EDELWEISS BENEZ BRANDAO PELHO

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO:
A IMPORTÂNCIA DA COMPREENSÃO DAS VARIÁVEIS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2003

EDELWEISS BENEZ BRANDAO PELHO

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO: A IMPORTÂNCIA DA COMPREENSÃO DAS VARIÁVEIS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva.***

PUC/SP

São Paulo

2003

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter-me dado inspiração e força para concluir este trabalho.

Ao meu marido José Pelho pelo amor, carinho e paciência e, especialmente por ter sido o principal incentivador da conclusão deste Mestrado.

Ao Professor Dr. Benedito Antonio da Silva, não só pela competência e sabedoria na orientação, mas pelo carinho e amizade que demonstrou em todos momentos de nossa jornada.

À Professora Drª Lígia Arantes Sad, que aceitou o convite de fazer parte da banca examinadora e pelas importantes sugestões que enriqueceram este trabalho.

À Professora Drª Anna Franchi, pela sua capacidade e sabedoria demonstradas durante todo o desenvolver do curso, pelas valiosas contribuições a este trabalho e pela pessoa doce e amiga que mostrou ser.

Aos Professores e colegas do Programa, que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Em especial ao meu colega Adair, que gentilmente fez a revisão deste trabalho.

Ao Colégio Salesiano de Araçatuba, que através de sua direção, me ajudou a concluir este Mestrado.

Aos alunos do Ensino Médio do Colégio Salesiano, que colaboraram com sua participação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, por terem acreditado em minhas possibilidades.

Aos meus filhos, Danilo e Fábio, que também incentivaram e apoiaram este trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de função por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes, e do relacionamento entre elas. Fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática com a elaboração e aplicação de uma seqüência de ensino e posterior análise dos dados coletados. Está embasado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A seqüência de ensino orienta-se em uma pesquisa de Kieran e Sfard (1999), sobre o ensino da álgebra escolar e em um trabalho Duval (1988) sobre a articulação entre os registros gráfico e algébrico. Uma das ferramentas de ensino utilizadas na aplicação da seqüência foi o software Cabri-Géomètre II, além do uso de apenas papel e lápis. A seqüência foi aplicada com alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola particular da cidade de Araçatuba, interior do estado de São Paulo. Foram analisados os protocolos de seis duplas, que participaram de todas as sessões. Os resultados obtidos levam a concluir que houve uma evolução por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função, propiciado pela compreensão e relacionamento entre as variáveis e pelas devidas articulações entre os diferentes registros de representação da função.

Palavras-Chave: função, variáveis, dependência entre variáveis, aquisição de conceito, registros de representação,

ABSTRACT

This research aims to introduce the concept of function throughout the comprehension of the dependable and undependable variables, and of the relation between them. Its fundaments are on the Didactics Engineering principles by the creation and application of a teaching activity sequence and a posterior analysis of the collected data. It is based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation of Register. The teaching activity sequence is derived from the research of Kieran & Sfard (1999) about the algebra school mathematics teaching and a Duval's research (1988) about the articulation between the graphical and algebraic registers. On of the teaching tools used during the application of the activity sequence was a software called Cabri-Géomètre II, besides paper and pencils. The activity sequence was applied to second-year-high school students in a private school in the city of Araçatuba, northwest of the state of São Paulo, Brazil. The protocols of six pairs of the participating students presents in every section were analyzed. The results convey the existence of a certain increase among the students of the development in understanding the concept due to the comprehension and the relation between the variables as well as to the corresponding articulation among the different representation registers of the function.

Key words: function, variables, dependability between variables, concept acquisition, representation registers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma das dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática é a apreensão do conceito de função. A evidência deste fato pode ser constatada ao longo de nossa experiência de ensino com alunos do ensino médio e em diversas pesquisas que envolvem esta questão. Neste trabalho analisaremos algumas destas investigações.

A compreensão deste conceito é de grande importância não só pela sua aplicação e utilização em outras disciplinas, tais como a Física, a Química, a Biologia, a Economia, mas também pelo fato de ser pré-requisito ao estudo de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos da área de exatas, podendo acarretar dificuldades aos alunos que optarem por esta área.

Um claro indicativo dessa nossa convicção, pode ser encontrado nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, (PCNEM,1999) ao se referir ao ensino de função:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. (p.42)

Apesar de os alunos freqüentemente terem contato com expressões que utilizam o termo *função* com o significado de *dependência,* como por exemplo: o consumo de gasolina de carro *é função* de sua velocidade; os resultados escolares de um aluno são *função* do trabalho que ele realiza; a colheita de produtos agrícolas *é função* do clima; a possibilidade de aprendizagem deste conceito é prejudicada por sua introdução por meio de definições diretas e formais, muitas vezes abandonando-se a noção de dependência.

Nosso interesse se voltou em desenvolver um trabalho para introduzir o conceito de função em alunos do ensino médio, inserido na linha da História, Epistemologia e Didática da Matemática, do programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Para alcançarmos nosso intuito, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática que introduzisse este conceito e posteriormente analisamos os dados obtidos. Foi elaborada de modo que favorecesse a compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. Nos orientamos em uma pesquisa de Kieran e Sfard (1999), sobre o ensino da álgebra escolar e em um trabalho Duval (1988) sobre a articulação entre os registros gráfico e algébrico.

Utilizamos como uma das ferramentas de ensino o software Cabri-Géomètre II, alternando com outras atividades que utilizem apenas papel e lápis.

Como suporte teórico de nossa investigação tomamos por base a teoria desenvolvida por Raymond Duval, sobre os registros de representação semiótica. Para o autor, não existe conhecimento Matemático que possa ser adquirido sem o auxílio de uma representação sendo que em uma atividade vários registros devem ser mobilizados. Quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

No Capítulo I, apresentamos a problemática do trabalho, destacando algumas pesquisas existentes sobre o tema que nos indicaram a direção a seguir na investigação, bem como uma breve análise histórica do desenvolvimento do conceito de função e das propostas governamentais do ensino da Matemática no segundo grau.

No Capítulo II, relatamos os procedimentos metodológicos realizados em nosso trabalho.

O Capítulo III consta da exposição da seqüência didática, com uma análise *a priori* das questões, descrição da realização das sessões e análise dos resultados obtidos.

Finalizando, no Capítulo IV, apresentamos as conclusões finais da nossa pesquisa.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

1.1 O PROBLEMA E AS QUESTÕES

Constatamos em nossa prática docente que os alunos chegam ao Ensino Médio sem compreenderem o conceito de função, apesar deste começar a ser trabalhado a partir da 6ª série do Ensino Fundamental. Decorrente disso, surgem dificuldades no estudo das funções: exponencial, logarítmica, trigonométricas e também na aplicação deste conceito em outras disciplinas em que se faz necessária a sua utilização. A nossa experiência em sala de aula sobre o ensino e aprendizagem de função, deu origem ao nosso interesse em desenvolver um trabalho sobre a introdução deste conceito.

Observamos a maneira como alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio introduzem o conceito de função, a fim de analisar as abordagens propostas em salas de aula. Para a escolha destes livros, nos orientamos em um trabalho organizado por Lima[1] que contém análises de livros de Matemática para este segmento de ensino. A seguir, citamos os que selecionamos, por serem conhecidos e utilizados por professores tanto da rede pública como da particular, na região em que atuamos:

- Matemática - Iezzi, G., e outros. Ed. Saraiva.
- Coleção Matemática – Giovanni, J.R., Bonjorno, J.R. Ed. STD.
- Curso Prático de Matemática – Buchi, P. Ed. Moderna.
- Matemática na Escola do Segundo Grau – Machado, A.S. Ed. Saraiva.

Tomamos também como base para nossas observações, as apostilas do Sistema Uno de Ensino, elaboradas pela Editora Moderna que são adotadas pela escola em que trabalhamos e por nós utilizadas.

---

[1] LIMA, E.L et all. Exame de Textos : Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

Verificamos na maioria destes livros que a dependência funcional foi totalmente eliminada da definição de função, sendo esta estabelecida apenas como uma relação entre os elementos de dois conjuntos. Alguns, em suas definições, incluem a menção da lei que estabelece tal relação, porém não de dependência entre variáveis. Apresentam uma definição de caráter estático, direta e formal, que se opõe à idéia intuitiva de função como uma transformação, uma dependência, uma variação, podendo resultar com isso, a não compreensão deste conceito por parte dos alunos. É comum abordarem este conteúdo na seguinte ordem: par ordenado, produto cartesiano, conceito de relação, gráfico de uma relação, conceito de função. Alguns livros definem este conceito da seguinte maneira: dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma relação que a cada elemento de A, faz corresponder um único elemento de B. Outros, definem por meio de dois conjuntos, o domínio, o contradomínio e uma regra que associa a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio.

Para Freudenthal (1982, apud KIERAN,1992, p.408) é essencial ao se caracterizar função enfatizar a noção de dependência. O autor afirma que:

> Nosso mundo não é um sistema relacional estático, mas um reino de mudanças, um reino de objetos variáveis dependendo uns dos outros; as funções são um tipo especial de dependência, isto é, entre variáveis que são distinguidas como dependentes e independentes.

A existência de trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática sobre as dificuldades dos alunos na construção do conceito de função devido a não compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas, levou-nos a constatar que o nosso interesse de pesquisa era pertinente. Destacamos algumas destas pesquisas que nos orientaram em nossas investigações:

Cotret (1988), apresenta um resumo de sua pesquisa que aborda um meio de os estudantes acederem ao conceito de função, envolvendo a importância do relacionamento entre variáveis para a compreensão deste conceito e afirma que:

> As definições modernas de função excluem a variação e dependência, são inacessíveis aos alunos do curso secundário porque elas dificilmente permitem chegar a uma compreensão intuitiva de função. É preciso voltar a dar à função seus componentes de variação, dependência e correspondência. (p. 7)

De acordo com a autora, quando se inicia o ensino de função, é importante conservar a idéia de dependência e a noção de variação, que é a base deste conceito e possibilita aos alunos uma construção inicial da noção de função. Neste artigo, Cotret faz referência a estudos de Neil e Shuart (1972, p.9) sobre funções:

> Infelizmente a idéia de dependência funcional foi eliminada da definição formal de função. [...]Quando iniciamos o ensino de funções, é comum suprimir a idéia que a dependência funcional se exprime por uma regra de correspondência. [...]As funções são utilizadas como modelos matemáticos em situações nas quais a dependência precisa ser expressa. Em muitos textos modernos esta idéia não é evidenciada.

Kieran (1992) em um trabalho sobre o ensino de álgebra escolar, aponta a importância da compreensão das variáveis no estudo de funções e analisa algumas pesquisas que discorrem sobre a não compreensão de variáveis e decorrente disto, a dificuldade da apreensão do conceito de função. Citamos algumas delas:

- Küchemann (1976, apud KIERAN 1992, p.396) revela que alunos de 13 a 15 anos viam as letras como objetos concretos ou como rótulos de objetos concretos, poucos deles eram capazes de interpretar letras como variáveis.

- Clement, Lochhead & Monk, 1981, apud KIERAN 1992, p.405), constataram que esta tendência ocorre também com estudantes mais velhos, ou seja, que 37% de estudantes do curso de engenharia pesquisados, expressaram incorretamente a relação funcional entre duas variáveis.

- Mevarech e Yitschak (1983, apud KIERAN 1992, p.405), constataram que 38% dos 150 estudantes universitários entrevistados consideraram letras como rótulos e não como variáveis em uma relação de equivalência .

- Kleiner (1989, apud KIERAN 1992,p.391), considera o estágio crucial para o desenvolvimento do conceito de função a compreensão da noção de variáveis dependentes e independentes.

- Even (1988, apud KIERAN 1992, p.408) ilustra alguns efeitos de se usar as "definições conjuntistas " no ensino de funções, eliminando a idéia de dependência funcional. Aplicou um questionário que abordava a relação entre função e equação a 152 futuros professores secundários de Matemática do último ano de oito universidades americanas. A instrução que tinham recebido nas aulas, tanto no nível secundário, como superior, havia sido baseada nos livros didáticos de Álgebra, que adotam sistemas padronizados e modernos. Foram solicitados a dar uma definição de função e a indicar como esta se relaciona com a equação. Pela análise das respostas obtidas, Even concluiu que para esses futuros professores, funções só têm significado como equações. Eles não sabiam dar significado à moderna definição conjuntista de função e não eram capazes de relacionar soluções de equações com valores das funções correspondentes numa representação gráfica.

- Marckovits, Eylon e Bruckeimer (1983,1986, apud KIERAN 1992, p.409) investigaram uma possível interação do ensino de funções desenvolvido no curso de Álgebra com o das aulas de Ciências, em que são vistas como relações de dependência entre variáveis. Concluíram que estas noções não são capitalizadas no curso de Álgebra, ou seja, para a maioria dos estudantes tratam-se de duas definições distintas em cada um dos cursos. Observaram também que os alunos apresentavam maior dificuldade em realizar uma conversão da representação gráfica de uma função para a sua representação algébrica.

- Dreyfus e Einsemberg (1981,1982, apud KIERAN 1992, p.409) investigaram as bases intuitivas para o conceito de função com 440 alunos do ensino médio, com questões sobre imagem, domínio, crescimento, extremos e declividade nas três representações: gráficas, por diagramas e por tabelas. Concluíram que os estudantes que preferiam o registro gráfico possuíam um conhecimento melhor do conceito de função. Aqueles que preferiam o registro de tabela tinham mais dificuldades neste conceito. Observaram que a construção e interpretação de gráficos representam dificuldades para os alunos.

- Swan (1982, apud KIERAN 1992, p.410) constatou que a dificuldade da conversão do registro gráfico para o algébrico é, na maioria das vezes, conseqüência da maneira como se realiza a conversão contrária, ou seja, solicita-se aos alunos a construção de tabelas de valores que satisfaçam expressões algébricas com duas variáveis, marcarem os pontos em um gráfico cartesiano e lerem as coordenadas de um ponto no gráfico. De acordo com o autor o fato de enfatizar apenas essas habilidades na passagem do registro algébrico para o gráfico, ocorrem dificuldades ao se converter do registro gráfico para o algébrico.

- Kieran, Boileau e Garançon (1989, apud KIERAN 1992, p.405) realizaram pesquisas que tinham por objetivo verificar o poder do uso do computador para modelar relações funcionais entre variáveis. Os estudantes de 12 a 15 anos deveriam utilizar um determinado programa para calcular valores de variáveis. Constataram que os alunos conseguiam resolver as atividades neste ambiente computacional com mais facilidade do que apenas utilizando os métodos tradicionais de resolução, quando era necessário construir equações envolvendo duas variáveis.

As pesquisas de Schwartz e Dreyfus (1989,1995), analisaram a introdução do conceito de função com alunos da série inicial do ensino médio utilizando um ambiente computacional. Desenvolveram e avaliaram um programa intitulado "Modelo de Representação Tripla" (Triple Representation Model: TRM). Este modelo foi criado com a finalidade de ajudar os estudantes a suprirem a dificuldade de transferência de conhecimentos entre diferentes registros de representação de uma mesma função. As três representações em questão são: a algébrica, a gráfica e a tabela de valores.

Segundo os autores, apesar de o conceito de função não ser teoricamente ligado a uma representação particular, para que ocorra a aprendizagem deste, há a necessidade de mudanças de diferentes representações e estas passagens representam dificuldades para os alunos. Isto os levou a construir este ambiente computadorizado (TRM) cujas principais características são:

- Facilitar a conversão do conceito de função entre as três representações: algébrica, gráfica e tabela de valores, bem como o relacionamento entre elas.
- O trabalho em cada representação é organizado em termos de operações que os estudantes tem de realizar.

Os pesquisadores utilizaram o programa em uma classe de alunos que iniciavam o estudo de funções na qual havia computadores disponíveis na razão de um para cada dois alunos e verificaram que houve um avanço na aprendizagem deste conceito, devido à prática das transferências entre as três representações. Porém, destacam também que os professores eram continuamente orientados sobre os aspectos didáticos e tecnológicos do ambiente computacional e sugerem que deve haver um grande esforço em engenharia pedagógica que possibilite aos professores dominarem atividades que contenham técnicas de trabalho em grupo, sessões de computadores e questões convencionais.

Os resultados destas pesquisas e nossa prática docente, reforçam a nossa crença de que a não compreensão do conceito de função de alunos do ensino médio e do superior, é a falta de compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas, e a não capacidade de articulação entre as diferentes representações deste conceito. Possivelmente, ocorre apenas uma aprendizagem mecânica e local, em que os alunos algumas vezes, conseguem construir tabelas de valores e gráficos a partir de expressões algébricas, sem, entretanto, compreenderem o conceito de função.

Decorrente destes estudos preliminares, elaboramos um trabalho com o intuito de rever o processo de introdução do conceito de função no ensino médio, que, na maioria das vezes, se inicia, com uma definição conjuntista, o que pode causar dificuldades para o aluno na compreensão do "novo" conteúdo.

Pretendemos verificar a hipótese de que se elaborarmos e aplicarmos uma seqüência didática conveniente com situações que explorem o relacionamento entre variáveis de modo dinâmico e que possibilite a articulação entre os diferentes registros de representação; estaremos propiciando aos alunos uma melhor compreensão do conceito de função. Para isso utilizamos como uma das ferramentas de ensino um ambiente computacional, além de atividades realizadas somente com o uso do lápis e papel. Temos o objetivo de não só verificar a possibilidade de uma compreensão do conceito de função, mas também de provocar mudanças nas concepções dos alunos sobre esta noção.

Pretendemos com isto, responder à seguinte questão:

“Os alunos do ensino médio conseguem compreender o conceito de função, rompendo com suas interpretações mecânicas, com a aplicação de uma seqüência didática, que envolva atividades nas quais são abordados aspectos funcionais entre as variáveis e que utilize um ambiente computacional como uma das ferramentas de ensino?”

Com o intuito de nos orientarmos na elaboração de nossa proposta de ensino, fizemos uma investigação nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) elaborados pelo MEC (1999) e na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Segundo Grau da Secretaria do Estado da Educação S.P, no que diz respeito às orientações para o ensino e aprendizagem do conceito de função.

O resultado desta investigação está relatado no item seguinte.

1.2 O ENSINO DE FUNÇÃO DE ACORDO COM AS PROPOSTAS GOVERNAMENTAIS

A Proposta Curricular da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo sugere que ao se introduzir as primeiras noções sobre função deva expressar a dependência entre uma variável em relação a outra, relacionando gráficos com tabelas, e afirma que:

> A formação do conceito de função é um processo longo e demorado. Utilizar situações significativas para o aluno, bem como usar linguagens informais para descrever a dependência entre duas variáveis é uma excelente estratégia no início do trato do conceito de função. Ao final desta fase, o aluno deverá dominar o conceito de domínio e do conjunto imagem dos valores correspondentes resultantes da interdependência entre duas variáveis. (p.24)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (1999), procuram dar ênfase ao processo de transformação do ensino, apresentando propostas e caminhos para o processo de ensino e aprendizagem do país. Em relação ao ensino de função afirmam que:

> Cabe, portanto, o ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.(p.42)

Achamos pertinente elencar alguns objetivos propostos nos PCNEM, a serem atingidos pelos alunos com relação ao ensino de função:

- Reconhecer diferentes tipos de funções em situações de vida real.
- Representar e analisar funções utilizando tabelas, gráficos ou outro tipo de representação.

- Utilizar o conceito de função para descrever e estudar fenômenos do cotidiano da Matemática e de outras ciências.
- Reconhecer funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas;
- Construir, ler e interpretar gráficos de funções de 1° e 2° graus, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas;
- Analisar gráficos e leis para estabelecer sinal, crescimento e raízes de uma função;
- Estabelecer relações entre os coeficientes e os gráficos das funções de 1° e 2° graus, bem como o conjunto imagem de função do 2° grau a partir das coordenadas do vértice e do sinal do coeficiente de x^2 ;
- Resolver problemas que envolvam o conceito de função do 1° e 2° graus.

Destacamos algumas competências apresentadas nos PCNEM para serem trabalhadas no ensino médio, que também nos forneceu um respaldo para o nosso trabalho:

- Interpretar e utilizar diferentes formas de representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, para que se realizem as interpretações.

Estas investigações das propostas governamentais de ensino do conceito de função também representaram elementos importantes para nosso trabalho e foram pertinentes para a elaboração de nossa seqüência de ensino.

1.3 BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Não pretendemos neste trabalho fazer uma análise detalhada do desenvolvimento histórico do conceito de função. O objetivo principal desta investigação é apresentar alguns aspectos da História da Matemática, que julgamos serem pertinentes para se alcançar a compreensão do conceito de função preconizada nas propostas governamentais para o Ensino Médio.

A história constitui um terreno fecundo para a análise de alguns fatos que possam colaborar para uma melhor compreensão desse conceito, que percorreu vários séculos desde as suas primeiras noções intuitivas que incluem a idéia de componentes de variação e dependência, passando por acentuadas evoluções com vários refinamentos, tendo chegado a uma recente elaboração no século anterior.

Para Youschkevich (1976, p.9), o desenvolvimento da noção de função divide-se em três etapas principais:

1) A Antigüidade: Nesta fase verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e de funções.

2) A Idade Média: Etapa em que se expressavam as noções de funções sob forma geométrica e mecânica, porém ainda prevalecendo as descrições gráficas ou verbais.

3) O Período Moderno: A partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, começam a prevalecer as expressões analíticas de função, sendo que o método analítico de introdução à função revoluciona a matemática devido a sua extraordinária eficácia e assegura a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

Constatamos em Youschkevich que os babilônios e os gregos na Antigüidade já possuíam instintivamente uma noção de funcionalidade com o uso de tabelas sexagemais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser entendidas como “funções tabuladas”.

Kline (1972, p. 338), ao abordar em seu trabalho o desenvolvimento do conceito de função, destaca que durante os séculos XVI e XVII, ao longo da história do desenvolvimento do estudo dos movimentos, originou-se o conceito de função ou uma relação entre variáveis, o qual foi fundamental para praticamente todo o trabalho dos próximos duzentos anos.

Segundo o autor, Galileu Galilei (1564-1642), contribuiu para a evolução do conceito de função, ao utilizar instrumentos de medidas aprimorados em suas experiências, introduziu um tratamento quantitativo nas suas representações gráficas (curvas), expressando relações funcionais em palavras e em linguagem de proporção. Por exemplo, em um de seus relatos sobre o estudo do movimento, Galileu descreve: “O espaço percorrido por um corpo em queda a partir do repouso com movimento uniformemente acelerado, depende do quadrado do intervalo de tempo utilizado ao percorrer esta distância.” A linguagem mostra claramente que ele se refere a variáveis e a funções. Com o desenvolvimento, do simbolismo algébrico nesta época, Galileu estabelece este relacionamento sob forma simbólica: $s = k. t^2$

Em Zuffi (2001, p.11), vemos que Descartes (1596-1650) estabeleceu uma relação de dependência entre quantidades variáveis utilizando uma equação em x e y , possibilitando o cálculo de valores de uma variável a partir dos valores da outra. Neste estudo, a autora constata que as primeiras contribuições efetivas para a construção do conceito de função surgiram com os trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Foi Newton quem estabeleceu pela primeira vez um termo específico para funções, ao utilizar o nome de "fluentes" para representar algum relacionamento entre variáveis. Ele descreve suas idéias de função ligadas à noção de curva e a "taxas de mudança" de quantidades que variavam continuamente.

Para Kline (p. 340), a palavra função foi introduzida por Leibniz em 1673, ao se referir a qualquer quantidade variando ponto a ponto de uma curva: as coordenadas de um ponto, a inclinação e o raio de curvatura de uma curva.

Posteriormente o termo foi utilizado para se referir a quantidades dependentes ou expressões. Também introduziu as palavras: “constantes”, “variáveis” e “parâmetros”.

O autor diz que Jean Bernoulli em 1697, ao trabalhar com funções, refere-se a quantidades formadas de alguma maneira por variáveis e quantidades constantes. Em 1698, Bernouilli utiliza a palavra “função” de Leibniz para significar quantidades que dependem de uma variável. Experimentou várias notações para uma função de x, sendo que uma delas "fx" é a que mais se assemelha à notação atual usada f(x) introduzida por Euler em 1734.

Por sua vez, Youschkevich (p.35) declara que a primeira definição explícita de função aparece em um artigo de Bernouilli (1718) publicado na Academia Real de Ciências de Paris: “Chamamos de função de uma quantidade variável a uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes.” (p.35). Ressalta que o desenvolvimento posterior essencial do conceito de função é trabalho de Leonard Euler (1707-1783), discípulo de Bernouilli, que ampliou a idéia de "fluentes" de Newton para a Análise que é um ramo mais abrangente da Matemática, caracterizada pelo estudo de processos infinitos. Euler considerou função como uma equação ou uma fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes: “Uma função de uma quantidade é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade e de números ou quantidades constantes.” (p.36). Segundo Youschkevich, os estudos de Euler foram essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, trazendo grandes contribuições para a linguagem simbólica e as notações utilizadas hoje, como por exemplo o f(x).

Kline (p.406) afirma que o matemático francês Jean-Louis Lagrange (1736-1813) define função de uma ou várias variáveis como qualquer expressão em que estas variáveis intervêm de qualquer maneira. Para Lagrange as funções representam operações distintas que se realizam sobre quantidades conhecidas para obter os valores de quantidades desconhecidas. Em outras palavras, uma função é uma combinação de operações.

Zuffi declara que a proposta de Lejeune Dirichlet (1805-1859) para funções definidas sobre conjuntos numéricos é interessante e bastante próxima àquelas encontradas nos livros didáticos atuais, segundo a qual, se uma variável y está relacionada a uma variável x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então diz se que y é uma função da variável independente x. Esta definição geral de função foi amplamente aceita até meados do sec.XX, sendo generalizada cem anos mais tarde por Bourbaki, e utilizada atualmente.

Em 1939, o conceito de função foi ampliado com a teoria dos conjuntos, abrangendo relações entre dois conjuntos de elementos, não só de números, mas também de qualquer coisa. Bourbaki propõe que uma função é uma terna ordenada (X,Y,f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de X x Y, tal que se (x,y') $\in$ f, então y = y'. Com esta definição mais geral, o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica e formal. Sua importância não está mais em uma regra de correspondência, mas em uma série de correspondências entre os elementos de dois conjuntos.

Pretendemos que esta breve reflexão sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função propicie uma idéia de todo o dinamismo envolvido, contrariando uma possível visão estática de que este conceito surgiu conforme é utilizado hoje.

1.4 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Como no estudo de funções, as pesquisas por nós analisadas de Kieran (1992), Kieran e Sfard (1999), Schwartz e Dreyfus (1989, 1995), apontam a importância de trabalhar em diferentes formas de representações do conceito de função, escolhemos como referencial teórico para nosso trabalho a Teoria de Registros de Representação de Raymond Duval que trata dos aspectos cognitivos relacionados com a aquisição de conhecimentos matemáticos.

Concordamos com Damm (1999, p.135) que afirma: "A teoria de Duval, tem sido cada vez mais utilizada quando as pesquisas concernem à aquisição de conhecimento e a organização de situação de aprendizagem."

Para Duval (1999), a aprendizagem da matemática constitui um campo de estudo privilegiado para análise de atividades cognitivas fundamentais que, além das imagens e da linguagem natural, recorrem a utilização de outros sistemas de expressão e de representação, por exemplo: os gráficos, os diagramas, as figuras geométricas, as fórmulas algébricas, etc.

O autor parte do fato que a aquisição de um conhecimento, especialmente matemáticos recorre à noção de representação. Como os objetos matemáticos são abstratos não diretamente acessíveis à percepção, necessitam para a sua apreensão do uso de uma representação. Segundo Duval, não há conhecimento matemático que possa ser adquirido sem o auxílio de uma representação.

Afirma que: "As representações semióticas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, lingua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras de um objeto matemático"(1995, p.3). Segundo o autor estas representações permitem a comunicação do sujeito com o objeto matemático, possibilitando a sua apreensão. Em uma atividade matemática, vários registros de representação semiótica (enunciado em linguagem natural, expressão algébrica, gráfico, figura geométrica,) são mobilizados, sendo uns ligados ao funcionamento cognitivo comum, como a linguagem natural e outros utilizados pela necessidade da própria atividade matemática.

O autor afirma que nem todo sistema semiótico é um registro de representação. Para que isto ocorra, é necessário que preencha outras atividades cognitivas fundamentais, tais como:

- A formação de uma representação identificável: que pode ser estabelecida na elaboração de um texto, enunciado compreensível, na escrita de uma fórmula, de um gráfico. São regras já estabelecidas, utilizadas e não criadas pelo sujeito.

- O tratamento de uma representação é a transformação de uma representação interna a um mesmo registro. Por exemplo algorítmos de operações aritméticas com escrita decimal ou com escrita fracionária.

- A conversão de um registro de um registro de representação é a transformação de uma representação pela mudança de um registro a outro conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. Por exemplo a passagem do registro gráfico para o algébrico (escrita simbólica) ou vice-versa.

Para Duval é necessário considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático e a compreensão destas representações são essenciais ao desenvolvimento do conhecimento. Um objeto matemático não deve ser confundido com sua representação, normalmente observa-se uma confusão entre a representação do objeto matemático (*forma* de representar), com o próprio objeto (*conteúdo* a ser representado).

