ANDRÉ LÚCIO GRANDE

O CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA E DEPENDÊNCIA LINEAR E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

ANDRÉ LÚCIO GRANDE

O CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA E DEPENDÊNCIA LINEAR E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini****.*

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ **Local e Data:** ________________

DEDICATÓRIA

A minha família pelo
incentivo e
compreensão em
todos os momentos

Para a minha mãe

AGRADECIMENTOS

A minha orientadora, *Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini,* por sua competência, sabedoria, compreensão, estímulo e paciência que possibilitaram o desenvolvimento dessa pesquisa e o meu crescimento como aprendiz de pesquisador.

Aos professores da banca examinadora, *Professor Doutor Amarildo Melchiades da Silva* e *Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos*, pela atenção e pelas valiosas contribuições oferecidas.

A *todos* os *Professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP*, pelos ensinamentos que me conduziram aos caminhos da pesquisa em Educação Matemática.

A *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado*, pelos ensinamentos, sugestões e por ter acredito em meu trabalho.

A *todos os meus amigos*, que de uma ou outra maneira contribuíram para a realização dessa pesquisa.

A *Professora Eliana Vieira Godoy*, pela colaboração na revisão desse texto.

A *CAPES*, pela bolsa de estudos que me propiciou condições para realizar essa pesquisa.

O Autor

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar nos livros didáticos de Álgebra Linear quais são os registros de representação semiótica mais utilizados no estudo das noções e atividades propostas sobre independência linear. O livro didático é um recurso muito utilizado pelos professores no seu trabalho, o qual apresenta muitos registros de representação que podem ser analisados qualitativamente para a contribuição no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, foram selecionados cinco livros didáticos de Álgebra Linear que se diagnosticou os registros de representação utilizados na definição, exemplos e exercícios propostos a respeito de independência linear. A teoria utilizada na análise dos livros didáticos foi a dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que destaca a importância da mudança de registros na aprendizagem dos objetos matemáticos. Em cada obra, os registros foram classificados e analisados, bem como as possíveis transformações de registros realizadas na resolução dos exemplos e exercícios propostos. Como resultado, constatou-se nos capítulos que abordam as noções de independência e dependência linear uma escassez da utilização de alguns registros de representação, como por exemplo, o geométrico para determinar se um conjunto de vetores é linearmente independente ou não, e o registro da língua natural, na resolução de exemplos e exercícios propostos que envolvem demonstrações. Além disso, verificou-se a falta de conversão de registros nas definições, exemplos e exercícios propostos dos livros didáticos analisados.

Palavras-Chave: Álgebra Linear, Independência Linear, Registros de Representação Semiótica, Livro Didático, Transformações de Registros.

ABSTRACT

This research aims to investigate which semiotic representation registers are most used in Linear Algebra textbooks in the presentation and study of the topic linear independence. The mathematics textbook is a resource much used by the teachers in its work. They present many representation registers, which can to be analyzed qualitatively to assess their potential contribution to the teaching-learning process. To this end, five Linear Algebra textbooks were selected for an analysis which involved the diagnosis of the representation registers used in the definition of linear independence, as well as the examples and exercises proposed for its study. The theory used in the analysis of these textbooks was Raymond Duval´s theory of Registers of Semiotic Representation, which highlights the importance of changes between registers in the learning of mathematical objects. In each textbooks, the registers present were classified and analyzed, along with the possible transformations of registers as carried out in the resolution of the examples and considered exercises. As result, scarcity of the use of some registers of representation it was evidenced in the chapters that approach the slight knowledge of independence and linear dependence, as for example, the geometric one to determine if a set of vectors is linearly independent or not, and the register of the natural language, in the resolution of examples and considered exercises that involve demonstrations. The analysis also indicated a lack of attention to conversions between registers in the examples and proposed exercises of analyzed textbooks.

Key-Words: Linear Algebra, Linear Independence, Registers of Semiotic Representation, Textbook, Transformations between Registers.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear é ministrada nos cursos de graduação do ensino superior na área das Ciências Exatas, nas diversas carreiras tais como: Matemática, Física, Engenharia, Economia, Administração, Estatística e Ciências da Computação.

Além disso, a Álgebra Linear está relacionada com outras áreas de estudo da Matemática, como a resolução de sistemas lineares na Álgebra Elementar, vetores da Geometria, cônicas na forma quadrática na Geometria Analítica, além de equações diferenciais. Conseqüentemente, verifica-se uma relação existente entre a Álgebra Linear com a Geometria Analítica, com a Álgebra Elementar, dentre outras disciplinas.

Outra característica da Álgebra Linear é a possibilidade de unificar o pensamento matemático, sendo uma disciplina fundamental para a abstração e generalização de conceitos e objetos matemáticos.

Dessa forma, muitos problemas geométricos podem ser tratados de maneira algébrica e vice-versa sendo que essa relação entre a Álgebra e Geometria foi responsável por um importante progresso e desenvolvimento na Matemática e em outras áreas do conhecimento.

Alguns conceitos estudados num curso de Álgebra Linear são considerados elementares, como por exemplo: subespaço vetorial, conjuntos de vetores geradores, combinações lineares, independência linear, base e dimensão de um espaço vetorial, transformações lineares, autovetores e autovalores.

As noções de independência e dependência linear são fundamentais para a compreensão de estruturas algébricas mais complexas, como o estudo da noção de base de um espaço vetorial. Para que um conjunto de vetores geradores seja uma base de um espaço vetorial, os vetores desse conjunto devem ser linearmente independentes.

Entretanto, o caráter unificador e generalizador da Álgebra Linear vêm causando dificuldades para os alunos no ensino-aprendizagem dessa disciplina, evidenciados pelos resultados do grupo de pesquisadores franceses formado por Jean Luc Dorier, Jacqueline Robinet, Aline Robert e Marc Rogalski.

Robert e Robinet, ao estudar as atividades matemáticas ligadas ao processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, afirmam que existe uma ligação estreita entre as representações metacognitivas dos professores de Matemática e a dos autores de livros didáticos de Matemática.

As autoras ressaltam que os exercícios dos livros didáticos podem exercer influência sobre a aprendizagem da Matemática como, por exemplo, a freqüência com que certo tipo de exercício aparece pode fazer com que o aluno acredite que esses exercícios tratam e indicam aquilo que é mais importante no tema estudado, o que pode ocorrer mesmo que os exercícios não sejam resolvidos em sua totalidade.

Com isso, a análise dos livros didáticos constitui uma atividade importante em Educação Matemática como forma de avaliar como os objetos matemáticos são descritos e representados para a sua aprendizagem.

Esta pesquisa tem por objetivo diagnosticar e analisar nos livros didáticos de Álgebra Linear selecionados neste trabalho quais são os registros de representação semiótica utilizados nas definições, exemplos e exercícios propostos a respeito das noções de independência e dependência linear.

O referencial teórico utilizado na análise dos livros didáticos será a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2000).

Dessa forma, no Capítulo I – **Problemática da Pesquisa** – dissertarei sobre a problemática, destacando os objetivos e a relevância do problema de pesquisa, bem como a importância da análise dos livros didáticos.

No Capítulo II – **Revisão da Literatura** – farei uma apresentação de um panorama das pesquisas do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear realizadas no Brasil e em outros países, e os resultados relevantes que possam contribuir para a minha pesquisa.

No Capítulo III **– Fundamentação Teórica –** apresentarei a fundamentação teórica do meu trabalho de pesquisa, baseada na teoria de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica.

O Capítulo IV **– Metodologia –** tem por objetivo descrever os procedimentos metodológicos utilizados na seleção e análise dos livros didáticos de Álgebra Linear.

No Capítulo V **– Contexto Histórico –** apresentarei o contexto histórico do objeto matemático independência e dependência linear, mostrando a evolução e a formalização dos conceitos de Álgebra Linear relacionados ao tema.

A análise de livros didáticos de Álgebra Linear, apresentando as noções de independência e dependência linear entre vetores sob o ponto de vista do quadro teórico estudado será apresentada no Capítulo VI, denominado **Análise Didática**, as quais serão analisadas as definições, os exemplos e exercícios propostos sobre o objeto matemático de estudo.

Por fim, no Capítulo VII **– Considerações Finais –** serão feitas as considerações finais sobre a pesquisa e serão apresentados os resultados, conclusões obtidas e algumas possíveis sugestões para o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

1.1 - Considerações Iniciais

A Álgebra Linear nas últimas décadas vem sendo utilizada em diversas áreas do Ensino Superior, por estar ligada a algumas disciplinas da área de exatas, como Geometria Analítica e Vetores, Equações Diferenciais, Álgebra Elementar e Abstrata, Física, além da sua aplicação em outras áreas como Economia, Informática, Ciências da Computação, Pesquisa Operacional, dentre outras.

Conseqüentemente os trabalhos, estudos e pesquisas relacionadas com o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear vêm merecendo um papel de destaque no cenário da Educação Matemática e despertando o interesse dos pesquisadores.

Nos últimos anos, ao lecionar Álgebra Linear tive a oportunidade de constatar as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem dos conceitos fundamentais dessa disciplina, bem como no desenvolvimento de algumas atividades matemáticas em sala de aula e na resolução dos exercícios propostos dos livros didáticos de Álgebra Linear.

O que me chamou a atenção inicialmente foi a dificuldade dos alunos trabalharem com algumas representações dos objetos matemáticos na resolução das atividades e exercícios propostos, quando se utilizava a representação geométrica ou a utilização da língua natural na descrição de um objeto matemático.

Percebi que de um modo geral, tanto as atividades propostas, as avaliações como as próprias aulas ministradas pelos professores de Matemática são em geral baseadas, estruturadas e apoiadas nos livros didáticos.

Em Álgebra Linear, creio que esse panorama não seja diferente. Ao lecionarem, os professores acabam se apropriando das representações utilizadas pelos livros didáticos na descrição dos objetos matemáticos.

Algumas noções em Álgebra Linear são consideradas elementares e fundamentais, tais como: subespaço, geradores, independência linear, transformações lineares, dentre outras.

O estudo da noção de independência linear tem uma importância relevante na Álgebra Linear. Essa noção é utilizada em diversos objetos matemáticos, seja em equações de um sistema linear, em vetores da geometria, ou até mesmo em matrizes e funções polinomiais.

Outro aspecto importante no estudo do conceito de independência linear é a sua utilização na determinação da base de um espaço vetorial. Para que um conjunto de vetores geradores forme uma base de um espaço vetorial, os vetores desse conjunto devem ser linearmente independentes.

Decidi, ciente da influência dos livros didáticos como recurso pedagógico e da importância do estudo das noções de independência e dependência linear nos cursos ministrados pelos professores de Álgebra Linear, realizar uma pesquisa que tivesse por objetivo investigar e analisar quais são os registros de representação semiótica utilizados nos livros didáticos de Álgebra Linear nas definições, exemplos e exercícios propostos a respeito das definições de independência e dependência linear.

Procurarei diagnosticar quais são registros de representação mais privilegiados, as articulações que são realizadas nos livros didáticos entre esses registros ao abordar essas noções nos exemplos e exercícios propostos e quais são as possíveis implicações didáticas dessas articulações.

Ao realizar inicialmente algumas leituras de artigos e trabalhos em Educação Matemática, encontrei pesquisas sobre o ensino-aprendizagem das noções de independência e dependência linear em países como França e Estados Unidos e uma considerável escassez de pesquisas acerca desse tema realizadas no Brasil. Notei o fato de existirem poucas pesquisas realizadas sobre a análise de livros didáticos de Álgebra Linear, o que de certa forma me motivou para a elaboração dessa pesquisa.

O que eu gostaria de destacar *a priori* é que a noção de independência linear entre vetores geralmente é abordada inicialmente nos cursos de Licenciatura em Matemática na disciplina Geometria Analítica e Vetores, quando o aluno tem o primeiro contato com esse objeto matemático, que de um modo geral são exploradas as propriedades geométricas dos vetores nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Em Geometria Analítica ou Álgebra Vetorial normalmente define-se independência e dependência linear de vetores nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ da seguinte maneira:

> **i)** Um par ordenado $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de vetores é linearmente dependente (L.D.) se $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são paralelos. Caso contrário, $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ é linearmente independente (L.I.).
>
> **ii)** Uma tripla ordenada $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ é linearmente dependente se $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ é linearmente independente.
>
> **iii)** No caso de quatro ou mais vetores, a n-upla é linearmente dependente.
>
> (BOULOS, 2005, p. 37).

Para os casos de dois e três vetores, citados anteriormente, a representação geométrica pode ser desenvolvida da seguinte maneira, conforme a figura 1:

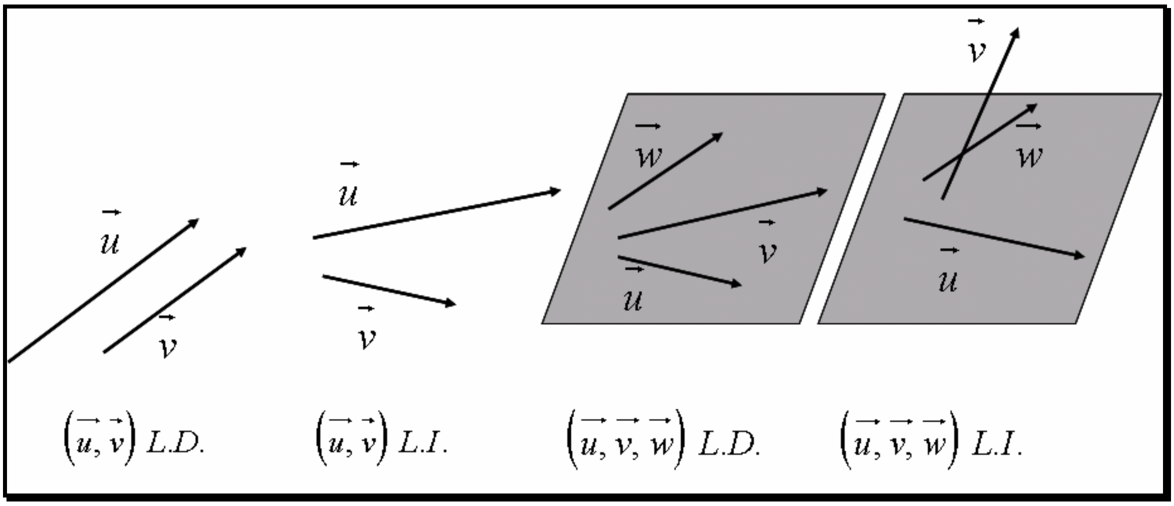


Figura 1 - Representação geométrica de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Em Álgebra Linear, geralmente os livros didáticos definem independência e dependência linear da seguinte maneira:

> Dizemos que um conjunto não-vazio S = {v_1, v_2,..., v_S} de vetores em $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente se os únicos escalares c_1,c_2,...,c_S que satisfazem a equação
>
> $$c_1v_1 + c_2v_2\ \ldots + c_sv_s = 0$$
>
> são $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, ..., $c_S = 0$. Se existem escalares não todos nulos que satisfazem essa equação, dizemos que o conjunto é linearmente dependente. (ANTON e BUSBY, 2006, p. 144).

Verificamos inicialmente que nos livros didáticos de Geometria Analítica as noções de independência e dependência linear são exploradas destacando-se as propriedades geométricas dos vetores, como coplanaridade e paralelismo.

Já nos livros de Álgebra Linear encontramos outras representações para a descrição e conceituação do objeto matemático em estudo, como a representação algébrica e o uso da língua natural.

Será que a exploração das propriedades geométricas é retomada novamente nos livros didáticos de Álgebra Linear? Quais são as representações que os autores utilizam para conceituar essas noções nos livros didáticos de Álgebra Linear? Qual a importância das representações utilizadas nos livros didáticos na conceituação e aprendizagem dos objetos matemáticos?

Segundo pesquisa realizada por DI PINTO (2000), em sua dissertação *"Ensino e aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras na década de 90"* o autor relata que as pesquisas em diversas universidades no Brasil mostraram altos índices de reprovação no primeiro ano de um curso na área de exatas na disciplina de Geometria Analítica Vetorial assim como na disciplina de Álgebra Linear.

A dissertação de Di Pinto forneceu um panorama das pesquisas de autores brasileiros a respeito do processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica, realizadas na década de 90.

O autor apresenta como um motivo da reprovação dos alunos na disciplina de Álgebra Linear uma não compreensão dos objetos matemáticos estudados nas disciplinas de Geometria Analítica Vetorial e Álgebra Linear, em que o aluno não consegue relacionar conceitos matemáticos adquiridos em outras disciplinas (Geometria Analítica, por exemplo) com novos assuntos abordados.

Acredito que no caso das noções de independência e dependência linear esse panorama não seja diferente, ou seja, ao estudar essas noções em um curso de Álgebra Linear, o aluno não consegue relacionar as noções de independência e dependência linear com o que foi abordado em Geometria Analítica.

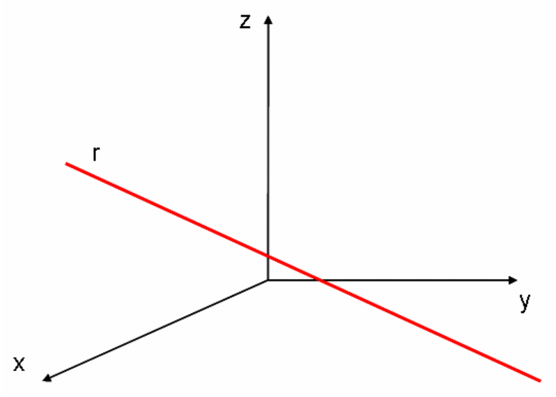
Como recomendações dos resultados da sua pesquisa, Di Pinto destaca para o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear a diversificação dos tipos de registros de representação utilizados no estudo dos objetos matemáticos.

Segundo Hillel, podemos definir uma representação como sendo: *"A ação de exprimir um objeto particular por outro, que pode ser feita em um mesmo nível de descrição, ou em diferentes níveis de descrição".* (HILLEL, 1994, apud DI PINTO, 2000).

Uma reta, por exemplo, pode ser descrita sob vários tipos de representações, dentre elas a representação algébrica ou a representação geométrica, conforme vemos a seguir na figura 2:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, m \\ y = y_0 + \lambda\, n \quad (\lambda \in R) \\ z = z_0 + \lambda\, p \end{cases}$$

Representação Algébrica



Representação Geométrica

Figura 2 – Representações de uma reta no $\mathbb{R}^3$

Algumas considerações sobre a importância da utilização dos registros de representação no estudo de objetos matemáticos serão apresentadas na fundamentação teórica desta pesquisa.

Devido à escassez constatada sobre a análise de livros didáticos de Álgebra Linear, direcionarei nesta pesquisa o foco na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, diagnosticando quais são os registros de representação utilizados para caracterizar e descrever os objetos matemáticos.

No intuito de justificar a razão da escolha da análise dos livros didáticos, a seguir discutirei a importância dos livros didáticos no processo de ensino-aprendizagem nas pesquisas em Educação Matemática.

1.2 - Por que analisar os livros didáticos?

O livro didático constitui um recurso pedagógico muito utilizado pelos professores, mesmo com o aumento da utilização de recursos tecnológicos como *softwares* gráficos e jogos educativos, por exemplo.

Posso supor que exista uma influência dos livros didáticos de Matemática nas aulas e nos cursos ministrados pelos professores nos diferentes níveis de ensino. As definições, exemplos e exercícios apresentados pelo livro se tornam uma referência em muitos cursos e o aluno acaba se apropriando dessa influência quer seja na sala de aula, quer seja nas suas pesquisas ou trabalhos acadêmicos. O professor confia naquilo que o livro didático apresenta, o modo como o autor descreve um objeto matemático, cabendo muitas vezes ao professor realizar uma transposição dos conteúdos apresentados pelo livro didático para o aluno.

Essa afirmação pode ser reforçada segundo comentários de VALENTE:

> “A dependência de um curso de Matemática aos livros didáticos, portanto, é algo que ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem à Matemática hoje ensinada na escola básica [...]. Talvez seja possível dizer que a Matemática constituiu-se na disciplina que mais tenha sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos” (Valente, 2001, p.2).

Eu tenho a convicção de que essa afirmação de Valente se estenda para os cursos de Álgebra Linear. Entretanto, no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, o livro didático não é necessariamente o único recurso pedagógico.

Algumas pesquisas realizadas pelo grupo norte-americano denominado LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group) ressaltam a importância da utilização de *softwares* como recursos pedagógicos auxiliares, como o *Maple* ou *MATLAB.* Entretanto, o livro didático continua sendo uma referência nos cursos ministrados pelos professores.

Apesar das recomendações dos pesquisadores da utilização dos recursos tecnológicos, o livro didático continua sendo talvez o mais utilizado, de acordo com a informação extraída dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais):

> Dentre os diferentes recursos, o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileiro. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. (PCN, 1997, p.96).

Além disso, de acordo com o próprio PCN, (1997, p.21), *“... os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos”.*

Essa idéia eu acredito que possa ser aplicada também no ensino superior. Muitas apostilas e livros-texto elaborados pelos professores utilizados em seus cursos no ensino superior também são baseados nos livros didáticos.

De acordo com Caraça (2000), há uma diferença entre um conhecimento em produção e o conhecimento já transposto para um livro didático. Segundo ele, costuma-se trabalhar somente o conteúdo conforme está no livro didático, esquecendo-se da forma ou dos problemas e etapas envolvidas na construção do conhecimento. De acordo com comentário, Caraça afirma que: *“Os conhecimentos estão encadeados nos livros de forma harmoniosa e quase sempre não são questionados” (iv).*

No âmbito nacional, o Ministério da Educação criou o PNLD – Programa Nacional do Livro Didático, destinado ao processo de avaliação de livros didáticos nos ensinos Fundamental e Médio, oferecendo aos professores e profissionais da educação subsídios para a escolha e avaliação dos livros didáticos que serão utilizados como recurso pedagógico nas escolas.

Gostaria que esse programa fosse estendido para o nível superior, pois creio que traria uma contribuição significativa para o ensino e para a comunidade acadêmica de um modo geral.

O trabalho de Araújo (2002) destaca as pesquisas de Aline Robert e Jacqueline Robinet (1989) a respeito da relação entre o professor, livro didático e o aluno:

> Robert e Robinet afirmam que, freqüentemente, existe uma ligação estreita entre as representações metacognitivas dos professores de Matemática e as dos autores de livros didáticos de Matemática, embora, na prática, muitos professores façam ajustes nos exercícios apresentados nesses livros. As autoras ressaltam que os exercícios dos livros didáticos podem exercer influência sobre a aprendizagem da Matemática, pois, por exemplo, a freqüência com que certo tipo de exercício aparece pode fazer com que o aluno acredite que o que esses exercícios tratam indica o que é mais importante no tema estudado, o que pode ocorrer mesmo que os exercícios não sejam resolvidos em sua totalidade. (ARAÚJO, p.11)

Diante dos resultados expostos anteriormente, formularei a seguinte hipótese: se os professores são influenciados pelos livros didáticos, utilizando definições, exemplos e exercícios tal como são colocados nos livros, efetuando em alguns casos pequenos ajustes, então as representações dos objetos matemáticos que os professores utilizam também são baseadas naquelas utilizadas pelos livros didáticos.

Com isso, de acordo hipótese formulada, a questão que pode ser colocada é a seguinte: como os livros didáticos utilizam os registros de representação para caracterizar os objetos matemáticos, em especial na Álgebra Linear? Quais os registros mais utilizados pelos livros didáticos e quais as possíveis implicações dessa utilização?

Envolto nesse panorama e perspectiva e constatando a escassez de trabalhos sobre a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, a minha pesquisa apresenta uma proposta de diagnosticar quais são os registros de representação mais explorados nas noções de independência e dependência linear, bem como analisar as transformações de registros mais utilizadas nas obras selecionadas.

Como as noções de independência e dependência linear são expressas nos livros didáticos de Álgebra Linear? Será que a diversificação de registros é feita nos livros didáticos, um instrumento pedagógico muito utilizado pelos professores? Qual a importância dos registros de representação no processo de ensino-aprendizagem dessas noções?

Antes de procurar responder as perguntas, gostaria de fazer um breve retrospecto da minha trajetória profissional e acadêmica com o intuito de evidenciar e situar as origens de minha pesquisa.

1.3 - O Despertar

A Álgebra Linear é uma disciplina que, além de unificar o pensamento matemático e apresentar diversas aplicações em outras áreas do conhecimento, é acima de tudo em minha opinião, investigativa e fascinante.

O meu interesse pelo estudo do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear não é recente. Iniciei a minha formação profissional e acadêmica na área técnica e tecnológica, porém desde os meus estudos nos ensinos Fundamental e Médio o meu interesse pelo ensino da Matemática tem sido cada vez maior.

Ao iniciar o curso de Licenciatura em Matemática, tive contato com a disciplina de Geometria Analítica e Vetores e posteriormente Álgebra Linear. A minha afinidade e interesse pelo estudo da disciplina Álgebra Linear aumentaram consideravelmente após eu aprofundar meus estudos e conhecimentos ao cursar uma especialização desta disciplina numa universidade pública.

Posteriormente, procurei um curso em nível de mestrado acadêmico que possuísse um grupo tendo como linha de pesquisa o estudo do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Foi com essa expectativa que iniciei o meu curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Inicialmente busquei me inserir no grupo G_5, denominado “Educação Algébrica”, e tenho como orientadora a Profª Dra. Barbara Lutaif Bianchini. O grupo possui um subgrupo de pesquisa que tem por objetivo estudar o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear e desenvolve um projeto em andamento *“Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial”*, relacionado ao ensino do conceito de base de um espaço vetorial.

Atualmente sou professor de Matemática de uma faculdade pública no Estado de São Paulo, onde leciono Álgebra Linear e Pesquisa Operacional para o curso de Informática. Além disso, sou professor de escolas particulares de Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares.

Durante várias reuniões e discussões no subgrupo de pesquisa G_5 sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, tive a oportunidade de entrar em contato, interagir, discutir e formular hipóteses acerca dos resultados obtidos em pesquisas realizadas no Brasil e em outros países.

Uma das primeiras etapas do desenvolvimento da minha pesquisa foi consultar alguns trabalhos relacionados ao ensino-aprendizagem de Álgebra Linear nos últimos anos e os resultados obtidos que pudessem contribuir para o desenvolvimento do meu trabalho.

Com o objetivo de fazer uma revisão da literatura, descreverei no próximo capítulo alguns resultados dessas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

CAPÍTULO II
REVISÃO DA LITERATURA

2.1 - Pesquisas realizadas no Brasil

Gostaria de destacar inicialmente os resultados de algumas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear realizadas no Brasil para que a minha problemática de pesquisa seja localizada neste contexto e para que a mesma possa ser fundamentada e justificada.

Pesquisas realizadas no Brasil diagnosticaram algumas dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de Álgebra Linear em várias universidades brasileiras. Os resultados das mesmas proporcionaram algumas sugestões e forneceram subsídios para que outras pudessem ser realizadas.

CELESTINO (2000) apresentou um panorama a respeito de pesquisas do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear na década de 90, realizando um levantamento bibliográfico dos artigos, dissertações e teses publicados no Brasil e em outros países sobre o tema, e verificou que no Brasil, nas universidades públicas como a UNICAMP e a UNESP, a disciplina de Álgebra Linear apresenta um índice de reprovação em seus cursos em torno de 25% a 50%, o que demonstra a dificuldade no ensino-aprendizagem dessa disciplina.

Esta pesquisa apresenta um resultado importante, que é a constatação de muitos pontos em comum e também alguns contrapontos entre as pesquisas de autores brasileiros e autores estrangeiros. Isso nos leva a concluir que as pesquisas brasileiras inserem-se no quadro das pesquisas mundiais sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Esse fato credita em grande medida os resultados obtidos nas pesquisas realizadas até então para o desenvolvimento do meu trabalho.

SILVA (1997) fez um estudo epistemológico da noção de base de um espaço vetorial sob o ponto de vista do Modelo Teórico dos Campos Semânticos, proposto por Rômulo Lins, e ainda analisa em alguns livros didáticos de Álgebra Linear como é desenvolvida a noção de base de um espaço vetorial sob o ponto de vista deste referencial teórico.

De acordo com Silva: *“O Modelo Teórico dos Campos Semânticos é um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em Matemática” (p. 10).*

O autor inicialmente realizou um estudo histórico e epistemológico, descrevendo como os matemáticos dos séculos XVIII e XIX operavam com a noção de base e quais os campos semânticos construídos por eles.

A seguir o autor analisou frases construídas por ele mesmo com o intuito de classificar alguns dos campos semânticos nos quais os livros didáticos de Álgebra Linear abordariam a noção de base.

Num terceiro momento, o autor realizou um estudo de caso sobre a noção de base construída por dois estudantes que finalizavam um primeiro curso de Álgebra Linear.

Como exemplo de uma questão proposta no estudo de caso, o autor apresenta no seu trabalho uma atividade em que os alunos procuram produzir significado para o texto a seguir:

"Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e A = {u = (1, 0, 0), v = (0, 1, -1), w = (0, 0, 2)}. A é uma base do $\mathbb{R}^3$?" (p.72).

Segundo o autor, uma justificativa para o texto foi dada pelo aluno chamado Adilson da seguinte maneira:

> O conjunto A é linearmente independente, pois nenhum dos vetores de A podem ser escritos como combinação linear dos outros vetores do conjunto. Além disso, o conjunto A é gerador do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Portanto A é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. (SILVA, 1997, p. 72)

Para o autor, o aluno ao produzir significado para o texto fala de espaço vetorial, de vetor (como elemento de um espaço vetorial), de conjunto linearmente independente, de combinação linear, de geradores de um espaço vetorial, de base ordenada. Esses objetos construídos pelos alunos compõem um núcleo, e essa atividade de produzir significado em relação a esse núcleo constituído pelo aluno o autor denominou Campo Semântico Usual.

Uma das conclusões obtidas por Silva em sua pesquisa é a constatação da utilização dos alunos de um campo semântico diferente daquele utilizado preferencialmente pelo professor. Como questionamento, o autor sugere a abordagem da Álgebra Linear em diferentes contextos, como por exemplo, na Geometria Analítica, na Programação Linear, na tentativa de fugir da abordagem axiomático-dedutiva que, segundo pesquisas em Educação Matemática (Dorier, 1998a) proporcionam dificuldades na aprendizagem dos alunos.

Nesse ponto, concordo com a conclusão do autor, pois o mesmo conceito matemático deve ser aprendido em vários contextos para o aluno se apropriar desse conceito.

Entretanto, traçando um paralelo com os resultados apresentados por Silva e também por Di Pinto, apresentado anteriormente, creio que assim como a Álgebra Linear deve ser abordada em diversos contextos para fugir da sua forma axiomática, a Álgebra Linear também deve ser abordada utilizando-se vários registros de representação.

O que eu gostaria de explicar é que tenho convicção da necessidade de estudar-se a Álgebra Linear em diversos contextos, mas quero supor também a importância da diversidade dos registros de representação na abordagem dos objetos matemáticos em Álgebra Linear.

O que me despertou interesse, após ter conhecimento desses resultados obtidos, era analisar se os livros didáticos apresentavam essas características quanto à abordagem e principalmente quanto à diversidade dos registros de representação utilizados.

A pesquisa de PADREDI (2003) apresentou resultados que auxiliaram a explicitar o meu problema de pesquisa. Em sua dissertação, *As "Alavancas Meta" no discurso do professor de Álgebra Linear*, foram realizadas entrevistas com professores de Álgebra Linear procurando diagnosticar e identificar possíveis *"alavancas meta"* sugeridas por esses professores com a finalidade de facilitar a compreensão dos alunos da noção de base de um espaço vetorial.

Para compreender o significado do termo alavanca meta, Padredi explica que:

> Assim, o discurso do professor, ou a apresentação de um tema no livro didático, funcionará como alavanca meta, caso neles existam informações capazes de levar o aluno a uma reflexão sobre seus próprios conhecimentos, seus erros, seus procedimentos, ajudando-o na apreensão de uma nova noção matemática. É importante acrescentar que não só o discurso do professor, mas qualquer atividade proposta e/ou elaborada por ele, que facilite a compreensão de alguns alunos sobre uma noção, ou um tópico, são consideradas alavancas meta. (PADREDI 2002, p. 13)

Como resultados da pesquisa, de acordo com Padredi, alguns recursos utilizados pelos professores verificados nas entrevistas são passíveis de se tornarem alavancas meta, como a utilização de uma forma coloquial para a introdução de noção de base de um espaço vetorial, tais como: “vetores bem comportados”, “graus de liberdade”, “colchinha de crochê”, “ambiente”, “lucro”, “economia”, “tijolos”, “parede”, termos estes que se referem aos conjuntos de vetores e a construção da base de um espaço vetorial.

Percebi, nesse resultado, a preocupação dos professores na utilização da língua natural para facilitar a compreensão dos objetos matemáticos. Nesse aspecto, concordo com o emprego da língua natural para facilitar tal compreensão.

Outro resultado a ser destacado, de acordo com Padredi, é que a noção de base pode ser introduzida articulando-se dois conceitos: vetores linearmente independentes e sistema de geradores. A articulação entre esses dois conceitos pode ser colocada apresentando-se a idéia de um conjunto de geradores minimal, produzindo reflexões dos alunos sobre a vantagem de se obter um número mínimo de vetores para gerar o espaço vetorial, o que os leva a compreender a necessidade dos vetores do conjunto ser linearmente independente.

Além disso, a Geometria Analítica deve ser utilizada como “concreta” para gerar reflexões dos alunos a respeito das necessidades das noções de independência linear, de sistemas geradores e de base de um espaço vetorial.

A Geometria Analítica ser utilizada como “concreta” por Padredi se refere a um princípio necessário para o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear descrito nos trabalhos do pesquisador Guershon Harel (1997), que destaca a condição de um aluno construir sua compreensão de um conceito sobre um contexto que lhe seja concreto.

Segundo Harel, a geometria a duas e três dimensões será o contexto concreto para se introduzir o conceito de gerador, de dependência linear, de base, entre outros, para que depois o estudante possa abstrair esses conceitos de Álgebra Linear.

