a $\sqrt{3}$.

Outro participante escreveu:

9. (F)
entre 3,1416... e 4 existem vários
números irracionais

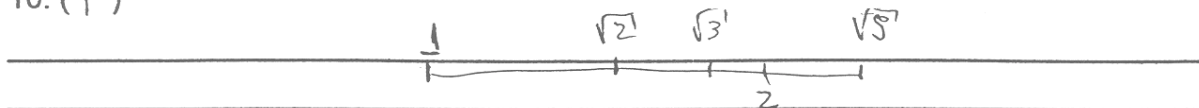
Este sujeito não deu exemplos de números irracionais entre o 3,1416... e 4 sugeridos por ele.

10. () Entre um número racional e um número irracional não existe número irracional.

Os sujeitos classificaram esta questão como sendo falsa.

Enquanto que um deles não sugeriu números irracionais além do $\sqrt{3}$, entre $\sqrt{2}$ e 2 na questão anterior, nesta, sugeriu acertadamente dois números irracionais entre um racional e outro irracional:

10. (F)



Além dos dois números irracionais, o sujeito registrou também o racional 2, que figura em muitas de suas respostas anteriores.

Outro sujeito, novamente escreveu números irracionais entre dois números sugeridos por ele quando justificou:

10. (F)

entre 1 e $\sqrt{2}$ existem vários irracionais.

11. () Entre dois números reais não existe número irracional.

A esta questão todos atribuíram 'falso'. Um sujeito escolheu dois números racionais inteiros e inseriu um racional, no registro de representação decimal infinita:

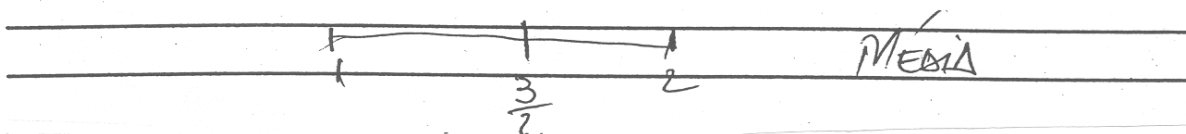
11. (F)

Exemplo entre os números reais 3 e 4 existe o 3,1416...

12. () Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.

Todos os sujeitos classificaram esta afirmação como verdadeira. Um deles escreveu *média* e representou três números no registro gráfico:

12. (✓)



Este protocolo indica que o sujeito não justificou a existência de infinitos números racionais. A palavra média não é suficiente para descrever que o processo de tirar a média aritmética de números racionais é infinito.

Dois sujeitos erraram ao sugerir números que não estão entre os dois previamente escolhidos por eles. Um utilizou o registro de representação decimal e o outro usou os registros de representação decimal e fracionário. Este último provavelmente realizou uma conversão do registro fracionário para o decimal para poder compará-los:

12. (✓)

R: Sim $\frac{1}{3}, 0,33\dots; 0,34; 0,35; 0,36; \dots \frac{1}{2}$

Apesar de este sujeito utilizar vários registros de representação: o fracionário e o decimal finito e infinito, não esclareceu porque o número representado por $0,33\dots$ é maior que $\frac{1}{3}$. Além disso, não fica claro nesta reposta, o que acontecerá após $0,39$.

O outro sujeito utilizou somente o registro decimal infinito:

12. (✓)

Existem infinitos números racionais
exemplo: entre $0,333\dots$ e $0,666\dots$ existem o números
 $0,313131\dots$, $0,323232\dots$

Ele sugeriu números racionais, indicando uma possível periodicidade mas não percebeu que tanto o $0,313131\dots$ como o $0,323232\dots$ não são maiores que $0,333\dots$. A escolha destas representações pode indicar que para este sujeito, uma representação periódica, apesar de infinita, refere-se a um número racional.

13. () Entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

Ao ler a questão, um sujeito comentou para si mesmo:

“Os reais englobam todos os números”.

Todas as respostas para esta questão foram classificadas como verdadeiras. Um dos sujeitos sugeriu para números reais apenas números racionais na sua representação decimal finita:

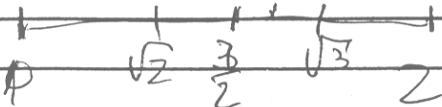
13. (✓)

R: Sim. 1; 1,1; 1,2; 1,3; ... 2

Outro sugeriu para números reais, tanto números racionais no registro de representação fracionária, $\frac{3}{2}$, quanto irracionais no registro simbólico, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$:

13. (✓)

Sim -



A hand-drawn number line with five points marked by vertical tick marks. Below the line, the points are labeled from left to right as 0, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$, and 2. To the right of the line, the word "Sim" is written with a horizontal dash.

Este sujeito utilizou praticamente os mesmos números na maioria de suas justificativas, talvez tenha utilizado a propriedade da densidade dos números reais pois usou com freqüência os números sugeridos numa questão anterior e inseriu números entre eles.

Outro sujeito, apesar de ter considerado a afirmação como verdadeira não justificou, apenas escreveu:

13. (✓)

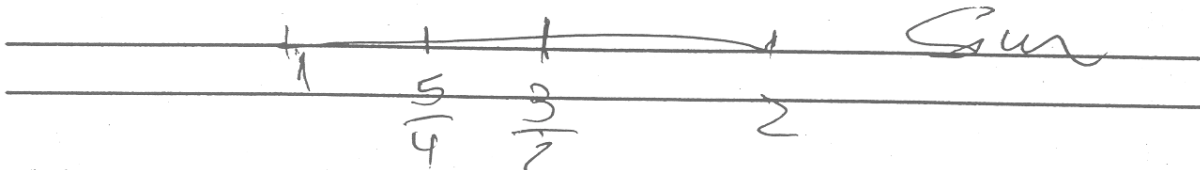
Exemplo: os números reais engloba todos os outros conjuntos numéricos.

Provavelmente ao escrever todos os conjuntos numéricos, este sujeito esteja se referindo aos subconjuntos do conjunto dos números reais.

14. () Entre dois números reais existem infinitos números racionais.

Todos os sujeitos atribuíram verdadeiro para esta questão. Três participantes sugeriram os números reais 1 e 2 para depois achar números racionais entre eles. Dentre estes três, dois deles representaram os números racionais no registro de representação fracionária e o outro no registro decimal finito. Um deles inseriu entre 1 e 2, exatamente a média aritmética entre eles e depois a média aritmética entre 1 e $\frac{3}{2}$:

14. (✓)



$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

Outro sujeito escreveu três números racionais no registro de representação decimal finito:

14. (✓)
Exemplo: entre o número 1 e o número 2 existem infinitos. Exemplo: 1,25; 1,5; 1,75.

Provavelmente este sujeito usou o procedimento da média aritmética entre 1 e 2, depois entre 1 e 1,5 e entre 1,5 e 2.

Outro participante sugeriu dois números racionais no registro de representação fracionário:

14. (✓)

R: Sim. $1; \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \dots 2$

O índice de acertos, quanto à classificação das afirmações, aumentou em relação à primeira vez que responderam a esta atividade. O desempenho em relação à última atividade da sequência resolvida há dois meses, que envolvia questões semelhantes a esta, foi mantido.

Apesar de ter havido algumas confusões nas escolhas de certos números que não estavam entre dois previamente escolhidos, houve uma maior preocupação de justificar todas as questões, seja por meio de exemplos, seja uma justificativa no registro da língua natural.

Um sujeito assumiu a dificuldade em comentar suas escolhas:

“Colocar V ou F é fácil. O difícil é achar um número para justificar”.

Alguns sujeitos têm a concepção de que um número na representação decimal infinita é irracional, independentemente de ser uma dízima periódica ou não.

Em todas as questões cujo enunciado está escrito *entre dois números*, apesar de não estar explícito que os dois números irracionais inicialmente mencionados são distintos. Todos os sujeitos interpretaram como tal, uma vez que nenhum deles fez comentários a respeito do enunciado.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES

O principal objetivo da pesquisa é investigar a concepção e a reação dos professores frente às representações dos números, quando analisada a propriedade da densidade do conjunto dos números reais.

Apesar de termos eleito uma das dificuldades apontadas pelas pesquisas, a densidade dos números reais, a exploração desta propriedade envolve outros conhecimentos, como por exemplo, a classificação dos números em racionais e irracionais. Aliás, topologicamente a própria questão da densidade está aqui envolvida: tanto o conjunto dos números racionais como o conjunto dos números irracionais são densos no conjunto dos números reais. Como Caraça (1989, p. 56), estamos empregando a expressão densidade dos números reais para significar que entre dois números reais existem infinitos racionais e infinitos irracionais.

Para abordar a existência de um número racional entre dois racionais utilizamos o procedimento da média aritmética (algebricamente) e a representação na reta real (graficamente). Porém com os irracionais tal procedimento não se aplica. Neste caso, nos inspiramos no processo da diagonal de Cantor, utilizando a representação decimal infinita dos números reais.

A maioria das questões do experimento contemplou diferentes representações dos números racionais e dos irracionais.

Segundo Duval, o fenômeno da identificação do objeto com sua representação pode impedir a apreensão de tal objeto. O registro de representação decimal este possibilita grande número de tratamentos no seu interior, principalmente no procedimento que sugerimos, no caso dos números irracionais, ou seja, a troca de um ou mais algarismos dessa representação.