Em nosso trabalho, por exemplo, o objeto matemático é função as diversas formas de representar este objeto são: gráficos, tabelas, expressão algébrica (escrita simbólica), linguagem natural, que correspondem aos diferentes registros de representação.

Para o autor, quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Constata em suas pesquisas que muitos bloqueios dos alunos correspondem à incapacidade que têm em converter a representação de um objeto em uma outra representação de um mesmo objeto.

Assim se pronunciou:

> O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em uma outra representação do mesmo objeto. (DUVAL,1999)

Duval pesquisou o funcionamento e as condições de aprendizagem das representações gráficas que são representações de funções ou de outros objetos matemáticos. Segundo o autor:

> O problema das representações gráficas não concerne à diferenciação entre a forma e o conteúdo representado, mas a discriminação das unidades significantes constituindo a forma, isto é, a discriminação dos valores visuais pertinentes e não pertinentes à figura-forma. (Duval, 1999).

Em seu artigo intitulado: "Gráficos e Equações: a articulação entre os dois registros" (1988), Duval estudou a discriminação das variáveis visuais pertinentes, aquelas cuja variação resulta numa mudança categórica dos parâmetros na expressão algébrica correspondente ao gráfico. Por exemplo na função afim y = *a*x+*b*, são variáveis visuais pertinentes: o coeficiente angular *a*, cujo valor positivo ou negativo e, o coeficiente linear *b*, positivo, negativo ou nulo, cujas variações interferem respectivamente na inclinação da reta e no ponto onde esta intercepta o eixo dos y.

Evidenciou nesta pesquisa, as dificuldades dos alunos no ensino médio converterem o registro gráfico para o algébrico e vice-versa.

É importante dizer, segundo o pesquisador, o essencial para que haja sucesso no ensino e aprendizagem de um conhecimento matemático, não são os registros de representação utilizados, mas sim a maneira de como utilizá-los. A conceitualização e a aquisição de conhecimentos ocorrem somente quando o aluno consegue “transitar” naturalmente por diferentes registros.

Com base neste contexto teórico, demos continuidade a nossa pesquisa, elaborando uma seqüência didática para introduzir o estudo de funções, trabalhando a dependência e o relacionamento entre as variáveis e que leve em conta questões que privilegiam a articulação entre os diferentes registros de representação do objeto matemático função. Desta maneira, pretendemos analisar se estamos proporcionando aos alunos uma compreensão do conceito de funções.

CAPÍTULO II

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho se originou com a constatação em nossa prática docente, da evidente dificuldade apresentada pela maioria de nossos alunos do Ensino Médio em compreender o conceito de função.

Nosso interesse em desenvolver uma investigação sobre as causas de tal dificuldade, teve como elemento decisivo a leitura de um texto de Kieran (1992), sobre a aprendizagem e o ensino da Álgebra escolar, no qual destaca a importância da compreensão das variáveis no estudo de funções. A autora analisou alguns trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática, os quais já citamos no capítulo anterior. Também nos orientamos nas pesquisas de Cotret (1988) e de Schwartz e Dryfus (1989, 1995); em alguns livros didáticos nacionais com o intuito de observar as abordagens propostas em salas de aula referentes à introdução do conceito de função; nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) e nas Propostas do Estado de S.Paulo (1994).

Algumas pesquisas realizadas sobre funções, nos levaram a conjeturar que muitas das dificuldades ocorrem devido ao formalismo existente, sendo necessário resgatar o caráter dinâmico deste conceito, por meio de abordagens que proponham situações tais que permitam ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a dependência de uma variável em relação a outra e identificar variável dependente e independente.

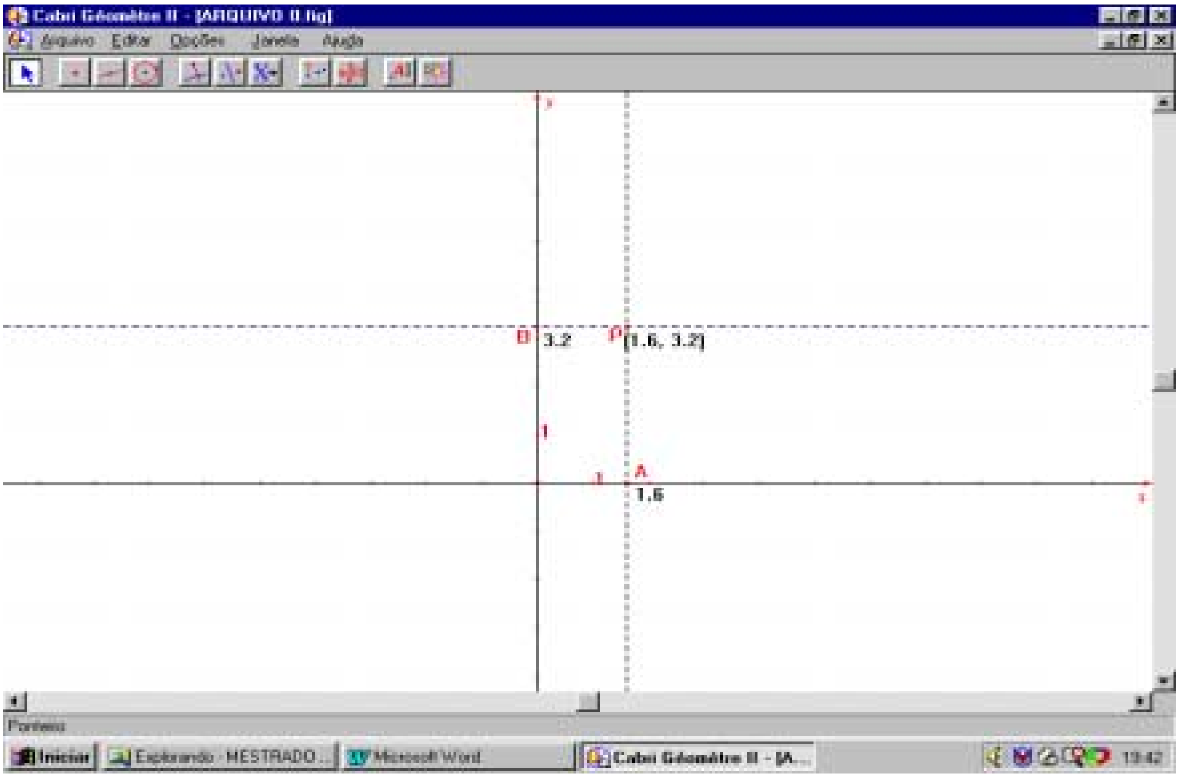
Com o intuito de verificar se a hipótese levantada era verdadeira, elaboramos portanto, situações que abordam aspectos funcionais entre variáveis e que utilizam as diferentes representações simbólicas do conceito de função: algébrica, gráfica, numérica, linguagem natural (textos), bem como as articulações entre estas representações.

Verificamos que as pesquisas de Schwartz e Dreyfus (1989,1995), apontam a importância do uso de um software adequado para o ensino de função.

Decidimos incluir na seqüência de ensino, atividades para serem desenvolvidas com o uso do software Cabri- Géométre II como uma das ferramentas de ensino. Este software é um programa interativo e compatível com o Windows, foi desenvolvido por Jean Marie Laborde e Frank Bellemain no Institut d'Informatique e Mathématiques Appliquées da Université Joseph Fourier de Grenoble na França.

A escolha deste software ocorreu por ser um programa que pode oferecer aos alunos a oportunidade de compreensão de conceitos e relações matemáticas. A manipulação do programa não exige habilidades na área de informática, que dispõe de comandos simples e de fácil manuseio e em uma linguagem muito próxima da do "papel e lápis", familiarizada pelos alunos .

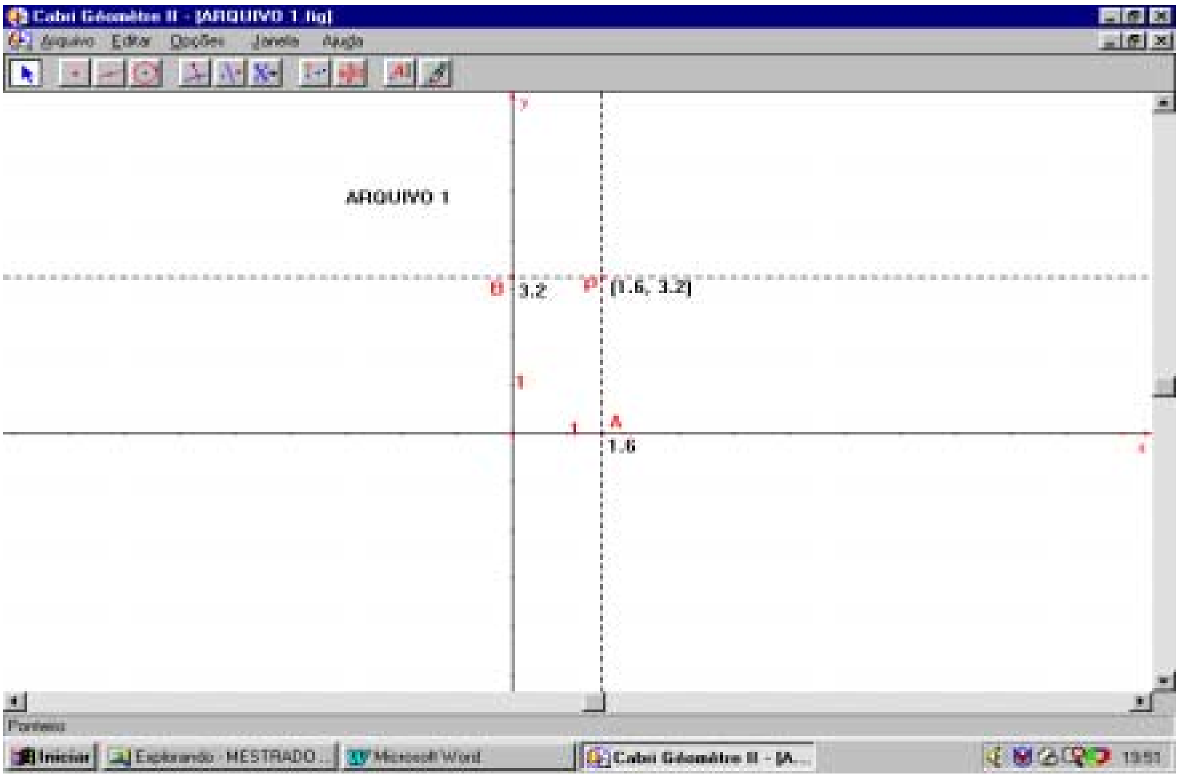
Apesar de ser um software cujas ferramentas básicas permitem a exploração do universo da Geometria, optamos pelo seu uso, pois ele também possibilita a realização de outras atividades como a construção e análise de gráficos de uma função, ao utilizar um sistema de eixos coordenados e a determinação de pontos em relação a este sistema. A seguir, apresentamos uma tela que evidencia estas características:



Seus comandos permitem a construção de arquivos nos quais podem-se representar pontos móveis, cujos deslocamentos propiciam observar uma inter- relação entre as suas coordenadas (abscissa e ordenadas).

A principal contribuição do Cabri-Gèométre II para nosso estudo é a capacidade dos gráficos apresentarem um caráter dinâmico, podendo-se deslocar um ponto sobre o eixo das abscissas (variável independente), observar a variação e o relacionamento com um ponto do eixo das ordenadas (variável dependente), sem modificar as relações previamente estabelecidas, podendo propiciar uma melhor compreensão das variáveis de uma função e do relacionamento entre elas.

Outra qualidade importante do software para nosso trabalho, é permitir a construção de arquivos, nos quais uma determinada função é estabelecida previamente, porém suas representações gráfica, algébrica e numérica não são conhecidas pelos alunos, mas sim construídas no desenvolver das atividades. Por exemplo, apresentamos o ARQUIVO 1 de uma atividade do grupo 1, no qual a função previamente estabelecida é y = 2x :



Conforme se movimenta o ponto A, B e P variam de acordo com a função escolhida, o que favorece a construção do registro numérico (tabela de valores) e do registro algébrico. Além disso, o software permite visualizar o "rasto" do ponto P, durante o seu deslocamento, e possibilita também a construção do registro gráfico da função.

Para o processo experimental de nosso trabalho e para a análise dos resultados obtidos, utilizamos como metodologia de pesquisa princípios da Engenharia Didática. Segundo Michèle Artigue (1988, apud MACHADO,1999), esta metodologia se caracteriza por um esquema experimental baseado nas ações didáticas em sala de aula, tratando da concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino.

Para Artigue, o procedimento experimental da Engenharia Didática é composto de quatro fases:

1. Análises Preliminares:

Caracteriza-se pelo levantamento das concepções envolvidas, que buscam quadros teóricos que fundamentem a pesquisa.

Faz parte de nossas análises preliminares os seguintes itens:

- Estudo de algumas pesquisas existentes sobre as concepções e dificuldades dos alunos sobre o conceito de função.
- Análise da Proposta Curricular Nacional para o Ensino de Matemática no segundo grau e de algumas competências apresentadas para serem trabalhadas que estão relacionadas com a compreensão das variáveis e com as diferentes formas de representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
- Breve estudo histórico sobre o conceito de função.
- Escolha da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval para embasamento do trabalho a ser desenvolvido.

2. Concepção e análise *a priori*:

Nesta fase atua-se sobre um determinado número de variáveis pertinentes ao assunto a ser pesquisado, com o objetivo de determinar em que as escolhas das variáveis permitem controlar o comportamento dos alunos. Ela compreende um aspecto descritivo e um das previsões possíveis do comportamento dos alunos.

3. Experimentação:

Fase em que se aplica a seqüência didática a uma certa população de alunos. Nesta etapa acontece a institucionalização dos conceitos trabalhados nas atividades.

4. Análise *Posteriori*:

Corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase da experimentação e às observações realizadas durante a aplicação da seqüência.

O confronto das análises *a priori* e *a posteriori* fundamentam a “validação” das hipóteses formuladas.

Nessa perspectiva, concebemos, realizamos, observamos e analisamos uma seqüência didática, inicialmente composta de 4 grupos de atividades e posteriormente acrescida de mais um grupo de atividades, por sugestão da Profª Drª Lígia Arantes Sad. Concordamos com a necessidade deste acréscimo que visava relacionar não só a expressão algébrica com o texto, o gráfico e a tabela, conforme as atividades do grupo 4, mas que propiciasse uma articulação e um relacionamento mútuo entre estes quatro registros de representação. Desta maneira complementamos as atividades anteriores, fornecendo assim possibilidades de avaliar se os nossos objetivos iniciais seriam atingidos.

Para a aplicação da seqüência de ensino, elegemos uma escola particular da cidade de Araçatuba, interior de São Paulo, cuja escolha ocorreu pelo fato de lecionarmos neste estabelecimento, dispondo de recursos materiais e humanos convenientes para a aplicação da seqüência.

Escolhemos, para sujeitos de pesquisa, alunos de uma classe do segundo ano do ensino médio, composta de 30 estudantes, que já estudaram o conteúdo de função em séries anteriores. Este último requisito seria necessário para nosso trabalho, pois pretendíamos iniciar o estudo desse conceito de uma maneira diferente da que fora realizada segundo a proposta da apostila do Sistema Uno de Ensino, adotada pela escola e de cuja elaboração os professores da instituição não participam.

Em uma entrevista com o professor de Matemática do primeiro ano, confirmamos que o estudo de funções acontece de acordo com o que é apresentado nas apostilas adotadas, tal como os demais conteúdos matemáticos desta e das outras séries. Assim como nos livros didáticos citados no capítulo anterior, este conteúdo é desenvolvido na seguinte ordem: par ordenado, produto cartesiano, conceito de relação, gráfico de uma relação, conceito de função. Define-se função como uma relação entre elementos de dois conjuntos, incluindo a menção de regra (lei), porém não de dependência entre as variáveis.

Utilizamos na seqüência de ensino exemplos de função afim e quadrática. Observamos, em nossas aulas, as dificuldades apresentadas por eles na compreensão destas e das demais funções que fazem parte do currículo do segundo ano. Provavelmente, ao trabalharmos com as funções afim e quadrática, os alunos tenham condições de explorar o relacionamento entre as variáveis, com um aproveitamento melhor, uma vez que já têm alguma familiaridade com tais funções. Além disso, situações vivenciadas por eles no cotidiano, tais como o cálculo de perímetro e de área, de custos, etc, podem ser traduzidas matematicamente, via estas funções.

Pelo fato de lecionarmos a esses alunos desde o início do ano e por dispor dos dados fornecidos pelo professor do ano anterior, achamos desnecessário a aplicação de um teste diagnóstico. Reafirmamos esta escolha, ao considerar nossa experiência de ensino, constatadas durante as aulas, que ocorriam com estes alunos o mesmo que nos anos anteriores, ou seja, a maioria não compreendia o conceito de função. Questionados sobre o que entendiam por função, verificamos que para alguns era apenas o gráfico, e que a expressão algébrica e a tabela de valores eram ferramentas para a construção dele.

Inicialmente convidamos os alunos a participarem destas atividades, explicando que este trabalho faz parte de uma pesquisa e que os resultados apresentados não seriam utilizados para sua avaliação acadêmica.

Enfatizamos que seriam compensados por poderem aprender o conceito de função que já haviam estudado no ano anterior, e que acreditávamos que os resultados poderiam contribuir para uma melhor compreensão do conceito. Além disso, explicamos que seria utilizado como uma das ferramentas de ensino o software Cabri-Géomètre II. Percebemos que isso os deixou mais motivados a aceitarem a proposta.

A realização dos 4 grupos iniciais da seqüência ocorreu em quatro sessões, durante os meses de maio e junho do ano de 2002. Foi escolhido o período da tarde, fora do horário das aulas, para não retardar o desenvolvimento do conteúdo programático do bimestre. Um colega, que não era professor destes alunos, participou dessas sessões como observador.

A primeira sessão ocorreu no dia 22 de maio com duração de sessenta minutos, conforme previsto. Compareceram 20 alunos que trabalharam em duplas, de acordo com suas escolhas.

A segunda sessão foi realizada na semana seguinte, dia 29/05. Compareceram 18 alunos, sendo que a falta dos demais foi posteriormente justificada. Os alunos cujo colega da dupla faltou, preferiram trabalhar sozinhos.

As atividades do grupo 2 foram realizadas no dia 12/06, duas semanas após a realização da segunda sessão. O espaço de tempo entre as sessões ocorreu porque no período de 03/06 a 07/06 os alunos tiveram uma semana de provas, e a maioria manifestou a intenção de faltar à sessão se esta fosse realizada naqueles dias. Compareceram 20 alunos, dos quais os dois que haviam faltado na anterior e propuseram-se a realizar as atividades que haviam perdido. O computador não era utilizado para a realização das atividades do grupo 2, porém, a sessão também transcorreu no laboratório de informática para possibilitar a participação destes dois alunos, que resolveram trabalhar individualmente, utilizando cada um uma máquina. Ao terminarem as atividades que haviam perdido, agruparam-se e resolveram as do grupo 2, com o prazo do trabalho estendido. Os demais alunos organizaram-se em duplas. Foi estipulado um tempo de 60 minutos para a realização das duas atividades deste grupo.

Distribuímos as questões e papel quadriculado para a construção dos gráficos. Observamos, pelas atitudes dos alunos, que eles trabalhavam com interesse, lendo e analisando as questões propostas, as quais se referiam a situações do cotidiano, envolvendo cálculos de perímetros e áreas dos cômodos de uma residência.

A quarta sessão foi realizada no laboratório de informática, dia 27/06. Compareceram a esta sessão 15 alunos, que se agruparam em 6 duplas e um trio, conforme escolha própria. Nesta sessão os alunos desenvolveram as atividades dos grupos 3 e 4. O tempo estipulado foi de 90 minutos. Entregamos inicialmente as questões das atividades do grupo 3, que foram realizadas com o uso do software Cabri-Géomètre e conforme terminavam estas atividades, recebiam as do grupo 4.

Posteriormente, elaboramos e aplicamos, no final do mês de setembro, um último grupo de atividades composta de 3 questões que não fazia parte do nosso projeto inicial, mas que eram necessário e útil para uma melhor finalização de nossa pesquisa, conforme citamos anteriormente. Esta atividade foi elaborada para ser executada com o uso de papel e lápis, sem a utilização do computador. Compareceram a esta sessão 12 alunos, os quais participaram de todas atividades anteriores, sendo que os protocolos destes alunos é que servirão de base para a análise dos resultados. Organizaram-se em 6 duplas e o tempo estipulado para a realização deste trabalho foi de 60 minutos. Distribuímos inicialmente a questão 1 e, após o término desta, a questão 2, juntamente com papel quadriculado para a construção dos gráficos e por último a questão 3.

A realização de cada sessão está relatada no capítulo seguinte.

Realizamos as análises dos resultados, e confrontamos com as análises *a priori* das atividades.

CAPÍTULO III

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Com o objetivo de introduzir o conceito de função, elaboramos e aplicamos uma seqüência de ensino e analisamos os dados obtidos, visando a compreensão por parte dos alunos, das variáveis dependentes e independentes e do relacionamento entre elas. O nosso intuito é propiciar aos alunos uma melhor compreensão deste conceito.

Não pretendemos propor nenhum tipo de estratégia ou caminho que leve o aluno à aquisição da definição "conjuntista" do conceito de função, por concordarmos com Cotret (1988,p.7) que descreve: "[...] as definições modernas de função são inacessíveis aos alunos do curso secundário porque elas dificilmente permitem chegar a uma compreensão intuitiva de função [...]".

As atividades foram elaboradas com base na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval. Pretendemos favorecer a utilização e conversão das diferentes representações simbólicas do conceito de função: algébrica, gráfica, numérica, linguagem natural. Conforme o autor, quanto maior for a articulação entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto.

Esta seqüência é composta de 5 grupos de atividades, dois dos quais, 1 e 3, foram elaborados para serem executados com o auxílio do software Cabri-Géomètre II. Cada um destes grupos, encontra-se nos anexos deste trabalho.

O grupo 1 de atividades foi elaborado com o objetivo de propiciar aos alunos uma compreensão das componentes de variação e a dependência entre elas, bem como uma articulação entre os registros gráficos, numéricos e algébricos de função, por meio de uma abordagem gráfica dinâmica proporcionada pelo software.

As atividades dos grupos 2 e 4 foram inspiradas e adaptadas a partir de um trabalho de Kieran e Sfard (1999) que visa relacionar expressões algébricas, tabelas, gráficos e textos, o qual realiza conversões entre estas representações. Elaboramos posteriormente as atividades do grupo 5, porém buscamos propiciar uma coordenação e articulação simultânea entre as representações acima.

Para a elaboração da atividade do grupo 3, baseamo-nos num trabalho de Duval (1988) sobre a articulação entre os registros gráficos e algébricos. Para o autor, a discriminação dos coeficientes lineares e angulares da representação gráfica de uma função afim, propicia uma interpretação global desta representação, chama estes coeficientes de variáveis visuais pertinentes dessa função. Este procedimento contrapõe-se à interpretação pontual ensinada aos alunos para converter o registro algébrico para o gráfico, como é sugerido em alguns livros didáticos.

Conforme a pesquisa elaborada, aplicada e analisada por Duval, os alunos apresentam dificuldades em fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico, quando utilizam apenas interpretações pontuais. Entretanto, ao discriminarem as variáveis visuais pertinentes, conseguem realizar uma interpretação global do registro gráfico, ou seja, relacionar a inclinação da reta, com o crescimento da função e a intersecção da reta com o eixo y com o seu coeficiente linear. Desta maneira, o autor observou que os alunos realizavam a conversão para o registro algébrico com maior facilidade. Pretendemos portanto, verificar se ao utilizarmos estes mesmos procedimentos com nossos alunos, propiciamos uma melhor articulação entre os registros gráficos e algébricos.

Apresentamos a seguir a análise *a priori* das atividades dos 5 grupos por nós elaborados.

3.1 ANÁLISE *A PRIORI* DAS ATIVIDADES

3.1.1 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO GRUPO 1

O grupo 1 é constituído de 5 atividades, elaboradas para serem desenvolvidas com a utilização do software Cabri-Géomètre II. Estas atividades têm por objetivo principal proporcionar aos alunos uma compreensão das variáveis dependente e independente e da dependência entre elas, por meio de uma abordagem gráfica dinâmica proporcionada pelo software. Os alunos trabalharão em duplas, em um laboratório de informática, com uma máquina para cada dois e com possibilidades de utilizarem lápis e papel, quando necessário. Este trabalho em duplas tem como objetivo facilitar a troca de experiências e discussão entre eles.

Cada uma das atividades contém um arquivo a ser aberto pelos alunos, que apresenta o sistema de eixos cartesianos e a função a ser trabalhada já definida, porém sem a sua representação gráfica e nem a algébrica, conforme explicitamos no Capítulo II.

Pretendemos também provocar conversões entre diferentes registros de representação: do gráfico para a tabela de valores e, posteriormente, para a expressão algébrica. Talvez os alunos não encontrão dificuldades para realizar as representações na tabela a partir dos dados obtidos no gráfico, pois conforme se desloca o ponto indicado sobre o eixo das abscissas, o software apresenta o correspondente do eixo das ordenadas. Como estas conversões são propostas de maneira diferente daquelas apresentadas na maioria dos livros didáticos utilizados por diversos professores, pretendemos evitar um trabalho mecânico, que faz com que os alunos só façam passagens das expressões algébricas para tabelas e posteriormente para gráficos.

Esperamos propiciar aos alunos a constatação que a expressão algébrica, o gráfico e a tabela correspondentes são representações de um mesmo objeto matemático: função.

As funções escolhidas para serem trabalhadas nas atividades 1, 2 e 3 foram respectivamente: y = 2x, y = - 2x e y = 2x +1 e nas atividades 4 e 5, foram $y = x^2$ e $y = -x^2$.

Pretendemos com as funções afins escolhidas explorar também a variação dos coeficientes angulares e lineares que representam as variáveis visuais pertinentes das funções. Verificaremos também se a compreensão destas variáveis permite uma melhor articulação entre os registros gráficos e algébricos. Poderemos observar se os alunos conseguem relacionar estas variáveis visuais com a inclinação da reta e o crescimento da função, e, com isso, ocorram as possíveis conversões de registro, conforme ocorreu com a pesquisa de Duval.

Com as funções quadráticas, $y = x^2$ e $y = -x^2$, pretendemos que os alunos relacionem o coeficiente de x^2 com a concavidade da parábola do registro gráfico.

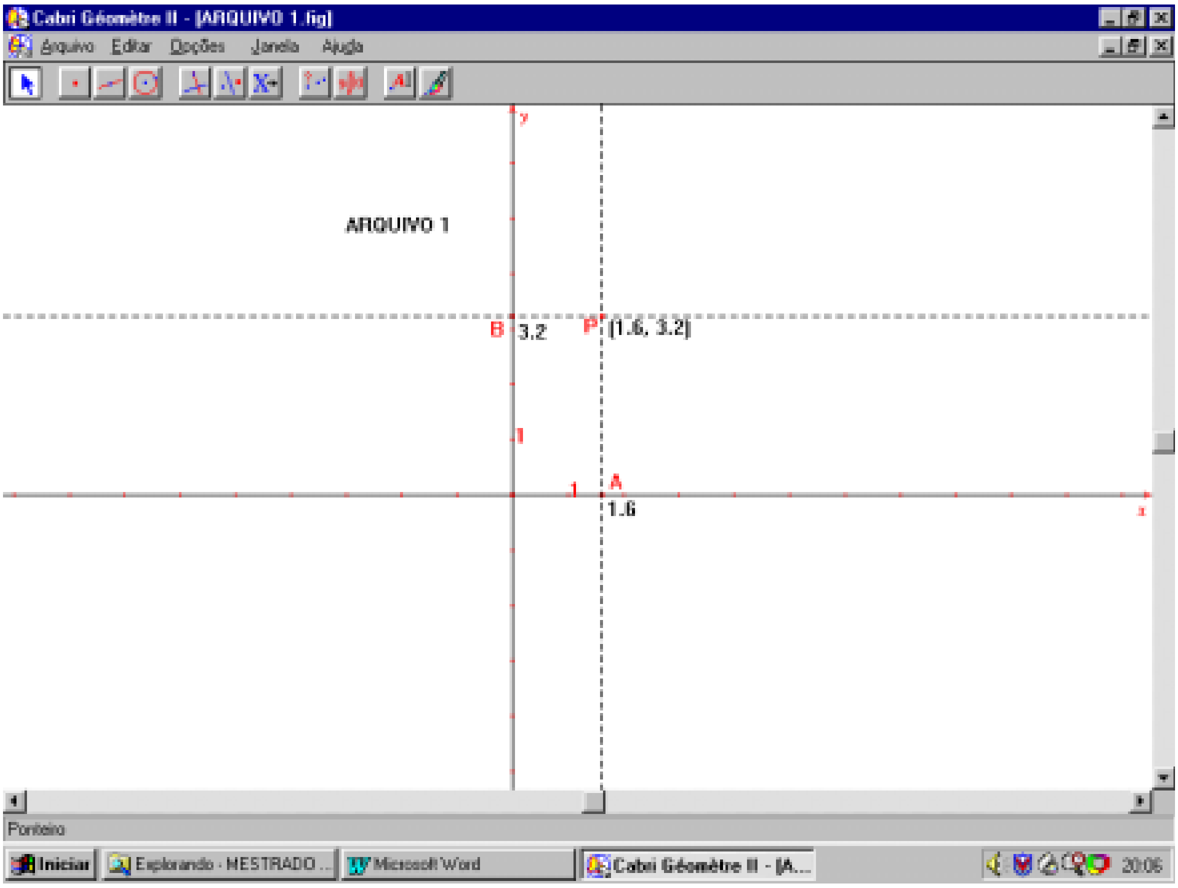
Apresentamos a seguir as análises *a priori* das atividades 1, 2 e 3, que se referem às funções afins e, a seguir, as das atividades 4 e 5 referentes às funções quadráticas.