Creio que essa recomendação é muito importante, pois explorando a representação geométrica o professor pode mobilizar conceitos da Geometria Analítica que provavelmente o aluno tenha adquirido. Minha expectativa é diagnosticar se os livros didáticos de Álgebra Linear exploraram a representação geométrica.

Um ponto importante da pesquisa de Padredi para a minha problemática de pesquisa são as afirmações obtidas em algumas entrevistas dos professores em relação ao ensino da noção de independência linear entre vetores. Em alguns trechos os professores entrevistados relatam que:

> O problema da independência linear? Ah, sem dúvida. Tinha que ser feito de uma maneira...primeiro, maneira intuitiva.
>
> Essa dependência linear quando você faz o núcleo implica, implica um número diferente de zero...isso, isso é um pouco abstrato para eles.

> Esse negócio de provar que tem um elemento diferente de zero, todos são zero, não é palpável pra eles.
>
> É com a independência linear, a dificuldade está na independência.
> A parte que eles tem mais dificuldade é essa parte do l.i. e l.d. Não sei porque. (PADREDI, 2003, p.193-97)

Pelas entrevistas realizadas por Padredi verificamos as dificuldades que esses professores de Álgebra Linear apresentam ao ensinar a noção de independência linear entre vetores. Para alguns alunos, essa definição não é intuitiva, palpável, tornando-se muito abstrata para eles. Em outros casos, os alunos sentem dificuldade de provar que os escalares na combinação linear entre os vetores devem ser todos iguais a zero, no caso da independência linear.

Gostaria de estabelecer uma pequena pausa para algumas considerações e reflexões. Os professores entrevistados por Padredi evidenciaram possíveis dificuldades na compreensão por parte dos alunos da noção de independência linear entre vetores, que está subjacente à noção de base de um espaço vetorial. Esse fato elucida a importância do desenvolvimento da minha pesquisa e as contribuições que ela possa apresentar não somente para o ensino-aprendizagem de independência e dependência linear, mas também para a noção de base de um espaço vetorial.

A dissertação de OLIVEIRA (2005), *“Como funcionam os Recursos-Meta em aula de Álgebra Linear?”* tem como objetivo investigar os recursos-meta utilizados por um professor de Álgebra Linear, em sala de aula, que ajudaram alguns de seus alunos na compreensão da noção de base de um espaço vetorial. Foram realizadas algumas entrevistas semi-estruturadas com os alunos que participaram das aulas, para verificar se algum recurso utilizado pelo professor tornou-se uma alavanca meta.

Oliveira define o termo “recurso-meta” como sendo as informações ou conhecimentos sobre a Matemática a ser aprendida que pode envolver as operações matemáticas, seu uso e a própria aprendizagem da Matemática.

Na sua pesquisa o autor concluiu que poucos recursos-meta utilizados pelo professor dentro da sala de aula contribuíram para a compreensão dos objetos matemáticos abordados, tornando-se uma alavanca-meta.

Um dos recursos utilizados pelo professor que se tornou uma alavanca-meta para seis dos sete alunos entrevistados foi justamente o recurso ligado ao ensino da noção de independência linear, quando o professor, se referindo aos seus alunos a um conjunto linearmente dependente diz: *“eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto”* (OLIVEIRA, p. 94).

Esse recurso utilizado pelo professor reforça ainda mais o auxílio da representação de um objeto na língua natural como forma de facilitar a compreensão do objeto matemático, o que me faz concordar plenamente com o recurso utilizado.

Durante as entrevistas realizadas pelo autor com os alunos, o que me chamou a atenção foi uma questão colocada para que os alunos verificassem quais dos subconjuntos abaixo são linearmente dependentes:

$A = \{(1, 2); (2, 4); (3, 6)\}$ $B = \{(1, 1, 1); (3, -1, 2)\}$

$C = \{(7, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\}$ $D = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$

Muitos alunos tiveram dificuldades, não conseguiram responderam ou responderam incorretamente à questão proposta. Dentre as respostas obtidas, muitos se lembraram de um recurso utilizado pelo professor em sala de aula que afirmava que num conjunto L.D. (linearmente dependente) um vetor “dependia” do outro, ou seja, um vetor era escrito como combinação linear dos outros. No conjunto A, por exemplo, verifica-se facilmente que (3, 6) = (2, 4) + (1,2).

ARAÚJO (2002) diagnosticou as possíveis alavancas meta que estão presentes nos livros didáticos de Álgebra Linear na definição de base de um espaço vetorial na sua dissertação *"A Metamatemática no livro didático de Álgebra Linear".*

Ao analisar três livros didáticos de Álgebra Linear, Araújo classificou e comparou quais recursos os autores dos livros didáticos procuram utilizar para facilitar a compreensão da noção de base de um espaço vetorial.

Como conclusões, a autora encontrou poucos exemplos de possíveis alavancas-meta. Apesar disso, Araújo afirma que se pode pesquisar formas que provoquem nos alunos a organização de conhecimentos anteriores, refletindo sobre os alunos de maneira a adaptá-los na aquisição de novos conceitos.

A respeito dessa afirmação, caberia até um questionamento: será que os livros didáticos apresentam, de acordo com o registro de representação utilizado, nas noções de independência e dependência linear, situações que possam motivar os alunos a utilizarem conhecimentos já adquiridos e reorganizá-los na aquisição de novos? Em caso afirmativo, quais os registros de representação que poderiam ser utilizados?

Outro trabalho que apresenta resultados significativos é o artigo *"Análise do tratamento dado às transformações lineares em dois livros didáticos"*, de KARRER (2003), que analisa os registros de representação semiótica no estudo das transformações lineares em livros didáticos de Álgebra Linear e evidencia alguns resultados relevantes sobre registros de representação mais utilizados pelos autores dos livros didáticos.

Em seu trabalho, Karrer analisa quais os registros mais explorados pelos autores dos livros didáticos e quais os tratamentos e conversões estão presentes no conceito de transformações lineares. Alguns registros de representação, como o geométrico, por exemplo, deixam de ser utilizados em muitos exercícios analisados.

Além das pesquisas citadas anteriormente, merecem destaque as pesquisas realizadas em outros países acerca do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, que serão abordadas a seguir.

2.2 - Pesquisas realizadas em outros países

Após apresentar alguns resultados de pesquisa de autores brasileiros, meu próximo passo foi buscar resultados de pesquisas realizadas sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear em outros países, dentre eles França e Estados Unidos.

Alguns grupos de estudos em outros países têm se preocupado em pesquisar o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear nos cursos em nível superior.

Na França, o grupo formado por Jean-Luc Dorier (1997) em colaboração com Aline Robert (1997), Jacqueline Robert (1997) e Marc Rogalski (1997) desenvolveu um programa de pesquisa em ensino-aprendizagem de Álgebra Linear no primeiro ano de universidades francesas de ciências (DEUG).

Estas pesquisas nas universidades francesas ganharam um impulso muito grande após a publicação da tese de doutorado de Jean-Luc Dorier, no início da década de 90, intitulada "*Contribution à l'Étude de l'Enseignement à l'Université des Premiers Concepts d'Algèbre Linéaire. Approches Historique et Didactique*".

Dentre vários trabalhos realizados pelo grupo encontramos dentre outros assuntos, a pesquisa que enfoca o ensino dos conceitos de independência e dependência linear, publicada no artigo *“The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces” (*DORIER, 1998b*)*.

DORIER (1998b) destaca em suas pesquisas que o ensino da Álgebra Linear é apresentado de modo excessivamente formal aos estudantes. Para ele, em muitos casos, é fundamental iniciarmos o conceito pela sua definição formal. No caso da independência linear, segundo Dorier, o uso da definição formal oferece freqüentemente problemas de formulação do conceito a alunos iniciantes ao estudo da Álgebra Linear, principalmente no que se refere à utilização da língua natural.

Por esse motivo, caberia aos professores procurar encontrar outros termos utilizando o registro da língua natural que pudessem auxiliar o aluno a compreender e caracterizar os objetos matemáticos de estudo, tornando-se alavancas-meta de acordo com as pesquisas de Padredi e Oliveira analisadas nesse capítulo.

ANDREOLI (2002, 2003, 2005) realizou uma pesquisa com alunos do primeiro ano de uma universidade da Argentina na área das ciências exatas e com professores do ensino fundamental como o objetivo de diagnosticar quais são as concepções que os alunos e os professores apresentam sobre as noções de independência e dependência linear, utilizando como referencial teórico o Modelo Teórico dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud (1990).

A autora inicialmente realizou alguns testes com os alunos e analisou as respostas e justificativas que eles davam sobre as questões.

O teste aplicado aos alunos consistia em duas perguntas:

Pergunta a

O vetor (-3, 2) é uma combinação linear dos vetores (0, 1) e (3,2)? Justifique sua resposta.

Pergunta b

Os vetores (3, -2) e (-3/2, 1) são linearmente independentes? Justifique sua resposta.

Andreolli chegou aos seguintes resultados:

- 67% dos alunos responderem incorretamente à **pergunta a**, por não dominarem um método ou procedimento que permite determinar se um vetor do $\mathbb{R}^2$ é ou não combinação linear dos outros;

- 61% dos alunos não conheciam um método ou procedimento para responder à **pergunta b** que permite determinar se um conjunto de vetores no $\mathbb{R}^2$ é linearmente independente.

Na segunda fase da pesqusa, a autora analisou as respostas que os professores davam com um problema que envolvia o conceito de dependência linear.

No que se refere ao problema proposto, o sistema linear obtido correspondente seria:

$$\begin{cases} b+c=60 \\ 2b+6c=250 \quad \text{com } \mathrm{b,c} \in \mathrm{N}^* \\ c=2b \end{cases}$$

O teste solicitava calcular os valores de *b* e *c*, e o professor constataria que o sistema é incompatível.

A seguir, foi solicitado aos professores alterar os valores do sistema de modo a torná-lo possível e determinado e posteriormente pediu-se novas alterações no sistema de modo a torná-lo indeterminado.

Nas entrevistas com os professores perguntou-se como eles trabalhavam a resolução de sistemas de equações lineares, se os professores utilizavam nas aulas sistemas indeterminados e em que momento os professores comentam as idéias de independência linear entre as equações de um sistema linear.

Como resultado, a pesquisa mostrou que muitos professores não responderam à pergunta relacionada ao sistema linear possível e indeterminado, por não compreenderem a relação de dependência entre as equações e o número de soluções de um sistema linear. Consequentemente, poucos professores trabalhavam a situação de um sistema linear indeterminado com os seus alunos, muito menos as relações de dependência linear entre equações na resolução de sistemas lineares.

Por fim, na terceira fase da sua pesquisa, a autora realizou uma entrevista semi-estruturada com seis alunos do curso na área de ciências exatas, baseada em duas perguntas formuladas da seguinte maneira:

Primeira Parte

Escreva quatro conjuntos de três vetores no $\mathbb{R}^3$ em que exatamente nenhum, um, dois e três vetores respectivamente, sendo combinação linear dos demais.

Na segunda parte, foram feitas algumas perguntas das quais apresentarei algumas a seguir:

Segunda Parte

Classifique em verdadeiro ou falso as seguintes implicações:

a) Se em um conjunto de vetores, em que cada vetor não é combinação linear dos outros, então o conjunto é linearmente independente.

b) Se existe uma combinação linear nula de todos os vetores de um conjunto, então esse conjunto é linearmente dependente.

c) Se existe uma combinação nula trivial de todos os vetores de um conjunto, então o conjunto é linearmente independente.

A autora diagnosticou que apenas 16,7% responderam corretamente as perguntas *a, b* e *c*, que estão vinculadas às definições de independência e dependência linear.

Além disso, a autora concluiu de um modo geral que o caráter unificador e generalizador do conceito de espaço vetorial, constituem o principal obstáculo para a apropriação das noções de independência e dependência linear.

Alguns obstáculos diagnosticados pela autora podem ser destacados, como a resistência dos alunos de escrever em uma combinação linear, um vetor com coeficiente zero, ou a dificuldade em se utilizar a representação na língua natural para caracterizar as definições de independência e dependência linear.

Outros resultados obtidos na pesquisa da autora são as conclusões e concepções errôneas que os alunos se apropriam com relação aos conceitos de independência e dependência linear, como por exemplo, que a partir de um conjunto de vetores linearmente dependentes não se pode obter um conjunto linearmente independente, ou que o caso de dependência linear se reduz a observar se a cardinalidade do conjunto de vetores é igual à dimensão do espaço.

Esses resultados de pesquisa me fazem refletir novamente sobre o uso da representação das definições de dependência e independência linear na língua natural. Será que os livros didáticos de Álgebra Linear exploram bem a representação em língua natural para auxiliar a descrever e caracterizar o objeto matemático?

O que me surpreendeu nessa pesquisa foi o fato dos próprios professores do ensino fundamental das escolas que foram entrevistados pela pesquisadora apresentarem dificuldades na compreensão das noções de independência linear, como não reconhecer a relação de dependência entre as equações de um sistema, ou até mesmo resolver um sistema linear indeterminado.

Quanto aos alunos entrevistados do ensino superior, destaco as concepções errôneas eles se apropriam sobre as noções de independência e dependência linear, além da dificuldade em resolver exercícios que envolvam implicações matemáticas e demonstrações.

Em sua pesquisa realizada na França, DIAS (1993) trabalhando com alunos do primeiro ano de um curso superior francês (DEUG) noções elementares de dependência linear e posto no $\mathbb{R}^n$, por meio de provas escritas investigando qual a utilização do método de Gauss em noções centrais de Álgebra Linear, chegou à conclusão que:

> Quanto ao conceito de dependência linear, não ficou claro se ele ficou bem entendido, pois quando eles tinham que usar a noção de dependência linear como meio para "controlar" as respostas encontradas, os estudantes não o faziam ou desenvolviam algum outro procedimento. (DIAS, 1993, apud CELESTINO, 2000, p. 64).

Essa afirmação fez com que a autora concluísse que os alunos tinham uma noção de dependência linear, porém, encontram dificuldade para aplicá-la quando o problema proposto não traz esse conceito explícito no enunciado.

A autora utilizou como referencial teórico a Engenharia Didática, de Michele Artigue (1998).

Percebo nessa conclusão de Dias que os alunos não conseguem aplicar a noção de dependência linear em outros contextos, mas somente em alguns casos como, por exemplo, verificar uma lista de n-uplas utilizando um algoritmo memorizável (método de Gauss, por exemplo).

OUSMAN (1996) aplicou um teste em alunos no final do curso na área de exatas de uma universidade francesa. Com esse teste, ele quis analisar a concepção dos alunos a respeito da noção de independência linear no contexto de equações lineares e em geometria após o ensino da teoria dos espaços vetoriais. Ele aplicou diversos exercícios sobre sistemas de equações lineares e pediu aos alunos para verificar se as equações eram independentes ou não. Os resultados mostraram também que os alunos justificam suas respostas com a resolução do sistema linear e não exploram a representação geométrica.

Conseqüentemente, os alunos raramente deram uma justificativa em termos de combinação linear, ou seja, não percebiam as relações existentes entre as equações, pois apenas apresentavam a resolução do sistema linear, utilizando algum algoritmo para a resolução.

Com relação a esse resultado encontrado pelo autor, ele concluiu que o aluno realmente não faz uma análise de o sistema ser indeterminado com o fato de existir uma relação entre as equações.

Mas o que se deve refletir é se os livros didáticos exploram essa relação ou se até os livros didáticos e os professores trabalham com as relações entre as equações de um sistema e o registro geométrico, quando possível. Os resultados da pesquisa de Andreoli apontaram que os professores entrevistados por ela não costumam realizar esse tipo de atividade, o que acaba não sendo efetuadas pelos alunos.

Aline ROBERT (1989) e Jacqueline ROBINET (1989) (apud Dorier, 1994) diagnosticaram as possíveis dificuldades encontradas pelos alunos na compreensão da definição formal de independência linear, e suas aplicações em vários contextos.

Segundo as pesquisadoras, alguns alunos têm provado suas habilidades em verificar se um conjunto de vetores no $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente utilizando o método da eliminação de Gauus. Porém, no contexto de equações, polinômios ou funções, eles ainda não são capazes de usar o conceito de independência linear.

Robert e Robinet realizaram testes com os alunos sobre a noção e independência linear em contextos mais formais inicialmente com as seguintes questões:

1. Seja *U*, *V* e *W* três vetores no $\mathbb{R}^3$. Se qualquer par desses vetores não for colinear, eles são independentes?
2. Seja *U*, *V* e *W* três vetores no $\mathbb{R}^3$, e *f* um operador linear no $\mathbb{R}^3$, Se *U*, *V* e *W* são independentes, *f(U), f(V)* e *f(W)* são independentes?
3. Seja *U*, *V* e *W* três vetores no $\mathbb{R}^3$, e *f* um operador linear no $\mathbb{R}^3$, Se *f(U), f(V)* e *f(W)* são independentes, *U, V* e *W* são independentes?

Como resultado dessa pesquisa, verificou-se que muitos alunos utilizaram a definição formal de independência linear e experimentam diferentes combinações utilizando hipóteses e conclusões, porém apresentam dificuldades na prova e demonstração das afirmações.

Na primeira afirmação, por exemplo, muitos alunos responderam “sim” dando mostras das dificuldades que eles apresentam no tratamento da noção de independência linear de um modo global e na interpretação geométrico dessa noção.

Alguns alunos, segundo as pesquisadoras, tratam questões de independência linear por sucessivas aproximações começando com dois vetores, testando um a um os demais até que o conjunto se torne linearmente dependente. Além disso, as pesquisas revelaram que os alunos apresentam o uso incorreto de implicações matemáticas, caracterizada pela confusão entre hipótese e tese.

Isso nos remete a refletir sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos no tratamento global do conceito de independência linear, assim como na interpretação geométrica dessa noção. Como os livros didáticos poderiam explorar mais situações que possam minimizar essas dificuldades e quais registros de representação podem ser explorados nessa situação?

Nos Estados Unidos, no início da década de 90, foi organizado um grupo de pesquisas denominado LACSG (The Linear Algebra Curriculum Study Group) que elaborou um documento que visava refletir a respeito da reforma do ensino de Álgebra Linear nas universidades dos Estados Unidos, por meio de recomendações e da proposta de uma matriz curricular.

Dentre alguns professores e pesquisadores participantes do grupo, podemos destacar: David Carlson (*San Diego State University*), Charles R. Johson (*College of William and Mary*), Guershon Harel (*Purdue University*) e David C. Lay (*University of Maryland*).

De acordo com o grupo, pesquisas realizadas nos Estados Unidos mostram nos últimos anos o aumento da demanda de alunos que cursam a disciplina de Álgebra Linear em carreiras como Engenharia, Ciências da Computação, Economia, Física, dentre outras. A preocupação do LACSG estava ligada ao fato de que o currículo de Álgebra Linear, em muitas universidades, não era adequado às necessidades dos estudantes dessas diversas carreiras.

Um comentário relevante que deve ser feito é o fato de que em muitas carreiras e cursos como Informática e Ciências da Computação, a aplicação da Álgebra Linear na resolução de problemas é muito grande. Porém, alguns aspectos da Álgebra Linear nesses cursos são privilegiados em detrimento de outros como, por exemplo, a representação das coordenadas de um vetor na forma de uma matriz-coluna, o que facilita o processamento de dados em muitos *softwares* como o MATLAB (*Matrix Laboratory*).

Após reuniões, encontros, palestras, comunicações, oficinas e outras atividades realizadas com estudantes, professores e profissionais ligados à disciplina de Álgebra Linear, o grupo apresentou algumas recomendações e sugestões no ensino da Álgebra Linear que serão comentadas e analisadas a seguir.

Segundo o LACSG, inicialmente um curso de Álgebra Linear deve apresentar as definições de maneira cuidadosa, respeitando o aspecto formal da Álgebra Linear e suas linguagens. Segundo David Lay (1999): "*A Álgebra Linear é, em sentido prático, uma linguagem*".

A afirmação de Lay nos remete à importância da compreensão dessa linguagem e conseqüentemente ao uso das representações como forma de expressá-la.

Além disso, segundo o grupo de estudos, a demonstração dos teoremas aumenta a compreensão dos objetos matemáticos em Álgebra Linear.

Outra recomendação baseia-se no fato de que num segundo momento do curso de Álgebra Linear deve-se priorizar algumas generalizações que não foram feitas num primeiro instante, devido a sua curta duração, tendo outros tópicos como prioridade.

Nesta recomendação verificamos a preocupação em adicionar tópicos em um segundo momento que possam atender outras clientelas, que priorizem maiores abstrações, como o estudo de espaços das funções, por exemplo.

Para o LACSG a visão mais “concreta” de objeto matemático matriz, por exemplo, pode ser feita com o uso de novas tecnologias educativas. O grupo de estudos sugere a utilização do MATLAB ou outro similar, como recurso didático a ser explorado num primeiro curso de Álgebra Linear.

Analisando essa recomendação é compreensível a utilização de *softwares* como recursos didáticos que auxiliam na compreensão dos objetos matemáticos. O que se pode discutir é a utilização do termo “concreta” no que se refere ao objeto matemático matriz. O que, nesse caso, o autor entende por “concreto” e o que seria concreto para os alunos? Matriz é um objeto “concreto” para os alunos?

Quanto ao conteúdo, o grupo recomenda a exploração de propriedades do $\mathbb{R}^n$ como um conjunto de n-uplas e não como um espaço vetorial, com forte ênfase geométrica, sem o uso de demonstrações formais.

No Brasil, no ensino de Geometria Analítica e Vetores, verifica-se a exploração das propriedades geométricas dos vetores na abordagem dos objetos matemáticos.

O conceito de matriz pode ser empregado como uma transformação linear. O aluno pode compreender uma multiplicação matricial Ax como uma transformação linear que resulta em um outro vetor. Além disso, serão explorados autovetores e autovalores, e depois é apresentado o conceito de diagonalização de matrizes.

No que se refere ao conceito de independência linear, o pesquisador israelense Guershon HAREL (1997), membro do LACSG, em suas experiências com estudantes de um primeiro curso de Álgebra Linear, diagnosticou as dificuldades dos alunos com o conceito de independência linear na resolução de problemas que envolvam vetores de uma maneira não-específica, ou seja, quando os vetores dados não são “familiares” aos alunos, como funções polinomiais, por exemplo.

Segundo Harel, muitos livros-textos elementares de Álgebra Linear introduzem o conceito de independência linear de uma forma completamente clara e elementar, e conseqüentemente os alunos usualmente têm pequenas ou nenhuma dificuldade para compreender o significado de independência linear. Com isso, após os conceitos serem abordados nos livros didáticos, os alunos podem resolver problemas simples como, por exemplo, determinar se um conjunto de vetores no $\mathbb{R}^n$ linearmente independente.

Harel em suas experiências solicitava aos alunos para determinar se uma dada lista de vetores, digamos, no espaço $\mathbb{R}^5$ era linearmente independente. Seus alunos respondiam corretamente e a compreendiam, pois a questão proposta equivalia à questão se $AX = 0$, onde A é a matriz em que as colunas são formadas pelos vetores dados, tem somente a solução trivial ou não.

Ele verificou que, dada uma lista de vetores de um determinado conjunto no $\mathbb{R}^n$, os alunos determinam a dependência linear entre os vetores ao resolver o sistema linear homogêneo formado pelas coordenadas dos vetores. Entretanto, para o pesquisador essa resolução não nos leva a concluir se os alunos realmente compreenderam as noções de independência e dependência linear, assim como diagnosticou Dias.

O que o aluno precisaria perceber é a conexão existente entre um conjunto de vetores e a resolução de um sistema linear homogêneo, compreender o significado sistema linear homogêneo formado e perceber a relação existente entre as equações do sistema linear homogêneo e a dependência linear entre os vetores.

A seguir, os alunos encontraram dificuldades em responder às seguintes questões:

1. Vetores não-nulos mutuamente ortogonais são linearmente independentes?

2. Se S é o conjunto gerador dos vetores linearmente independentes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ em V e α é um vetor em V, mas não em S, os vetores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ são linearmente independentes?

3. Realizar operações elementares nas colunas das matrizes afeta sua independência (ou dependência) linear?

As dificuldades residiam no fato de se exigir alguma demonstração por parte do aluno ou até mesmo em utilizar o conceito de independência linear não somente a uma dada lista de vetores do $\mathbb{R}^n$.

Alguns resultados encontrados por Harel em suas pesquisas merecem análise e alguns comentários, conforme descreverei a seguir.

Quanto à forma dos livros-texto de Álgebra Linear introduzir de maneira completamente clara o conceito de independência linear entre os vetores, precisaríamos de uma explicação maior do que seria essa forma “clara”. Como podemos constatar essa afirmação?

O que se verifica nos resultados das pesquisas de Harel é o fato dos alunos apresentarem dificuldades com o conceito de independência linear nos problemas em que se exige do aluno uma demonstração, a aplicação do conceito de independência linear na resolução de problemas em contextos específicos, como a utilização de outros espaços vetoriais diferentes do R^n (como, por exemplo, o espaço das matrizes, dos polinômios de grau n).

Para Harel, os alunos compreendem a idéia de independência linear no contexto do $\mathbb{R}^3$ como um espaço geométrico de segmentos orientados, o $\mathbb{R}^5$ como um espaço algébrico. Entretanto, um problema de independência linear contextualizado no espaço $\mathbb{P}_5$ ($\mathbb{R}$), dos polinômios de grau menor ou igual a 5, mais o polinômio nulo, pode causar dificuldades para a compreensão dos alunos.

Como exemplo, Harel cita o seguinte conjunto $\{3x^2 - 1, 2x, 7\}$ e solicita-se ao aluno se os vetores do conjunto são linearmente independentes.

Harel diagnosticou a dificuldade que os alunos apresentaram para resolver essa questão, pois os alunos não conseguiam verificar se o conjunto era linearmente independente ou não.

Uma explicação dada por Harel das dificuldades apresentadas pelos alunos no problema acima é o fato deles não terem clara a idéia de independência linear de funções pelo motivo do conceito de funções como um vetor não ser “concreto” para os alunos.

Essa dificuldade foi constatada também na pesquisa de Dias e reflete a dificuldade intrínseca que os alunos apresentam quanto à utilização da noção de independência linear em conceitos mais formais. Dorier também faz comentários sobre esse fato, citando que o problema surgiu historicamente por estar ligado à resolução de sistemas de equações lineares e que o conceito de independência linear demorou a ser utilizado em outros contextos.

Isso ocorreu no exemplo apresentado anteriormente por Harel, pois os alunos precisam compreender que para verificar a independência linear dos vetores do conjunto $\{3x^2 - 1, 2x , 7\}$ não é suficiente escrever uma igualdade do tipo:

$$a.(3x^2 - 1) + b.(2x) + c.7 = 0 \qquad (1)$$

e determinar as constantes *a, b* e *c,* mas sim compreender (1) como uma igualdade de funções.

UHLIG (2002a), professor do Departamento de Matemática da Auburn University desde 1982, em seu livro *Transform Linear Algebra* enfatiza que uma das primeiras tarefas em Álgebra Linear elementar é descrever todas as transformações lineares *f:* $R^n \rightarrow R^m$ como uma multiplicação de um vetor por uma matriz. Segundo o autor, os alunos que cursam pela primeira vez a disciplina de Álgebra Linear apresentam muitas dificuldades com conceitos abstratos bem como provas e demonstrações dos teoremas.

Segundo o autor, os conceitos básicos da Álgebra Linear – subespaços, dependência linear, base e dimensão – devem ser introduzidos num primeiro curso de Álgebra Linear por meio das transformações lineares, que segundo ele é o assunto fundamental do qual podem emergir outros conceitos essenciais da Álgebra Linear.

É interessante notar a preocupação de Uhlig em encontrar uma situação-problema, a "pedra filosofal" da Álgebra Linear, ou seja, um objeto matemático de onde todos os outros conceitos de Álgebra Linear possam emergir. Segundo Uhlig as transformações lineares seriam esse objeto.

Para o autor, a noção de independência linear deve ser introduzida utilizando-se também como recurso o algoritmo da redução de Gauss no escalonamento de matrizes.

No caso da independência linear, Uhlig destaca que a definição "clássica" encontrada em muitos livros didáticos de Álgebra Linear com o uso de implicações: *"Um conjunto de n vetores $\{x_i\} \subset \mathbb{R}^m$ é linearmente independente se e somente se* $\sum_i \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow$ *todos* $\alpha_i = 0 \in R$ *para todo i"* não é intuitiva para os alunos e segundo o autor, completamente além da compreensão dos estudantes de um primeiro curso de Álgebra Linear.

Seguindo a recomendação do LACSG (The Linear Algebra Curriculum Study Group), que enfatizaa multiplicação matricial, a definição de independência linear pode ser substituída por uma multiplicação de matrizes na forma de uma transformação linear:

$$\begin{gathered} R^K \to R^n \\ x \mapsto U.x \end{gathered}$$

em que se verifica qual é a dimensão da imagem de $\mathbb{R}^k$ sobre a transformação dada por U e quais vetores geram a imagem Im (U) = Subespaço gerado pelos vetores $\{u_1, ..., u_k\}$ = *Span* $\{u_1, ..., u_k\}$.

Dessa forma, temos que:

k vetores $u_i \in R^n \quad \leftrightarrow \qquad U = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix}_{nk}$, a matriz com colunas $u_i \in R^n$.

A redução de U mostra que algum vetor coluna u_i com o pivô[1] correspondente a redução é uma combinação linear, isto é, linearmente dependente da coluna precedente u_j para j < i.

Para o autor, a primeira definição dita "concreta" de independência linear pode ser resumida da seguinte forma:

"Um conjunto de vetores $u_1, ..., u_k \in R^n$ é:

a) Linearmente dependente $\Leftrightarrow$ a forma escalonada de U_{nk} tem menos que k pivôs;

b) Linearmente independentes $\Leftrightarrow$ a forma escalonada de U_{nk} tem k pivôs".

Como exemplo, Uhlig considera o seguinte problema:

[1] Pivô – denomina-se pivô o elemento não-nulo localizado em uma determinada linha ou coluna de uma matriz na resolução do sistema linear pelo método do escalonamento.

"Os vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$*,* $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *são linearmente independentes ou não?"* (p. 340).

Segundo o autor, empregando-se a "definição concreta" os vetores são representados como colunas de uma matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e reduzindo-se suas fileiras obtemos como matriz equivalente $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ com um pivô, o que nos leva a concluir que os vetores são linearmente independentes.

Gostaria de ressaltar, em minha opinião, que assim como já foi comentado nas pesquisas de Harel, a utilização da resolução de um sistema linear e posteriormente o escalonamento da matriz formada pelos vetores em grande medida "esconde" a relação entre os vetores, fazendo com que o significado da independência linear "perca" um pouco o seu sentido.

Em contrapartida, Dorier et al (2003) comenta o trabalho de Uhlig relacionado à introdução dos conceitos de Álgebra Linear por meio das transformações lineares - especificamente sobre a noção de independência linear – que a idéia da dependência entre as equações utilizada na resolução pelo método de Gauss não é imediatamente unida com a idéia de dependência linear.

Segundo Dorier, do ponto de vista histórico, essa dependência entre equações encontra-se nos trabalhos do matemático suíço Leonard Euler (1750), denominada por Dorier como *"dependência inclusiva".* O ponto de vista de dependência entre equações, para Dorier, tinha como objetivo principal resolver equações é logicamente equivalente ao conceito de dependência linear, mas é muito diferente do ponto de vista cognitivo.

O método da eliminação Gausiana com isso deve ser utilizado de modo a fazer com que o aluno reflita sobre suas ações ao resolver um problema. Dorier adverte para as conseqüências do ensino proposto por Uhlig que essa “ferramenta mágica” esconda idéias essenciais sobre dependência linear.

2.3 - Considerações parciais e análise

De acordo com as pesquisas analisadas sobre o ensino de Álgebra Linear, mais especificamente a respeito dos resultados obtidos acerca do ensino-aprendizagem das noções elementares, como independência e dependência linear, base de um espaço vetorial, podemos encontrar alguns pontos em comum e alguns contrapontos passíveis de se formular algumas hipóteses.

Para resumir as conclusões das pesquisas descritas e relevantes ao meu trabalho, a seguir na tabela 1 encontram-se os principais resultados relacionados com o ensino das noções elementares de Álgebra Linear, sobretudo das noções de independência e dependência linear:

Tabela 1 – Resultados das pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear

AUTOR	RESULTADO DAS PESQUISAS / RECOMENDAÇÕES
Marco Antonio Di Pinto	***Resultados:*** *-índices altos de reprovação dos alunos em Geometria Analítica e Álgebra Linear.* ***Recomendações**:* *- utilização de diferentes tipos de representações.*

Amarildo M. da Silva	***Resultados:*** *- utilização dos alunos de campos semânticos diferentes daqueles utilizados pelo professor na resolução de exercícios.* ***Recomendações**:* *- abordagem da Álgebra Linear em diferentes contextos.*
Zoraide Padredi	***Resultados:*** *- dificuldades dos professores ao ensinar a noção de independência linear, pelo fato dos alunos a consideram muito "abstrata".* ***Recomendações**:* *- utilização pelos professores de alguns termos como possíveis alavancas-meta;* *- utilizar a Geometria Analítica como "concreta".*
Luis Carlos de Oliveira	***Resultados:*** *- utilização de poucos recursos meta nas aulas de um professor de Álgebra Linear;* *- dificuldade dos alunos ao determinar se um conjunto de vetores é L.D. ou L.I.* ***Recomendações**:* *- utilizar recursos meta como forma de facilitar a compreensão dos objetos matemáticos.*
Cláudia V. Araújo	***Resultados:*** *- utilização de poucas alavancas-meta nos livros didáticos de Álgebra Linear.* ***Recomendações**:* *- possibilidade de pesquisar situações que provoquem a utilização de conceitos aprendidos pelos alunos na aquisição de novos conceitos.*
Jean-Luc Dorier	***Resultados:*** *- Dificuldades da utilização da língua natural na definição de dependência linear.* ***Recomendações**:* *- Iniciar o ensino de um objeto matemático evitando utilizar num primeiro momento a sua definição formal.*

Daniela Andreoli	***Resultados:*** *- dificuldade dos alunos ao determinar se um conjunto de vetores é L.D. ou L.I;* *- dificuldade dos professores na resolução de sistemas lineares indeterminados e verificação das relações de dependência entre as equações;* *- concepções errôneas que os alunos apresentam sobre as noções de independência e dependência linear;* *- dificuldades que os alunos apresentam em resolver exercícios na língua natural que envolvam implicações matemáticas.*
Marlene Alves Dias	***Resultados:*** *- dificuldade dos alunos em aplicar a noção de dependência linear em conceitos mais formais;* *- alunos relacionam dependência linear com a resolução de sistemas lineares.*
Ousman	***Resultados:*** *- dificuldade dos alunos na justificativa da resolução de sistemas lineares indeterminados utilizando combinações e relações de dependência entre as equações.*
Robert e Robinet	***Resultados:*** *- habilidade dos alunos em mostrar se um conjunto de vetores no $\mathbb{R}^n$ é L.I. ou L.D.;* *- dificuldade dos alunos em aplicar a noção de dependência linear em conceitos mais formais e interpreta-la geometricamente.* *- dificuldade dos alunos em exercícios que exigem demonstração e o uso de implicações lógicas.*
Guershon Harel	***Resultados:*** *- dificuldade dos alunos quando a noção de independência linear é abordada em outros contextos;* *- alunos relacionam dependência linear com a resolução de um sistema linear homogêneo.*

Um fato em comum encontrado em algumas pesquisas brasileiras e em muitas pesquisas de autores estrangeiros sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear é o diagnóstico das dificuldades encontradas no ensino das definições de independência e dependência linear.