A primeira atividade foi norteadora para as atividades seguintes. A segunda, que é composta por catorze afirmações para serem classificadas em verdadeiras ou falsas, além de diagnóstica também foi provocativa. Alguns participantes sentiram-se estimulados a pesquisar e estudar mais sobre este assunto. Esta foi aplicada duas vezes: A primeira vez com caráter diagnóstico e para propiciar o início da discussão

para o foco da pesquisa. Dois meses após, foi reaplicada para averiguarmos se houve ou não alguma mudança de atitude, por parte dos sujeitos, após os procedimentos trabalhados anteriormente. As questões propostas nesta atividade eram amplas e mais teóricas do que as das demais atividades; talvez por este motivo, não foi utilizado prioritariamente o registro decimal. Para exemplificar um número racional, a maioria utilizou o registro fracionário e para um número irracional foi exclusivamente usado o registro simbólico. Estes registros utilizados podem evidenciar que os padrões de número irracional são principalmente aqueles associados às raízes quadradas não exatas e a π .

Como a segunda atividade priorizou o registro da língua natural, houve dificuldade com expressões como “um único número”, “não existe”, “exatamente um”, “não existe” e “um único”, dentre outras. Mesmo aqueles participantes que perceberam que este registro fornecia informações essenciais nestas expressões, às vezes sublinhando-as, demonstraram insegurança, ainda que o seu desempenho tenha sido muito melhor na reaplicação desta. A dificuldade no entendimento do enunciado foi minimizada com a discussão no interior de cada grupo. A maior delas foi justificar, por escrito, as decisões tomadas para classificar as afirmações em verdadeiras ou falsas. A maioria concordou com a fala de um sujeito:

“Colocar verdadeiro ou falso é fácil, o difícil é justificar depois”.

A terceira iniciou a discussão propriamente da questão da densidade. Nela sugeriu-se o procedimento usual da média aritmética. Este procedimento foi utilizado pelos professores, sem dificuldades, para encontrar números racionais entre dois racionais, inclusive localizando-os na reta real. No caso em que os números eram representados em registros diferentes (fracionário e decimal), os sujeitos fizeram a conversão para um mesmo registro, na maioria das vezes, para o decimal.

Já, a partir da quarta atividade, este procedimento quase nunca era praticável, uma vez que nelas estavam envolvidos números irracionais. O novo procedimento então sugerido não suscitou muitas dúvidas, os trabalhos transcorreram tranquilamente porque os participantes perceberam, sem grandes dificuldades, o processo de trocar um ou mais algarismos de uma representação decimal, finita ou infinita, para se obter a

representação de um outro número. A maioria dos participantes grafou as reticências no registro de representação decimal infinita do número irracional.

Durante todo o experimento, em muitas situações, pudemos constatar que os sujeitos associam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação. Aproveitamos todas essas ocasiões para discutir a questão da representação decimal infinita dos números reais. Para alguns dos participantes esta associação manifestou-se até o final do experimento, relacionando a representação decimal infinita, ou o sinal de reticências, com número irracional. Esta associação é evidenciada num comentário feito durante a discussão das questões da atividade IX:

“O racional é finito e o irracional é infinito”.

Por outro lado, há a contestação dos acordos tácitos. Por exemplo, a preocupação com as reticências também ficou evidente no diálogo:

“0,222... não poderia ter outro número depois do dois?. O que garante que sempre é dois?”

“Também não sei, será que eu preciso escrever três vezes o ‘2’ ou apenas uma vez?. Tem alguma regra?”

“Quando coloca os pontinhos é tudo igual.”

“Não é isso não, senão sempre teríamos números racionais. Então 0,2... é o que?”

“0,2.... e 0,222... são iguais?”

“Acho que não, senão 0,456... seria 0,456456....”.

Esta discussão parece indicar que este grupo percebeu que as reticências indicam infinitude e que pode tanto representar repetição de algarismos quanto a não repetição, dízimas periódicas ou não.

Destacamos também que um dos grupos questionou a biunivocidade entre os pontos da reta e os números reais, argumentando que se um número tem representação decimal infinita, o ponto a ele correspondente “pode variar” de acordo com o número de casas decimais representadas. Aqui está evidenciada a identificação do número com sua representação, pois dependendo do número de casas decimais

escritas, cada representação de um mesmo número parece referir-se a números diferentes.

Em algumas respostas, a linguagem utilizada pelos sujeitos, muitas vezes, é desprovida de precisão matemática como por exemplo:

Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$ um grupo escreveu que há: “ $\frac{3,1}{11}$ e $\frac{3,2}{11}$ ”, sem o cuidado de representar o número racional como quociente de dois números inteiros.

Um grupo representou 1,242425 como $\frac{1,242425}{1000000}$, mantendo a vírgula no numerador.

No comentário: “É irracional porque não sabemos o último número de 0,123456789101112...”, este grupo usou “último número” possivelmente querendo se referir a algarismo, pois se o número tivesse representação decimal finita seria racional e não irracional.

Quando solicitada a ordenação de três números, um grupo apresentou o seguinte:

“1,333 , 1,3330 , 1,3331”. Não evidenciou que as duas primeiras representações são de um mesmo número, associando duas representações diferentes a dois números distintos.

Esta ocorrência está em desacordo com o que preceitua Duval, ao explicitar que uma representação não deve ser tomada no lugar do objeto. Segundo a Teoria deste autor, tal associação pode dificultar a apreensão do conhecimento.

A alegação para um grupo de que 3,1415... era menor que 3,141555..., provavelmente indica que não percebeu que pelo fato de não se conhecer a quinta casa decimal de 3,1415... , não poderia afirmar que um número era menor do que o outro.

Sobre a questão específica da densidade dos números reais, parece que os sujeitos se apropriaram desta propriedade, como podem sugerir os comentários:

“Sim, entre dois números racionais existem infinitos racionais”.

“A média vai se aproximar cada vez mais de um número, o espaço entre eles sempre vai existir, mas vai diminuir”.

“Existem infinitos números irracionais”.

“Infinitos, pois entre dois irracionais existem infinitos irracionais”.

O registro de representação decimal infinito leva alguns professores a uma contradição. Alguns relacionaram este registro, quando periódico, como sendo de um número racional e associaram o registro infinito a um número irracional.

Observa-se que a maioria dos sujeitos ao responder questões, recorria às suas respostas anteriores, podendo indicar com isto que, possivelmente houve uma tentativa de reprodução do procedimento sugerido em atividades anteriores.

No reencontro com os sujeitos após dois meses, dois deles relataram terem utilizado parcialmente algumas questões da seqüência de ensino para trabalhá-las com seus alunos do Ensino Médio.

O primeiro explicitou que aplicou para seus alunos especificamente as questões da atividade III, que tratava da obtenção de números racionais entre dois racionais por meio da média aritmética. Relatou que seus alunos questionaram o significado de número racional. Uma vez esclarecida a questão, relata o sujeito, que seus alunos resolveram as questões de tal atividade.

O segundo revelou que, em seu planejamento escolar para a primeira série do Ensino Médio, não incluiu o tema de número irracional, seguindo a orientação de um colega que estava há mais tempo na escola. Apesar disso, num momento que julgou oportuno, tratando de números reais, inseriu as noções de números racional e irracional, e propôs algumas questões retiradas das atividades das quais participou.

Um outro participante que se manifestou a este respeito, disse não ser favorável a aplicação deste trabalho com alunos do Ensino Médio, pois teria dificuldade em contextualizar este assunto com problemas do cotidiano que envolvessem o aluno.

Num panorama geral, percebemos boa receptividade dos sujeitos. O desenvolvimento das atividades se deu com entusiasmo e seriedade, e houve um grande empenho na resolução e discussão das questões como podem traduzir nos seguintes comentários:

“Vou estudar isso e depois a gente conversa”, referindo-se à igualdade:
 $0,999... = 1$.

“Percebi como tenho defasagem, a gente só estuda o que dá aula”, mostrando que provocamos, como se pretendia, inquietações e motivações para o estudo.

“O bacana disso é a discussão depois”.

O trabalho em grupos foi encarado como fator positivo para a realização do experimento. Houve comentários em seu favor ao explicitarem que modificaram sua opinião a partir da discussão com os colegas, tanto no interior do grupo quanto na plenária.

Alguns sujeitos corroboraram com a escolha das questões, bem como a ordenação delas, dizendo que uma atividade favoreceu a resolução da seguinte. Eis dois comentários:

“Tinha uma idéia meio fechada, bloqueada na última aula”.

“Se esta folha fosse no primeiro dia, não estaria tão claro”.