Atividades

As onze questões iniciais das atividades 1, 2 e 3 são idênticas, apenas referindo-se a funções diferentes. Nas atividades 2 e 3 foi acrescentada uma última questão em que se solicita aos alunos a comparação entre os gráficos das anteriores. Reproduzimos a atividade 1 em sua totalidade, os arquivos correspondentes às funções tratadas nas atividades 2 e 3, respectivamente, e a última questão de cada uma delas.

Atividade 1

A função previamente estabelecida nesta atividade é y = 2x, e o ARQUIVO 1 a ser trabalhado, é o abaixo representado :



a) Abra o Arquivo 1 no software Cabri – Géomètre.

b) Movimente o ponto A e compare a variação de A e de B.

Resp.

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

x	1.2			-1,2			
y			-10			9,6	

e) Que relação existe ente os valores de x e y ?

Resp.

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Resp.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algébricamente.

Resp.

h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

Resp.

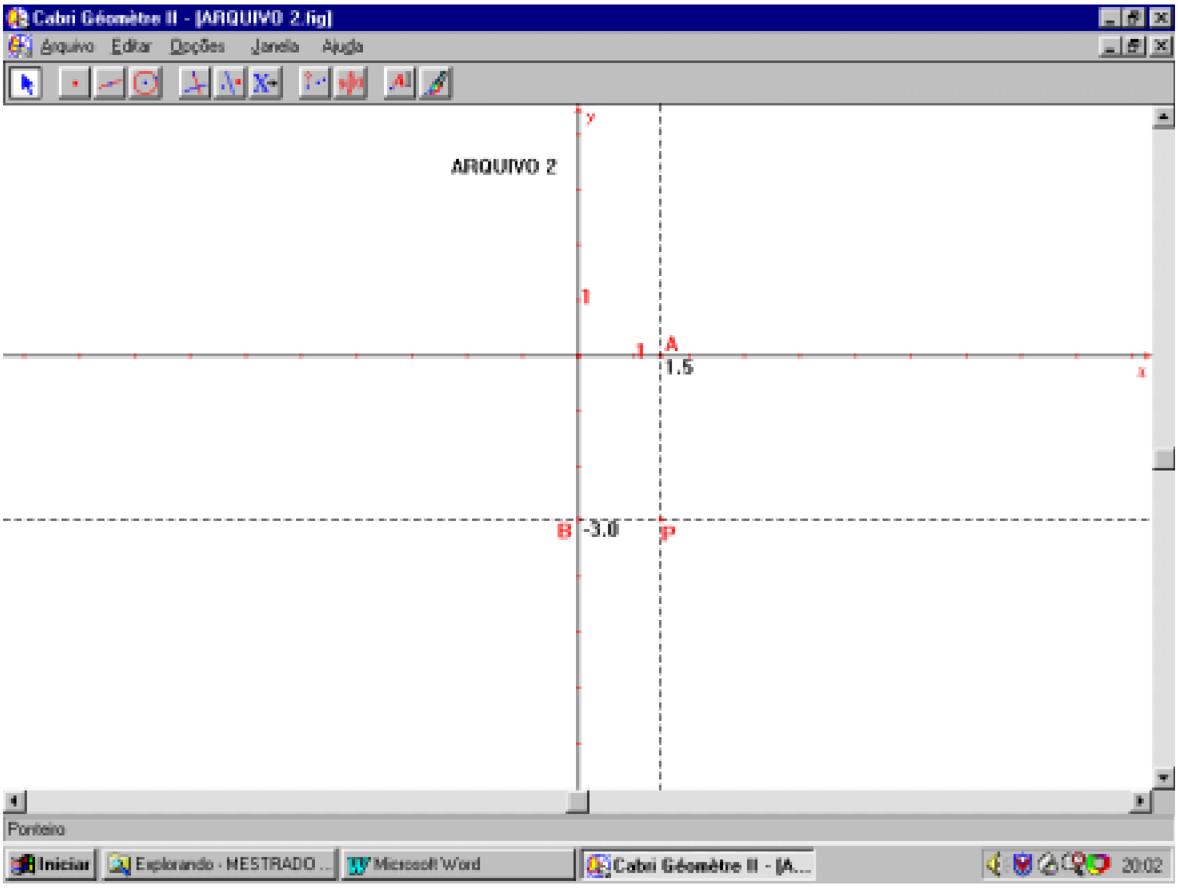
i) Marque o rastro do ponto P no plano xoy.

j) Marque dois pontos distintos do rastro e trace a reta que passa por eles.

k) Todos os pontos do rastro pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao rastro?

<u>**Atividade 2**</u>

O ARQUIVO 2 a seguir apresenta a função y = - 2x previamente estabelecida, seguido da última questão proposta:

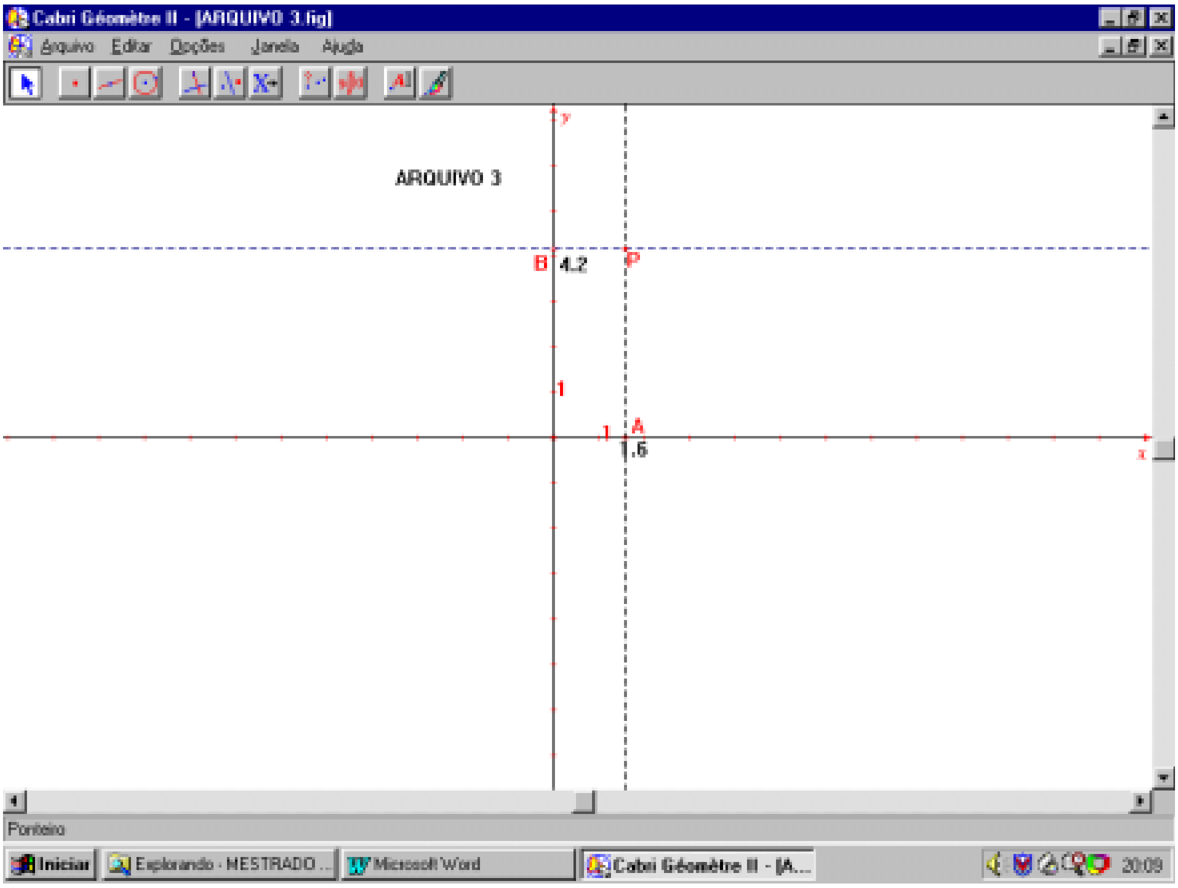


I) Comparando o gráfico construído nesta parte com o anterior, observamos que existe uma diferença em relação à inclinação das retas. Por que você acha que ocorreu esta mudança?

Resp.

Atividade 3

Nesta atividade**,** a função previamente estabelecida é y = 2x +1, apresentada no ARQUIVO 3 e seguida da última questão proposta:



l) Compare o gráfico construído nesta atividade com o da atividade 1 e a 2. Qual a diferença em relação às retas ? Por que você acha que ocorreram estas mudanças?

Resp.

Nas atividades 1,2 e 3, pretendemos verificar se os alunos constatarão que existe uma relação de dependência do ponto B relativamente a A, ou seja, ao movimentarem o ponto A sobre o eixo dos x, o que ocorre com o ponto B sobre o eixo dos y. Solicitamos aos alunos que desloquem o ponto A também para a região do eixo dos x correspondente a valores negativos, já que pretendemos verificar se eles observarão como ocorre a relação de variação de A e B, tanto para valores positivos como negativos.

Desta maneira, queremos observar se eles constarão que ao mudar o ponto A para a região negativa do eixo dos x, a mudança de B no eixo dos y pode se dar tanto na região positiva como na negativa, dependendo da função previamente escolhida a ser trabalhada. Possivelmente a maioria dos alunos terá facilidade em fazer esta observação, pela própria dinâmica que o software proporciona.

Com a finalidade de organizar as observações gráficas, propusemos uma tabela de valores a ser preenchida, de modo que possam realizar uma conversão do registro gráfico para o registro de tabela de valores:

x	1.2			-1,2			
y			-10			9,6	

Na tabela, foram fornecidos alguns números nos registros decimais, porque os alunos estão habituados a atribuírem apenas números inteiros à variável x para o cálculo de y, assim como seguirem a ordem de a partir do valor de x, calcular o de y. Alguns poderão encontrar dificuldades para trabalhar com os números nos registros decimais e também para calcular o valor de x quando é dado o de y.

Elaboramos questões que solicitam a relação existente ente os valores de x e de y e a expressão algébrica que relaciona estes valores. O objetivo é que os alunos estabeleçam uma relação entre as variáveis x e y e expressem este fato algebricamente. Deste modo propiciaremos a eles uma conversão do registro numérico (tabela de valores) para o registro algébrico.

Na atividade 1, cuja função é $y = 2x$, possivelmente os alunos não encontrão dificuldades em estabelecer esta relação, já que a representação algébrica da função apresenta os coeficientes inteiros e não negativos (2 e 0 respectivamente). Isso poderá facilitar os procedimentos a serem realizados, e possibilitar uma conversão para o registro algébrico.

Relativamente a essa questão, na segunda atividade cuja função trabalhada é y = - 2x, alguns alunos podem encontrar dificuldades, pelo fato de o coeficiente de x da função ser um número negativo.

Na questão correspondente da atividade 3, o mesmo poderá ocorrer, devido ao coeficiente linear da reta representante da função y = 2x + 1 ser diferente de zero.

Com a finalidade que ocorra a compreensão da dependência da variável ponto a ponto, e que os estudantes verifiquem que as coordenadas de qualquer ponto pertencente à curva que representa a função satisfaz a correspondente expressão algébrica, elaboramos questões com os seguintes enunciados:

"Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algebricamente. Compare a relação que existe entre as coordenadas de P e com os números indicados nos pontos A e B."

Nestas questões, pela própria dinâmica proporcionada pelo software, os alunos deverão anotar algumas coordenadas do ponto P, e, com isto, verificar a relação entre elas e expressá-la algebricamente. Posteriormente, deverão relacionar as coordenadas de P, com os números indicados nos pontos A e B.

Na atividade 1, talvez os alunos não encontrarão dificuldades em resolver estas questões, devido a simplicidade da expressão algébrica da função y = 2x. Isto poderá ajudar a resolução das correspondentes questões das atividades 2 e 3, pois eles poderão fazer uma analogia com os procedimentos utilizados na atividade 1.

Finalmente pretendemos que os alunos utilizem o "rasto" do ponto P, para obter os gráficos destas funções. Para isto, elaboramos as seguintes questões:
"Marque o 'rasto' do ponto P no plano xoy."
"Marque dois pontos distintos do 'rasto' e trace a reta que passa por eles."
"Todos os pontos do 'rasto' pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao 'rasto'?"

Pelas próprias características do software, provavelmente a maioria dos alunos não encontre dificuldades em marcar estes dois pontos e traçar a reta que passa por eles, utilizando os respectivos comandos. Desse modo, poderão verificar que todos os pontos do “rasto” pertencem a esta reta e com isto observem que a representação gráfica de cada uma dessas funções é uma reta.

Com a finalidade de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão da relação das variáveis visuais pertinentes das funções, e relacioná-las com a inclinação da reta e com o crescimento da função, propusemos nas atividades 2 e 3 a seguinte questão:

“Ao compararmos o gráfico construído nesta parte com o anterior, observamos que existe uma diferença em relação à inclinação das retas. Por que você acha que ocorreu esta mudança?”

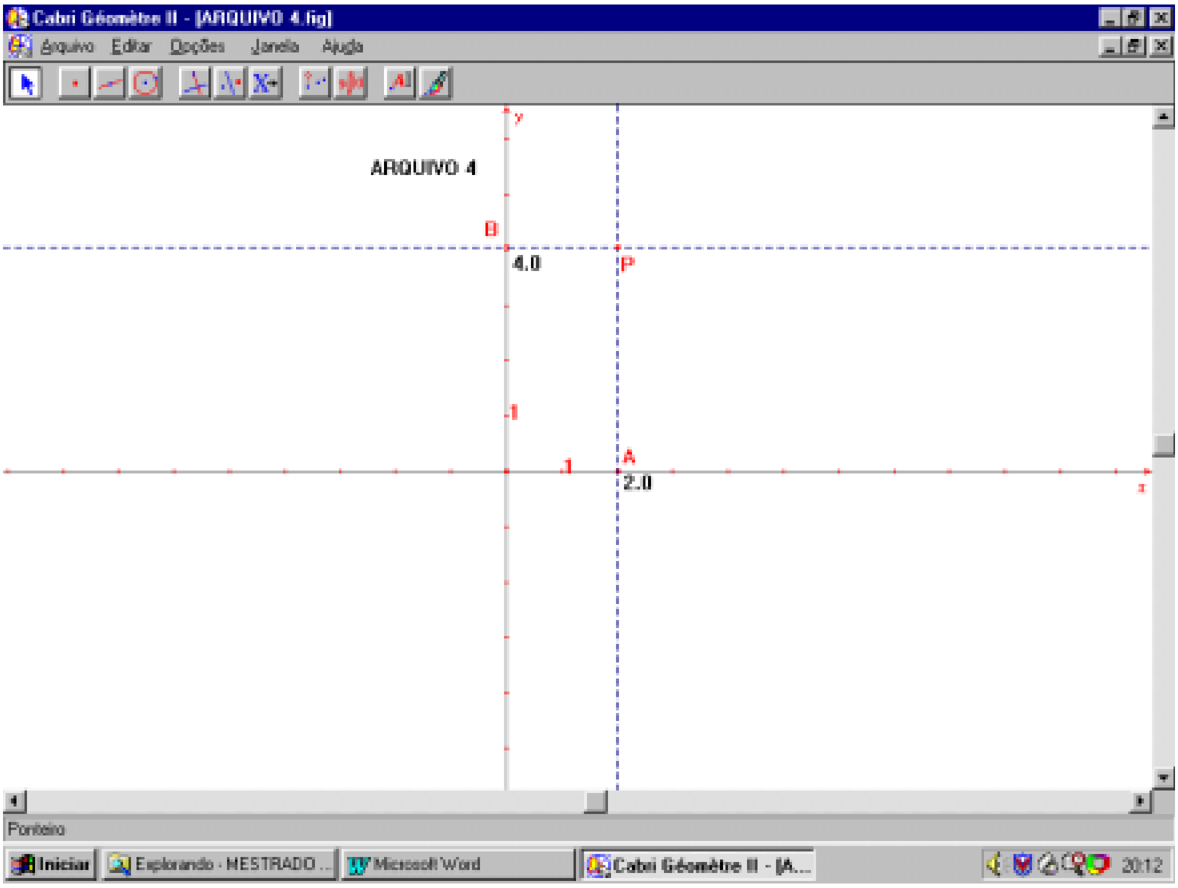
Ao final destas três atividades faremos as institucionalizações locais:

- A tabela, o gráfico e a expressão algébrica são representações de uma mesma função.
- As variáveis das funções afins apresentam uma dependência traduzida pela expressão algébrica, sendo a variável x a independente e a y dependente.
- O gráfico da função afim é uma reta.
- Na representação algébrica da função afim, o coeficiente de x está relacionado com a inclinação da reta e o termo independente com a intersecção desta com o eixo dos y.
- As coordenadas de cada ponto da reta verificam a mesma dependência expressa na representação algébrica.

Nas atividades 4 e 5 as funções quadráticas previamente escolhidas são respectivamente: $y = x^2$ e $y = - x^2$. As questões a serem trabalhadas nestas duas atividades são idênticas. Apresentamos, em sua totalidade a atividade 4. Logo a seguir o arquivo da função da atividade 5 e a última questão.

Atividade 4

A função previamente estabelecida é $y = x^2$, apresentada no ARQUIVO 3, seguido das questões propostas desta atividade:



a) Abra o arquivo 4, movimente o ponto A e compare a variação entre A e B.

Resp.

b) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

c) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor e complete a tabela:

x		-1		2			
y			-9			9	

d) Existe algum valor de x que corresponde a valores negativos de y?

Resp:

e) Encontre uma expressão algébrica que relaciona os valores de x e de y.

Resp.

f) Anote algumas coordenadas de P e expresse algebricamente a relação entre elas.

Resp.

g) Que relação existe entre as coordenadas de P e as de A e B?

Resp.

h) Marque o “rasto” de P no plano xoy.

i) Se marcarmos dois pontos distintos quaisquer do “rasto” e traçarmos a reta que os une, os pontos desta reta coincidirão com os pontos do rastro?

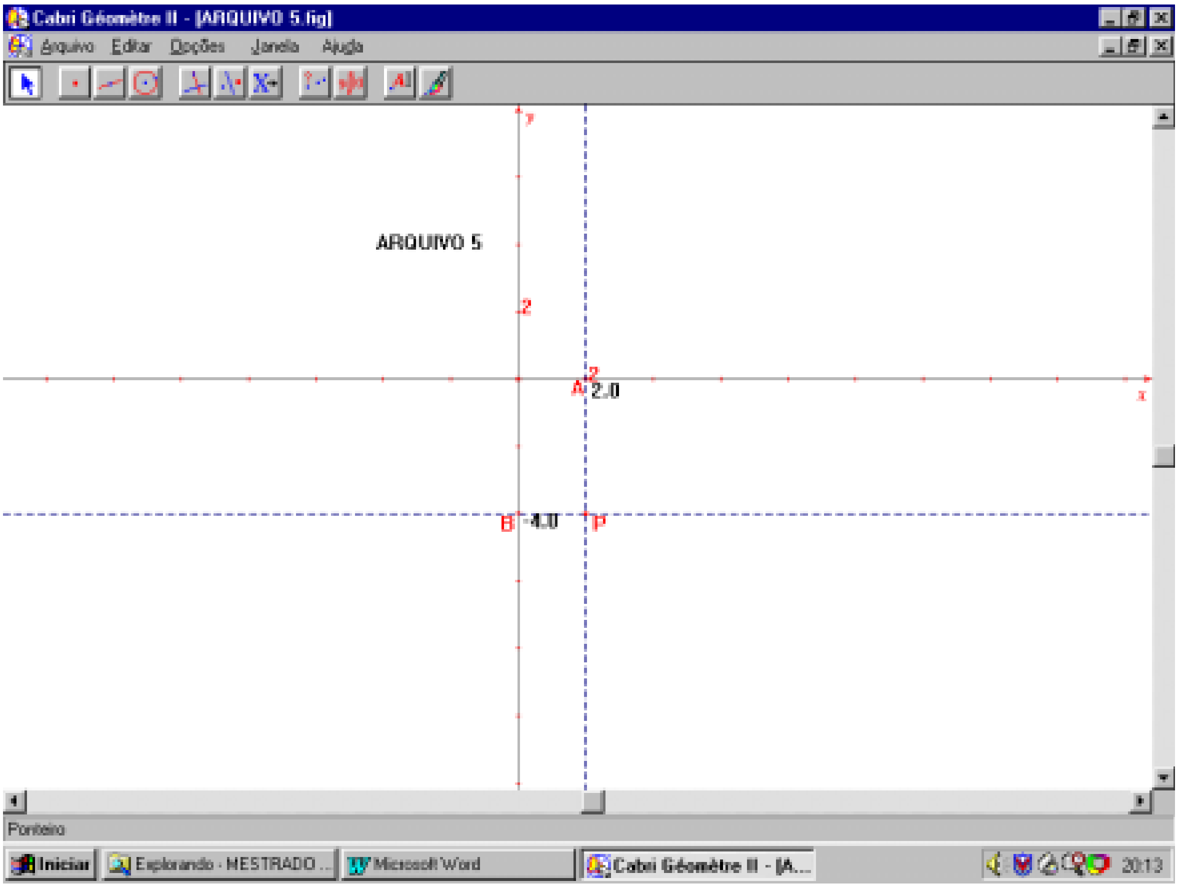
Resp.

j) Compare o gráfico desta atividade com os das atividades anteriores e analise as diferenças entre eles. Por que você acha que ocorreram estas diferenças?

Resp.

Atividade 5

Na atividades 5, a função a ser trabalhada é $y = -x^2$, os alunos abrirão o ARQUIVO 5, com a última questão modificada em relação a atividade 4.



j) Compare o gráfico desta atividade com o da atividade 4 e analise a diferença entre eles. Por que você acha que ocorreu esta diferença?

Um dos objetivos destas duas atividades é dar continuidade aos estudos do papel representado pelas variáveis e o relacionamento entre elas. Assim como nas afins, os alunos poderão desenvolver a compreensão destas funções a partir das conversões de seus registros de representação. Para isso, escolhemos as funções mais simples $y = x^2$ e $y = -x^2$. Pretendemos que os alunos associem o fato de o coeficiente de x^2 ser positivo ou negativo com a concavidade da parábola que representa graficamente a função.

Com estas atividades, pretendemos também introduzir junto aos alunos a noção de imagem, ao observarem a variação dos valores do eixo x e os correspondentes valores de y.

Para tal foram colocados em uma tabela determinados valores numéricos, a fim de que os alunos verifiquem que para determinadas funções quadráticas, valores negativos de y, não são associados a nenhum valor de x. Já para algumas dessas funções, pode ocorrer o contrário, ou seja, valores positivos de y, não estão associados a nenhum valor de x.

Temos também a intenção que eles verifiquem que um mesmo valor de y, pode ser correspondente de dois valores diferentes de x.

Escolhemos alguns valores numéricos convenientes, nas tabelas a serem preenchidas em cada uma destas atividades:

x		-1		2			
y			-9			9	

Na atividade 4, cuja função é $y = x^2$, com o valor escolhido -9 para y, temos o intuito de que os alunos verifiquem que não existe valor de x a ele correspondente. Ao movimentarem o ponto A sobre o eixo das abscissas, provavelmente os alunos não encontrem dificuldades para chegar a esta conclusão. Já para o valor 9 de y, poderão encontrar alguma dificuldade em concluir que existem dois valores de x a ele associado. O mesmo poderá acontecer na atividade 5, cuja função é $y = -x^2$. Para y = 9, não existe valor de x associado a ele, já para y = -9 existem dois valores correspondentes de x.

Na questão d) da atividade 4 e da atividade 5, os alunos são solicitados a verificar graficamente se existem valores de x que correspondem a valores negativos de y. Pretendemos com isso, introduzir o conceito de imagem da função.

A fim de propiciar a compreensão das componentes de variação, bem como o relacionamento entre elas, elaboramos questões que pedem a expressão algébrica da função. Possivelmente, os alunos não encontrarão dificuldades para estabelecer a expressão algébrica $y = x^2$ da atividade 4, pelo fato de o coeficiente de x^2 ser a unidade e os demais coeficientes serem nulos. Os alunos poderão ter dificuldade na questão correspondente da atividade 5**,** pelo motivo do coeficiente de x^2 ser negativo.

Com a finalidade de que os alunos identifiquem a dependência da variável ponto a ponto, elaboramos as seguintes questões:

" Anote algumas coordenadas de P e expresse algebricamente a relação que existe entre elas."

"Que relação existe entre as coordenadas de P e com os números indicados nos pontos A e B ?"

Nestas questões, ao movimentarem o cursor, os alunos anotarão algumas coordenadas do ponto P, para verificarem a relação entre elas e expressá-las algebricamente. Posteriormente, deverão relacionar as coordenadas de P com os números indicados nos pontos A e B. Pelo fato destes procedimentos já terem sido utilizados nas funções afins das atividades 1, 2 e 3, possivelmente os alunos não encontrem dificuldades nestas questões.

Com o objetivo de analisar o tipo de gráfico de uma função do segundo grau e compará-lo com o da função afim, elaboramos a última questão da atividade 4, a qual solicitamos que os alunos comparem o gráfico da função $y = x^2$ com os gráficos das funções das atividades anteriores: $y = 2x$, $y = -2x$ e $y = 2x + 1$. Esperamos com isso que eles verifiquem que o gráfico da função do segundo grau é uma parábola. Alguns alunos podem ter dificuldades em analisar e redigir estas comparações, visto que não estão habituados a este tipo de atividade.

Na atividade 5 pedimos que comparem o gráfico da função $y = -x^2$ com o gráfico da atividade 4 ($y = x^2$), pretendemos que verifiquem que o coeficiente de x^2 está relacionado com a concavidade da parábola.

Ao final destas atividades 4 e 5, faremos as seguintes institucionalizações locais:

- A tabela, o gráfico e a expressão algébrica são representações de uma mesma função.
- As variáveis das funções quadráticas apresentam uma dependência traduzida pela expressão algébrica, sendo a variável x a independente e a y dependente.
- O gráfico da função quadrática é uma parábola.
- O sinal do coeficiente de x^2 está relacionado com a concavidade da parábola.
- A função $y = -x^2$, pode ser representada por $y = -1.x^2$, sendo diferente da função $y = (-x)^2$
- As coordenadas de cada ponto da parábola verificam a mesma dependência expressa na representação algébrica.
- f(x) representa a imagem de um ponto pela função *f*, ou o valor da função *f* em x.

3.1.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO GRUPO 2

Este grupo de atividades foi elaborado com base em um trabalho de Kieran e Sfard, (1999), sobre o ensino e aprendizagem da álgebra escolar, envolvendo dependência de variáveis e relacionando expressões algébricas, gráficos, tabelas e textos.

O objetivo principal é proporcionar aos alunos uma compreensão das componentes de variação da função, bem como a dependência entre elas, por meio das situações propostas. Propiciamos conversões entre os diferentes registros: do enunciado em linguagem natural para a tabela de valores, a seguir, do enunciado para a expressão algébrica e, posteriormente, para o gráfico, em conformidade com o quadro teórico de Duval por nós adotado. Estas conversões acontecem de modo diferente daquelas das atividades do grupo 1, que ocorrem do registro gráfico para o numérico e algébrico respectivamente.

Constitui-se de 2 atividades, com situações que se referem a problemas do cotidiano, envolvendo cálculos de perímetro e de área.

Nosso intuito é que os alunos utilizem nesta atividade apenas papel e lápis, em alternância com o uso do computador, que foi necessário nas atividades do grupo 1. As pesquisas de Schwartz e Dreyfus (1989,1995) destacam os aspectos didáticos e tecnológicos do uso do computador. Eles sugerem-nos apresentar aos alunos tarefas que contenham sessões que utilizem tal ferramenta mescladas a outras a serem executadas apenas com o uso de papel e lápis.

A seguir, analisaremos separadamente cada uma das atividades deste grupo:

Atividade 1

A atividade é desenvolvida a partir da seguinte situação:

Uma casa com diversos cômodos foi construída sob um novo conceito arquitetônico: cada cômodo da casa é quadrado, possuindo tamanhos diferentes. O proprietário resolveu colocar cerâmica em todos os cômodos e rodapé feito com tiras de madeira.

Escolhemos uma situação que propicia aos alunos trabalharem com perímetro, relacionando as medidas dos lados de cômodos quadrados, com o comprimento do rodapé a ser colocado em cada um dos cômodos. Pretendemos que verifiquem a variação da medida do rodapé em função do comprimento de cada lado dos cômodos e encontrem a expressão algébrica que representa esta relação. O motivo da escolha de todos cômodos quadrados é para que os alunos encontrem uma expressão algébrica em função de uma única variável o que facilita o cálculo do comprimento do rodapé (perímetro) na atividade 1 e da área, na atividade 2.