Dos resultados obtidos, verifica-se a necessidade da utilização da Geometria Analítica num primeiro momento do curso de Álgebra Linear para introduzir conceitos novos, explorando os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ considerados pelos pesquisadores como "concreto". Isso reforça conseqüentemente a necessidade do uso da representação geométrica dos vetores como forma de explorar os conceitos possivelmente já adquiridos pelos alunos. Essa conclusão está ligada aos resultados obtidos por Padredi e Harel.

O registro geométrico possivelmente pode provocar no aluno uma situação que, segundo Araújo, auxilie na aquisição do conhecimento de novos objetos matemáticos. Mas o registro geométrico não deveria ser exclusivamente o único a ser explorado. De acordo com Di Pinto, devem-se diversificar os registros de representação utilizados, e até mesmo utilizá-lo em diversos contextos, como afirmou Silva.

Outra dificuldade apresentada pelos alunos é a utilização do conceito de independência linear em contextos mais formais, como apontaram Harel e Dias. O fato é que a noção de independência linear não deve ficar restrita à resolução de sistemas lineares homogêneos, e sim explorá-la em outros espaços vetoriais, como o espaço dos polinômios de grau *n*, das matrizes, das funções contínuas num intervalo.

Verifica-se que assim como o uso do registro geométrico, a utilização de um algoritmo (Método da Eliminação de Gauss) na determinação da independência linear entre os vetores não é suficiente. Deve-se explorar a noção em outros contextos e situações, na busca de generalizar e formalizar o conceito do objeto matemático em estudo.

O uso do registro de representação da língua natural e até mesmo questões que envolvam prova e demonstração tem sido um problema para os alunos, conforme Dorier, Robert , Robinet e Andreoli.

E com relação aos livros didáticos de Álgebra Linear, será que eles abordam esses resultados e conclusões obtidas pelas pesquisas? Como são explorados esses itens discutidos em termos de registros de representações?

Uma pesquisa nos livros didáticos de Álgebra Linear sobre os registros de representação utilizados pelos autores nas definições de independência e dependência linear ainda não foi explorada.

Constatando-se a escassez de trabalhos de investigação a respeito das noções de independência e dependência linear nos livros didáticos e os registros de representação semiótica utilizados, o meu problema de pesquisa consiste em diagnosticar e analisar quais são os registros de representação semiótica mais utilizados dos cinco livros didáticos de Álgebra Linear selecionados para este trabalho, quais são os tratamentos e conversões mais explorados na definição, exemplos e exercícios propostos. Como referencial teórico será utilizada a teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval (2000).

Algumas questões importantes podem ser formuladas para auxiliar no estudo do problema de pesquisa, sendo que essas perguntas serão respondidas à medida que ele evoluir nos capítulos posteriores. Dentre as perguntas que norteiam a pesquisa, podemos destacar:

(a) Em quais capítulos dos livros didáticos analisados se encontram as definições de independência e dependência linear, como esse conceito é introduzido e quais os exemplos resolvidos e exercícios propostos?

(b) Quais os tipos de registros de representação semiótica são mais explorados nas definições de independência e dependência linear e quais são os menos explorados?

(c) Como são tratados os exemplos e quais as características dos exercícios propostos com relação aos registros?

(d) Como os registros são articulados e quais os tratamentos e conversões de registros efetuados?

(e) Nas conversões dos registros de representação utilizadas pelos autores, ocorre o caso da representação final do objeto não transparecer ou se tornar clara à representação inicial, causando o que denominamos de não-congruência?

O próximo capítulo tem por finalidade apresentar um Quadro Teórico, em que será descrita a fundamentação teórica e serão analisadas as idéias a respeito da teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2000).

CAPÍTULO III

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 - A Representação dos Objetos Matemáticos

Este capítulo tem por finalidade apresentar ao leitor a fundamentação teórica do meu trabalho de pesquisa e foi elaborado a partir de leituras dos artigos sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1999, 2000) e do livro Aprendizagem em Matemática – Registros de Representação Semiótica (2003), que tem como organizadora a professora Sílvia Dias Alcântara Machado.

Para introduzir e familiarizar o leitor com a fundamentação que será apresentada a seguir gostaria inicialmente de ressaltar alguns pontos pertinentes a respeito da aprendizagem em Matemática.

Em Educação Matemática, uma possível maneira de procurar compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos matemáticos seria realizar uma análise não somente do ponto de vista matemático e epistemológico, mas também do ponto de vista cognitivo das atividades matemáticas propostas aos alunos.

Evidentemente que este trabalho não tem por objetivo descrever a complexidade do funcionamento cognitivo dos alunos nas atividades matemáticas, mas sim analisar e destacar uma característica específica do pensamento matemático com relação aos outros domínios do conhecimento – a questão do registro de representação do objeto de estudo.

A Matemática se diferencia das outras ciências e áreas do conhecimento pelo fato de termos acesso aos seus objetos somente por meio de sua representação. A biologia, por exemplo, tem a possibilidade de visualização dos seus objetos de estudo (estruturas celulares, plantas, animais, etc.) por intermédio dos instrumentos de visualização (microscópios), assim como a astronomia, a química e a física.

No caso dos objetos matemáticos surge a necessidade de utilizarmos um sistema de registros, símbolos e sinais para a sua representação. Esses registros não são simples códigos, pois possuem a função de comunicação e caracterização do objeto representado. A importância da utilização dos registros de representação se refere a uma possível maneira de facilitar o processo de aprendizagem, além de ser um meio para o professor tornar mais acessível à compreensão da Matemática.

A noção de registro de representação se refere ao domínio de sinais que servem para designar qualquer objeto. Quando utilizamos registros e símbolos matemáticos para representarmos um objeto, devemos tomar o cuidado de que o conteúdo de uma representação não é o objeto representado em si, mas a sua representação tem a característica de permitir explicitar ou revelar as propriedades do objeto representado.

3.2 - Os Registros de Representação Semiótica

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval[2] (1999) introduz a noção de *registro de representação* para analisar a influência das representações dos objetos matemáticos sobre o ensino-aprendizagem da Matemática. Em sua obra *Sémiosis et pensée humaine,* o autor descreve que numa determinada atividade matemática pode-se representar um objeto matemático utilizando os registros de *representação semiótica.* Duval define as representações semióticas da seguinte maneira:

> São produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. (DUVAL, 1993, p.39).

Em síntese, Duval explica que o registro de representação é uma maneira típica de representar um objeto matemático, um problema ou uma técnica. O sistema no qual podemos representar um objeto matemático Duval denomina *sistema* ou *registro semiótico*. Os sistemas semióticos são importantes não somente como um sistema de comunicação, mas também para organizar informações a respeito do objeto representado.

Podemos citar alguns exemplos de registros de representação, como a escrita, a notação, as figuras, diagramas e esquemas, os signos e símbolos utilizados para representarmos um objeto matemático.

As representações semióticas são consideradas geralmente como uma simples maneira de exteriorização das representações mentais para fins de comunicação, ou

[2] Raymond Duval – filósofo e psicólogo desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França (1970-1999). Atualmente é professor emérito na Université du Litoral Cote d´Opale, França.

seja, para torná-las acessíveis ao indivíduo, sendo essencial à atividade cognitiva do pensamento.

Duval destaca a importância dos registros de representação na evolução do pensamento matemático com a seguinte afirmação:

> **A importância primordial das representações semióticas**[3] - É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. (DUVAL, 2003, apud MACHADO, 2003, p.13).

Podemos citar, por exemplo, na Matemática o sistema ou registro figural, no qual podemos representar uma função polinomial do 1º grau graficamente.

Outro exemplo de um registro semiótico agora em Álgebra Linear é o registro simbólico. Nesse sistema semiótico podemos representar algebricamente, por exemplo, um subespaço vetorial, conforme o exemplo a seguir:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; ax + by + cz = 0; \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

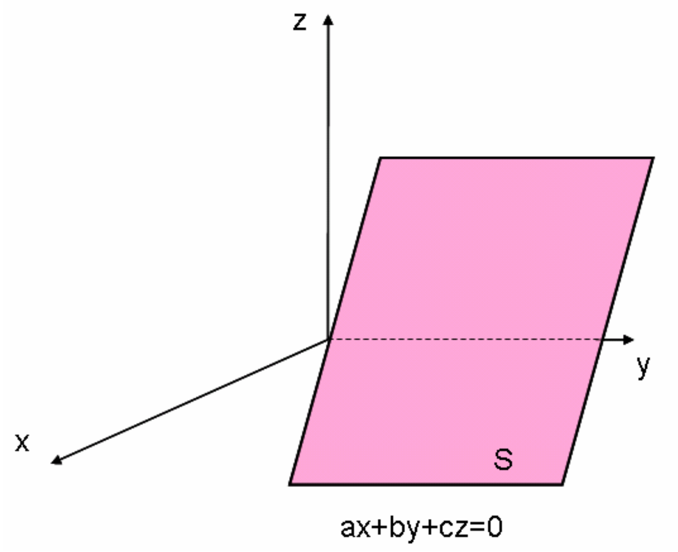
OBJETO MATEMÁTICO: *Subespaço Vetorial*

SISTEMA SEMIÓTICO: *Simbólico*

REPRESENTAÇÃO: Algébrica

Podemos utilizar outros registros semióticos para representarmos um subespaço vetorial. No exemplo dado anteriormente, podemos utilizar o registro figural, utilizando a representação geométrica, conforme vemos na figura 3 a seguir:

[3] Negrito do autor



OBJETO MATEMÁTICO: *Subespaço Vetorial*

SISTEMA SEMIÓTICO: *Figural*

REPRESENTAÇÃO: Geométrica

Figura 3 – Representação de um subespaço vetorial

Verificamos que no exemplo anterior os símbolos utilizados para representar geometricamente um subespaço vetorial têm a função de caracterizar o objeto representado. Ao observarmos a figura 3, percebemos que o subespaço é constituído por triplas ordenadas *(x, y, z)*, que o vetor nulo (0, 0, 0) pertence ao subespaço, pois o plano passa por esse ponto. A representação, portanto, não significa o objeto matemático em si, mas nos fornece informações importantes a respeito do objeto matemático.

O registro semiótico do exemplo anterior permitiu organizar as informações a respeito do objeto matemático em estudo. Verificamos que outras características do subespaço representadas anteriormente não são possíveis de se organizar com a representação geométrica, como por exemplo, a relação existente entre o valor das coordenadas dos vetores pertencentes ao subespaço. O objeto matemático necessitaria de uma outra representação, como a algébrica, para tal informação. Essa possibilidade de mudanças de registro é que constitui, segundo Duval, uma condição importante para a aprendizagem em Matemática.

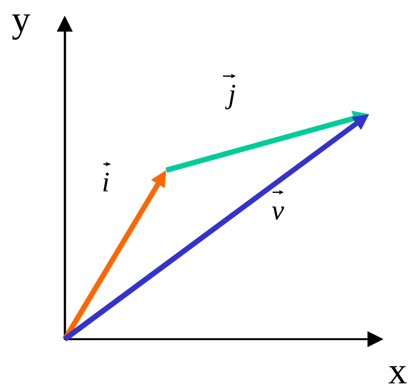
Nas atividades matemáticas, tais como a resolução de problemas, podemos representar um objeto matemático utilizando vários registros. Em Álgebra Linear, existe uma grande variedade de representações semióticas para um mesmo objeto matemático.

Por exemplo, para representarmos um vetor no $\mathbb{R}^2$ podemos utilizar alguns tipos de registros de representação, dentre eles:

- **Simbólico Algébrico:** $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

- **Numérico tabular:** $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Figural Geométrico:**



- **Língua Natural:** “O vetor $\vec{v}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$”.

Segundo Duval, para que um sistema semiótico seja um registro de representação, ele deve preencher três atividades cognitivas fundamentais que são: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Por representação identificável temos, por exemplo, o enunciado de uma frase, a elaboração de um texto, o desenho de uma figura, a elaboração de um esquema, a escrita de uma fórmula.

Duval destaca a importância da terceira atividade, como uma passagem necessária para permitir a coordenação dos registros vinculados a um mesmo conceito. Se as duas primeiras atividades se apresentam explícitas e são colocadas de maneira natural no ensino, a terceira é ignorada. Ele considera como ativa sua natureza no momento que as regras de funcionamento no interior de cada registro são adquiridas pela aprendizagem.

A coordenação, articulação e transformações dos registros de representação, segundo Duval, desempenham um papel fundamental nas atividades matemáticas. De um modo geral, não podemos falar sobre representação sem destacar as relações entre os sistemas semióticos que produzem as representações. Para estudar essas relações devemos analisar as *transformações* de registros. Segundo o autor:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação.
>
> Certamente, segundo os domínios ou as fases de pesquisa, em uma resolução de problemas um registro pode aparece explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro. (DUVAL, 2003, apud MACHADO, 2003, p.13-14).

As transformações dos registros de representação semiótica podem ser classificadas em dois tipos: os *tratamentos* e as *conversões* de registro. Procurarei a seguir estabelecer as diferenças entre esses dois tipos de transformação utilizando exemplos.

Os *tratamentos* de registro são transformações de representações dentro de um mesmo registro. Muitos sistemas semióticos permitem transformações de representações dentro do próprio registro. Os tratamentos constituem transformações estritamente internas ao registro, sendo muitos destes específicos de cada registro.

A estratégia da utilização dos tratamentos de registro, do ponto de vista pedagógico, consiste na tentativa em muitas situações do professor procurar o melhor registro de representação para que os alunos possam compreender um objeto matemático que está sendo ensinado.

Na aritmética encontramos várias situações de tratamentos de registro. Um número racional na forma decimal pode ser representado, por exemplo, na forma fracionária por meio de um tratamento dentro do registro numérico. Exemplo: $0{,}7 = \frac{7}{10}$. Esse tratamento pode facilitar a resolução de um exercício ou problema em que o número está inserido. Em algumas situações com expressões aritméticas é conveniente efetuarmos as operações com os números na representação decimal, e em outros casos, na forma fracionária.

Em Geometria Analítica, por exemplo, podemos escrever a equação da reta que passa pelo ponto P = (2, 1, 7) e possui vetor diretor $\vec{v} = (-3, 2, 8)$ de diversas maneiras, dentre as quais duas serão aqui utilizadas: a forma paramétrica e a forma simétrica. Essas duas representações encontram-se no registro simbólico-algébrico.

Para transformarmos de uma representação à outra realizamos um tratamento dentro do registro simbólico-algébrico, conforme observamos a seguir:

Exemplo:

Sendo P = (2, 1, 7), com $\lambda \in R$ e $\vec{v} = (-3,\ 2,\ 8)$, temos que:

$$r: \quad X = P + \lambda.\vec{v}$$

$$r: \quad (x,\ y,\ z) = (2, 1, 7) + \lambda\ (-3,\ 2,\ 8) \quad \Rightarrow r: \quad \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 7 + 8\lambda \end{cases}$$

Registro simbólico-algébrico

TRATAMENTO DE REGISTRO

Isolando-se λ nas três equações, teremos:

$$r: \quad \left\{ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \right.$$

$$r: \quad \left\{ \frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 7}{8} \right. \quad = (\lambda)$$

Registro simbólico-algébrico

Exemplo de um tratamento de registros

A primeira representação da reta, denominada forma paramétrica, estabelece uma relação entre as coordenadas dos pontos que pertencem à reta em função do parâmetro λ. Ela pode ser utilizada, por exemplo, para se determinar rapidamente as coordenadas de um ponto pertencente a essa reta atribuindo-se simplesmente um valor para o parâmetro λ. Já a segunda representação, denominada forma simétrica, estabelece uma relação entre as coordenadas dos pontos pertencentes à reta, podendo ser utilizada em outros contextos. A transformação de registro ocorreu por meio de um tratamento de registro.

Os tratamentos de registro podem ser utilizados também na resolução de problemas. Em Álgebra Linear, por exemplo, na resolução de um sistema linear pelo método do escalonamento, o objeto matemático – sistema linear – encontra-se no registro simbólico-algébrico, e sua resolução ocorre no próprio registro, conforme observamos a seguir:

Exemplo:

Resolva, pelo método do escalonamento, o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 16 \\ 2x - y + z = 9 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

Registro simbólico-algébrico

TRATAMENTO DE REGISTRO

Resolução:

A partir do sistema linear proposto, efetuaremos algumas operações entre as linhas do sistema, obtendo-se os seguintes sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 16 \\ 2x - y + z = 9 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$L_2 - 2.L_1 \sim \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 16 \\ 2x - y + z = 9 \\ 0x + y + 3z = 5 \end{cases} \qquad L_1 - 2L_2 \sim \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 16 \\ 0x - y + 0z = -2 \\ 0x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$L_2+L_3 \sim \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 16 \\ 0x - y + 0z = -2 \\ 0x + 0y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 1; \quad y = 2; \quad x = 5 \qquad S = \{(5, 2, 1)\}$$

Registro simbólico-algébrico

Em muitas representações de um objeto matemático produzidas em um sistema semiótico podemos obter outra representação deste mesmo objeto em um outro sistema. Esse tipo de transformação é denominado *conversão* de registro.

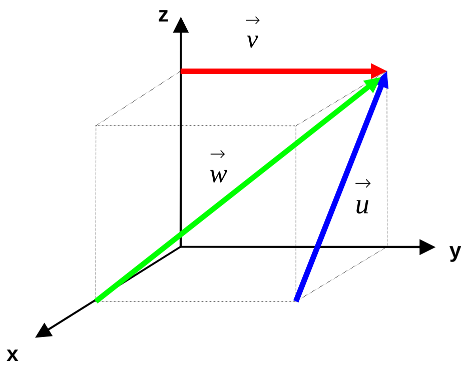
As *conversões* de registro são transformações de representações que consistem na mudança de um determinado registro em outro registro distinto. Na conversão de registro, altera-se a forma de apresentar o conteúdo, conservando-se a referência ao mesmo objeto.

Uma função polinomial do 2º grau pode ser representada na forma algébrica do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a, b* e *c* $\in \mathbb{R}$ e *a ≠ 0*. Podemos, por exemplo, realizar uma conversão de registros, representando a função no registro figural geométrico.

Muitos problemas de Álgebra Linear possibilitam as conversões de registro. No exemplo que veremos a seguir, os vetores são representados no registro geométrico, utilizando-se na resolução o registro simbólico-algébrico de vetores no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo:

Observe a figura a seguir, sendo um cubo de aresta unitária:



Verifique se o conjunto formado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ da figura anterior são linearmente independentes ou linearmente dependentes, justificando sua resposta.

Registro Figural Geométrico

CONVERSÃO DE REGISTRO

Resolução:

Utilizando a base canônica do $\mathbb{R}^3$, as coordenadas dos vetores representados na figura anterior serão dadas por:

$$\vec{u} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$$

$$\vec{v} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,0)$$

$$\vec{w} = (0,1,1) - (1,0,0) = (-1,1,1)$$

Para que os vetores sejam linearmente independentes temos que:

$$a.\vec{u} + b.\vec{v} + c.\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0$$

$$a.(-1,\ 0,\ 1) + b.(0,\ 1,\ 0) + c.(-1,\ 1,\ 1) = (0,\ 0,\ 0)$$
$$(-a,\ 0,\ a) + (0,\ b,\ 0) + (-c,\ c,\ c) = (0,\ 0,\ 0)$$

Resolvendo o sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} -a-c=0 \\ b+c=0 \quad \Rightarrow a=b=c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$$

Portanto, $\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right\}$ são linearmente independentes.

Registro Simbólico-Algébrico

O que o leitor poderia supor é que do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher, privilegiar um registro nos quais os tratamentos de registro a serem feitos se tornariam mais simples, ou a situação em que a conversão de registros possibilita obter um segundo registro de suporte para a realização dos tratamentos de registro.

É evidente que um aluno, se conhecer algum registro, pode transitar de um para o outro e até mesmo quando um enunciado apresentar um tipo de registro o aluno poderá realizar uma conversão de registro para o que for mais conveniente ou até mesmo mais fácil esse aluno resolver o exercício.

O que eu gostaria de colocar é que as conversões não interferem nos processos de resolução de um exercício, pelo fato dos exercícios serem resolvidos num determinado registro escolhido. A conversão auxilia a compreensão das atividades matemáticas na resolução de um exercício ou o estudo de um objeto matemático.

Entretanto para Duval, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que ao contrário aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. O que Duval ressalta também é que essa diferença do ponto de vista cognitivo e matemático na resolução de problemas não é muitas vezes levada em conta nas pesquisas em didática e no ensino de Matemática.

Ao se analisar as atividades de conversão de registros é necessário comparar a representação no registro de partida e a representação final no registro de chegada.

Segundo Duval, em muitos casos a conversão é óbvia e imediata e a representação final transparece ou se torna clara na representação de partida. Nesse caso, a conversão pode ser vista como uma simples codificação, sendo denominada de conversão *congruente*.

Como exemplo de uma conversão congruente, podemos citar:

O conjunto de pontos cuja ordenada é superior à abscissa	**y > x**

Exemplo de uma conversão de registros congruente

(MACHADO, 2003, p.19)

Entretanto, quando a conversão de registros não transparece absolutamente ou ela não se torna clara, dizemos que ocorreu a *não-congruência* na conversão de registros. Isso pode ser compreendido pelo fato dos alunos não reconhecerem o mesmo objeto matemático por meio de duas representações diferentes.

Como exemplo de uma conversão não-congruente, temos:

O conjunto de pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal	**x.y > 0**

Exemplo de uma conversão de registros não-congruente

(MACHADO, 2003, p.19)

Os fenômenos de não-congruência, segundo Duval, são mais comuns que os de congruência. Além disso, esses fenômenos são cruciais em algumas tarefas de conversão, dos quais podem surgir dificuldades na compreensão do objeto matemático estudado.

Duval destaca, entretanto o fato do fenômeno de não-congruência poder ser unilateral, ou seja, uma conversão podendo ser congruente em um caminho e não-congruente no caminho oposto. Isso ressalta a importância dos sentidos de conversão. Em Álgebra Linear, algumas pesquisas como a apresentada por Dorier (1994) mostram que o fenômeno de não-congruência pode ser analisado pelo sentido das conversões realizadas. Verificou-se que nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida pelos de chegada e vice-versa.

O pesquisador francês Jean-Luc Dorier diagnosticou o fenômeno de não-congruência na noção de independência linear. Na definição encontrada em muitos livros didáticos foram utilizados predominantemente o registro simbólico algébrico, além do registro da língua natural, temos:

O conjunto de vetores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é linearmente independente $\Leftrightarrow$

$$\forall\, i \in N, \quad i = 1,\ 2, ..., n:\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$$

Uma possível conversão para o registro da língua natural seria:

CONVERSÃO DE REGISTRO

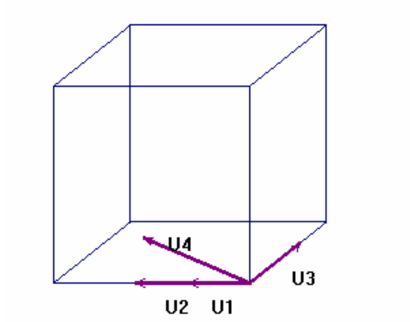
O conjunto de vetores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é linearmente independente se e somente se a única combinação linear desses vetores que dê como resultado o vetor nulo é a combinação nula.

Segundo Dorier, encontramos a mesma dificuldade na definição de dependência linear na conversão do registro simbólico para a língua natural com a utilização das expressões “não todos nulos”, “existe uma combinação linear nula não trivial” e “existe ao menos um vetor escrito combinação linear dos demais”.

Em sua pesquisa de doutorado, PAVLOPOULOU (1993) observou entre estudantes do primeiro ano de uma universidade francesa as diferenças existentes ao se representar um vetor ao se inverter o sentido das conversões. Verificou-se também a confusão que o aluno faz do objeto matemático vetor com uma flecha desenhada no plano ou no espaço.

A autora distingue três registros de representação semiótica que ilustramos a seguir, a propósito de uma mesma situação:

- Registro gráfico:



- Registro de escrita simbólica:

$$U_1 \in R^3, U_2 \in R^3, U_3 \in R^3, U_4 \in R^3$$

$$U_1 = 1U_1 + 0U_3$$
$$U_2 = kU_1 + 0U_3$$
$$U_3 = 0U_1 + 1U_3$$
$$U_4 = mU_1 + nU_3$$

- Registro por tabela:

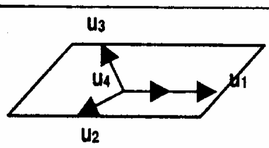
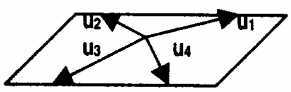
1	k	0	m
0	0	1	n
0	0	0	0

Pavlopoulou diagnosticou que no ensino-aprendizagem de Álgebra Linear as conversões de registros não são explicitadas nos manuais e livros didáticos. Os autores privilegiam um determinado registro, freqüentemente o registro simbólico, sendo que os registros gráficos e de tabelas são menos explorados por questões de economia.

Em um dos seus testes, solicitou-se que de acordo com uma tabela que descrevia uma situação de vetores no plano ou no espaço, os alunos deveriam desenhar uma figura que ilustrasse a situação descrita na tabela dada; e dada uma figura que representasse vetores no plano e no espaço, os alunos deveriam obter uma tabela que descrevesse a situação.

Como resultado de sua pesquisa, diagnosticou-se que a maior parte dos estudantes deixa de reconhecer a situação apresentada na representação que eles mesmos tinham escolhido como “tradução” (linha T*G da tabela a seguir) de outra representação que trata de encontrar (linha G*T da tabela a seguir).

Tabela 2 – Resultados da pesquisa de Pavlopoulou

	Registro de partida	Registro de chegada	144 estudantes
T*G	l · o · k · p o · l · m · o	 	.83
G*T	 	l · o · a · c o · l · b · d	.34

(PAVLOPOULOU, 1993, apud MACHADO, 2003, p. 84)

O que Duval evidenciou e concluiu após numerosas observações e pesquisas realizadas é que os fracassos ou bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que a mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. Isso se torna mais evidente nas conversões não-congruentes. Conclusões semelhantes também foram obtidas na pesquisa de Pavlopoulou.

Esse bloqueio faz com que o aluno não consiga reconhecer o mesmo objeto matemático em duas representações diferentes, ou que o aluno fique limitado consideravelmente na sua capacidade de utilizar conhecimentos já adquiridos na aprendizagem de outros novos. A articulação dos registros constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática.

O estudo prioritário são as conversões de registro, sobretudo as conversões não-congruentes, já que as conversões não são levadas em conta no ensino.

No caso do meu problema de pesquisa, a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, fundamentará a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear no estudo nas noções de independência e dependência linear.

Acredito assim como Duval que, nos diferentes níveis de ensino o fato das conversões de registros não serem exploradas nas atividades matemáticas, faz com que o aluno não tenha uma compreensão mais abrangente do objeto matemático em estudo, ficando com uma visão fragmentada desse objeto.

Minha tarefa será diagnosticar quais as transformações dos registros de representação são efetuadas nos livros didáticos de Álgebra Linear.

Os exemplos, exercícios resolvidos e propostos apresentados nos livros didáticos servem como parâmetro, acredito eu, para inúmeras propostas de atividades matemáticas elaboradas pelos professores.

Para a análise das noções de independência linear nos livros didáticos de Álgebra Linear sob o ponto de vista dos registros de representação semiótica, utilizarei a metodologia científica que será apresentada e comentada no próximo capítulo.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

4.1 – Considerações Iniciais

Nesta pesquisa empregamos uma metodologia científica embasada nos procedimentos de uma pesquisa documental e temos como objetivo investigar quais são os registros de representação semiótica utilizados nos livros didáticos de Álgebra Linear nas definições de independência e dependência linear e quais são as articulações e transformações realizadas entre esses registros de representação nos exemplos e exercícios propostos.

A pesquisa e análise documental em educação têm uma contribuição significativa na abordagem de dados qualitativos e quantitativos. Segundo Lüdke e André (1988):

> Embora pouco explorada não só na área de educação com em outras áreas de ação social, a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa na abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema. (LÜDKE e ANDRÉ, 1988, p.38).

Para CAULLEY (1981, apud Ludke e André, 1988, p.38), *"a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse".*

Além de uma análise qualitativa, farei uma análise quantitativa dos exercícios propostos, com a finalidade de traçar um paralelo entre as cinco obras analisadas, verificando os registros de representação em comum, os registros mais explorados e as transformações de registros mais privilegiadas, dentre outros itens.

Para a escolha dos livros didáticos de Álgebra Linear, fiz um levantamento bibliográfico das ementas dos cursos de graduação de ensino superior na área de Licenciatura em Matemática, especificamente na disciplina de Álgebra Linear de dez universidades de diversas regiões do país.

Escolhi um total de dez ementas das universidades brasileiras que possuíam regularmente o curso de Licenciatura em Matemática. Para a obtenção das ementas, consultei pessoalmente o Departamento de Matemática de algumas universidades, sendo que outras universidades foram consultadas por meio da internet. Mantive contatos via *e-mail* e pesquisei no próprio *site* das universidades, pelo fato de algumas delas se encontrarem em outros estados brasileiros. Nos dois casos, tive o cuidado de verificar se as ementas pesquisadas estavam atualizadas pelos departamentos responsáveis.

Nas ementas da disciplina de Álgebra Linear procurei identificar quais são os livros didáticos adotados ou referendados nos cursos de Licenciatura em Matemática. Além da referência bibliográfica nas ementas verifiquei se a disciplina Álgebra Linear nas universidades consultadas possuía alguma disciplina como pré-requisito como, por exemplo, Geometria Analítica, bem como verifiquei na grade curricular em qual semestre a disciplina de Álgebra Linear é ministrada.

Analisando a bibliografia das ementas do curso de Álgebra Linear, percebi uma grande variedade de obras utilizadas, devido ao número relativamente grande de livros didáticos existentes de Álgebra Linear. Só para que eu pudesse ter uma ordem de grandeza da quantidade de livros existentes, consultei algumas bibliotecas dos cursos na área de ciências exatas e verifiquei, por exemplo, a existência de 171 livros de Álgebra Linear na universidade PUC-SP, e de 394 livros de Álgebra Linear na Universidade de São Paulo (USP-SP).

Foram selecionadas cinco obras, sendo que quatro dessas obras apresentaram o maior número de incidência nas referências bibliográficas das ementas consultadas.

As ementas do curso de Álgebra Linear das universidades, bem como a referência bibliográfica dos livros utilizados de Álgebra Linear encontram-se no ANEX0 A. Os livros selecionados serão designados em minha análise por L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5

A análise do livro L_5, lançado em agosto de 2004, tem por finalidade a verificação de uma possível abordagem diferente dos conceitos de Álgebra Linear, e que na pesquisa bibliográfica já consta na ementa do curso de Álgebra Linear em uma das universidades consultadas.

Os livros selecionados que serão analisados são descritos conforme a tabela 3 a seguir:

Tabela 3 – Livros de Álgebra Linear consultados

DESIGNAÇÃO	TÍTULO / AUTOR
LIVRO L_1	**Álgebra Linear e Aplicações** Hygino H. Domingues, Carlos A. Callioli e Roberto C.F. Costa. 3º Edição, 1982 – Editora Atual.
LIVRO L_2	**Álgebra Linear** José Luiz Boldrini, Sueli I. Rodrigues Costa, Verá Lúcia Figueiredo e Henry G. Wetzler. 3º Edição, 1984– Editora Harbra – Harper & Row do Brasil.
LIVRO L_3	**Álgebra Linear** Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle 1º Edição, 1971 – Makron Books. 2º Edição, 1987 – Editora Harbra – Harper & Row do Brasil.
LIVRO L_4	**Álgebra Linear e Suas Aplicações** David C. Lay 2º Edição, 1999 – Livros Técnicos e Científicos.
LIVRO L_5	**Álgebra Linear** David Poole 1º Edição, 2004 – Editora Thomson.

Com relação à procedência das obras selecionadas, os livros L_1, L_2 e L_3 apresentam autores de nacionalidade brasileira enquanto que os livros L_4 e L_5 possuem autores de origem norte-americana.

A análise dos capítulos que tratam dos conceitos de independência e dependência linear nos livros didáticos selecionados será feita a partir do referencial teórico da teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2000).

Nos cinco livros selecionados foram analisados os seguintes itens:

(a) Em quais capítulos se encontram as definições de independência e dependência linear, como esse conceito é introduzido e quais os exemplos resolvidos e exercícios propostos?

(b) Qual a relação do assunto em questão com outros conteúdos de Álgebra Linear, outras áreas científicas, bem como a aplicação do conceito apresentado?

(c) Quais os tipos de registros de representação semiótica que são utilizados na definição de independência linear?

(d) Como são tratados os exemplos e quais as características dos exercícios propostos com relação aos registros?