Uma possível continuação deste trabalho seria a elaboração de atividades, juntamente com os professores do Ensino Médio, viabilizando a sua aplicação aos seus alunos. Numa seguinte etapa, poder-se-ia investigar a possibilidade do estudo da continuidade do conjunto dos números reais com professores e com alunos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARTIGUE, M. et al. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 33-59, 97-137.
- ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 1993.
- _____. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 2001.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.
- CATTO, Glória Garrido. *Registros de representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos*. São Paulo: PUC/SP, 2000. Dissertação de Mestrado.
- DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática, uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p.135-153.
- DANTZIG, T. *Número – a linguagem da ciência*. Tradução: Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro.: Zahar Editores, 1970.
- DAUBEN, J.W. Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos. *Investigacion y Ciencia*, Barcelona, n. 83, p. 82 – 93, ago. 1983.
- DIAS, M. S. Reta Real. Conceito imagem e conceito definição. São Paulo: PUC/SP, 2002. Dissertação de Mestrado.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5. IREM-ULP, Strasbourg, 1993, pp. 37-65.
- _____. *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang, 1995.
- _____. *Les différents fonctionnements possibles d'une figure dans une démarche géométrique*. Repères, n. 17, p. 121 - 138.

- _____. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, 2003. p. 11 – 33.
- EVES, H. W. *Introdução à história da Matemática*. Traduzido por Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 1995.
- IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. Concepções dos alunos sobre números reais. In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 39-67.
- KATZ, V. J. *A History of Mathematics an introduction*. New York: Harper Collins College Publishers, 1993.
- LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989. v. 1.
- _____. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1977.
- MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática, uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-208.
- MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CULTURA. *Exame Nacional de Cursos*. Disponível em: <http://web.inep.gov.br/superior/provao> Acesso em 14 mai. 2003.
- _____. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. 2000.
- MORENO – ARMELLA. L. E.; WALDEGG G. C. An epistemological history of number and variation. In: KATZ, V. J. *Using history to teach mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 2002. v. 51, p. 183 – 190.
- NIVEN, I. *Números: Racionais e Irracionais*. Traduzido por Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- ROGALSKI, M. *Les nombres reels: comment en faire parler en t. d. Avant de les enseigner en cours?* 1994.
- SANTAELLA, L. *O que é semiótica?* São Paulo: Brasiliense, 1983.
- SMITH, D. E. *History of Mathematics*. New york: Dover Publications, Inc, 1958, v.2.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. *Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura*. Zetetiké, Campinas, v. 7, n.12, p. 95–117, jul/dez. 1999.

STEVIN, S. La Disme. In: *Reproduction de textes anciens*. IREM, Paris VII. Paris: 1980, p. 3 – 10.

ANEXO 1

A SEQUÊNCIA

ATIVIDADE I

Nome: _____ Data: ____/____/____

Utilize todos os espaços em branco para os rascunhos que forem necessários.

1) Indique com um X se o número abaixo é racional (Q) ou irracional (R-Q):

Número	Racional	Irracional
0		
$\sqrt{5}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{3}$		
0,333...3		
4,21222324...		
4,212121...		
π		
3,1416		
$-\frac{3}{7}$		
$\frac{\pi}{10}$		
e		
2,7182		
1,999...		
2		
$\sqrt{9}$		
$\frac{\sqrt{3}}{4}$		

2) Explique o critério que você usou para tomar a decisão no exercício 1.

3) Existe um número real compreendido entre os números abaixo?

No caso afirmativo escreva algum(ns).

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$			
Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$			
Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...			
Entre 0,999... e 1			

4) Considere o conjunto $J = \{ x \in \mathbb{Q} / 0 < x \leq \sqrt{2} \}$

(Ou seja, o conjunto J formado pelos números racionais compreendidos entre zero e raiz de dois, inclusive)

a) J tem um último elemento?

(Isto é, o elemento que vem exatamente antes de $\sqrt{2}$?)

Sim	Não

b) Se sim, qual é esse elemento? Se não, por quê?

ATIVIDADE II

Nome: _____ Data: ____/____/____

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F) e comente o critério utilizado.

1. () Entre dois números racionais existe um único número racional.

2. () Entre dois números racionais não existe número irracional.

3. () Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional.

4. () Entre dois números irracionais existe um número racional.

5. () Entre dois números irracionais não existe número irracional.

6. () Entre dois números irracionais não existe número racional.

7. () Entre um número racional e um irracional existe número racional.

8. () Entre um número irracional e um número racional não existe número racional.

9. () Entre um número irracional e um número racional existe um único número irracional.

10. () Entre um número racional e um número irracional não existe número irracional.

11. () Entre dois números reais não existe número irracional.

12. () Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.

13. () Entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

14. () Entre dois números reais existem infinitos números racionais.

ATIVIDADE III

Nome: _____ Data: ____/____

Dados dois números racionais: $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

1. Ache a média aritmética entre eles.
2. Este número é racional ou irracional?
3. Represente os três números na reta.
4. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 1 ?
5. Este número (obtido na questão nº 4) é racional ou irracional?

6. Represente na reta estes quatro números.

7. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 4 ?

8. Este número (obtido na questão nº 7) é racional ou irracional?

9. Represente na reta estes cinco números.

10. É possível achar a média entre este número (obtido na questão nº 7) e $\frac{3}{5}$?

11. O processo de tirar a média repetidamente tem fim? Por quê?

12. Ache a média entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{3}{4}$.

13. Represente estes três números na reta.

14. Você pode repetir este processo utilizado da questão nº 1 até a questão nº 7, partindo do número obtido da questão nº 12 e o $\frac{3}{4}$? Caso seja possível, represente alguns números na reta.

15. Escolha agora dois números racionais diferentes destes todos, e responda se entre eles existe algum outro número racional? Quantos?

16. Se você tivesse escolhido outros dois números diferentes daqueles da questão anterior, a conclusão seria a mesma? Por quê?

ATIVIDADE IV

Nome: _____ Data: ____/____

Seja um número cuja representação decimal não periódica é $1,232425\dots$. Compare-o com o número cuja representação é $1,332425\dots$ que difere do primeiro apenas em um algarismo.

1. O segundo número é uma dízima periódica? Por quê?
2. O 2º número é racional ou irracional? E o 1º? Comente sua resposta.
3. O segundo número é maior ou menor que o primeiro? Ordene-os.
4. Dê a representação decimal de um número irracional entre estes dois números.
5. Ordene estes três números.
6. Dê a representação decimal de um número irracional entre $1,232425\dots$ e o número obtido na questão nº 4.

7. Ordene estes quatro números.

8. Dê a representação decimal de um número irracional entre o número obtido na questão nº 4 e $1,332425\ldots$.

9. Ordene todos estes cinco números.

10. Ache um número irracional entre os números obtidos nas questões nº 6 e nº 8.

11. Quantos números irracionais diferentes existem entre $1,232425\ldots$ e $1,332425\ldots$?
Comente sua resposta.

12. Se você iniciasse escolhendo dois números irracionais quaisquer, seria possível encontrar números irracionais entre eles? Quantos? Por quê?

ATIVIDADE V

Nome: _____ Data: ____/____/____

1. Identifique os seguintes números?

- a) 2,3145 _____
- b) 3,5724... _____
- c) 2,666... _____
- d) 0,9802... _____

2. Quais os critérios para a representação decimal utilizados na questão anterior?

3. Seja um número cuja representação decimal não periódica é 1,232425... Compare-o com o número cuja representação é 1,332425... que difere do primeiro apenas em um algarismo.

a) Escreva um número racional entre 1,232425... e 1,332425...? Ordene estes três números.

b) Este número tem representação decimal finita ou infinita?

4. Você é capaz de achar outro número entre os dois números fornecidos na questão nº 3, escritos numa representação decimal diferente daquela sugerida acima? (Ou seja, se você achou um número racional com representação finita, ache agora um número racional com representação decimal infinita, ou vice-versa).

5. Dê as representações fracionárias dos números obtidos nas questões nº 3a) e nº 4.

6. Ache um número racional compreendido entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 3a).

7. Ache um número racional compreendido entre o número obtido na questão nº 3a) e 1,332425... .

8. Ache um número racional compreendido entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 4.

9. Ache um número racional compreendido entre o número obtido na questão nº 4 e 1,332425... .

10. Ordene todos os oito números que apareceram até agora.

11. Entre os números 1,232425... e 1,332425..., quantos números racionais diferentes existem? Comente sua resposta.

ATIVIDADE VI

Nome: _____ Data: ____/____

Dados dois números racionais $0,333...$ e $\frac{4}{3}$:

1. Ambos os números têm representação decimal infinita. Por quê eles são racionais?
2. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.
3. Dado o número $0,222...$, qual é a 732^a casa decimal? Este número é racional ou irracional? Por quê?
4. Considere o número não periódico $0,123456789101112....$. Este número é racional ou irracional? Por quê?
5. Ordene estes dois números (questões n^{os} 3 e 4).
6. Dê a representação decimal infinita de um número irracional entre $0,333...$ e $\frac{4}{3}$?

7. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 6.

8. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 7.

9. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 8.

10. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 6 e $\frac{4}{3}$.

11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 10 e $\frac{4}{3}$.

12. Ordene todos os números irracionais que apareceram a partir da questão 6.

13. Quantos números irracionais existem entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

ATIVIDADE VII

Nome: _____ Data: ____/____/____

Dados dois números racionais 1,333 e $\frac{4}{3}$:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.
2. Ache um número racional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 1.
3. Ache um número racional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 2.
4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{4}{3}$.
5. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 4 e $\frac{4}{3}$.
6. Represente na reta todos os números que apareceram até aqui.
7. Quantos números racionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

8. Existe um número irracional entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Se sim, exemplifique.

9. Ache um número irracional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 8.

10. Ache um número irracional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 9.

11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e $\frac{4}{3}$.