Apresentamos, a seguir, as questões que se referem a esta atividade, seguidas das respectivas análises *a priori:*

> a) Se um quarto mede 4m de lado, qual a medida do rodapé deste cômodo?
> b) Se na sala foram utilizados 54m de rodapé, quanto mede cada lado desta sala?

Pretendemos que os alunos calculem o comprimento do rodapé de um cômodo, a partir da medida do lado do quarto e vice-versa. Com estes procedimentos, os alunos podem fazer um relacionamento entre duas variáveis.

Apesar do rodapé medir 54 m, que não é divisível por 4, esperamos que a maioria dos alunos não encontrem dificuldades em efetuar este cálculo e interpretar o resultado como a medida do lado do cômodo.

Na questão seguinte, solicitamos aos alunos completarem a seguinte tabela de valores:

Medida do lado do cômodo	Comprimento do rodapé
L	R
2	
3	
4	
	20
7,3	
8,5	
10	
	41,2
11	

Pode ocorrer que, ao completarem a tabela de valores a partir dos resultados obtidos, os alunos constatarão a dependência entre as duas medidas e isso os favoreça a conversão para o registro numérico. Alguns podem encontrar dificuldades com os números decimais, visto que estão habituados a trabalhar, na maioria das vezes somente números inteiros.

Colocamos algumas medidas do rodapé para que os alunos calculem a medida do lado do cômodo, a fim de que não seja um procedimento mecânico, trabalhando de maneira inversa do habitual. Com esta questão, propiciaremos aos alunos realizarem a conversão do registro em linguagem natural para o numérico.

c) A cada medida do lado do cômodo (valores da 1ª coluna), obtém-se um valor correspondente da área de cerâmica utilizada (2ª coluna). Escreva como você obteve cada valor da tabela.

d) Em geral, você pode representar a medida de um lado qualquer do cômodo por L, e do comprimento do rodapé por R. Expresse uma relação entre estas duas medidas.

Com estas duas questões pretendemos que os alunos consigam identificar que para qualquer valor da medida do lado do cômodo o comprimento do rodapé é quatro vezes esta medida e também que escrevam a expressão algébrica R = 4L. Deste modo, realizarão a conversão do registro numérico para o algébrico.

Com o intuito de trabalhar a compreensão das variáveis dependentes e independentes, colocamos a questão:

f) Alguma destas medidas depende da outra? Como é esta dependência?

Provavelmente, os alunos não encontrem dificuldades em perceber que a medida do comprimento do rodapé depende da medida do lado do cômodo, por referir-se a questões do cotidiano.

Nesta parte da atividade, fornecemos papel quadriculado com os eixos cartesianos traçados.

g) Marque na folha quadriculada cada um dos pares da tabela anterior. Você pode unir esses pontos? Por quê?

Ao responderem a esta questão, os estudantes realizarão a conversão do registro numérico para o gráfico. Pode ocorrer que construam o gráfico utilizando todos os pontos obtidos na tabela e que apresentem dificuldades em colocar no gráfico os valores decimais obtidos.

Possivelmente responderão que podem unir todos os pontos do gráfico, já que mesmo quando se trata de variável discreta, a maioria tem a tendência de unir todos os pontos do gráfico.

h) Unindo os pontos, que tipo de gráfico você obtém? É possível obter este mesmo gráfico utilizando menos pontos? Justifique sua resposta.

Esta questão foi proposta com o intuito de que os alunos verifiquem que, no caso do domínio ser contínuo, bastam dois pontos para se obter a representação gráfica da função.

Possivelmente, a maioria dos alunos apresente, de forma correta, somente a parte da reta correspondente ao primeiro quadrante, isto devido ao fato dos números apresentados na tabela serem positivos. Este fato dará ensejo a uma discussão a respeito do domínio da função.

Atividade 2

O enunciado da atividade 2 é semelhante ao da 1, contudo a situação que abordamos refere-se a cálculos de área, por relacionar as medidas dos lados de cômodos quadrados com a respectiva área. Os procedimentos são análogos aos da atividade anterior, porém os alunos estarão trabalhando com a função quadrática.

Assim como na atividade 1, provavelmente os alunos não encontrarão dificuldades em verificar que a área de cada cômodo depende da medida do lado e em encontrar a expressão algébrica correspondente. Desta maneira poderão realizar a conversão dos registros: da linguagem natural, para o numérico, posteriormente para o algébrico e finalmente para o gráfico.

Solicitamos aos alunos completarem a seguinte tabela de valores:

Medida do lado	Área
L	A
2	
3	
	16
5	
7,3	
8,5	
10	
10,3	
	121

Como na atividade anterior, os alunos receberão papel quadriculado com os eixos cartesianos também traçados para a construção do gráfico. Provavelmente, utilizarão todos os pontos obtidos na tabela para realizar a representação gráfica. Alguns deles talvez encontrarão dificuldades em colocar os valores decimais da tabela no gráfico cartesiano.

Como os números utilizados na tabela são positivos, possivelmente a maioria dos alunos apresentará, de maneira correta, somente a parte da parábola que corresponde ao primeiro quadrante. Tal como na atividade 1, propiciaremos uma discussão a respeito do domínio da função.

Ao final destas duas atividades pretendemos fazer as seguintes institucionalizações locais:

- A tabela, o gráfico e a expressão algébrica são representações de uma mesma função.
- Existe uma relação de dependência entre as variáveis das funções. A expressão algébrica traduz esta dependência, sendo x a variável independente e y a dependente.
- O domínio de uma função como sendo “o maior” conjunto dos valores que a variável independente pode assumir.

3.1.3 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO GRUPO 3

O grupo 3 é composto de quatro atividades que visam a conversão do registro gráfico para o algébrico de alguns exemplos de função afim e utilizam o Cabri-Géomètre II como ferramenta auxiliar de ensino. Estas questões foram elaboradas pelo fato de constatarmos tanto em nossa prática de ensino, como nas pesquisas de Marckovits, Eylon e Buckeimer (1983,1986, apud Kieran 1992), Swan (1982, apud Kieran, 1992) e Duval (1988), que os alunos encontram dificuldades de fazer este tipo de conversão. Na maioria das vezes, realizam a conversão do registro algébrico para o gráfico de modo relativamente mecânico, ou seja, utilizam a técnica de unir pontos previamente estabelecidos. No entanto, para a conversão inversa, a maioria demonstra dificuldades em perceber o relacionamento entre as variáveis em jogo e, deste modo, não conseguem compreender o significado do gráfico.

Tomamos como base o trabalho de Duval: "Gráficos e Equações – A articulação entre dois registros" (1988). Esta articulação é proposta por meio da discriminação das variáveis visuais pertinentes, podendo propiciar uma interpretação global da representação gráfica. O procedimento adotado contrapõe-se à interpretação pontual ensinada aos alunos para a conversão do registro algébrico para o gráfico.

Pretendemos observar se com a discriminação das variáveis visuais pertinentes, os alunos realizarão uma interpretação global do registro gráfico e tal fato facilite a conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa, sem a necessidade da construção de tabelas.

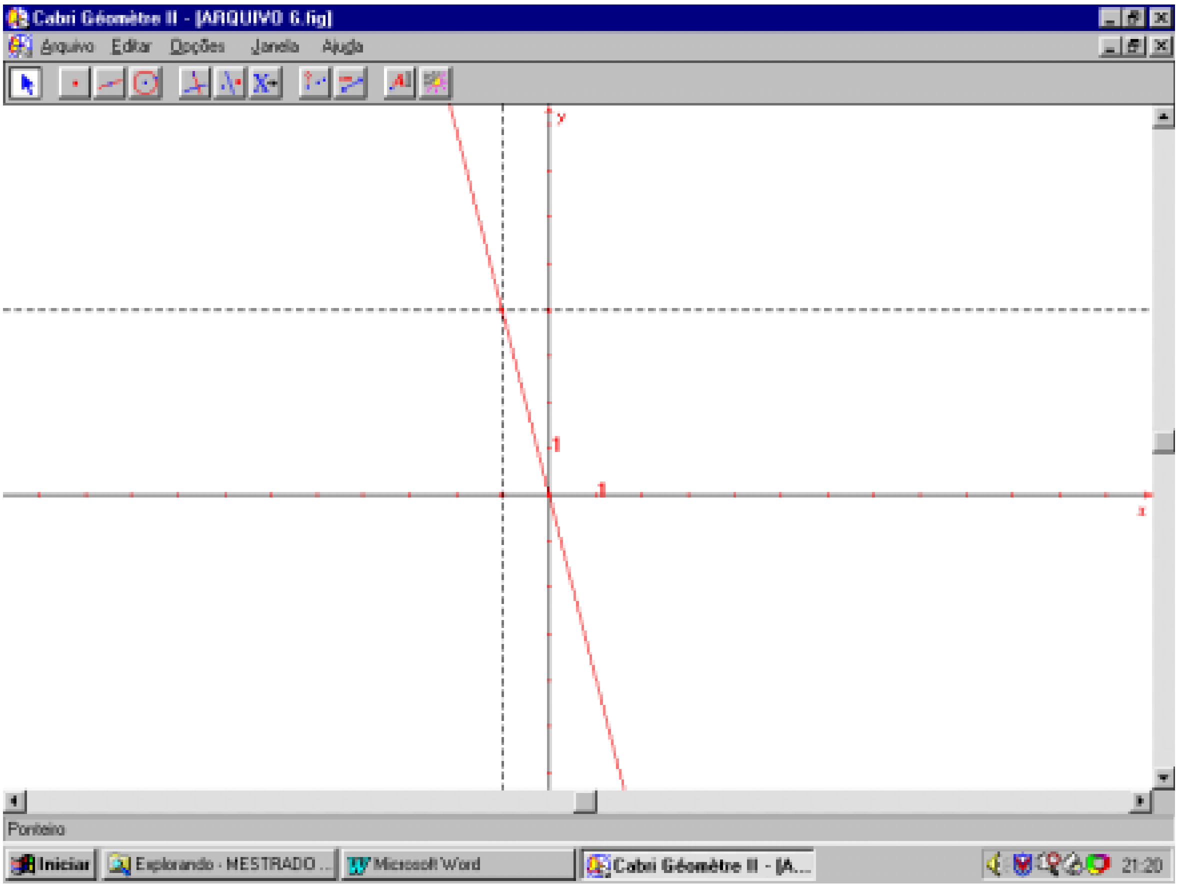
Nas atividades 1,2 e 3, os alunos são solicitados a abrir arquivos do software Cabri Géomètre, sendo que em cada um deles são apresentadas representações gráficas da função afim e estas devem ser relacionados com a algébrica correspondente.

Apresentamos em cada atividade uma representação gráfica e cinco algébricas, para que os alunos possam relacionar a representação gráfica com a algébrica. Nas três atividades, as expressões algébricas são as seguintes:

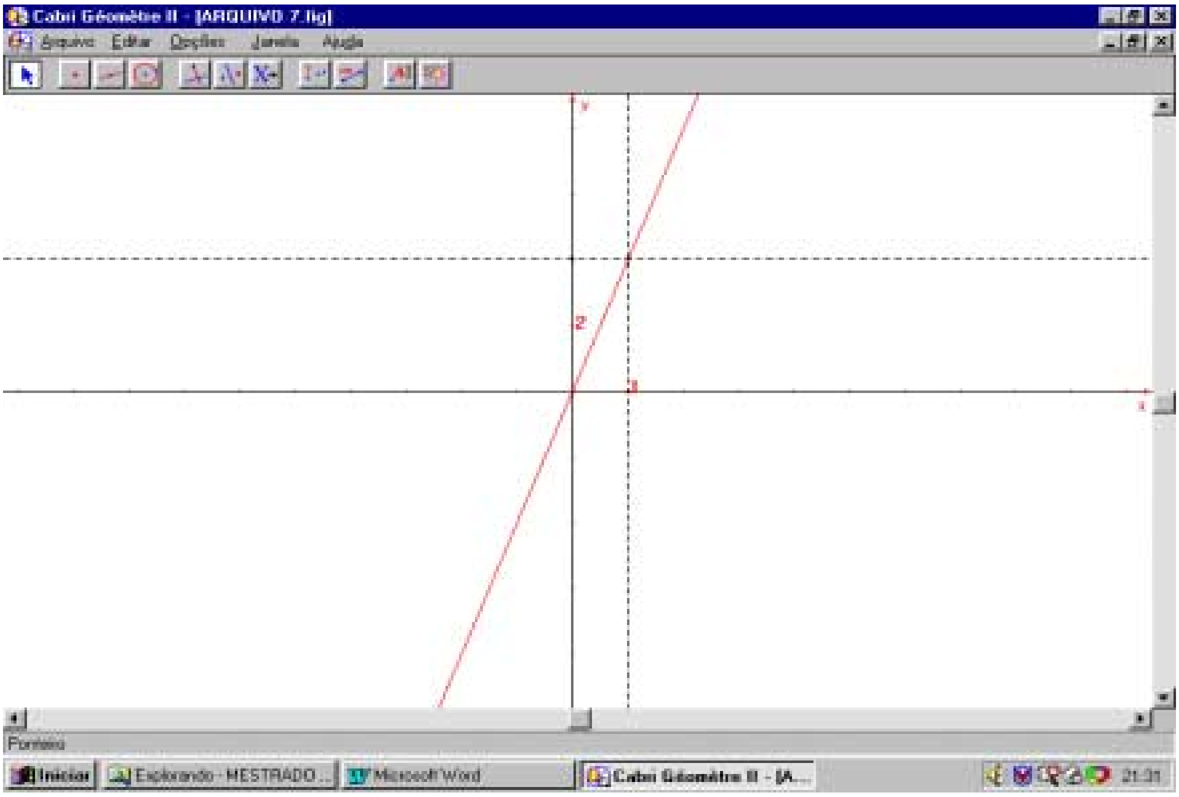
a) $y = -4x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x$ d) $y = x+1$ e) $y = 4x$

Em cada uma dessas atividades, os alunos abrirão os respectivos arquivos:

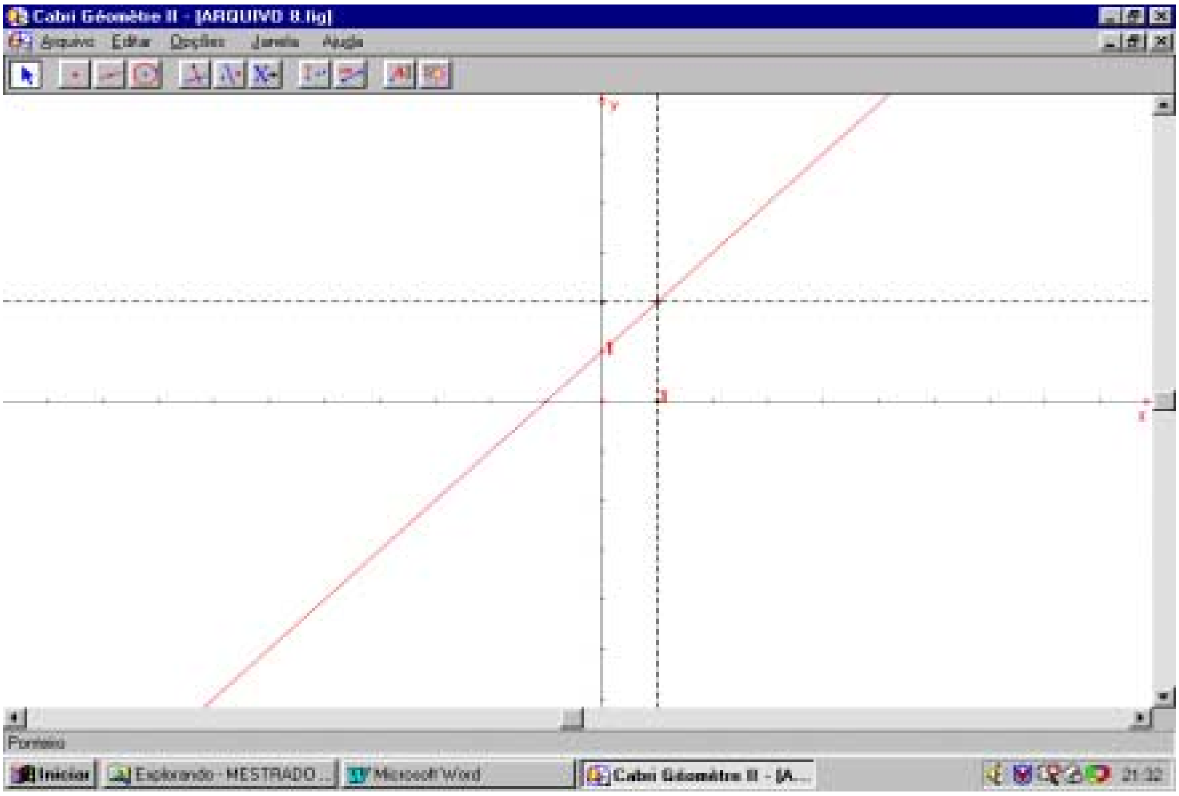
Atividade 1



Atividade 2



Atividade 3



Para uma melhor análise e reflexão por parte dos alunos, achamos conveniente apresentar cinco exemplos de função afim, sendo três delas lineares que serão associadas a três retas das quais duas delas passam pela origem do sistema cartesiano. Das retas que representam graficamente estas funções, duas delas têm coeficientes angulares positivos; a outra tem coeficiente negativo e apenas uma delas possui coeficiente linear nulo. Estas escolhas visam propiciar aos alunos uma relação destes coeficientes com a inclinação da reta e com o crescimento da função. Alguns poderão encontrar dificuldades em estabelecer estas relações por meio de uma interpretação global das propriedades das figuras, uma vez que estão habituados a realizarem uma interpretação pontual dos gráficos.

Pode ocorrer que alguns deles optarão por verificar se as coordenadas de um ponto do gráfico satisfazem a expressão algébrica. Para tanto, substituirão estes valores nas variáveis x e y da expressão algébrica. Outros podem usar como critério de seleção da expressão algébrica que corresponde a um gráfico, o fato de a reta passar ou não pela origem (coeficiente linear nulo ou não) e se o coeficiente angular é positivo ou negativo (inclinação da reta) etc.

Das representações gráficas, cujas retas possuem coeficientes angulares positivos, possivelmente conseguirão distinguir aquela que corresponde a $y = x+1$, pelo fato de ser a única que não passa pela origem do sistema cartesiano (coeficiente linear não nulo).

Alguns alunos poderão fazer a correspondência da representação algébrica $y = 4x$ com a gráfica $y = -4x$ e vice-versa, pelo fato de o coeficiente angular das duas serem em módulo igual a 4.

Possivelmente, certos estudantes encontrem dificuldades em relacionar as representações gráficas com as respectivas algébricas por meio da discriminação das variáveis visuais pertinentes, visto que esse tipo de atividade não costuma ser trabalhada com eles, como se observa na Proposta Curricular de Matemática e em alguns livros didáticos citados anteriormente.

Na quarta atividade deste grupo é solicitado aos alunos explicarem para cada uma das representações gráficas apresentadas, quais os critérios que utilizaram para a escolha da algébrica. Esperamos que eles relacionem as variáveis visuais pertinentes das representações algébricas com a inclinação da reta, bem como com o ponto onde a reta intercepta o eixo y. Caso isso não ocorra, faremos algumas intervenções para que verifiquem a relação destas variáveis com as características da reta.

Ao final desta atividade pretendemos fazer as seguintes institucionalizações:

- As representações gráficas e algébricas correspondem à mesma função.
- O coeficiente de x, denomina-se coeficiente angular da reta e está associado a sua inclinação. Se o coeficiente de x for positivo, a função é crescente, caso contrário, a função é decrescente.
- O termo independente de x, denomina-se coeficiente linear da reta e corresponde ao ponto onde ela intercepta o eixo y.

3.1.4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO GRUPO 4

O grupo 4 de atividades, assim como o 2, foi inspirado em um trabalho de Kieran e Sfard (1999). As questões foram elaboradas de modo que os alunos possam relacionar a expressão algébrica com a tabela, com o texto e com o gráfico correspondente, utilizando apenas papel e lápis. O objetivo principal deste grupo de atividades é relacionar a representação algébrica de uma função com a tabela, com o texto e com o gráfico correspondentes.

Utilizamos nesta atividade a representação de função também em linguagem natural (texto) e pretendemos investigar se, ao propiciarmos uma conversão do registro algébrico para os demais citados, favoreceremos uma melhor compreensão do conceito de função.

Para fazer estes relacionamentos, os alunos necessitarão recorrer à noção de dependência entre as variáveis, bem como analisar as variáveis visuais pertinentes, procedimentos trabalhados nas atividades anteriores.

Nesta atividade, os alunos poderão fazer uso da calculadora.

Apresentamos a seguir a atividade proposta aos alunos:

<u>Atividade</u>

Indique o gráfico, a tabela e o texto que se relacionam com cada uma das expressões algébricas abaixo:

a) $y = 2x + 3 \begin{cases} Tabela: \\ Texto: \\ Gráfico: \end{cases}$ b) $y = x(x-3) \begin{cases} Tabela: \\ Texto: \\ Gráfico: \end{cases}$ c) $y = 2 - x \begin{cases} Tabela: \\ Texto: \\ Gráfico: \end{cases}$

TABELAS:

(1)

x	f(x)
-15	17
60	-58
11	-9
2	0

(2)

x	f(x)
1	5
2.5	3
-5	40
300	-575

(3)

x	f(x)
7	17
-10	-17
200	403
5.5	14

(4)

x	f(x)
7	28
-10	130
25	550
1	-2

TEXTOS:

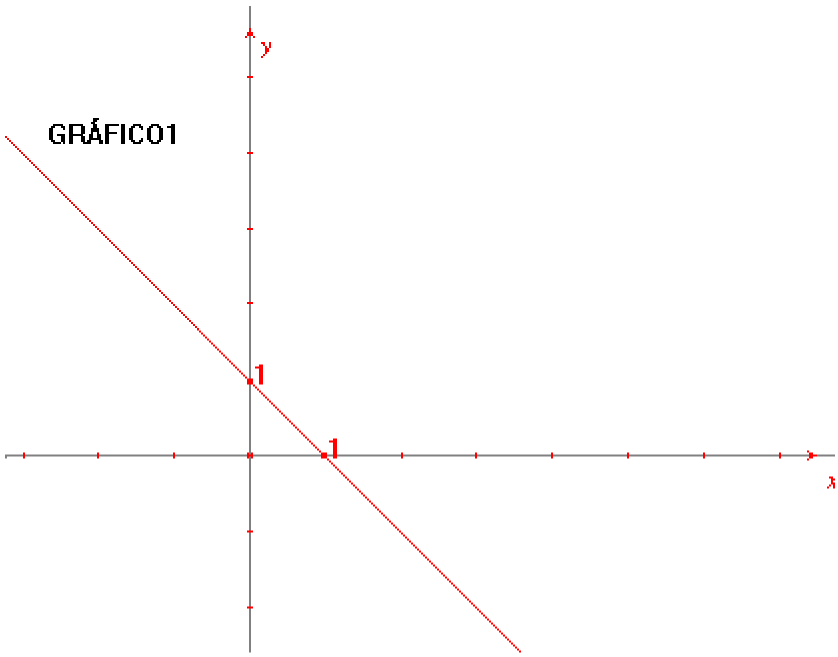
(1) Paulo foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 2,00 pelo seu serviço, mais R$ 3,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que o seu vizinho lhe pagou, quando retornou, foi em função do número de horas trabalhadas.

(2) A altura da água em uma piscina é de 2 m. O nível de água está abaixando na razão de 1 metro por hora. A altura da água na piscina é em função do tempo.

(3) A área de um retângulo é função de seu comprimento e de sua largura. A largura de um terreno retangular é 3 km menor do que seu comprimento. A área é calculada multiplicando-se o comprimento pela largura.

(4) Os avós de Maria moram em S.Paulo e ela em Araçatuba. Gostam muito quando a neta lhes liga. O custo do telefonema é em função de quanto tempo se fala. Maria liga após a meia noite para a ligação ser mais barata: é fixada uma taxa de R$ 3,00, mais R$ 2,00 por minuto de ligação.

Gráficos:



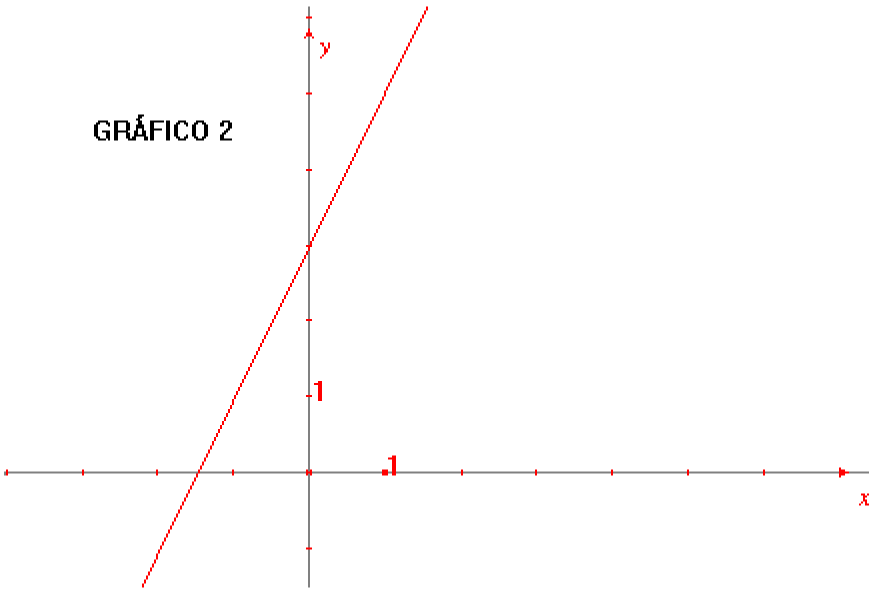


GRÁFICO 3

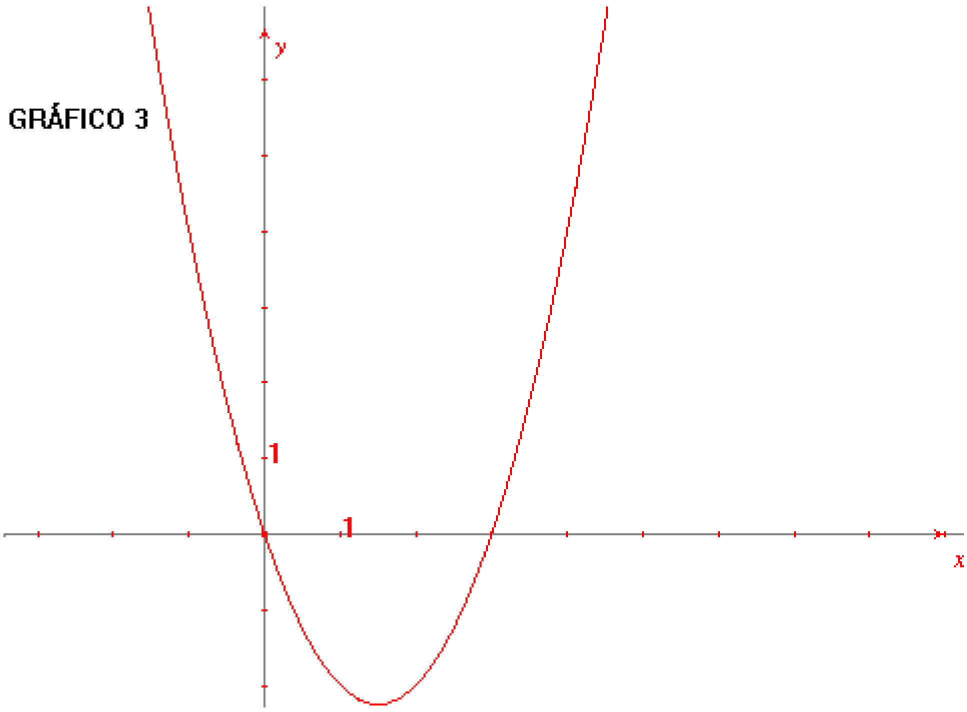
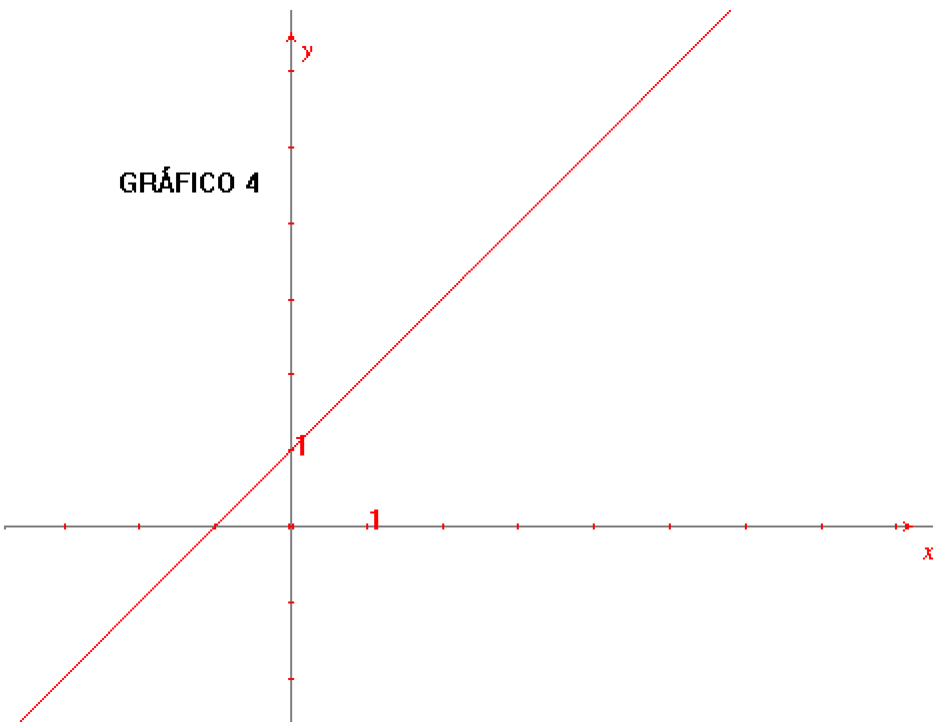


GRÁFICO 4



1ª análise: Relacionar as expressões algébricas com as tabelas de valores

Pretendemos observar se os alunos verificarão que a cada valor da variável x da tabela, substituída na expressão algébrica, corresponde um valor f(x). Deste modo poderão relacionar cada uma das expressões com a tabela correspondente. Ao realizarem estes procedimentos, eles poderão colocar em prática alguns conhecimentos das atividades anteriores, tais como: o relacionamento entre as variáveis e a dependência ponto a ponto de uma função.