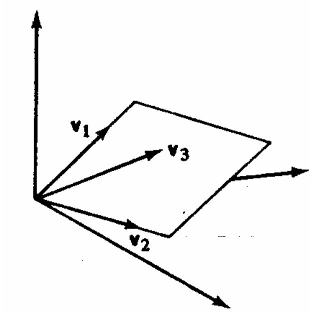
Com relação aos registros de representação semiótica utilizados nas definições de independência e dependência linear, bem como nos exemplos e exercícios propostos, foram investigados os seguintes quesitos:

d_1) Quais os registros mais explorados e quais os menos utilizados em cada livro?

d_2) Como os registros são articulados e quais os tratamentos e conversões de registros efetuados?

Uma preocupação que tive *a priori* da análise dos livros didáticos foi classificar os diferentes tipos de registro de representação. Inicialmente fiz uma leitura prévia dos livros no intuito de constatar registros comuns utilizados pelos autores. A classificação que utilizarei é semelhante ao que foi utilizada e elaborada pela pesquisadora KARRER (2003, 2004) em seus trabalhos. Sendo assim, os registros foram classificados da seguinte maneira, de acordo com a tabela 4:

Tabela 4 – Classificação dos registros de representação

Registro Simbólico	**_Representação Algébrica_**
	Exemplo*: Em* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *o conjunto:* *{1 + x +* x^2*, 1 – x + 3*x^2*, 1 + 3x –* x^2*} é linearmente dependente, uma vez que:* $2(1 + x + x^2) - (1 - x + 3x^2) = 1 + 3x - x^2$
	Representação Matricial
	Exemplo*:* $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 2a-c \\ 2b-d \end{bmatrix}$ *são linearmente dependentes, já que pelo menos (de fato, dois) dos três escalares 1, 1 e -1 é não-nulo.* $1.\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - 1.\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Registro Numérico	**_Representação por n-uplas_**
	1) No espaço vetorial V = $\mathbb{R}^3$*, os vetores* $v_1 = (2, -1, 3)$*,* $v_2 = (-1, 0, -2)$ *e* $v_3 = (2, -3, 1)$ *formam um conjunto linearmente dependente, pois* $3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0$*, ou seja:* *3(2, -1, 3) + 4(-1, 0, -2) – (2, -3, 1) = (0, 0, 0)*
	Representação Tabular
	Exemplo*:* $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ *são linearmente dependentes, já que pelo menos (de fato, dois) dos três escalares 1, -2 e 0 é não-nulo.* $1.\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Registro Geométrico	**_Representação por figuras_**
	Exemplo: *V =* $\mathbb{R}^3$*. Sejam* $v_1, v_2, v_3 \in V$*. O conjunto* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é L.D. se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem.* 

Registro da Língua Natural	***Representação da Língua Escrita***
	Exemplo: *Se o número de vetores é menor que o número de componentes de cada vetor, então o conjunto é linearmente independente.*

A primeira leitura que fiz das obras selecionadas está relacionada com o prefácio. Esta leitura teve por objetivo diagnosticar possíveis características da obra, o estilo do autor na maneira de abordar os temas, qual o público-alvo, quais as possíveis aplicações da obra, dentre outras características.

Na análise de cada livro, destacarei primeiramente as definições de independência e dependência linear, em qual capítulo se encontram essas definições, e a seguir são feitas considerações a respeito dos registros utilizados.

Os exemplos e exercícios resolvidos de cada livro foram selecionados de acordo com os tipos de registro utilizados no enunciado e as possíveis formas de transformação de registros na resolução.

De maneira análoga a anterior, utilizou-se o mesmo critério para a análise dos exercícios propostos, além de se verificar se o exercício exigia algum tipo de demonstração.

Por convenção, adotarei a abreviação L.I. para designar um conjunto de vetores linearmente independentes e L.D. para designar um conjunto de vetores linearmente dependentes.

Entretanto antes da análise qualitativa que constitui o objetivo do meu trabalho, outra pesquisa documental será realizada, pois acredito que trará resultados também significativos na minha análise didática. Refiro-me a um estudo histórico da evolução e do desenvolvimento da noção de independência e dependência linear.

4.2 – A análise histórica

Cabe ressaltar inicialmente a importância de uma análise histórica dos conceitos ligados ao problema de pesquisa, para posteriormente realizar-se uma análise didática. A análise histórica, antecedendo uma pesquisa didática pode ser resumida segundo o comentário de Dorier (1990):

> A resolução de equações lineares numéricas em uma ou mesmo duas ou três variáveis é um problema que ocupa os matemáticos desde a antiguidade. Entre esses dois pólos extremos, que separam cerca de dez séculos, os matemáticos de todos os tempos colocaram alguns obstáculos, mais ou menos decisivos, importantes e também mais ou menos espaçados no tempo. Cada um destes obstáculos, o modo o qual ele é localizado através das relações com outros em função do contexto matemático em que se encontravam, tendo muita informação que nos permite melhor aprender a sensação, a natureza epistemológica dos primeiros conceitos de Álgebra Linear. É nessa sensação que uma pesquisa histórica da gênese desses conceitos parece para nós ser um trabalho preliminar necessário antes de uma pesquisa didática.
> (DORIER, 1990, p.28)

Uma pesquisa documental do panorama histórico auxilia a organizar as idéias desenvolvidas pelos matemáticos no contexto em que estavam inseridos e possibilita corrigir possíveis erros e superar alguns obstáculos encontrados na época.

Na apresentação e discussão da gênese do assunto, não é o objetivo desta dissertação fazer uma análise profunda e extensa dos fatos históricos, e sim relatar quais foram os matemáticos, os trabalhos, problemas, obstáculos e fatos relevantes que contribuíram com a formalização das noções de independência e dependência linear.

O próximo capítulo tem por objetivo apresentar um panorama histórico relacionado à evolução e desenvolvimento das noções de independência e dependência linear.

CAPÍTULO V

CONTEXTO HISTÓRICO

Este capítulo baseia-se na leitura dos artigos e na tese de doutorado de Jean-Luc Dorier (1990): *Contribution à l'Étude de l'Enseignement à l'Université des Premiers Concepts d'Algèbre Linéaire. Approches Historique et Didactique*, bem como a dissertação de mestrado de Amarildo Melchiades Silva (1997): *"Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear".*

5.1 - Considerações Iniciais

A análise do contexto histórico tem por finalidade investigar as noções de independência e dependência linear no âmbito da história da Matemática, destacando a evolução deste conceito nos diferentes tipos de abordagens realizadas ao longo da história até a definição que encontramos muito próxima na atualidade nos livros didáticos de Álgebra Linear.

Na descrição do contexto histórico procurarei diagnosticar e evidenciar os possíveis registros de representação semiótica mais utilizados pelos matemáticos, analisar e formular algumas hipóteses acerca dos dados e informações obtidas.

Veremos inicialmente que a nossa discussão sobre as noções de independência e dependência linear está presente na resolução de sistemas de equações lineares, as quais destacaremos os trabalhos do matemático suíço *Leonard Euler*[4] *(1707-83)*, que desempenhou um importante papel na resolução de sistemas lineares e na elaboração da teoria das equações diferenciais.

A seguir será comentado um problema matemático que, segundo Dorier, se constituiu em um dos primeiros casos em que encontramos a noção de independência linear – o paradoxo de Cramer (1750) – elaborado e publicado pelo matemático suíço *Gabriel Cramer*[5] (1704-52).

Hermann G. Grassmann[6] (1809 – 1877) em sua obra de 1844, denominada *Ausdehnungslehre* (podemos traduzir como "Teoria da Extensão"), desenvolveu a teoria da independência linear apresentando noções muito similares com aquelas encontradas nos livros-texto de Álgebra Linear atualmente.

Por fim, apresentaremos os trabalhos do matemático alemão *Ferdinand Georg Frobenius*[7] *(*1849-1917) que contribuiu de maneira significativa no processo de resolução de equações lineares, na definição de independência linear e na noção de posto.

---

[4]Leonard Euler – matemático suíço nasceu no dia 15 de abril de 1707 em Basiléia, Suíça. Foi professor de Matemática em Genova após trabalhar em análise e determinantes . Faleceu no dia 18 de setembro de 1783, em St. Petersburg, Rússia.

[5]Gabriel Cramer – matemático suíço nasceu em Genebra no dia 31 de julho de 1704 e faleceu em Bangnols – sur – Cèze, uma cidade da França, no dia 04 de janeiro de 1752.

[6]Hermann Gunther Grassmann –- nasceu em 15 de abril de 1809 na cidade de Stettin (agora Szczecin, na Polônia) e faleceu em 26 de setembro de 1877 na mesma cidade.

[7]Ferdinand Georg Frobenius – nasceu no dia 26 de outubro de 1849 em Chalottenburg, Berlim, Prússia (hoje Alemanha) e faleceu no dia 03 de agosto de 1919 também em Berlim.

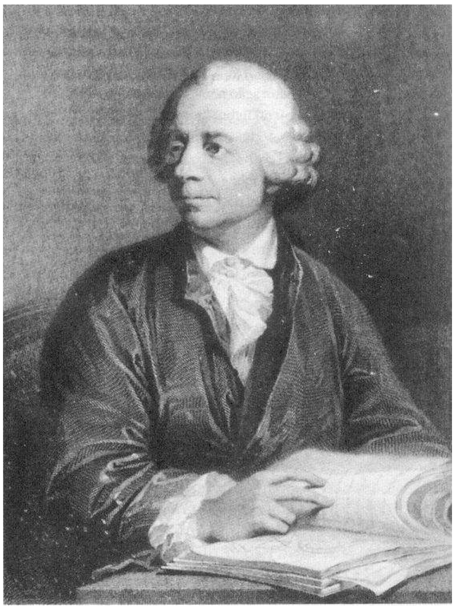


Figura 4 - Leonard Euler (1707- 83)

Figura 5 - Gabriel Cramer (1704 - 52)

Figura 6 - Herman Grassmann (1809-77)

Figura 7 – Georg Frobenius (1849-1917)

Observaremos que o desenvolvimento do objeto matemático desta pesquisa no contexto histórico teve como um “pano de fundo” a resolução de sistemas de equações lineares.

Compreender o domínio das relações existentes entre as equações de um sistema linear criou um campo fértil para o desenvolvimento de alguns conceitos em Álgebra Linear, como os espaços vetoriais, subespaços vetoriais, matrizes, determinantes, posto e também a noção de independência linear, o que torna o seu estudo imprescindível para esta pesquisa.

5.2 - Euler e a dependência inclusiva

Do ponto de vista histórico, segundo Dorier, a noção de dependência linear pode ser encontrada na resolução de sistemas lineares, considerando a dependência entre as equações de um sistema (utilizando-se estes mesmos termos) inicialmente nos textos do matemático suíço Leonard Euler (séc. XVIII), com data de 1750. A dependência linear ainda prevaleceu na maioria dos textos sobre equações lineares até o fim do século XIX (Dorier, 1990, 1998a, 2000), sendo que o trabalho de Euler é o primeiro no qual a problemática sobre dependência linear foi discutida de maneira implícita.

Na discussão da resolução de um sistema linear, Euler começa por um exemplo com duas equações:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (I) \\ 4y = 6x - 10 & (II) \end{cases}$$

Ao resolver o sistema acima pelo método da adição, por exemplo, o leitor perceberá que quando se elimina o *x*, conseqüentemente o *y* também é eliminado, conforme se verifica a seguir:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (\cdot 2) \\ 4y = 6x - 10 & (-6x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 10 & \\ 4y - 6x = -10 & [.(-1)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 10 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$$

Com isso, obtemos duas equações idênticas, o que torna o sistema linear possível e indeterminado, com infinitas soluções. A razão para este “acidente” é bastante óbvia, pois a segunda equação, quando transformada em *6x – 4y = 10* corresponde ao dobro da primeira equação. Entretanto, Euler não pretendia enganar o seu leitor nos seus textos sobre equações, embora ele escondesse a semelhança das duas equações implicitamente. Euler deixa claro que não é o fato das equações serem semelhantes que determina a dependência das equações, mas o fato que algo incomum – um “acidente” – que acontece no passo final da resolução do sistema de equações. Esse acidente é que revela a dependência das equações, porque, embora haja duas incógnitas, essas equações não determinam o valor dessas incógnitas.

Euler, de maneira implícita, foi um dos primeiros matemáticos a evidenciar a importância da dependência linear, embora o seu objetivo fosse encontrar soluções de sistemas lineares por meio de processos de substituição e eliminação. Todavia Euler não definiu dependência linear entre as equações do sistema nem elaborou uma teoria para isso.

Com relação à resolução de um sistema linear com três equações, Euler apresentou dois exemplos, um com duas equações que são idênticas, e outro exemplo em que uma equação é o dobro da soma das outras. Nos dois casos, não existia a tentativa de resolução e ele conclui que:

> A primeira equação não é diferente da terceira e não contribui em nada na determinação de três incógnitas.
> Mas também há o caso quando uma das três equações está contida nas outras duas. Assim, quando se diz que para se determinar três incógnitas, é suficiente ter três equações, é necessário somar a restrição que estas três equações são tão diferentes que nenhuma delas já está incluída nas outras. (EULER, 1750, apud DORIER, 1990, p. 28).

É importante ressaltar a advertência que Euler faz para o caso com três equações, pois ele separa o caso quando duas equações são iguais do caso de uma das três equações estiver contida nas outras duas, ou incluída nas outras, o que caracterizaria a dependência linear entre as equações. Isto em grande medida mostra historicamente a dificuldade intrínseca do conceito de dependência no qual se tem de levar em conta todas as equações de um sistema linear, e não só a relação entre pares de equações.

Para que o conceito de dependência linear não fique ligado apenas ao contexto particular de equações de um sistema, Dorier (1994) adverte sobre o risco dessa idéia, fazendo uma distinção entre essas duas concepções diferentes. Dorier denomina a concepção de Euler acerca de dependência linear de *dependência inclusiva*, para destacar a diferença com as definições de dependência linear que encontramos mais próximas atualmente nos livros didáticos de Álgebra Linear, salientando que não será apenas na resolução de problemas que envolvem sistemas de equações lineares que o aluno pode obter um forte significado do conceito, atributo que se supõe indispensável para a sua apropriação.

Segundo Dorier, a concepção de Euler a respeito da dependência linear é natural no contexto no qual ele e todos os matemáticos de sua época estavam trabalhando, ou seja, o contexto da resolução de equações lineares. Na época não se fez um estudo sobre a relação entre as equações de um sistema linear.

Para o caso de quatro equações com quatro incógnitas, Euler acrescentou que duas incógnitas podem ficar indeterminadas utilizando o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} 5x+7y-4z+3v-24=0 & (1) \\ 2x-3y+5z-6v-20=0 & (2) \\ x+13y-14z+15v+6=0 & (3) \\ 3x+10y-9z+9v-4=0 & (4) \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição, podemos isolar, por exemplo, na terceira equação o valor $x=-13y+14z-15v-6$ e substituindo-o na segunda equação, onde teremos:

$$2.(-13y+14z-15v-6)-3y+5z-6v-20=0$$
$$-26y+28z-30v-12-3y+5z-6v-20=0$$
$$-29y+33z-36v-32=0$$

$$y=\frac{33z-3v-52}{29} \text{ e } x=\frac{-23z+33v+212}{29}.$$

Estes dois valores de *x* e *y* podem ser substituídos na primeira e na quarta equação nos levará a duas equações idênticas, em que as incógnitas *z* e *v* são indeterminadas.

Verificamos nesse caso que Euler utiliza a resolução por eliminação e substituição, não mencionando as relações lineares entre as equações. Basta o leitor notar que ao subtrairmos à primeira da segunda equação obteremos a quarta equação, ou até mesmo a primeira equação menos duas vezes a segunda equação, teremos a terceira equação.

O uso dos termos *equações estarem contidas e incluídas em outras*, elaborada por Euler se refere à concepção de dependência inclusiva designada por Dorier. Nesse aspecto, não significa que Euler não estava atento sobre a equivalência lógica com a dependência linear, mas dentro da prática dele com equações lineares, a concepção de dependência inclusiva é mais consistente e eficiente.

Conforme Dorier há uma dificuldade para um desenvolvimento adicional na concepção de dependência, pois a concepção é limitada ao contexto de equações e não pode ser aplicada, por exemplo, a outros objetos com n-uplas, como os vetores da Geometria Analítica.

Com isso, notamos inicialmente que a dependência inclusiva estava fortemente ligada ao contexto da resolução de equações lineares, embora a dependência linear seja um conceito geral que se aplica a qualquer objeto matemático de uma estrutura linear. Ainda em seu contexto, Euler pôde extrair assuntos que podem ser considerados em muitos aspectos como as primeiras idéias consistentes do conceito de dependência linear e posto[8]. Ele discute embora de uma maneira muito intuitiva e vaga, a relação entre o número de soluções e o número de relações de dependência entre equações. A noção de dependência linear levou mais de um século para que o seu conceito se formalizasse da maneira como encontramos mais próxima nos livros didáticos de Álgebra Linear. Um passo importante para a noção de dependência linear ainda seria dado com um problema denominado Paradoxo de Cramer.

5.3 - O Paradoxo de Cramer

Além dos textos de Euler sobre a resolução de sistemas lineares, no ano de 1750 o matemático suíço Gabriel Cramer publicou o tratado que introduziu o uso de determinantes, que dominaria o estudo de sistemas lineares até o primeiro quarto do século XX. A solução de sistemas de equações lineares em duas, três e quatro variáveis era desenvolvida pela regra de Cramer, publicada em 1750, na obra *Introduction a L´analyse Courbes Algébriques*, e utilizada também

[8]Posto é a dimensão do espaço-linha (ou coluna) de uma matriz A. Corresponde ao número de linhas não-nulas de uma matriz A em qualquer forma escalonada por linhas de A.

independentemente por Coulin Maclaurin (1698-1746) em 1729, publicada postumamente em 1748 na obra *Treatise of Álgebra.* Nesse contexto, a dependência linear foi caracterizada pela ausência dos determinantes.

Segundo Dorier, o paradoxo de Cramer foi um dos primeiros problemas que apareceu, mesmo que de forma implícita, a noção de dependência linear. O paradoxo surgiu na determinação de curvas de grau *n* por *n* pontos.

Cabe salientar que as curvas algébricas eram objetos de estudo de muitos matemáticos. As curvas algébricas são definidas por equações do tipo $f(x, y) = 0,$ em que f é um polinômio de grau n. Particularmente no século XVII os matemáticos dessa época deram grande importância ao estudo de intersecções de curvas algébricas, e o cálculo do número de interseções entre duas curvas, num estudo feito posteriormente. A teoria das curvas planas superiores, como foi denominada, tinha por objetivo o estudo de curvas de grau superior a dois, no século XVIII. Destacam-se as obras de Isaac Newton (1642 – 1727), intitulada *Enumeration Linearum Tertii Ordinis (1704)* e a obra de *James Stirling (1692 – 1770)* denominada *Línea Tertii Ordinis Neutonianae (1707)*. Em 1720, Caulin Maclaurin publica dois tratados a respeito de curvas: *Geometria Orgânica* e de *Linearum Geometricarum Proprietatibus.*

Duas proposições referentes às curvas algébricas eram conhecidas na época e foram provadas parcialmente somente no começo do século XVIII:

i) *"Duas curvas algébricas distintas de ordens m e n respectivamente têm m.n pontos em comum".* Esta proposição é conhecida como teorema de Bèzout.

ii) "*Para determinar uma curva de ordem n são necessários e suficientes* $\frac{n\,(n+3)}{2}$ *pontos".*

O paradoxo de Cramer, tratado por Maclaurin, estava relacionada com a segunda proposição, conhecida como proposição de Stirling.

Quando apresentamos um exemplo para a segunda proposição, no caso *n* = 2, a curva é determinada por $\frac{2.(2+3)}{2} = 5$ pontos distintos.

O paradoxo surge quando *n* é maior que 2, verificando-se que $\frac{n(n+3)}{2} \leq n^2$, o que significa que duas curvas algébricas podem ter mais pontos em comum do que é suficiente para determinar cada uma delas.

A importância histórica do paradoxo de Cramer para o desenvolvimento da noção de dependência linear reside no fato de que a intersecção e determinação de curvas algébricas nos levam à resolução de sistemas lineares e à verificação da dependência linear das equações.

Cramer, em 1750, publicou em seu livro *Introduction À L'analyse des Courbes Algébriques* o estudo das curvas algébricas de grau 2. O paradoxo surgiu nos casos em que n ≥ 3, sendo estudado no mesmo ano por Euler no artigo denominado *Sur une contradiction apparente dans la doctrine dês lignes courbes*, em que são analisados os casos para *n = 3, 4, 5* por meio de duas proposições que correspondem, respectivamente, ao Teorema de Bézout e ao Paradoxo de Cramer, verificando-se a contradição entre as duas proposições para ordens superiores.

Euler utiliza vários exemplos para mostrar a contradição entre as duas proposições, incluindo as posições relativas entre retas. No caso de uma equação ser múltipla da outra (retas coincidentes), teremos infinitos pontos de intersecção. Nessa situação, temos o caso da dependência inclusiva citada por Dorier, em que uma equação está contida na outra.

Expandindo ainda mais a idéia da dependência inclusiva, já abordada neste capítulo, Euler cita um exemplo de equações com três variáveis:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 8 \\ 3x - 5y - 7z = 9 \\ x - y - z = 7 \end{cases}$$

Verifica-se que a soma da segunda com a terceira equação é igual ao dobro da primeira equação. Portanto, segundo a terminologia utilizada por Euler, temos duas equações contidas em outra, portanto o sistema linear possui infinitas soluções, e não apenas uma.

Os resultados obtidos por Euler na análise de sistemas de três e quatros equações levou Euler, de acordo com Dorier (1990), a lançar pela primeira vez, de forma ainda imperfeita, o conceito de dependência linear. Segundo Euler:

> Quando consideramos que para determinar *n* quantidades desconhecidas, basta terem *n* equações que exprimam suas relações mútuas acrescendo nisso a restrição de que todas as equações sejam diferentes entre si, ou não tenha nenhuma que seja contida nas outras ou proporcionais às outras. (EULER, 1750, apud DORIER, 1990, p.67)

Dorier ainda observa que, mesmo de forma imperfeita a proposição de Euler para a época foi um progresso decisivo por uma problemática – o conceito de equações dependentes – mostrando que as condições que elas determinavam a respeito das incógnitas eram menos numerosas do que parecia.

Apesar das idéias de Euler constituírem as bases para abordar as noções de dependência linear e posto, os trabalhos de Cramer utilizando determinantes “obscureceram” os resultados de Euler.

A partir da utilização da Regra de Cramer para a resolução de sistemas lineares, o conceito de dependência linear entre equações começou a ser relacionado com a anulação do determinante.

5.4 - As teorias de Grassmann

Após a utilização da dependência inclusiva por Euler na resolução de sistemas lineares e do paradoxo de Cramer, a noção de dependência linear de equações seria utilizada por outros matemáticos em seus trabalhos.

Em 1844 o matemático alemão Herman Grassmann publicou a obra denominada *Ausdehnungslehre*, traduzida como “Teoria da Extensão”, apresentando importantes contribuições para a Matemática, sobretudo para a Álgebra e Geometria.

Em seu trabalho, Grassmann no início distingue a Álgebra Linear como uma teoria formal independentemente de algumas interpretações utilizando-a na Geometria. Ele criou um sistema matemático utilizando termos e notações específicas.

O que na verdade Grassmann pretendia mostrar era a possibilidade de realizar operações com segmentos de reta, que são elementos geométricos, como realizamos com os números, como a adição e a multiplicação. Isso se tornou possível com a utilização dos elementos denominados vetores.

O autor desenvolveu a noção de subespaço, independência linear, geradores, dimensão, soma direta e intersecção de subespaços, projeção de um vetor sobre um subespaço, dentre outras.

Grassmann define o conceito de dependência linear da seguinte maneira:

> “Dizemos que uma grandeza elementar de primeiro grau é dependente de outras grandezas elementares, quando ela pode ser representada por uma combinação linear dessas últimas”. (Grassmann, § 107, p. 175, apud Granger, 1974, p. 118).

O autor utiliza também os termos *“espécie dependente de uma outra”* para exprimir quando um vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros. Outra definição utilizada por Grassmann para expressar a dependência de uma grandeza foi:

> Uma grandeza *a* é dita derivável *(ableitbar)* a partir de grandezas *b, c,...* por meio dos números $\beta, \gamma, ...$ se:
>
> $$a = \beta\, b + \gamma\, c + ...$$
>
> Dir-se-á ainda que *a, b, c,...* estão *“numa relação numérica” (Zahlbeziehung),* quando cada uma dessas grandezas for derivável das outras”. (Grassmann, apud Granger, 1974, p. 118).

Apesar de ser quase que totalmente ignorada pela forma de apresentação e pela linguagem ser considerada complicada para a época, com a utilização de notações novas, a obra de Grassmann antecipou muitos resultados publicados pelo matemático italiano Guiseppe Peano (1888) referentes à teoria dos espaços vetoriais. A obra de Grassmann acabou não sendo aceita pela comunidade matemática da época, pois a linguagem utilizada por Grassmann não foi compreendida e interpretada pelos matemáticos que a estudavam.

Alguns trabalhos sobre a resolução de sistemas lineares podem ser citados, como o matemático inglês *H.J.S. Smith* (1861), o italiano *N. Trudi* (1862) e o matemático inglês *C.L. Dodgson*, cujo pseudônimo é *Lewis Carrow*, autor do livro clássico da literatura mundial *Alice no país da maravilhas*, que realizou estudos na resolução de um sistema linear *n x m* na obra *An Elementary Treatise on Determinantes* (1864).

Dogson, nessa obra, inclui alguns teoremas a respeito de sistemas homogêneos; dos quais apresentamos um deles a seguir:

> Em um sistema homogêneo de *n* equações a *n - r* incógnitas, cuja matriz não aumentada é evanescente; tem uma *(n - r)*-upla solução onde dois componentes ou menos não são nulos e *r + 1* equações são dependentes das restantes. Reciprocamente se o sistema tem uma solução não nula, a matriz não aumentada é evanescente. (Prop. X, apud. DORIER, 1990, p. 24).

Sobre essa proposição Dorier chama a atenção, entre outras coisas, para o fato de estar aí em germe, "a expressão de uma condição de dependência linear de *(n- r)* vetores em um espaço de dimensão *n*." O segundo teorema tem o seguinte enunciado: *"Um sistema homogêneo de n equações a n + r incógnitas tem sempre (n + r)-upla soluções onde pelo menos dois componentes não são nulos." (Prop. XII).*

Dorier comenta que na linguagem atual de espaços vetoriais esse teorema pode ser enunciado da seguinte maneira: *"n + r vetores de um espaço vetorial de dimensão n são sempre dependentes"*. Ele conclui, então, que sob essa forma esse resultado é a chave para o Teorema da Invariância o qual afirma que todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita possuem o mesmo número de vetores.

5.5 - Frobenius e a noção de posto

A noção de independência linear, agora básica em Álgebra Linear, não apareceu em sua forma moderna até o ano de 1875. O matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (séc. XIX) introduziu o conceito de dependência linear, mostrando a semelhança com a mesma noção para n-uplas. Ele pôde então considerar equações lineares e n-uplas como objetos idênticos com respeito à linearidade.

Frobenius, em seu artigo denominado *Ueber das Pfaffsche Problem* (1875) define a noção de dependência linear da seguinte maneira:

> Algumas soluções particulares $A_1^{(x)}, A_2^{(x)}, ..., A_n^{(x)} (x = 1,2,...,k)$ são ditas independentes ou distintas se $c_1 A_\alpha^{(1)} + c_2 A_\alpha^{(2)} + ... + c_k A_\alpha^{(k)}$ não podem ser anuladas para todo α = 1, 2,..., n, sem que c_1, c_2,..., c_k sejam todos nulos, em outras palavras, se as **k** formas lineares $A_1^{(x)} u_1 + A_2^{(x)} u_2 + ... + A_n^{(x)} u_n \quad (x = 1, 2, ..., k)$ são independentes". (FROBENIUS, 1875, apud DORIER, 2000, p. 61).

Verifica-se a utilização dos termos independentes ou distintos para caracterizar a independência linear de equações. Para Dorier essa definição é uma inovação, pois ela relaciona a idéia de dependência linear utilizada há muito tempo para equações lineares à utilização de "vetores de dimensão *n*" indicadas pelas coordenadas, introduzidas pelo matemático Artur Cauley (séc. XIX).

Não só esta definição é bastante semelhante à definição moderna de independência linear (é a primeira vez em que tal definição é formulada), mas isto mostra a semelhança explicitamente entre n-uplas de soluções e equações no seu caráter linear. A idéia apresentada, *a priori* tão simples, será essencial no trabalho de Frobenius; ele colocará desse modo em evidência, em algumas páginas, pela primeira vez por completo, a característica essencial de posto de um sistema (embora este conceito seja implícito e definido como a ordem do minimal não-nulo), sendo que o conceito de posto é introduzindo pela primeira vez por Frobenius em 1879, no artigo intitulado *Ueber Homogene Totale Differentialg Leichungen.*

A idéia essencial de Frobenius consiste em introduzir o conceito de sistema associado *(adjungirt de oder de zugeordnet)* e um conjunto de n-uplas, para o qual corresponde em termos modernos à representação cartesiana ortogonal de um subespaço gerado por n-uplas. Em seu argumento resumido:

> Consideremos o seguinte sistema:
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \quad (I)$$
>
> Se $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x) \quad (x = 1, 2, \ldots, n-r)$, *r* é o maximal dos termos não-nulos, é uma base das soluções de (I), se o sistema associado é:
>
> $$\begin{cases} A_1(1)x_1 + \ldots + A_n(1)x_n = 0 \\ \cdots \\ A_1(n-r)x_1 + \ldots + A_n(n-r)x_n = 0 \end{cases} \quad (I^*)$$
>
> Se agora $B_1(v), B_2(v) \ldots, B_n(v) \quad (v = 1, 2, \ldots, q)$ é uma base das soluções de (I*), se o sistema associado é:
>
> $$\begin{cases} B_1(1)x_1 + \ldots + B_n(1)x_n = 0 \\ \cdots \\ B_1(q)x_1 + \ldots + B_n(q)x_n = 0 \end{cases} \quad (I^{**})$$
>
> (FROBENIUS, 1875, apud DORIER, 2000, p. 62)

Frobenius demonstra que, toda escolha da base feita, o sistema (I**) é equivalente ao sistema (I) e que $q = r$.

Assim, o marco na história que a concepção de dependência inclusiva parece exercer um papel de obstáculo para o aparecimento do conceito de posto. Mais precisamente, o obstáculo reside na adoção de uma definição formal da independência linear que unifica a dependência de n-uplas e de equações. Realmente, no trabalho de Frobenius é evidente que a formulação de uma definição permite em algumas páginas clarificar todas as características do posto.

Este fato simples pode não parecer muito pertinente, mas aconteceu para se tornar um dos passos principais para uma compreensão completa do conceito de posto. Realmente, no mesmo texto, Frobenius não só pôde definir o que nós chamaríamos de base de uma solução, como ele também associou um sistema de equações para tal uma base (cada n-upla é transformada em uma equação). Então ele mostrou que qualquer base de soluções do sistema associado tem um sistema associado com o mesmo número de soluções como o sistema inicial.

O primeiro resultado de dualidade nos espaços vetoriais de dimensão finita mostrou o duplo nível de invariança conectado para ordenar ambos para o sistema e para o conjunto de soluções. Além disso, a aproximação de Frobenius permitiu considerar um sistema como um elemento de uma classe de sistemas equivalentes que têm o mesmo conjunto de soluções: um passo fundamental para a representação de sub-espaços por meio de equações.

5.6 - Maxime Böcher – introduzindo termos

Segundo ANTON E BUSBY (2006), os termos *linearmente independente* e *linearmente dependente* foram introduzidos por Maxime Böcher (1867 – 1918) em seu livro *Introduction to Higher Álgebra*, publicado em 1917. Para Böcher, a dependência linear pode ser considerada como uma generalização do conceito de proporcionalidade entre constantes. A definição de dependência linear é dada da seguinte maneira:

DEFINIÇÃO 2[9] *Os m conjuntos de n constantes cada um,*

$$x_1^{[i]},\ x_2^{[i]},\ldots,\ x_n^{[i]} \qquad \textit{(i = 1, 2, ..,m)}$$

são chamadas linearmente dependentes se m constantes $c_1,\ c_2,\ \ldots, c_m$*,*

não todas nulas, existem tais que

$$c_1 x_j^1,\ c_2 x_j^2 + \ldots + c_m x_j^{[m]} = 0 \qquad \textit{(j = 1, 2, ..,n).}$$

Caso contrário, o conjunto de quantidades é chamado de linearmente independentes. *(Böcher, 1917, p. 35)*

O autor ainda generaliza esse conceito para polinômios. Ademais, o autor ilustra uma interpretação geométrica para as definições de independência e dependência linear, no caso colinearidade e coplanaridade dos pontos representados pelas constantes.

5.7 - Considerações Parciais

Analisando este panorama histórico de aproximadamente um século sobre as concepções de independência e dependência linear, após elaborar-se uma definição formal a respeito desses conceitos, percebemos que esse fato contribuiu e se tornou um passo fundamental na construção de outros conceitos matemáticos, como posto de uma matriz e dimensão de um espaço vetorial, sendo um componente intrínseco e essencial para outros conceitos.

---

[9] *DEFINITION 2 The m sets of n constants each,*

$$x_1^{[i]},\ x_2^{[i]},\ldots,\ x_n^{[i]} \qquad \textit{(i = 1, 2, ..,m)}$$

Are said to be linearly dependent if m constants $c_1,\ c_2,\ \ldots, c_m$*, not all zero, exist such that*

$$c_1 x_j^1,\ c_2 x_j^2 + \ldots + c_m x_j^{[m]} = 0 \qquad \textit{(j = 1, 2, ..,n).}$$

If this is not the case, the sets of quantities are said to be linearly independent. *(Böcher, 1917, p. 35)*

Gostaria de destacar que a noção de dependência inclusiva, designada por Dorier e utilizada por Euler se tornou o primeiro passo para a formalização do conceito de dependência linear, mais tarde generalizada por Frobenius.