12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e $\frac{4}{3}$.

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

14. Quanto números irracionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

ATIVIDADE VIII

Nome: _____ Data: ____/____

Dados um número racional 3,14 e um número irracional π , responda:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.
2. Ache um número racional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 1.
3. Ache um número racional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 2.
4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e π .
5. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 4 e π .
6. Ordene todos os números que apareceram até aqui.
7. Quantos números racionais existem entre 3,14 e π ? Comente sua resposta.

8. Existe um número irracional entre 3,14 e π ? Se sim, exemplifique.
9. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 8.
10. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 9.
11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e π .
12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e π .
13. Ordene todos os números que apareceram até agora.
14. Quantos números irracionais existem entre 3,14 e π ? Comente sua resposta.

ATIVIDADE IX

Nome: _____ Data: ____ / ____

Dados dois números irracionais $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.
2. Existe um número irracional entre eles? Se sim, exemplifique.
3. Se estes números são irracionais, pode haver repetições de algarismos após a 12^a casa? E isto significa que a representação possui período?
4. A parte da representação decimal que está “oculta” (substituído por reticências) pode ser a mesma nos dois números? Se isto acontecer, os números serão iguais?
5. Estes números serão racionais ou irracionais?
6. Qual número será maior?
7. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.
8. Quantos números irracionais existem entre eles? Comente sua resposta.

ATIVIDADE X

Nome: _____ Data: ____ / ____

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F) e comente sua resposta.

1. () É possível calcular a média aritmética de dois números racionais quaisquer.

2. () Todo número que tem representação decimal infinita é um número irracional.

3. () $\frac{\pi}{2}$ é racional.

4. () Entre um número racional e um número irracional existem números racionais e números irracionais.

5. () Não existe número racional entre dois números irracionais.

6. () Entre dois números racionais não existe nenhum número irracional.

7. () 0,333...3 é irracional.

8. () Não é possível encontrar um número racional entre um número racional e um irracional.

9. () É sempre possível tirar a média de dois números irracionais.

10. () $\sqrt{2}$ e 1,41 representam o mesmo número.

11. () A média de dois números racionais é um número racional.

12. () É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números irracionais.

13. () 1,333... é irracional.

14. () Existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais entre dois números reais.

ANEXO 2

QUESTIONÁRIO: PERFIL ACADÊMICO E PROFISSIONAL

AUTORIZAÇÃO DE RESULTADOS

PERFIL DO ENTREVISTADO

Este cadastro tem única finalidade de conhecer o perfil do professorado que participou da pesquisa para constar do relatório na descrição do público-alvo. Se você quiser pode usar um pseudônimo ou apelido que não será divulgado.

Nome: _____ Sexo: M F

ASPECTOS PROFISSIONAIS

Trabalho na: Rede Pública Rede Privada

Disciplina(s) que leciono: _____

Já lecionei e não leciono mais:
Marque no(s) nível(is) de ensino quantos anos lecionou?

Fundamental I	Fundamental II	Médio	Superior

Leciono atualmente:
Marque no(s) nível(is) de ensino há quantos anos leciona?

Fundamental I	Fundamental II	Médio	Superior

PERFIL DO ENTREVISTADO

ASPECTOS ACADÊMICOS

Graduação:

Área	Instituição	Ano de conclusão

Especialização concluída (no mínimo 360 horas):

Área	Instituição	Ano de conclusão

Mestrado:

Área	Instituição	Ano de conclusão

Doutorado:

Área	Instituição	Ano de conclusão

Garantindo o anonimato dos participantes, autorizamos a divulgação dos protocolos e resultados das discussões ocorridas na oficina de números reais para fins didático-científicos.

[illegible]

ANEXO 3
PROTOCOLOS

PROTOCOLOS

ATIVIDADE I

2) Explique o critério que você usou para tomar a decisão no exercício 1.

A possibilidade do número ser
representado na forma de $\frac{p}{q}$
com $q \neq 0$.

2) Explique o critério que você usou para tomar a decisão no exercício 1.

- a) Definição de número racional: é todo número que pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ onde $b \neq 0$
- b) Somando ou dividindo um número irracional com um número racional temos sempre um número irracional
- c) Valores especiais conhecidos como irracionais
 π , e , $\sqrt{3}$
- d) Números com dízima periódica podem ser reproduzidos na forma racional $\frac{a}{b}$

3) Existe um número real compreendido entre os números abaixo?

No caso afirmativo escreva algum(ns).

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$		X	0,28 0,30, 0,359
Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$		X	2,133 e 2,139 2,13879
Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...	X		
Entre 0,999... e 1	X		

$$\begin{array}{r} 213 \\ 100 \\ \hline 2,13 \end{array} \quad 2,14$$

2,133

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 11} \\ 80 \\ \hline 0,2727 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 11} \\ 33 \\ \hline 0,36 \\ 70 \end{array}$$

3) Existe um número real compreendido entre os números abaixo?

No caso afirmativo escreva algum(ns).

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$		X	$\frac{1}{22}$
Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$		X	$\frac{1}{200}$
Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...	X		#
Entre 0,999... e 1			

3) Existe um número real compreendido entre os números abaixo?

No caso afirmativo escreva algum(ns).

Números	Não	Sim	Qual(is)
Entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$		X	$\frac{3,1}{11}, \frac{3,2}{11}$
Entre 2,13 e $\frac{214}{100}$		X	2,131; 2,132
Entre $\frac{1}{3}$ e 0,333...	X		
Entre 0,999... e 1	X		

4) Considere o conjunto $J = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq \sqrt{2}\}$

(Ou seja, o conjunto J formado pelos números racionais compreendidos entre zero e raiz de dois, inclusive)

a) J tem um último elemento?

(Isto é, o elemento que vem exatamente antes de $\sqrt{2}$?)

Sim	Não
	X

b) Se sim, qual é esse elemento? Se não, por quê?

- 1ª) Não tem porque existem infinitos decimais entre dois números racional e irracional ou entre dois racionais.
- 2ª) Número irracional não é definido portanto não é possível saber o anterior.

ATIVIDADE II

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F) e comente o critério utilizado.

1. (F) Entre dois números racionais existe um único número racional.

2. (F) Entre dois números racionais não existe número irracional.

2. (F) Entre dois números racionais não existe número irracional.

Pode existir (1, $\sqrt{2}$, 3).

2. (F) Entre dois números racionais não existe número irracional.

Por exemplo entre 3 e 4 existe, por exemplo o π , que é um número irracional.

3. (F) Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional.

INFINITO

3. (F) Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional.

exemplo $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{19}$

4. (V) Entre dois números irracionais existe um número racional.

5. (F) Entre dois números irracionais não existe número irracional.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$

11. (F) Entre dois números reais não existe número irracional.

Entre todos os números reais existe infinitos números racionais e irracionais

ATIVIDADE III

Dados dois números racionais: $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

1. Ache a média aritmética entre eles.

$$0,675$$

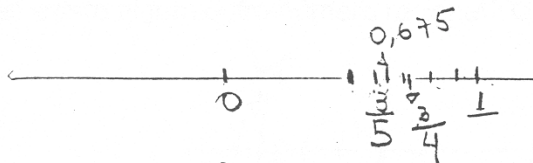
1. Ache a média aritmética entre eles.

$$\frac{12+15}{20} = \frac{27}{20} = \frac{27}{40}$$

1. Ache a média aritmética entre eles.

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{4} = \frac{12+15}{20} = \frac{27}{20} : 2 = \frac{27}{40} = 0,675$$

3. Represente os três números na reta.



4. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 1 ?

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

$$0,6 + 0,675 = 1,275 : 2 = 0,6375$$

7. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 4 ?

$$0,612$$

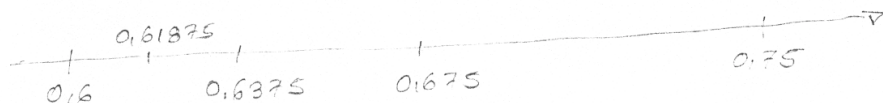
$$\frac{3}{5} + \frac{51}{80} = \frac{48+51}{80} = \frac{99}{80} = \frac{99}{160}$$

$$\begin{array}{r} 990 \overline{) 160} \\ 160 \overline{) 160} \\ \hline 0 \end{array}$$

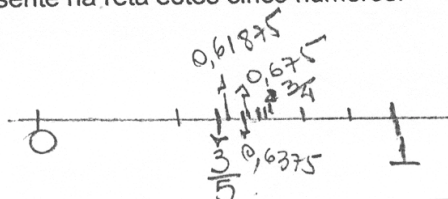
7. Tire a média entre $\frac{3}{5}$ e o número obtido na questão nº 4 ?

$$0,6 + 0,6375 = 1,2375 : 2 = 0,61875$$

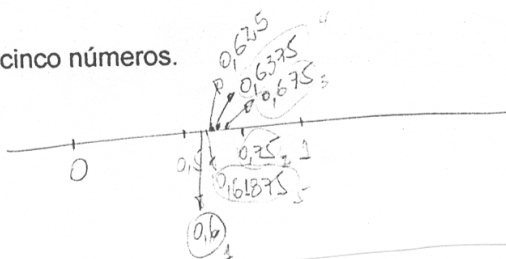
9. Represente na reta estes cinco números.