Nas tabelas, escolhemos valores para a variável x, de forma que os alunos trabalhem de maneira diferente do habitual, em que utilizam somente números inteiros positivos, negativos, próximos de zero e em ordem crescente, como por exemplo: -2, –1, 0, 1, 2.

Para a expressão algébrica y = 2x+3, talvez alguns alunos cometerão um erro se testarem apenas o primeiro valor de x da tabela (2) e verificar que o correspondente valor de f(x) satisfaz a expressão algébrica e associá-la a esta tabela. Caso contrário, se substituírem os demais valores de x, verificarão que esta expressão não corresponde à referida tabela. Ao repetirem os mesmos procedimentos, verificarão que esta corresponde à tabela (3).

Para relacionarem a expressão y = x (x-3) com uma das tabelas, os alunos poderão apresentar dificuldade maior, pelo fato de a expressão algébrica estar na forma fatorada.

Em relação à expressão algébrica y = 2 - x, os alunos provavelmente apresentarão dificuldades nos cálculos a serem efetuados, pelo fato de o coeficiente de x ser negativo e este não aparecer imediatamente após o sinal de igual.

De modo geral, a maioria dos alunos poderá conseguir resolver esta parte da atividade, apenas tendo algumas dificuldades em cálculos numéricos, mesmo com o uso da calculadora.

2ª análise: Relacionar as expressões algébricas com os textos:

Esta parte da atividade pode representar dificuldades para muitos alunos, já que a maioria deles não está habituada a trabalhar com textos associados a uma função. Em geral, os livros didáticos e os professores costumam trabalhar apenas as representações gráficas, algébricas e numéricas (tabelas de valores). Provavelmente muitos alunos manifestarão esta dificuldade ao iniciar o trabalho. Neste momento, caso isso ocorra, poderemos intervir com o intuito de esclarecer alguns pontos aos alunos, tais como: " Qual o dado do texto que pode ser associado a variável x? Qual o dado que corresponde ao termo independente de x?"

Os alunos poderão utilizar alguns conhecimentos discutidos anteriormente, tais como a compreensão da natureza das variáveis, bem como o relacionamento e a dependência entre elas.

Texto 1 :

(1) Paulo foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 2,00 pelo seu serviço, mais R$ 3,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que o seu vizinho lhe pagou quando retornou foi em função do número de horas trabalhadas.

Alguns alunos poderão relacionar este texto com a primeira expressão $y = 2x+3$, pelo fato de apresentar os valores 2 e 3 no seu enunciado, sem fazerem uma análise mais detalhada. Outros, entretanto, poderão observar que 2 é um valor fixo, e relacionar o custo de uma hora trabalhada que é R$ 3,00, à variável x. Desta maneira, poderão observar que o total a ser pago será calculado de acordo com a expressão $y = 2 + 3x$, que não se está associada a nenhum dos quatro textos apresentados.

Texto 2:

(2) A altura da água em uma piscina é de 2 m. O nível de água está abaixando na razão de 1 metros por hora. A altura da água na piscina é em função do tempo.

Para associar este texto a uma expressão algébrica, os alunos deverão relacionar a altura da água da piscina com a variável y e o número de horas referentes ao tempo decorrido, com a variável x.

Possivelmente, alguns apresentarão dificuldades em relacionar este texto com a expressão algébrica $y = 2 - x$, visto que não estão habituados a expressões que o termo com a variável x não aparece imediatamente após o sinal de igual. Outros alunos, entretanto, poderão associar a idéia da diminuição do nível de água, com o sinal negativo do coeficiente de x, e, desta maneira farão a correspondência certa.

Texto 3:

(3) A área de um retângulo é função de seu comprimento e de sua largura. A largura de um terreno retangular é 3 km menor do que seu comprimento. A área é calculada multiplicando-se o comprimento pela largura.

Provavelmente os alunos terão mais facilidade em relacionar este texto com a expressão algébrica correspondente, por se tratar do cálculo de área de um terreno retangular. O próprio texto já indica a multiplicação do comprimento pela largura. Alguns poderão apresentar dificuldades em associar a variável x ao comprimento do terreno e x-3 à largura dele. Como a expressão algébrica $y = x\ (x-3)$, que representa a função quadrática, está na forma fatorada, possivelmente, os alunos que fizeram a associação de x e x-3 para os respectivos comprimento e largura do terreno, não encontrarão dificuldade em relacionar este texto com a expressão algébrica correspondente.

Texto 4:

(4) Os avós de Maria moram em S.Paulo e ela em Araçatuba. Gostam muito quando a neta lhes liga. O custo do telefonema é em função de quanto tempo se fala. Maria liga após a meia noite para a ligação ser mais barata: é fixada uma taxa de R$ 3,00, mais R$ 2,00 por minuto de ligação.

Se os alunos não errarem ao relacionar o texto 1 com $y = 2x+3$, provavelmente, verificarão que é este texto se relaciona com esta expressão. Entretanto, aqueles que cometeram tal erro em relação ao texo 1, poderão corrigi-lo neste momento.

3ª análise: Relacionar as expressões algébricas com os gráficos:

São apresentados aos alunos, nesta parte da atividade, quatro gráficos, sendo três retas e uma parábola. Provavelmente a maioria dos alunos não encontrará dificuldades para relacionar cada expressão algébrica com o gráfico correspondente, visto que procedimento análogo foi efetuado nas atividades do grupo 3. Entretanto, as expressões algébricas possuem um grau de dificuldade maior do que as anteriormente trabalhadas. Por exemplo, a expressão algébrica $y = 2 - x$ tem o coeficiente de x negativo e é a segunda parcela da expressão e a expressão $y = x(x-3)$ representa uma função quadrática e, por estar na forma fatorada, muitos alunos podem não relacioná-la com a parábola.

Para fazerem a articulação entre estes dois registros, esperamos que os alunos utilizem alguns conhecimentos institucionalizados nas atividades anteriores, em especial nas do grupo 3, no que se refere às variáveis visuais pertinentes:

- Se o coeficiente de x for positivo, a função é crescente; caso contrário é decrescente. Este coeficiente denomina-se coeficiente angular da reta que representa a função afim e está associado à inclinação dela.
- O termo independente de x denomina-se coeficiente linear da reta e corresponde ao ponto onde ela intercepta o eixo y.
- O gráfico de uma função afim é uma ret; o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e o coeficiente de x^2 está associado à concavidade da parábola.

Além disso, alguns alunos poderão verificar se as coordenadas de um ponto do gráfico, ao ser substituído na expressão algébrica, satisfazem a igualdade. Estes procedimentos são análogos aos realizados nas atividades do grupo 3.

Ao final deste grupo de atividades, pretendemos institucionalizar que um texto pode estar relacionado com uma expressão algébrica e ambos representarem o mesmo objeto matemático: função. Pretendemos destacar que a representação algébrica de uma função pode ser escrita com a notação $y = f(x)$.

3.1.5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO GRUPO 5

Este último grupo de atividades não fazia parte do projeto inicial deste trabalho e foi elaborado e aplicado posteriormente por sugestão da Profª Drª Lígia Arantes Sad. Concordamos com a necessidade de acrescentar uma atividade com o objetivo de relacionar não só a expressão algébrica com o texto, com o gráfico e com a tabela, conforme as atividades do grupo 4, mas que propiciasse uma articulação e um relacionamento mútuo entre estes quatro registros de representação. Desta maneira complementamos as atividades anteriores, com maiores possibilidades de avaliar se os nossos objetivos iniciais foram atingidos ou não.

Para a elaboração destas atividades, também nos baseamos no trabalho de Kieran e Sfard (1999), que utilizam a representação de função sob a forma de texto e sua conversão para as representações algébricas, gráficas e numéricas. Enfatizamos que, com este grupo de atividades, os alunos deverão relacionar não só um dos registros com as outras três representações, como também articular os quatro registros concomitantemente.

Apresentamos a seguir a atividade proposta:

1. Relacione cada texto a seguir com uma das expressões algébricas:

1) $y = 2 – 5x$, $(x>0)$ 2) $y = 2 + 5x$ 3) $y = 5 + 2x$, $(x>0)$

4) $y = 5 – 2x$, $(x>0)$ 5) $y = 5x (x+2)$, $(x>0)$

TEXTO 1 :

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada e uma parcela que depende da distância percorrida. Se em uma determinada cidade a bandeirada custa R$ 5,00 e o quilômetro rodado custa R$ 2,00 o valor a ser pago depende da bandeirada e da distância percorrida.

<u>Expressão algébrica:</u>

TEXTO 2:

Construiu-se uma escala termométrica cujos valores das temperaturas relacionam-se com os da escala Celsius, de modo que a 2^0 e 502^0 desta nova escala correspondem a 0^0 C e 100^0C respectivamente. Os valores desta escala variam em função das temperaturas medidas em graus Celsius.

Expressão algébrica:

TEXTO 3:

A capacidade de um tanque é de 5 m^3 de água e são consumidos por dia 2 m^3. O volume de água escoada do tanque é em função do número de dias.

Expressão algébrica:

TEXTO 4:

Para plantar grama em um terreno retangular cujo comprimento é 2m a mais que sua largura, utilizam-se tapetes de grama que custam R$5,00 o metro quadrado. O preço a ser pago varia em função das medidas do terreno.

Expressão algébrica:

2. Esboce um gráfico que corresponda a cada texto e expressão algébrica já relacionados. Para isso, utilize a folha fornecida de papel quadriculado.

3. Analise as tabelas de valores fornecidas e relacione cada uma delas, com o texto, com a expressão algébrica e com o gráfico correspondentes. Explique os critérios que você utilizou para fazer estas relações.

TABELA 1	
x	y
0	5
2	1
1	3
2.5	0

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

TABELA 2	
x	y
8	400
5	175
10	600
6	240

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

TABELA 3	
x	y
0.5	6
3	11
1.5	8
100	205

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

TABELA 4	
x	Y
10	52
-1	-3
20	102
-20	-98

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

Analisaremos a seguir cada uma das três questões:

Distribuiremos inicialmente a questão 1, com o intuito de que os alunos relacionem cada um dos textos com as expressões algébricas correspondentes. Apesar desta primeira questão ser análoga à das atividades do grupo 4, achamos conveniente um procedimento inicial semelhante, para que posteriormente seja feita uma articulação mútua entre os demais registros.

Pelo fato de não termos por objetivo fazer um estudo detalhado do domínio da função, explicitamos que, em algumas expressões algébricas, os possíveis valores da variável x são somente positivos. Provavelmente, os alunos terão mais facilidade em relacionar os textos com sua respectiva expressão algébrica, já que realizaram este tipo de trabalho nas atividades do grupo 4. Poderão utilizar o relacionamento entre as variáveis x e y, bem como analisar no texto quais os dados que podem ser considerados a variável x, o termo independente e a variável y.

Escolhemos as expressões algébricas e os textos, de maneira conveniente, de modo que os alunos consigam relacionar as variáveis visuais das expressões com os dados fornecidos nos textos. Colocamos uma expressão algébrica a mais, para que não raciocinem simplesmente por exclusão em relação à última expressão analisada. Nas cinco expressões apresentadas, escolhemos os números 2 e 5 como variáveis visuais, uma vez que pretendemos que os alunos entendam bem o papel destas variáveis no estudo de funções. Estes valores (2 e 5) são os dados que aparecem em todos os textos a serem trabalhados.

A escolha das expressões algébricas $y = 2 + 5x$ e $y = 5 + 2x$ ocorreu com o intuito de que os alunos analisem com o primeiro texto, sendo a correta $y = 5 + 2x$. Para tal, deverão relacionar, o valor da bandeirada que é R$ 5,00 e o valor de cada quilômetro rodado de R$ 2,00 no texto com os coeficientes da expressão.

Provavelmente, a maioria dos alunos não terá dificuldades em relacionar o texto 1, com a expressão algébrica $y = 5 + 2x$ $(x>0)$. Talvez alguma dupla relacione este texto com a expressão algébrica $y = 2 + 5x$, permutando os coeficientes 2 e 5.

Escolhemos a expressão $y = 5 – 2x$, pelo fato de o coeficiente de x ser negativo. Esta se relaciona com o texto 3, que apresenta um tanque de $5m^3$ e um volume de água escoado de $2\ m^3$ por dia. Pretendemos que associem ao coeficiente negativo de x o escoamento de água. Nosso intuito é que observem que a expressão $y = 2 – 5x$ não corresponde a este texto.

Alguns alunos poderão encontrar dificuldades em relacionar o escoamento da água do tanque com o sinal negativo do coeficiente de x, apesar de terem realizado um procedimento análogo nas atividades do grupo 4. Outros, de uma maneira errada, poderão relacionar o texto 3 com a expressão $y = 2 – 5x$, ao invés de $y = 5-2x$.

O texto 2 pode apresentar uma dificuldade maior para alguns alunos, pelo fato da necessidade de verificarem que os valores da temperatura em graus Celsius corresponde à variável independente x e o valor de y corresponde à temperatura da escala construída.

Alguns alunos, entretanto, poderão montar uma escala que relacione as temperaturas em graus Celsius com as temperaturas da nova escala e compará-la com as expressões algébricas fornecidas. Este procedimento poderá ser adotado por eles, visto que já realizaram no estudo de Termometria na disciplina de Física, no decorrente ano.

Por exemplo:

$$\begin{array}{r|c|l} 100^0\ C & \text{---------} & 520^0 \\ x & \text{---------} & y \\ 0^0\ C & \text{---------} & 20^0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-20}{520-20}=\frac{x}{100}$$

Se realizarem corretamente esta operação, encontrarão a expressão algébrica y = 2 + 5x. Provavelmente, alguns alunos poderão achar este texto mais difícil e deixá-lo para ser analisado por último e por exclusão.

A expressão algébrica y = 5x(x+2) foi escolhida convenientemente na forma fatorada, para que os alunos possam relacioná-la com o texto 4. Este se refere a um problema de área de um terreno retangular, cujo comprimento é 2m a mais que sua largura, e o preço do metro quadrado de grama a ser colocado é de R$ 5,00. Provavelmente, por se tratar de um cálculo de área de retângulo, os alunos encontrarão menos dificuldades em relacionar com a expressão algébrica correspondente, também por já terem realizado este procedimento nas atividades do grupo 4.

Para a questão 2, forneceremos aos alunos papel quadriculado para que esbocem um gráfico correspondente a cada texto e expressão algébrica já relacionados anteriormente. Destacamos que para a construção gráfica, eles poderão dispor apenas da expressão algébrica e do texto a ela associado, visto que pretendemos que analisem as variáveis visuais realizando uma interpretação global para a construção gráfica.

Pode acontecer, porém, que alguns alunos atribuam valores para x e calculem o correspondente valor de y, ou seja, interpretem pontualmente os dados. Alguns poderão ter dificuldade maior no esboço gráfico correspondente à expressão algébrica y = 5x (x+2) por se tratar de uma parábola e estar na forma fatorada. Outros, talvez, realizarão uma operação distributiva, o que facilitará a construção gráfica, já que verificarão que se trata de uma parábola.

De um modo geral, a maioria dos alunos poderá encontrar dificuldades na construção gráfica, porque este fato, constatamos em nossa prática docente, nas pesquisas de Dreyfus e Eysemberg (1981,1982 apud KIERAN,1992) e nos estudos de Duval (1988), que concluíram que a construção gráfica representa dificuldades para a maioria dos alunos do ensino médio analisados.

Na questão 3, pretendemos que os alunos analisem as tabelas de valores e relacionem cada uma delas com um texto, uma expressão algébrica e um gráfico. Para tal, construímos quatro tabelas numéricas, com seus valores convenientemente escolhidos.

Na tabela (1), atribuímos alguns valores positivos para x, que variam de 0 a 2,5; sendo que é a única tabela que ao aumentar o valor de x, o valor de y diminui:

x	y
0	5
2	1
1	3
2.5	0

Alguns alunos poderão fazer tal observação e verificar que a tabela corresponde ao texto 3, uma vez que este refere-se a um escoamento de água de um tanque. Ao encontrarem o texto correspondente, estarão automaticamente relacionando à expressão algébrica e o gráfico, já que haviam realizado este procedimento nas questões 1 e 2. Outros, poderão optar em substituir o valor de x nas expressões algébricas para calcular y e, desta maneira, identificar qual a expressão correspondente. Como já relacionaram anteriormente as expressões com os respectivos textos e gráficos, a tabela também estará diretamente relacionada.

A tabela 2 foi escolhida, com os valores de y bem maiores que os das demais tabelas:

x	y
8	400
5	175
10	600
6	240

Alguns deles poderão constatar este fato e concluir que se refere à expressão algébrica y = 5x(x+2), já que ocorre para os valores de x uma multiplicação de 5x pela soma x+2 e, deste modo, resulta valores de y maiores que os das demais tabelas. Desta forma, não terão dificuldades em relacionar esta expressão algébrica com o respectivo texto e o gráfico, visto que estes procedimentos foram realizados nas questões anteriores. Outros, entretanto, poderão optar em substituir os valores de x nas expressões algébricas e calcular o y correspondente. Deste modo, poderão associar a tabela com a expressão algébrica correta e consequentemente com o texto e o gráfico correspondentes. Provavelmente, a maioria dos alunos não optará em relacionar inicialmente esta tabela com o texto 4, porquanto este não favorece tal tipo de conversão, por ser a mais difícil de realizar.

Em relação a tabela 3, alguns alunos poderão verificar que os valores atribuídos para x, referem-se a quilômetros rodados, por serem todos positivos e por ter sido colocado além de valores baixos, um valor 100, que pode também corresponder à quilometragem:

x	y
0.5	6
3	11
1.5	8
100	205

Aqueles que fizerem este tipo de observação relacionarão a tabela com o texto 1 e, posteriormente, com a expressão algébrica e o gráfico correspondente.

Como nos casos anteriores, alguns alunos poderão substituir os valores de x, encontrar os correspondentes de y e relacionar posteriormente ao texto e ao gráfico correspondentes. Caso tenham seguido uma ordem a partir da tabela 1, verificarão que a tabela 4, por exclusão, corresponde ao texto 2; ao contrário, poderão verificar que é a única tabela que apresenta valores negativos de x, podendo estes serem associados a temperaturas. Com isso, relacionarão ao texto 2. Poderão também substituir os valores de x e achar os correspondentes y, ao relacionar com a expressão algébrica.

Por conseguinte, nesta questão, são esperados fundamentalmente dois procedimentos por parte dos alunos, além da opção por exclusão, poderão observar, de uma maneira global, os valores de cada tabela e relacionar com os dados do texto, ou analisar pontualmente a tabela, ao substituirem cada valor fornecido de x, em uma expressão algébrica. Provavelmente, não relacionarão diretamente a tabela com o gráfico.

Ao final deste grupo de atividades, pretendemos revisar os resultados anteriormente obtidos e ora utilizados.

Enfatizaremos que uma expressão algébrica, uma tabela de valores, um gráfico e um texto, podem estar relacionados entre si e representarem um mesmo objeto matemático: função.

3.2 DESENVOLVIMENTO DA SEQÜENCIA DIDÁTICA

A seqüência didática foi desenvolvida com alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Araçatuba, interior de São Paulo. Ocorreu em quatro sessões, durante os meses de maio e junho do ano de 2002 e, posteriormente, houve uma sessão adicional no final do mês de setembro.

A primeira sessão aconteceu no dia 22 de maio com duração de sessenta minutos, conforme previsto. Compareceram 20 alunos, que trabalharam em duplas, organizados de acordo com suas próprias escolhas. Esta sessão, ocorreu no laboratório de informática, com cada dupla utilizando uma máquina. Lá foram desenvolvidas as três primeiras atividades do grupo 1.

No desenrolar das atividades, os alunos ficaram motivados e empolgados com o uso do software Cabri-Géomètre. Pudemos constatar este fato, com alguns comentários feitos por eles, tais como:

"Não imaginávamos que poderíamos estudar funções utilizando o Cabri-Géomètre."

"Com esta atividade estamos compreendendo melhor que o valor de y varia, conforme movimentamos x"

"Por que não aprendemos funções desta maneira no ano passado? "

Apesar de a maioria deles ainda não terem conhecimento de como utilizar a ferramenta "rasto" de um ponto, informamos o necessário para tal uso e, desta maneira, resolveram a questão que solicitava este procedimento.

Durante o desenvolvimento destas atividades, os alunos freqüentemente nos interpelavam para saber se o que haviam escrito era compreensível e se estava correto.

Em relação a algumas perguntas feitas, achamos conveniente dar apenas indicações, já para outras, dizíamos que era para eles responderem conforme achassem conveniente. Transcreveremos alguns questionamentos aos quais retornaremos, detalhadamente, nas análises dos resultados.

Em relação à questão em que pedíamos para comparar a variação do ponto A com a de B nas atividades, alguns alunos indagavam:
“Precisamos escrever a fórmula nesta questão?”
“Está certo se eu responder que se x for negativo, y também vai ser? “

Para a questão em que deviam completar uma tabela com alguns valores de x ou de y, ao movimentarem o cursor, alguns perguntavam:
“ O que eu faço se não tem valores de x e nem de y correspondentes na tabela?”

Ao término do prazo estipulado da sessão, num momento de diálogo com eles, retomamos os questionamentos dos alunos e aproveitamos as respostas dadas por alguns deles para institucionalizar alguns conceitos trabalhados. Este procedimento foi adotado por nós no final de todas as sessões.

A segunda sessão foi realizada na semana seguinte, dia 29/05. Dos 20 alunos que participaram da atividade anterior, compareceram apenas 18. Alguns alunos cujo colega da dupla havia faltado, preferiram trabalhar sozinhos; outros preferiram trabalhar em duplas. A realização desta sessão se deu no referido dia, véspera de um feriado, por necessidade de um curto prazo entre esta atividade e a anterior, por se tratar de questões de um mesmo grupo, que eram divididas em duas atividades.

Fizemos no início um breve comentário das atividades anteriores e dos conhecimentos institucionalizados. Distribuímos as questões das atividades 4 e 5 do grupo I. Estipulamos um tempo de cinqüenta minutos, um pouco menor que o da sessão anterior. Estas atividades também foram realizadas no laboratório de informática, com o uso do Cabri-Géomètre.

Nesta sessão, os alunos trabalharam de maneira mais independente, com menos perguntas, uma vez que o desenvolvimento destas atividades era semelhantes às anteriores, apenas introduzindo funções quadráticas.

Achamos conveniente retomar no início do próximo encontro, a questão j) da atividade 4, que pedia para comparar o gráfico obtido com os das atividades anteriores, já que observamos que a maioria não a havia respondido, apesar de nenhuma dupla manifestar dúvidas a respeito dela.

No final desta sessão, dialogamos com os alunos sobre os questionamentos e as respostas dadas, e, fizemos as devidas institucionalizações.

As atividades do grupo 2 foram aplicadas no dia 12/06, duas semanas após a realização da segunda sessão. Este espaço de tempo ocorreu, porque os alunos tiveram várias provas na semana de 03/06 a 07/06, e a maioria alegou que faltaria a este trabalho, se este fosse desenvolvido neste período. Compareceram 20 alunos, sendo que dois deles haviam faltado na anterior, mas manifestaram a vontade de continuar participando das sessões. Apesar de as atividades do grupo 2 não necessitarem do uso do computador, realizamos esta sessão também no laboratório de informática, para possibilitar a participação dos alunos que não haviam comparecido na sessão anterior. Estes dois resolveram trabalhar cada um em uma máquina, individualmente.

Os demais se organizaram em duplas e foi estipulado um tempo de sessenta minutos para a realização das duas atividades deste grupo. Distribuímos as questões e papel quadriculado para a construção dos gráficos. Observamos, pelas atitudes dos alunos, que trabalharam com interesse, lendo e analisando as questões propostas, que se referiam a situações do cotidiano, envolvendo cálculos de perímetros e de áreas dos cômodos de uma residência.

A maioria das duplas não apresentou dificuldades em interpretar e responder as questões.

Ao final desta sessão, assim como nas demais, houve um momento de diálogo e após fizemos as institucionalizações locais.

Em relação aos dois alunos que realizaram as atividades que faltavam do grupo 1, fizemos algumas intervenções e institucionalizações semelhantes às realizadas na sessão anterior, na qual eles haviam faltado. Não houve nenhum fato diferente dos demais para ser observado e analisado. Propusemos a estes alunos permanecerem mais um tempo reunidos para realizar as questões do grupo 2, programadas para este dia. Aceitaram a proposta e ficaram no mesmo nível de resolução que os demais alunos. As observações e intervenções ocorridas com eles foram semelhantes àquelas feitas com os outros alunos que já haviam concluído a atividade. As dificuldades apresentadas foram análogas às dos demais.

A quarta sessão foi realizada no laboratório de informática, dia 27/06. Compareceram a esta sessão quinze alunos, que se agruparam em 6 duplas e um trio, conforme escolha própria. Nesta sessão, os alunos desenvolveram as atividades dos grupos 3 e 4. O tempo estipulado foi de noventa minutos. Entregamos inicialmente as atividades do grupo 3, que foram realizadas com o uso do software Cabri-Géomètre II.

Ao final da atividade 1 deste grupo, fizemos intervenções para abordar uma interpretação global do gráfico e, quanto às demais, pedimos para analisar cada uma delas meio da abordagem global e não mais pontual.

Ao final das atividades deste grupo, também realizamos um momento de diálogo com os alunos e destacamos alguns pontos referentes aos conhecimentos locais a ser institucionalizados.

Recolhemos estas atividades e distribuímos as do grupo 4. Explicamos aos alunos que nesta parte da sessão não seria utilizado o computador para a resolução das atividades, apenas papel e lápis. De um modo geral, os alunos demonstraram facilidade em compreender as questões propostas.

Antes do término do prazo pré-estabelecido, todos os alunos haviam terminado e conseguiram resolver de maneira satisfatória esta atividade**.** Nesta sessão defenderam com mais convicção suas argumentações, tanto entre eles, como também quando a nós se dirigiam.

A quinta e última atividade proposta pela Prof.ª Drª Lígia Arantes Sad para dar um melhor fechamento na seqüência didática inicialmente elaborada, foi aplicada no dia 30/09. Esta sessão foi realizada com o uso de papel e lápis, sem a utilização do computador. Compareceram 12 alunos, os quais haviam participado de todas sessões anteriores e se organizaram em 6 duplas. O tempo estipulado para a realização foi de sessenta minutos. Distribuímos inicialmente a questão1; após o término desta, a questão 2, juntamente com papel quadriculado para a construção dos gráficos. Conforme os alunos finalizavam esta segunda fase, entregamos a questão 3.

Ao final de cinqüenta minutos, todos haviam terminado. De um modo geral, não tiveram dificuldades em resolver este grupo de atividades. No momento de discussão com os alunos, fizemos uma revisão dos resultados anteriormente institucionalizados e utilizados neste grupo de atividades. Além disso, enfatizamos que a expressão algébrica, a tabela de valores, o gráfico e o texto representam o mesmo objeto matemático função. Alguns alunos comentaram que foi produtivo terem participado deste trabalho e que passaram a compreender melhor o conceito de função.

Para a análise dos resultados obtidos, levamos em conta as produções dos doze alunos que participaram de todas as sessões.

3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Analisamos neste item, os resultados obtidos com o desenvolvimento da seqüência didática. Para tal, baseamo - nos nas produções dos doze alunos que participaram de todas as sessões. As observações feitas durante as sessões realizadas também servem de sustentação para nossas análises. Ressaltamos que os nomes dos alunos que figuram na análise são fictícios.

3.3.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES DO GRUPO 1

Lembramos que o principal objetivo das atividades deste grupo é proporcionar aos alunos melhor compreensão das componentes de variação da função, bem como a dependência entre elas e, provocar mudanças nos registros de representação: do gráfico para o numérico e deste para o algébrico.

Houve bastante interesse e motivação por parte dos alunos em responder às 5 atividades propostas do grupo 1. Isto foi observado, por meio de seus próprios comentários, por estarem utilizando o software Cabri- Géomètre II para o estudo de funções. Como havíamos previsto, a manipulação do software não representou dificuldades para nenhuma das duplas.