Aliás, cabe ressaltar que a análise histórica confirma o fato que há uma dificuldade no tratamento do conceito de independência linear como uma propriedade global, tornando-se difícil a sua aplicação em outros contextos como forma de generalização desse conceito. Com isso, um cuidado especial deve ser tomado no ensino a respeito desse ponto, para que o caráter generalizador e unificador da Álgebra Linear não sejam esquecidos.

Os trabalhos de Grassmann, apesar de apresentarem uma difícil compreensão da linguagem utilizada, até então nova, produziram resultados importantes na definição de objetos matemáticos como independência linear para o seu estudo posterior.

Quanto aos registros de representação semiótica utilizados, verifica-se que a dependência inclusiva de Euler fica restrita ao registro de representação simbólico-algébrico, já que a noção de dependência linear utilizada por Euler estava inserida no contexto da resolução de sistemas lineares.

Entretanto, a utilização de termos como “uma equação incluída na outra” ou “uma equação estar contida na outra” revela a preocupação da utilização do registro da língua natural como forma de descrição e caracterização do objeto matemático em questão.

O paradoxo de Cramer além de se tornar um dos primeiros problemas o qual surge a noção de dependência linear, apresenta como diferencial do ponto de vista dos registros de representação semiótica o uso do registro figural geométrico nos tratados que se referem às curvas. A conversão de registros, do geométrico para o algébrico possibilitou uma melhor compreensão da relação existente entre as equações e os pontos que determinam as curvas.

Os trabalhos de Frobenius possibilitaram dar um tratamento mais “global” à noção de independência linear, sem o conceito ficar ligado somente ao contexto das equações de um sistema linear, mas também no contexto de n-uplas e soluções de um sistema linear, descrevendo algebricamente um subespaço gerado por n-uplas e desenvolvendo a noção de posto.

Cabe ressaltar também os registros de representação utilizados por Maxime Böcher, que introduziu as noções de independência e dependência linear nos livros didáticos utilizando os registros simbólico-algébrico, geométrico, além do registro da língua natural.

O próximo capítulo apresentará a análise didática dos cinco livros selecionados de Álgebra Linear.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DIDÁTICA

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

6.1 - LIVRO L_1

Álgebra Linear e Aplicações

Autores: Hygino H. Domingues, Carlos A. Callioli e Roberto C.F. Costa

3º Edição, 1982 – Editora Atual.

O livro apresenta a seguinte divisão de capítulos em seu sumário:

1º Parte: ÁLGEBRA LINEAR

1. Sistemas Lineares - Matrizes
2. Espaços Vetoriais
3. Base e Dimensão
4. Transformações Lineares
5. Matriz de uma Transformação Linear
6. Espaço com Produto Interno
7. Determinante
8. Formas Bilineares e Quadráticas Reais

2º Parte: APLICAÇÕES

Prefácio – Introdução

No prefácio do livro, o autor de um modo geral ressalta a importância da disciplina de Álgebra Linear nos cursos não somente de Matemática Pura, mas também nos cursos de Engenharia, Economia e Biologia, por exemplo. Além disso, há uma justificativa da utilização dos vetores da geometria de duas e três dimensões como forma de introduzir os conceitos de Álgebra Linear, pois segundo o autor um livro introdutório de Álgebra Linear deve emergir da geometria em duas a três dimensões.

Dependência Linear

O conceito de dependência linear é introduzido no capítulo 3 **– Base e Dimensão**. Por convenção, o autor denomina V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. As definições dadas sobre um conjunto ser linearmente independente ou dependente são as seguintes:

> ***Definição 1 –*** *Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2,...,u_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo*
>
> $$\alpha_1 u_1 + ...+ \alpha_n u_n = 0$$
>
> *com os α_i em $\mathbb{R}$, só se for possível para $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$* (p. 69)
>
> ***Definição 2 –*** *Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2,...,u_n\} \subset V$ é linearmente dependente (L.D.) se, e somente se, L não é L.I., ou seja, é possível uma igualdade do tipo*
>
> $$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$$
>
> *sem que os escalares α_i sejam todos iguais ao número zero.* (p. 70)

A definição de dependência linear é construída a partir da negação da definição de independência linear.

O livro apresenta exemplos de vetores no $\mathbb{R}^4$ sendo representados no registro numérico por n-uplas conforme descrição a seguir e a sua resolução no livro é desenvolvida no registro simbólico-algébrico:

1) O conjunto L = {(1, 1, 0, 0); (0, 2, 1, 0); (0, 0, 0, 3)} $\subset \mathbb{R}^4$ *é L.I., pois:*

$$x\,(1, 1, 0, 0) + y\,(0, 2, 1, 0) + z\,(0, 0, 0, 3) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = y = z = 0$$

Exemplo 1 – p. 70

Verifiquei nesse primeiro exemplo que o autor efetua uma conversão de registros para a resolução do mesmo, tendo o registro numérico por n-uplas como registro de partida e o registro simbólico-algébrico como o de chegada. Minha expectativa é diagnosticar se o autor realiza mais conversões utilizando outros registros de representação nos exemplos e exercícios propostos.

Os exercícios resolvidos e propostos a respeito de independência linear são apresentados nas p. 70 - 76 sendo abordados de duas maneiras: os exercícios em que se solicita a verificação de um subconjunto ser L.D. ou L.I., e os exercícios em que se exige uma demonstração por parte do aluno.

Nos exercícios resolvidos em que se solicita a verificação da independência linear dos vetores no $\mathbb{R}^3$ representados pelo registro numérico por n-uplas, a resolução pode ser elaborada de maneira análoga ao exemplo mostrado anteriormente.

Dentre os exercícios resolvidos em que se exige do aluno uma demonstração, selecionei o exercício abaixo que apresenta dois tipos de registro: no enunciado predominantemente o registro da língua natural, e na sua resolução o registro simbólico-algébrico.

6. Mostrar que se o conjunto {u, v, w} de vetores de um espaço vetorial V for L.I., o mesmo acontecerá com o conjunto {u + v, u + w, v + w}.

Solução:

Com efeito, façamos:

x(u + v) + y(u + w) + z(v + w) = *0.* Daí, segue:

(x + y)u + (x + z)v + (y + z)w = *0*

Mas o conjunto {u, v, w} é L.I. Então:

$$\begin{cases} x+y \qquad = 0 \\ x \qquad + z = 0 \\ \qquad y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} x+y \qquad = 0 \\ \quad -y+z = 0 \\ \quad y+z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y \quad = 0 \\ \quad y-z = 0 \\ \qquad 2z = 0 \end{cases}$$

e o sistema só admite a solução trivial x = y = z = 0.

Logo, o conjunto {u + v, u + w, v + w} é L.I, como queríamos mostrar.

Exercício Resolvido 6 – p. 73

Nesse exemplo foi realizada uma conversão de registros, passando-se do registro da língua natural (predominante no enunciado) para o registro simbólico-algébrico. Nesse caso o aluno teria poucas opções para manter o registro de partida (ao citar um teorema na língua natural, por exemplo), o que não ocorre no exercício em questão.

Nos exercícios propostos, são utilizados os mesmos registros dos exemplos e exercícios resolvidos. Nos enunciados os vetores são representados predominantemente no registro numérico por n-uplas, e na conversão de registros pode-se utilizar o registro simbólico-algébrico na sua resolução.

No exercício proposto selecionado a seguir, assim como nos exemplos e exercícios resolvidos, verifiquei a utilização do registro simbólico-algébrico em sua resolução:

7. Determinar *m* e *n* para que os conjuntos de vetores do $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam L.I..

a) {(3, 5m, 1); (2, 0, 4); (1, m, 3)}

Solução:

Façamos: x (3, 5m, 1) + y (2, 0, 4) + z (1, m, 3) = (0, 0, 0). Portanto:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 5mx + 0y + mz = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema linear homogêneo acima a solução trivial (x = 0, y = 0 e z = 0), para m $\neq$ 0.

Exercício Proposto 7 – p. 75

Nesse exercício, utilizou-se uma conversão de registros, cujo registro partiu-se do numérico por n-uplas (utilizado preferencialmente) e chegou-se no simbólico-algébrico.

O aluno poderia utilizar outro método para a resolução do exercício, como, por exemplo, resolver o determinante formado pelos coeficientes numéricos do sistema linear e impor que o determinante deve ser diferente de zero, para que os vetores sejam L.I..

Quanto às transformações de registro, selecionei para análise um exercício proposto.

Exercícios propostos

1) Quais dos subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

b) {(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 0, -2)}

Exercício Proposto 1 – p. 75

O enunciado do exercício acima apresenta três vetores no $\mathbb{R}^3$ representados no registro numérico por n-uplas. O aluno poderia resolver o exercício realizando uma conversão de registros, para o simbólico-algébrico, por exemplo:

Resolução:

Escrevendo a equação vetorial para o problema proposto acima, teremos:

$$a.(1,1,1)+b.(1,0,1)+c.(1,0,-2)=(0,0,0); \qquad a,b,c\in R \quad \Rightarrow$$

$$(a,a,a)+(b,0,b)+(c,0,-2c)=(0,0,0) \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow a=b=c=0$$

Portanto, o subconjunto de vetores é linearmente independente.

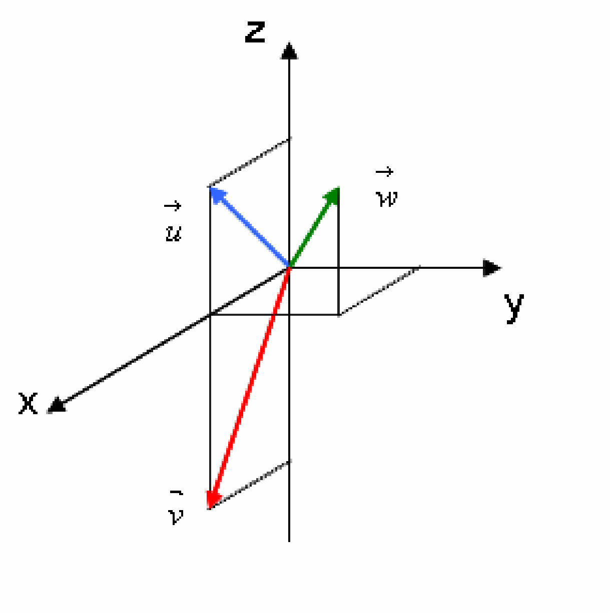
A conversão para o registro simbólico-algébrico permite resolver um sistema linear e de acordo com o número de soluções do sistema linear, pode-se determinar se os vetores são L.D. ou L.I..

Uma pergunta que pode ser feita pelo leitor no momento da resolução é a seguinte: Esse exercício apresenta somente essa forma de resolução? Teríamos outras formas de realizar a conversão de registros?

A resposta é sim. Além da maneira de utilizar o cálculo de determinantes, que foi comentado no exercício anterior, nos exemplos e exercícios analisados até agora o registro de chegada tem sido preferencialmente o simbólico-algébrico. Mas consideraremos o exercício proposto em questão e o resolveremos de outra forma.

Esse exercício poderia ser resolvido representando os vetores no registro geométrico, e verificando se os vetores são coplanares, conforme resolução a seguir:

Resolução:



Sendo $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -2)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$, convertendo-se os vetores para o registro geométrico verificamos que os vetores não são coplanares, pois o vetor $\vec{w}$ não está contido no plano x0z, formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes. Com este tipo de resolução, é provável que o aluno já tenha contato em um curso de Geometria Analítica

Após a análise qualitativa, a seguir a tabela 5 indica quantitativamente as possíveis transformações de registros na resolução dos exercícios propostos.

Tabela 5 – Resultados da Análise – LIVRO L_1

Transformações de Registros utilizadas no livro				
Registro de Partida	**Registro de Chegada**	**Quantidade**	**Exemplo**	**Transformação realizada**
Numérico por n-uplas	Simbólico Algébrico	03	1. Quais dos subconjuntos abaixo do R^3 são linearmente independentes: b) {(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 0, -2)}.	Conversão
Língua Natural	Simbólico Algébrico	03	6. Mostrar que se o conjunto {u, v, w} de vetores de um espaço vetorial V for L.I., o mesmo acontecerá com o conjunto {u + v, u + w, v + w}.	Conversão
Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico	08	2. Quais dos subconjuntos abaixo de P_4 ($\mathbb{R}$) são linearmente independentes: a) $\{(1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$.	Tratamento

Análise Qualitativa e Considerações Parciais

Analisando o conteúdo do capítulo 3 - Base e Dimensão em que as noções de independência e dependência linear estão presentes, verifica-se que esses conceitos, segundo o livro, estão unidos somente a uma “ferramenta necessária” para a determinação dos vetores que constituem uma base de um espaço vetorial.

Na definição apresentada pelo livro de dependência linear encontramos o uso do registro na língua natural na utilização do termo “*sem que os escalares* α_i *sejam todos iguais ao número zero”* que, segundo pesquisa de Dorier (1994) constitui um caso de não-congruência semântica, pois ela mostra que existe uma dificuldade tanto no registro da língua natural no uso dos termos “não todos nulos”, “existe uma combinação linear não-nula”, “existe ao menos um vetor que é escrito como combinação linear dos outros”, assim como o que foi utilizado pelo autor da obra analisada.

Quanto aos registros utilizados, notei que a resolução do sistema linear, tanto nos exemplos resolvidos como nos exercícios propostos poderá servir como instrumento para a verificação da dependência linear entre os vetores, o que nos permite constatar uma predominância muito grande do registro simbólico-algébrico.

As conversões de registro são exploradas apenas nos casos em que os vetores partem do registro numérico por n-upla para o registro simbólico-algébrico.

O registro simbólico-algébrico é muito utilizado também como registro de partida em muitos exemplos e exercícios, conforme resultados obtidos na tabela anterior, quando se utilizam espaços de funções contínuas num intervalo, espaço dos polinômios, além dos enunciados no registro algébrico em que são exigidas demonstrações. Neste caso, esses exercícios podem ser resolvidos no próprio registro simbólico-algébrico, efetuando-se um tratamento de registros.

Os exercícios que exigem algum tipo de demonstração, em que o enunciado se apresenta predominantemente no registro da língua natural, podem-se realizar uma conversão de registros para o simbólico-algébrico.

Não encontrei em nenhum capítulo alguma citação a respeito da relação de dependência entre as equações de um sistema linear, como foi diagnosticado na pesquisa do contexto histórico, como um dos primeiros problemas de independência linear, em 1750, descritos pelo matemático suíço Leonard Euler.

Outros registros de representação não são utilizados, como o registro geométrico, pois em nenhum exemplo ou exercício encontrei esse tipo de registro.

A ausência da exploração desse registro causou de certa forma uma incoerência com o que foi apresentado no prefácio do livro, pois o autor afirma que um primeiro curso de Álgebra Linear deve emergir da geometria em duas e três dimensões. No caso das noções de independência e dependência linear, por que não foram exploradas as propriedades geométricas dos vetores?

Convém destacar que um outro registro que não foi explorado foi o tabular (matrizes).

De um modo, concluo que o autor procura utilizar o registro numérico por n-uplas e o registro simbólico-algébrico para descrever e conceituar as noções de independência e dependência linear.

6.2 - LIVRO L_2

Álgebra Linear

Autores: José Luiz Boldrini, Sueli I. Rodrigues Costa, Vera Lúcia Figueiredo e Henry G. Wetzler. 3º Edição, 1984 – Editora Harbra – Harper & Row do Brasil.

O livro apresenta a seguinte divisão de capítulos em seu sumário:

Prefácio – Introdução

Verificando-se o prefácio do livro, os autores alertam aos os alunos que cursarem pela primeira vez a disciplina de Álgebra Linear podem julgá-la como muito "abstrata", sem aplicação dos conceitos básicos. Nesse aspecto, o autor procura nos capítulos apresentados dar ênfase ao uso dos conceitos em exercícios denominados por ele como concretos, ou seja, aplicados em outras áreas ou em situações-problema.

De um modo geral, percebe-se que em alguns assuntos realmente são explorados os conceitos de Álgebra Linear em problemas ligados a outras áreas, como na Física, Química e na própria Matemática, como nos capítulos: 1 – Matrizes – Processos Aleatórios: Cadeias de Markov; 11 – Classificação das Cônicas e Quádricas; 12 – Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais; 13 – Processos Iterativos e no capítulo 14 – Conjuntos Convexos e Programação Linear.

Dependência e Independência Linear

As noções de independência e dependência linear entre vetores estão no livro no capítulo 4 – **Espaços Vetoriais**, especificamente na p. 114 e, segundo o autor, estão ligadas à determinação dos vetores geradores de um subespaço vetorial.

Por meio de um exemplo com vetores da Geometria Analítica no $\mathbb{R}^3$, verifica-se que o espaço gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3 é o mesmo gerado por v_1 e v_2, concluindo-se que o vetor v_3 é um vetor, de acordo com a expressão utilizada pelo autor, “supérfluo” para descrever o subespaço, sendo este vetor v_3 uma combinação linear de v_1 e v_2, conforme mostram as figuras a seguir:

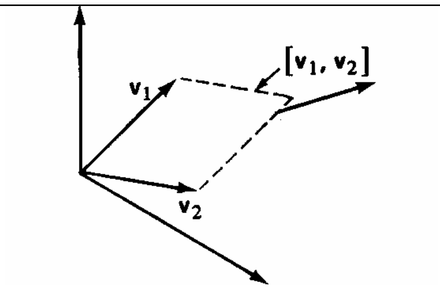


Figura 4.4.2, (p.113)

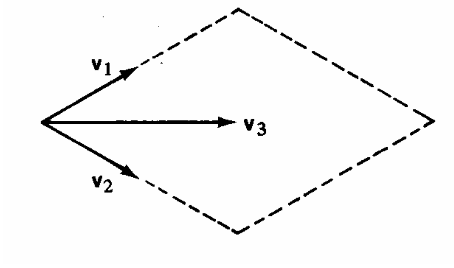


Figura 4.4.3, (p.113)

Figura 8 – Vetores coplanares

Entretanto, essa não é a primeira referência apresentada pelo autor no livro sobre independência linear. No capítulo 2 – **Sistemas de Equações Lineares**, ele utiliza os termos equações “independentes” e “dependentes” no cálculo do posto e da nulidade[19] de uma matriz. Para esclarecer o uso desses termos, apresentamos o exemplo dado a seguir:

Exemplo 2: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de B, onde:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido 2 – p. 39

O autor interpreta a matriz acima como um sistema linear, pois cada linha da matriz pode ser escrita como uma equação do sistema, como apresenta a seguir:

[19] Nulidade de uma matriz A é o número de linhas não-nulas dessa matriz na forma reduzida ou escalonada. Corresponde à dimensão do espaço-nulo de A. O espaço-nulo de A corresponde ao subespaço do $\mathbb{R}^n$ que consiste nas soluções do sistema linear homogêneo *Ax=0.*

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

Segundo o autor, a terceira e a quarta equações do sistema acima podem ser desprezadas, sendo denominadas linhas “dependentes”, pois elas são obtidas como soma de produtos de outras linhas do sistema por constantes (no caso a terceira linha é igual à primeira linha subtraída da segunda e a quarta linha é igual a quatro vezes a segunda linha).

O sistema apresentado anteriormente é equivalente ao que está a seguir:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

Sendo assim, o posto da matriz é o número de linhas “independentes” da matriz; neste caso, temos que posto B = 2. São utilizados os registros de representação simbólico-algébrico, no caso do sistema linear, além da língua natural para expressar os termos linhas “independentes” e “dependentes”.

O autor ainda ressalta que as denominações “independentes” e “dependentes” se tornarão familiares ao leitor no capítulo 4, que estuda os espaços vetoriais.

Isso me permite fazer até, nesse momento da análise, uma suposição de que possivelmente a relação de dependência linear entre as equações de um sistema possa ser utilizada posteriormente.

As definições de independência e dependência linear são feitas pelo autor da seguinte maneira:

4.5.1 - Definição: *Sejam V um espaço vetorial e $v_1,...,v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, ...,v_n\}$ é linearmente independente (L.I.), ou que os vetores $v_1,...,v_n$ são L.I., se a equação:*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$. No caso em que exista algum $\alpha_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1,...,v_n\}$ é linearmente dependente (L.D.), ou que os vetores $v_1,...,v_n$ são L.D. *(p. 114)*

Como exemplos, são apresentados vetores da Geometria Analítica no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, em que se utilizam propriedades de colinearidade e coplanaridade entre os vetores para a verificação da independência linear:

Exemplo 1: $V = \mathbb{R}^3$. Sejam $v_1, v_2 \in V$.

$\{v_1, v_2\}$ é L.D. se e somente se v_1 e v_2 estiverem na mesma reta que passa pela origem. ($v_1 = \lambda\, v_2$). Veja a figura 4.5.1

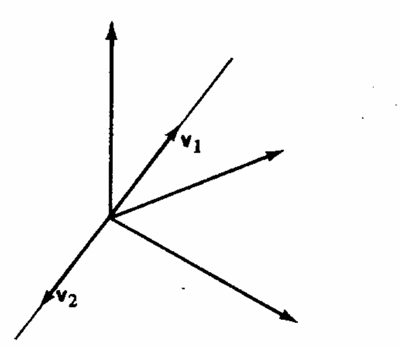


Figura 4.5.1

Exemplo Resolvido 1 – p.115

Exemplo 2: $V = \mathbb{R}^3$. Sejam v_1, v_2 e $v_3 \in V$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D. se estes três vetores estiverem no mesmo plano que passa pela origem. Veja a figura 4.5.2

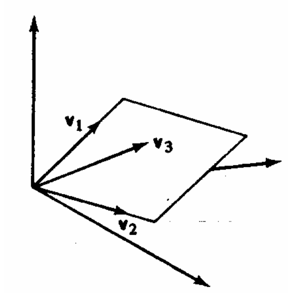


Figura 4.5.2

Exemplo Resolvido 2 – p.115

Outros exemplos utilizam os vetores representados no registro numérico de n-upas, como os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ que são linearmente independentes. Um outro exemplo apresenta vetores do espaço $\mathbb{R}^2$ no registro numérico por n-uplas e realizando-se um tratamento de registros, no próprio registro numérico, verifica-se que os vetores são linearmente dependentes:

> *Exemplo 1*: V = $\mathbb{R}^2$
>
> {(1, -1), (1, 0), (1, 1)} é L.D., pois $\frac{1}{2}(1,-1)-1(1,0)+\frac{1}{2}(1,1)=(0,0)$

Exemplo Resolvido 1– p.116

Quanto aos exercícios propostos, verificou-se na obra uma escassez de exercícios sobre independência e dependência linear, sendo que este assunto é utilizado implicitamente nos exercícios a respeito da base de um espaço vetorial. Um dos poucos exercícios especificamente sobre independência linear solicita-se que faça uma demonstração, conforme veremos a seguir:

> 04) Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se ad - bc = 0, mostre que eles são L.D. Se ad – bc ≠ 0 mostre que eles são L.I.

Exercício Proposto 4 – p.129

Neste exercício encontrei no enunciado o registro da língua natural. Para realizar a demonstração, podemos utilizar, por exemplo, o registro simbólico-algébrico:

Resolução:

Para que os vetores (a, b) e (c, d) sejam L.I. um vetor não pode ser múltiplo escalar do outro, ou seja:

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \Rightarrow ad \neq bc \Rightarrow ad - bc \neq 0$, como queríamos mostrar.

Por outro lado, para que os vetores sejam L.D. um vetor deve ser múltiplo escalar do outro, ou seja:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad - bc = 0$, como queríamos mostrar.

Com relação às possíveis transformações de registros na resolução dos exercícios, a tabela 6 a seguir mostra os resultados quantitativos.

Tabela 6 – Resultados da Análise – LIVRO L_2

Transformações de Registros utilizadas no livro				
Registro de Partida	**Registro de Chegada**	**Quantidade**	**Exemplo**	**Transformação realizada**
Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico	01	04) Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se ad - bc = 0, mostre que eles são L.D. Se ad – bc ≠ 0 mostre que eles são L.I.	Conversão

Análise Qualitativa e Considerações Parciais

No que se diz respeito às noções de independência e dependência linear analisadas nesta obra, percebi a utilização pelo autor do registro geométrico em muitos exemplos, explorando-se as propriedades geométricas dos vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ quanto à colinearidade e a coplanaridade para a determinação da independência linear dos vetores. Isso pode nos levar a concluir que o autor, nesse caso, permite aos alunos utilizar possíveis conhecimentos por parte dos alunos com relação aos conceitos estudados em Geometria Analítica e Vetores.

O registro numérico por n-uplas utilizado em outros exemplos apresenta na sua resolução o próprio registro numérico, o que caracteriza um tratamento de registros. Nesse tratamento, o autor mostra uma proporcionalidade entre as coordenadas dos vetores dados para determinar a dependência linear. No caso dos vetores utilizados da base canônica no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ nos exemplos, o autor também mostra utilizando o registro numérico que os vetores são linearmente independentes.

Um recurso interessante utilizado pelo autor na definição de independência linear é o emprego do termo vetor “supérfluo” para a obtenção de um número mínimo de vetores que constituem a base de um espaço vetorial. O emprego de termos utilizando o registro da língua natural pode constituir um recurso-meta, para facilitar a compreensão de um objeto matemático, conforme aponta a pesquisa de Araújo (2002).

No único exercício proposto explicitamente sobre independência linear, o aluno poderia utilizar nenhum registro apresentado nos exemplos, e sim o registro algébrico para demonstrar o que foi proposto no enunciado sob o registro da língua natural. Conclui-se, portanto que o aluno deveria realizar uma conversão de registros para resolver o problema proposto.

De certa forma, ao diagnosticar no capítulo sobre sistemas de equações lineares, em que foi verificada em um exemplo a utilização da relação de dependência entre as equações de um sistema linear, fiz uma suposição que provavelmente no capítulo 4 o assunto voltaria a ser discutido, o que acabou não acontecendo. A exploração da dependência entre as equações de um sistema e a noção de posto, feita pelo autor no capítulo que trata de sistemas lineares, não foi aproveitada em nenhum momento no capítulo que tratava sobre as noções de independência e dependência linear, no estudo dos espaços vetoriais.

Segundo Duval, para facilitar o aprendizado de um objeto matemático temos que transitar e realizar conversões em pelo menos dois registros de representação, o que diversifica o acesso aos objetos na Matemática.

Nesta obra analisada verifiquei apenas uma conversão de registro utilizada, sendo explorados poucos registros de representação (predominantemente o geométrico e o numérico por n-uplas).

Gostaria de deixar em minha análise uma sugestão aos livros didáticos de Álgebra Linear que forem publicados para que pudesse apresentar mais exercícios sobre independência linear de vetores, para que pudessem ser explorados outros registros de representação, pois essa noção no capítulo seguinte ao analisado é usada de maneira implícita nos exercícios referentes ao conceito de base de um espaço vetorial.

Como o registro geométrico foi relativamente explorado nos exemplos poderíamos, por exemplo, encontrar exercícios em que o aluno pudesse partir desse registro e verificar a independência linear por meio do registro algébrico, ao escrever uma equação vetorial como foi dada na definição desse livro e resolver um sistema linear homogêneo. Nesses exercícios poderiam ser exploradas novamente as relações de dependência entre as equações, e o aluno supostamente poderia fazer conexões com as propriedades geométricas dos vetores e o número de soluções do sistema linear obtido.

Do ponto de vista histórico, como foi abordada nesta dissertação, a relação de dependência entre as equações, bem como o número de soluções de um sistema linear foi um fator importante para a conceitualização de outros assuntos em Álgebra Linear, como a noção de posto, por exemplo.

Outros espaços vetoriais, como por exemplo, o espaço das matrizes, das funções contínuas em um intervalo, foi pouco explorado. Dessa foram, alguns registros de representação não foram utilizados, como o numérico-tabular (matrizes) e o simbólico-algébrico.

Notei na obra a ausência de algumas propriedades e teoremas que auxiliam a determinação da independência linear entre os vetores de um conjunto como, por exemplo, um vetor ser múltiplo do outro. Como algumas propriedades geométricas dos vetores foram explicitadas, como já foi colocado, poderiam ser explorados exercícios que se pede para encontrar a dimensão do espaço vetorial e a quantidade de vetores do conjunto (por exemplo, três vetores no $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes). Essa exploração poderia ser feita não somente utilizando o registro geométrico (quando possível), mas principalmente utilizando o registro algébrico mostrando o número de soluções do sistema linear obtido.

6.3 – LIVRO L_3

Álgebra Linear
Autores: Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle

2º Edição, 1987 – Makron Books.

O livro apresenta a seguinte divisão de capítulos em seu sumário:

1. Vetores

2. Espaços Vetoriais

3. Espaços Vetoriais Euclidianos

4. Transformações Lineares

5. Operadores Lineares

6. Vetores Próprios e Valores Próprios

7. Formas Quadráticas

Apêndice A – Matrizes / Determinantes / Sistemas de Equações Lineares

Prefácio – Introdução

No prefácio do livro, o autor apenas ressalta as transformações as quais o livro sofreu, passando da publicação *"Álgebra Linear e Geometria Analítica" (1971)* para dois livros, sendo um deles *"Geometria Analítica" (1987)* e o outro, *"Álgebra Linear" (1987),* que será objeto de estudo desta análise.

O autor destaca que o livro se tornou mais prático e mais simples para atender ao objetivo maior que é ser útil no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

No prefácio não é citada nenhuma característica mais específica do livro, nem o emprego dos temas abordados na obra em outras áreas do conhecimento.

Independência Linear

Os tópicos Independência e Dependência Linear são apresentados no capítulo 2 – **Espaços Vetoriais** como ferramenta para a determinação do menor conjunto gerador de um espaço vetorial. O autor comenta que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado por dois, três, quatro ou mais vetores, mas que seria importante determinar um conjunto gerador que tenha o menor número possível de vetores, razão pela qual será abordado o conceito de dependência linear.

A definição de dependência linear apresentada no livro é descrita da seguinte maneira:

> ***2.7.1 - Definição***
> *Sejam V um espaço vetorial e A = $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$*
> *Consideremos a equação*
>
> $$a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0 \qquad (2.7)$$
>
> *Sabemos que essa equação admite pelo menos uma solução:*
>
> $$a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_n = 0$$
>
> *chamada solução trivial.*
> *O conjunto A diz-se linearmente independente (L.I.), ou os vetores $v_1, ..., v_n$ são L.I., caso a equação (2.7) admita apenas a solução trivial.*
> *Se existirem soluções $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto A é linearmente dependente (L.D.), ou que os vetores $v_1, ..., v_n$ são L.D.*
>
> *(p. 54)*

O autor apresenta alguns exemplos com os espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ e as matrizes $\mathbb{M}_{3x1}$ e $\mathbb{M}_{2x2}$, conforme mostramos a seguir:

1) No espaço vetorial V = $\mathbb{R}^3$, os vetores:

v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (-1, 0, -2) e v_3 = (2, -3, 1) formam um conjunto linearmente dependente, pois $3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0$, ou seja:

3.(2, -1, 3) + 4.(-1, 0, -2) – 1.(2, -3, 1) = (0, 0, 0)

Exemplo Resolvido 1 – p.56

Nesse exemplo, o autor realizou um tratamento de registros, conservando o registro numérico por n-uplas para determinar a dependência linear.

No exemplo a seguir, o autor utiliza uma conversão de registros, do registro numérico-tabular para o registro simbólico-algébrico.

6) No espaço vetorial M (2, 2), o conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é LD.}$$

Resolução:

Examinaremos a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \qquad (1)$$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí o sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$.

Como existem soluções $a_i \neq 0$ para a equação (1), o conjunto A é LD.

Exemplo Resolvido 6 – p.56

O autor ainda cita os casos de dependência linear em um conjunto de vetores quando um vetor é combinação linear dos outros, e no caso em que um vetor é múltiplo do outro.

A interpretação geométrica da independência linear de dois e três vetores no $\mathbb{R}^3$ é desenvolvida com ênfase na propriedade geométrica que os vetores representados na mesma reta que passa pela origem ou no mesmo plano que passa pela origem são L.D. Nesse caso, o autor explora o registro geométrico (p. 60):

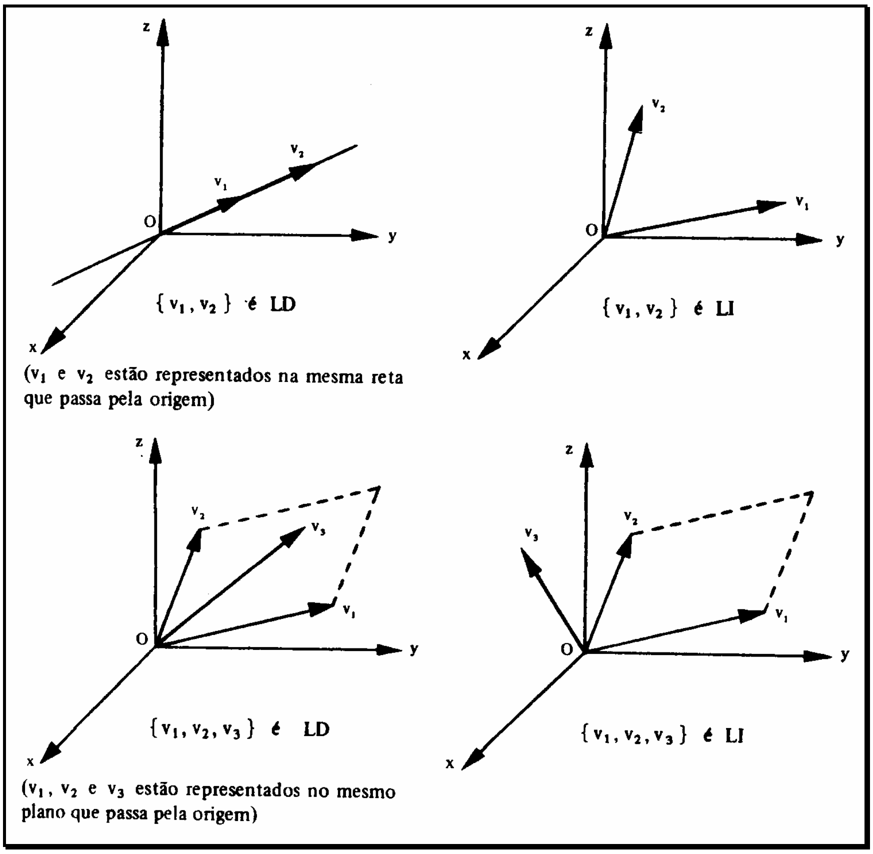


Figura 9 – Vetores LD e LI

Os exercícios apresentados no livro (p. 93) abordam a atividade de verificar se um subconjunto de vetores é L.D. ou L.I., em que são utilizados subconjuntos dos espaços $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, além do conjunto $\mathbb{P}_2\ (\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Nesses exercícios, o aluno pode resolve-lo de várias maneira, explorando alguns tipos de registros, dentre eles: o registro numérico por n-uplas (resolução por "inspeção"), simbólico-algébrico (escrevendo uma equação vetorial e posteriormente um sistema linear), geométrico (representando os vetores, quando possível, por segmentos orientados e verificando propriedades geométricas).

A seguir descreverei alguns exercícios e suas possíveis resoluções:

46) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ em L.I. ou L.D.:

a) {(1, 3)}

b) {(1,3); (2,6)}

c) {(2, -1), (3, 5)}

Resolução:

Empregando as propriedades abordadas na teoria, temos que:

(a) Um conjunto, formado apenas por um vetor não-nulo é linearmente independente.

(b) Por inspeção, verifica-se que (2, 6) = 2.(1, 3), ou seja, um vetor é múltiplo do outro. Sendo assim, os vetores são linearmente dependentes.

(c) Os vetores (2, -1) e (3, 5) não são múltiplos entre si e são, portanto, linearmente independentes.

Exercício Proposto 46 - p. 94-95

Verifica-se na resolução anterior que uma ”inspeção” faz com que o aluno realize um tratamento de registro, dentro do registro numérico, sem realizar uma conversão de registros (para o simbólico-algébrico, por exemplo).

O aluno também pode enunciar uma propriedade utilizando o registro da língua natural para determinar se os vetores são linearmente independentes.

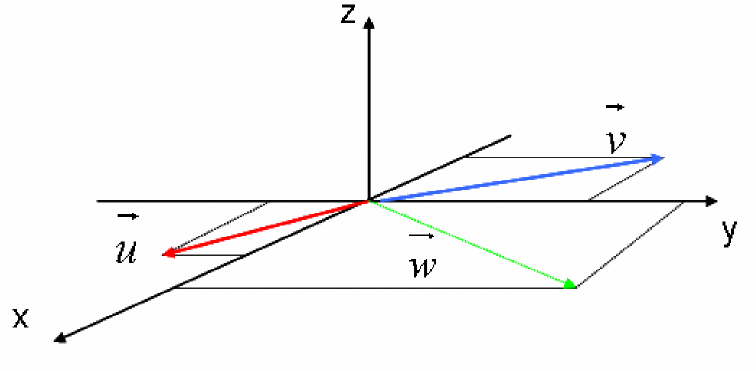
O exercício seguinte permite a exploração das propriedades geométricas, em que o aluno realizará uma conversão de registro, para o geométrico:

47) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ em L.I. ou L.D.:

c) {(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)}

Resolução:

Sendo $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 3, 0)$ e $\vec{w} = (3, 5, 0)$ Representando-se geometricamente os três vetores, temos:



Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes, pois os três vetores pertencem ao plano x0y sendo, portanto, coplanares.

Exercício Proposto 47- p. 95

O próximo exercício fica restrito ao tratamento dentro do registro simbólico-algébrico:

48) Classificar os seguintes subconjuntos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ em L.I. ou L.D.:

a) $1 - x + 2x^2, x - x^2, x^2$

Resolução:

Vamos escrever a equação

$$a_1 (1 - x + 2x^2) + a_2 (x - x^2) + a_3 (x^2) = 0 \qquad (1)$$

Em (1), temos uma identidade de polinômios, onde:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Como o sistema apresenta solução única, os vetores são linearmente independentes.

Exercício Proposto 48 - p. 95

A seguir, descreverei um dos raros exercícios em que se utiliza predominantemente o registro da língua natural como registro de representação de chegada do mesmo. Nesse caso, efetuou-se um tratamento de registros, dentro do registro da língua natural:

53) Mostrar que são LD os vetores v_1, v_2 e v_3, com v_1 e v_2 vetores arbitrários de um espaço vetorial V e $v_3 = 2v_1 - v_2$.

Resolução:

Como o vetor v_3 é combinação linear dos vetores v_1 e v_2, o conjunto V é linearmente dependente, pois:

$v_3 = 2v_1 - v_2 \quad \Rightarrow \quad 2v_1 - v_2 - v_3 = 0$, ou seja, encontramos escalares não-nulos para v_1, v_2 e v_3 que satisfazem a igualdade.

Exercício Proposto 53 - p. 95

Elaborei a tabela 7, a seguir, que sintetiza as possíveis transformações de registros dos exercícios propostos.

Tabela 7 – Resultados da Análise – LIVRO L_3

Transformações de Registros utilizadas no livro				
Registro de Partida	**Registro de Chegada**	**Quantidade**	**Exemplo**	**Transformação realizada**
Numérico por n-uplas	Simbólico Algébrico	03	47) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ em LI ou LD: f) {(1, -1, -2), (2, 1, 1), (-1, 0, 3)}	Conversão
Numérico Tabular	Simbólico Algébrico	01	50) Sendo V o espaço vetorial das matrizes 2 x 3, verifique se {A, B, C} é LI ou LD, sendo $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$	Conversão
Língua Natural	Simbólico Algébrico	02	54) Mostrar que se u, v e w são LI, então u + v, u + w e v + w são também LI.	Conversão
Simbólico Matricial	Simbólico Algébrico	01	52) Determinar *k* para que $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\ k & 0\end{bmatrix}\right\}$ seja LD.	Tratamento
Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico	02	48) Quais dos seguintes subconjuntos de vetores pertencentes ao P_2 são LD? a) $2 + x - x^2$, $-4 - x + 4x^2$, $x + 2x^2$	Tratamento

Análise Qualitativa e Considerações Parciais

Os exemplos e exercícios resolvidos apresentam como possível registro de representação de chegada o simbólico-algébrico, conforme apontam os resultados apresentados na tabela anterior.

Outros registros de representação não são explorados nem como registro de partida ou até mesmo de chegada, como o geométrico, por exemplo.

O autor procura nas definições de independência e dependência linear não utilizar termos como "*sem que os escalares α_i sejam todos iguais ao número zero" ou "sendo os escalares todos não-nulos"*, o que segundo Dorier causa um problema de não-congruência semântica. No caso das definições, o autor procura empregar o registro simbólico-algébrico e condicionar a independência e dependência linear ao número de soluções do sistema linear homogêneo formado pela equação vetorial apresentada na definição.

O autor cita que as noções de independência e dependência linear estão ligadas à obtenção de um conjunto gerador minimal. Esta noção será usada posteriormente na obtenção da base de um espaço vetorial.

Nos exemplos e exercícios propostos, as conversões de registros mais exploradas são: do registro numérico por n-uplas para o simbólico-algébrico (03 exercícios, conforme a tabela 7), além de alguns exercícios apresentarem o registro de partida numérico tabular que também podem ser convertidos para o simbólico-algébrico.

Alguns tratamentos também podem ser realizados nos exercícios propostos, dentro do registro simbólico-algébrico, especificamente nos exercícios que tratam dos polinômios $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de grau menor ou igual a *n*, mais o polinômio nulo.

Apesar da citação de algumas propriedades geométricas dos vetores no $\mathbb{R}^3$, senti a falta delas serem exploradas em exemplos e exercícios, pois já que foram citadas no capítulo analisado, poderiam ser bem aproveitadas no sentido de se efetuarem conversões para o registro geométrico.

Além das propriedades geométricas dos vetores não serem exploradas, verifiquei que alguns teoremas e propriedades de independência e dependência linear, como por exemplo, um vetor ser múltiplo do outro, ou até mesmo a combinação linear dentro de um conjunto L.D., apesar de serem citadas são tratadas no capítulo analisado de uma maneira muito “tímida”. A apresentação e exploração dessas propriedades poderiam facilitar a resolução de muitos exercícios, em que o aluno realizaria apenas um tratamento de registros, dentro do próprio registro numérico, verificando se um vetor no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é múltiplo do outro, mesmo que o autor pressuponha que o aluno já tenha aprendido num curso de Geometria Analítica.

Também não foram abordados exercícios que se exige do aluno a utilização do registro da língua natural. Tais exercícios, como justificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa pode reforçar teoremas e propriedades abordadas com o uso do registro da língua natural, pois acredito que esse registro também pode ser utilizado por parte do aluno na resolução de problemas.

6.4 – LIVRO L_4

Álgebra Linear e Suas Aplicações

Autor: David C. Lay

2º Edição, 1999 – Livros Técnicos e Científicos.

O livro apresenta a seguinte divisão de capítulos em seu sumário:

1. Equações Lineares na Álgebra Linear
2. Álgebra Matricial
3. Determinantes
4. Espaços Vetoriais
5. Autovalores e Autovetores
6. Ortogonalidade e Mínimos Quadráticos
7. Matrizes Simétricas e Formas Quadráticas

APÊNDICES

Prefácio – Introdução

O autor em seu prefácio deixa explícito que os tópicos abordados em seu livro seguem as recomendações do grupo norte-americano denominado LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group.

Segundo Lay (1999), uma das características da sua obra é a apresentação de muitas idéias fundamentais de Álgebra Linear serem introduzidas nas sete primeiras aulas no contexto do $\mathbb{R}^n$, e examinadas depois, gradualmente, sob diferentes pontos de vista.

Outra característica de sua obra é a ênfase da multiplicação matricial, tendo como enfoque central estudar o produto de uma matriz *A* por um vetor *x* como uma combinação linear das colunas de *A*. Os vetores, nesse caso, são representados por uma matriz coluna, ao invés de n-uplas. Sobre essa notação, Lay (1999) afirma que: "essa abordagem moderna simplifica muitos argumentos e une idéias de espaços vetoriais no estudo de sistemas lineares". (p.xi).

Independência Linear

No livro o conceito de independência linear está no capítulo 1 - **Equações Lineares na Álgebra Linear**, e no item **1.6 – Independência Linear** (p. 54) temos a apresentação um sistema linear homogêneo escrito como uma equação vetorial. Para Lay (1999, p.54), o sistema linear será estudado sob um outro ponto de vista, em que se privilegia o estudo dos vetores que estão na equação vetorial ao invés das soluções do sistema linear.

Como exemplo, o sistema linear homogêneo abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Pode ser escrito por meio de uma equação vetorial do tipo:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa equação tem a solução trivial com $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. O objetivo é verificar se o sistema linear homogêneo apresenta apenas a solução trivial.

A definição de independência linear é apresentada da seguinte forma:

Um conjunto indexado de vetores {v_1,..., v_p} no $\mathbb{R}^n$ é chamado de linearmente independente se a equação vetorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_pv_p = 0$$

tem apenas a solução trivial. O conjunto {v_1, ..., v_p } é chamado linearmente dependente se existem constantes c_1, ..., c_p não todas iguais a zero, tais que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_pv_p = 0. \qquad (2) \qquad (p.\ 55)$$

A equação (2), segundo o autor é chamada de uma *relação de dependência linear* entre v_1, ..., v_p quando as constantes não são todas iguais a zero. Um conjunto indexado é linearmente dependente se e somente se, ele não for linearmente independente. Ainda o autor ressalta que, por comodidade, a representação dos vetores v_1, ..., v_p quer dizer {v_1, ..., v_p} e que essa representação é utilizada tanto para os vetores linearmente dependentes como para vetores linearmente independentes.

O primeiro contato com a noção de dependência linear apresentada por Lay (1999) encontra-se ligado à resolução de sistemas lineares homogêneos. Nesse caso, o autor utilizou uma conversão de registros, partido do registro simbólico-algébrico (sistemas lineares) para o registro numérico-tabular (matrizes).

Um exemplo em que o autor utiliza a conversão de registros é apresentado a seguir:

Exemplo 1

Sejam $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine se o conjunto {v_1, v_2, v_3} é linearmente independente.

b) Se possível, encontre uma relação de dependência linear entre v_1, v_2 e v_3.

Exemplo Resolvido 1 - p. 55

Resolução

(a) A matriz completa associada ao sistema corresponde a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que x_3 é a variável independente e x_1 e x_2 as variáveis dependentes. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente.

(b) Completando-se o escalonamento da matriz completa e reescrevendo-se o sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad -2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 10v_1 - 5v_2 + 5v_3 = 0$$

Exemplo Resolvido 1 - p. 55

Na determinação da independência linear, o autor efetuou um tratamento de registros, permanecendo no registro numérico-tabular, e que na verificação da relação de dependência linear ele utiliza a conversão de registros.

No livro ainda há o destaque, no item **Independência Linear de Colunas de Matriz** (p. 55), na equação matricial *Ax = 0*, cada relação de dependência linear entre as colunas de *A* corresponde a uma solução não trivial de *Ax = 0*, o que leva a concluir que *as colunas de uma matriz A são linearmente independentes se e somente se a equação Ax = 0 tem somente a solução trivial.*

Além disso, a utilização de mais de um registro de representação semiótica se observa no tópico **Conjunto com Um ou Dois Vetores** (p. 56), em que além dos registros da língua natural e do registro algébrico, temos a representação geométrica da dependência linear entre vetores no $\mathbb{R}^2$.

No tópico **Conjunto com Um ou Dois Vetores** (p. 56) o autor destaca que por “inspeção” numérica pode-se determinar se um conjunto de dois vetores é linearmente dependente. Segundo Lay (1999) as operações elementares são desnecessárias. Basta então verificar se um vetor é um múltiplo do outro. Ressalta-se ainda que o teste aplica-se apenas aos conjuntos de *dois* vetores.

Como exemplo, ele verifica por "inspeção" que os vetores:

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes (pois $v_2 = 2v_1$);

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes (pois v_2 e v_1 não são múltiplos entre si).

Ainda neste tópico o autor utiliza o registro geométrico para determinar a dependência linear entre dois vetores no $\mathbb{R}^2$. São exploradas as propriedades de colinearidade dos vetores (p. 57), conforme exemplo a seguir:

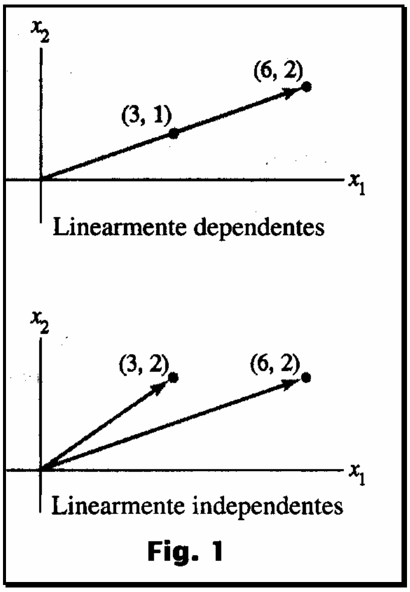


Figura 10 – Dependência linear no $\mathbb{R}^2$

No tópico **Conjunto de Dois ou mais Vetores** (p. 57) o autor define a caracterização de conjuntos linearmente dependentes da seguinte forma:

"Um conjunto indexado S = {v_1, ..., v_p} de dois ou mais vetores é linearmente dependente se e somente se pelo menos um dos vetores de S é uma combinação linear dos demais. De fato, se S é linearmente dependente, e $v_i \neq 0$, então algum v_j (com j > 1) é uma combinação linear dos vetores anteriores v_1, ..., v_{j-1}.

(p. 57)

Quanto ao registro geométrico de dois ou mais vetores, Lay (1999) destaca que um conjunto é linearmente dependente se um dos vetores pertence ao conjunto de todas as combinações lineares dos outros vetores, denominado *Span*[20], conforme a figura 11 (p. 58) a seguir:

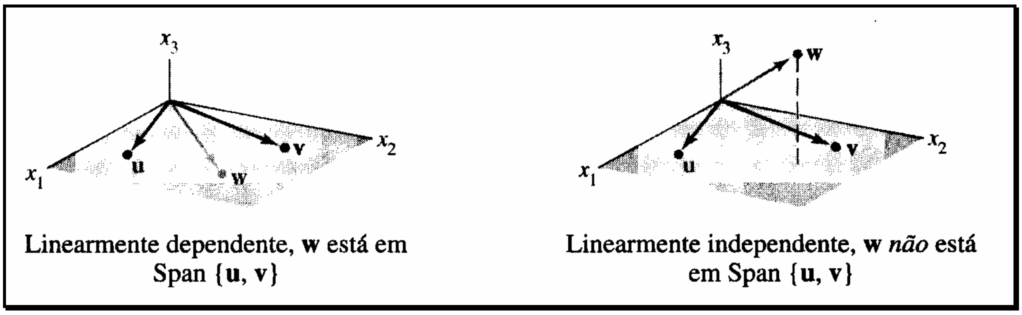


Figura 11 – Dependência linear no $\mathbb{R}^3$

Segundo o autor, pode-se "inspecionar" os vetores para verificar se os mesmos são L.I. ou L.D. pela utilização das propriedades geométricas no $\mathbb{R}^3$.

Dados os vetores *u*, *v* e *w* no $\mathbb{R}^3$, se eles não são coplanares, então são linearmente independentes e caso sejam coplanares, são linearmente dependentes.

Notamos que o autor utiliza o registro geométrico, mas faz referências ao conjunto *Span*, utilizando também o registro simbólico-algébrico.

[20] Span é o conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vetores v_1, v, ..., v_n no $\mathbb{R}^n$ e é chamado de subespaço gerado por v_1, v, ..., v_n do $\mathbb{R}^n$.

Para o caso do conjunto $\{v_{1.},..,v_p\}$ no $\mathbb{R}^n$ conter o vetor nulo, então ele é linearmente dependente, e no caso de apresentar apenas um vetor *v*, será linearmente independente se *v* não for o vetor nulo.

A seguir, o autor recorre de maneira implícita, pelo fato do assunto ainda não ser introduzido, à dimensão do espaço vetorial aos quais os vetores pertencem para caracterizar um conjunto linearmente dependente com o seguinte teorema:

> *"Se um conjunto contém mais do que o número de componentes de cada vetor, então o conjunto é linearmente dependente. Isto é, todo conjunto $\{v_1, ..., v_p\}$ do $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se $p > n$.*
>
> *(p. 58)*

O autor utiliza o registro figural, que representa uma versão matricial, como uma forma diferente de representar o teorema exposto acima, conforme é mostrado a seguir:

$$\begin{array}{cc} & P \\ n & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array}$$

(p. 58)

Na representação matricial, *n* representa o número de equações do sistema linear e *p* representa o número de incógnitas. Se $p > n$, então existem mais variáveis do que equações e, portanto, é preciso que haja uma variável livre. Assim $Ax = 0$ tem solução não trivial e as colunas de A são L.D. or fim, os assuntos independência e dependência linear são tratados novamente no capítulo 4 – **Espaços Vetoriais,** no item 4.3 – **Conjuntos Linearmente Independentes; Bases** (p. 212).

Nesse caso, segundo o autor, a idéia-chave para identificar subconjuntos que geram um espaço vetorial V é a independência linear, da mesma forma como foi definida no $\mathbb{R}^2$ com a mudança de representação dos escalares para $c_1,..., c_p$, por questão de conveniência.

A maior diferença encontrada nesse capítulo com relação ao capítulo estudado anteriormente em que os conceitos de Álgebra Linear são introduzidos no $\mathbb{R}^n$ diz respeito ao fato de que quando os vetores não representados por n-uplas, a equação vetorial $c_1v_1 + c_2v_2 + ...+ c_pv_p = 0$ geralmente não pode ser vista como um sistema de n equações lineares. Sendo assim, não podemos representá-los como as colunas de uma matriz A de modo a estudar a equação $A.\mathrm{x} = 0$. Neste caso, recorre-se à definição de dependência linear dada na página 57:

> *"Um conjunto indexado S = {v_1, ..., v_p} de dois ou mais vetores é linearmente dependente se e somente se pelo menos um dos vetores de S é uma combinação linear dos demais. De fato, se S é linearmente dependente, e $v_i \neq 0$, então algum v_j (com $j > 1$) é uma combinação linear dos vetores anteriores $v_1, ..., v_{j-1}$.*
>
> *(p. 57)*

Como exemplo, o autor cita o caso de dependência linear entre polinômios e funções contínuas em um intervalo C[a, b]:

Exemplo 1 Sejam $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$ e $p_3(t) = 4 - t$. então $\{p_1, p_2, p_3\}$ é linearmente dependente em p porque $p_3 = 4p_1 - p_2$.

Exemplo Resolvido - p. 213

No capítulo 1, com relação aos exercícios propostos eles são colocados em diferentes níveis de dificuldade. Alguns exercícios solicitam apenas a verificação se um conjunto de vetores, representados no registro numérico-tabular (matriz) é linearmente independente ou dependente. Como exemplo do que foi colocado acima, temos:

Nos Exercícios 1 – 6, determine se os vetores são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Justifique sua resposta.

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exercício Proposto 1 - p. 60

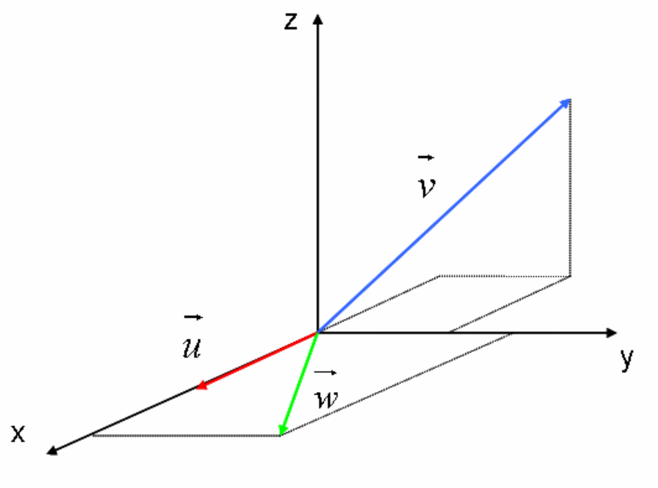
Resolução:

Escrevendo a equação $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz com as coordenadas dos vetores, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Temos que a única solução é $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Portanto os vetores são linearmente independentes.

Uma outra forma de resolver o exercício seria representar os vetores geometricamente, efetuando-se uma conversão de registros, do numérico-tabular para o geométrico:



Sendo $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\2\\3\end{bmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{bmatrix}6\\4\\0\end{bmatrix}$. Verificamos que o vetor $\vec{v}$ não está contido no plano formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$. Portanto os vetores são linearmente independentes.

Foram encontrados exercícios que podem ser resolvidos de maneira semelhante a essa apresentada, utilizando vários métodos, como uma inspeção de um vetor ser múltiplo do outro, os vetores serem coplanares, e conseqüentemente vários tipos de registros de representação semiótica, possibilitando várias conversões de registros.

Para Lay (1999), os exercícios de verificação de um conjunto de vetores no $\mathbb{R}^3$ L.D. ou L.I. são considerados "cálculos rotineiros", pois necessitam apenas, de algum algoritmo, como escrever uma equação vetorial, um sistema linear, uma inspeção "geométrica" (quando possível) para verificar se um vetor é múltiplo do outro.

Encontramos também exercícios propostos que, segundo o autor, são decorrentes de um número significativo de perguntas inovadoras que focalizam dificuldades conceituais encontradas em trabalhos com alunos ao longo dos anos. Como exemplo, podemos mencionar:

Nos Exercícios 27 e 28, classifique cada afirmação como Verdadeira ou Falsa. Justifique cada resposta com base numa leitura cuidadosa do texto.

28. [...] b. Se um conjunto contém menos vetores do que o número de componentes de cada vetor, então o conjunto é linearmente independente.

Exercício Proposto 28 - p. 61

Resolução:

A afirmação é falsa. Uma possível justificativa usada, por exemplo, é o fato de um dos vetores desse conjunto ser múltiplo do outro, ou até mesmo um dos vetores desse conjunto ser o vetor nulo. Portanto, o conjunto é linearmente dependente.

Nesse exercício o aluno, partindo do registro da língua natural, poderia responder utilizando também o mesmo registro, realizando para isso um tratamento de registros.

A seguir, selecionei outro exercício que parte do registro da língua natural, utilizando também o registro simbólico-algébrico e que pode ser resolvido no próprio registro da língua natural:

31. Se $v_1,..., v_4$ estão no $\mathbb{R}^4$ e $v_3 = 2v_1 + v_2$, então $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente dependente.

Resolução

A afirmação é verdadeira. Pelo teorema 7 apresentado no livro, se num conjunto um vetor for combinação linear dos outros vetores do conjunto, então esse conjunto de vetores é linearmente dependente. Como $v_3 = 2v_1 + v_2$ a afirmação é verdadeira.

Exercício Proposto 1 - p. 61

A tabela 8, a seguir, apresenta uma síntese das transformações de registros que podem ser efetuadas nos exercícios propostos.

Tabela 8 – Resultados Quantitativos – LIVRO L_4

TRANSFORMAÇÕES DE REGISTROS				
Registro de Partida	**Registro de Chegada**	**Quanti dade**	**Exemplo**	**Transformação realizada**
Numérico Tabular	Simbólico Algébrico / Numérico Tabular / Geométrico	06	Nos exercícios 1- 6, determine se os vetores são linearmente dependentes. Justifique cada resposta. 6. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$	Conversão/ Tratamento
Numérico Tabular	Simbólico Algébrico	08	Nos exercícios 15-18, determine o(s) valor (es) de *h* para os quais os vetores são linearmente dependentes. 15. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$	Conversão
Numérico Tabular	Numérico Tabular	12	Determine, por inspeção, se os vetores dos Exercícios 19-24 são linearmente independentes. Justifique suas respostas. 23. $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$	Tratamento
Língua Natural	Língua Natural	14	Nos Exercícios 27 e 28, classifique cada afirmação como Verdadeira ou Falsa. Justifique cada resposta com base numa leitura cuidadosa do texto. 28. [...] b. Se um conjunto contém menos vetores do que o número de componentes de cada vetor, então o conjunto é linearmente independente.	Tratamento

Análise Qualitativa e Considerações Parciais

Analisando os conteúdos dos capítulos que tratam da noção de independência e dependência linear deste livro, obtive alguns resultados quanto aos registros de representação semiótica utilizados pelo autor nos exemplos e exercícios propostos.

Inicialmente convém destacar que o autor empregou nos dois capítulos analisados vários tipos de registros para representar a independência e dependência linear entre os vetores, em diferentes situações, o que possibilitou a realização de tratamentos e conversões de registros nos exemplos e exercícios propostos.

A tabela 8 mostra que o registro de partida preferencialmente utilizado pelo autor nos exercícios propostos é o numérico tabular, entretanto na resolução dos exercícios o aluno poderia utilizar outros registros de representação, possibilitando assim as conversões de registro.

O autor propõe a “inspeção” para verificar se um vetor é um múltiplo escalar do outro, onde foram diagnosticados os tratamentos de registro, conservando-se o registro numérico, por exemplo. Além disso, se verificarmos que uma coluna de uma matriz é combinação linear das outras, ou seja, as colunas são linearmente dependentes, estamos utilizando também um tratamento de registros, pois só é necessário utilizar o registro numérico. A tabela 8 apresenta uma incidência de 12 exercícios com esse perfil.

A utilização do registro na língua natural para a resolução de vários exercícios deve ser ressaltada nessa análise. O próprio autor destacou que assim como a linguagem da Álgebra Linear, a língua materna deve ser explorada na resolução de exercícios de Matemática. Quanto a isso o autor cumpriu o que havia comentado no prefácio ao propor exercícios desse tipo. A exploração de exercícios do tipo verdadeiro ou falso, por exemplo, além de colocar em discussão teoremas e propriedades do assunto abordado, destacam a utilização do registro da língua natural na elaboração da resposta.

Com isso, o registro da língua natural foi bastante explorado, o que acredito acabou diversificando a utilização e transformação de mais um registro de representação. Com a utilização do registro de representação da língua natural, o autor procura criar um vocabulário que torne a compreensão do conceito mais simples.

O próprio autor ressalta a importância da utilização da língua natural. Segundo ele:

> Uma habilidade de escrever afirmações matemáticas coerentes na língua materna é essencial a todos os estudantes de Álgebra Linear, e não apenas àqueles que pretendem fazer pós-graduação em matemática. (Lay, 1999, p. xiii).

Utilizando-se do registro da língua natural, verificam-se termos como *"um conjunto indexado de vetores"*, *"constantes c_1, ..., c_p não todas iguais a zero", "relação de dependência linear"*.

Na tabela 8 verificamos um total de 14 exercícios que utilizam a língua natural na sua resolução, e que o aluno poderia realizar um tratamento de registros.

Quanto às conversões de registros, fundamentais para a aprendizagem dos objetos matemáticos, segundo Duval, o livro propõe algumas situações que possibilitam essas conversões.

No primeiro capítulo, sobre sistemas de equações lineares, quando utiliza o registro simbólico-algébrico, o autor chama a atenção do leitor ao tratar o objeto matemático sistemas lineares como sendo uma equação vetorial, com os vetores na forma de uma matriz-coluna. Percebi nesse ponto que a mudança de enfoque proposta pelo autor acarretou uma mudança de registro no tratamento dos sistemas lineares, pois o leitor poderia utilizar mais o registro numérico tabular.

Mais do que uma mudança de registro pode-se trabalhar as propriedades de relação de dependência entre as colunas da matriz, a redução da matriz na forma escalonada e o número de soluções do sistema, além da noção de posto de uma matriz.

Paralelamente a essas mudanças de registros, analisei a conversão de registros dos vetores para o geométrico, em que o autor explorou as propriedades geométricas dos vetores. Apenas tenho que destacar o pesar de não encontrar exercícios em que os vetores são representados no registro geométrico e a partir daí o aluno poder efetuar uma conversão, para o registro numérico ou até mesmo geométrico. Essa conversão no sentido “inverso” segundo Duval se torna muito importante nas atividades matemáticas.

A possibilidade do aluno a todo instante nas atividades matemáticas ter a oportunidade de mudança de registros, pode ser verificada nos exercícios analisados, que segundo Duval na resolução de problemas traz uma originalidade nas atividades, mesmo quando se privilegia um registro. Obtive como resultado da análise de acordo com a tabela 8, um total de 14 exercícios que possibilitam explorar as conversões de registro.

Tanto nos exemplos quanto nos exercícios, o autor propicia várias maneiras de se verificar a independência linear dos vetores, o que abre uma oportunidade ao aluno de efetuar mudanças de registros distintas. Pelo predomínio dos vetores serem representados por uma matriz-coluna, o registro encontrado com maior incidência no capítulo 1 foi o numérico-tabular.

No capítulo 4 que trata do assunto de dependência e independência linear, verifica-se a utilização de outros espaços vetoriais, como o espaço das funções contínuas em um intervalo, dos polinômios, o que privilegia o registro de representação simbólico-algébrico e que predominam os tratamentos nesse registro.

A proposta do autor apresentada no prefácio do livro de tratar os sete primeiros capítulos no contexto do $\mathbb{R}^4$, com ênfase nos vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ foi realmente verificada na minha análise no que se refere à noção de independência e dependência linear. O autor inicialmente apresentou a noção de dependência linear no $\mathbb{R}^4$ e a seguir formalizou-a em outros espaços vetoriais.

6.5 – LIVRO L_5

Álgebra Linear

Autor: David Poole

1º Edição, 2004 – Editora Thomson.

O livro apresenta a seguinte divisão de capítulos em seu sumário:

Prefácio – Introdução

No prefácio, o autor destaca o público-alvo a quem o livro é destinado, englobando alunos de graduação nos diversos cursos de exatas como Matemática, Física, Engenharia, dentre outros, além de comentar o primeiro contato que esses alunos terão com a disciplina de Álgebra Linear.

Segundo o autor, a abordagem desse livro é compatível com a maioria das recomendações feitas pelo Grupo de Estudos Curriculares de Álgebra Linear (LACSG, veja The College Journal, nº 24, 1993, p. 41 - 46) para um curso inicial de Álgebra Linear. Segundo essas recomendações, o objetivo é apresentar um primeiro curso de Álgebra Linear com a disciplina mais concreta, afastando-se das abstrações, sendo que para isso basear-se-á na abordagem geométrica e na utilização de matrizes.

Para o autor, a Álgebra Linear é essencialmente o estudo sobre vetores e, portanto, os alunos devem aprender os vetores antes (segundo o livro, de preferência em uma situação concreta) para adquirirem alguma intuição geométrica nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Dependência Linear

O assunto dependência linear é introduzido no capítulo 2 – **Sistemas de Equações Lineares** (p. 91). Segundo o autor, combinações lineares e dependência linear de vetores são um modo ou uma “via” de estudos de sistemas lineares, pois resolver um sistema de equações significa a possibilidade de expressar um vetor como combinação linear de outros vetores dados.

O exemplo a seguir ilustrará melhor a situação descrita anteriormente:

Exemplo 1

O vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$?

Solução: Queremos encontrar escalares *x* e *y* tais que:

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Desenvolvendo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x \quad -y=1 \\ \qquad y=2 \\ 3x-3y=3 \end{cases} \Rightarrow x=3, \quad y=2$$

Portanto, o vetor $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$, pois $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3.\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+2.\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$.

Exemplo Resolvido 1 - p. 86

Um outro caminho de se compreender a resolução de um sistema de equações seria por meio da geometria, com as equações representando retas e planos no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente e o método iterativo na resolução de sistemas lineares o outro caminho.

No exemplo 1 anterior, o autor destaca que o vetor $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ “depende” dos vetores $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$ por ser uma combinação linear deles. Por meio desse exemplo, ele define o conceito de dependência linear da seguinte maneira:

Definição: Um conjunto de vetores v_1 ,v_2, ...,v_k é linearmente dependente quando existem escalares c_1, c_2, ..., c_k, pelo menos um dos quais não nulo, tais que :

$$c_1v_1 + c_2v_2 +...+ c_kv_k = 0.$$

Um conjunto de vetores não linearmente dependente é chamado linearmente independente. (p.91)

Além disso, o autor chama a atenção com a observação do termo "um dos escalares *c_1, c_2, ..., c_k seja não nulo"* cria a possibilidade de algum deles ser zero.

Em um exemplo o autor utiliza os vetores no registro de representação numérico-tabular (matrizes):

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo, $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes, já que pelo menos (de fato, dois) dos três escalares 1, -2 e 0 é não-nulo.

Exemplo Resolvido - p. 91

Outro recurso utilizado pelo autor para a noção de dependência linear é o fato de o vetor nulo ser escrito como combinação dos vetores v_1, v_2,..., v_n apenas de maneira trivial, ou seja:

$$0.v_1 + 0.v_2 +...+ 0.v_n = 0.$$

o que permite dizer, portanto, que os vetores v_1, v_2, ..., v_n são linearmente independentes, caso contrário, os vetores são linearmente dependentes.

Além disso, o autor destaca que a relação entre a noção intuitiva de dependência linear e a definição formal, expressa no teorema abaixo, são noções equivalentes. O teorema afirma que:

> ***Teorema :*** *Vetores v_1 ,v_2,..., v_m em $\mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes se, e somente se, pelo menos um dos vetores puder se escrito como uma combinação linear dos demais.* *(p. 91)*

A seguir o livro mostra alguns exemplos, e o autor destaca para o leitor antes verificar por “inspeção” a dependência linear entre os vetores caso existam vetores “múltiplos” entre si, que são linearmente dependentes.

Como exemplo, temos:

Exemplo 6
Determine se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes:
(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Exemplo Resolvido 6 - p. 92

No exemplo anterior, com a utilização novamente do registro numérico-tabular, como os vetores não são múltiplos um do outro, pois não existe uma relação de dependência “óbvia”, os vetores são linearmente independentes. Com isso, segundo o autor o aluno não necessita resolver um sistema linear, “economizando” cálculos.

Além disso, há a verificação da dependência linear por meio da resolução de um sistema linear homogêneo sendo que os vetores são linearmente dependentes quando o sistema apresentar uma solução não trivial, caso contrário serão linearmente independentes, o que pode ser exemplificado a seguir:

Determine se os seguintes vetores abaixo são linearmente independentes:

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solução:

Como não há uma relação de dependência "óbvia" (um vetor múltiplo do outro), vamos encontrar escalares c_1, c_2 e c_3 tais que:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema linear correspondente é

$$\begin{cases} c_1 + \quad c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 \quad = 0 \\ \quad c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

A matriz completa dos coeficientes é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A forma escalonada reduzida é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

O sistema possui solução trivial, portanto, os vetores são linearmente independentes.

Exemplo Resolvido - p. 92-93

Nesse caso, utilizou-se uma conversão de registros para a resolução do exercício, partindo do registro numérico-tabular e transformando para o simbólico-algébrico.

Outra maneira colocada no livro para a verificação da dependência linear é por meio da dimensão do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, sendo qualquer conjunto de *m* vetores em $\mathbb{R}^n$ linearmente dependente se $m > n$ (três vetores, por exemplo, no espaço $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes).

O assunto dependência linear é abordado novamente no capítulo 6 – **Espaços Vetoriais** (p. 401), com as noções já abordadas sendo estendidas para um espaço vetorial V qualquer no lugar do $\mathbb{R}^n$. Podemos citar alguns exemplos desse capítulo, como o que será mostrado a seguir:

Exemplo 1

Em $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, o conjunto

$\{1 + x + x^2, 1 - x + 3x^2, 1 + 3x - x^2\}$ é linearmente dependente, uma vez que

$$2(1 + x + x^2) - (1 - x + 3x^2) = 1 + 3x - x^2$$

Exemplo Resolvido 1 - p. 402

Neste caso, partindo do registro simbólico-algébrico e fazendo uma inspeção, realiza-se um tratamento de registro.

Exemplo 2

Em M_{22}, considere:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $A + B = C$, e, portanto, o conjunto $\{A, B, C\}$ é linearmente dependente.

Exemplo Resolvido 2- p. 402

Novamente, por meio de uma inspeção, no próprio registro numérico-tabular, verifica-se que uma matriz é a soma das outras duas, donde se conclui que os vetores são linearmente dependentes.

Exemplo 3

Em $\mathbb{F}$, o conjunto $\{sen^2x, cos^2x, cos2x\}$ é linearmente dependente, uma vez que

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$$

Exemplo Resolvido 3 - p. 402

O exemplo 3 utiliza, dentro do registro simbólico-algébrico, uma identidade trigonométrica para a determinação da dependência linear.

Verificamos, nesse capítulo, exemplos com espaços vetoriais das funções polinomiais $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, das matrizes quadradas $\mathbb{M}_{nxn}$, sendo estendidos até para os espaços vetoriais de dimensão infinita.

Os exercícios propostos a respeito de dependência linear no capítulo 2 – Sistemas de Equações Lineares (p. 95) podem ser classificados de maneira análoga à análise dos outros livros: os exercícios em que se solicita a verificação de um subconjunto ser L.D. ou L.I., e os exercícios em que se solicita uma demonstração. Os exercícios propostos do capítulo 6 – **Espaços Vetoriais** (p. 413) podem ser classificados também dessa maneira. O diferencial dos exercícios deste capítulo são os espaços vetoriais que, diferentemente do capítulo 2, são explorados os espaços das matrizes, dos polinômios de grau menor ou igual a *n* e das funções contínuas em um intervalo.

Dois exercícios abaixo ilustram os dois casos indicados anteriormente:

Use o método do Exemplo 6 e o Teorema 3 para determinar se o conjunto de vetores nos Exercícios de 22 a 31 são linearmente independentes. Se, para algum deles, a resposta puder ser determinada por inspeção (isto é, sem contas), diga por quê. Para os conjuntos linearmente dependentes encontre uma relação de dependência entre os vetores.

22. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Exercícios Propostos 22 e 23 – p. 96

No exercício 22, os vetores são representados no registro numérico-tabular. O aluno verificaria, por inspeção, que os vetores não são múltiplos entre si, e concluiria que são linearmente independentes. Nesse caso, não é necessária a mudança de registro.

No exercício 23, como não existe uma combinação “óbvia”, o aluno poderia resolver o sistema formado pelas coordenadas dos vetores, utilizando para isso uma conversão de registros, passando para o registro simbólico-algébrico.

Nos exercícios de 1 a 4, teste se os conjuntos de matrizes são linearmente independentes em M_{22}. Para os que forem linearmente independentes, expresse uma das matrizes como combinação linear das demais.

1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

Resolução:

Vamos encontrar escalares reais *a, b, c* e *d* tais que

$$a.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta equação resulta no sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b \quad = 0 \\ \quad b + 3c = 0 \\ -a \quad + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Portanto, o conjunto das matrizes é linearmente independente.

Exercício Proposto 1 - p. 413

A tabela 9 a seguir mostra a síntese das transformações de registros nos exercícios propostos.

Tabela 9 – Resultados Quantitativos – LIVRO L_5

Transformações de registros utilizadas no livro				
Registro de Partida	**Registro de Chegada**	**Quantidade**	**Exemplo**	**Transformação realizada**
Numérico Tabular	Simbólico Algébrico	14	Determine se o conjunto de vetores abaixo é linearmente independente: 23. $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$	Conversão
Língua Natural	Simbólico Algébrico	05	Demonstre que todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.	Conversão
Numérico Tabular	Numérico Tabular	10	Determine se os conjuntos de vetores são linearmente independentes convertendo os vetores em vetores-linha e usando o método do escalonamento: 39. $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\\-1\end{bmatrix}$	Tratamento
Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico	15	Nos exercícios abaixo, teste se os conjuntos de polinômios são linearmente independentes: 7. $\{2x, x - x^2, 1 + x^3, 2 - x^2 + x^3\}$, em $\wp_3$	Tratamento
Língua Natural	Língua Natural	01	42. (a) Qual será o posto de uma matriz *nxn* se suas colunas, vistas como vetores em $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes?	Tratamento

Análise Qualitativa e Considerações Parciais

Pela análise dos capítulos do livro verificamos que o autor procura utilizar as noções de independência e dependência linear sob diferentes aspectos, semelhante ao que foi constatado no Livro 4, de David Lay (1999). Há um predomínio da representação dos vetores no registro numérico-tabular, conforme verificamos na tabela anterior, em que os vetores são representados por vetores-coluna. O autor procura unir a relação de independência linear entre os vetores-coluna com o número de soluções de um sistema linear homogêneo, com as colunas da matriz formada por esses vetores, utilizando predominantemente o registro algébrico.

É interessante notar que o autor apresenta um cenário dito “concreto” utilizado para anteceder alguns assuntos considerados fundamentais, como geradores, independência linear, subespaços. Os cenários utilizados são os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, os quais exploram os conceitos de retas e planos para a resolução de sistemas lineares, por exemplo.

Entretanto, na abordagem do tema independência e dependência linear causou-me certa “frustração” ao constatar a falta da utilização do registro geométrico nos exemplos e exercícios propostos relacionados a esse tema. Os resultados obtidos na tabela indicam a ausência do registro geométrico. Privilegiou-se o registro numérico tabular para a representação dos vetores e as conversões de registros ficaram restritas ao registro algébrico, na resolução de sistemas lineares para a verificação da dependência linear.

Além dos registros numérico tabular e simbólico-algébrico, utilizou em alguns exercícios a língua natural (01 exercício, conforme tabela 9) como forma de demonstração de algum teorema proposto, juntamente com o registro simbólico-algébrico.

De certa forma, o autor diversifica os registros de representação empregados à medida que ele utiliza os conjuntos e espaços vetoriais verificados na análise, como o espaço das matrizes, das funções contínuas em um intervalo, dentre outras.

Outro recurso utilizado pelo autor na verificação da dependência linear é a dimensão do espaço vetorial. Nenhuma citação é feita com relação a um vetor ser múltiplo do outro ou os vetores serem coplanares, caracterizando a dependência linear.

Em termos de conversão de registros, verificamos que 19 exercícios possibilitam a conversão para o registro simbólico-algébrico, enquanto que 26 exercícios necessitam apenas de um tratamento de registros para a sua resolução.

6.6 – Análise comparativa dos resultados

A análise dos cinco livros didáticos de Álgebra Linear possibilitou obter alguns resultados sobre a utilização dos registros de representação semiótica nas noções de independência e dependência linear que serão apresentados e analisados a seguir.

Segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, muitas conversões de registros nas atividades matemáticas apresentam o fenômeno de não-congruência quando o registro de chegada é o registro da língua natural.

Quanto à utilização do registro da língua natural nas noções abordadas, os livros didáticos analisados apresentaram a utilização de poucos termos que pudessem caracterizar e auxiliar na compreensão do objeto matemático em estudo.

Percebi que na maior parte dos livros didáticos analisados a equação vetorial $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$, *com os* α_i *em* $\mathbb{R}$, que representa a combinação linear entre os vetores do conjunto $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ quando convertida para o registro da língua natural, os livros didáticos procuram utilizar termos como “sem que os escalares α_i sejam todos iguais ao número zero” (livro L_1), “constantes c_1, c_2, .., c_n não todas iguais a zero” (livro L_4) para traduzir a relação de dependência linear entre os vetores.

Por outro lado, outros livros didáticos (livro L_3, por exemplo) procuram não utilizar os termos citados anteriormente, mas sim relacionar a dependência linear com o número de soluções de um sistema linear. Esse fato possivelmente pode evidenciar a solução que alguns autores encontraram para procurar “evitar” o fenômeno de não-congruência utilizando o registro da língua natural.

Ainda quanto à utilização do registro da língua natural, verifiquei que alguns autores empregam alguns termos que auxiliam a compreensão da relação de dependência entre os vetores, como “vetores supérfluos” (livro L_2), “menor número possível de vetores” (livro L_3), “vetor dependente dos outros” (livro L_5). Os livros L_1, L_4 e L_5 não utilizam nenhum termo semelhante aos citados anteriormente, explorando conseqüentemente pouco o registro da língua natural nas definições apresentadas. Cabe ressaltar que o livro L_4 utiliza o registro da língua natural com uma incidência maior nos exercícios propostos.

Uma característica apresentada na maioria dos livros analisados é o fato dos exercícios propostos apresentarem poucas opções de conversões de registros, privilegiando-se assim os tratamentos.

Em termos quantitativos, na resolução dos exercícios propostos predominaram os tratamentos de registros (62%) sobre as conversões (38%). Para Duval, a atividade de conversão de registros é uma condição importante para a aprendizagem em Matemática, além de oferecer uma originalidade na mobilização simultânea de ao menos dois registros na resolução das atividades propostas.

O que diagnostiquei na análise dos exercícios propostos é que eles em sua maioria não possibilitam explicitamente a conversão de registros. Alguns livros apresentam particularmente alguns exercícios que permitem as conversões de registros, como os exercícios que foram analisados nos livros L_4 e L_5, mas de um modo geral, como afirma Duval a conversão de registros na resolução de exercícios é “ignorada”.

Constatei que os autores nos livros analisados privilegiam determinados tipos de registro, como o numérico por n-uplas ou simbólico algébrico (livros L_1 e L_3) e o numérico tabular (livros L_4 e L_5), sendo outros registros pouco explorados, como o geométrico e o simbólico matricial.

O registro numérico tabular (47%) foi o mais utilizado como registro de partida nos exercícios propostos, seguido do registro simbólico-algébrico (24%).

Duval ressalta que mesmo um registro sendo privilegiado, deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro. O livro L_4 privilegia o registro numérico tabular, mas na análise verifiquei que alguns exercícios possibilitam a mobilização de registros, para o simbólico-algébrico ou até mesmo na língua natural. Isso não foi verificado nos outros livros analisados.

Lamento o fato do livro L_2 apresentar apenas um exercício sobre as noções de independência e dependência linear, o que limitou em sobremaneira a análise didática. Esse livro, em sua parte teórica, explora o registro simbólico-algébrico, introduzindo de forma implícita as noções de independência e dependência linear no contexto dos sistemas lineares, além de utilizar o registro geométrico para explorar a relação de dependência linear entre os vetores e as propriedades de colinearidade e coplanaridade entre os vetores.

Alguns livros apresentaram características muito semelhantes quanto à abordagem dos assuntos analisados: os livros L_1 e L_2, que privilegiam o registro numérico por n-uplas e o simbólico-algébrico; e os livros L_4 e L_5 priorizam o registro numérico-tabular.

Nos livros L_1 e L_2 diagnostiquei que os exercícios propostos envolvem conversões de registros do numérico-tabular para o simbólico-algébrico, ou tratamentos de registros dentro do próprio registro simbólico-algébrico. Os exercícios que se solicita uma demonstração do aluno necessitam de um tratamento de registros.

Nas obras analisadas eu não percebi nenhuma atividade que explorasse o registro geométrico, apesar desse registro ter sido utilizado na parte teórica do livro (livro L_2, por exemplo).

Já nos livros L_4 e L_5, que privilegiam o registro numérico-tabular, constatei que muitos exercícios propostos podem ser resolvidos utilizando-se um tratamento de registros no próprio registro numérico.

O livro L_3 possui características quanto à utilização dos registros mais próximas dos livros L_1 e L_2, com um diferencial de apresentar alguns exercícios que utilizam o registro simbólico matricial, envolvendo o espaço das matrizes.

Uma possível implicação didática do privilégio de determinados registros de representação é não permitir de forma explícita conversões de registros é levar o leitor possivelmente a uma visão “fragmentada” do conceito. Para Duval a escolha de um registro de representação nas atividades matemáticas tem como estratégia facilitar a compreensão e resolução dos exercícios propostos.

Quanto ao caráter generalizador e unificador da Álgebra Linear, encontrei poucos exercícios que trabalhassem as noções de independência e dependência linear com espaços vetoriais como o espaço das matrizes, o espaço das funções contínuas em um intervalo, dos polinômios de grau menor ou igual a n, mais o polinômio nulo.

No que tange à abordagem do objeto matemático de estudo, nenhum livro didático analisado nesta pesquisa apresenta as noções de independência e dependência linear sendo abordada em outros contextos. Os livros L_2, L_4 e L_5 possuem capítulos sobre aplicações da Álgebra linear, como o livro L_2 que aborda o assunto programação linear utilizando os registros algébrico e geométrico, mas em nenhum momento explora a relação de dependência linear entre os vetores, como por exemplo, na resolução de exercícios de programação linear.

No próximo capítulo, descreverei as conclusões finais sobre a análise dos livros didáticos, ressaltando algumas sugestões que possam colaborar para o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, no que diz respeito às noções de independência e dependência linear.

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após analisar os livros didáticos de Álgebra Linear selecionados, à luz do referencial teórico e realizar a pesquisa documental do contexto histórico acerca do desenvolvimento do conceito de independência linear, algumas conclusões e sugestões serão apresentadas a seguir.

Inicialmente gostaria de salientar que esta pesquisa diagnosticou e analisou sob o ponto de vista do referencial teórico quais são os registros de representação semiótica utilizados nos livros selecionados de Álgebra Linear nas definições, exemplos e exercícios propostos sobre as noções de independência e dependência linear.

O referencial teórico utilizado nesta pesquisa foi a teoria dos Registros de Semiótica, de Raymond Duval, que destaca a importância da utilização dos registros na aprendizagem dos objetos matemáticos.

A metodologia que empreguei foi embasada nos procedimentos de uma pesquisa documental, a qual, inicialmente consultei as ementas da disciplina de Álgebra Linear do curso de Licenciatura em Matemática de dez universidades de diferentes regiões do país, com o intuito de verificar quais são os livros de Álgebra Linear mais citados nas referências bibliográficas.

Foram selecionados cinco livros cuja análise didática realizei nos capítulos que tratavam das noções de independência e dependência linear.

Concomitante à análise dos livros didáticos, fiz uma análise histórica da evolução do conceito de independência linear, com a finalidade de verificar possíveis obstáculos no desenvolvimento do tema, além de obter outras informações e conhecimentos a respeito do objeto matemático de estudo.

A princípio gostaria de sugerir que as noções de independência e dependência linear possam ser introduzidas inicialmente num curso de Álgebra Linear explorando-se o registro geométrico, efetuando-se algumas conversões de registros, utilizando-se o contexto e os assuntos abordados na Geometria Analítica.

A proposta baseia-se em alguns resultados de pesquisa que referendam a introdução de um curso de Álgebra Linear utilizando-se as propriedades geométricas dos vetores nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. A abordagem de alguns tópicos estudados em Geometria Analítica para introduzir os conceitos de Álgebra Linear, como sugere os resultados de pesquisa de Padredi e Di Pinto, reforçam a utilização do registro geométrico no ensino do conceito de independência linear.

A utilização do registro geométrico, as quais são trabalhadas as propriedades geométricas da independência e dependência linear entre os vetores, como o paralelismo e a coplanaridade, mobilizaria possíveis conhecimentos adquiridos pelo aluno que cursou a disciplina de Geometria Analítica para a introdução dos conceitos de Álgebra Linear, e auxiliaria posteriormente nas generalizações para o $\mathbb{R}^n$ e outros espaços vetoriais.

Entretanto, não foi encontrado nos livros didáticos analisados nenhuma atividade, exercício ou até mesmo uma situação que permitisse a conversão utilizando-se o registro geométrico. Foram encontrados apenas alguns comentários feitos nos livros L_2, L_3 e L_4 sobre as propriedades geométricas ligadas ao conceito de independência linear, mas nenhum livro apresentou algum tipo de exercício que permitisse ao aluno utilizar o registro geométrico e suas possíveis conversões de registros.

Os livros analisados não retomaram a Geometria Analítica, que pode ser considerada “concreta”, segundo Harel, em que o aluno possivelmente já possa ter aprendido, para introduzir conceitos novos em Álgebra Linear.

Para Duval, as conversões de registros trazem uma originalidade na resolução de problemas matemáticos, além de constituir um papel fundamental na aprendizagem dos objetos matemáticos. De acordo com a sua teoria, as possíveis dificuldades no aprendizado dos objetos matemáticos em atividades propostas surgem ao serem estudadas e analisadas as conversões de registros.

Quanto às articulações e mudanças de registros, diagnostiquei na análise dos livros didáticos um predomínio dos tratamentos de registros na resolução dos exercícios. Os exemplos e exercícios propostos apresentam poucas opções quanto à possibilidade das conversões de registros, o que de certa forma limita a diversificação da utilização dos registros de representação.

Gostaria de sugerir que os livros didáticos trouxessem mais exercícios que pudessem produzir mais conversões de registros, pois de acordo com Duval nas atividades matemáticas as conversões de registros são praticamente “ignoradas”.

Verifiquei também que os autores dos livros didáticos privilegiam determinados registros de representação. Nos livros analisados percebi o predomínio do registro numérico (tabular ou por n-uplas) e o registro simbólico-algébrico, sendo que os registros simbólico-matricial e geométrico foram menos explorados, talvez por questão de economia de espaço por parte do autor, assim como diagnosticou em sua pesquisa Pavlopoulou.

Ainda sobre o predomínio dos registros de representação, notei que os registros utilizados pelos autores nas definições e exemplos são usados preferencialmente nos exercícios propostos. Os livros analisados apresentam poucas opções quanto à possibilidade das conversões de registros, o que pode em grande medida levar o aluno a uma visão fragmentada do conhecimento.

Duval enfatiza que devemos transitar em pelo menos dois registros de representação para que possamos compreender os conceitos ligados aos objetos matemáticos nas atividades propostas. A utilização poucos registros de representação dificulta essa transição e suas transformações.

A utilização do registro de representação da língua natural foi encontrada em apenas um livro didático. No livro L_4, por exemplo, alguns exercícios podem ser resolvidos dentro do próprio registro da língua natural, sendo necessário apenas um tratamento de registros.

Proporia nas atividades matemáticas que o registro da língua natural fosse mais utilizado, pois traria possivelmente uma contribuição na resolução de exercícios do tipo verdadeiro ou falso e até mesmo em exercícios de prova e demonstração que envolva independência linear. Nas pesquisas de Robert e Robinet verificou-se a dificuldade que os alunos apresentam com esses tipos de exercícios.

Explorando-se o emprego do registro da língua natural, o professor faz com que o aluno possa dissertar mais sobre os conceitos matemáticos aprendidos. Nesse caso, o aluno pode escrever a respeito da própria Matemática, citando teoremas, propriedades, elaborando contra-exemplos para validar uma afirmação, constituindo uma atividade pouco explorada pelos professores.

Além disso, segundo Duval muitas conversões de registro apresentam o fenômeno de não-congruência semântica quando o registro de chegada é o registro da língua natural. Nos livros didáticos analisados observamos, por exemplo, que os autores utilizaram alguns termos na língua natural para a definição de independência linear, como “sem que os escalares α_i sejam todos iguais ao número zero”, “sendo os escalares todos não-nulos”, “escalares pelo menos um dos quais não nulos”, que poderiam ocasionar a dificuldade na compreensão do assunto abordado.

Por outro lado, não se constatou o emprego na língua natural de outras expressões que pudessem facilitar a caracterização e a compreensão do objeto matemático em estudo. Em algumas citações foram empregados termos como “vetores supérfluos”, “vetores dependentes”. Como sugestão, no ANEXO B encontra-se alguns termos utilizados na língua natural para as definições de independência e dependência linear em livros didáticos de origem estrangeira.

O contexto histórico da evolução do conceito de independência linear nos mostrou a dificuldade que os matemáticos apresentaram com a utilização e articulação dos registros de representação, sendo que em alguns casos como Euler, por exemplo, as noções de independência e dependência linear ficaram ligadas muito ao contexto dos sistemas lineares, e conseqüentemente as transformações de registros se resumiam aos tratamentos dentro do registro simbólico-algébrico.

Com relação ao contexto em que as noções de independência e dependência linear foram abordadas do ponto de vista histórico, constatei que Frobenius contribuiu de maneira significativa para a utilização da noção de independência linear não só no contexto das equações de um sistema linear, mas também no contexto das n-uplas, auxiliando no desenvolvimento de posto.

No caso de Grassmann, os termos utilizados por ele no registro da língua natural, como “grandezas deriváveis”, “espécies dependentes uma da outra” dificultaram muito a compreensão dos objetos matemáticos estudados. Nesse caso, percebeu-se o caso de não-congruência entre os registros utilizados por ele nas definições dos objetos matemáticos estudados.

Outro fato que merece ser destacado do ponto de vista histórico é a utilização dos termos linearmente independente e linearmente dependente introduzido nos livros didáticos por Maxime Böcher. O autor utiliza o registro simbólico-algébrico para caracterizar o objeto matemático, e a seguir utiliza o registro geométrico para interpretar o objeto matemático geometricamente.

No que diz respeito aos capítulos que apresentam as noções de independência e dependência linear, verificou-se em alguns livros analisados que esses conceitos estão ligados a uma ferramenta para a determinação de um conjunto gerador minimal que constituíra a base de um espaço vetorial.

Nos livros de Álgebra Linear analisados, a maioria dos autores introduz esse conceito no capítulo que antecede a noção base de um espaço vetorial. Em todos os livros analisados, não se verificou uma abordagem ou aplicação desse conceito em outras áreas e contextos, como sugeriu Silva em sua pesquisa com relação aos temas abordados em Álgebra Linear.

Uma possível abordagem inicial do conceito de independência linear pode ser feita por meio dos sistemas lineares. Ao mobilizar esse conhecimento possivelmente adquirido pelo aluno, podemos apresentar um sistema linear como uma combinação linear de vetores. Isso pode ser feito de forma simples, utilizando um tratamento de registros dentro do registro algébrico, cujo aluno verificaria por meio das combinações lineares se os vetores são linearmente independentes. Essa abordagem foi verificada nos livros L_2, L_4 e L_5.

Os sistemas lineares permitem ainda a exploração das relações de dependência entre as equações do sistema, como foi apontado no estudo do contexto histórico. Esse tipo de situação, em que se utilizam as relações de dependência entre as equações de um sistema linear, de acordo com pesquisas realizadas por Ousman (1996) costuma apresentar dificuldades por parte dos alunos, talvez por falta de exploração nos livros didáticos de Álgebra Linear. Essa abordagem permite também algumas conversões de registros.

Outra possível abordagem das noções de independência e dependência linear poderia ser feita em contextos com aplicações da Álgebra Linear, como nos modelos de programação linear (pesquisa operacional) e modelos lineares econômicos (modelo de Leontief, por exemplo).

Nesse caso, a abordagem nos contextos citados permite explorar alguns tipos de registros de representação, como o registro geométrico e o simbólico-matricial, pouco explorado nos livros analisados.

Para a generalização do conceito de independência linear, verificou-se que do ponto de vista histórico houve uma dificuldade intrínseca na exploração do objeto matemático em outros contextos, pois o conceito restringia-se apenas à resolução de sistemas lineares.

Para uma introdução dos conceitos de independência e dependência linear, concluo que os registros que devem ser mais explorados inicialmente num curso de Álgebra Linear são: o registro geométrico e registro numérico (n-uplas e numérico tabular) e a sua abordagem sendo feita nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ no contexto, por exemplo, dos sistemas lineares, com o registro simbólico-algébrico.

Já numa segunda etapa do curso de Álgebra Linear as generalizações poderiam ser feitas utilizando-se evidentemente o registro simbólico-algébrico para se explorar essas noções em outros espaços vetoriais, como o espaço das funções contínuas em um intervalo, dos polinômios de grau menor ou igual a n e das matrizes m por n, por exemplo.

Em síntese, dos livros didáticos analisados nesta pesquisa percebi uma falta de diversificação na utilização dos registros de representação. Como alguns registros de representação são privilegiados pelos autores e outros registros deixam de ser utilizados, as conversões de registros são restritas e acabam não sendo explicitadas nos livros.

Como proposta de atividade para o estudo das noções de independência e dependência linear, no ANEXO C encontra-se uma atividade que tem por objetivo explorar as conversões dos registros de representação no conceito de independência linear, sobretudo utilizando o registro geométrico e da língua natural.

Espero que estas considerações, recomendações e sugestões aqui descritas possam contribuir para o ensino-aprendizagem das noções de independência e dependência linear, no intuito de despertar nos professores, educadores e pesquisadores de Álgebra Linear a importância dos registros de representação semiótica nas atividades matemáticas e suas implicações didáticas.

Espero, com as análises realizadas nesta pesquisa, que os professores de Álgebra Linear possam refletir um pouco mais sobre a importância dos registros de representação semiótica ao elaborar suas aulas, atividades e avaliações, além de fornecer subsídios para avaliar outros livros didáticos à luz do referencial teórico utilizado nessa pesquisa.

Lembrando a afirmação de Duval que nas atividades matemáticas a diversidade dos registros de representação semiótica é uma característica importante que raramente os professores levam em conta no ensino, verificamos que no caso da noção de independência e dependência linear essa é uma condição fundamental para a sua aprendizagem, mas que infelizmente é pouco explorada nos livros didáticos de Álgebra Linear.

Contudo, o fato dos livros didáticos de Álgebra Linear deixarem de levar em conta nas atividades matemáticas as conversões de registro não nos torna, professores e pesquisadores, um tanto desanimados e frustrados, mas com certeza nos impulsiona para outras pesquisas sobre possíveis propostas de ensino para a Álgebra Linear.

O que eu gostaria é que os alunos, assim como afirma Dorier, ao estudar pela primeira vez um curso de Álgebra Linear, não se sintam “pisando em um outro planeta”, diante de uma linguagem totalmente nova e incompreensível. Esse planeta deve ser sim explorado e “habitado” pelos alunos, e sua linguagem e suas representações podem e devem ser compreendidas.

BIBLIOGRAFIA

ANDREOLI, Daniela I.; CERURRI, Rubén A. **Construcción de los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad** (Primeira Fase). Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE. Argentina, 2002.

______ (2003). **Construcción de los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad** (Segunda Fase). Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE. Argentina.

______ (2005). **Construcción de los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad** (Terceira Fase). Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE. Argentina.

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea.** 1º Edição, 2006. São Paulo: Bookman.

ARAUJO, Cláudia Cardoso Vieira Brazil de. **A Metamatemática no livro didático de Álgebra Linear.** São Paulo: PUC-SP, 2002. Dissertação de Mestrado. Orientador: Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.

BÖCHER, Maxime. **Introduction to higher algebra.** New York, Macmillan, 1947.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear** 3º Edição, 1984. São Paulo: Editora Harbra – Harper & Row do Brasil

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica – Um tratamento vetorial.** 3º Edição, 2005. São Paulo: Prentice Hall.

BOURBAKI, Nicolas. **Algèbre vol. II – Algèbre Linéaire**. Herman 8 Cie, Éditerus. Paris, 1947. 1º ed.

BOUTELOUP, Jacques. **L´Algèbre Linéaire**. Pres Universitaires de France, 3 ed., 1980.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, C.F. **Álgebra Linear e Aplicações.** 3º Edição, 1982. São Paulo: Editora Atual

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 6º Edição, 2005. Lisboa: Gradiva.

CARLSON, David et al. **The Linear Algebra Curriculum Study Group - recommendations for the first course in linear algebra,** College Mathematics Journal nº 24, 1993, p. 41 - 46.

______ (1997). **Resources for teaching linear algebra.** 1. ed. MAA.

CELESTINO, Marcos Roberto. **"Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90"**. São Paulo: PUC-SP, 2000. Dissertação de Mestrado. Orientador: Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.

DI PINTO, Marco Antonio. **Ensino e aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras na década de 90.** São Paulo: PUC-SP, 2000. Dissertação de Mestrado. Orientador: Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.

DORIER, J. L. (1990). **"Contribution à l'Étude de l'Enseignement à l'Université des Premiers Concepts d'Algèbre Linéaire. Approches Historique et Didactique"**. These de Doctorat de l'Université J. Fourier, France, Grenoble 1.

______ (1998a). **État de l'art de la recherche en didactique des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algébre linéaire**. In: R.D.M., vl 18, n. 2. Ed. La Pensée Sauvage: Grenoble, p.191-230.

______ (1998b). **The role of formalis in the teaching of the theory os vector spaces**. In: Linear Algebra and its Applications, p. 275-276, 141-160.

______ (2000). **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academia Publishers.

DORIER, J. L. et al (1994). **The teaching of linear algebra in first year of French science university,** in the Proceedings of the 18th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbonne, 4 vol., p. 137 - 144.

______ (1997). **L´enseignement de l´algèbre linéaire en question**. França: Le Pensée Sauvage Editions.

______ (2003). **Some comments on "The role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra"** by F. Uhlig, Education Studies in Mathematics, 51, p.185-191.

DUVAL, Raymond (1993). **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de Didactique et de Sciences. IREM, v.5, p.37-65.

______ (1995). **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berna: Peter Lang.

______ (2000). **Basic Issues for Research in Mathematics Education.** International Group for the Psychology of Mathematics Education-PME XXIV Hiroshima, Japan, July, 200, p. 23-27.

GODEMENT, Roger. **Cours D´Algèbre**. Herman, Paris, 1966, 1 ed.

GRANGER, Gilles Gaston. **Filosofia do Estilo**. São Paulo, Perspectiva, 1974.

KARRER, Mônica. **Análise do tratamento dado às transformações lineares em dois livros didáticos**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2, 2003, Santos. Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2003. GT4-T11. CD-ROM.

JAHN, A. P.; KARRER, M. **Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica.** Educação Matemática em Revista, 2004, nº 167, p.16 - 28.

LAY, **David. Álgebra Linear e Suas Aplicações.** 2º Edição, 1999. Livros Técnicos e Científicos.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara Machado (org). **Aprendizagem em Matemática – Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP. Papirus 2003.

MELLO, Dorival A. de; WATANABE, Renate G. **Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica**. 3º edição. São Paulo, 2005.

MENGA Ludke, Marli E.D.A. André. **Pesquisa em educação**: **abordagens qualitativas.** São Paulo, E.P.U., 1988.

OLIVEIRA, Luis Carlos Barbosa de. **“Como funcionam os Recursos-Meta em aula de Álgebra Linear?”**. São Paulo: PUC-SP, 2005. Dissertação de Mestrado. Orientador: Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.

OUSMAN, R. **Contribution à l´enseignement de l´algèbre linéaire em première année d´université**. France: Thèse de doctorat de l´universtité de Rennes I, 1996.

PADREDI, Zoraide Lúcia do Nascimento. **“As Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear***.* São Paulo: PUC-SP, 2003. Dissertação de Mestrado. Orientador: Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.

PAVLOPOULOU, Kallia. **Un problème décisif pour l´apprentissage de l´algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation.** Strasbourg: IREM, 1993.

POOLE, David. **Álgebra Linear.** 1º Edição, 2004. Editora Thomson.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Introdução aos parâmetros curriculares.** Brasília MEC/SEF, 1997.

SILVA, Amarildo Mechiades da. **“Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear”.** Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1997. Dissertação de Mestrado. Orientador: Dra. Janete Bolite Frant e Dr. Rômulo Campos Lins.

STEINBRUCH, Afredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2º Edição, 1987, Makron Books.

UHLIG, Frank (2002a). **Transform Linear Algebra.** Upper Saddle River: Prentice-Hall, 504 + xx p.

______ (2002b). **The role of proof in comprehending and teaching linear algebra.** Education Studies in Mathematics 50.3, p. 335-346.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA (UNB). Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.serverweb.unb.br/graduacao/disciplina.aspx?cod=113093>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.dmat.ufba.br/proposta/emen-lin-a.pdf>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/disciplinas/ementas/MAT606.html>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.ufpr.br>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.ccet.ufrn.br/matematica/>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~algelin/plano042.html>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS. Departamento de Exatas. Disponível em: < http://www.dm.ufscar.br/>. Acesso em: 10 de julho de 2004.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Livros didáticos como fontes para escrita da história da matemática escolar no Brasil.** V Congresso de Ciências Humanas, Letras e Artes. Ouro Preto – MG, 2001. p. 1-8.

ANEXOS

ANEXO A – Ementas de Álgebra Linear

Instituição: *UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica (no caso de licenciatura)*

Site consultado: http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/

Ementa:

Instituto de Matemática e Estatística - Matemática

Disciplina: MAT0134 - Introdução a Álgebra Linear

Créditos Aula:	4
Créditos Trabalho:	0
Carga Horária Estágio:	
Tipo:	Semestral

Objetivos

Familiarizar o estudante com os conceitos de transformação linear e espaço vetorial de dimensão finita através da geometria do R2 e do R3. Trabalhar a relação entre matrizes e transformações lineares, bem como a resolução de sistemas lineares de equações.

Programa

A geometria dos vetores no plano e no espaço; transformações do espaço; transformações lineares (no plano e no espaço); somas e composição de transformações lineares; inversão e sistemas de equações lineares; determinantes; autovalores de transformações do plano e do espaço; matrizes simétricas; classificação das superfícies cônicas e quádricas. A geometria dos vetores de Rm; transformações lineares de Rn em Rm; matrizes; sistemas de equações lineares homogêneos e não homogêneos; determinantes. Espaços vetoriais; bases e dimensão; existência e unicidade de soluções de um sistema linear; teorema de Rouché-Capelli; matriz de uma transformação linear; espaços vetoriais com produto interno; bases ortonormais; projeção ortogonal; aproximação de funções polinomiais.

Bibliografia

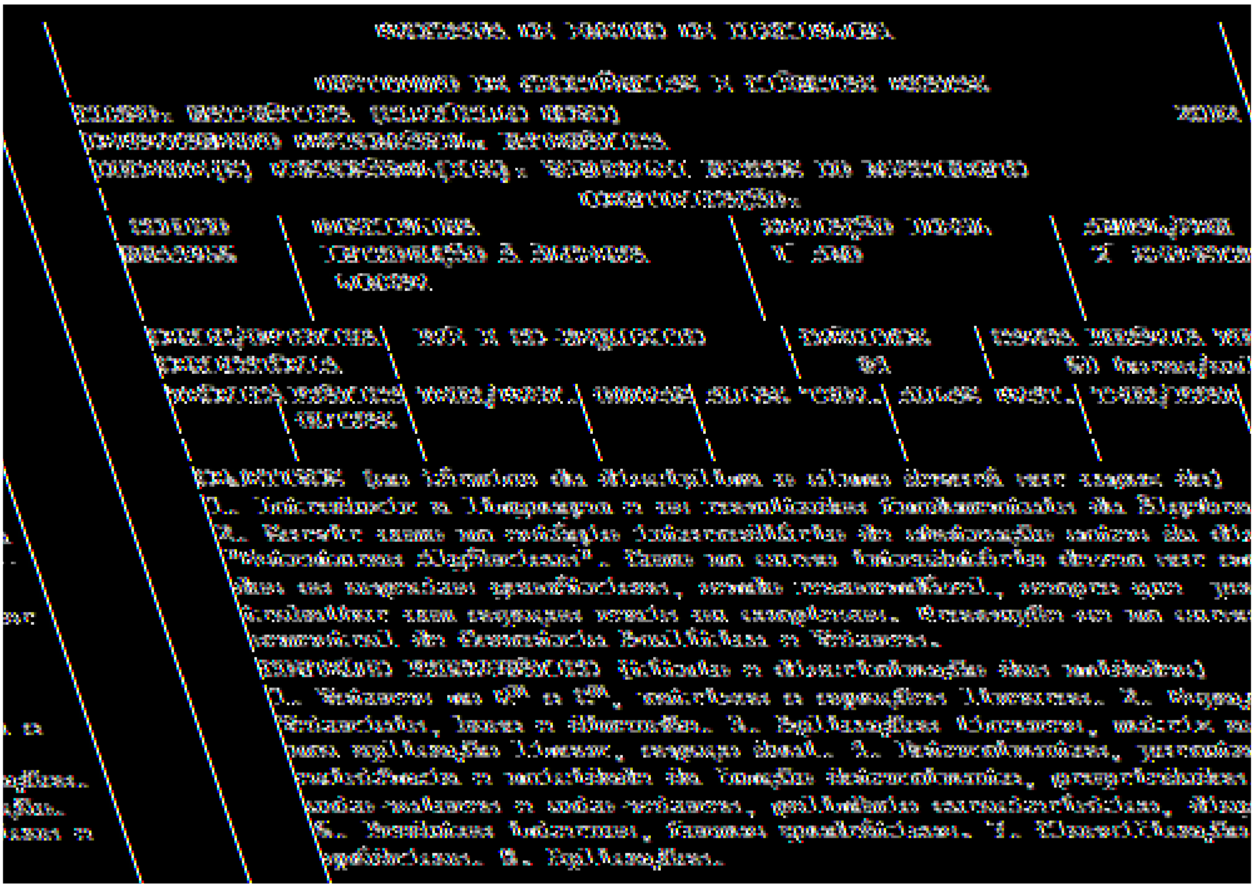
T. Banchoff and J. Wermer, Linear Algebra Through Geometry, 2nd. ed. Springer, 1992; M. Barone Jr., Álgebra Linear, 3 ed., IME-USP, São Paulo, 1988; M.S. Carakushansky, G. de La Penha, Introdução à Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 1976, C.A. Callioli, H.H. Domingues, R.C.F. Costa, Álgebra Linear e Aplicações, Atual, São Paulo, 1977.

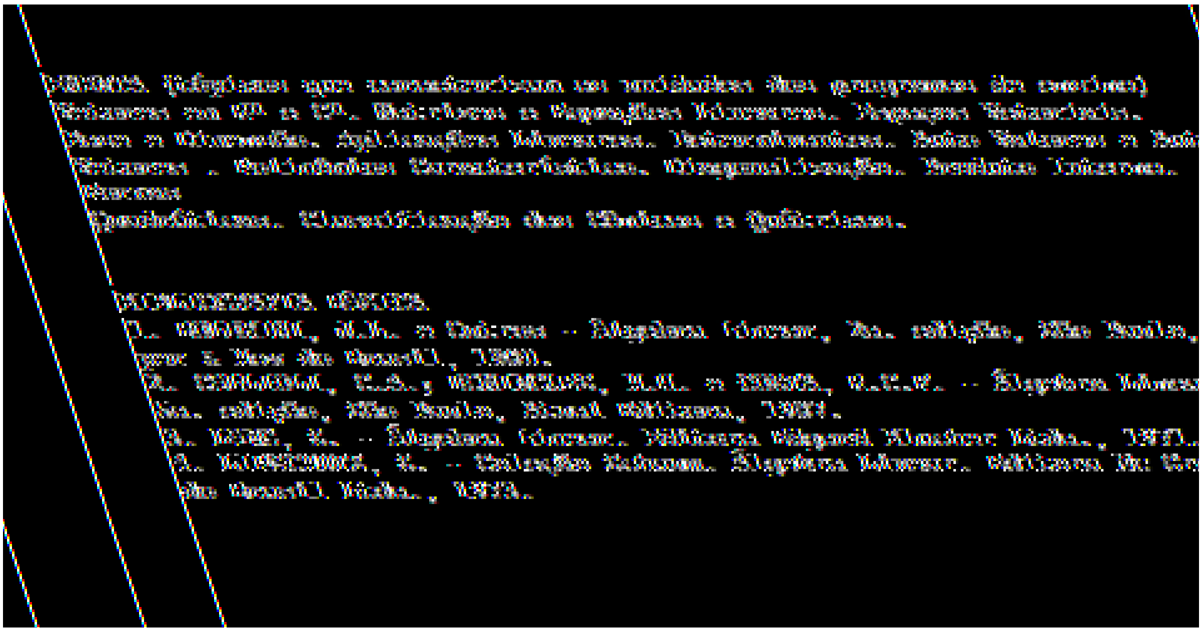
Instituição: *UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP)*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica*

Site consultado: http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/

Ementa:





Instituição: *UNIVERSIDADE DE CAMPINAS (UNICAMP)*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica*

Site consultado: http://www.ime.unicamp.br/~alglin.

Ementa: **MA327 - Álgebra Linear**

Objetivo:

1. Apresentar os conceitos fundamentais e os resultados que formam a linguagem básica da álgebra linear.

2. Utilizar os reais como corpo de escalares no desenvolvimento do conteúdo, possibilitando o uso de recursos da geometria em duas e três dimensões.

Conteúdo:

1. Sistemas lineares. Revisão dos conceitos e métodos utilizados na resolução de sistemas lineares.

2. Espaços vetoriais reais. Definições, propriedades e exemplos.

3. Subespaços. Geradores. Soma e interseção de subespaços.

4. Base e dimensão. Dependência e independência linear. Espaços de dimensão finita.

5. Transformações lineares. Representação matricial. Núcleo e imagem.

6. Soma direta de subespaços. Projeções.

7. Autovalores e autovetores. Interpretação geométrica.

8. Produto interno. Ortogonalidade. Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

9. Adjunta de uma transformação linear.

10. Matrizes reais especiais. Simétricas, ortogonais.

11. Diagonalização. Aplicação à classificação de cônicas e quádricas.

Bibliografia:

1. Elon Lages Lima, *Álgebra Linear,* Coleção Matemática Universitária, 1995.
2. H. Domingues, C. A. Calioli e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações,* Atual, 1982.
3. Howard Anton, *Álgebra Linear,* 3ª edição, Rio de Janeiro, 1982. 392 pp.
4. J. Pitombeira de Carvalho, *Introdução à Álgebra Linear,* Livros Técnicos e Científicos, 1974.
5. José Luiz Boldrini, Sueli I. Rodrigues Costa, Vera Lúcia Figueiredo e Henry G. Wetzler, *Álgebra Linear,* 3ª edição, Harbra-Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1984. 411 pp.
6. K. Hoffman and R. Kunze, *Álgebra Linear,* Livros Técnicos e Científicos, 1970.

Instituição: *PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO (PUC-SP)*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica*

Site consultado:

Ementa:

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia

Disciplina: ÁLGEBRA LINEAR

Curso: Licenciatura em Matemática **Série:** 2º ano **Ano letivo:** 2004

Carga Horária Semanal: 04 horas – 4ª feira: 18h45 – 20h25 **Turma: LN/2**
6ª feira: 18h45 – 20h25

Conteúdo programático:

- Espaços Vetoriais: Definição e Propriedades.
- Subespaço Vetorial: Definição e Propriedades, Intersecção, Somas, Subespaço Finitamente Gerado, Combinação Linear, Dependência Linear, Base, Dimensão, Dimensão da Soma e da Interseção de subespaços vetoriais.
- Transformações Lineares: Transformações no Plano e suas representações algébrica e matricial, Transformações Lineares: Definição, Propriedades e representação algébrica e matricial. Teorema da existência e unicidade de transformações lineares, Núcleo e Imagem: definição e propriedades, Isomorfismo e Automorfismo, Operações (Adição, Multiplicação por escalar, Composição, Potenciação) em suas representações algébrica e matricial. Isomorfismo entre o espaço das transformações lineares e das matrizes.
- Espaços com Produto Interno: Definição, Propriedades, Norma, Distância, Base Ortogonal e Ortonormal, Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt.
- Diagonalização de Operadores Lineares: Valor Próprio, Vetor Próprio, Polinômio Característico, Operador diagonalizável.

Instrumentos e Critérios de Avaliação:

Ao longo do curso o aluno será continuamente avaliado por meio de

- provas individuais;
- avaliações em grupo e/ou individuais;
- trabalhos extra classe

Média Final: $\frac{2A + P_1 + 2P_2}{5} \geq 5$

Bibliografia Básica:

BOLDRINI, José Luiz et al. *Álgebra Linear.* 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984. 411p.

CALLIOLI, Carlos Alberto Garcia et al. *Álgebra Linear e Aplicações.* 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1995. 352p..

Bibliografia Complementar:

LAY, David C. *Álgebra Linear.* 2. ed. Tradução por Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 504p.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear: teoria e problemas.* Tradução por Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Makron Books Pearson Education do Brasil, 2002, 647p.

LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações.* 4. ed. Tradução por Valèria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 390p.

FRALEIGH, John B. *Linear Algebra.* 2.ed. USA: Reading Addison-Wesley, 1991. 518p.

CARAKUSHANSKY, M. Sernfeld; LA PENHA, G. M. S. M. *Introdução à Álgebra Linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1976. 309p.

LANG, Serge. *Álgebra Linear.* Tradução por Frederick Isu. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1971. 271p.

VALLADARES, Renato C. *Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: LTC, 1990. 354p.

Instituição: *UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS (UFSCAR)*

Pré-requisitos: *não há*

Site consultado: http://www.dm.ufscar.br/

Ementa:

Unidade responsável: Departamento de Matemática DM

Número de Créditos: 04

Período: 3º

Pré-requisito: nenhum

Objetivos: Levar o aluno a entender e reconhecer as estruturas da Álgebra Linear que aparecem em diversas áreas da Matemática, e a trabalhar com essas estruturas, tanto abstrata como concretamente (através de cálculo com representações matriciais). Estabelecer conexões entre as propriedades dos vetores e as estruturas algébricas.

Conteúdo: Métodos de eliminação de Gauss para sistemas lineares. Espaços Vetoriais. Sub-espaços. Bases. Somas diretas. Introdução à programação linear. Transformações lineares. Matrizes de transformações lineares. Núcleo e imagem. Auto-valores e auto-vetores. Diagonalização. Espaços com produto interno. Bases ortonormais. Projeções ortogonais. Movimentos rígidos. Métodos dos mínimos quadrados.

Poole, David	Álgebra Linear, Ed Pioneira Thompson Learning, São Paulo, 2004.
Boldrini, J. L. et alii	Álgebra Linear, 3a. edição, Harper & Row do Brasil, S.P., 1984.
Lipschutz, S.	Álgebra Linear, MacGraw-Hill do Brasil Ltda, SP, 1971.
Baldin, YY	Maple como Auxiliar Didático em Álgebra Linear, módulos de aula para utilização em Laboratório, 1998.
Callioli et alii	Álgebra Linear e aplicações, 6a. ed, Atual Editora, SP, 1997.
Leon, Steven J	Álgebra Linear com Aplicações, 4a. ed, Editora LTC, RJ, 1999.
Lay, David C.	Álgebra Linear e suas Aplicações, 2a. ed, Editora LTC, RJ, 1999.
Anton, H e Rorres, Chris	Algebra Linear com aplicações (8a. edição), Bookman, Porto Alegre, 2001

Instituição: *UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica*

Site consultado: http://www.mat.ufmg.br/disciplinas/ementas/MAT606.html

Ementa:

DENOMINAÇÃO		**CÓDIGO**
ÁLGEBRA LINEAR I		MAT-606
CARGA-HORÁRIA	**CRÉDITOS**	**PRÉ-REQUISITOS**
090	06	-----

EMENTA

- Sistemas de equações lineares e matrizes.
- Determinantes.
- O espaço Euclidiano IR^n.
- Transformações lineares do IR^n ao IR^m.
- Auto valores e auto vetores.
- Aplicações e Geometria analítica.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1. HOWARD ANTON - *Álgebra Linear* - Editora Campos, RJ.
2. VALADARES, Renato J. C. - *Álgebra Linear e Geometria Analítica*.
3. CARVALHO, J. Pitombeira - *Álgebra Linear*. LTC, RJ.
4. BOLDRINI - *Álgebra Linear* - Harbra, SP.

LIMA, E. L. - *Álgebra Linear* - Projeto Euclides, IMPA / CNPq, 1996.

Instituição: *UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica e Vetores ou Cálculo e Geometria Analítica I*

Site consultado: http://www.mat.ufrgs.br/~algelin/plano042.html

Ementa:

DISCIPLINA: **MAT 01355 - Álgebra Linear IA**

PERÍODO LETIVO: 2004/2

CRÉDITOS: 04

HORAS-AULA SEMANAIS: 04

PRÉ-REQUISITOS: MAT01353, MAT01024, MAT01035.

CURSOS: 011.01; 011.02; 028.00; 029.00; 041.00; 033.00; 095; 101.00; 102.00; 103.00; 104.00; 105.00; 106.00; 107.00; 108.00; 110.01; 110.03; 115.00; 120.05; 200.01; 200.02; 212.01; 212.02; 212.03; 217.00; 222.00

SÚMULA: Sistemas de equações lineares; Matrizes; Fatoração LU; Vetores; Espaços vetoriais; Ortogonalidade; Valores próprios; Aplicações.

OBJETIVOS: Proporcionar ao estudante uma visão integrada dos conceitos de Álgebra Linear e suas aplicações, tornando o estudante capaz de reconhecer e resolver problemas na área, associados a futuras disciplinas e/ou outros projetos a que se engajarem.

PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS Aulas expositivo-dialogads; resolução de exercícios como atividade de aula e extra-classe; atendimento extra-classe integrado pelos professores da disciplina.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

1. Lay, David C.: *Álgebra Linear e suas Aplicações*, LTC editora, 2ª edição, Rio de Janeiro, RJ, 1999. **(LIVRO ADOTADO)**
2. Anton, H., Rorres, C.: *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookman, 8ª edição, Porto Alegre, RS, 2001.
3. Lischutz, Seymour: *Álgebra Linear*, Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda, 3ª edição, São Paulo, SP, 1997.
4. Boldrini, José L. et all.: *Álgebra Linear*, Ed Harbra, 3ª edição, São Paulo, SP, 1984.
5. Lima, Elon L.: *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1996.

Prof. Coordenador da disciplina: Alveri A. Sant'Ana

Instituição: *UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica A*

Site consultado: http://www.ufpr.br

Ementa:

CM 413 - Álgebra Linear

Professora: Elizabeth Wegner Karas

Ano: 2004

Carga horária: 90 horas

Horário:
Diurno: Quartas, das 15h30 às 17h10, Sala PC19
Sextas, das 15h30 às 17h10, Sala PC 18.
Noturno: Quartas, das 20h45 às 22h15, Sala PF07
Sextas, das 20h45 às 22h15, Sala PF07.

Ementa:
Matrizes e equações lineares.
Espaços vetoriais.
Transformações lineares.
Operadores e matrizes diagonalizáveis.
Espaços com produto interno.
Funções lineares e espaço dual.

Livro Texto:
Álgebra linear com Aplicações, Steven J. Leon, LTC

Bibliografia complementar:
- Álgebra linear, Mário Barone Júnior, USP
- Álgebra linear, José Luiz Boldrini e outros, Harbra
- Introdução à álgebra linear com aplicações, Bernard Kolman, LTC.
- Linear algebra and its applications, Gilbert Strang, Harcourt Brace Jovanovich.
- Álgebra linear, Hoffmann e Kunze, LTC
- Um curso de álgebra linear, Fávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço, EDUSP
- Álgebra Linear, Terry Lawson, Editora Edgard Blücher.

Instituição: *UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE*

Pré-requisitos: *não há*

Site consultado: **http://www.ccet.ufrn.br/matematica/**

Ementa:

MAT0064 - Álgebra Linear I

Ementa
Determinantes e Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Espaços Lineares. Espaços Vetoriais. Transformações Lineares.

Carga Horária: 90 horas/aula **Créditos:** 06 **Período:** 2º
Pré-Requisito: sem pré-requisito

Bibliografia:

- BOLDRINI / FIGUEIREDO / WETZLER - **Álgebra Linear** - 3a ed - São Paulo: Haper & Row do Brasil, 1980.

- STEINBRUCH, Alfredo / WINTELE, Paulo - **Álgebra linear** - 2a ed - São paulo : McGraw - Hill , 1987.

-LANG, Serge - **Álgebra Linear** - São Paulo : Editora Edgard Blucher Ltda, 1971.

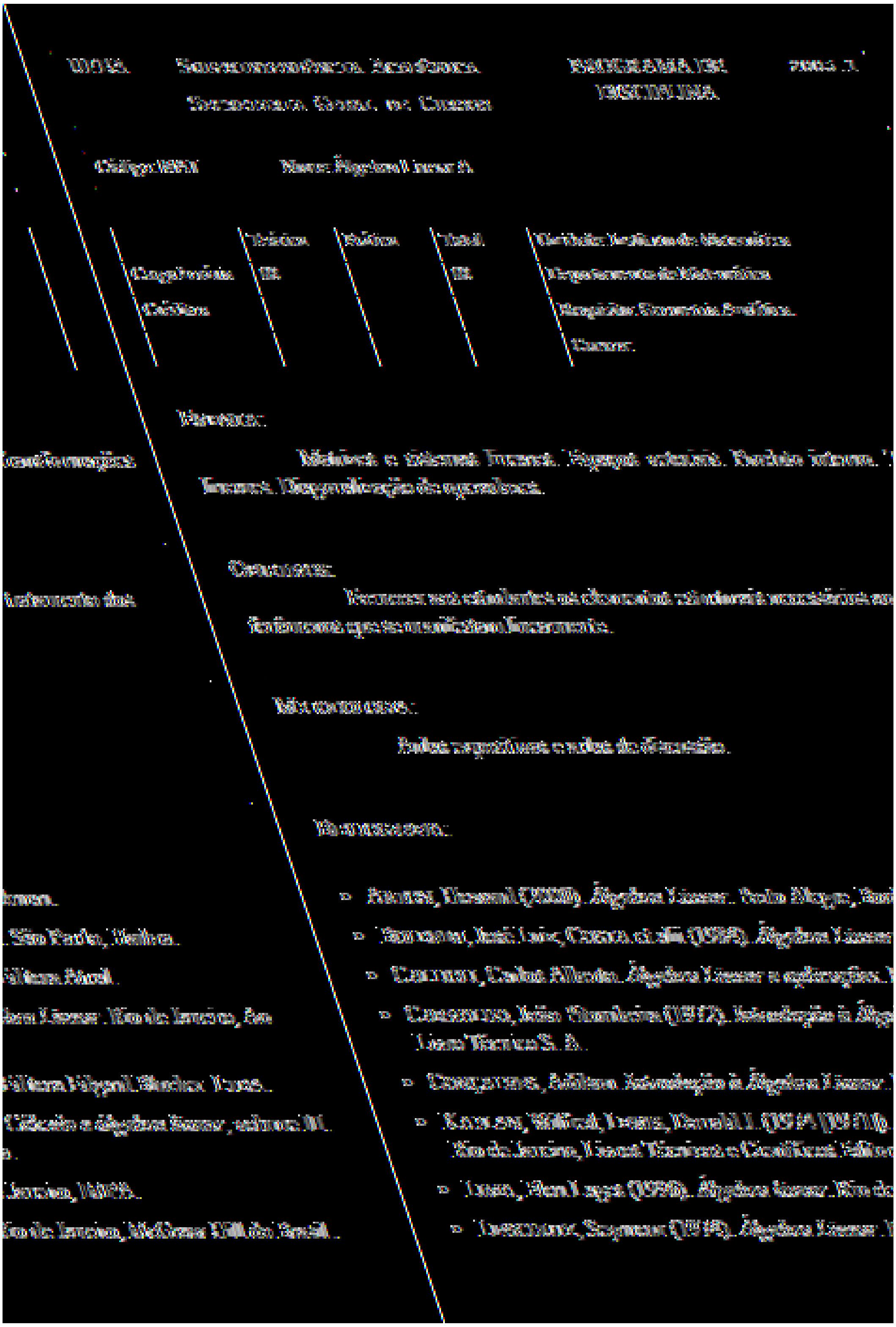
- CALLIOLI, Carlos A, / DOMINGUES, Hygind H. / COSTA, Roberto C. F. - **Álgebra Linear e Aplicações** - 2a Ed. - São Paulo : Atual , 1978.

Instituição: *UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA*

Pré-requisitos: *Geometria Analítica*

Site consultado: http://www.dmat.ufba.br/proposta/emen-lin-a.pdf

Ementa:



Instituição: *UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA (UNB)*

Pré-requisitos: *não há*

Site consultado:

http://www.serverweb.unb.br/graduacao/disciplina.aspx?cod=113093

Ementa:

1. SISTEMAS LINEARES E MATRIZES.
2. ESPACOS VETORIAIS.
3. TRANSFORMACOES LINEARES.
4. AUTOVALORES E AUTOVETORES.
5. DIAGONALIZACAO DE OPERADORES.
6. PRODUTO INTERNO.
7. APLICACOES.

Bibliografia

BOLDRINI, COSTA, RIBEIRO, S.PAULO 1a. ED.

WETZLER
ALGEBRA LINEAR HARPER/ROW 1978

GONCALVES, ADILSON E SOUZA, S. PAULO 1a. ED.
RITA, M. L.
INTRODUCAO A ALGEBRA LINEAR BLUCHER 1977

LANG, SERGE S.PAULO 4a. ED.
ALGEBRA LINEAR GLUCHER 1977

ANEXO B – Definições de (in)dependência linear

Com o objetivo de encontrar alguns termos utilizados na língua natural que auxiliem na descrição e na aprendizagem das noções de independência e dependência linear, foram selecionados 03 livros de origem francesa.

Como critério da escolha, foram consultados alguns livros didáticos que aparecem como referência em muitos cursos de Álgebra Linear na França a partir da década de 60, segundo afirma Dorier.

Os livros selecionados são:

- *Cours D´Algèbre,* de Roger Godement (1966);

- *Algèbre Lineaire*, de Nicolas Bourbaki (1947);

- *L´Algèbre Linéaire, de* Jacques Bouteloup (1980).

Livro: *Cours D´Algèbre*

Autor: *Roger Godement*.

Editora: *Herman, Paris, 1966. 1 ed. p. 174, tradução nossa*

Relações Lineares[12]

Chamamos ***relação linear entre os vetores*** *a_1, ..., a_n todo elemento (λ_1 , ..., λ_n) do módulo K^n tal que*

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$$

A relação linear (0,...,0) é dita trivial. Enfim, diz-se que os vetores a_1,..., a_n são ***linearmente independentes*** *ou que a família $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ é* ***livre*** *se não existe outra relação linear entre a_1, ..., a_n que não seja a relação linear trivial.*

Dizer que a relação a_1,..., a_n são linearmente independentes significa dizer que a relação

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_{n\,=} = 0 \qquad \text{implica} \qquad \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

Dizer, ao contrário, que eles não são linearmente independentes (dizemos então que os vetores a_1, ..., a_n são ***ligados****) significa que existem escalares λ_1 , ..., λ_n não todos nulos tais que tem-se:*

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_{n\,=} = 0.$$

Termos utilizados: família livre de vetores, relação linear, vetores ligados.

---

[12] **Relations linéaires**

On apelle **relation linéaire** entre les vecteurs *a_1, ..., a_n tout élément (λ_1 , ..., λ_n) du module K^n tel que l´on ait*

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$$

La relation linéaire (0,...,0) est dite ***triviale.*** *Enfin, on dit que les vecteurs a_1, ..., a_n sont linéairement indépendants, ou que la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, s´il n´existe pas d´autre relation linéaire entre a_1, ..., a_n que la relation linéaire triviale.*

Dire que a_1, ..., a_n sont linéairemente indépendants signifie donc que la relation

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_{n\,=} = 0 \qquad \text{implique} \qquad \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0;$$

Dire, au contraire qu´ils ne sont pás linéairement indépendants (on dit alors que les vecteurs a_1, ..., a_n sont ***liés)*** *signifie qu´il existe des scalaires λ_1 , ..., λ_n non tours nuls que l´on ait*

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_{n\,=} = 0.$$

Livro: *Algèbre vol. II – Algèbre Linéaire*

Autor: *Nicolas Bourbaki*.

Editora: *Herman 8 Cie, Éditerus. Paris, 1947. 1 ed. p.10, tradução nossa*

Famílias Livres[13]

Dado um A-módulo sobre E, dizemos que uma família $(a_i)_{i \in I}$ *de elementos de E é livre se a relação* $\sum \lambda_i a_i = 0$ *(ou* $\lambda_i = 0$ *exceto por um número finito de índices) então* $\lambda_i = 0$ *para todo i.*

Quando uma família (a_i) *não é livre, dizemos que ela é ligada.*

Termos utilizados: família livre de vetores, família ligada.

[13] Families libres.

Dans um A-module E, on dit qu´une famille $(a_i)_{i \in I}$ *d´eléments de E est libre si la relation* $\sum \lambda_i a_i = 0$ *(ou* $\lambda_i = 0$ *sauf pour um nombre fini d´indices) entraîne* $\lambda_i = 0$ *pour tout i.*

Loursqu´une famille (a_i) *n´est pas libre, on dit qu´elle est liée.*

Livro: *L´Algèbre Linéaire*

Autor: *Jacques Bouteloup*

Editora: *Pres Universitaires de France, 3 ed., 1980, tradução nossa*

Famílias livres e ligadas[14]

Dizemos que uma família A é livre (ou novamente que os vetores são independentes) se toda combinação linear de um número finito de vetores de A não podem ser nulos se todos os seus coeficientes são nulos: $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0$*. Caso contrário, a família A é dita ligada; pode-se escrever uma relação dos coeficientes não todos nulos, ela será dita uma relação de vínculo.*

Termos utilizados: família livre de vetores, família ligada, relação de vínculo.

[14] Familles libres e liées – Nous dirons qu´une famille A est libre (ou encore que les vecteurs de A sont indépendants) si toute combinaison linéaire d´um nombre fini de vecteurs de A ne peut être nulle que si tous ses coefficients sont nuls: $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0$*. Sinon, la famille A est dite liée; on pourra alors écrire une telle relation avec des coefficients non tours nuls; elle será dite relation de liaison.*

ANEXO C – Proposta de Atividade

A primeira atividade tem por objetivo utilizar a conversão de registros como forma de verificação da independência linear dos conjuntos de vetores apresentados a seguir.

As transformações possíveis partem do registro geométrico e podem ser feitas de diversas maneiras, dentre elas:

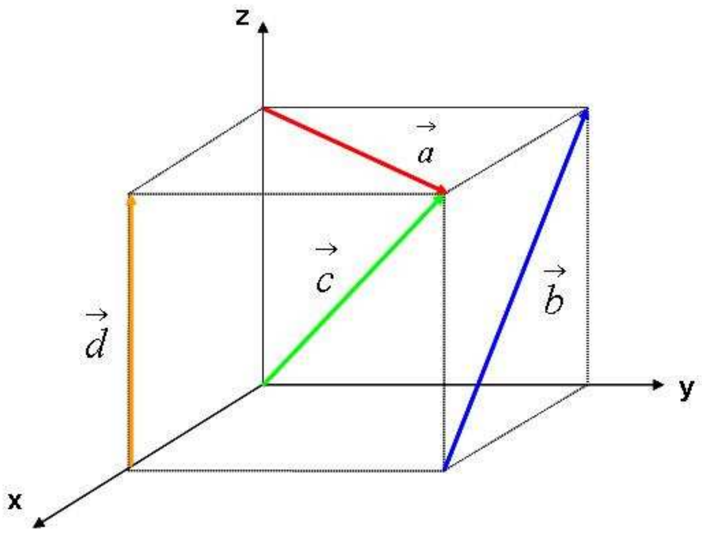
i) Convertendo-se os vetores para o registro numérico por n-uplas ou tabular;

ii) Utilizando-se as propriedades geométricas dos vetores, como coplanaridade, para verificar a dependência linear entre os vetores;

iii) Utilizando o registro da língua natural, enunciando uma propriedade ou teorema para verificar a dependência linear.

ATIVIDADE 1

Dado um cubo de aresta unitária, observe a figura a seguir:



De acordo com os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ representados na figura anterior, responda às seguintes questões:

1) Diga se o conjunto de vetores abaixo é L.D. ou L.I., justificando a sua resposta:

a) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$

b) $\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right)$

2) Utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, dê as coordenadas dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

3) Escreva o vetor nulo $\vec{0} = (0, 0, 0)$ como combinação linear, respectivamente dos vetores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ e $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$.

4) Verifique se o vetor $\vec{a}$ pode ser escrito como combinação linear, respectivamente dos vetores $(\vec{b}, \vec{c})$ e dos vetores $(\vec{c}, \vec{d})$.

ATIVIDADE 2

A segunda atividade tem por objetivo utilizar o registro da língua natural para justificar se uma afirmação é verdadeira ou falsa. Pode-se utilizar o registro geométrico para auxiliar a determinação da dependência linear.

Sejam **u**, **v** e **w** vetores do espaço $\mathbb{R}^3$. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas. Se as afirmações forem verdadeiras, represente geometricamente por meio de um exemplo. Caso a afirmação seja falsa, justifique a sua resposta.

a) Se A = {**u**, **v**} é l.d. e B = {**v**, **w**} é l.i., então o conjunto C = {**u**, **v**, **w**} é l.d.
b) Se A = {**u**, **v**} é l.d. e B = {**v**, **w**} é l.i., então o conjunto C = {**u**, **v**, **w**} é l.d.
c) Se A = {**u**, **v**} é l.d. e B = {**v**, **w**} é l.d., então o conjunto C = {**u**, **v**, **w**} é l.d.
d) Se A = {**u**, **v**} é l.i. e B = {**v**, **w**} é l.i., então o conjunto C = {**u**, **v**, **w**} é l.i.