9. Represente na reta estes cinco números.



9. Represente na reta estes cinco números.



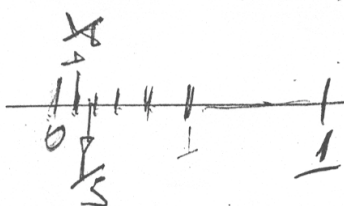
12. Ache a média entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{3}{4}$.

$$\frac{27}{40} = 0,675$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{0,675 + 0,75}{2} = 0,7125$$

15. Escolha agora dois números racionais diferentes destes todos, e responda se entre eles existe algum outro número racional? Quantos?



Sim,
infinitos

16. Se você tivesse escolhido outros dois números diferentes daqueles da questão anterior, a conclusão seria a mesma? Por quê?

Sim, entre dois números racionais existem infinitos racionais.

16. Se você tivesse escolhido outros dois números diferentes daqueles da questão anterior, a conclusão seria a mesma? Por quê?

Sim, porque aumentaria os casos decimais.

ATIVIDADE IV

Seja um número cuja representação decimal não periódica é $1,232425\dots$. Compare-o com o número cuja representação é $1,332425\dots$ que difere do primeiro apenas em um algarismo.

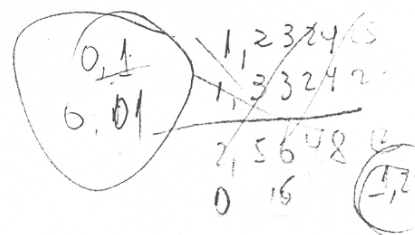
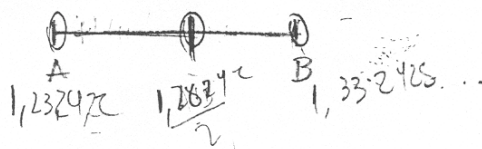
1. O segundo número é uma dízima periódica? Por quê?

nao, porque o primeiro número nao e, e o segundo apenas mudou um algarismo.

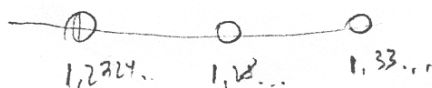
2. O 2º número é racional ou irracional? E o 1º? Comente sua resposta.

Os dois números são irracionais pois nao e uma dízima periódica

4. Dê a representação decimal de um número irracional entre estes dois números.



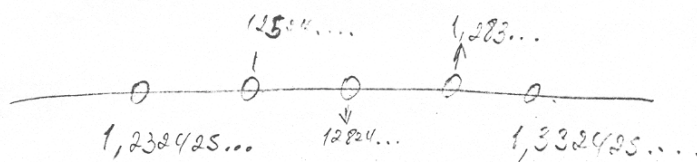
5. Ordene estes três números.



5. Ordene estes três números.

$1,232425\dots$
 $1,28\dots$
 $1,332425\dots$

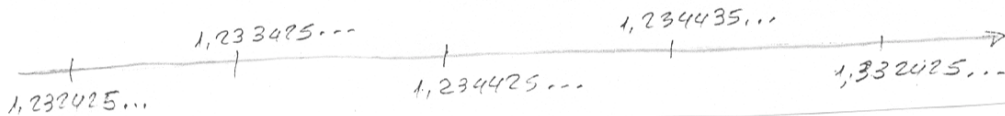
9. Ordene todos estes cinco números.



9. Ordene todos estes cinco números.

$1,232425\dots$; $1,233425\dots$; $1,242425\dots$;
 $1,243425\dots$; $1,332425\dots$

9. Ordene todos estes cinco números.



11. Quantos números irracionais diferentes existem entre $1,232425\dots$ e $1,332425\dots$?
Comente sua resposta.

EXISTE INFINITO NÚMEROS IRRACIONAIS

11. Quantos números irracionais diferentes existem entre $1,232425\dots$ e $1,332425\dots$?
Comente sua resposta.

Infinitos, aumento a cada decimal.

11. Quantos números irracionais diferentes existem entre $1,232425\dots$ e $1,332425\dots$?
Comente sua resposta.

Infinitos pois entre dois irracionais existem infinitos irracionais.

12. Se você iniciasse escolhendo dois números irracionais quaisquer, seria possível encontrar números irracionais entre eles? Quantos? Por quê?

Sim, infinitos porque dentro dos irracionais há infinitos números.

ATIVIDADE V

ATIVIDADE V

1. Identifique os seguintes números?

- a) 2,3145
- b) 3,5724...
- c) 2,666...
- d) 0,9802...

racional
irracional
racional
irracional

2. Quais os critérios para a representação decimal utilizados na questão anterior?

os números racionais são
finitos e os irracionais infinitos

1. Identifique os seguintes números?

- a) 2,3145
- b) 3,5724...
- c) 2,666...
- d) 0,9802...

racional + PA Finito
frac. se N houver período
frac. se N não houver período
frac. se N houver período

2. Quais os critérios para a representação decimal utilizados na questão anterior?

Pensamos na possibilidade da existência
de períodos ou não, após a última casa
decimal

3. Seja um número cuja representação decimal não periódica é 1,232425... Compare-o com o número cuja representação é 1,332425... que difere do primeiro apenas em um algarismo.

a) Escreva um número racional entre 1,232425... e 1,332425...? Ordene estes três números.

1,233425...
1,232425..., 1,233425..., 1,332425...

b) Este número tem representação decimal finita ou infinita?

infinita

3. Seja um número cuja representação decimal não periódica é 1,232425... Compare-o com o número cuja representação é 1,332425... que difere do primeiro apenas em um algarismo.

a) Escreva um número racional entre 1,232425... e 1,332425...? Ordene estes três números.

0,05
1,282425

1,232425... < 1,282425 < 1,332425...

b) Este número tem representação decimal finita ou infinita?

Finita

4. Você é capaz de achar outro número entre os dois números fornecidos na questão nº 3, escrito numa representação decimal diferente daquela sugerida acima? (Ou seja, se você achou um número racional com representação finita, ache agora um número racional com representação decimal infinita, ou vice-versa).

1,233425

4. Você é capaz de achar outro número entre os dois números fornecidos na questão nº 3, escrito numa representação decimal diferente daquela sugerida acima? (Ou seja, se você achou um número racional com representação finita, ache agora um número racional com representação decimal infinita, ou vice-versa).

1,282425...

5. Dê as representações fracionárias dos números obtidos nas questões nº 3a) e nº 4.

$$\frac{1,242425}{1000000}$$

e

$$\frac{1,233425}{1000000}$$

5. Dê as representações fracionárias dos números obtidos nas questões nº 3a) e nº 4.

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

$$\frac{500}{399} = 1,253...$$

5. Dê as representações fracionárias dos números obtidos nas questões nº 3a) e nº 4.

QUESTÃO 3 não é possível porque é irracional.

$$4 \Rightarrow \frac{1233425}{10^6}$$

6. Ache um número racional compreendido entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 3a).

1,23 1,24 1,28

7. Ache um número racional compreendido entre o número obtido na questão nº 3a) e 1,332425...

1,25

1,26

1,332425...

8. Ache um número racional compreendido entre 1,232425... e o número obtido na questão nº 4.

1,257425

9. Ache um número racional compreendido entre o número obtido na questão nº 4 e 1,332425....

$1,233425$, $1,243425$, $1,332425...$
 $0,01$

10. Ordene todos os oito números que apareceram até agora.

$1,232425...$, $1,232525$, $1,233425$, $1,242425$,
 $1,243425$, $1,252425$, $1,332425...$

10. Ordene todos os oito números que apareceram até agora.

$1,232425...$	$1,233425$
$1,232445$	$1,233425...$
$1,232625$	$1,233446$
$1,232645$	$1,332425...$

10. Ordene todos os oito números que apareceram até agora.

$1,232425...$
 $1,24$
 $1,25$
 $1,251$
 $1,253...$
 $1,254$
 $1,26$
 $1,332425...$

11. Entre os números 1,232425... e 1,332425..., quantos números racionais diferentes existem? Comente sua resposta.

Existem infinitos números, aumentam as casas dos decimais.

$1,233$

11. Entre os números 1,232425... e 1,332425..., quantos números racionais diferentes existem? Comente sua resposta.

Pela atividade encontramos
finitos, porém são infinitos se
continuarmos.

ATIVIDADE VI

Dados dois números racionais $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$:

1. Ambos os números têm representação decimal infinita. Por quê eles são racionais?

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$

Porque posso escrevê-los na forma finita.

Dados dois números racionais $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$:

1. Ambos os números têm representação decimal infinita. Por quê eles são racionais?

Porque a parte decimal é uma dízima periódica, e portanto pode ser representada na forma $\frac{a}{b}$ onde $b \neq 0$.

2. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.

R: Infinitos números

2. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.

Entre dois racionais existem infinitos números racionais

3. Dado o número $0,222\dots$, qual é a 732ª casa decimal? Este número é racional ou irracional? Por quê?

Se for racional é 2, se for irracional não sabemos, pois para os irracionais faltam dados.

3. Dado o número $0,222\dots$, qual é a 732ª casa decimal? Este número é racional ou irracional? Por quê?

R: Racional e a 732ª é 2, porque sabemos o último número.