Em cada atividade deste grupo, os alunos eram solicitados a abrir um determinado arquivo no software, que apresentava o sistema de eixo cartesiano e a função previamente definida, a ser estudada, porém sem as suas representações gráfica, algébrica e numérica. Figura, neste arquivo, apenas um ponto do gráfico da função que, ao ser deslocado, suas coordenadas variam de acordo com a função estabelecida.

Analisamos individualmente as atividades deste grupo.

Atividade 1

A função previamente escolhida a ser trabalhada nesta atividade é y = 2x.

a) Abra o Arquivo 1 no software Cabri-Géomètre.
b) Movimente o ponto A e compare a variação de A e de B.

Com a questão b), pretendíamos que os alunos observassem que existe uma relação de dependência entre os números associados ao ponto A e ao ponto B, conforme A é deslocado sobre o eixo dos x. Verificamos que algumas duplas apresentaram dificuldades em responder a esta questão, porque achavam que a resposta deveria ser uma fórmula e que era necessária a realização de algum tipo de cálculo. As dificuldades encontradas pelos alunos para uma resposta em linguagem natural podem ser atribuídas ao fato de o enunciado da mesma não ser esclarecedor, ou por estarem habituados a sempre efetuar operações para responder a uma questão matemática. Após alguns esclarecimentos sobre a não necessidade de uma resposta com fórmulas e cálculos, observamos que a maioria dos alunos apresentou dificuldades em expressar sua resposta em linguagem natural. Apesar disso, algumas duplas ainda optaram por responder à questão com “fórmulas” ou atribuição de valores numéricos relacionados a A e B.

Citamos as respostas dadas :

- “Enquanto o ponto A desloca-se na abscissa x uma distância α, o ponto B desloca na abscissa y uma distância 2α.”
- “A= 1 B= 2”
- “Conforme aumenta o valor de A em x, B aumenta em y”
- “0, 1 - A 0, 2 - B “
- “B = 2A, ou seja, B é o dobro de A.”
- “x/y = ½ ou 2x = y , x = y/2 .Para cada número aumentado em x, aumenta dois em y.”

Observamos algumas respostas qualitativas dadas pelos alunos e outras quantitativas, sendo estas expressas em linguagem natural, em relações numéricas ou expressões algébricas.

Apesar das diferentes respostas fornecidas para esta questão, os dados obtidos nos permitem concluir que, após as devidas intervenções, os alunos perceberam que existe uma relação e uma dependência do números associados a B em relação ao associado ao ponto A, tal como já era previsto.

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondentes a valores negativos de x, o que acontece com B?

O objetivo da questão é que os alunos verifiquem que esta variação ocorre tanto para valores positivos como negativos. Como era esperado, confirmaram que esta variação também ocorre para valores negativos de x. Destacamos as respostas apresentadas:

- “B terá valores negativos obedecendo à mesma variação.”
- “B também se torna negativo.”
- “Desloca-se pelo eixo y, ficando abaixo de zero, também negativo.”
- “B diminui o dobro do valor de A.”
- “B irá para o eixo correspondente aos valores negativos de y.”
- “Os valores negativos de A são proporcionais aos valores negativos de B.”

É importante observar que as duplas que foram mais precisas nas respostas desta questão, também o foram na anterior. Por exemplo, a dupla Kátia e Fernanda respondeu, na questão anterior que a variação de A é o dobro da variação de B, nesta respondeu que B terá valores negativos obedecendo a mesma variação. Outra dupla, Rose e Dani, também mostrou precisão e coerência nas respostas dadas às duas questões. Nesta respondeu que os valores negativos de A são proporcionais aos valores negativos de B e na anterior verificaram que conforme aumenta o valor de A em x, B aumenta em y.

Outras duplas deram respostas mais evasivas, ao se referirem apenas ao sinal de B, ou à variação de B como uma “diminuição do dobro de A”.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

x	1,2			-1,2			
y			-10			9,6	

A finalidade desta questão é de organizar as observações gráficas feitas, e, desta forma, completar a tabela de valores.

Contrariando nossas expectativas, os alunos não apresentaram dificuldades em trabalhar com números nos registros decimais e nem para encontrar o valor de x, sendo dado o de y. Isso possivelmente ocorreu pela dinâmica do software, que favoreceu a observação da dependência das variáveis. Entretanto, não havíamos previstos que alguns alunos não preenchessem a parte da tabela, em que não era atribuído valores para x e para y ao mesmo tempo. Três duplas deixaram estes espaços em branco, sem ao menos nos questionar a falta dos dois valores simultaneamente em algumas colunas. Identificamos estas três duplas para as possíveis comparações nas próximas análises: Márcia - Thais, Fernando – André e Carol - Lídia.

Com esta questão, os alunos realizaram uma conversão do registro gráfico para o numérico (tabela de valores), que era a nossa proposta.

e) Que relação existe entre os valores de x e y?

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

O objetivo destas questões é que os alunos estabeleçam uma relação entre x e y e encontrem a expressão algébrica da função. Com isso poderão realizar uma nova conversão, ou seja, do registro numérico para o algébrico.

Conforme havíamos previsto, em geral, os alunos não encontraram dificuldades em responder a estas questões. A maioria das duplas concluiu que y é o dobro de x e uma delas respondeu que x é a metade de y. Duas responderam que x e y são proporcionais. Três duplas escreveram a expressão algébrica já na e), e questiona se a resposta das duas questões poderiam ser iguais.

Acreditamos que isso se deve ao fato comentado anteriormente, de os alunos acharem que em Matemática sempre devem escrever uma “fórmula” ou um cálculo nas respostas. Alguns, além de escreverem a expressão algébrica, respondiam também em linguagem natural a relação existente entre x e y.

As demais duplas responderam apenas em linguagem natural a questão e), sendo que a dupla Kátia e Fernanda, havia escrito também a expressão algébrica, mas ao ler a questão seguinte, achou melhor reformular a resposta dada, reservando este registro para a questão f).

Apenas a dupla Fernando e André errou a questão f), ao responder $x = 2y$. Achamos importante destacar que as duplas Kátia – Fernanda e Rose – Dane, escreveram $y = 2x$ ou $x = y/2$. Esta resposta indica que não há uma preocupação em destacar qual das variáveis depende da outra. Carol - Lídia, Márcia – Thaís, Paula- Marcos escreveram $2x = y$, utilizaram, neste registro, a simetria de igualdade.

Não previmos, anteriormente, que alguns alunos poderiam escrever a expressão algébrica dessas diferentes maneiras, ou seja, não se restringiram ao modelo que lhes é proposto em sala de aula.

As produções dos alunos referentes a estas duas questões apontam que o objetivo inicialmente proposto foi atingido, ou seja, que os alunos relacionassem as variáveis x e y e estabelecessem o registro algébrico da função previamente estabelecida. Com os procedimentos realizados, ocorreu a conversão do registro numérico da função para o algébrico, que também era a nossa proposta.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algébricamente.
h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

A finalidade destas duas questões é proporcionar aos alunos a compreensão da dependência das variáveis em cada ponto do gráfico.

Pretendemos que eles possam verificar que as coordenadas de qualquer ponto da reta que representa a função e satisfazem a sua expressão algébrica.

Apenas a dupla Márcia e Thaís deixou a questão g) sem responder. Todas as demais anotaram duas ou três coordenadas do ponto na forma de pares ordenados. Dentre estas duplas, três expressaram de maneira correta a expressão algébrica: y = 2x. A dupla Rose e Dani escreveu na forma de par ordenado: (x, 2x) e outras três duplas não escreveram a expressão algébrica como era solicitado, mas apresentaram uma relação numérica. Isso contrariou as nossas expectativas, porque havíamos previsto que a maioria dos alunos não teria dificuldade em expressar algebricamente a relação existente entre as coordenadas do ponto P.

Na questão h) a maioria das duplas verificou que as coordenadas de P, correspondem aos valores associados a A e B, respectivamente. Vamos destacar algumas das respostas dadas pelos alunos:

- "P → (x;y) A → x B → y" .
- "A e B forma P".
- "As coordenadas de P são as de A e B, respectivamente".
- "Os valores das coordenadas P, A e B equivalem - se: $P_2 = 2\ P_1$ assim como B =2 A".
- "As coordenadas de P posuem valores equivalentes a A e B .
- "São iguais"; "A = 3 B = 6 P = 3 e 6 ".

A dupla, Márcia e Thaís apenas anotou os valores numéricos de A, B e P. Ao ser questionada por nós, respondeu que as coordenadas de P correspondem aos valores de A e B. Observamos que todos verificaram que existe uma dependência ponto a ponto entre as coordenadas.

i) Marque o "rasto do ponto P no plano xoy. j) Marque dois pontos distintos do "rasto" e trace a reta que passa por eles. k) Todos os pontos do "rasto" pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao "rasto"?

A questão i) propiciou aos alunos traçarem o gráfico da função utilizando para isto a ferramenta do Cabri – Géomètre II, "rasto" do ponto P.

Apesar de a maioria dos alunos desconhecer o “rasto”, pudemos instruí-los rapidamente a este uso. Por outro lado, para resolveram às questões j) e k), os alunos já conheciam o comando “traçar reta” . Deste modo os procedimentos utilizados nesta tarefa não representou fator de dificuldade. Com as questões j) e k), eles puderam verificar que todos os pontos do “rasto” pertenciam à reta que passa pelos dois pontos marcados sobre ele. Pelas respostas dadas, observaram que bastam dois pontos para se traçar a reta a qual representa a função.

As produções dos alunos relativas a esta atividade 1 indicam que realizaram de maneira satisfatória a articulação entre os registros gráficos, numéricos e algébricos e que também tiveram condições de verificar que existe um relacionamento e uma dependência entre as variáveis x e y.

Atividade 2

Na atividade 2, as questões apresentadas e os objetivos propostos são análogas às da atividade 1, porém a função previamente estabelecida para ser trabalhada é y = -2x.

Pretendemos explorar também as variáveis visuais pertinentes da função, que, segundo Duval, podem propiciar aos alunos uma melhor articulação entre os registros gráficos e algébricos. Nossa expectativa é que os alunos compreendam a relação destas variáveis tanto com a inclinação da reta quanto com o crescimento da função.

a) Abra o Arquivo 2 no software Cabri-Géomètre. b) Movimente o ponto A e compare a variação de A e de B.

As dificuldades encontradas pelos alunos nesta questão foram idênticas às apresentadas na questão correspondente da Atividade 1. As mesmas duplas responderam, em linguagem natural, à questão da atividade anterior e esta. Seguem as respostas dadas pelos alunos:

- "Quando A for positivo, B será negativo , e vice-versa."
- " B = - 2A."
- "y = - 2x ou –y = 2x."
- "Enquanto A desloca-se na abscissa x em sua parte positiva, o ponto B desloca-se na abscissa y na região negativa."
- "O aumento numérico de A é proporcional , todavia negativo em B."
- "O valor de A na abscissa x é positivo e o ponto B na abscissa y é negativo tendo o dobro de A."

Além das observações já feitas na atividade 1, vale também destacar que para alguns alunos a abscissa refere-se tanto ao eixo dos x como ao do y. Isso pudemos observar nas respostas das duas atividades.

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondentes a valores negativos de x, o que acontece com B?

Como na questão análoga da atividade anterior, o objetivo é que os alunos possam verificar que esta variação ocorre tanto para valores positivos como negativos. Eles observaram que ao se deslocar o ponto A para a região dos valores negativos de x, contrário à da anterior, os valores de B correspondentes situam-se na região do eixo positivo de y, conforme apontam os comentários a seguir:

- “Se deslocarmos A para o eixo negativo, os valores de B serão positivos. Na atividade1, ao deslocarmos para o eixo negativo os valores de B, também eram negativos. Neste caso, ocorre o contrário.”
- “B vai para o eixo correspondente aos valores positivos de y. Um é o oposto do outro.”
- “B fica positivo. Em 1,B é negativo.”
- “Para A negativo, o ponto B fica positivo. No exercício da atividade anterior quando desloca A para valores positivos em x, B assume valores negativos em y.”
- “B ficará com 2 vezes o valor de A só que com valores positivos. A diferença é com os sinais nessa atividade serem opostos.”
- “B = -2 A ou 2A = -B.”

Observamos que algumas duplas fizeram a comparação com a atividade anterior, complementando sua resposta, o que não era pedido na questão.

A dupla Fernando e André respondeu nesta questão B = -2 A ou 2 A = -B; na resposta da b) da atividade 1, escreveu a expressão B= 2A.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

x		-1,2		1,2		
y			-10			9,6

Como na atividade anterior, a finalidade desta questão é de organizar as observações gráficas feitas e fazer uma conversão para o registro numérico (tabelas de valores).

Conforme ocorreu na atividade 1, também aqui os alunos não apresentaram dificuldades em trabalhar com números nos registros decimais nem para encontrar x quando é dado y, o que contrariou nossas expectativas. As mesmas duplas que anteriormente não preencheram a tabela, quando não havia valor para x e nem para y, repetiram o processo nesta questão.

Os alunos que completaram a tabela, realizaram uma conversão do registro gráfico da função analisada, para o registro numérico.

e) Que relação existe entre os valores de x e y?

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Assim como na atividade 1, quase todas as duplas não encontraram dificuldades em verificar a relação existente entre as variáveis x e y. A maioria delas escreveu corretamente a expressão algébrica na forma $y = -2x$, duas destas duplas, Kátia – Fernanda e Rose - Dani, que responderam $x = -y/2$, foram as mesmas que na atividade 1 escreveram $x= y/2$ e ainda Kátia e Fernanda complementaram com $f(x) = -2x$. Carol - Lídia, Márcia - Thaís e Paula - Marcos escreveram $2x = -y$, assim como na atividade anterior, escreveram $2x = y$. A dupla Fernando e André errou a relação e escreveu a expressão algébrica $x = -2y$. Lembramos que esta dupla na atividade anterior cometeu o mesmo tipo de erro. Outras duas duplas também escreveram a expressão $x = -2y$.

Como a maioria dos alunos estabeleceu corretamente uma relação entre x e y, e desta maneira estabeleceu a expressão algébrica correspondente da função, somos levados a crer que o objetivo da questão foi alcançado. Com isso realizaram uma conversão do registro numérico para o registro algébrico, conforme proposto.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P, verifique a relação existente entre elas e expresse-as algebricamente.
h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

Na questão g) apenas a dupla Fernando e André não escreveu algumas coordenadas de P e errou a relação entre elas, ao responder x = -2y. Este erro já havia sido cometido por eles na questão anterior desta atividade ao relacionar as variáveis x e y. Três duplas apenas escreveram duas ou três coordenadas de P na forma de par ordenado, mas não expressaram algebricamente a relação entre elas. Entre estas duplas, duas delas, que haviam acertado a expressão algébrica na questão referente da atividade 1, erraram a questão anterior desta atividade expressando a relação entre x e y como x = -2y. Possivelmente este é o motivo de não conseguirem responder a esta questão. Uma dupla escreveu a expressão algébrica y = 2x, ao invés de y = - 2x, as demais acertaram a questão.

As respostas certas desta questão contrariaram nossas expectativas, já que esperávamos que os alunos não teriam dificuldades em expressar a relação entre as coordenadas do ponto P.

Na questão h), a maioria verificou que as coordenadas de P correspondem às de A e de B respectivamente.

Como a finalidade destas duas questões é proporcionar a compreensão da dependência pontual da variável no registro gráfico, e verificar que as coordenadas de qualquer ponto pertencente à reta que representa a função, satisfaz o correspondente registro algébrico, concluímos que o objetivo proposto foi atingido para a maioria dos alunos.

i) Marque o “rasto do ponto P no plano xoy.
j) Marque dois pontos distintos do “rasto” e trace a reta que passa por eles.
k) Todos os pontos do “rasto” pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao “rasto”?

Os alunos responderam a estas questões com facilidade, como já haviam feito às correspondentes da atividade 1. Traçaram o gráfico da função utilizando para tal tarefa a ferramenta “rasto” do ponto P fornecida pelo Cabri – Géomètre. Na questão k), os alunos verificaram que todos os pontos do “rasto” pertencem à reta que passa pelos dois pontos marcados sobre ele. Observaram que bastam dois pontos para se traçar a reta que representa a função.

l) Comparando o gráfico construído nesta parte da atividade com o anterior, observamos que existe uma diferença em relação à inclinação das retas. Por que você acha que ocorreu esta mudança?

Como na atividade anterior, o coeficiente de x é positivo e neste caso é negativo, porém iguais em módulo. Elaboramos esta questão com a finalidade de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão da relação das variáveis visuais pertinentes, relacionando-as com a inclinação da reta e com o crescimento da função.

Três duplas responderam que a diferença em relação à inclinação da reta nos dois gráficos era devido ao sinal do coeficiente de x, um positivo e o outro negativo. Duas delas responderam que a diferença em relação à inclinação das retas era devido ao fato de uma função ser crescente e outra decrescente. Questionamos posteriormente estes alunos e pudemos observar que relacionavam o fato de a função ser crescente ou decrescente com o sinal do coeficiente de x. Apenas a dupla Márcia e Thaís não respondeu à questão.

Com esta atividade, constatamos que os alunos realizaram articulações entre os diferentes registros da função y = -2x, e verificaram que existe um relacionamento e dependência entre as variáveis x e y. Puderam também constatar o relacionamento da variável visual da função com a inclinação da reta e com o crescimento da função.

Atividade 3

A função a ser analisada nesta atividade é y = 2x +1, cujo coeficiente de x, em módulo, é o mesmo dos anteriores, mas acrescida do termo independente 1. Estas escolhas visam propiciar o relacionamento das variáveis visuais pertinentes com o registro gráfico da função.

Com esta atividade pretendemos proporcionar aos alunos a compreensão da relação do termo independente de x da expressão algébrica, com o ponto do gráfico onde a reta intercepta o eixo dos y e reafirmar a relação entre o coeficiente de x com a inclinação da reta. Desta maneira, os alunos poderão realizar a conversão do registro gráfico para o algébrico com maior facilidade.

As questões iniciais são análogas às das atividades anteriores, e as produções dos alunos não apresentaram nenhum fato novo. Destacamos aquelas que julgamos pertinentes a novas observações:

e) Que relação existe entre os valores de x e y? f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Conforme havíamos previsto na análise *a priori*, os alunos tiveram dificuldade de verificar qual era a expressão algébrica que relaciona os valores de x e de y. Demoraram um tempo maior analisando e fazendo tentativas de cálculos a partir da tabela de valores que construíram na questão d). Apesar disso, a maioria conseguiu escrever corretamente a expressão algébrica. Apenas a dupla Márcia e Thaís não respondeu à questão. Vale observar que a mesma dupla, Rose e Dani, que anotou em forma de par ordenado a relação entre as variáveis nas atividades anteriores, fez de modo semelhante nesta atividade escrevendo (x, 2x + 1).

As respostas da questão l) apresentaram novos elementos, uma vez que os alunos deveriam comparar os três registros gráficos referentes às atividades desenvolvidas:

l) Comparando o gráfico construído nesta parte da atividade com o anterior, observamos que existe uma diferença em relação à inclinação das retas. Porque você acha que ocorreu esta mudança?

Apesar de a maioria das duplas não conseguir realizar rigorosamente uma comparação entre as retas dos gráficos anteriores que passam pela origem do plano cartesiano (0;0) e este, cuja reta passa pelo ponto (0;1), expressaram relações pertinentes, que indicamos a seguir:

- “Mais inclinada que o primeiro e no sentido contrário ao do segundo.”
- “Nas atividades 1 e 3, o gráfico apresenta a mesma inclinação, porém na atividade 2 a reta é inclinada no sentido oposto.”
- “Não se encontra no ponto O (Atividade 3) como nas atividades 1 e 2.”
- “No gráfico 1, a função é crescente; no gráfico 2, é decrescente e no gráfico 3 há mudanças no ponto x.”
- “O rastro não passa pela origem, cortando y no ponto 1 que seria o termo independente da função f(x)= 2x+1.”
- “No gráfico 1, o rastro passava pela origem. No gráfico 3, o rastro passa pelo ponto 1, fora da origem.”

Verificamos que a maioria dos alunos observou que a diferença entre os registros gráficos era devido a esta última reta não passar pela origem do sistema cartesiano, entretanto, alguns não relacionaram este fato com o termo independente da função y = 2x +1 desta atividade. Havíamos previsto que os alunos relacionariam a diferença entre esta reta e as anteriores de maneira mais clara e objetiva.

Ao final da sessão, discutimos com o grupo as respostas apresentadas por eles e procuramos enfatizar o papel das variáveis visuais dos três registros algébricos e como a mudança destas, resultam também numa variação dos registros gráficos das funções. Além disso, institucionalizamos alguns conceitos trabalhados nesta sessão, tais como: a tabela, o gráfico e a expressão algébrica representam uma mesma função; as variáveis apresentam uma dependência, sendo x a variável independente e y a dependente; o registro gráfico da função afim é uma reta, etc.

Atividade 4

Nas atividades 4 e 5, as funções escolhidas são do segundo grau, e o objetivo, assim como nos estudos anteriores, é que os alunos possam compreender, no caso dessas funções, as componentes de variação e o relacionamento entre elas. Utilizamos questões que propiciam mudanças entre os diferentes registros da função.

A função pré-estabelecida para esta atividade é $y = x^2$.

a) Abra o arquivo 4, movimente o ponto A e compare a variação entre A e B.

Assim como nas atividades anteriores, algumas duplas encontraram dificuldades em responder a esta questão, visto que queriam encontrar uma fórmula ou uma relação numérica como resposta. Outras duplas responderam no registro da linguagem natural, porém algumas de maneira incorreta. Seguem as respostas dadas por eles:

- "B é o dobro de A."
- "y variou o quadrado de x."
- "A variação ocorrida é que $A=B^2$".
- "$y = x^2$".
- "$x = y^2$ ou $y = \sqrt{x}$ "
- (1,0 ; 1,0) (2,0 ; 4,0) (3,0 ; 9,0).

As duplas que se expressaram em linguagem natural também o fizeram nas questões correspondentes anteriores; entretanto, apresentaram mais dificuldades em acertar esta do que as antecedentes. Este fato pode ser decorrência de se tratar agora de uma função quadrática e o relacionamento numérico associados aos pontos é mais difícil de distinguir que no caso dos exemplos de função afim trabalhados anteriormente.

Fernando e André marcaram que $x = y^2$, cometendo o mesmo tipo de erro das atividades 1 e 2 , ao responderem às questões que pediam para escrever a expressão algébrica $y = 2x$ e $y = -2x$, fizeram-na respectivamente:

$x = 2y$ e $x = -2y$. Não previmos que este erro ocorresse nesta questão, porque já havíamos comentado e discutido com eles este fato, no final da sessão anterior.

A dupla Kátia e Fernanda, assim como nas atividades anteriores, observou como a variação ocorria de maneira proporcional: “y variou o quadrado de x”. Rose e Dani optaram por escrever esta relação em forma de par ordenado, (x, x^2), assim como fizeram em determinadas questões das atividades anteriores.

b) Se deslocar o ponto para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Todas as duplas responderam que o valor fica positivo. Alguns responderam que B fica positivo, outros que y fica positivo. Este fato é idêntico ao ocorrido quando trabalharam com a função $y = -2x$.

c)Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor e complete a tabela:

x		-1		2			
y			-9			9	

Conforme havíamos previsto, os alunos não tiveram dificuldades em verificar que para $y = -9$, não havia valor correspondente para x. Porém, vale observar que duas duplas colocaram na tabela o símbolo $\emptyset$. Outras duas duplas colocaram $\notin$. Quando os indagamos sobre o significado destes símbolos, responderam que indicava “não existe”.

Para o valor de $y = 9$, apenas as duplas Kátia-Fernanda e Rose-Dani, colocaram $x = +3$ e $x = -3$, conforme previmos que tal fato pudesse ocorrer.

d) Existe algum valor de x que corresponde a valores negativos de y?

Apenas a dupla Márcia e Thaís deixou esta pergunta sem resposta, as demais responderam não. Isso era por nós esperado, porque os alunos observavam que, ao movimentar o cursor no eixo das abscissas, o ponto correspondente do eixo das ordenadas, não se deslocava para a região dos valores negativos. O fato daquela dupla não ter respondido à questão nos surpreendeu, uma vez que na questão b) responderam que, ao se deslocar o ponto para a região do eixo correspondente à valores negativos de x, os correspondentes valores de y, são positivos.

e) Encontre uma expressão algébrica que relaciona os valores de x e de y.

Três duplas escreveram a expressão $x = y^2$. Uma delas foi Fernando e André, que na questão a) expressou a variação de A com B, por $A = B^2$. A dupla Márcia e Thaís também respondeu $x = y^2$, tanto nesta questão como na a). Outra dupla, Dani e Rose, respondeu $x= y^2$ ou $y = \sqrt{x}$. Este erro não foi por nós previsto nas análises preliminares. As demais duplas escreveram corretamente $y = x^2$.

Avaliamos que o fato de o coeficiente de x^2 ser a unidade e os demais coeficientes serem zero, possibilitou aqueles que conseguiram estabelecer a expressão algébrica, conforme já havíamos previsto.

f) Anote algumas coordenadas de P e expresse algébricamente a relação que existe entre elas. g) Que relação existe entre as coordenadas de P e as de A e B?

Na questão f) a maioria das duplas anotou duas ou três coordenadas do ponto P, sendo que apenas quatro delas expressaram a relação existente entre elas. Destas, três expressaram, de maneira incorreta, ao escreverem $x = y^2$. Isso possivelmente ocorreu pelo fato de terem errado a questão anterior e).

Apenas três duplas responderam corretamente à questão g), ou seja, que a abscissa de P, corresponde ao valor associado a A e a ordenada corresponde ao valor associado a B. Algumas duplas não acertaram esta questão e haviam respondido, de maneira correta, à questão correspondente nas atividades anteriores. Esse erro pode ter ocorrido devido a uma maior complexidade do relacionamento dos valores envolvidos.

h) Marque o “rasto” de P no plano xoy.

i) Se marcarmos dois pontos distintos quaisquer do “rasto” e traçarmos a reta que os une, os pontos desta reta coincidirão com os pontos do “rasto”?

As duplas Fernando- André e Márcia- Thaís afirmaram que bastavam dois pontos para se obter o gráfico. As demais verificaram que o “rasto” correspondia a uma parábola, portanto não coincidiria com os pontos da reta. Destacamos que as duplas que erraram, foram as mesmas que haviam errado o relacionamento entre x e y, escrevendo $x = y^2$.

j) Compare o gráfico desta atividade com os das atividades anteriores e analise as diferenças entre eles. Por que você acha que ocorreram estas diferenças?

A maioria respondeu que este gráfico é uma parábola e os anteriores eram retas. Porém, conforme havíamos previsto, apresentaram dificuldades em indicar o motivo desta diferença. Apenas a dupla Kátia e Fernanda respondeu que o gráfico é uma parábola porque representa uma função do segundo grau e os anteriores são retas porque correspondem a funções do primeiro grau.

Posteriormente, entrevistamos os alunos que erraram esta questão. Perguntamos a eles o motivo dos gráficos anteriores serem retas e este ser uma parábola. A maioria respondeu que os que eram retas correspondiam a funções do primeiro grau e este, que era uma parábola, correspondia a uma função do segundo grau. Isso nos levou a concluir que estes alunos apresentavam dificuldades em escrever em linguagem natural uma questão matemática.

Os alunos realizaram de maneira satisfatória as conversões entre os diferentes registros de representação de uma função quadrática. Assim como nas atividades anteriores, tiveram a oportunidade de responder questões que lhes propiciassem observar o relacionamento e da dependência entre as variáveis x e y. Puderam também verificar que a valores negativos de y não correspondem valores de x. Conforme esperávamos, os alunos tiveram uma melhor compreensão da imagem de uma função.

Atividade 5

Na atividade 5, as questões apresentadas e os objetivos propostos são análogos aos da atividade 4. A função quadrática a ser trabalhada é $y = - x^2$, diferindo apenas em relação ao sinal do coeficiente de x^2. Portanto, a análise feita restringe-se apenas a alguns fatos a serem acrescentados e que não foram detectados na atividade 4.

Para completar a tabela de valores, os alunos não tiveram dificuldades em verificar que para $y = 9$, não havia nenhum valor correspondente para x. Para $y = -9$, apenas duas duplas colocaram $x=3$ e $x = -3$. Foram as mesmas duplas que já haviam acertado na questão anterior para $y = 9$. Os demais responderam apenas $x = 3$.

Ao escreverem a expressão algébrica, as mesmas duplas que erraram a anterior, também erraram esta, ao escreverem: $x = - y^2$. As demais não tiveram dificuldades em expressar $y = - x^2$, conforme havíamos previsto. Vale destacar que duas duplas anotaram $y = - (x^2)$.

Para comparar o gráfico desta atividade com o da anterior, a maioria verificou que aquele apresentava uma parábola com a concavidade voltada para cima e nesta a parábola tem a concavidade para baixo. Porém, assim como na atividade anterior, apenas duas duplas responderam que o motivo da diferença era o sinal do coeficiente de x^2. A maioria das duplas ainda observou que a imagem da função corresponde a valores negativos de y.

Ao final desta sessão, discutimos com os alunos as respostas dadas por eles e a participação de todos foi boa. Comentamos os erros observados durante a sessão. Neste momento de diálogo, institucionalizamos alguns dos conhecimentos propostos, como por exemplo: as três representações trabalhadas (gráfica, numérica e algébrica) representam a mesma função; as variáveis da função quadrática, assim como nas demais, apresentam uma dependência, sendo x a variável independente e y a dependente; o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, etc.