4. Considere o número não periódico $0,123456789101112\dots$. Este número é racional ou irracional? Por quê?

R: É irracional, porque não sabemos o último número.

4. Considere o número não periódico $0,123456789101112\dots$. Este número é racional ou irracional? Por quê?

Irracional, porque não há período.

5. Ordene estes dois números (questões nº 3 e 4).

$$0,12345\dots < 0,222\dots$$

5. Ordene estes dois números (questões nº 3 e 4).

$$0,123456789101112\dots, 0,222\dots$$

6. Dê a representação decimal infinita de um número irracional entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$?

$$0,333 < \sqrt{1,5} < 1,333$$

6. Dê a representação decimal infinita de um número irracional entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$?

$$\begin{array}{l} 0,333 \\ 0,1 \\ 0,433 \end{array} \quad 0,433\dots$$

7. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 6.

$$0,333\dots, 0,444\dots, 0,666\dots$$

8. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 7.

$$0,333\dots < \sqrt{1,3} < 1,8321\dots$$

9. Ache um número irracional entre $0,333\dots$ e o número obtido na questão nº 8.

$$+ 0,3333\dots, 0,3334\dots, 0,334\dots$$

10. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 6 e $\frac{4}{3}$.

$$0,33342 \dots$$

$$0,33343 \dots$$

$$\frac{4}{3}$$

11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 10 e $\frac{4}{3}$.

$$1,1234\dots$$

12. Ordene todos os números irracionais que apareceram a partir da questão 6.

$$0,3334\dots, 0,334\dots, 0,343\dots,$$

$$0,433\dots, 0,533\dots, 0,633\dots$$

12. Ordene todos os números irracionais que apareceram a partir da questão 6.

$$1,0954\dots < 1,1401\dots < 1,1832\dots < 1,2247\dots <$$

$$< 1,2649\dots < 1,3038\dots$$

12. Ordene todos os números irracionais que apareceram a partir da questão 6.

$$0,333\dots$$

$$0,3334001\dots$$

$$0,333401$$

$$0,33341$$

$$0,33342$$

$$0,33343$$

$$0,33344\dots$$

$$\frac{4}{3}$$

13. Quantos números irracionais existem entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

R: Existem infinitos números, aumentam os algarismos após o virgula.

13. Quantos números irracionais existem entre $0,333\dots$ e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

Entre dois números racionais existem infinitos números irracionais.

ATIVIDADE VII

Dados dois números racionais $1,333$ e $\frac{4}{3}$:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.

Sim.

$1,3331$

Dados dois números racionais $1,333$ e $\frac{4}{3}$:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.

$$\frac{1,333 + 1,333333}{2} = 1,3331667...$$

2. Ache um número racional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 1.

$$1,333 < 1,33315 < 1,3333$$

2. Ache um número racional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 1.

$1,33301$

3. Ache um número racional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 2.

$1,333$

$1,33302$

$1,33301$

3. Ache um número racional entre $1,333$ e o número obtido na questão nº 2.

$1,333, 1,3330, 1,3331$

4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{4}{3}$.

$1,3332, 1,33321, 1,333...$

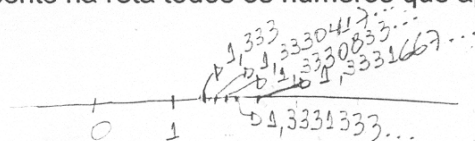
4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e $\frac{4}{3}$.

$$1,3333 < 1,33333 < \frac{4}{3}$$

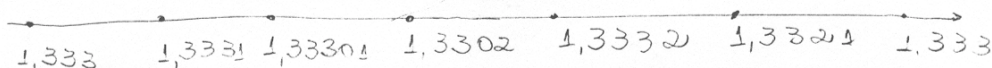
5. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 4 e $\frac{4}{3}$.

$$\frac{1,3331 + 1,3331667}{2} = 1,3331333...$$

6. Represente na reta todos os números que apareceram até aqui.



6. Represente na reta todos os números que apareceram até aqui.



7. Quantos números racionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

R1: No processo de tirar a média aumenta as casas decimais, infinito.

7. Quantos números racionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

Infinitos. Entre estes dois racionais existem infinitos racionais.

8. Existe um número irracional entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Se sim, exemplifique.

Sim. 1, 333 24 ...

8. Existe um número irracional entre $1,333$ e $\frac{4}{3}$? Se sim, exemplifique.

$$1,333 < 1,3332 \leq \frac{4}{3}$$

$\hookrightarrow \tilde{N}$ periódico

9. Ache um número irracional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 8.

D₁: Sim, 1333121...

9. Ache um número irracional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 8.

$1, 333, 1, 33301, \dots, 1, 3331, \dots$

10. Ache um número irracional entre 1,333 e o número obtido na questão nº 9.

$$1, 333, 1, 333001, \dots, 1, 33301\dots$$

11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e $\frac{4}{3}$.

$$1,3332... < 1,33321... < \frac{4}{3}$$

↳ $\tilde{N}$ periódico

12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e $\frac{4}{3}$.

$$1,3332401$$

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$$1,333 \quad 1,333240... \quad 1,3332401... \quad 1,333241 \quad 1,333242... \quad 1,333$$

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$$1,333 < 1,33305... < 1,3332... < 1,33321... < 1,333215... < \frac{4}{3}$$

Todos os números com reticências não são periódicos

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

1,333	1,333123...
1,3330419...	1,333124...
1,3330823...	1,3331333...
1,3331...	1,3331667...
1,333121...	1,3333333...
1,333120...	
1,333121...	

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$$1,333, 1,333001..., 1,33301..., 1,3331..., 1,33312..., 1,33313..., 1,333...$$

14. Quanto números irracionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

Infinitos, porque existem infinitos números que na sua forma decimal não possuem períodos.

14. Quanto números irracionais existem entre 1,333 e $\frac{4}{3}$? Comente sua resposta.

Existem infinitos números. Podemos acrescentar alguns números após a "última casa" aproximando.

ATIVIDADE VIII

Dados um número racional $3,14$ e um número irracional π , responda:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.

Sim, $(3,1414)$
 $3,14$; $3,1415\dots$

Dados um número racional $3,14$ e um número irracional π , responda:

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.

Sim.
 $3,14 < 3,141 < \pi$

2. Ache um número racional entre $3,14$ e o número obtido na questão nº 1.

$3,14$; $3,1413$; $3,1414$

2. Ache um número racional entre $3,14$ e o número obtido na questão nº 1.

$3,14 < 3,1405 < 3,141$

3. Ache um número racional entre $3,14$ e o número obtido na questão nº 2.

$3,14 < 3,14025 < 3,1405$

4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e π .

$3,1414$; $3,1413$; $3,1415\dots$

4. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 1 e π .

$3,141 < 3,1414 < \pi$

5. Ache um número racional entre o número obtido na questão nº 4 e π .

$3,14151$

6. Ordene todos os números que apareceram até aqui.

$3,14$; $3,1412$; $3,1413$; $3,14131$;
 $3,1414$; $3,1415$...

6. Ordene todos os números que apareceram até aqui.

$3,14$ $3,1404$ $3,1405$ $3,1415$ $3,14151$ π

6. Ordene todos os números que apareceram até aqui.

$3,14 < 3,14025 < 3,1405 < 3,141 < 3,1414 <$
 $< 3,141405 < \pi$

6. Ordene todos os números que apareceram até aqui.

$3,14$ $3,1406$
 $3,1402$ $3,1415927 \dots$
 $3,1403$
 $3,1404$
 $3,1405$

7. Quantos números racionais existem entre $3,14$ e π ? Comente sua resposta.

Infinitos, pois na sua forma decimal não possui período.

7. Quantos números racionais existem entre $3,14$ e π ? Comente sua resposta.

Existem infinitos. É necessário acrescentar as casas.

8. Existe um número irracional entre $3,14$ e π ? Se sim, exemplifique.

$3,14$; $3,1412$...; $3,1415$...

9. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 8.

$$3,14 < 3,14075\ldots < 3,1415\ldots$$

$\hookrightarrow \tilde{N}$ periódico

10. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 9.

$$3,14; \quad 3,1410\ldots; \quad 3,1411\ldots$$

10. Ache um número irracional entre 3,14 e o número obtido na questão nº 9.

$$3,14105\ldots$$

11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e π .

$$3,1415\ldots < 3,14157\ldots < \pi$$

$\hookrightarrow \tilde{N}$ periódico

11. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 8 e π .

$$3,141555\ldots$$

12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e π .

$$3,14121\ldots; \quad 3,1413\ldots; \quad 3,1415\ldots$$

12. Ache um número irracional entre o número obtido na questão nº 11 e π .

$$3,141515567\ldots$$

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$3,14$; $3,1410\ldots$; $3,1411\ldots$; $3,1412\ldots$;
 $3,14121\ldots$; $3,1413\ldots$; $3,1415\ldots$,

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$3,14 < 3,140375\ldots < 3,14075\ldots < 3,1415\ldots <$
 $< 3,14157\ldots < 3,141572\ldots < \pi$
 * Todos estes números que tendem ao infinito não são periódicos.

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$3,14$	$3,1407\ldots$
$3,1402$	$3,1408\ldots$
$3,1403$	$3,1409\ldots$
$3,1404$	$3,1410\ldots$
$3,1405$	$3,1411\ldots$
$3,1406$	$3,1415927\ldots$

13. Ordene todos os números que apareceram até agora.

$3,14$ $3,14105\ldots$ $3,1412\ldots$ $3,1415\ldots$ $3,14155\ldots$ $3,14151567\ldots$

14. Quantos números irracionais existem entre $3,14$ e π ? Comente sua resposta.

Existem infinitos números. É necessário acrescentar um número após a última casa e suas antecências...

14. Quantos números irracionais existem entre $3,14$ e π ? Comente sua resposta.

Infinitos. Entre um racional e um irracional existem infinitos números irracionais.

ATIVIDADE IX

Dados dois números irracionais $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique.

Sim. $0,10100100001$

Entre dois números irracionais existem inf. N^{os} racionais

Dados dois números irracionais $0,10100100001\dots$ e $0,10100100010\dots$

1. Existe um número racional entre eles? Se sim, exemplifique. $0,101001$

Apesar de não poder tirar a média de n^{os} irracionais aproxima-se os dois n^{os} e consegue então uma média

2. Existe um número irracional entre eles? Se sim, exemplifique.

Sim. $0,101.001.000.06\dots$

desde que não periódico

2. Existe um número irracional entre eles? Se sim, exemplifique.

Sim. $0,101001\dots$

3. Se estes números são irracionais, pode haver repetições de algarismos após a 12^a casa? E isto significa que a representação possui período?

Não porque não há repetições de mesmo valor numérico

3. Se estes números são irracionais, pode haver repetições de algarismos após a 12^a casa? E isto significa que a representação possui período?

Não, pois n^{os} irracionais não possuem período.
Não, possui período.

4. A parte da representação decimal que está "oculta" (substituído por reticências) pode ser a mesma nos dois números? Se isto acontecer, os números serão iguais?

Podem ser a mesma, mas os números não são iguais.

4. A parte da representação decimal que está "oculta" (substituído por reticências) pode ser a mesma nos dois números? Se isto acontecer, os números serão iguais?

Sim.. Não.. porque são inicialmente diferentes

4. A parte da representação decimal que está "oculta" (substituído por reticências) pode ser a mesma nos dois números? Se isto acontecer, os números serão iguais?

não porque se são irracionais nunca serão iguais

5. Estes números serão racionais ou irracionais?

São números irracionais

6. Qual número será maior?

0,10 100 1000 10...

6. Qual número será maior?

É o segundo

7. Quantos números racionais existem entre eles? Comente sua resposta.

Infinitos n.ºs, aumenta as casas decimais

8. Quantos números irracionais existem entre eles? Comente sua resposta.

Infinitos números. Entre dois N.ºs irracionais existem infinitos números irracionais.

ATIVIDADE X

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F) e comente sua resposta.

1. (V) É possível calcular a média aritmética de dois números racionais quaisquer.

Sim. Porque o número é finito.

1. (F) É possível calcular a média aritmética de dois números racionais quaisquer.

Não, porque uma dízima não periódica é um nº irracional e portanto não faz a média entre eles.

2. (F) Todo número que tem representação decimal infinita é um número irracional.

Não, pois o número que aparece período é racional.

2. (F) Todo número que tem representação decimal infinita é um número irracional.

1/3 tem reticência na sua representação decimal e nem por isso é um nº irracional

3. (F) $\frac{\pi}{2}$ é racional.

Não, pois ele é apenas uma representação e não uma fração.

3. (F) $\frac{\pi}{2}$ é racional.

Veja o π torna racional, por aproximação

4. (V) Entre um número racional e um número irracional existem números racionais e números irracionais.

Sim: $\frac{1}{3} + \sqrt{2} / 2 = 0,873773448$.

para deixá-lo irracional, basta colocar reticências

4. (V) Entre um número racional e um número irracional existem números racionais e números irracionais.

pelas estruturas dos números reais sempre existem números racionais e irracionais entre número racional e irracional

5. (F) Não existe número racional entre dois números irracionais.

Sim. Existem infinitos números racionais entre dois números irracionais.

6. (F) Entre dois números racionais não existe nenhum número irracional.

Sempre existe um número racional dentro de dois números racionais.

7. (F) $0,333...3$ é irracional.

É uma dízima periódica

7. (F) $0,333...3$ é irracional.

Não, pois ele tem um intervalo fechado, portanto é racional.

8. (F) Não é possível encontrar um número racional entre um número racional e um irracional.

É possível desde que faça a aproximação

8. (F) Não é possível encontrar um número racional entre um número racional e um irracional.

É possível encontrar infinitos números entre dois números, racionais ou irracionais.

9. (V) É sempre possível tirar a média de dois números irracionais.

Representação de um segmento de reta (Pitágoras)

9. (F) É sempre possível tirar a média de dois números irracionais.

Não é possível dividir um número infinito por qualquer outro número. Usa-se um intervalo fechado.

9. (F) É sempre possível tirar a média de dois números irracionais.

Somente se você fizer a aproximação

10. (F) $\sqrt{2}$ e 1,41 representam o mesmo número.

Sim se você subentender: Se, for de baixa precisão, 1,41 satisfaz. Porém se for altíssima precisão, temos que trabalhar com $\sqrt{2}$ (irracional)

10. (F) $\sqrt{2}$ e 1,41 representam o mesmo número.

Não pois $\sqrt{2}$ representa um número irracional e 1,41 representa um número racional. $\sqrt{2} > 1,41$

11. (V) A média de dois números racionais é um número racional.

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

11. (V) A média de dois números racionais é um número racional.

$2+3=5 \Rightarrow 5+\sqrt{2}=6.414213562$ (racional)

12. (V) É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números irracionais.

Sim, porque se assim não fosse, a reta real teria falha

13. (F) 1,333... é irracional.

É uma dízima periódica.

13. (F) 1,333... é irracional.

Por convenção este número é racional.

14. (V) Existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais entre dois números reais.

Densidade de conjuntos reais.

14. (V) Existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais entre dois números reais.

Sim pois a reta real não tem buracos.

INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO DO EXPERIMENTO

1. Como você contaria a um amigo, que não participou desta oficina, a respeito do que foi trabalhado?

Analisamos a quantidade de números existentes em um intervalo numérico até chegar a conclusão de que em um intervalo infinitamente pequeno existem infinitos números.

1. Como você contaria a um amigo, que não participou desta oficina, a respeito do que foi trabalhado?

Aplicando as atividades com números, de forma que pudessem encontrar atores entre eles primeiros, usando as diferentes representações e suas definições.

1. Como você contaria a um amigo, que não participou desta oficina, a respeito do que foi trabalhado?

Nesta oficina, você pode mostrar a seus alunos os $\mathbb{N}$, racionais e irracionais de uma visão mais ampla e cada atividade trabalhada e mostrar eles na reta.

1. Como você contaria a um amigo, que não participou desta oficina, a respeito do que foi trabalhado?

Amigo você perdeu uma oportunidade e tanto pois nem na universidade se vê o que vimos neste curso.

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

- Situações que não geraram dupla interpretação.
- Situações que criaram dupla interpretação e que impossibilitaram a classificação em racionais ou irracionais
- Discussão em grupo.

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

Os números racionais, irracionais e os números decimais

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

- A definição de racionais e irracionais (números)
- Os diferentes tipos de representações numéricas.
- O que representa um número infinito (se é racional ou irracional).

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

- números racionais
- " irracionais
- Infinitos.

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

NÃO SE TIRA A MÉDIA entre dois n.º irracionais simplesmente porque não cabe no display da calculadora.

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

- método de apresentação,
- discussão em grupo,
- interferências

2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.

- As representações, dízimas e média

3. O que mais aprendi.

Ampliação do conceito de números racionais e irracionais e suas representações nas diversas linguagens matemáticas

3. O que mais aprendi.

Trabalhar com outra visão os Números Reais

3. O que mais aprendi.

Todos os conjuntos mencionados
(irracionais e racionais)
- as representações dos números.

3. O que mais aprendi.

Ficou claro nas atividades e definições que entre dois números racionais ou irracionais existem infinitos números racionais e irracionais.

3. O que mais aprendi.

Que entre dois números existe infinitos números

3. O que mais aprendi.

Devo exemplificar melhor os n.ºs reais com atividades onde eles verificam a existência desses n.ºs na reta

3. O que mais aprendi.

Que eu sei muito pouco.

4. Dúvidas que ficaram.

O que é um número irracional? Como prová-lo

4. Dúvidas que ficaram.

Em relação à densidade[↑]
menhuma.

5. Você recomendaria a algum amigo que fizesse este mesmo trabalho? Se sim, que sugestões de mudanças você apresentaria?

Apenas que adequassemos as atividades para que fossem aplicadas a alunos do Ensino fundamental, um pouco mais direta.

5. Você recomendaria a algum amigo que fizesse este mesmo trabalho? Se sim, que sugestões de mudanças você apresentaria?

Sim, que o tempo para cada atividade fosse estabelecido e fosse maior.

5. Você recomendaria a algum amigo que fizesse este mesmo trabalho? Se sim, que sugestões de mudanças você apresentaria?

Sim, uma visão diferente dos livros didáticos.

6. Outros comentários.

Acho que faltou tempo para se "aprofundar" neste tema complexo dos números.

6. Outros comentários.

Apesar de ter perdido algumas aulas, eu gostei e peço que ^{se poss. acabar} algum trabalho sobre frações for feito gostaria de conhecer

6. Outros comentários.

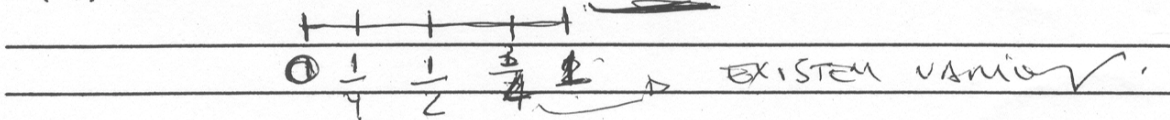
Devia continuar, estendendo este curso p/ os colegas que perderam.

ATIVIDADE II - (REAPLICAÇÃO)

1. (F) Entre dois números racionais existe um único número racional.

Por exemplo: entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ não existe só $\frac{2}{4}$ como número racional

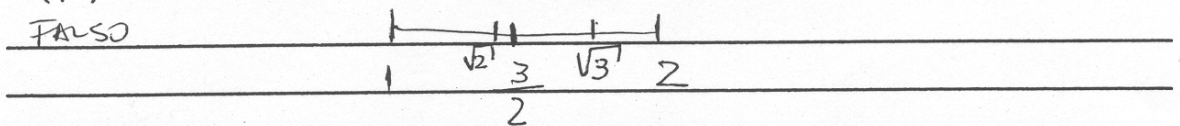
1. (F) Entre dois números racionais existe um único número racional.



2. (F) Entre dois números racionais não existe número irracional.

Exemplo: Entre os números 2 e 3 existe o $\sqrt{2}$

2. (F) Entre dois números racionais não existe número irracional.



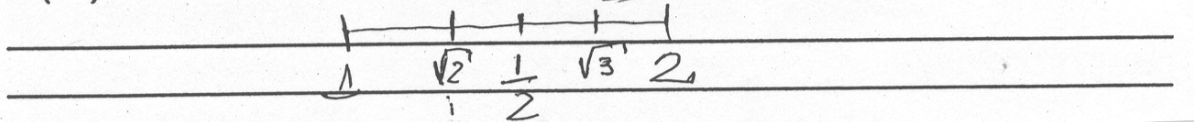
3. (F) Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional.

São infinitos os números

4. (F) Entre dois números irracionais existe um número racional.

R: Existe infinitos n-ºs racionais.

4. (V) Entre dois números irracionais existe um número racional.



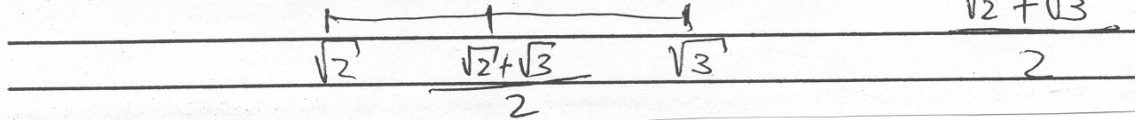
4. (V) Entre dois números irracionais existe um número racional.

Por exemplo entre $\sqrt{2}$ e o número π existe o número 2,5.

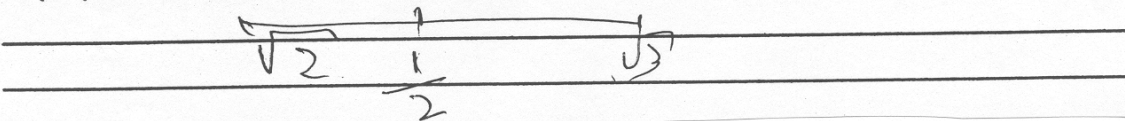
5. (F) Entre dois números irracionais não existe número irracional.

Existem

5. (F) Entre dois números irracionais não existe número irracional.



6. (F) Entre dois números irracionais não existe número racional.



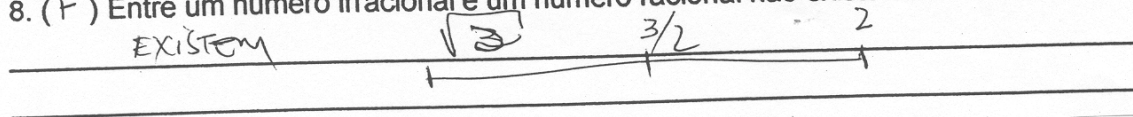
6. (F) Entre dois números irracionais não existe número racional.

Exemplo: $\sqrt{2}$ e π existe o número 2,5

7. (V) Entre um número racional e um irracional existe número racional.

Pois entre um número racional e um número irracional existem vários racionais

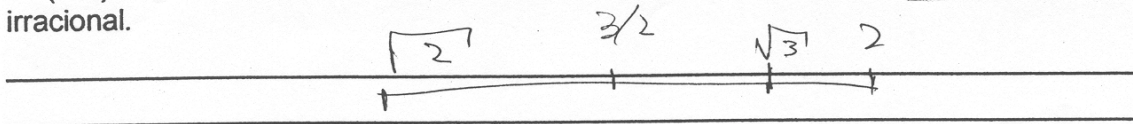
8. (F) Entre um número irracional e um número racional não existe número racional.



8. (F) Entre um número irracional e um número racional não existe número racional.

entre 3,1416... e 3,5 existem outros racionais como por exemplo 3,25

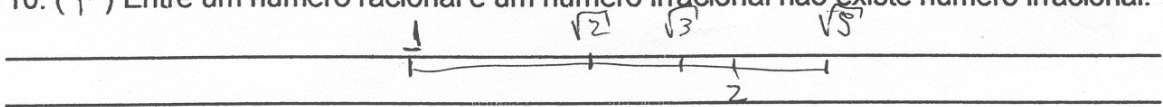
9. (F) Entre um número irracional e um número racional existe um único número irracional.



9. (F) Entre um número irracional e um número racional existe um único número irracional.

entre 3,1416... e 4 existem vários
números irracionais

10. (F) Entre um número racional e um número irracional não existe número irracional.



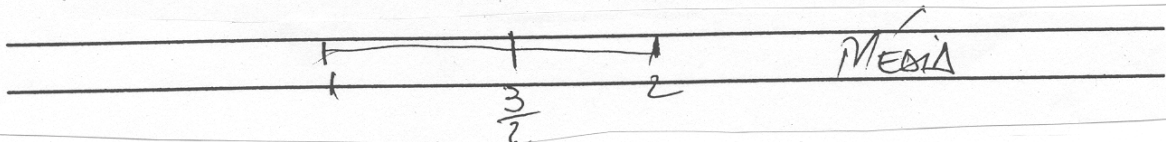
10. (F) Entre um número racional e um número irracional não existe número irracional.

entre 1 e \sqrt{2} existem vários irracio-
nais.

11. (F) Entre dois números reais não existe número irracional.

Exemplo entre os números reais 3 e
4 existe o 3,1416...

12. (V) Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.



12. (V) Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.

R: Sim $\frac{1}{3}, 0,33...; 0,34; 0,35; 0,36; ... \frac{1}{2}$

12. (V) Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.

Existem infinitos números racionais
exemplo: entre 0,333... e 0,666... existem o número
0,313131..., 0,323232...

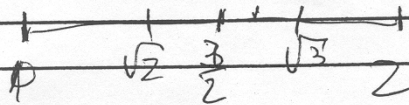
13. (V) Entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

Exemplo: os números reais engloba todos
os outros conjuntos numéricos.

13. (✓) Entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.

R: Sim. $1; 1,1; 1,2; 1,3; \dots 2$

13. (✓) Entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.



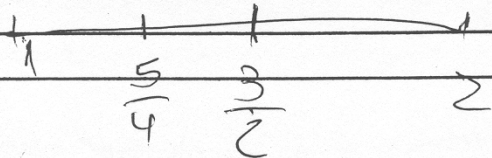
14. (✓) Entre dois números reais existem infinitos números racionais.

R: Sim. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots 2$

14. (✓) Entre dois números reais existem infinitos números racionais.

Exemplo: entre o número 1 e o número 2 existem infinitos. Exemplo: $1,25; 1,5; 1,75$.

14. (✓) Entre dois números reais existem infinitos números racionais.



$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 6} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,666\dots \\ 12 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 6} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,333\dots \\ 12 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 6} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 7} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,7 \\ 1428571\dots \\ 12 \\ 10 \end{array}$$

ANEXO 4

INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO DO EXPERIMENTO

Comentários a respeito do módulo de Números Reais
realizada em julho de 2004.

1. Como você contaria a um amigo, que não participou desta oficina, a respeito do que foi trabalhado?
2. Destaque 3 tópicos que na sua opinião foram relevantes.
3. O que mais aprendi.
4. Dúvidas que ficaram.
5. Você recomendaria a algum amigo que fizesse este mesmo trabalho? Se sim, que sugestões de mudanças você apresentaria?
6. Outros comentários.
7. Avaliação da professora, de 0 a 5.

Obrigada, Prof^a. Cristina Penteado