3.3.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES DO GRUPO 2

Neste grupo de atividades formulamos questões referentes à situações do cotidiano que propiciasse conversões entre diferentes registros de representação de função, tal como, do registro em linguagem natural para o numérico, deste para o algébrico e finalmente para o gráfico.

A maioria das duplas não apresentou dificuldades em interpretar e responder às questões desta atividade. Entretanto, assim como nas atividades anteriores, percebemos por meio dos questionamentos dos alunos, que alguns deles ainda apresentavam insegurança nas questões que deveriam ser respondidas em linguagem natural, sem cálculos e fórmulas.

<u>Atividade 1</u>

As questões desta atividade, foram elaboradas com base no texto:

“Uma casa com diversos cômodos foi construída sob um novo conceito arquitetônico: cada cômodo da casa é quadrado, possuindo tamanhos diferentes. O proprietário resolveu colocar cerâmica em todos os cômodos e rodapé feito com tiras de madeira.”

a) Se um quarto mede 4m de lado, qual o comprimento do rodapé deste cômodo?

b) Se na sala formam utilizados 54m de rodapé, quanto mede cada lado desta sala?

A maioria das duplas efetuou os cálculos 4.4 = 16 para a questão a) e 54/4 = 13,5 para a b). Apenas a dupla Fernando e André, inicialmente não conseguiu calcular o que se pedia. Achamos conveniente sugerir que desenhassem um cômodo quadrado e colocar a medida de cada lado. Deste modo, conseguiram responder às duas questões.

Em relação à questão b), o fato de a medida de 54 m do rodapé não ser um número divisível por 4, não acarretou dificuldade na resolução, conforme havíamos previsto.

A dupla Kátia e Fernanda escreveu a expressão $f(x) = 4x$, e para realizar os cálculos na questão a), utilizou a expressão algébrica, substituindo os valores numéricos: $f(4) = 4.4 = 16$. Na questão b), também realizou o mesmo procedimento, ao escrever $4x = 54$ $x = 54/4 = 13{,}5$ cm. Não havíamos previsto essa estratégia de resolução em nossas análises prévias. Essa dupla, nas questões do grupo anterior, já havia utilizado a notação $f(x)$ em suas respostas.

A partir da constatação da dependência entre as duas medidas, os alunos identificaram com facilidade os cálculos que deveriam ser feitos para preencher a seguinte tabela:

Medida do lado do cômodo	Comprimento do rodapé
L	R
2	
3	
4	
	20
7,3	
8,5	
10	
	41,2
11	

Todas as duplas completaram a tabela de valores e apenas as alunas Márcia e Thaís tiveram problemas com os números decimais apresentados. Ao efetuarem a divisão de 41,2 por 4, essa dupla argumentou que o número 41,2 não era divisível por 4 e que não seria possível encontrar a medida do lado do cômodo. Perguntamos às alunas se não pode haver um cômodo com medidas não inteiras, como por exemplo 3,5cm. Desse modo compreenderam que no caso de o perímetro não ser divisível por quatro, a medida do lado do cômodo não é um número inteiro. É interessante observar que essa dupla não apresentou dificuldade na questão anterior em que o perímetro não era divisível por quatro, porém, era um número inteiro. Provavelmente, na questão c), o fato de o perímetro 41,2 cm além de não ser divisível por quatro, é um número decimal, esses dois fatores tenha contribuído para dificultar que essa dupla realizasse a tarefa proposta. Em nossas análises preliminares, havíamos previsto que esse fato pudesse acontecer.

Nenhum alunos questionou o fato de que na tabela ora os números apresentados referem-se ao lado do cômodo e ora ao comprimento do rodapé. No caso em que era necessário calcular a maedida do lado do cômodo a partir do perímetro, os alunos realizaram sem dificuldade a operação inversa. Talvez o que propiciou esta resolução, seja o fato de nas atividades anteriores já terem preenchido facilmente as tabelas, ao ser dado o valor de y ao invés do de x, favorecidos pela dinâmica do Cabri-Géomètre.

Ao responderem essas primeiras questões propostas, os alunos puderam realizar a conversão do registro em linguagem natural para o numérico. Nas questões seguintes terão oportunidade de convertem este registro para o algébrico.

> d) Para cada medida do lado do cômodo (valores da 1ª coluna), obtém-se um valor correspondente ao comprimento do rodapé (2ª coluna). Escreva como você obteve cada valor da tabela.
> e) Em geral, você pode representar a medida de um lado qualquer do cômodo por L e do comprimento do rodapé por R. Expresse uma relação entre estas duas medidas.

Conforme previmos, a maioria das duplas, verificou que para qualquer valor da medida do lado do cômodo o comprimento do rodapé é quatro vezes esta medida. A dupla Fernando e André complementou que a medida do lado do cômodo é a medida do rodapé dividido por 4. As alunas Márcia e Thaís responderam tanto à questão d) como à e) apenas escrevendo a expressão R = 4L. Deste modo, não responderam a questão d) em linguagem natural.

Ao responderem à questão e), os alunos puderam realizar a conversão do registro numérico para o algébrico.

Com o intuito de favorecer aos alunos a compreensão de variáveis dependentes e independentes, perguntamos quais das medidas depende da outra e como é esta dependência. Observamos que eles não encontraram dificuldades em responder que a medida do comprimento do rodapé depende da medida do lado do cômodo. Apesar de se tratar de uma questão que apresenta fatos do cotidiano a serem analisados, é possível que a escolha da variável dependente também se deva ao fato destas medidas figurarem na primeira coluna da tabela. Com esta questão puderam identificar quais eram a variável dependente e a independente.

A fim de que os alunos realizassem a construção do gráfico, solicitamos que marcassem em uma folha de papel quadriculado os pares ordenados da tabela anterior. Além disso questionamos se os pontos obtidos podem ser unidos ou não. Na conversão do registro algébrico para o gráfico observamos, pelo desempenho dos alunos, que compreenderam esta construção e que a maioria escolheu de forma correta os eixos que corresponde ao comprimento do cômodo (L) e à medida do rodapé (R). Conforme havíamos previsto, algumas duplas não colocaram uma escala correta para a construção do gráfico. Apresentamos, como exemplo, a produção de uma das duplas:

Constatamos, segundo previmos anteriormente, que os números decimais são fator de dificuldade para a construção gráfica. Observamos que a escala escolhida para o eixo das abscissas não representou dificuldade. O fato destes valores na tabela variarem apenas de 2 a 11, facilitou a escolha de uma escala 1:1. Já no eixo das ordenadas, essa dupla, ao colocar os valores inteiros da tabela que variam de quatro em quatro, não tiveram dificuldade em colocar uma escala 2:4. Entretanto, a partir do número 29,2 que figura na tabela, não observaram mais a escala escolhida para a construção do gráfico.

Todas as duplas responderam que podiam unir os pontos do gráfico. Porém, como havíamos previsto, os alunos não conseguiram justificar satisfatoriamente suas respostas. Algumas duplas que observaram que os pontos estavam alinhados, concluíram que pertenciam a uma reta e responderam que podiam unir os pontos. A dupla Márcia e Thaís respondeu que podia unir os pontos porque eles eram “sucessivos”. Outra dupla, Kátia e Fernanda, concluiu que a união era possível, visto que eles eram “proporcionais”. Esta confusão, que já era prevista por nós, ocorreu pelo fato de possíveis falhas no estudo do domínio da função, e envolve a questão da variável ser contínua ou discreta.

Finalmente, propusemos a seguinte questão:

h) Unindo os pontos, que tipo de gráfico você obtém? É possível obter este mesmo gráfico utilizando menos pontos? Justifique sua resposta?

Como os alunos consideraram na questão anterior que podiam unir os pontos e o resultado é uma reta, neste caso, verificaram que utilizando menos pontos seria possível a conversão do registro algébrico para o gráfico. Kátia e Fernanda construíram corretamente o gráfico e concluíram que bastavam dois pontos para se construir a reta.

Conforme previmos anteriormente, todas as duplas traçaram a parte da reta correspondente ao primeiro quadrante, possivelmente devido aos números da tabela serem positivos. Este fato, que se refere ao domínio da função envolvida, foi discutido com os alunos ao término da sessão.

Atividade 2

A estrutura da atividade 2 é análoga à atividade 1, porém as questões referem-se a cálculos da área do cômodo anteriormente citado. Por este motivo, achamos conveniente realizar uma análise global da atividade.

Os alunos não tiveram dificuldades para responder as questões iniciais que se referem ao cálculo da área de um cômodo de formato quadrado, dada a medida do lado e vice-versa. Vale observar que a mesma dupla, Kátia e Fernanda, que deu a notação f(x) anteriormente, nesta atividade também anotou $f(x) = x^2$. As demais responderam utilizando a fórmula: $A= L^2$.

Ao responderem a questão que pedia para escrever como foram obtidos os valores da tabela, observamos que a maioria das duplas escreveu: "elevei o lado ao quadrado" ou "multipliquei o valor do lado por ele mesmo". A dupla Carol e Lídia escreveu: "lado^2 = área".

Conforme havíamos previsto, ao converter do registro algébrico para o gráfico, a maioria das duplas não acertou, já que não levou em conta uma escala correta, assim como na atividade 1. Como apenas uma dupla acertou as escalas colocadas nos gráficos, achamos conveniente fazer uma intervenção em relação a estes erros. Assim como na atividade anterior, todas as duplas construíram apenas a parte do gráfico na região correspondente ao primeiro quadrante. Provavelmente, pelo fato de os números da tabela serem positivos.

Ao final desta sessão discutimos com os alunos suas respostas e houve boa participação de todos. Enfatizamos a noção de domínio da função e relacionamos este conceito com a construção do registro gráfico e os possíveis valores da tabela. Institucionalizamos que o domínio de uma função é o "maior" conjunto dos valores que a variável independente pode assumir. Também reafirmamos que a tabela, o gráfico e a expressão algébrica representam a mesma função. Além disso, discutimos a existência da dependência entre as variáveis, sendo o comprimento do lado do cômodo a variável independente e a medida do rodapé e a área, as variáveis dependentes, no caso das atividades 1 e 2 respectivamente.

3.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES DO GRUPO 3

Nesta atividade os alunos eram solicitados a abrir três arquivos do Cabri-Géomètre que apresentavam gráficos de função afim. Deveriam relacionar o gráfico de cada arquivo a uma das cinco expressões algébricas abaixo relacionadas:

a) y = - 4x b) y = -2x c) y = 2x d) y = x+1 e) y = 4x

De um modo geral, nesta atividade, os alunos não tiveram dificuldades em relacionar as expressões algébricas com os gráficos correspondentes. Conforme havíamos previsto, ao abrirem o arquivo 6 cujo gráfico corresponde à expressão y = - 4x, a maioria das duplas, optou por uma análise pontual, ao verificar se as coordenadas de um ponto da reta satisfaziam uma das expressões algébricas. Apenas duas duplas optaram por uma análise global, que discrimina as variáveis visuais pertinentes da expressão algébrica e relaciona-as com o coeficiente linear e o angular da reta. Constatamos que estes alunos inicialmente observaram a inclinação da reta e relacionaram-a com um coeficiente angular negativo. Posteriormente para decidir entre y = -4x e y = -2x, apelaram para a análise pontual substituindo as coordenadas de um ponto nas duas expressões algébricas.

Conforme previmos anteriormente, a maioria não realizou uma interpretação global e, por este motivo, achamos conveniente intervir junto às essas duplas que analisassem a inclinação da reta com o coeficiente angular e o ponto onde cortava o eixo das ordenadas com o coeficiente linear, a fim de relacionar com a expressão algébrica correspondente.

Ao analisarem o segundo gráfico no próximo arquivo, que corresponde à expressão algébrica y = 4x, os alunos relacionaram a inclinação da reta com o coeficiente angular positivo e observaram que a reta passa pela origem. Logo, excluíram a expressão y = x+1. Para optarem entre y = 4x e y = 2x, procederam como as duas duplas o fizeram anteriormente, ou seja, apelaram para a substituição das coordenadas de um ponto em uma das expressões.

Com relação ao terceiro gráfico, que corresponde à expressão y = x+1, os alunos não tiveram dificuldade em fazer uma análise global, por ser o único gráfico cuja reta não passa pela origem.

De maneira geral, os alunos conseguiram realizar essa articulação entre os registros gráficos e algébricos por meio de uma interpretação global, discriminando as variáveis visuais pertinentes da função. Provavelmente perceberam que, em alguns aspectos, podem fazer a articulação entre esse dois registros sem ter de substituir as coordenadas de um ponto da reta na expressão algébrica, o que pode facilitar a conversão. Isto verificamos pelos próprios comentários e dos alunos no final da sessão:

"O coeficiente de x é positivo por causa da inclinação da reta."

"A reta passa pela origem, então a expressão que corresponde a ela só tem o termo com x."

"Este gráfico corta o eixo y no 1, então a expressão tem de ter o termo mais 1."

Na última atividade deste grupo, os alunos eram solicitados a explicarem os critérios adotados para realizarem a conversão. A maioria deles não teve dificuldades em relatar como relacionaram cada um dos gráficos com a sua expressão algébrica. Destacaram o uso das variáveis visuais pertinentes da função.

3.3.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES DO GRUPO 4

Neste grupo apresentamos três expressões algébricas, quatro tabelas, quatro textos e quatro gráficos. Os alunos deveriam relacionar cada expressão algébrica dada, com uma tabela, com um texto e com um gráfico.

Embora seja a primeira vez que aparece nessa seqüência esse tipo de proposta que inclui também um texto para ser relacionado com outros registros, observamos no desenvolver das atividades, que os alunos compreenderam, de um modo geral, o que era solicitado.

As duplas optaram em relacionar cada expressão algébrica dada, inicialmente com a tabela, a seguir com o texto e por último com o gráfico, desenvolvendo a atividade de acordo com a ordem por nós colocada no enunciado da questão.

Conforme previmos, os alunos não tiveram dificuldades em relacionar as expressões algébricas com as respectivas tabelas, visto que este procedimento já havia sido realizado nas atividades anteriores. Substituíram cada valor atribuído a x de cada tabela na expressão algébrica e por meio de cálculos, verificavam se o valor encontrado correspondia ao de f(x) da tabela.

(1)

x	f(x)
-15	17
60	-58
11	-9
2	0

(2)

x	f(x)
1	5
2.5	3
-5	40
300	-575

(3)

x	f(x)
7	17
-10	-17
200	403
5.5	14

(4)

x	f(x)
7	28
-10	130
25	550
1	-2

Conquanto na expressão algébrica figura y e na tabela f(x), esta duplicidade de notação não representou problemas aos alunos.

Constatamos que apenas a dupla Fernando e André, não observou que era necessário substituir todos os valores de x da tabela na expressão algébrica, visto que, alguns destes poderiam não satisfaze-la. Esta dupla associou a expressão y = 2x+3 à tabela (2), em que apenas os valores da primeira linha satisfazem tal expressão. Não fizeram os cálculos com os dados da tabela (3), que era a correspondente. Pelo fato de a questão apresentar quatro tabelas a serem associadas com três expressões algébricas, excluíram a tabela (3), ao invés da (2). Esta ocorrência havia sido prevista em nossas análises preliminares.

Outra dupla apresentou dúvidas sobre o texto que abordava a área do retângulo e cuja expressão a ele associada é y = x(x-3). Não conseguiam relacionar os dados apresentados com uma das expressões algébricas. Possivelmente isto ocorreu pelo fato de nenhuma expressão algébrica apresentar explicitamente x^2. Sugerimos que fizessem o desenho de um retângulo e escrevessem a largura e o comprimento de acordo com o enunciado do texto. Após algumas tentativas, os alunos conseguiram fazer a relação correta.

Observamos que o tempo maior gasto pelos alunos foi em relacionar a expressão com o texto. Isto não nos surpreendeu, pelo fato de não estarem habituados a este tipo de atividade. Três duplas nos questionaram se os textos (1) e (4), não correspondiam a mesma expressão algébrica y = 2x+3.

(1) Paulo foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 2,00 pelo seu serviço, mais R$ 3,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que o seu vizinho lhe pagou, quando retornou, foi em função do número de horas trabalhadas.

(4) Os avós de Maria moram em S.Paulo e ela em Araçatuba. Gostam muito quando a neta lhes liga. O custo do telefonema é em função de quanto tempo se fala. Maria liga após a meia noite para a ligação ser mais barata: é fixada uma taxa de R$ 3,00, mais R$ 2,00 por minuto de ligação.

Pedimos para eles analisarem nos dados dos textos, quais poderiam ser os considerados valores de x e de y e qual era o valor constante. Deste modo conseguiram verificar a diferença entre os dois textos e relacionar corretamente com a expressão algébrica correspondente.

Para relacionar a expressão algébrica com o gráfico, a maioria não fez perguntas. Possivelmente, utilizaram os conhecimentos das atividades desenvolvidas no grupo 3, que envolve a discriminação das variáveis visuais pertinentes da função. Apenas uma dupla não conseguiu relacionar a parábola com a expressão y = x (x-3). Ao serem indagados como se faria a multiplicação na expressão, os alunos puderam observar que, pelo fato de resultar x^2, o gráfico correspondente é a parábola. Havíamos previsto que a forma fatorada da expressão algébrica poderia facilitar o relacionamento com o texto, porém talvez dificultasse esta articulação com o gráfico.

Todos os alunos conseguiram resolver de maneira satisfatória esta atividade e, verificamos, pelas argumentações apresentadas nas discussões, que a maioria constatou que uma função além de ser representada por uma expressão algébrica, gráfico e tabela numérica, também pode ser representada por um texto. Constataram também que a representação algébrica de uma função pode ser denotada por $y = f(x)$. Percebemos que nessa sessão os alunos resolviam as questões com mais facilidade, e discutiam com mais convicção, tanto entre eles, como também quando a nós se dirigiam.

3.3.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES DO GRUPO 5

A proposta deste grupo de atividades é relacionar quatro das cinco expressões algébricas, com quatro textos, em seguida construir os respectivos gráficos e então relacionar estes registros anteriores, com quatro tabelas dadas. O que diferencia esse grupo do anterior é que naquele os alunos devem relacionar o registro algébrico de uma função com outros três registros (numérico, linguagem natural e gráfico) e neste devem articular os quatro registros concomitantemente.

A maioria dos alunos relacionou sem dificuldades as expressões algébricas com os textos. Isto pode ter sido facilitado pelo fato de já terem realizado os mesmos procedimentos nas atividades do grupo 4, conforme já havíamos previsto anteriormente. Apenas uma dupla, ao analisar o texto 1, questionou se os quilômetros rodados correspondiam a variável x ou y. Pedimos para ler novamente, e tentar verificar de que variação resulta o preço da corrida. Após isto, também sugerimos que analisassem o valor da bandeirada e do quilometro rodado. Observamos que a dupla conseguiu relacionar de maneira correta o texto com a expressão algébrica.

Ao analisarem os dados do texto 2, observamos que alguns alunos comentaram que poderiam utilizar os mesmos procedimentos das aulas de Física para relacionar temperaturas de diferentes escalas. Observamos que duas duplas deixaram este texto para ser relacionado no final, por exclusão, confirmando nossas previsões.

Na questão 2, para esboçarem os gráficos, os alunos comentaram que nos três casos, não eram considerados os valores negativos de x, por causa dos dados dos textos correspondentes. Isto já havíamos discutido na sessão referente às atividades do grupo 2. Não teceram nenhum comentário sobre as restrições dos valores de x nas expressões algébricas. Não constatamos, entretanto, que fizessem referências ao uso da palavra “domínio “da função.

Das seis duplas analisadas, apenas uma, Fernando e André, apresentou dificuldades mais sérias na construção dos gráficos. Indicamos a seguir algumas destas dificuldades.

Em relação à tabela (1), apresentada a seguir, a dupla relacionou-a com a expressão y = 5+2x ao invés de y = 5 - 2x.

Tabela (1)

x	y
0	5
2	1
1	3
2.5	0

Ao esboçar o gráfico, apresentou parte deste como sendo uma função decrescente. O fato de ter escolhido o registro algébrico de uma função crescente e esboçado o gráfico de uma decrescente, pode estar ligado a terem utilizado os dados da tabela e construído parte do gráfico corretamente. Porém, não marcaram o ponto (2,5 ; 0) no gráfico e o segento de reta traçado não cortou o eixo dos x, conforme indicamos a seguir:

Não discriminaram a variável visual –2, à inclinação da reta. Além disso, por não marcarem o ponto (2,5, 0) no gráfico, o segmento de reta traçado não cortou o eixo dos x, conforme colocamos a seguir:

Para construírem o último gráfico, que corresponde à tabela (4), a qual associaram corretamente a expressão algébrica y = 2 +5x e o texto (2), não acertaram a construção gráfica, por errarem a escala.

A dupla Paula e Marcos, acertou todo o grupo de atividade, com exceção da construção gráfica da parábola, visto que traçaram uma reta.

Nos surpreendeu o fato da dupla Kátia e Fernanda, que mesmos tendo acertado toda a atividade, levaram em conta também os valores negativos de x, em todas as construções gráficas. Em entrevista, elas alegaram não terem observado essa restrição no enunciado da questão e nem os dados do texto.

A dupla Dani e Rose, não cometeu nenhum erro em toda a atividade, observou inclusive que a tabela (4) por apresentar valores negativos de x, correspondia ao texto (2) por se tratar de escalas termométricas, já que nos demais não teria sentido atribuir valores negativos para x.

Ressaltamos que na questão 3, que solicita relacionar cada tabela com um texto, uma expressão algébrica e um gráfico, os alunos perguntaram se podiam primeiro relacionar a tabela de valores com a expressão algébrica, ao invés do texto, conforme a ordem apresentada na questão. Já havíamos previsto esta ocorrência, já que a ordem por nós apresentada foi provocativa, porque os alunos apresentam mais facilidade em relacionar expressão algébrica com texto do que tabela com expressão algébrica. Respondemos que realizassem conforme achassem conveniente e constatamos que a maioria dos alunos optou em substituir os valores de x de cada tabela nas expressões algébricas, encontrando o correspondente y.

No final das atividades, discutimos os resultados dessa sessão, bem como os conhecimentos anteriormente institucionalizados e que foram utilizados neste grupo de atividades. Reafirmamos que a expressão algébrica, a tabela de valores, o gráfico e o texto representam o mesmo objeto matemático função. Voltamos a dar ênfase à noção de domínio da função, e analisamos os erros por eles cometidos. Alguns alunos comentaram que foi produtivo terem participado deste trabalho e que possivelmente passaram a compreender melhor o conceito de função.

CAPITULO IV

CONCLUSÕES

Nosso trabalho teve como objetivo introduzir o conceito de função, com estudantes do segundo ano do ensino médio, que já haviam estudado este conteúdo na série anterior. Levamos em conta as dificuldades de ensino e aprendizagem deste conceito, tanto por meio de nossas observações, como pelas diversas investigações existentes na área da Educação Matemática. Isso nos levou a constatar que, para a maioria dos alunos a aquisição desse conceito é de difícil apreensão. Elaboramos e aplicamos uma seqüência de ensino, composta de cinco grupos de atividades, com o intuito de propiciar a estes alunos uma melhor compreensão do conceito de função. Essa seqüência fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática e tem por base a teoria de Duval, sobre os Registros de Representação Semiótica.

No capítulo anterior, analisamos os protocolos de doze estudantes, que participaram de todas as sessões, bem como os comentários e discussões ocorridos no desenvolvimento das atividades. Isso nos forneceu subsídios para levantar algumas conclusões que apresentaremos a seguir.

Podemos dizer que houve uma boa participação dos alunos, em todas as sessões realizadas. Observamos, logo no início das sessões, que o uso do software Cabri-Géométrè II, deixou-os motivados e empolgados. Esse fato foi constatado pelos seus comentários, ao dizerem que não imaginavam que pudessem estudar funções com o auxílio desse software. Ressaltaram que o estudo assim realizado, era mais interessante de como acontecera na série anterior. A dinâmica do software propiciou aos alunos uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. Isso observamos quando, no desenvolver das atividades, os alunos eram solicitados a deslocarem um ponto sobre o eixo dos x e observarem o que ocorria com o correspondente no eixo dos y. Puderam verificar que o valor associado a este ponto variava e dependia do valor associado ao ponto do eixo dos x.

Verificamos que o uso do software propiciou aos alunos realizarem articulação entre diferentes registros de representação da função, ou seja, do gráfico para o numérico e deste para o algébrico. Desta maneira, puderam fazer as devidas conversões de um registro para outro, de maneira diferente daquelas que estavam habituados, a qual consideramos serem realizadas de um modo mecânico, ou seja, a partir de uma expressão algébrica fazem uma tabela com valores de x e de y e, por fim, constróem o gráfico da função com todos pontos da tabela utilizados. Alguns dos alunos ao serem anteriormente interrogados, demonstraram que para eles, o objeto matemático função era apenas o seu gráfico e, que a expressão algébrica e a tabela eram apenas as ferramentas necessárias para a construção do mesmo.

Concluímos que o software Cabri-Géomètre II, é uma ferramenta eficaz para introduzir o estudo de funções, pois possibilita a compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas, bem como a conversão entre os diferentes registros de representação da função. Também verificamos que o uso dessa ferramenta propiciou aos alunos verificar que as coordenadas de qualquer ponto do gráfico que representa a função satisfaz a expressão algébrica correspondente.

Constatamos que responder uma questão matemática, em linguagem natural, representa dificuldades para a maioria dos alunos. Muitos deles optaram por responder com expressões algébricas ou relações numéricas, tais questões. As respostas apresentadas em linguagem natural, em sua maioria carece de clareza e rigor.

As análises dos protocolos de determinadas atividades, que visavam a articulação entre os registros gráfico e algébrico da função por meio da discriminação das variáveis visuais pertinentes da função, nos levaram a concluir que os alunos perceberam que a interpretação gráfica global favorece esta articulação. Apesar de os alunos optarem inicialmente por uma interpretação pontual, após fazermos algumas intervenções, realizavam a articulação entre estes dois registros de maneira global. O fato de utilizarem este procedimento nas atividades seguintes, ao relacionarem o registro gráfico com o algébrico, nos levou a concluir que, assim como na pesquisa desenvolvida por Duval (1988), também possibilitamos a nossos alunos uma melhor articulação entre estes dois registros.

Verificamos em nosso trabalho que os alunos apresentam dificuldade nas construções gráficas. Este fato já era constatado em nossa prática docente e em algumas pesquisas relacionadas com o ensino e aprendizagem de função. Entretanto, das seis duplas analisadas, cinco delas apresentaram uma crescente melhora nestas construções, durante o desenrolar das atividades. Apenas uma dupla não conseguiu realizar de maneira satisfatória a devida conversão para o registro gráfico, inclusive nas últimas atividades. Isso nos leva a concluir que, de um modo geral, o nosso experimento contribuiu para melhorar esta deficiência dos estudantes.

Outro fato que queremos destacar é a compreensão por parte dos alunos do registro em linguagem natural. Conseguiram realizar uma articulação entre este registro e os demais, apesar de não estarem habituados a este tipo de atividade. Isto ocorreu, após algumas intervenções feitas por nós, que permitiu relacionarem os dados dos textos apresentados com as variáveis dependentes e independentes das funções.

Destacamos que os momentos de discussão que tivemos com os alunos no final de cada sessão, propiciaram as institucionalizações locais dos conceitos trabalhados, e representaram papel relevante para o bom desempenho de nosso trabalho.

Consideramos, de um modo geral, que os alunos que participaram de todas as sessões de nosso trabalho, apresentaram um desempenho que apontou para um crescimento na compreensão do conceito de função. Desta forma, acreditamos que a abordagem por nós proposta, que envolve a compreensão das variáveis dependentes e independentes, assim como o relacionamento entre elas e as devidas articulações entre os diferentes registros de representação de função, confirmou a nossa hipótese e respondeu à questão de pesquisa:

- “Os alunos do ensino médio conseguem compreender o conceito de função, rompendo com suas interpretações mecânicas, com a aplicação de uma seqüência didática, que envolva atividades nas quais são abordados aspectos funcionais entre as variáveis e que utilize um ambiente computacional como uma das ferramentas de ensino?”

Além das análises dos resultados dos protocolos, acrescentamos que continuamos em contato com estes alunos, que cursam o 3^0 ano, em classes que ministramos as aulas de Matemática. Desse modo, podemos observar que eles apresentam um desempenho melhor que os demais, no que se refere aos assuntos relacionados com o conceito de função.

Esperamos que com este nosso trabalho, que foi alicerçado em situações convenientemente articuladas e embasado em um quadro teórico adequado, possamos fornecer alguma contribuição na área do ensino da Matemática, no que se refere à introdução de um conceito que é considerado de difícil apreensão pelos alunos.

Queremos deixar como sugestão para futuros trabalhos, que sejam desenvolvidos estudos que envolvam a compreensão do domínio e imagem de função, noções estas que, por não estarem elencadas em nossas prioridades, não foram aprofundadas em nosso trabalho.

Finalmente, afirmamos que desenvolver este trabalho trouxe satisfação para nós como educadores. Os estudos que desenvolvemos em todo o processo de elaboração da pesquisa, nos levou a concluir que podemos ser também pesquisadores, e contribuir não só para o nosso crescimento em sala de aula, mas também fornecer alguns subsídios que possa contribuir para a melhoria do ensino de certos tópicos da Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: SEMT/ MEC. 1999.

COTRET, S. R. Une Etude Sur Les Representations Graphiques Du Mouvement Comme Moyen D´Acceder Au Concept de Fonction ou de Variable Dependante. *Journal pour les enseignants de mathematiques et de sciences physiques du premier cycle de l´enseignement secondaire, Petit X*, n.17, p.5 à 27, 1988.

DAMM, R. Registros de Representação. In: *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p.135-153.

DUVAL, R. *Aprendizagens intelectuais.* Caderno do curso ministrado na PUC-SP, Fevereiro/1999.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine*. Registres semiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang. S.A. Suisse: Editions scientifiques européennes, 1995. p.1-14.

DUVAL, R. Graphiques et Equations: L'Articullation de deux registres. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg. 1988. p. 235-253.

KIERAN, C. *Teaching and Learning of School Algebra*. Handbbok of Research on Mathematics Teaching and Learning. 1992. c.7.

KIERAN, C.; SFARD, A. Seeing Trought Symbols: The Case of Equivalent Expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Winter Edition, Center for Teaching/Learning of Mathematics, 1999. v. 21, n.1.

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. The Function Concept. New York, USA. Oxford University Press, 1972. p. 335-340.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-212.

SCHWARTZ , B.; DREYFUS, T. Transfer between function representations: A computational model. In: G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue (Eds.). *Proceedings of the International Conference for the Psycology of Mathematics Education*, Paris, France. G.R. Didactique, 1989. v.3, p.143 –150.

______________________ News actions upon old objects: a new ontological perspective on functions *Revista Educational in Mathematics*. v. 29, n.3, 1995. p.259-291.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino da Matemática: 2º grau*. São Paulo, SE/CENP. 3. ed., 1994.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do Conceito de Função. *Educação Matemática em Revista*. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ano 8, n.9 /10, p. 10 -16, 2001.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function. In: *Archive for History of Exact Sciences*. Editions Springer 1976. v. 16, n.1, p. 37-85.

ANEXOS

AS ATIVIDADES

GRUPO 1

ATIVIDADES DO GRUPO 1:

Uso do software Cabri-Géomètre

Atividade 1

a) Abra o Arquivo 1 no software Cabri – Géomètre.

b) Movimente o ponto A e compare a variação de A e de B.

Resp.

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

x	1,2			-1,2			
y			-10			9,6	

e) Que relação existe ente os valores de x e y ?

Resp.

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Resp.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algébricamente.

Resp.

h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

Resp.

i) Marque o rastro do ponto P no plano xoy.

j) Marque dois pontos distintos do rastro e trace a reta que passa por eles.

k) Todos os pontos do rastro pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao rastro?

Resp:

Atividade 2

a) Abra o Arquivo 2 no software Cabri – Géomètre.

b) Movimente o ponto A e compare a variação de A e de B.

Resp.

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

X	1,2			-1,2			
Y			-10			9,6	

e) Que relação existe ente os valores de x e y ?

Resp.

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Resp.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algébricamente.

Resp.

h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

Resp.

i) Marque o “rasto” do ponto P no plano xoy.

j) Marque dois pontos distintos do “rasto e trace a reta que passa por eles.

k) Todos os pontos do rastro pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao rastro?

Resp:

l) Comparando o gráfico construído nesta parte com o anterior, observamos que existe uma diferença em relação à inclinação das retas. Por que você acha que ocorreu esta mudança?

Resp.

Atividade 3

a) Abra o Arquivo 3 no software Cabri – Géomètre.

b) Movimente o ponto A e compare a variação de A e de B.

Resp.

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

X	1,2			-1,2			
Y			-10			9,6	

e) Que relação existe ente os valores de x e y ?

Resp.

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Resp.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algébricamente.

Resp.

h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

Resp.

i) Marque o “rastro” do ponto P no plano xoy.

j) Marque dois pontos distintos do “rasto” e trace a reta que passa por eles.

k) Todos os pontos do “rasto” pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao rastro?

Resp:

l) Comparando o gráfico construído nesta parte com o anterior, observamos que existe uma diferença em relação à inclinação das retas. Por que você acha que ocorreu esta mudança?

Resp.

Atividade 4

f) Abra o arquivo 4, movimente o ponto A e compare a variação entre A e B.

Resp.

g) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

h) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor e complete a tabela:

x		-1		2			
y			-9			9	

i) Existe algum valor de x que corresponde a valores negativos de y?

Resp:

j) Encontre uma expressão algébrica que relaciona os valores de x e de y.

Resp.

f) Anote algumas coordenadas de P e expresse algébricamente a relação entre elas.

Resp.

i) Que relação que existe entre as coordenadas de P e as de A e B?

Resp.

j) Marque o "rasto" de P no plano xoy.

i) Se marcarmos dois pontos distintos quaisquer do "rasto", e traçarmos a reta que os une, os pontos desta reta coincidirão com os pontos do rastro?

Resp.

j) Compare o gráfico desta atividade com os das atividades anteriores e analise as diferenças entre eles. Por que você acha que ocorreram estas diferenças?

Resp.

Atividade 5

a) Abra o arquivo 5, movimente o ponto A e compare a variação entre A e B.

Resp.

b) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

c) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor e complete a tabela:

x		-1		2			
y			-9			9	

d) Existe algum valor de x que corresponde a valores positivos de y?

Resp.

e) Encontre uma expressão algébrica que relaciona os valores de x e de y.

Resp.

f) Anote algumas coordenadas de P e expresse algébricamente a relação que existe entre elas.

Resp.

g) Que relação que existe entre as coordenadas de P e as de A e B?

Resp.

h) Marque o "rasto" de P no plano xoy.

i) Compare o gráfico desta atividade com o da atividade 4 e analise a diferença entre eles. Por que você acha que ocorreu esta diferença?

GRUPO 2

ATIVIDADES DO GRUPO 2:

Atividade 1

"Uma casa com diversos cômodos foi construída sob um novo conceito arquitetônico: cada cômodo da casa é quadrado, possuindo tamanhos diferentes. O proprietário resolveu colocar cerâmica em todos os cômodos e rodapé feito com tiras de madeira."

a) Se um quarto mede 4m de lado, qual o comprimento do rodapé deste cômodo?

Resp:

b) Se na sala formam utilizados 54m de rodapé, quanto mede cada lado desta sala?

Resp:

c) A tabela a seguir relaciona o valor da medida do lado com a medida de rodapé necessária para cada cômodo. Complete-a.

Medida do lado do cômodo	Comprimento do rodapé
L	R
2	
3	
4	
	20
7,3	
8,5	
10	
	41,2
11	

d) Para cada medida do lado do cômodo (valores da 1ª coluna), obtém-se um valor correspondente ao comprimento do rodapé (2ª coluna). Escreva como você obteve cada valor da tabela.

Resp:

e) Em geral, você pode representar a medida de um lado qualquer do cômodo por L e do comprimento do rodapé por R. Expresse uma relação entre estas duas medidas.

Resp:

f) Alguma destas medidas depende da outra? Como é esta dependência?

Resp:

g) Marque na folha quadriculada cada um dos pares da tabela anterior. Você pode unir esses pontos? Por que?

Resp:

h) Unindo os pontos, que tipo de gráfico você obtém? É possível obter este mesmo gráfico utilizando menos pontos? Justifique sua resposta?

Resp:

Atividade 2

"Para colocar cerâmica nos cômodos, é necessário conhecer sua área."

a) Se um cômodo tem 6m de lado, qual a sua área?

Resp:

b) Se a área de um quarto é de 64 m^2, qual a medida do seu lado?

Resp:

c) A tabela a seguir relaciona a medida dos lados de cada cômodo com a área da superfície a ser revestida por cerâmica. Complete-a.

Medida do lado	Área
L	A
2	
3	
	16
5	
7,3	
8,5	
10	
10,3	
	121

d) A cada medida do lado do cômodo (valores da 1ª coluna), obtém-se um valor correspondente da área de cerâmica utilizada (2ª coluna). Escreva como você obteve cada valor da tabela.

Resp:

e) Em geral, você pode representar a medida de um lado qualquer do cômodo por L, e da área por A. Expresse uma relação entre estas duas medidas.

Resp:

f) Alguma destas medidas depende da outra? Como é esta dependência?

Resp:

g) Marque na folha quadriculada cada um dos pares da tabela anterior. Você pode unir esses pontos? Por que?

Resp:

h) Unindo os pontos, que tipo de gráfico você obtém? É possível obter este mesmo gráfico utilizando menos pontos? Justifique sua resposta?

Resp:

i) Existe algum cômodo cuja medida do lado seja tal que seu perímetro e sua área são representados pelo mesmo número? Como este fato pode ser mostrado no gráfico?

Resp:

GRUPO 3

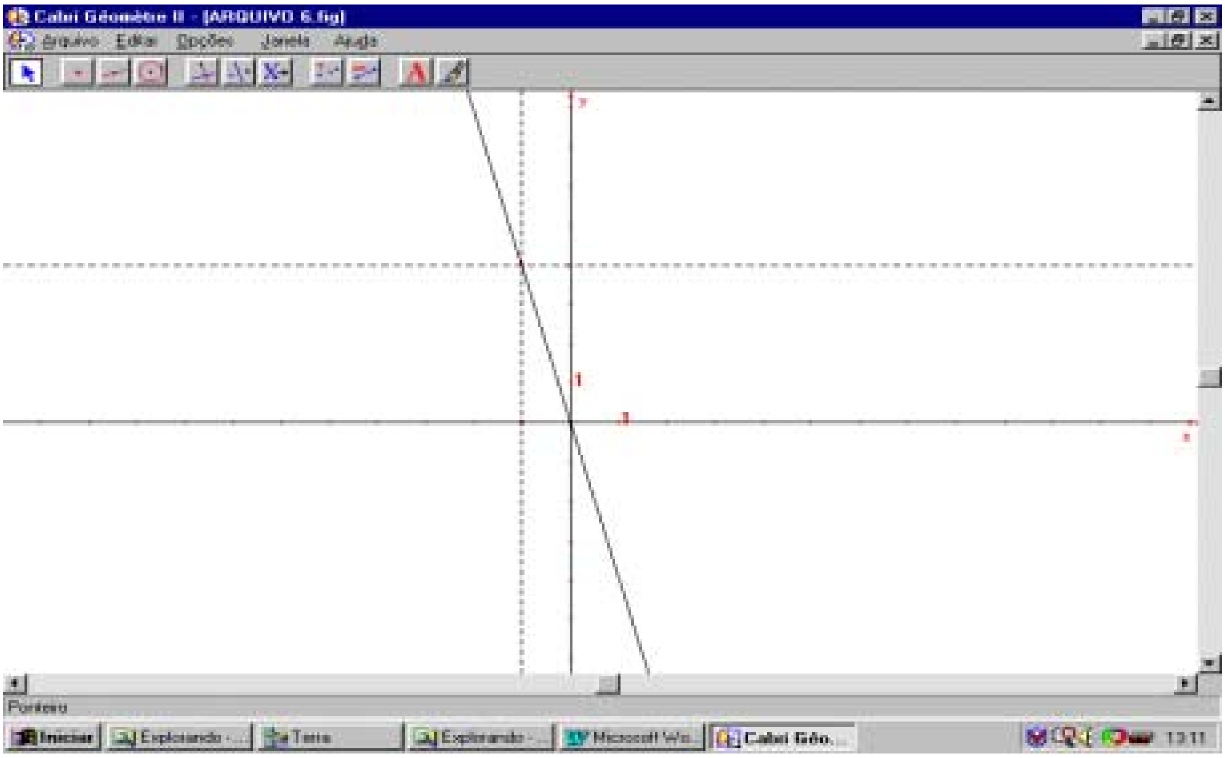
ATIVIDADES DO GRUPO 3

Atividade 1

Abra o ARQUIVO 6 do Cabri - Géomètre e relacione o gráfico apresentado, com uma das expressões algébricas abaixo relacionadas:

a) y = - 4x b) y = -2x c) y = 2x d) y = x+1 e) y = 4x

Resp:

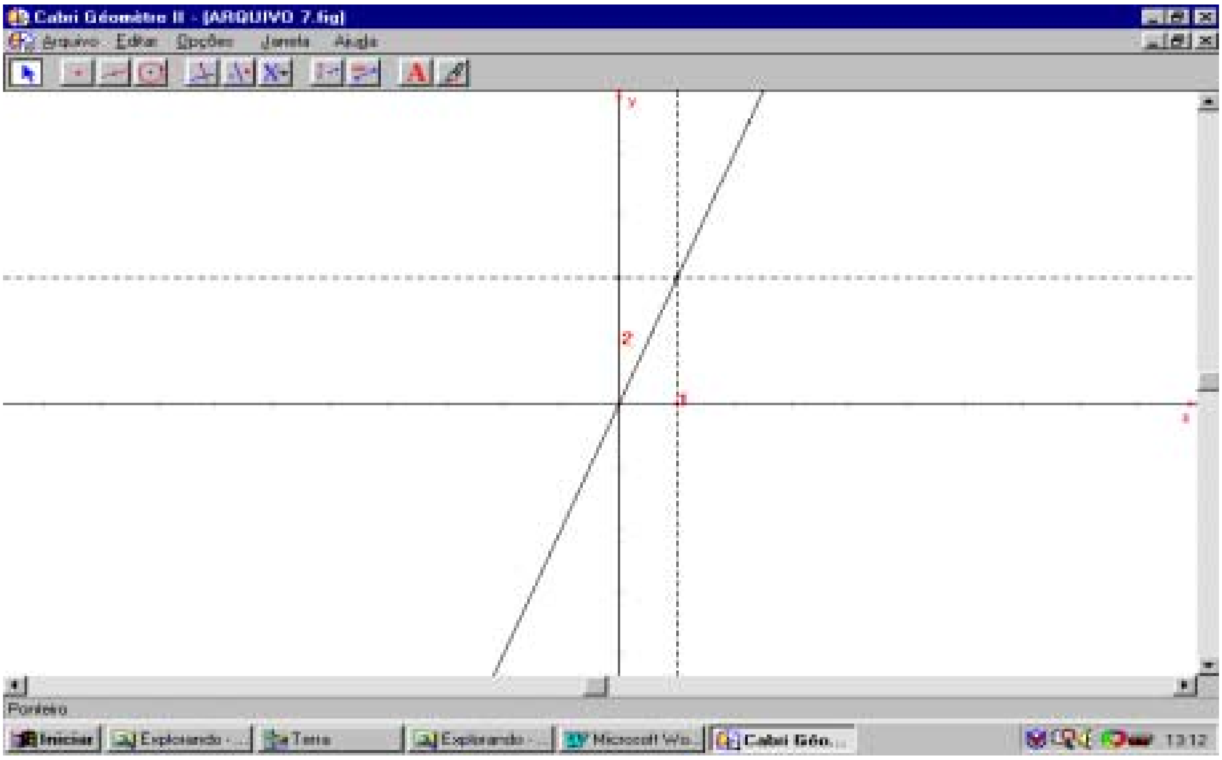


ATIVIDADE 2:

Abra o ARQUIVO 7 do Cabri – Géomètre e relacione o gráfico apresentado com uma das expressões algébricas abaixo relacionadas:

a) y = - 4x b) y = -2x c) y = 2x d) y = x+1 e) y = 4x

Resp:

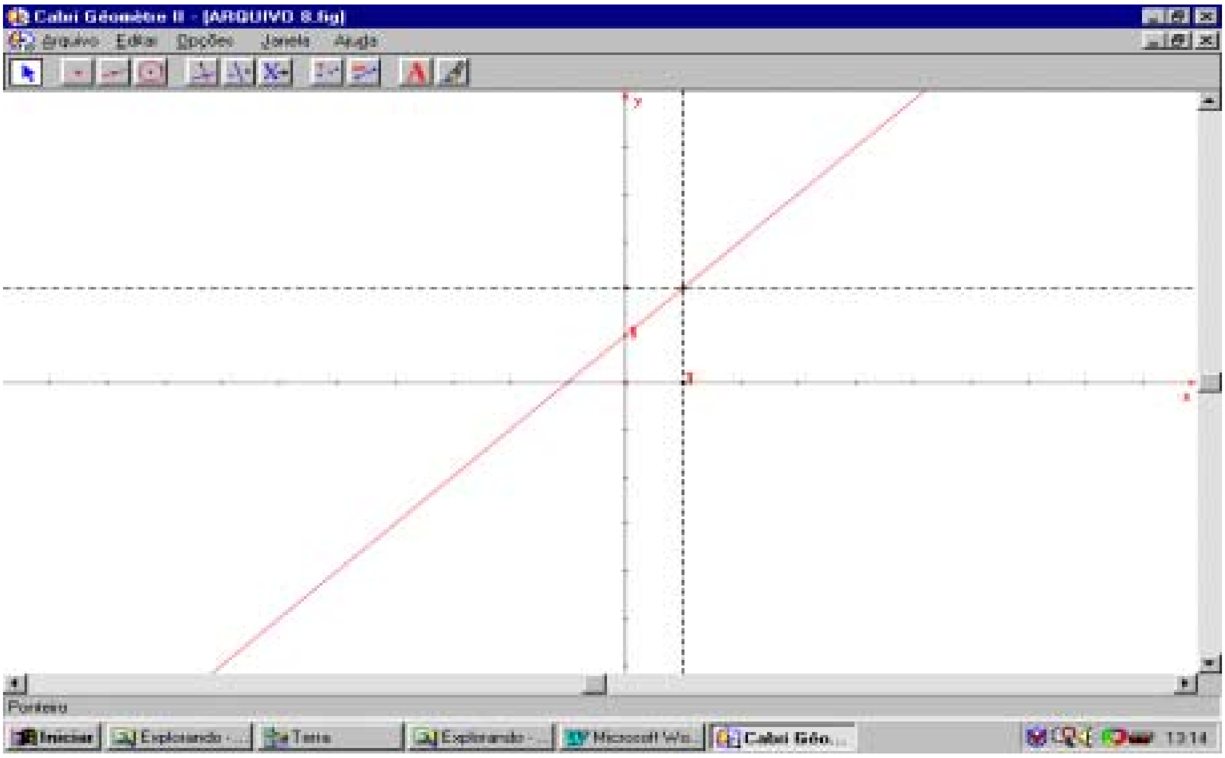


ATIVIDADE 3:

Abra o ARQUUIVO 8 do Cabri- Géomètre e relacione o gráfico apresentado com uma das expressões algébricas abaixo relacionadas:

a) $y = -4x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x$ d) $y = x+1$ e) $y = 4x$

Resp:



ATIVIDADE 4:

Explique os critérios que você adotou em cada uma das atividade anteriores deste grupo, para relacionar os gráficos com as respectivas expressões algébricas.

GRUPO 4

ATIVIDADE DO GRUPO 4

Indique o gráfico, a tabela e o texto que se relaciona com cada uma das expressões algébricas abaixo:

b) y = 2x + 3 $\begin{cases} Tabela: \\ Texto: \\ Gráfico: \end{cases}$

b) y = x(x-3) $\begin{cases} Tabela: \\ Texto: \\ Gráfico: \end{cases}$

c) y = 2 - x $\begin{cases} Tabela: \\ Texto: \\ Gráfico: \end{cases}$

TABELAS:

(1)

X	f(x)
-15	17
60	-58
11	-9
2	0

(2)

X	F(x)
1	5
2.5	3
-5	40
300	-575

(3)

x	f(x)
7	17
-10	-17
200	403
5.5	14

(4)

x	f(x)
7	28
-10	130
25	550
1	-2

TEXTOS:

(1) Paulo foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 2,00 pelo seu serviço, mais R$ 3,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que o seu vizinho lhe pagou quando retornou foi em função do número de horas trabalhadas.

(2) A altura da água em uma piscina é de 2 m. O nível de água está abaixando na razão de 1 metro por hora. A altura da água na piscina é em função do tempo.

(3) A área de um retângulo é função de seu comprimento e de sua largura. A largura de um terreno retangular é 3 km menor do que seu comprimento. A área é calculada multiplicando-se o comprimento pela largura.

(4) Os avós de Maria moram em S.Paulo e ela em Araçatuba. Gostam muito quando a neta lhes liga. O custo do telefonema é em função de quanto tempo se fala. Maria liga após a meia noite para a ligação ser mais barata: é fixada uma taxa de R$ 3,00, mais R$ 2,00 por minuto de ligação.

GRÁFICOS:

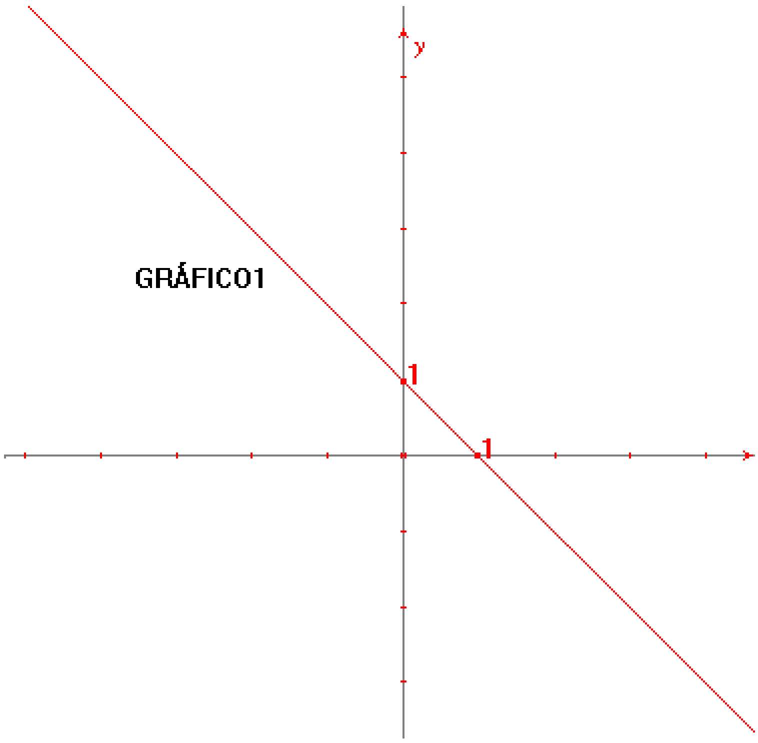


GRÁFICO1

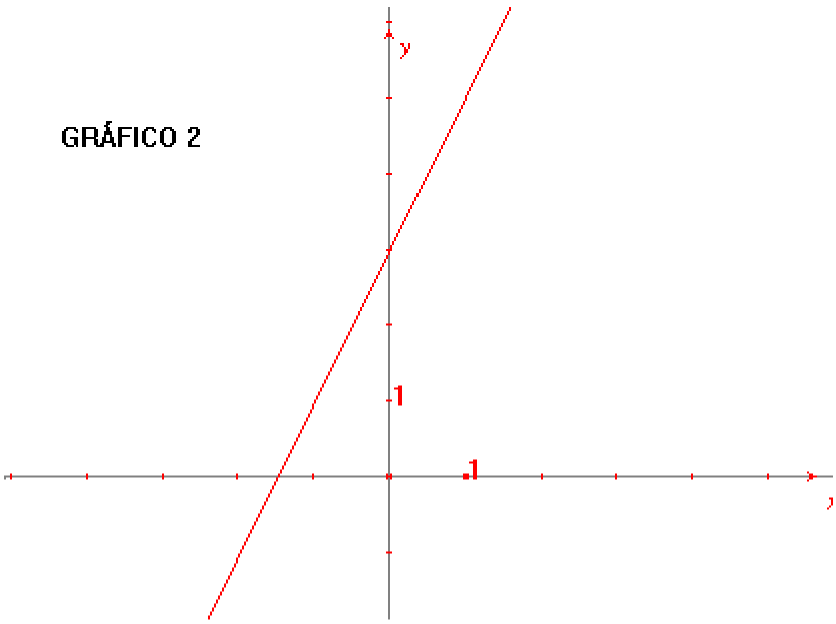


GRÁFICO 2

GRÁFICO 3

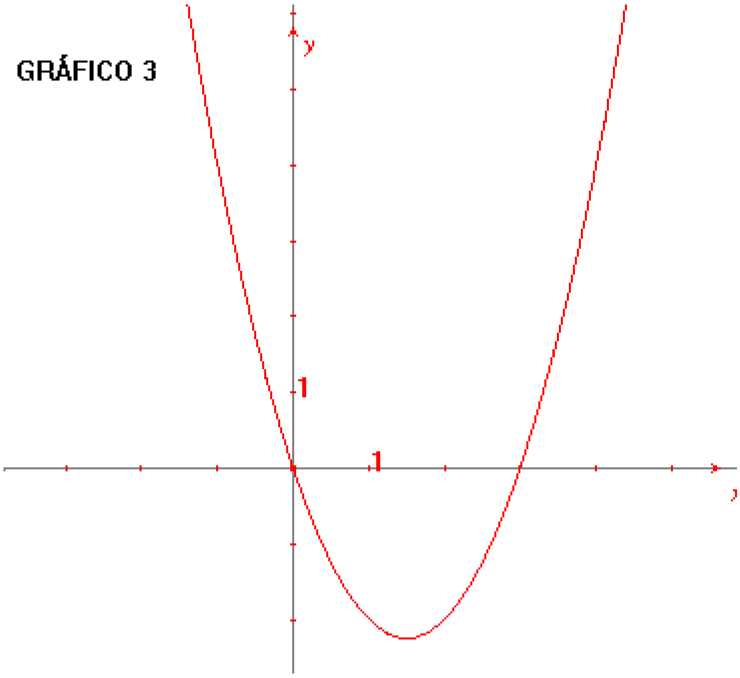
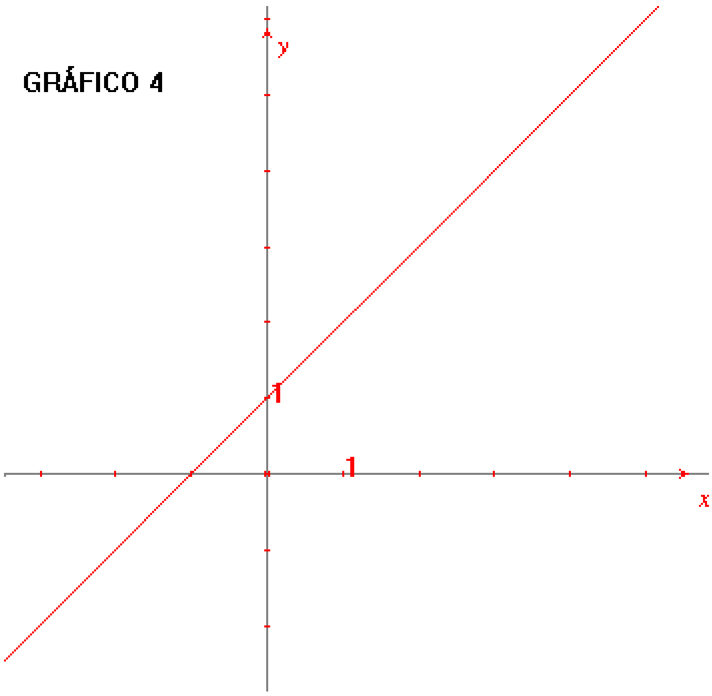


GRÁFICO 4



GRUPO 5

ATIVIDADES DO GRUPO 5

1) Relacione cada texto a seguir com uma das expressões algébricas:

$y = 2 - 5x$, $(x>0)$ $y = 2 + 5x$ $y = 5 + 2x$, $(x>0)$ $y = 5 - 2x$, $(x>0)$ $y = 5x\,(x+2)$, $(x>0)$

TEXTO 1 :

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada e uma parcela que depende da distância percorrida. Se em uma determinada cidade a bandeirada custa R$ 5,00 e o quilômetro rodado custa R$ 2,00. O valor a ser pago depende da bandeirada e da distância percorrida.

Expressão algébrica:

TEXTO 2:

Uma escala termométrica foi construída relacionada com a escala Celsius, sendo que 0^0 C e 100^0C correspondem respectivamente a 2^0 e 502^0 desta nova escala. Os valores desta escala variam em função das temperaturas medidas em graus Celsius.

Expressão algébrica:

TEXTO 3:

A capacidade de um tanque é de 5 m^3 de água e são consumidos por dia 2 m^3. O volume de água escoada do tanque é função do número de dias.

Expressão algébrica:

TEXTO 4:

Para plantar grama em um terreno retangular cujo comprimento é 2m a mais que sua largura, utiliza-se tapetes de grama que custam R$5,00 o metro quadrado. O preço a ser pago varia em função das medidas do terreno.

Expressão algébrica:

2) Esboce um gráfico que corresponde a cada texto e expressão algébrica já relacionados, utilizando para isto a folha de papel quadriculado fornecida.

3) Analise as tabelas de valores fornecidas e relacione-as com os textos, com a expressão algébrica e o gráfico correspondentes. Explique os critérios que você utilizou para fazer estas relações.

TABELA 1:

x	y
0	5
2	1
1	3
2.5	0

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

TABELA 2:

x	y
8	400
5	175
10	600
6	240

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

TABELA 3:

x	y
0.5	6
3	11
1.5	8
100	205

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico:

TABELA 4:

x	y
10	52
-1	-3
20	102
-20	-98

Texto:
Exp. Algébrica:
Gráfico: