VERA LUCIA MERLINI

O CONCEITO DE FRAÇÃO EM SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS: UM ESTUDO DIAGNÓSTICO COM ALUNOS DE 5ª E 6ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP
SÃO PAULO
2005

VERA LUCIA MERLINI

O CONCEITO DE FRAÇÃO EM SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS: UM ESTUDO DIAGNÓSTICO COM ALUNOS DE 5ª E 6ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE em Educação Matemática**, sob orientação da **Profa.Dra. Sandra Maria Pinto Magina**.

PUC-SP
SÃO PAULO
2005

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

ASSINATURA: ___________________________ **LOCAL E DATA:** _______________

DEDICATÓRIA

Aos meus queridos Pais

Romeu e Olga

e à minha família pelo apoio

e compreensão.

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo investigar as estratégias que os alunos, de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). O estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: *"Quais estratégias de resolução alunos de 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?* Para tanto, realizamos um estudo diagnóstico com 120 alunos, sendo 60 alunos da 5ª série e 60 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, distribuídos em duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. A pesquisa de campo constou de dois momentos: no primeiro o questionário foi aplicado coletivamente aos alunos, que responderam individualmente, envolvendo o conceito de fração, e no segundo momento, fizemos entrevistas clínicas em 12% da amostra. Analisamos os dados também dentro de dois momentos: um voltado para análise quantitativa e o outro para análise qualitativa Como o percentual geral de sucesso dos alunos pesquisados das duas séries foi baixo (aquém de 25%), optamos por analisar as estratégias que resultaram em erro (insucesso). Nos resultados obtidos constatamos que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho eqüitativo entre os cinco significados da fração Quanto às estratégias de resolução dos problemas não houve uma regularidade. Em outras palavras, para um mesmo significado encontramos diferentes estratégias de resolução. Estes resultados levam-nos a concluir que a abordagem que se faz do conceito de fração, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

Palavras-chaves: fração, significados, estudo diagnóstico, Ensino Fundamental, alunos.

ABSTRACT

The aim of this work was to investigate the strategies students, from the 5th and 6th grades of Primary Education, use when facing problems involving fraction concepts, according to the theoretical classification proposed by Nunes et al (2003). The research intended to answer the following research question: “Which strategies of resolution do 5th and 6th grade students use when facing problems involving the fraction concept, concerning the five different meanings of fraction: number, part-whole, quotient, measure, and multiplying operator? For this reason, a diagnostic analysis has been done with 120 students, 60 of them are in the 5th grade and the other 60 are in the 6th grade of the Primary Education in two State-public schools of São Paulo City. The field research was divided in two stages: first, a questionnaire, involving fraction concepts, was collectively applied to students who answered it individually; and second, clinical interviews were made with 12% of the sample students. The data has also been analyzed in two stages: first analyzing quantitatively and, secondly, qualitatively. As the general percentage of success of the students participating in the research of both grades was very low (below 25%), it was decided to analyze the strategies that resulted in error (failing). The obtained results confirmed that there wasn’t, in neither grades, an equitable performance among the five meanings of fraction. When it comes to the strategies to solve the problems, there was no regularity. In other words, to the same meaning, different strategies of resolution were found. Based on these results, one can conclude that the approach given to the concept of fraction doesn’t guarantee that the student builds the knowledge to this concept.

Keywords: fraction, meanings, diagnostic analysis, Primary Education, students.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ENTREVISTAS

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

O tema do presente estudo é a respeito do número racional em sua representação fracionária que doravante denominaremos, simplesmente, como fração. Em minha prática como docente, não é raro ouvir de meus colegas professores que a fração é um dos mais problemáticos conteúdos na aprendizagem nas séries iniciais.

De minha parte, concordo com meus colegas e temos visto que avaliações oficiais, realizadas nos âmbitos estadual e federal, têm encontrado resultados que apontam baixo desempenho dos alunos em questões que envolvam fração.

Entretanto, sabemos também o quanto é relevante à aprendizagem, o entendimento da fração tanto na matemática como na sociocultura. Assim, a importância da construção da idéia desse número está em compreender o que ele quantifica.

No cotidiano, a fração tem seu uso consagrado em escalas, razões, porcentagens e probabilidades. Somado a isso, na partição da unidade a utilização da fração pode ser mais adequada, pois é mais natural falar, por exemplo, $\frac{1}{4}$ de uma barra de chocolate ao invés de 0,25 de uma barra de chocolate.

Outros exemplos são encontrados em algumas atividades profissionais; por exemplo, na construção civil os diâmetros são comumente mensurados com base na fração de polegada[1]: o cano hidráulico de nossas residências, em geral, tem $\frac{3}{4}$ de polegadas, ao passo que os alicerces de grandes construções contêm barras de ferro de $\frac{1}{2}$ de polegada. Na culinária, não raro encontramos receitas que solicitam $\frac{1}{2}$ xícara de farinha, $\frac{2}{3}$ de um tablete de margarina, $\frac{1}{4}$ de copo de leite, por exemplo.

Apesar da fração estar presente nas situações cotidianas, muitas vezes, restringe-se a metades, terços e quartos; e normalmente, somente na linguagem oral, por exemplo, na leitura das horas: cinco e meia, o que significa que são cinco horas mais metade de uma hora.

Uma vez feita a apresentação de nosso estudo, passaremos a justificativa do porque pesquisar esse conteúdo matemático, a fração.

1.1 JUSTIFICATIVA

A fração tem seu ensino iniciado, formalmente, a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental estendendo-se, pelo menos, até o final do 3º Ciclo. Pesquisas recentes (SILVA, 1997; BEZERRA, 2001) evidenciam dificuldades em relação a esse conceito, quer seja do ponto de vista do ensino que seja do ponto de vista da aprendizagem.

Com relação ao ensino, o que se tem revelado, é uma ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos, e uma forte tendência para introduzir esse conceito com base no significado parte-todo. Campos e colaboradores afirmam que:

---

[1] Medida aproximadamente igual à do comprimento da segunda falange do polegar. Medida inglesa de comprimento, equivalente a 2,54 cm do sistema métrico decimal. (MINIDICIONÁRIO AURÉLIO, 1977)

> O método de ensino, ..., simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado deste novo tipo de número. (CAMPOS citada por NUNES, BRYANT, 1996, p.191)

No que diz respeito à sua aprendizagem, pesquisas recentes revelam que os alunos possuem até algumas habilidades em manipular os números racionais, sem necessariamente ter uma compreensão clara do conceito. Nunes, Bryant discutem que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não o tem. Elas usam os termos fracionais certo; elas falam sobre fração coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES, BRYANT 1996, p.191)

Os fatores de motivação desse tema de pesquisa têm em sua origem o baixo desempenho atingido pelos alunos frente a problemas que envolvam esse conceito matemático. O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2001), como o Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar (SARESP, 1998), ressaltam em suas conclusões que o conceito de número racional precisa ser melhor explorado, especialmente, em situações práticas, de modo a adquirir significado para o aluno.

Apresentamos as questões e seus respectivos resultados que foram propostas aos alunos de 5ª série do Ensino Fundamental pelo SARESP (1998) e aos alunos de 4ª série do Ensino Fundamental pelo SAEB (2001).

A primeira questão do SARESP (1998, p.35) que aborda fração é a de nº 10:

Das figuras abaixo, quais representam frações equivalentes a $\frac{1}{4}$?

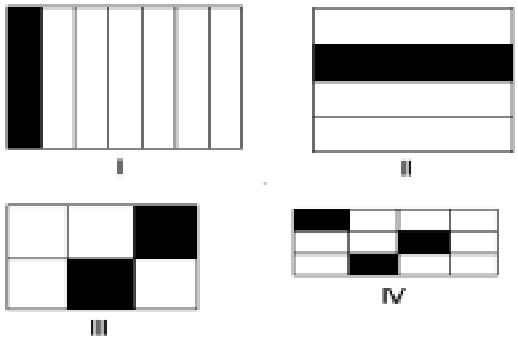


Figura 1.1: Questão nº 10 do SARESP de 1998, p. 35.

Apesar dos livros didáticos apresentarem questões semelhantes a essa, o rendimento dos alunos foi baixo, pois o índice de respostas corretas para essa questão foi 26%. Esse baixo índice de acerto demonstra certa dificuldade que os alunos têm para trabalhar com a representação fracionária.

Na análise feita pelo SARESP (1998) da referida questão, é a de que pedagogicamente poderia se esperar uma atuação bem melhor dos alunos. A hipótese para esse baixo rendimento é o não domínio do conceito de frações equivalentes.

A segunda questão a ser apresentada faz parte da avaliação realizada pelo SAEB (2001, p.29). A questão é a seguinte.

Para fazer uma horta, Marcelo dividiu um terreno em 7 partes iguais. Em cada uma das partes, ele plantará um tipo de semente. Que fração representará cada uma das partes dessa horta?

O conhecimento requerido para a resolução dessa questão é reconhecer as partes de um todo, isto é, $\frac{1}{7}$ que, possivelmente, é uma fração trabalhada em situações-problema de sala de aula. Entretanto, 35% dos alunos acertaram a questão, o que constata que a maioria ainda não tem conhecimento necessário para a resolução dessa situação, que se refere à relação parte-todo.

Torna-se importante destacar ainda, que esse estudo faz parte de um Projeto de pesquisa desenvolvido dentro do programa de cooperação internacional entre Oxford Brookes University, sob a coordenação da Dra. Terezinha Nunes e o Centro das Ciências Exatas Tecnologia PUC-SP, coordenado pelas Dra. Sandra Magina e Dra.Tânia Campos.

Nunes et al. (2003) baseada na Teoria dos Campos Conceituais[2] de Vergnaud (1990), enfatiza que o aprendizado do conceito de fração poderá ser obtido com maior êxito, quando explorado nas situações que contemplem os cinco significados[3]: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo.

Essa afirmação é resultado de sua pesquisa na Inglaterra; que indica que as crianças inglesas conseguem compreender melhor o conceito de fração, quando esse é iniciado apoiado em uma situação representada por um quociente, isto é, o resultado da divisão de chocolates para crianças. Para enfatizar, Nunes apresentou-nos uma questão e, em seguida, resoluções de alunos:

[2] Campos Conceituais de Vergnaud (1990) será explorado no Capítulo 2.
[3] Nunes (2003) propõe uma classificação teórica que será explicada no Capítulo 2.

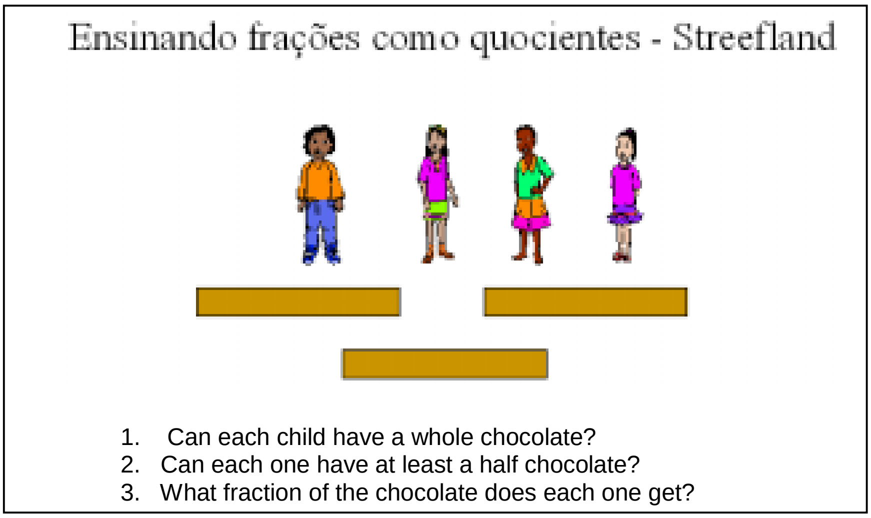


Figura 1.2: Questão proposta aos alunos ingleses.
Fonte: Nunes et al (2003)

A seguir, a figura 1.3 mostra as resoluções de dois dos alunos ingleses:

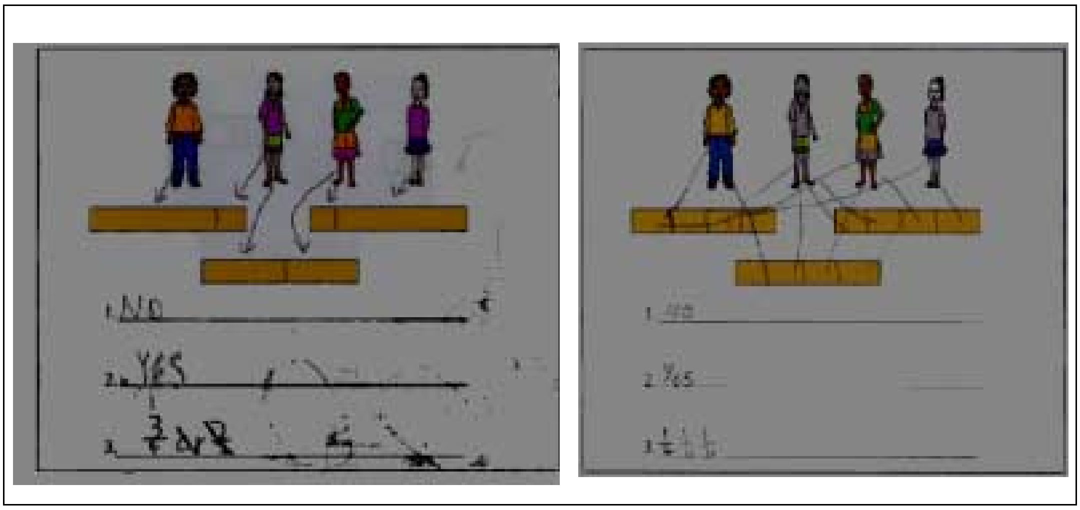


Figura 1.3: Apresentação de NUNES (2003) Resolução dos alunos ingleses.
Fonte: Nunes et al (2003)

Observamos que, de fato com base nesta situação, as duas crianças conseguem exprimir a fração correspondente corretamente. Este resultado foi obtido com alunos ingleses, todavia cabe-nos questionar se aqui no Brasil os alunos procederiam da mesma forma. Nossos alunos teriam êxito também nas situações que contemplassem o significado quociente?

A fim de obtermos subsídios e com base neles tentar responder esse questinamento, precisamos saber qual o desempenho de nosso aluno frente às situações que contemplam os cinco significados que Nunes aborda.

Em outras palavras, antes de um estudo de intervenção devemos saber e mapear, quais os tipos de problema que nosso aluno resolve com maior ou menor facilidade.

Para tanto, esse Projeto tem por objetivo investigar a formação e desenvolvimento do conceito de fração no Ensino Fundamental, quer seja do ponto de vista de seu ensino, quer seja do ponto de vista de sua aprendizagem. Portanto, os sujeitos de investigação desse Projeto serão, tanto professor como aluno, realizando primeiro um estudo para mapear, diagnosticar, para que haja, posteriormente, o estudo de intervenção.

Cabe ressaltar que esse Projeto encontra-se no início, para que ele possa se desenvolver é necessário, como premissa, um mapeamento da situação atual, ou seja, diagnosticar como os alunos do Ensino Fundamental que já tiveram e estão tendo contato com o ensino de fração, resolvem questões que abordam esse conteúdo. Do mesmo modo, é relevante também saber quais são as concepções que os professores, desses mesmos alunos, têm do conceito de fração.

Nesse contexto, alguns dos primeiros estudos estão se desenvolvendo. No que se refere ao ensino, Santos (2005) (Dissertação em andamento) em sua pesquisa, pede que professores do 2º, 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental elaborem seis problemas que abordem o conceito de fração sem consulta, quer seja de livro didático e ou colegas De posse desses protocolos, Santos analisará os problemas elaborados segundo a classificação teórica preestabelecida, proposta por Nunes et al.(2003).

Concomitantemente, Moutinho (2005) (Dissertação em andamento) propõe questões, referentes ao conteúdo de fração, conforme a mesma classificação preestabelecida e utilizada por Santos (2005), a alunos de 4ª série (2º ciclo) e 8ª série (4º ciclo), a fim de comparar o desempenho do aluno que está, praticamente, no início do ensino de fração com o aluno que já está se formando no Ensino Fundamental.

A primeira fase desse projeto completar-se-á com nosso estudo que será desenvolvido com alunos de 5ª e 6ª séries (3º ciclo) do Ensino Fundamental, cujo ciclo tem, como um dos propósitos, o início das operações com fração. Cabe salientar que apresentaremos a nosso sujeito de pesquisa questões idênticas às mostradas ao sujeito de pesquisa de Moutinho (2005).

Esse, como já citamos, é o início, a primeira etapa desse Projeto que visa a diagnosticar o desempenho de alunos de 4ª, 5ª, 6ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, e o que o professor desses alunos elabora. Trata-se, a nosso ver, de uma alavanca que servirá de base para possíveis intervenções futuras com alunos e professores.

A problemática e objetivo da pesquisa será descrito em seguida.

1.2 PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Como já citamos, o ensino formal de fração tem seu início no 2º ciclo do Ensino Fundamental. A introdução do conteúdo de fração na 3ª série amplia o conjunto dos Naturais, pois esse conjunto já estudado no ciclo anterior (1º ciclo) poderá ser insuficiente para resolver determinadas situações.

Dessa forma, o ensino e a aprendizagem das frações pressupõe algumas rupturas com as idéias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais. Estas rupturas demandam tempo e há necessidade que tenham uma abordagem adequada para o ensino, pois os alunos ao raciocinar sobre as frações, como se fossem números naturais, costumam, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), enfrentar várias dificuldades.

Uma delas é conceber que a representação $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ é um número e não dois números naturais e um traço separando-os, isto é, que esse novo número representa o quociente entre dois números inteiros quaisquer, sendo o segundo não nulo. Outra dificuldade é entender a noção de equivalência, ou seja, entender que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} ...\right)$. No campo dos números naturais, uma determinada medida ou quantidade era representada por um único número e, agora no campo das frações, é necessário conceber infinitas representações para uma determinada quantidade ou medida.

A compreensão da ordenação de fração é outra dificuldade. No campo dos números naturais, a concepção desenvolvida é a de que os números são construídos segundo uma ordem, na qual o sucessor de um número é ele próprio acrescido de uma unidade, portanto, os números podem ser dispostos segundo uma ordenação constante. Esta concepção terá de ser rompida, pois, na comparação de dois números naturais dizemos que, por exemplo: 3 < 4, já na comparação de duas frações dizemos que $\frac{1}{3} \rangle \frac{1}{4}$.

Os PCN (1997) salientam ainda uma outra concepção construída pelos alunos, no campo dos números naturais que também deve ser rompida, é a de que a multiplicação sempre aumenta e a divisão sempre diminui. Essas concepções deverão ser rompidas, quando os alunos se depararem com situações do tipo: “Que número multiplicado por 6 dá como resultado 3?” (6 x $\frac{1}{2}$) Ou ainda: “Que número dividido por 6 dá como resultado 12?” (6 : $\frac{1}{2}$).

No campo dos números naturais, é possível falar em sucessor e antecessor; mas, essa idéia não faz mais sentido no campo das frações, uma vez que entre duas frações quaisquer é sempre possível encontrar outra fração.

Pontuamos todas essas dificuldades na perspectiva de alegar que, várias delas apresentadas pelos alunos na compreensão de determinadas classes de problemas, podem estar relacionadas ao não entendimento de que em cada conjunto numérico a noção de número é, na maioria das vezes, diferente daquela do conjunto anterior.

Contudo, ainda se deve atentar para três aspectos no ensino das frações (BEHR et al., 1983 citado por DAVID, FONSECA, 1997). O primeiro é o aspecto prático, isto é, as frações, em suas diferentes representações, surgem com freqüência em diversas situações relacionadas à expressão de medidas e de quantidades, evidenciando a necessidade da extensão do conjunto dos números naturais.

O segundo aspecto refere-se a uma perspectiva do ponto de vista psicológico, ou seja, o trabalho com as frações surge como uma oportunidade privilegiada para se alavancar e expandir estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual. O último aspecto diz respeito à própria perspectiva da matemática, pois serão justamente esses primeiros estudos com as frações que fundamentarão o trabalho com as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental.

Todavia, na escola, o conceito de fração é explorado, com maior freqüência, recorrendo a situações em que está implícita a relação parte-todo, utilizando situações das tradicionais divisões de figuras geométricas, em especial, retângulos, quadrados e círculos.

Nessa perspectiva, a fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, sendo essa abordagem a mais encontrada nos livros didáticos. Assim, o procedimento utilizado é o de informar que o número total de partes é o denominador e a quantidade das partes tomadas é o numerador da fração.

Sabemos que a matemática é construída pelo homem baseada em suas necessidades; portanto, cabe aqui um questionamento: qual a necessidade do aluno ao dividir e pintar figuras geométricas?

Além disso, esse procedimento pode ser limitado, pois compreender a fração como parte ou pedaços de um todo e utilizar o processo da dupla contagem pode, por exemplo, dar conta de uma situação em que o número $\frac{2}{3}$ representa um chocolate dividido em três partes iguais e duas foram tomadas, mas, por exemplo, não é tão simples a compreensão do número $\frac{4}{3}$ nesse contexto.

Dessa forma, o objetivo de nosso estudo é identificar a competência[4] que o aluno de 5ª e 6ª séries tem ao lidar com o conceito de fração. Para tanto destacaremos nossa hipótese e nossa questão de pesquisa.

1.3 HIPÓTESE E QUESTÃO DE PESQUISA

O cerne desta pesquisa será diagnosticar a competência, analisando as estratégias que o aluno utiliza ao lidar com situações de fração. Sabemos que os exames oficiais SAEB (2001); SARESP (1998) em termos de diagnóstico são imbatíveis, mesmo porque sua amostra é grande e atinge todo o território nacional.

Entretanto, o estudo acadêmico que nos propomos realizar terá um instrumento diagnóstico com 19 problemas que abordam o conteúdo das frações, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). Nossa intenção será diagnosticar o desempenho e as estratégias utilizadas por alunos de 5ª e 6ª séries frente a essas questões.

Assim sendo, a questão de pesquisa é: ***"Quais estratégias de resolução alunos de 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?***

Com o objetivo de responder a questão de pesquisa, levaremos em conta duas variáveis: quantidades contínuas e discretas e as representações icônicas e não icônicas[5], pois podemos questionar também se nosso aluno tem mais

---

[4] Segundo Vergnaud (citado por MAGINA et al., 2001), competência refere-se à capacidade do sujeito na resolução de uma dada situação problema, em escolher estratégias adequadas e bem adaptadas para fazer frente à situação.

[5] Quantidades contínua e discreta, Representações icônica e não icônica serão detalhadas no Capítulo 4 Metodologia na seção 4.3.2.1

facilidade em resolver problemas que envolvam quantidades contínuas. Ou ainda, se a presença do ícone facilita a compreensão do aluno, ajudando-o na resolução do problema proposto.

Nossa hipótese é que a abordagem que, usualmente, se faz do conceito de fração, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito. Esta hipótese está baseada nos resultados obtidos em pesquisas oficiais: no SARESP de 1998, e no SAEB de 2001. Estes resultados sinalizam que o aluno ainda não adquiriu, satisfatoriamente, o conceito de fração.

Para podermos responder a questão de pesquisa, delineamos uma trajetória que foi distribuída em capítulos, cujos resumos encontram-se a seguir.

1.4 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS SUBSEQUENTES

No presente capítulo, descrevemos a motivação e relevância de nossa pesquisa, destacando a Cooperação Internacional da qual faz parte; a problemática e objetivo, enfocando a hipótese de acordo com os resultados de pesquisas oficiais realizadas pelo SARESP (1988); SAEB (2001).

No Capítulo 2, abordaremos os princípios cognitivos da psicologia com destaque à Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1988, 1990) e dentro desta os Invariantes Operatórios; e a Classificação Teórica proposta por Nunes et al. (2003) dos cinco diferentes significados da fração.

No Capítulo 3, apresentaremos o conceito de fração sob três diferentes enfoques: a fração na Matemática, momento que descreveremos a trajetória histórica de sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades; a fração do ponto de vista da Educação Matemática, quando revisaremos estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa; e a fração na Escola, descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (1997) e a abordagem contida nos livros didáticos.

No que tange ao Capítulo 4, descreveremos a metodologia que utilizaremos para aplicação do instrumento de pesquisa, no que diz respeito ao desenho e descrição do experimento, universo de estudo, material utilizado e procedimentos.

Em relação ao Capítulo 5, faremos a análise dos resultados obtidos, com base nas respostas dos sujeitos da pesquisa. Esta análise será feita, tanto no aspecto quantitativo como no qualitativo.

No Capítulo 6, apresentaremos nossas conclusões que serão fundamentadas nas análises feitas no capítulo anterior, com possíveis sugestões para futuras pesquisas.

Finalmente, apresentaremos as referências bibliográficas que colaboraram sobremaneira na elaboração e desenvolvimento do presente estudo.

CAPÍTULO II

PRINCÍPIOS DA PSICOLOGIA COGNITIVA COMO APORTE TEÓRICO DO ESTUDO

Para o planejamento e realização de um estudo científico, é necessário contar com o suporte de uma boa teoria com base na qual, todas as etapas da pesquisa sofrerão influência de seus pressupostos. É preciso, portanto, que este estudo faça escolhas, quanto a seu suporte teórico. Nesse sentido, o desenvolvimento de nosso estudo basear-se-á na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1988, 1990), além de considerarmos outras idéias teóricas, sobretudo aquelas que referem a classificação sobre o significado da fração como os estudos de Kieren (1988) e de sobremaneira a proposta de classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003).

Para tanto, apresentamos este capítulo em três seções: formação do conceito, as situações que dão significado ao conceito e algumas considerações sobre a razão e a porcentagem.

2.1 FORMAÇÃO DO CONCEITO

Para estudo sobre a formação do conceito, baseamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) que possibilita uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência à aprendizagem da matemática, permitindo situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual, isto é, estudar as teias de relação existentes entre os conceitos matemáticos, no sentido proposto por Kieren (1988).

A referida teoria possibilita ainda duas análises importantes: a primeira refere-se à relação existente entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação; e a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre significados e significantes.

Nesta perspectiva, significado é definido por Vergnaud (1993), como sendo uma relação do sujeito com as situações e os significantes, de modo mais preciso os esquemas evocados no sujeito individual, por uma situação.

Assim, a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud:

> é uma teoria cognitivista que visa favorecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas.(Vergnaud, 1990, p. 133 citado por Franchi 1999).

Nesse contexto, a Teoria dos Campos Conceituais retoma e aprofunda os estudos de Piaget, no que tange à noção de esquema, tendo como um de seus pressupostos básicos que o conhecimento constitui e desenvolve-se ao longo de um período de tempo e a partir da interação adaptativa do sujeito com as situações que experiencia.

Cabe considerar que, para Vergnaud esquema refere-se à forma estrutural da atividade, isto é, diz respeito à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas. Como define Vergnaud:

> O conceito de esquema é particularmente adaptado para designar e analisar classes de situações para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, a um momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de

> competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Mas ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos esquemas são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito. (Vergnaud, 1995, p.176 citado por Franchi, 1999, p.166).

Diante do exposto, quais situações e ou conjunto de situações são necessários para a construção do conceito de fração? O questionamento resulta do fato de que o ser humano não se relaciona de forma mecânica ou imediata com o outro e com a realidade.

Para essas relações faz-se necessário uma dimensão simbólica ou representacional. Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais busca compreender as relações existentes entre os conceitos dentro dos processos de aprendizagem.

Dessa forma, definiremos o que seja Campo Conceitual para Vergnaud (1995 citado por FRANCHI, 1999), partindo de uma rápida discussão, antes de apresentar uma definição direta. Se, por um lado, os conceitos que nós utilizamos, estão embebidos na vida cotidiana e não surgem por simples apreensão sensível diretamente do real; por outro lado, os conceitos só funcionam quando estão reunidos em proposições, sentenças, enunciados e teoremas e não operam em vão.

Em outras palavras, os conceitos são mobilizados no cotidiano para dar conta dos desafios enfrentados pelo sujeito. Daí, surge um aspecto importante do Campo Conceitual que diz respeito a um conjunto de situações. Os conceitos só adquirem sentido dentro de situações ou conjunto de situações. Portanto, para Vergnaud (1995, citado por FRANCHI, 1999) um dos pilares de um campo conceitual é o conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, todos em estreita conexão uns com os outros.

Nesse sentido, o sujeito frente a uma nova situação mobilizará o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tentará adaptá-lo à nova situação. Cabe esclarecer que o termo “situação” utilizado por Vergnaud (1995) não tem o mesmo sentido da situação didática, utilizado por Brousseau (1986 citado por FREITAS, 1999).

Assim, para Vergnaud situação tem a ver com o contexto no qual o problema (ou tarefa) encontra-se inserido, de forma a contribuir, para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significados.

Portanto, nesse contexto, para Vergnaud (1988) a aquisição do conhecimento dar-se-á por meio de situações-problema já conhecidas e esse conhecimento, tanto pode ser explícito – expresso de forma simbólica como implícito – usado dentro de uma ação, na qual o sujeito escolhe as operações adequadas frente a uma determinada situação sem, contudo, conseguir expressar as razões de suas escolhas.

Nesse ponto da teoria dos Campos Conceituais, mais do que qualquer outro, é possível encontrar a forte influência que as idéias piagetianas, sobre a aquisição do conhecimento, exercem em Vergnaud (1988). Salientamos de sobremaneira três idéias:

- O conhecimento dá-se pela adaptação do indivíduo ao meio, isto é, o processo de conhecimento é tratado, como um caso particular do processo de equilibração. Assim, a apreensão de novas estruturas e novos objetos às estruturas já existentes por meio da ação do sujeito, diz respeito à assimilação, e a modificação dessas estruturas às novas características do objeto relaciona-se com a acomodação;

- O conhecimento, portanto, pode ser traçado pelo modo como um indivíduo atua sobre o objeto, isto é, a ação é o principal fator no processo do conhecimento;

- Os indivíduos desenvolvem diferentes tipos de conhecimento, dependendo do tipo de abstração que eles fazem. Para Piaget, conhecimento lógico-matemático dá-se com base na abstração reflexiva, isto é, consiste em isolar as propriedades e as relações das próprias operações da pessoa.

Vergnaud (1993) retoma essa idéia para explicar os invariantes, os quais com as situações e as representações simbólicas constituem o alicerce triangular da formação do conceito.

Ao considerar um campo conceitual como sendo um conjunto de situações, destacamos que uma das vantagens dessa abordagem pelas situações é permitir a produção de uma classificação baseada na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada um deles.

Nesse cenário, Verganud (1993) analisou os tipos de situações-problema matemáticas, seus tipos de formulação aliados às idades psicológicas e à maturação matemática, chegando às estruturas envolvidas na resolução dos problemas, a fim de entender as filiações e saltos dos conhecimentos dos estudantes, isto é, compreender as relações e a evolução das concepções e prática do sujeito frente a uma dada situação.

Dentre muitas estruturas estudadas, destacam-se duas: as aditivas e as multiplicativas. O presente estudo encontra-se inserido dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Cabe explicitar que esse campo envolve, tanto o conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações e divisões quanto o conjunto dos conceitos e teoremas que permite analisar tais situações.

Assim, entre outros conceitos identificamos as proporção simples e múltipla, função linear e não linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, **fração**, número racional, múltiplo e divisor, como conceitos pertencentes às estruturas multiplicativas.

Nessa perspectiva, Vergnaud (1993) considera que existe uma série de fatores que influenciam a formação e desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema. Por exemplo, para que percebamos quais os conhecimentos que o sujeito traz consigo frente a um dado objeto matemático, é necessário que busque o entendimento do que o sujeito realiza e de como realiza, relacionando esses dois aspectos.

Nesse sentido, o estudo do desenvolvimento de um campo conceitual requer que um conceito seja visto, como uma composição de uma terna de conjuntos, representada, segundo Vergnaud (1993), por S, I,R:

- S – é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo, isto é, a realidade;
- I – é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades, relações);
- R – é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes.

Vergnaud (1990) deixa claro que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos, baseados em uma variedade de situações e que cada situação, normalmente, não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado apoiado na vivência de uma única situação.

Diante do exposto, para Vergnaud (1990), o conceito não pode ser reduzido à sua definição, sobretudo se nos interessarmos por seu ensino e aprendizagem, pois é com base nas situações e nos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nessa perspectiva, podemos distinguir duas classes de situações:

- Uma que o sujeito dispõe em seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, as competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;

- Outra que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas levando-o, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso.

Desse modo, o conceito de esquema, segundo Vergnaud (1993), interessa às duas classes de situações, mas não funciona do mesmo modo nos dois casos. No primeiro caso, observamos, para uma mesma classe de situações, comportamentos automatizados, organizados por um só esquema. Ao passo que, no segundo caso, notamos sucessiva utilização de vários esquemas que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem estar acomodados.

Dessa forma, os conhecimentos contidos nos esquemas podem ser designados pelas expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação, ou também, pela expressão mais global, “invariantes operatórios”.

Segundo Vergnaud (1988) citado por Magina et al. (2001, p.13):

> os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos feitos pelo aluno. Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas”.

Nesta perspectiva, o teorema em ação está relacionado com as estratégias tomadas e utilizadas pelo sujeito, em situação de solução de um dado problema, sem que ele seja capaz de explicá-las ou justificá-las. Aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos, passíveis de serem verdadeiros ou falsos, portanto, tendo um domínio de validade restrito.

O conceito em ação é a manifestação do próprio conceito com suas propriedades e definições, quando são manifestados, geralmente, são explícitos.

Nesse contexto, reside o porquê de estudar o conceito de fração dentro do campo conceitual e, é justamente, nesse *mote* que Vergnaud (1993) encontra respaldo para defender que o conhecimento de um determinado campo conceitual desenvolve-se ao longo de um período de tempo. Para ilustrar tal argumentação, vamos tomar o exemplo da multiplicação.

A aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos acerca dos números naturais e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada.

No campo dos números naturais, os alunos vivenciam um conjunto de situações que forma a concepção[1] de que a multiplicação sempre aumenta, ou seja, o produto é sempre maior do que os dois fatores. Ao raciocinar sobre os números racionais, faz-se necessário um outro conjunto de situações que dêem conta de superar essa dificuldade, provocando a ruptura dessa expectativa, por exemplo: 10 multiplicado por $\frac{1}{2}$ é igual a 5.

À luz desse exemplo, podemos afirmar que o campo conceitual multiplicativo abrange um número maior de situações que necessitam ser melhores elucidadas e analisadas com cuidado, a fim de facilitar a hierarquia das competências[2] possíveis desenvolvidas pelos alunos, dentro e fora da escola, pois resolver algumas operações de multiplicação não representa quase nada, isso pode ser apenas a ponta do iceberg conceitual.

A seção apresentada a seguir é uma tentativa de aplicar sistematicamente a teoria de Vergnaud (1983) para a análise do conceito de fração. Defendemos, dessa forma, como sugere o autor da teoria, que pode ser possível construir o conceito de fração coordenando a interação entre os três conjuntos da terna – Situações, Invariantes e Representações.

[1] Concepção refere-se ao conhecimento explícito do sujeito e é apresentada por representações simbólicas assumidas pelo mesmo, tais como expressões oral ou escrita. Essas expressões podem retratar o estado que se encontra o conceito para o sujeito. (MAGINA et al., 2001)

[2] Competência refere-se à ação do sujeito cujo conhecimento ainda está implícito, isto é, pode ser traçada pela ação do sujeito diante das situações. (MAGINA et al., 2001)

2.2 AS SITUAÇÕES QUE DÃO SIGNIFICADO AO CONCEITO

Conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993) para que seja possível construir um conceito, precisa-se coordenar a interação entre os três conjuntos da terna: Situações, Invariantes e Representações.

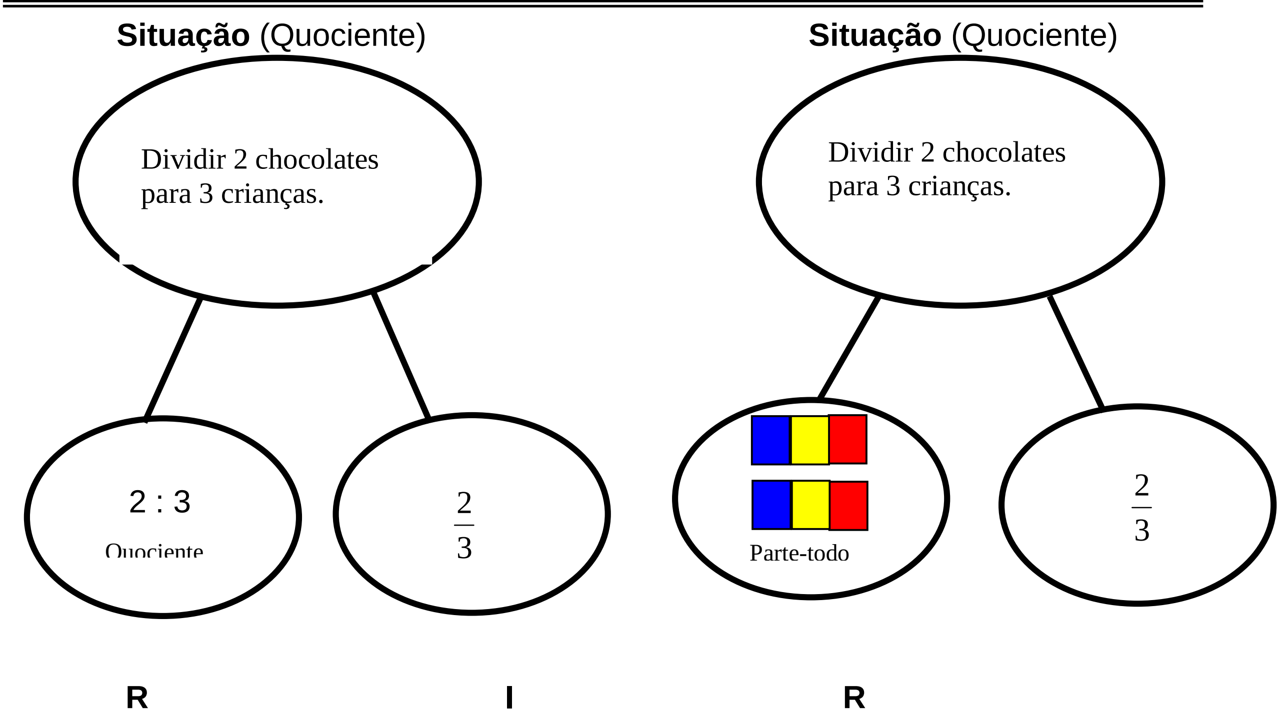
Nunes et al. (2003) propõe uma classificação teórica da fração, assim , o conjunto de Situações refere-se à classificação teórica de problemas, contemplando cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo. O conjunto de Invariantes concernente às propriedades do conceito – equivalência e ordem –, objetos e relações que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações. E o conjunto de Representações, o qual permite que o sujeito represente as situações por meio de signos e símbolos matemáticos – $\frac{a}{b}$ *a* e *b* naturais com *b* diferente de zero, pictórica, porcentagem, ou ainda, na forma de número decimal.

É importante esclarecer que, ao enquadrar nosso estudo à teoria dos campos conceituais, o fato de apresentarmos a priori, a classificação teórica proposta por Nunes et al.(2003), para situações no conjunto S (Referente), ela não tem sentido em si mesma e, sim, mantém uma estreita relação com as estratégias escolhidas pelo sujeito para resolver tal situação (Invariantes operatórios), e com os símbolos matemáticos que o sujeito dispõe em seu repertório para representar tal situação – (Representações).

Para exemplificar o que acabamos de afirmar, tomemos a seguinte situação: *Dividir 2 barras de chocolate para 3 pessoas.* Esta situação classificaríamos a priori, segundo Nunes et al. (2003), como uma situação tipicamente com significado Quociente, pois a divisão ($2 : 3 = \frac{2}{3}$) seria uma estratégia bem adaptada para resolver tal situação.

Entretanto, o sujeito poderá recorrer à estratégia de dividir o todo (cada chocolate) em partes iguais (3 pessoas) e apoiando-se na correspondência um-para-um e na dupla contagem, responder a situação de maneira correta, porém utilizando-se de outro significado, o de Parte-todo.

Quadro 2.1: Representação da situação Quociente.

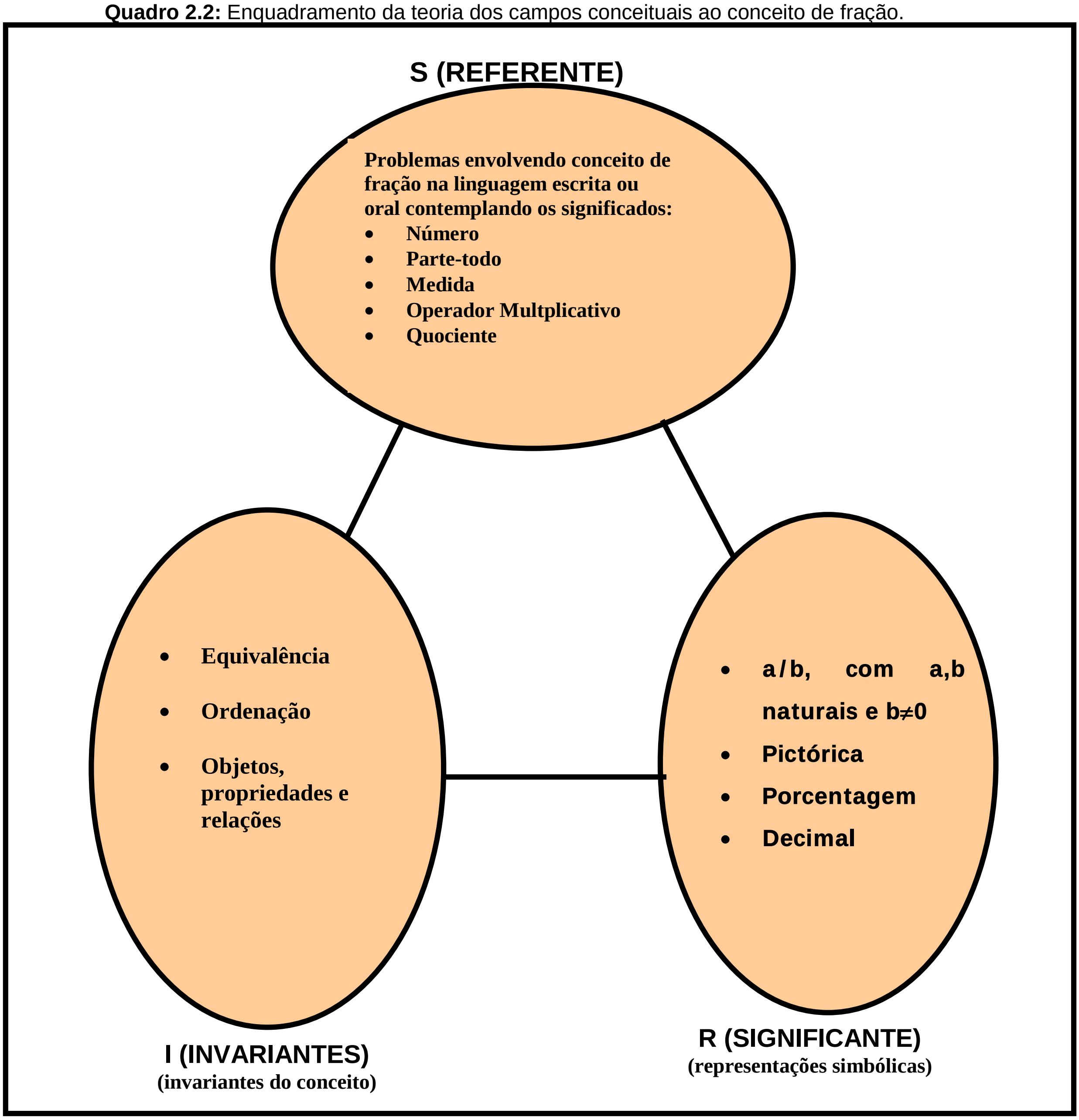


Cabe ressaltar que, ainda nessa situação, o sujeito poderá interpretá-la como Operador multiplicativo, visto que é possível ele responder tal situação, dizendo que cada pessoa receberá $\frac{1}{3}$ da quantidade de chocolate. Isto é, na situação que se fez referência, o sujeito utilizaria como estratégia de resolução $\frac{1}{3}$ de 2 chocolates.

A seguir, apresentaremos o enquadramento do nosso estudo na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) por meio de um esquema inspirado em Santos (2003).

CAMPO CONCEITUAL: ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Quadro 2.2: Enquadramento da teoria dos campos conceituais ao conceito de fração.



O quadro 2.2 representa a terna S (conjunto de situações), I (conjunto de invariantes do conceito), R (conjunto de representação) e sua relação com o presente estudo.

Nesse arcabouço teórico que nos apoiaremos para compreender o conceito de fração. Para exemplificar, o que acabamos de afirmar, tomemos a fração $\frac{2}{3}$. Podemos encontrar essa representação como solução de diversas situações-problema, cujo domínio cognitivo para sua resolução difere em cada uma das situações, como pode ser constatado nos exemplos que apresentaremos abaixo, de acordo com a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003):

Significado Número

As frações, assim como os números inteiros, são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal.

Ao admitir a fração com o significado de número, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para nos remeter a essa idéia. Nessa perspectiva, também, não tem sentido abordar esse significado em quantidades contínua e discreta.

Exemplo: Represente na reta numérica a fração $\frac{2}{3}$.

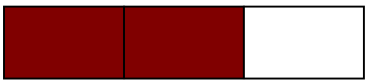
O sujeito frente a esse problema (situação) deverá reconhecer, a princípio, a fração $\frac{2}{3}$ como um número (significado) e não uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber, ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, $\frac{2}{3}$ é um número compreendido entre 0 e 1. Mesmo considerando esse intervalo, há a necessidade que o sujeito compreenda que à direita e à esquerda de $\frac{2}{3}$ existem ainda infinitos números. Deverá ainda admitir que existem duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal.

Significado Parte-Todo

A idéia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais e que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$.

Assumiremos como significado Parte-todo um dado todo (contínuo ou discreto), dividido em partes iguais em situações estáticas, cuja utilização de um procedimento de dupla contagem dá conta de chegar a uma representação correta, isto é, esse procedimento consiste em quantas partes o todo foi dividido (denominador) e o número de partes tomadas (numerador).

Exemplo 1 (Quantidade contínua): Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 3 partes iguais e deu 2 partes para Maurício. Que fração representa a parte de chocolate que Maurício recebeu?



Exemplo 2 (Quantidade discreta): Na loja há 2 bonés vermelhos e 1 boné azul de mesmo tamanho e formato. Que fração representa a quantidade de bonés vermelhos em relação ao total de bonés da loja?

O sujeito frente a situações desses tipos deverá identificar que o todo foi dividido em 3 partes iguais, portanto, trata-se de uma comparação parte-todo (significado); bem como deve identificar que o número total de partes do exemplo 1, assim como o total de bonés do exemplo 2, referem-se ao denominador e que as partes pintadas do chocolate, assim como a quantidade de bonés vermelhos correspondem ao numerador.

Nessas situações, o aluno necessita, previamente, desenvolver algumas competências, como: a identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que considera como a unidade em cada caso concreto), de realizar divisões (o todo conserva-se, mesmo quando dividimos em partes, há a conservação da unidade), manipular a idéia da conservação da área (no caso das representações contínuas).

Significado Medida

Assumiremos fração com o significado Medida em situações de quantidades intensivas e extensivas. Algumas medidas envolvem frações por se referirem a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos é fracionária.

Exemplo 1 (Quantidade discreta): João terá que passar por uma prova de fogo. Seu amigo colocou dentro de uma caixinha 3 bolas coloridas, duas azuis e uma branca, e apostou com João: se você tirar uma bola dessa caixa sem ver, e ela for azul, você ganha o jogo. Que fração representa a chance de João ganhar o jogo?

Nessa situação, a possibilidade de João ganhar o jogo é expressa por uma medida (significado) obtida pelo quociente entre o número de bolinhas azuis e o número total de bolinhas da caixa, ou seja, pela fração $\frac{2}{3}$.

Outras medidas envolvem frações por referirem-se a quantidades intensivas.

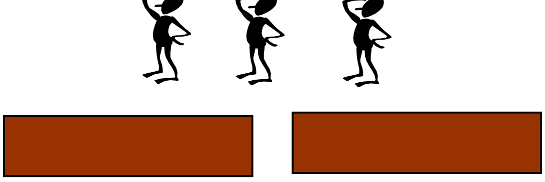
Exemplo 2 (Quantidade contínua): Para fazer uma certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de água para 1 medida de concentrado de laranja. Que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?

Ao fazer esse suco, devemos utilizar 1 medida de concentrado de laranja para 2 medidas de água, e a receita é medida pela razão 1 para 2 que pode ser representada como sendo $\frac{1}{2}$ (relação parte-parte). Com essa medida, podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de suco, mantendo o mesmo sabor e, além disso, essa quantidade poderá nos remeter à idéia de fração, se considerarmos que o todo (a mistura) é constituído de 3 partes, sendo que $\frac{2}{3}$ é a fração que corresponde a medida de água na mistura.

Significado Quociente

Este significado está presente em situações em que a divisão surge como uma estratégia bem adaptada para resolver um determinado problema. Isso significa que conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo.

Exemplo 1 (Quantidade Contínua): Divida 2 chocolates para 3 pessoas. Que fração representa o que cada pessoa recebeu de chocolate?



Nessa situação-problema, o sujeito deverá perceber que a divisão é uma boa estratégia para resolvê-la, isto é, o quociente (significado) representa a quantidade de chocolate que cada criança irá receber. Deverá admitir, então, que 2:3 é igual a $\frac{2}{3}$, bem como aceitar o número $\frac{2}{3}$ como uma resposta bem adaptada à tal situação, ao invés de 2 : 3 = 0,6666...

Exemplo 2 (Quantidade Discreta): Tenho 30 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças. Que fração representa essa divisão?

Para que possamos exemplificar a quantidade discreta no significado Quociente, tivemos que nos reportar a uma fração diferente de $\frac{2}{3}$, pois não teria sentido dividirmos igualmente 2 bolinhas de gude para 3 crianças. A quantidade discreta exige que o numerador (bolinhas de gude) seja divisível pelo denominador (crianças).

Esse significado pressupõe, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado parte-todo, pois na situação de quociente temos duas grandezas distintas: no exemplo 1, chocolates e crianças; no exemplo 2 bolinhas de gude e crianças.

Na situação de quociente de quantidade contínua, a fração corresponde à divisão (3 chocolates para 4 crianças), e também ao resultado da divisão(cada criança receberá $\frac{3}{4}$).

Significado Operador Multiplicativo

Associamos a esse significado o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo;

e que em quantidades discretas, sua aplicação atua como um multiplicador divisor.

Nessa perspectiva, assim como um número inteiro, a fração pode ser vista, como valor escalar aplicado a uma quantidade que, no caso do número inteiro, por exemplo, poderíamos dizer 3 balas, no caso da fração, poderíamos ter $\frac{3}{4}$ de um conjunto de 4 balas. Nesses exemplos, a idéia implícita é o número ser um multiplicador da quantidade indicada.

Exemplo (Quantidade Discreta): Na quinta série "A", há 36 alunos. Numa avaliação de Matemática sobre frações, $\frac{2}{3}$ *dos alunos obtiveram resultados satisfatórios. Quantos alunos obtiveram bons resultados?*

O esquema abaixo retrata tal situação

Estado Inicial	Operador Multiplicativo	Estado Final
36 alunos	dividir por 3, multiplicar por 2 ou o inverso: multiplicar por 2 e dividir por 3	24 alunos

Nessa situação, o sujeito deverá perceber que a fração desempenha o papel de transformação; ao mesmo tempo conduz a idéia de que os números racionais formam um corpo (estrutura algébrica) munido de duas operações; a adição e a multiplicação. Encontramos, assim, nessa situação, um contexto natural para a composição de transformações (funções, operador – significado), a idéia de inversa (o operador que reconstrói o estado inicial) e a idéia de identidade (o operador que não modifica o estado inicial).

Apresentamos a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003), e os autores destacam ainda dois invariantes, que são considerados centrais no conceito de fração: a noção de ordem e a noção de equivalência.

No que se refere à noção de ordem de fração, existem duas idéias básicas e centrais que devem ser levadas em consideração no ensino de fração. A primeira é que, para um mesmo denominador, quanto maior for o numerador, maior será a fração; contudo – a segunda idéia diz respeito a uma situação em que, para um mesmo numerador, quanto maior o denominador, menor será a fração.

A primeira idéia é relativamente simples, pois a estratégia utilizada para resolver tal situação é semelhante à comparação de dois números naturais, embora a afirmação que o denominador deve ser constante para uma comparação direta a ser feita entre os numeradores, possa oferecer alguma dificuldade. A segunda idéia pode oferecer mais dificuldade, pois as crianças precisam pensar em uma relação inversa entre o denominador e a quantidade representada pela fração.

No que concerne à noção de equivalência de fração, dois aspectos essenciais devem ser levados em consideração: equivalências em quantidades extensivas e em quantidades intensivas. Quantidades extensivas referem-se à comparação de duas quantidades de mesma natureza e à lógica parte-todo. Portanto, são suscetíveis de ser adicionadas e medidas por uma unidade de mesma natureza. Em uma típica situação de parte-todo, o todo é uma área dividida em áreas iguais. Se adicionarmos $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ do todo equivalente, o total é $\frac{2}{3}$.

Quantidades intensivas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes; portanto, não suscetíveis de adição e são medidas de uma relação de duas magnitudes, cada uma vindo de diferentes quantidades intensivas.

Por exemplo, para fazer uma laranjada é necessário que tenha uma parte de concentrado de laranja para duas partes de água. Na laranjada (a mistura), a fração que representa a quantidade de concentrado de laranja pode ser descrita como $\frac{1}{3}$. Da mesma forma, a quantidade de água pode ser descrita como sendo $\frac{2}{3}$ da mistura. Se fizermos essa mesma mistura em duas jarras distintas, jarra A e jarra B e, em seguida, juntarmos os conteúdos das jarras A e B em outro recipiente, jarra C, a quantidade de concentrado de laranja continuará sendo de $\frac{1}{3}$, ao invés de $\frac{2}{3}$. Mostramos essas situações para caracterizar que em quantidades intensivas, não é possível adicionar frações da mesma forma que em situações de quantidades extensivas.

Nunes, Bryant (1996) chamam atenção, pois ao tratar da equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência vai depender do tamanho do todo (ou da unidade), por exemplo, as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ só pertencerão a uma classe de equivalência de frações se os dois todos forem equivalentes. Se estivéssemos nos referindo a $\frac{1}{4}$ de um todo e $\frac{2}{8}$ de um todo não equivalente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ não poderiam pertencer à mesma classe de equivalência de frações.

A equivalência de fração em contexto de quantidades intensivas difere das quantidades extensivas, pois, nesse contexto, podemos falar em equivalência entre duas frações referindo-se a todos diferentes. Por exemplo, se fizermos uma jarra de suco usando 1 copo de concentrado para 3 copos de água, o suco terá a mesma concentração e gosto que duas jarras de suco feito com 2 copos de concentrado e 6 copos de água. Em situações de quantidades intensivas, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são equivalentes mesmo que o todo não seja o mesmo.

Pontuamos os exemplos acima para alegar, como sugere Vergnaud (1990), que se quisermos a construção do conceito de fração, um dos possíveis caminhos de entrada será explorar esse conceito em diversas e diferentes situações, que combinadas favoreçam o entendimento do tal conceito de maneira sólida.

A afirmação acima encontra sustentação na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990), quando esta destaca que a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do sujeito frente a essas tarefas, permitem que analisemos sua competência. Competência essa que, segundo ele, se refere à capacidade do sujeito na resolução de uma dada situação-problema, em escolher estratégias adequadas e bem adaptadas para fazer frente à situação, podendo ainda ser avaliada levando em consideração três aspectos:

- Acerto e erro, considerando que competente é quem acerta;
- Análise do tipo de estratégia utilizada;
- Análise da capacidade de escolher a melhor forma para resolver um problema de uma situação particular.

Nesse sentido, baseado nestes três aspectos encontraremos subsídios para identificar o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos de 5ª e 6ª séries, fretnte a problemas que abordam o conceito de fração.

Apresentada a categoria de classificação, concordamos com Nunes, Bryant (1996) que, por trás do ensino e aprendizagem de frações, existe uma diversidade e complexidade de conceitos envolvidos. Assim entendemos que, é nesse cenário que a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) contribui de maneira ímpar para a Educação Matemática, uma vez que ela oferece uma sólida e plausível explicação do surgimento e desenvolvimento do conceito.

2.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A RAZÃO, PORCENTAGEM E PROBABILIDADE

Em nosso estudo, consideramos que situações de ensino que de fato têm como objetivo a construção do conceito de fração, deveriam levar em conta os diferentes significados nos distintos contextos que a fração pode assumir: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

No entanto, existem algumas situações em que as frações podem ser interpretadas, como razão, como probabilidade e como porcentagem. Então, seriam esses outros significados para a fração?

A partir do presente estudo, apontamos que não, pois por trás de tais interpretações estão os significados medida e operador multiplicativo.

No contexto que se refere à probabilidade como, por exemplo: Em uma caixa há 3 bolas verdes e 8 bolas vermelhas, qual a probabilidade de sortear ao acaso uma bola verde? A resposta da situação é $\frac{3}{11}$, ou seja, de cada 11 bolas contidas na caixa, 3 são verdes. De fato, na situação está implícito o significado medida. A fração $\frac{3}{11}$ representa a probabilidade da ocorrência desse evento, que é medida pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

Nas situações, que se referem à porcentagem, como, por exemplo, João teve aumento de seu salário de 12%, isto é, $\frac{12}{100}$, está implícito o significado operador multiplicativo. Nesse caso, só tem sentido dizer 12% ou $\frac{12}{100}$, referindo-se a uma quantidade, discreta ou contínua, como destacam Ciscar e Garcia (1988), as porcentagens têm aparecido como operador no sentido de que $\frac{a}{100}$ de x ou *a%* significa aplicar a fração $\frac{a}{100}$ sobre x.

No caso das razões, devemos fazer uma análise mais cautelosa, pois nem sempre as razões estão presentes em contextos nos quais lhes podemos dar o "status" de fração. Para esclarecer o que acabamos de afirmar, tomemos, por exemplo, dois contextos que podem ser expressos em forma de razão.

Exemplo 1: Para fazer um determinado suco é necessário 1 copo de concentrado para 3 copos de água. Esta situação nos remete à idéia de que a receita do suco pode ser expressa por uma razão: 1 para 3, ou $\frac{1}{3}$. Esta situação poderia ser expressa ainda por uma fração como, por exemplo $\frac{1}{4}$ que expressaria não mais o concentrado em relação à quantidade de água, mas, sim, a quantidade de concentrado em relação à quantidade total da mistura.

Nessa situação, desejamos ressaltar que, reunir num mesmo todo duas unidades distintas, está implícito, dessa forma, o significado medida.

Todavia, existem diversas situações que não podemos pensar a razão como fração, por exemplo, quando nos referimos à seguinte situação: dois reais a cada 3 quilos de cebola, em termos de razão representaríamos como sendo 2 para 3, ou ainda, $\frac{2}{3}$.

Em que pesem todas essas considerações sobre razão, há outro aspecto que gostaríamos de discutir nesse momento. Podemos somar duas razões? Para começar discutir esse aspecto, tomemos, como exemplo, a seguinte situação: Dois recipientes iguais contêm sucos nas seguintes razões: o recipiente A tem 1 copo de concentrado para 3 copos de água; e o recipiente B tem 2 copos de concentrado para 3 copos de água. Se juntarmos as quantidades dos dois recipientes, qual será a razão da nova quantidade de suco? Nessa situação-problema, as razões são:

Recipiente A = $\frac{1}{3}$

Recipiente B = $\frac{2}{3}$

A tendência seria somar as razões para indicar a razão da nova quantidade de suco. Mas, é possível somarmos razão? Não, pois sabemos que em tal situação só seria possível somar razão, se elas fizessem referência ao mesmo todo. Nesse caso, sabemos que só é possível somar as razões (quantidades intensivas), se elas puderem ser transformadas em frações (quantidades extensivas), expressando uma relação parte-todo de um mesmo todo ou todos iguais, o que não ocorre no caso das razões sugeridas acima, isto é, em que há uma relação parte-parte, concentrado e água.

Então, para resolver esta situação, poderíamos recorrer, por exemplo, à transformação das razões em frações, ou seja, constituir o todo, visto que as quantidades (concentrado e água) podem ser reunidas em um mesmo todo.

Linguagem de Razões	*Linguagem de Frações*
Quantidade intensiva	*Quantidade extensiva*
Recipiente A = $\frac{1}{3}$ (razão)	Fração correspondente $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4} concentrado \\ \frac{3}{4} água \end{array}\right\}$
Recipiente B = $\frac{2}{3}$ (razão)	Fração correspondente $\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{5} concentrado \\ \frac{3}{5} água \end{array}\right\}$

Dessa forma, teríamos:

Concentrado da Mistura: $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20}$

Água da Mistura: $\frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{27}{20}$

Razão da Mistura: $\frac{concentrado}{água} = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{27}{20}} = \frac{13}{27}$

Fizemos essa discussão e destacamos alguns exemplos, embora não seja o foco de nosso estudo, para justificar o fato que não estamos considerando razão, probabilidade e porcentagem como sendo outros significados de fração. Essas interpretações emergem de situações, cuja resolução de determinados problemas pode recorrer às frações, como tratamento didático, estando implícita a relação medida e operador multiplicativo.

No próximo capítulo, versaremos sobre o conceito de fração sob três diferentes enfoques: a fração na Matemática, momento que descreveremos a trajetória histórica de sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades; a fração do ponto de vista da Educação Matemática, momento que revisaremos estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa; e, finalmente, a fração na Escola, momento que descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (1997) e a abordagem da fração contida nos livros didáticos.

CAPÍTULO III
FRAÇÃO NA MATEMÁTICA, NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA

Ao se estudar um “ente” matemático, não podemos perder de vista dois aspectos: o da Matemática como ciência (sua evolução e formalidade) e o da Matemática como disciplina escolar (seu ensino e sua aprendizagem).

Nesse sentido, no presente capítulo versaremos sobre o conceito de fração sob três diferentes enfoques. O primeiro refere-se à fração na Matemática, momento que descreveremos a trajetória histórica de sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades.

O segundo enfoque diz respeito ao conceito de fração do ponto de vista da Educação Matemática, momento que revisaremos estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa.

O terceiro enfoque refere-se à fração na Escola, momento que descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (1997) e a abordagem contida nos livros didáticos.

3.1 FRAÇÃO NA MATEMÁTICA

Nessa seção, faremos uma breve descrição histórica sobre a fração, seu surgimento e suas diferentes representações em algumas culturas e, em seguida, apresentaremos o objeto matemático – a fração, do ponto de vista formal da própria matemática.

3.1.1 Na história

A noção de número está associada através dos tempos, a todos os tipos de atividade humana. As primeiras informações sobre a idéia de número são do período paleolítico; no entanto, poucos progressos foram feitos nesse campo, até ocorrer a transição para o período neolítico, durante o qual já existia uma atividade comercial importante entre diversas povoações.

Assim, as idéias de número basearam-se, nesse período, na formação de linguagens, cujas palavras exprimiam coisas muito concretas e poucas abstrações. Contudo, já havia lugar para alguns termos numéricos simples (distinção entre um, dois e muitos) e depois da utilização, durante muitos séculos, dos números para contar, medir, calcular, o homem começou a especular sobre a natureza e as propriedades dos próprios números.

Nesse contexto, com a fração, as coisas não transcorreram de maneira muito diferente. Há um consenso entre diversos pesquisadores da história da Matemática como por exemplo: Boyer (1974); Caraça (1998), entre outros, que o surgimento da Matemática deve-se ao fato de problemas oriundos da vida diária, ou seja, salvo sua evolução e seu formalismo, a Matemática emerge de uma apreensão sensível do real, isto é, de uma tentativa de construir modelos matemáticos para resolver problemas reais.

No Oriente Antigo, a história da Matemática, , com a descoberta do *Papiro de Rhind* (descoberto em 1858; escrito por volta de 1650 *a. C*. por Ahmes) e do *Papiro de Moscovo* apresenta-nos a Matemática egípcia que pode ser constatada, por meio dos problemas neles contidos que esse povo já tinha se familiarizado com as frações. Estas, porém, eram escritas de forma diferente das que utilizamos atualmente, ou seja, $\frac{1}{10}$ era representado com $\overline{10}$, possibilitando, desde aquela época, a idéia de um inteiro e não de uma unidade fracionada (STRUIK, 1987).

Podemos notar que a aritmética egípcia fazia uso do cálculo de frações, porém estas eram reduzidas à soma das chamadas ‘frações unitárias’, o que significa afirmar frações de numerador 1. As únicas exceções eram $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, para os quais existiam símbolos especiais. O Papiro de Rhind tem uma tabela que dá as equivalências em frações unitárias a todos os números ímpares de 5 a 101, por exemplo:

n=5 $\Rightarrow$ $\bar{3}$ $\overline{15}$ $(\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15})$

n= 7 $\Rightarrow$ $\bar{4}$ $\overline{28}$

Segundo Struik:

> “O princípio subjacente a esta redução especial a frações unitárias não é claro. Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média” (STRUIK, 1987, p.53).

As frações foram conhecidas na Antigüidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram durante muito tempo mal fixadas, não homogêneas e inadaptadas às aplicações práticas. Não foram consideradas, desde sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral $\frac{m}{n}$, como m vezes o inverso de n. (IFRAH, 1996)

Boyer (1974) comenta que as frações $\frac{1}{8}$, por exemplo, eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes – 1650 d. C. – mas, a fração geral parece ter sido um enigma aos egípcios. Assim, estes só concebiam as frações denominadas “unitárias” (as de numerador igual a 1), e só exprimiam as frações ordinárias por meio das somas de frações desse tipo (por exemplo: $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$).

Observamos que, com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações submetiam-se às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1).

No Papiro de Rhind, podemos observar que para a resolução de um problema para achar dois terços de $\frac{1}{5}$ se procede ao método, como descreveremos a seguir, o que indica alguma percepção das regras gerais utilizadas pelos egípcios.

> Para a decomposição de $\frac{2}{5}$ o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de $\frac{1}{5}$ encontra-se a decomposição dada por Ahmes, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. No caso de $\frac{2}{7}$ aplica-se duas vezes a divisão por dois a $\frac{1}{7}$ para obter o resultado $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. A obsessão egípcia com dividir por dois e tomar a terça parte se percebe no ultimo caso da tabela $\frac{2}{n}$ para n = 101. Talvez um dos objetivos da decomposição de $\frac{1}{2n}$ fosse chegar a frações unitárias menores que $\frac{1}{n}$ (BOYER, 1974, p. 11).

A extensão dos conceitos numéricos foi crescente e se outrora serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos.

De agora em diante, não só duas grandezas podiam comparar “por estimativa”, como era possível dividí-las em parcelas ou, pelo menos, supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie escolhida como padrão.

Apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas, os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida. Ifrah esclarece que:

> A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como $\frac{34}{1265}$: onde 34 é o numerador e 1265 é o denominador. Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal (IFRAH, 1996, p.327).

Entre os babilônios, que já sabiam resolver equações de 1º e do 2º graus, também, era comum o uso de frações e em tabuletas de argila provenientes do período babilônico antigo (1990 a 1600 a.C.) é possível encontrar tabelas de números, incluindo, frações.

Entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares, desde as épocas dos pitagóricos, por exemplo, no Livro V dos Elementos de Euclides, era possível encontrar a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (aproximadamente 408 a 355 a.C.), que não só sugere a definição atual de igualdade de frações $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se ad = bc, como é muito próxima às definições de número real surgidas no século XIX.

Em que pesem todas as considerações feitas até aqui, encontramos a noção da fração (representando uma medida ou uma quantidade) em diversas civilizações, porém, a maneira de representá-la é diferente.

Nesse contexto, observamos que, nos séculos XI e XII, se de um lado a aritmética indo-arábica produzia um sistema de numeração e de escrita de frações, no qual o numerador era colocado sobre o denominador; por outro lado, as tradições judias exprimiam as frações por intermédio de uma linguagem retórica, como quantidades de partes de unidades originadas dos pesos e medidas.

Na segunda metade do século XV, a principal linha de desenvolvimento da matemática passa pelo crescimento das cidades mercantis sob a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura: a grande Era voltada às navegações e descobertas.

Assim, as frações passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas e os tipos de representação e conceitos da antiguidade foram aperfeiçoados e adaptados às soluções dos problemas da época.

As frações com numeradores maiores que o inteiro aparecem somente a partir do século XVI, representação essa já bem próxima das contidas nos livros dos séculos XIX e XX, com expressão de divisão. A notação moderna deve-se aos hindus pela sua numeração decimal de posição e aos árabes que inventaram a famosa barra horizontal, separando o numerador do denominador.

Em suma, neste breve relato histórico, pudemos observar que do ponto de vista histórico para a formação conceitual das frações, os grandes "*insights*" vão da pré-história até a Idade Média. Após esse período, observamos que houve uma preocupação maior com o aperfeiçoamento da escrita e utilização de decimais.

Finalmente, a presença dos números em nossa vida diária é datada desde os tempos mais remotos, para ser mais preciso, está presente desde as primeiras tentativas do homem como um ser social.

Os números, em geral, estão inseridos em diversos contextos, pois não poderíamos imaginar a existência desses sem a presença dos números: no comércio, nos horários, nos impostos, nas estatísticas, nas contagens, entre outros.

No mundo contemporâneo – a era da tecnologia – os números e suas operações são imprescindíveis na informatização. As novas ferramentas de trabalho – como calculadora e computador – surgem, como uma possibilidade de facilitar e libertar o homem das atividades mecânicas e repetitivas (cálculo e aplicação de fórmulas). Esta inovação, também, contribui, de maneira decisiva, para a abertura de novos caminhos que traz em seu bojo possibilidade da exploração conceitual que compreende as idéias envolvidas em cada criação matemática.

3.1.2 O objeto matemático

Como descrevemos na seção anterior, a necessidade de novos números foi sentida desde muito cedo na história da Matemática, sugerida, naturalmente, por problemas práticos. Seguindo esse raciocínio com a construção do conjunto dos números racionais isso não fora de maneira diferente.

Nesse sentido, tomaremos para o início da nossa discussão, a respeito da construção dos números racionais, as idéias apresentadas por Caraça (1998), quando enfatiza que nem sempre é possível comparar dois segmentos de tamanhos diferentes e exprimir com um número inteiro a quantidade de vezes que um dado segmento cabe no outro.

Do fato, decorre a construção de um novo campo numérico que, segundo Caraça (1998) é construído levando em consideração três aspectos:

(a) o princípio da extensão, leva-nos a criar novos números por meio dos quais se pode exprimir a medida de dois segmentos;

(b) a análise da questão mostra que a dificuldade reside na impossibilidade da divisão exata em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor;

(c) o princípio da economia: com os novos números são abrangidas todas as hipóteses de medição; estes novos números sempre são reduzidos aos números inteiros quando o dividendo for múltiplo do divisor.

Nesse contexto Caraça (1998) define números racionais da seguinte maneira: dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que cada um contém o número inteiro de vezes o segmento *u:* $\overline{AB}$ contém *m* vezes e $\overline{CD}$ contém *n* vezes o segmento *u.* Diz-se, por definição que a medida do segmento $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$ como unidade, o número $\frac{m}{n}$, escreve-se:

1) $\overline{AB} = \frac{m}{n} \mathbf{.} \overline{CD}$ quaisquer que sejam os números inteiros *m* e *n* (*n* não nulo); se *m* for divisível por *n,* o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se *m* não for divisível por *n*, o número $\frac{m}{n}$ diz-se *fracionário.* O número $\frac{m}{n}$, em qualquer hipótese, diz-se racional – ao número *m* chama-se *numerador* e ao número *n* *denominador*. Em particular, da igualdade

$\overline{AB} = \frac{m}{n} \,.\, \overline{CD}$ resulta que,

2) $\frac{n}{1} = n$ visto que, se $\overline{AB} = n \,.\, \overline{CD}$, é também $\overline{AB} = \frac{n}{1} \,.\, \overline{CD}$ em que,

3) $\frac{n}{n} = 1$ porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n} \,.\, \overline{AB}$ são equivalentes.

No entanto, para ficar completo o conhecimento do campo dos números racionais torna-se necessária uma fundamentação teórica rigorosa do ponto de vista da Matemática, como ciência. Dessa forma, argumentaremos que o conjunto dos números racionais possui uma estrutura de corpo comutativo ordenado, conforme Ávila:

> Um corpo (comutativo) é um conjunto não vazio *C*, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, cada uma delas fazendo corresponder um elemento de *C* a cada par de elementos de *C*, as duas operações estando sujeitas aos axiomas de corpo. A soma de *x* e *y* de *C* é indicada por *x* + *y* e a multiplicação de *x* e *y* é indicada por *xy*. (ÁVILA, 1999, p.15)

Nesse sentido, os axiomas de corpo do conjunto dos números racionais são:

1) Associatividade

Dados quaisquer *x*, *y,* z $\in$ *C*,

(x + y) + z = x + (y + z) em relação à adição, isto é, podemos associar as parcelas. No caso das frações, dados *a, b, c, d, e* e *f* $\in$ Z com *b, d* e *f* $\neq$ 0, temos:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$(xy)z = x(yz)$ em relação à multiplicação, isto é, podemos associar os fatores. No caso das frações, dados *a, b, c, d, e* e $f \in$ Z com *b, d* e $f \neq 0$, temos:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

2) Comutatividade

Quaisquer que sejam $x, y \in C$,

$x + y = y + x$ em relação à adição, isto é, podemos comutar a ordem das parcelas. No caso das frações, dados *a, b, c* e $d \in$ Z com *b* e $d \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$xy = yx$ em relação à multiplicação; isto é, podemos comutar a ordem dos fatores. No caso das frações, dados *a, b, c* e $d \in$ Z com *b* e $d \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

3) Distributividade da multiplicação em relação à adição

Quaisquer que sejam $x, y, z \in$ C,

$x\,(y + z) = xy + xz$, isto é, dados *a, b, c, d,* e $f \in$ Z, com *a, b, c, d,* e $f \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{ae}{bf}$$

4) Existência do Zero

Existe um elemento em C, chamado “Zero” ou “elemento neutro”, indicado pelo símbolo 0, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in$ Z. No caso das frações, dados *a, b* $\in$ Z, com $b \neq 0$ temos que:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

5) Existência do elemento oposto

A todo elemento $x \in$ C corresponde um elemento x' tal que $x + x' = 0$. Esse elemento x' que se demonstra ser único para cada x, é indicado por $-x$. No caso das frações, dados a e $b \in$ Z, com $b \neq 0$ temos que:

$$\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$$

6) Existência do elemento unidade

Existe um elemento em C designado "elemento unidade" e indicado com o símbolo "1", tal que $1 . x = x$, para todo $x \in$ C. No caso das frações, dados a e $b \in$ Z, com $b \neq 0$ temos que:

$$1 . \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

7) Existência do elemento inverso

A todo elemento $x \in$ C, $x \neq 0$ corresponde um elemento $x'' \in$ C tal que $x . x'' = 1$, que se demonstra ser único para cada x, e é indicado com x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. No caso das frações, dados a e $b \in$ Z*, temos que

$$\frac{a}{b} . (\frac{a}{b})^{-1} = 1$$

Ainda, o Conjunto dos Números Racionais é um corpo ordenado, pois nele existe um subconjunto P, denominado conjunto dos elementos positivos, tal que:

a) a soma e o produto de elementos positivos resulta em elementos positivos;

b) dado $x \in$ C, ou $x \in$ P, ou $x = 0$, ou $-x \in$ P.

Nota: Dados $a, b \in$ Z com $b \neq 0$ temos que:

$$\frac{a}{b} \in \text{C, ou } \frac{a}{b} \in \text{P, ou } \frac{a}{b} = 0\text{, ou } -\frac{a}{b} \in \text{P}$$

Seguindo o raciocínio que o conjunto dos números racionais é um corpo comutativo e ordenado, poderíamos afirmar que a ordenação estabelece-se dando as definições de igualdade e desigualdade.

No que se refere à igualdade, define-se da seguinte maneira: dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais, quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial.

Como conseqüência, o número $s = \frac{p}{q}$ pode não ter o mesmo numerador e denominador que $r = \frac{m}{n}$, visto que cada uma das n partes iguais em que a unidade é dividida pode, por sua vez, ser subdividida em k partes, sendo k qualquer. Conclui-se que – dado um número racional $r = \frac{m}{n}$, todo número racional $s = \frac{p}{q}$ onde $p = m \,.\, k$, $q = n \,.\, k$ (k inteiro qualquer não nulo), é igual a r.

Façamos os produtos $m \,.\, q$ e $p \,.\, n$; tem-se que $m \,.\, q = mnk$ e $pn = mnk$, donde $mq = pn$; a definição de igualdade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \longleftrightarrow m \,.\, q = p \,.n$$

Assim, podemos traduzir essa igualdade, como sendo: $m \cdot q = p \cdot n$ leva $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ e reciprocamente, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ leva $m \cdot q = p \cdot n$. Decorre desse fato o seguinte enunciado: o número racional não se altera quando multiplicamos ou dividimos o seu numerador ou seu denominador pelo mesmo número natural.

Decorre do exposto acima, a propriedade da redução ao mesmo denominador, que permite efetuar sempre a redução de dois números racionais ao mesmo denominador. Dados $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, podemos escrever

$$r = \frac{m.q}{n.q} \text{ e } s = \frac{p.n}{q.n}$$

No que diz respeito à desigualdade entre dois números racionais *r* e *s*, por definição, diz-se maior é aquele que, com o mesmo segmento de unidade, mede um segmento maior. Por conseqüência, se dois números têm o mesmo denominador, será maior (menor) o que tiver maior (menor) numerador;

a) se dois números têm o mesmo numerador, será maior (menor) o que tiver menor (maior) denominador;

c) se dois números não têm o mesmo numerador, nem o mesmo denominador, reduzem-se ao mesmo denominador e comparam-se em seguida: dados

$$r = \frac{m}{n}, \; s = \frac{p}{q}, \text{ tem-se}$$

$$r = \frac{m.q}{n.q}, \; s = \frac{n.p}{n.q}, \text{ donde}$$

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \longleftrightarrow m \cdot q > n \cdot p$$

Em suma, dizemos que um número racional *r* é menor do que outro número racional *s* se a diferença *r* – *s* é positiva. Quando esta diferença *r* – *s* é negativa, dizemos que o número *r* é maior do que *s*. Para indicar que *r* é menor do que *s*, escrevemos: $r < s$.

Do ponto de vista geométrico, um número que está à esquerda é menor do que um número que está à direita na reta numerada.

Na próxima seção, apresentaremos a fração sob a ótica das pesquisas em Educação Matemática, bem como uma revisão de estudos correlatos com nossa pesquisa.

3.2 FRAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Entre vários pesquisadores, existe um consenso de que a construção do conceito do número racional e, especialmente, o conceito de fração não ocorre de maneira natural. Uma abordagem que, de fato, leve à construção de maneira significativa desse conceito matemático, deverá contemplar um conjunto de situações que dê sentido a esse objeto matemático.

Para tanto, as frações quando são aplicadas a problemas reais e analisadas do ponto de vista pedagógico, assumem várias “interpretações”. Nesse sentido, encontramos diversos educadores matemáticos, cujos estudos caminham nessa direção.

Kieren (1976) foi pioneiro em introduzir a idéia de que números racionais consistem em vários constructos; assim, para a compreensão da noção de número racional torna-se necessário um claro entendimento da confluência desses constructos. O referido autor sugere em seu trabalho que a compreensão desses diversos constructos é necessária para obter um completo entendimento da natureza do número racional. Em sua lista de constructos, Kieren (1976) analisa sete interpretações para os números racionais:

- Os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas;
- Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais;
- Os números racionais são classes de equivalência de frações;
- Os números racionais são números da forma $\frac{a}{b}$ onde *a* e *b* são inteiros e $b \neq 0$;
- Os números racionais são operadores multiplicativos;
- Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito, isto é, há números da forma $x = \frac{a}{b}$ onde *x* satisfaz a equação $bx = a$;
- Os números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numérica.

Posteriormente, Kieren analisa os números racionais por meio de cinco idéias que considera básicas:

- Relação parte-todo;
- Quociente;
- Medida;
- Razão;
- Operador.

Esse mesmo autor em seu artigo, Personal Knowledge of Rational Numbers, Kieren (1988), retoma a discussão apresentando um modelo teórico de construção do conhecimento matemático relacionando-o, especificamente, ao conhecimento de numero racional. Um dos aspectos de sua teoria é a suposição da existência de uma rede ideal de conhecimento pessoal de número racional que consiste em seis níveis (KIEREN, 1988).

O primeiro, o nível mais primário, contém constructos que são mais locais e próximos ao nível de fato. O segundo nível compreende constructos de partição equivalência e formação de unidades divisíveis. Os quatro constructos de números racionais, medida, quociente, número proporcional e operador formam um terceiro nível. No quarto nível, Kieren (1988) pressupõe conhecimento de relações funcionais e escalares, dos quais o constructo mais formal de fração e equivalência de número racional depende. No quinto nível o autor sintetiza os constructos de números racionais e relaciona noções para gerar o constructo geral do campo conceitual multiplicativo. E, por fim, essa rede de estrutura de conhecimento é completada pelo conhecimento de números racionais, como um elemento de um campo infinito de quocientes.

De forma mais ampla Behr et al. (1992) propõe sete interpretações para as frações, chamadas por ele de subconstructos:

➢ O subconstructo da medida fracionária indica a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Eles propuseram isso, como uma reformulação da noção parte-todo.

➢ O subconstructo razão, embora o autor não esclareça as idéias inerentes a esse subconstructo.

➢ O subconstructo taxa define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. No entanto, precisamos fazer distinção entre taxas e razões. Essa distinção decorre do fato que as primeiras são possíveis de serem somadas ou subtraídas, ao passo que as razões não o são.

- O subconstructo quociente vê o número racional como resultado de uma divisão;

- O subconstructo das coordenadas lineares que interpreta o número racional como um ponto na reta numérica, isto é, os números racionais formam um subconjunto dos números reais; as propriedades associadas à topologia métrica da reta numerada racional estão entre a densidade, distância e não completividade;

- O subconstructo decimal enfatiza as propriedades associadas a nosso sistema de numeração;

- O subconstructo operador vê a fração como uma transformação.

Parece que essas interpretações propostas por Behr et al. (1992) são vistas como uma tentativa de contemplar e expandir as idéias proposta por Kieren (1988).

Nesse contexto, outra análise que consideramos importante, foi a análise apresentada por Ohlsson (1989) que examina os números racionais, levando em consideração quatro interpretações.

- $\frac{a}{b}$ é uma comparação em que *a* e *b* são quantidades e que uma é descrita em relação à outra;

- $\frac{a}{b}$ é uma partição em que a é uma quantidade e b é um parâmetro. O numerador é operado em um caminho que é denominado pelo denominador;

- $\frac{a}{b}$ corresponde à idéia de operações compostas, parâmetro e quantidade. O numerador é o multiplicador e o denominador é um divisor aplicado à mesma quantidade;

- O quarto caso é parâmetro / parâmetro, que não é interpretado nessa análise.

Todos os trabalhos que citamos apontam para um considerável avanço no que diz respeito a uma semântica das frações, pois podemos observar que existe uma concordância entre os estudos aqui citados de que quociente, razão, operador e alguma versão da relação parte-todo são conceitos centrais.

Todavia, as análises aqui apresentadas não são fáceis de serem conciliadas. A primeira razão é que elas diferem em relação aos objetos da análise: frações X números racionais; e uma segunda razão, os critérios usados para fazer as distinções dentro de cada análise não têm sido especificados.

3.2.1 Estudos correlatos

Nessa seção, apresentaremos a revisão de literatura focalizando alguns estudos que consideramos relevantes, cujos resultados contribuirão efetivamente para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Nesse sentido, os estudos que fazem parte da presente revisão, têm como enfoque principal a aquisição do conceito de número racional.

Os estudos realizados por Nunes e seus colaboradores contemplam resultados significativos de como se dá a compreensão dos conceitos matemáticos em crianças. Embora estes pesquisadores tratem em seus estudos, tanto de conceitos concernentes às estruturas aditivas como às multiplicativas, ater-nos-emos ao campo das estruturas multiplicativas, especialmente, ao conceito de fração.

Nunes; Bryant (1996), afirmam que com as frações as aparências podem ser tão enganosas, sendo possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações sem que ninguém perceba, pois, às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações, usando os termos fracionais corretamente, falando sobre frações de modo coerente, resolvendo alguns problemas fracionais, mesmo assim certos aspectos essenciais das frações ainda lhes escapam.

Nesse sentido, Nunes; Bryant (1996) alegam que essa falsa impressão de que as crianças têm algum domínio do conceito de fração, pode estar associada à forma com que esse conteúdo lhes é apresentado – todos divididos em partes. Assim, as crianças são informadas de que o número total de partes é o denominador e as partes (pintadas), o numerador. Agregados a isso são fornecidos às crianças algumas instruções sobre poucas regras de calcular que permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração sem, contudo, compreender o significado desse novo tipo de número.

Nesse contexto, Nunes, Bryant (1996) retomam pesquisas relevantes, cujos resultados confirmam a suspeita de que as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza. De fato, estes estudos servem como uma advertência dos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em frações. Dentre os estudos, destacam-se os realizados no Brasil por Campos et al. (1995), e na Inglaterra por Kerslake (1986).

Nunes; Bryant (1996) sugerem que existe uma conexão entre divisão e fração, ficando, especialmente, clara quando se pensa em um tipo de problema envolvendo quantidades contínuas, pois se pensarmos em um problema como, por exemplo, três barras de chocolate divididas para quatro pessoas, o resultado da divisão será fração. Esta conexão não é acidental, faz referência a uma análise matemática de números racionais feita por Kieren (1988), ao sugerir que as frações são números produzidos por divisões e que, portanto, são números do campo dos quocientes.

Diante de tal reflexão, Nunes; Bryant (1996) argumentam que, se isso estiver certo, então, deveremos buscar a origem da compreensão do conceito de fração nas crianças, em contextos que propiciem situações de divisão.

Neste cenário, como poderíamos praticar um ensino que desse conta de levar as crianças à compreensão do conceito de fração? Nunes, Bryant (1996) argumentam que de fato, há uma lacuna entre a compreensão que as crianças têm das propriedades básicas de frações e as tarefas resolvidas nos contextos das avaliações educacionais. Assim, afirmam:

> ... quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais elas vêem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola, concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação-problema. (NUNES; BRYANT, 1996, p.212)

Para ilustrar a situação, a autora faz referência a um estudo realizado por Mack (1993), com estudantes de 6ª série nos Estados Unidos, cuja técnica consistiu em apresentar às crianças os mesmos problemas alternadamente, como situações que elas poderiam encontrar na vida cotidiana e como problemas simbólicos ou vice-versa. A pergunta de tal situação era a seguinte: "*suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em seis pedaços de tamanhos iguais e a outra em oito pedaços de tamanhos iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, de qual você ganhará mais?*" Foi seguida pela pergunta “diga-me que fração é maior, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{8}$?”. Mack (1993), citada em Nunes; Bryant (1996, p.212), observaram que os estudantes tiveram sucesso nas situações de vida cotidiana, contudo nas situações em que se depararam com problemas simbólicos, apresentaram muitas dificuldades - resposta por meio de algoritmos falhos ou comparações inadequadas. Por exemplo, ao comparar $\frac{1}{8}$ com $\frac{1}{6}$, muitos estudantes alegaram que $\frac{1}{8}$ era maior que $\frac{1}{6}$, pois 8 é maior que 6.

Nesse contexto, Mack (1993) afirma que a desconexão feita pelas crianças entre a compreensão da divisão e fração desenvolvida fora da escola e as representações simbólicas aprendidas na escola deve-se à forma que este conteúdo é introduzido na aprendizagem das crianças e poderia ser possível superar esta lacuna: “*movendo-se para trás e para frente em seu conhecimento desenvolvido fora da escola e as representações simbólicas, os alunos deveriam vir a compreender quais conexões têm de ser feitas*”.(Nunes; Bryant, 1996. p. 213).

Em seus estudos, realizados na Inglaterra com 1.000 crianças na faixa etária entre 11 e 15 anos, Kerslake (1986) investigou com profundidade uma série de problemas trabalhados com alunos, analisando suas estratégias de resolução e seus erros, sendo que alguns desses problemas envolviam o conceito de fração.

Na busca de encontrar informações a respeito dos caminhos, pelos quais os alunos pensam sobre as frações, o estudo possibilitou observar três aspectos que emergiram dos dados obtidos. O primeiro aspecto referia-se se os alunos eram capazes de pensar frações como números ou se eles pensavam que a palavra “número” implicaria somente a números inteiros.

O segundo e terceiro aspectos possibilitaram a descoberta de que modelos de frações as crianças dispunham e como as crianças visualizavam a idéia de equivalência.

Kerslake (1986) propôs, entre outros, um mesmo problema de dois diferentes modos: com contexto e sem contexto. O problema sem contexto pedia aos alunos a resolução de 3 : 5, e o problema com contexto foi: “Três barras de chocolate foram divididas igualmente para cinco crianças. Quanto cada uma recebeu?” A pesquisadora constatou que, aproximadamente, 65% dos alunos tiveram sucesso no problema com contexto, ao passo que no problema sem contexto o índice de sucesso foi significativamente menor.

A autora analisa algumas dificuldades apresentadas pelos alunos em conceber 3:5 (sem contexto) como sendo $\frac{3}{5}$. A pesquisadora argumenta que tal dificuldade pode estar relacionada ao fato de que os alunos não conectam a divisão (3:5) à representação fracionária $\frac{3}{5}$. Além disso, ela observa que um número relativamente grande de aluno interpreta 3:5 como 5:3.

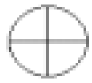
Nas observações das frações e números inteiros, notou-se que, quando se perguntava aos alunos “Quantas frações se escondem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?” Eles respondiam: “Uma”, referindo-se a $\frac{1}{3}$. Dessa forma, pode-se concluir que os alunos observam apenas os denominadores das frações e não se dão conta das frações existentes entre elas, ou seja, entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Em seus estudos, Kerslake (1986) observou ainda, durante as entrevistas, que o diagrama com freqüência ajuda na resolução de determinados problemas como, por exemplo, entender a fração com parte de um todo por meio de um círculo dividido em partes iguais e sombreado algumas delas.

No entanto, o uso de diagramas no modelo parte-todo nem sempre possibilita a visualização imediata de determinadas situações como, por exemplo $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Nessa situação, são necessárias outras divisões da mesma figura para sua compreensão.

A autora frente a essas evidências, baseada nas idéias de Kieren (1988), argumenta que o conceito de número racional é diferente de número natural, uma vez que eles não fazem parte do meio natural dos alunos e as diversas interpretações de número racional resultam em uma variedade de experiências necessárias.

Assim, conclui que o entendimento dos números racionais, como elemento do campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Nesse sentido, há necessidade de se estender o modelo parte-todo e incluir o aspecto quociente da fração e finaliza citando que as frações representadas como pontos sobre a reta numerada podem ser discutidas.

Uma das questões propostas era: “Aqui estão três doces. Há quatro crianças que desejam a sua parte. Como você pode fazer?” Os alunos dividem os três doces para quatro pessoas, mas não se preocupam se as partes são iguais ou não. Na intenção de observar o processo de divisão realizado pelos alunos, avaliou-se que eles não fazem a conexão entre 3:4 e $\frac{3}{4}$. Só um aluno teve mais dificuldade e traçou três retas sobre as três bolas (doces), os demais desenharam uma cruz sobre cada bola. Quando perguntaram a esse aluno que traçou três retas sobre as três bolas, se todos os pedaços tinham o mesmo tamanho, ela respondeu: “O desenho não está muito correto.” Ela não pensou na maneira de como fazer, mas, quando lembrou do modelo  realizou a divisão de forma mais adequada que a anterior.

A estratégia utilizada por onze alunos de criar um desenho representando a situação, ou seja, os três doces que seriam repartidos e as quatro crianças, distribuindo pedaço por pedaço para cada uma delas.

Em seus estudos, Kerslake (1986) encontrou, também, evidências da falta de compreensão dos alunos sobre a equivalência de frações, mesmo quando eles tiveram sucesso em algumas situações que envolviam a equivalência de frações.

Conforme os estudos apontam, embora os alunos tivessem apresentado um bom desempenho nos itens de equivalência que ela apresentou, eles não necessariamente encontraram frações equivalentes com o mesmo objetivo de efetuar a adição e somavam frações com denominadores diferentes, por exemplo $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ deram como resultado $\frac{5}{7}$.

Desse modo, a autora afirma que, embora alguns alunos tenham transformado as frações em frações equivalentes com o mesmo denominador, parecem não perceber a conexão entre equivalência de fração e adição.

Finalmente, Kerslake (1986) em seus estudos encontrou evidências consideráveis para constatar que o único modelo de fração, com o qual os alunos sentiram-se confortáveis e familiarizados, foi de fração como parte de um todo. A familiaridade com o modelo parte-todo dificultou o entendimento do aspecto de divisão ou distribuição, isto é, por exemplo, a fração $\frac{a}{b}$ pode ser vista como sendo coisas "*a*" distribuídas entre pessoas "*b*". Mesmo que esse aspecto (divisão) apareça com freqüência em livros-texto e é base para o método utilizado para transformar fração em decimais, os alunos foram muito relutantes para reconhecer quaisquer conexões entre $\frac{a}{b}$ e $a : b$.

Campos citada por Nunes (1996), em seus estudos no Brasil, foi capaz de mostrar de modo claro que a introdução da fração pelo modelo parte-todo, simplesmente, induz os alunos a aplicar um procedimento de dupla contagem sem necessariamente entender o significado da fração. Desse modo, Campos trabalhou com um grupo de alunos com idade aproximada de 12 anos que haviam aprendido o procedimento de dupla contagem, pedindo-lhes que nomeassem as frações em três situações.

Na primeira situação, a autora utilizou um modelo bem próximo daquele que os alunos habitualmente aprendem em sala de aula. Mostrou uma figura, cujo todo foi dividido em partes iguais, sendo que as partes pintadas eram contíguas.

A segunda situação era menos típica em relação aquelas trabalhadas em sala de aula; apresentava como na primeira situação um todo dividido em partes iguais, mas as partes pintadas não eram contíguas. A terceira situação não retratava uma situação típica de sala de aula, pois o todo não estava explicitamente dividido em partes iguais e a região pintada da figura tinha de ser descoberta pelos alunos com base em uma análise da relação parte-todo. A figura 3.1 apresenta as três situações propostas por Campos:

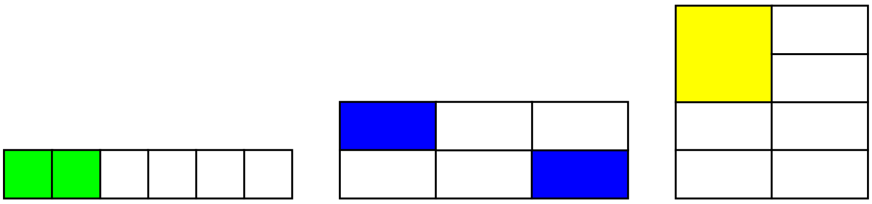


Figura 3.1: Situações propostas por Campos (citada por Nunes, 1996, p.193)

Os resultados obtidos dos estudos apontaram, para as situações 1 e 2, um desempenho bem próximo do “teto”, embora alguns alunos tenham se apoiado no procedimento de dupla contagem, nomearam as frações contando as partes pintadas para o numerador e as partes não pintadas para o denominador.

Com relação à terceira situação, o desempenho dos alunos foi significativamente inferior aos demonstrados nas situações 1 e 2, pois ao apoiarem suas estratégias de resolução no procedimento de dupla contagem, 56% dos alunos escolheram $\frac{1}{7}$ como a fração correspondente.

Os resultados dos estudos de Campos citada por Nunes (1996) confirmam a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

Em seus estudos, Pothier e Sawada (1990) investigaram a respeito da partição, tanto em figuras geométricas quanto em grupos de objetos, como uma aproximação para o conceito de fração. Os autores apontam que os livros-texto limitam o uso de modelos físicos para um trabalho introdutório para as frações, esses autores evidenciam que os alunos completam os exercícios, sem que necessariamente atentem para as propriedades geométricas de tais figuras (inteiro) ou das partes e, normalmente, nomeiam de frações para partes não iguais de um inteiro.

Assim Pothier; Sawada (1990) argumentam que os exercícios baseados em diagramas de figuras previamente repartidas, os quais os alunos usam para identificar várias frações ou para representá-las, colorindo o número determinado de partes, podem representar parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos no trabalho com o conceito das frações.

Kieren (1976) com objetivo de compreender as estratégias que crianças e adolescentes utilizam para resolver as situações, nas quais os números racionais aparecem como operadores, bem como se existiam estágios de desenvolvimento quanto ao significado número racional como operador, realizou uma pesquisa com 45 sujeitos distribuídos de 4ª a 8ª séries.

Os resultados do estudo podem evidenciar a existência de três níveis de desenvolvimento relacionados à fração como operador. No primeiro nível, há uma concepção fracionária, por parte das crianças, que é denominada pelo operador $\frac{1}{2}$ ou metade. No segundo nível, chamado intermediário, os sujeitos conseguem manipular os operadores unitários ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$) e os compostos ($\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$). Mas, só no terceiro nível é que se tem habilidade para manipular a composição com todas as formas de operador. Os resultados do estudo apontaram também que os sujeitos utilizam-se da estratégia de partição para controlar as situações de frações como operador.

Com o objetivo de avaliar os efeitos de um trabalho de um ensino de frações, Tinoco; Lopes (1994) elaboraram uma proposta de ensino que contemplava situações didáticas que visava minimizar o impacto das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem do conceito de fração.

O estudo foi realizado com um grupo de 101 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de escolas municipais e outro grupo formado por 30 alunos do 1º ano do curso de formação de professores “primários” (CFP), pertencentes a escolas estaduais, ambas do Rio de Janeiro.

Na proposta de ensino, a ênfase dada era centrada em três aspectos: (a) a construção do conceito de fração pelo aluno como um número; (b) a exploração do conceito de fração em conjuntos discretos e (c) a noção de frações equivalentes como representações da mesma quantidade. Os sujeitos foram submetidos a um pré-teste e um pós-teste, além de entrevistas.

Da análise qualitativa dos dados obtidos, as autoras ressaltam alguns tipos de resolução. Na questão típica de fração em conjunto discreto, foram encontrados dois tipos de estratégia de resolução. “Silvia ganhou $\frac{3}{4}$ dessas balas. Pinte as balas que ela ganhou.” Abaixo do enunciado da questão desenhou 16 balas iguais.

A primeira estratégia identificada foi a de fazer cálculo, isto é, contar o total de balas determinando $\frac{3}{4}$ de 16 e pintando 12 balas, sem fazer agrupamentos.

Uma segunda estratégia identificada foi o agrupamento das balas em 4 grupos iguais e pintando 3 deles.

A terceira estratégia foi a de formar grupos de 4 balas e em cada um deles pintando 3 das balas. Esta última estratégia é completamente diversa daquela utilizada com as frações em conjuntos contínuos, mais relacionada com as razões.

Em outra questão enfocando a noção de frações equivalentes, o estudo propôs a seguinte questão: “$\frac{2}{7} \quad \frac{\square}{14} \quad \frac{10}{\triangle}$. Qual o valor do quadrado? Qual o valor do triângulo?”

As autoras levantaram como hipótese para essa questão que a dificuldade residia na presença da fração intermediária. Essa hipótese foi confirmada na entrevista, visto que o aluno afirmou que o quadrado era 4 e o triângulo ele não sabia qual o valor. Ao tampar a fração intermediária, as autoras refizeram a pergunta, obtendo a resposta 35. Esta evidência sugere, segundo as autoras, que os alunos não estão familiarizados com a transitividade da equivalência e que essa dificuldade pode ser superada no processo de ensino, com situações que levem o aluno, por exemplo, a obter uma fração equivalente a $\frac{3}{15}$ com denominador 10.

Com relação às questões envolvendo ordenação de frações, os critérios usados pelos alunos, basearam-se em três estratégias: (1) frações com o mesmo numerador; (2) frações com o mesmo denominador e (3) frações com numeradores e denominadores diferentes. Nesse último caso, os alunos recorrem ao uso de diagramas.

Em suas conclusões, as autoras evidenciam que, em relação ao pré e ao pós-teste houve uma diminuição significativa das respostas em branco, o que denota um maior encorajamento dos alunos para atacar os problemas; uma melhora sensível nas questões de conceitualização e equivalência.

Por outro lado, foi constatado que alguns tipos de erro persistiram, sugerindo que a maioria deles é obstáculo epistemológico ou vício adquirido em sala de aula.

Nos estudos realizados por pesquisadores do Programa de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (PROEM), sob a orientação de D'Ambrósio (1989), com o objetivo de analisar a concepção dos alunos, quanto ao conceito de fração, foi feita uma investigação com 76 alunos com idades entre 9 e 12 anos, cursando as 4ª e 5ª séries do Ensino Fundamental de três escolas particulares da cidade de São Paulo.

Para a realização do estudo, os pesquisadores aplicaram um teste seguido de entrevista. O teste continha questões convencionais (tratadas nos livros didáticos) e situações novas. Cada questão foi analisada e discutida individualmente.

Os resultados apontam algumas dificuldades dos alunos para trabalhar com o conceito de fração; conforme são retratadas, por exemplo, pela confusão que os alunos fizeram com os significados de numerador e denominador (ora o numerador era o número total de partes, ora era o número de elementos). Outra dificuldade diz respeito ao mecanismo de contagem de elementos (muito usado em quantidades discretas) que, na tentativa de transferir esse tipo de procedimento para quantidades contínuas, os alunos cometem o equívoco de não relacionar as partes entre si levando em consideração suas áreas. Os resultados apontam que os alunos demonstram facilidade ao lidar com frações com numerador 1.

Os pesquisadores do PROEM explicitam ainda em suas conclusões que, tanto o currículo como a metodologia empregados tornam o ensino deficiente, e a formação do professor é cada vez mais inadequada à educação. Pontuam ainda que as dificuldades dos alunos de 4ª e 5ª séries não se reduzem a essa etapa de escolarização, mas também se estendem a alunos de séries mais avançadas e, até mesmo, são encontradas no curso de pedagogia.

Finalmente, os pesquisadores chamam a atenção para os erros cometidos pelos alunos, pois esses erros devem ser encarados como indicadores das concepções e construções dos próprios alunos, ao invés de valorizar respostas e interpretações corretas visando apenas o “sucesso” na vida escolar.

Em seus estudos com futuros professores, Silva (1997) teve como objetivo investigar as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração nas concepções parte-todo, medida e quociente.

A finalidade desse estudo era possibilitar aos futuros professores das séries iniciais uma reflexão sobre os principais pontos da introdução do número fracionário no ensino, levando-os a trabalhar com diversas concepções do conceito.

Para realização de seus estudos Silva (1997) elaborou uma seqüência didática baseada na metodologia de pesquisa Engenharia Didática.

Assim, com base nos resultados obtidos a autora citada constatou que, com relação aos aspectos didáticos, confirmando os resultados de Kieren (1988) e Campos (1995), a concepção dos professores ao associar a fração a uma figura, essa deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, considerando a área e a forma dessa figura. Esta necessidade é estabelecida pelo uso da dupla contagem das partes na identificação da fração, ao mesmo tempo em que conduz a idéia, conforme denominou a autora, de “discretização do contínuo", pois a referência do inteiro inicial é substituída pelo número de partes conseguidas após a divisão.

Foi observada também a dificuldade dos professores perceberem o desenho e a divisão de figuras como suportes para a solução de algumas situações descritas no trabalho, cujas figuras aparecem previamente divididas. Houve relutância para perceber as várias maneiras com que se pode dividir mais do que um inteiro ao mesmo tempo.

SILVA (1997) destacou ainda a falta de entendimento do conceito de medição, o que dificultou efetuar medições com unidades não usuais; uma tendência ao uso de algoritmos, em detrimento de um trabalho construtivo com a representação de figuras, sobretudo nas operações de adição e subtração. Assim, independentemente do contexto, os futuros professores apresentaram, normalmente, decimais como os resultados das divisões, ao invés de perceberem a representação de um quociente por meio de uma fração.

Com relação aos obstáculos de origem epistemológica, a autora constatou que o conhecimento dos números naturais conduz à crença de que a adição e a subtração de frações seguem uma lógica análoga a dos números naturais, ou seja, basta somar os numeradores e os denominadores das frações envolvidos na operação. Observou que, o uso constante de nosso sistema métrico, representado exclusivamente por números decimais, dificultou a percepção das representações fracionárias.

Finalmente, apoiada nos resultados obtidos, a autora destaca como positivo o envolvimento dos futuros professores nas propostas, sem resistência a nenhuma discussão, o que levou a uma mudança de comportamento para quase todos os obstáculos apresentados.

No entanto, a autora observa que alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, apresentam raízes profundas, sugerindo a necessidade de um trabalho mais a longo prazo, para que essas raízes possam ser removidas e pudesse crescer novamente com mais força em outras direções.

Bezerra (2001) apresentou um trabalho com objetivo de investigar uma abordagem de ensino de frações, na qual pretendeu estudar a aquisição do conceito de fração e suas representações, apoiado em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras aos alunos.

Para tanto, o autor citado realizou seus estudos em uma classe de alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, considerando que o contato desses alunos com frações fosse inédito. Nesse sentido, abordou em sua seqüência de ensino as frações nas concepções parte-todo e quociente, contemplando tanto quantidade contínua como quantidade discreta.

Para validar seus estudos, Bezerra (2001) inicialmente aplicou um pré-teste para duas turmas, uma denominada Grupo Experimental (GE) e a outra denominada Grupo de Controle (GC).

No GE, o pesquisador utilizou 12 encontros, sendo dois para aplicação do pré e do pós-testes e dez encontros utilizados efetivamente para a aplicação da seqüência de ensino.

No GC, houve apenas a aplicação do pré e do pós-testes, sendo que, nesse intervalo de tempo, os alunos pertencentes a esse grupo não tiveram contato com esse conteúdo, pois o autor citado objetivou com esse grupo a observação se algum acréscimo significativo de aprendizagem poderia ter ocorrido de maneira informal, fora da escola.

Da análise dos resultados, Bezerra (2001) conclui que, embora as crianças tenham apresentado, após a intervenção, avanços cognitivos, ainda perduram alguns tipos de erros que ele relaciona em seis categorias:

- E_1 – relacionar parte-parte, em quantidades discretas ou contínuas.

Esse erro foi observado em uma relação do tipo parte-todo, na qual o aluno procedeu a contagem da parte destacada e, em seguida, fez a contagem das demais partes, esquecendo de relacionar o todo. Para exemplificar, Bezerra (2001) apresenta uma questão que mostra o desenho de três corações e que um deles foi pintado, cuja pergunta era: “Como você pode representar numericamente o coração pintado em relação a todos os corações?” A resposta obtida foi $\frac{1}{2}$, que é característica do E_1, ou seja, relacionar parte-parte.

- E_2 – relacionar todo-parte, em quantidades discretas ou contínuas.

Esse erro compreende a inversão das posições do numerador com o denominador.

- E_3 – representar uma fração utilizando somente números naturais.

Esse tipo de resposta, segundo o autor, evidencia que o aluno ainda não conseguiu operar com o novo conjunto numérico, assim, representa com o conhecimento anterior a nova situação, isto é, o conjunto dos números naturais.

- E_4 – considerar a palavra usada na leitura de uma fração como sendo a quantidade a ser assinalada.

Esse erro representa a ação do aluno, quando lhe foi solicitado que circulasse a quinta parte de um conjunto de dez elementos. O procedimento utilizado em tal situação foi circular cinco elementos do conjunto.

- E_5 – com quantidades discretas, centrar-se em única figura (observação da quantidade contínua) e desprezar as demais que compõem o todo.

Conforme o autor destaca, esse tipo de erro está relacionado ao procedimento do aluno frente a uma quantidade discreta, fixa-se em apenas uma figura e a considera como contínua, efetuando apenas a divisão dessa figura desprezando as demais.

- E_6 – realizar uma divisão de uma quantidade contínua, desprezando a conservação das áreas na figura e repartindo as partes, segundo um critério aleatório.

Bezerra (2001) conclui em seus estudos que um modo de introduzir os números fracionários seria baseado em situações que procurassem dar significado ao aluno.

Nesse sentido, a seqüência de ensino proposta pelo autor citado contempla, inicialmente, situações em que estão presentes o modelo quociente. No decorrer da intervenção, Bezerra (2001) apresenta situações com o modelo parte-todo; o autor entende que esse modelo é importante, mas não deve ser o único e tão pouco o início para o aprendizado dos alunos, pois ele parece oferecer uma barreira maior entre os números naturais e os fracionários.

Bianchini (2001) aplicou uma seqüência didática para o ensino dos números decimais, para alunos de 3ª série do Ensino Fundamental. Durante algumas atividades, os alunos confundiram a vírgula com o traço de fração, fazendo 1,9 igual a $\frac{1}{9}$. Os alunos pensaram que 1,9 era o mesmo que ter um inteiro dividido em nove partes e, assim, separam uma parte.

Diante do exposto, Bianchini sugere que é necessário trabalhar com alunos de forma que eles percebam que 1,9 corresponde a um inteiro e nove décimos, enquanto que $\frac{1}{9}$ representa um número menor que a unidade, pois o inteiro foi dividido em nove partes iguais e foi destacado uma delas. Destaca ainda que, a troca da vírgula pelo traço de fração é um erro comum no ensino dos números decimais.

Merlini et al (2005) realizaram um estudo que por teve por objetivo apresentar um estudo diagnóstico comparativo, realizado com 47 professores, sendo 21 deles atuando na 5ª série e 151 estudantes de 3ª, 4ª e 5ª séries, distribuídos em sete escolas da rede pública da cidade de São Paulo.

O estudo consistiu na investigação do ensino e aprendizagem do conceito de número racional em sua representação fracionária, com o emprego do significado quociente, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003).

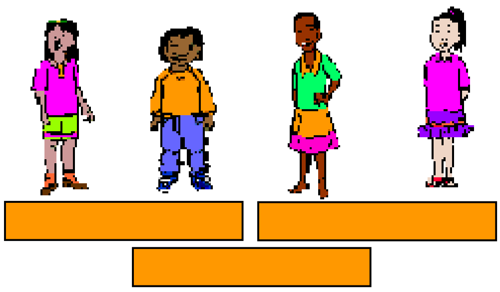
Aos professores foi solicitado que elaborassem, individualmente, seis problemas que contemplassem o conceito de número racional, na sua representação fracionária. Os professores da 5ª série elaboraram um total de 126 problemas porém, 110 desses puderam ser analisados, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). A diferença de 16 problemas corresponde aqueles que apresentavam falta de clareza no enunciado.

Dos 110 problemas, elaborados pelos professores, que foram analisados, 16 problemas (14,5%) contemplavam o significado Número; 35 (31,8%) contemplavam o Parte-todo; 3 (2,7%), o significado Quociente; 1 (0,9%) o significado Medida e 55 problemas (50%) o significado Operador Multiplicativo.

De acordo com esses dados, os autores entendem que existe a hipótese de uma forte tendência dos professores valorizar certos significados – Parte-todo e Operador multiplicativo – em detrimento de outros – Número, Medida e Quociente. É possível conjecturar que, a predileção pelo significado Operador multiplicativo pode estar relacionada à tendência dos professores preferirem trabalhar situações que utilizam o algoritmo, em detrimento de situações intuitivas.

Quanto aos alunos, estes foram submetidos a um teste envolvendo os cinco significados da fração, que foi aplicado coletivamente em cada uma das séries, cabendo aos alunos respondê-lo de modo individual. Para o efeito do referido estudo, só uma das questões foi discutida.

FORAM DIVIDIDAS IGUALMENTE PARA 4 CRIANÇAS, 3 BARRAS DE CHOCOLATE.



A) CADA CRIANÇA RECEBERÁ 1 CHOCOLATE INTEIRO? SIM ☐ NÃO ☐

B) CADA CRIANÇA RECEBERÁ PELO MENOS METADE DE UM CHOCOLATE?

SIM ☐ NÃO ☐

C) QUE FRAÇÃO DE CHOCOLATE CADA CRIANÇAS RECEBERÁ?

Figura 3.2: Situação proposta por Merlini et al.(2005).

Trata-se de uma questão, cujo significado envolvido é quociente, visto que é preciso dividir o número de chocolate pelo número de crianças para achar a fração que cada criança irá receber, $\frac{3(chocolates)}{4(crianças)}$.

O desempenho dos estudantes nos itens *a* e *b* foi um índice expressivo de acerto (acima de 85%). Cabe ressaltar que esses itens exigiam dos alunos apenas uma estimativa, se cada criança receberia um chocolate inteiro, ou pelo menos metade do chocolate. Com relação ao item *c*, constatou-se que os alunos, embora tenham compreendido a situação, mostraram dificuldade para expressar a fração do chocolate que cada criança receberia, a representação fracionária $\frac{3}{4}$.

Os percentuais de acerto nesse item foram: no grupo dos alunos de 3ª série, 24,6%; 4ª série, 21,2% e 5ª série, 10,8%. Observou-se uma queda do desempenho, tal resultado aponta para uma involução da representação fracionária, o que provoca o questionamento sobre a pouca valorização da escola aos conceitos intuitivos de seus alunos.

Para o fato do significado Quociente ter sido pouco explorado pelos professores na elaboração dos problemas, Merlini et al. (2005) argumentam que talvez eles também não devem trabalhar esse significado em sala de aula. Esse argumento possa talvez, justificar a queda do nível de acerto dos alunos.

Além disso, isto poderá ser um indicador de que, como o significado Quociente não é trabalhado no ensino das frações, a concepção intuitiva que o estudante apresentava no início do ensino de fração, na 3ª série, não é formalizada e, por conseqüência, vai se perdendo ao longo das séries subseqüentes, 4ª e 5ª séries.

3.3 FRAÇÃO NA ESCOLA

Nesta seção, descreveremos as recomendações feitas pelos PCN (1997), para a introdução do conceito de fração. Nesse sentido, iniciaremos nossa descrição baseada no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), já que é nessa etapa escolar que as frações são introduzidas.

Além disso, faremos uma descrição da abordagem contida em três coleções de livros didáticos em relação ao conceito de fração, no que se refere aos cinco significados da fração proposta por Nunes et al. (2003). Cabe salientar que nos ateremos apenas a dois dos livros de cada coleção, aqueles que correspondem a nosso universo de estudo, que são os alunos de 5ª e 6ª séries.

3.3.1 Fração e os PCN

Esta seção tem como proposta descrever as recomendações feitas pelos PCN (1997), para a introdução do conceito de fração. Assim sendo, iniciaremos nossa descrição baseada no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), pois é nesta etapa escolar que as frações são introduzidas.

Segundo os PCN (1997), a abordagem dos números racionais tem como objetivo principal levar os alunos a perceber que os números naturais, já conhecidos por eles, são insuficientes para resolver determinados problemas. Sendo assim, os PCN (1997) recomendam que a construção da idéia de número racional deve estar relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero.

No entanto, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com as idéias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais. Portanto, a aprendizagem dos números racionais demanda um certo tempo e uma abordagem adequada.

Dessa forma, sugerem que a introdução do estudo dos números racionais seja feita pelo seu reconhecimento no contexto diário. Nesse sentido, deve-se observar que eles aparecem no cotidiano das pessoas muito mais em sua representação decimal do que na forma fracionária. Sugerem, como um trabalho interessante, o uso da calculadora em atividades que os alunos são convidados a dividir 1 por 2, 1 por 3, 1 por 4, etc., no qual eles perceberão que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar números naturais, podem ser aplicadas para obter a escrita dos racionais na forma decimal, acrescentando-se ordens à direita da unidade e de forma decrescente.

Nesse cenário, podemos percebemos que os PCN (1997) sugerem a abordagem dos números racionais iniciando-se pela sua representação decimal, já que essa representação aparece com mais freqüência na vida cotidiana do aluno.

Quanto à representação fracionária dos números racionais, os PCN (1997) destacam que o contato dos alunos com essa representação é bem menos freqüente, pois limita-se a metades, terços, quartos, na maioria das vezes pela linguagem oral do que pelas representações.

De todo modo, esse documento pontua que a prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo. Nesse caso, a fração indica a relação que existe entre o número de partes e o total de partes. Outro significado das frações é a do quociente; baseia-se na divisão de um número natural por outro ($a:b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$).

Esta situação para o aluno diferencia-se da interpretação anterior (parte-todo), pois dividir “um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas”. (PCN, 1997, p.103).

Os PCN (1997) sugerem, também, uma terceira situação diferente das duas anteriores, aquela que a fração é usada como espécie de índice comparativo entre duas quantidades e uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão.

Podemos observar que além dessas três interpretações já descritas, acrescenta-se mais um significado da fração: operador, isto é, quando ela desempenha um papel de transformação, ou seja, algo que atua sobre uma situação e a modifica, sugerindo que esse quarto significado seja explorado nos ciclos posteriores.

Resumidamente, constatamos que os PCN (1997) sugerem que as frações sejam abordadas no segundo ciclo do Ensino Fundamental com os seguintes significados: relação parte-todo, quociente e razão e o outro significado, fração como operador, a ser trabalhado nos ciclos posteriores.

No segundo ciclo, a construção do conceito do número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo. Trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do Ensino Fundamental e consolidado nos dois ciclos finais.

Nos terceiro e quarto ciclos, a abordagem dos números racionais deve ter como objetivo levar os alunos a perceber que números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema, como as que envolvem medidas de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

Sob essa perspectiva, os PCN (1997) recomendam que, para abordar o estudo dos números racionais, dever-se-ia recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas, de forma a possibilitar bons contextos para seu ensino.

Nesse sentido, poderia ser discutido com os alunos, por exemplo, como os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles empregavam apenas frações unitárias, com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Assim, em uma situação em que precisam dividir, por exemplo, 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que, em nossa notação, pode ser expresso por: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Assim, os PCN (1997) sugerem que esse tipo de problema pode ser explorado e discutido com os alunos como, por exemplo, pedir aos alunos que mostrem que a soma acima indicada é $\frac{19}{8}$.

Observamos que os PCN (1997), no 3º e 4º ciclos, reforçam a idéia já sugerida para o ensino dos números racionais no segundo ciclo de que os números racionais assumem diferentes significados em diversos contextos: relação parte-todo, divisor e razão e acrescenta outras interpretações diferentes, tais como:

- O número racional usado como índice comparativo entre duas unidades, reforçando a idéia já explicitada anteriormente para o segundo ciclo;
- O número racional envolvendo probabilidades: a chance de sortear 1 bola verde de uma caixa, em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de $\frac{2}{10}$;
- O número racional explorado em contextos de porcentagem como por exemplo: 70 em cada 100 alunos de uma Escola gostam de futebol: $\frac{70}{100}$, 0,70 ou 70%, ou ainda, $\frac{7}{10}$, e 0,7;

- O número racional com o significado de um operador, já sugerido anteriormente, isto é, quando ele desempenha o papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

Os PCN (1997) pontuam que, na perspectiva do ensino, não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações, ou seja, a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo dos 3º e 4º ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações problema.

Finalmente, as recomendações feitas pelos PCN (1997) traduzem uma inovação para o ensino, se analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Essa inovação é traduzida pela ênfase dada por esse documento, ao ensino de fração com base na resolução de situações-problema, levando em consideração dois aspectos fundamentais – (a) os significados que a fração poderá assumir em cada situação; (b) as diferentes formas para sua representação.

3.3.2 A fração no livro didático

Esta seção tem como propósito fazer uma descrição da abordagem contida nos livros didáticos em relação ao conceito de fração, categorizando as questões apresentadas em cada volume, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). Além dos cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo, (capítulo 2, seção 2.2) serão observadas as variáveis de pesquisa – quantidades contínua e discreta; representações icônica e não icônica.

Para tanto, observamos três coleções de livros didáticos, cujo critério de escolha foi a acessibilidade.

Cabe salientar que os nossos sujeitos de pesquisa são alunos de 5ª e 6ª séries, portanto faremos a descrição dos livros referentes às 5ª e 6ª séries.

Os livros de 5ª e 6ª séries escolhidos fazem parte das coleções:

- Matemática e Realidade, cujos autores são: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, que denominaremos de Coleção A;
- Matemática para todos, cujos autores são: Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, que denominaremos de Coleção B;
- Matemática pensar e descobrir, cujos autores são: José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr., que denominaremos de Coleção C.

Iniciaremos a nossa descrição pela Coleção A, destacando o livro referente à 5ª série. O capítulo 16 inicia a abordagem do conceito de fração e tem como título: *O que é fração?* Abre o capítulo apresentando uma situação-problema utilizando um quebra-cabeça conhecido como Tangram. O conceito de fração é explorado em 60 páginas das 283 que há nesse volume.

A seguir apresentaremos a distribuição das questões encontradas na Coleção A da 5ª série que abordam os significados da fração com as variáveis de pesquisa:

Tabela 3.1: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidades contínua ou discreta, representações icônica ou não icônica – Coleção A 5ª série.

Signif. / Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	-	9	-	-	3	12
Cont.Não Icônica	11	9	4	-	17	41
Discreta Icônica	-	1	-	-	-	1
Discr.Não Icônica	-	8	-	-	20	28
Total	11	27	4	-	40	82

Os dados da Tabela 3.1 apontam que, dentre as 82 questões classificadas, 40 delas referem-se ao significado Operador multiplicativo. Segue o significado Parte-todo com 27 questões, Número com 11 questões e Quociente com 4 questões.

Apenas o significado Parte-todo apresenta questões que em todas as variáveis de pesquisa. O referido livro não apresenta questões que abordem os significados Quociente e Medida.

Dentre as variáveis de pesquisa a mais abordada foi a quantidade contínua com representação icônica.

Agora destacamos o livro referente à 6ª série. O capítulo 10, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem como título: *Os números racionais.* Apresenta uma situação-problema utilizando o significado quociente da fração indagando: “O que acontece quando dividimos um número inteiro por um outro número inteiro?” O conceito de fração é explorada em 31 páginas das 262 que há nesse volume.

Passaremos a apresentar a distribuição das questões encontradas na Coleção A da 6ª série que abordam os significados da fração com as variáveis de pesquisa:

Tabela 3.2: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidades contínua ou discreta, representações icônica ou não icônica – Coleção A 6ª série.

Signif. / Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	2	-	-	-	-	2
Cont.Não Icônica	21	-	16	-	23	60
Discreta Icônica	-	-	-	-	-	
Discr.Não Icônica	-	-	-	-	19	19
Total	23	-	16	-	42	81

Os dados da Tabela 3.2 mostram que, dentre as 81 questões classificadas, 42 delas referem-se ao significado Operador multiplicativo. Segue o significado Quociente com 16 questões, e Número com 23 questões.

Podemos perceber que, nesse volume as questões que abordam o significado Operador multiplicativo permanecem, assim como Número. Encontramos também que abordam o significado Quociente, mas somente na quantidade contínua não icônica.

Nesse volume, observamos que não aparecem questões que contemplam os significados Parte-todo e Medida. E a variável icônica só aparece no significado Número.

Descreveremos a Coleção B, destacando o livro referente à 5ª série. O capítulo 6, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem como título: *Frações e porcentagens.* Inicia o assunto demonstrando o uso das frações: na medida de uma ferramenta, uma placa que revela o valor de um quarto de quilo do alimento e uma manchete de jornal: “2/3 da população do município não têm rede de esgoto”. O conceito de fração é explorado em 36 páginas das 304 que há nesse volume.

A seguir apresentaremos a distribuição das questões encontradas na Coleção B da 5ª série que abordam os significados da fração com as variáveis de pesquisa:

Tabela 3.3: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidades contínua ou discreta, representações icônica ou não icônica – Coleção B 5ª série.

Signif. Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	-	6	1	-	5	12
Cont.Não Icônica	3	5	-	-	21	29
Discreta Icônica	-	1	-	-	1	2
Discr.Não Icônica	-	2	-	-	29	31
Total	3	14	1	-	56	74

Os dados da Tabela 3.3 mostram que, dentre as 74 questões classificadas, 56 delas referem-se ao significado Operador multiplicativo. Segue o significado Parte-todo com 14 questões, Número com três questões e Quociente com uma questão na quantidade contínua icônica.

Nesse volume observamos que as questões que contemplam o significado Medida, não aparecem. A variável que mais utilizada é a discreta não icônica.

Descreveremos a Coleção B, destacando o livro referente à 6ª série. O capítulo 4, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem como título: *Cálculos com números decimais e frações.* Inicia o assunto demonstrando o algoritmo da multiplicação entre a fração e um número natural. O conceito de fração é explorado em 13 páginas das 328 que há nesse volume.

Passaremos a apresentar a distribuição das questões encontradas na Coleção B da 6ª série que abordam os significados da fração com as variáveis de pesquisa:

Tabela 3.4: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidades contínua ou discreta, representações icônica ou não icônica – Coleção B 6ª série.

Signif. / Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	-	-	1	-	7	8
Cont.Não Icônica	6	-	4	-	20	30
Discreta Icônica	-	-	-	-	-	-
Discr.Não Icônica	-	-	-	-	20	20
Total	6	-	5	-	47	58

Os dados da Tabela 3.4 mostram que, dentre as 58 questões classificadas, 47 delas se referem ao significado Operador multiplicativo. Segue o significados Número com 6 questões, e Quociente com 5 questões.

Nesse volume percebemos que as questões que abordam o significado Operador multiplicativo permanecem, assim como Número e Quociente. Os significados Parte-todo e Medida não aparecem. Quanto às variáveis de pesquisa, na quantidade contínua com representação icônica aparece nos significados Quociente e Operador multiplicativo.

Descreveremos a Coleção C, destacando o livro referente à da 5ª série. A unidade 4, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem como título: *Os números racionais e sua forma fracionária.* A unidade inicia contando a história do surgimento dos números racionais no Egito. O conceito de fração é explorado em 70 páginas das 304 que há nesse volume.

A seguir apresentaremos a distribuição das questões encontradas na Coleção C da 5ª série que abordam os significados da fração com as variáveis de pesquisa:

Tabela 3.5: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidades contínua ou discreta, representações icônica ou não icônica – Coleção C 5ª série.

Signif. / Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	1	18	1	-	7	27
Cont.Não Icônica	10	1	11	-	33	55
Discreta Icônica	-	2	-	-	4	6
Discr.Não Icônica	-	3	-	-	7	10
Total	11	24	12	-	51	98

Os dados da Tabela 3.5 mostram que, dentre as 98 questões classificadas, 51 delas se referem ao significado Operador multiplicativo. Segue o significados Parte-todo com 24 questões, Quociente com 12 questões e Número com 11 questões.

As questões que abordam os significados Parte-todo e Operador multiplicativo contemplam as quatro variáveis de pesquisa, quantidade contínua icônica e não icônica, quantidade discreta icônica e não icônica.

Nesse volume de 5ª série não há questões que abordem significado Medida.

Iremos destacar o livro referente à 6ª série da Coleção C. A unidade 14, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem como título: *Números racionais relativos.* Inicia o assunto mostrando o conjunto dos números racionais. O conceito de fração é explorado em 22 páginas das 312 que há nesse volume.

Apresentaremos a distribuição das questões encontradas na Coleção C da 6ª série que abordam os significados da fração com as variáveis de pesquisa:

Tabela 3.6: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidades contínua ou discreta, representações icônica ou não icônica – Coleção C 6ª série.

Signif. / Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	1	-	-	-	1	2
Cont.Não Icônica	5	-	1	-	4	10
Discreta Icônica	-	-	-	-	-	-
Discr.Não Icônica	-	-	-	-	-	-
Total	6	-	1	-	5	12

Os dados da Tabela 3.6 apontam que, dentre as 12 questões classificadas, 6 delas se referem ao significado Número. Segue o significados Operador multiplicativo com 5 questões, Quociente com 1 questão.

Houve somente incidência da quantidade contínua, sendo que em sua maioria sem a representação icônica.

Fazendo uma síntese dos dados apurados, observamos que o significado Operador Multiplicativo foi o que mais se destacou em todos os livros de 5ª e 6ª séries. O significado Parte todo apareceu só nos livros de 5ª série. Os significados Número e Quociente apareceram pouco, porém em todos os livros. O significado Medida não foi observado em nenhum dos volumes apresentados.

Diante do exposto, concluímos que, nos volumes dessas coleções, não houve uma distribuição eqüitativa entre os significados. Sendo assim, podemos inferir que se o livro didático for o principal apoio do professor, nem todos os significados com as variáveis de pesquisa são exploradas em sala de aula.

No próximo capítulo, apresentaremos a metodologia utilizada para a realização de nosso estudo, os sujeitos de pesquisa, o universo do estudo e os procedimentos adotados na coleta de dados.

CAPÍTULO IV
METODOLOGIA

Este capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia adotada para a realização do presente estudo. Inicialmente, será descrito o método de pesquisa utilizado. Nossa proposta de pesquisa está baseada em um estudo diagnóstico, pois, segundo Rudio (1979), trata-se de uma pesquisa descritiva, que o "*pesquisador procura conhecer e interpretar a realidade, sem nela interferir para modificá-la"* (RUDIO, 1979 p.55).

O interesse da pesquisa descritiva foi de descobrir e observar fenômenos, tentando descrever, classificar e interpretar tais fenômenos. Os dados obtidos podem ser qualitativamente analisados, ou seja, descrever o fenômeno por meio de palavras, ou ainda, quantitativos, expressando o fenômeno numericamente, isto é, o total de indivíduos em uma determinada posição da escala.

Para que possamos compreender melhor esses fenômenos a serem investigados, faremos entrevista clínica com parte de nossa amostra (12%). O tipo de entrevista clínica que utilizaremos é a semi-estruturada que segundo Delval (2002) são feitas perguntas básicas comuns para todos os alunos que, de acordo com as respostas, podem ser ampliadas e complementadas, mas retornando ao tema essencial estabelecido inicialmente.

Então para esse estudo, a nossa intenção é obter dados a partir das respostas dos alunos nos questionários além de entrevistas clínicas com parte dessa amostra.

O universo de estudo constituiu-se das escolas e das séries escolhidas, tanto no que diz respeito a nosso estudo piloto, quanto ao estudo principal. Dentro desse último item destacamos o perfil dos participantes da pesquisa, o material utilizado na coleta dos dados, descrevendo em detalhes cada questão de nosso questionário, assim como os procedimentos adotados para sua aplicação.

4.1 UNIVERSO DE ESTUDO

Nosso estudo tem por objetivo diagnosticar e reconhecer as estratégias de resolução que os alunos das 5ª e 6ª séries têm frente a questões que envolvem o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo (NUNES et al., 2003).

Para atingirmos este objetivo, optamos por realizá-lo em duas Escolas Públicas Estaduais, ambas localizadas na zona leste da cidade de São Paulo.

A primeira escola escolhida foi denominada Escola A, funciona nos três períodos e atende 2.100 alunos. O período matutino tem 16 turmas distribuídas entre alunos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental e alunos dos 1º ao 3º anos do Ensino Médio. O período vespertino tem 17 turmas de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental e o período noturno tem 16 turmas de 1º ao 3º anos do Ensino Médio.

A segunda escola escolhida, denominada Escola B, funciona, também, nos três períodos e atende 1.780 alunos. O período matutino tem 13 turmas distribuídas entre alunos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental e alunos dos 1º ao 3º anos do Ensino Médio. O período vespertino tem 13 turmas de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental e o período noturno tem 13 turmas dos 1º ao 3º anos do Ensino Médio.

Nossa coleta de dados, tanto na Escola A como na Escola B foi feita no período vespertino. Em cada uma das Escolas, coletamos dados de uma turma de 5ª e uma turma de 6ª série. A escolha das turmas foi feita pela própria Coordenação das Escolas.

Optamos pela Escola Pública Estadual pelo fato da maioria da população do Estado de São Paulo, em idade escolar, estudar em alguma delas.

Desse modo, escolhemos as turmas de 5ª e 6ª séries porque, nessa etapa escolar, o aluno retoma o conceito fração de forma mais analítica, ou seja, o aluno deverá operar com fração – adição/subtração e multiplicação/divisão.

Nossa opção por duas escolas foi para não corrermos o risco de uma amostra que destoasse da realidade, ou seja, uma escola tida como muito boa ou, por outro lado, uma escola considerada muito fraca, no que diz respeito ao ensino ministrado.

A escolha da região leste deu-se, além da acessibilidade das escolas, também, pelo fato de ter a maior concentração populacional da cidade de São Paulo, e a maioria da população ser formada pelas classes média e média baixa. Isso significa tratar-se de uma região, dentro do possível, com um contingente populacional mais uniforme da cidade de São Paulo.

4.2 ESTUDO-PILOTO

O estudo-piloto foi aplicado em um grupo de 49 alunos de duas turmas de 5ª série do Ensino Fundamental, de uma escola da Rede Pública Estadual, da zona leste da cidade de São Paulo. O motivo de sua escolha foi a razão da acessibilidade, todavia, a escolha da 5ª série foi proposital, pois já tínhamos decidido que essa seria uma das séries a ser estudada em nossa pesquisa.

No presente trabalho, não nos deteremos na descrição do estudo-piloto, já que nosso objetivo com ele, longe de investigar essa população, foi o de depurar nosso instrumento.

Com o estudo-piloto, pudemos observar como o aluno interpretava cada questão, se a linguagem utilizada era acessível ao aluno. A partir da reação do aluno, conseguimos melhorar a questão, alterando seu enunciado, a fim de que ficasse mais compreensível ao aluno.

Houve, também, uma diminuição no número de itens das questões, além de sua melhor distribuição, para que pudéssemos abordar os cinco significados da fração, levando em conta variáveis, como as quantidades contínuas e discretas, além da representação icônica e não icônica.

Dessa forma, o objetivo do estudo-piloto foi depurar nosso instrumento diagnóstico, para que pudéssemos elaborar o estudo definitivo, que chamamos de estudo principal, conforme se encontra detalhado a seguir.

4.3 ESTUDO PRINCIPAL

Como citamos acima, a aplicação e a análise do estudo-piloto, permitiram que pudéssemos aprimorar as questões do teste, o que resultou em um questionário mais sólido e depurado no estudo principal.

Esta seção destina-se a apresentar, com detalhes, os principais itens de nosso estudo principal: o perfil dos alunos, o material utilizado na coleta de dados e o procedimento da coleta. Dentro do material utilizado, descreveremos a análise das questões do teste.

4.3.1 Sujeitos

Como já mencionamos, os sujeitos da pesquisas são alunos de duas escolas públicas estaduais da zona leste da cidade de São Paulo, por nós denominadas Escola A e Escola B.

Os alunos da Escola A foram: uma turma de 5ª série composta de 30 alunos, cuja faixa etária varia entre 10 e 12 anos e uma turma de 6ª série composta de 30 alunos, cuja faixa etária varia entre 11 e 13 anos.

Os alunos da Escola B foram: uma turma de 5ª série composta de 30 alunos, cuja faixa etária varia entre 10 e 13 anos e uma turma de 6ª série composta de 30 alunos, cuja faixa etária varia entre 11 e 14 anos.

Para esses alunos, o mesmo tipo de material foi entregue e utilizado, para que pudéssemos coletar os dados da pesquisa, que descreveremos a seguir.

4.3.2 Material utilizado

O material usado na coleta de dados do estudo foi um questionário na forma de um caderno de quase 15cm de largura por 21 cm de altura, metade de uma folha A4, constituído de 20 folhas. A primeira folha pedia o nome, a idade e a série que o aluno encontrava-se. As outras 19 folhas continham questões de conteúdo sobre o conceito de fração. Em cada folha havia uma única questão, que resultaram em 19 questões.

Algumas das questões pediam mais do que um item para ser respondido. As questões 2, 8, 10, 11 e18 tinham dois itens cada uma, e as questões 5, 6 e17 tinham três itens cada uma, perfazendo um total de 30 itens. Todas as questões estão relacionadas com situações do cotidiano do aluno dentro e fora da Escola.

A seguir, apresentaremos esse questionário em detalhes, discutindo cada uma das questões, quando pertinentes os seus respectivos itens.

4.3.2.1 Questionário

O objetivo de nossa pesquisa foi diagnosticar e reconhecer as estratégias de resolução que os alunos de 5ª e 6ª séries têm frente a questões que envolvem o conceito de fração, referente aos cinco diferentes significados, número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo.

Para tanto, elaboramos um questionário que procurou abordar cada um desses cinco significados, levando em consideração duas variáveis:

a) a característica da quantidade (contínua ou discreta);

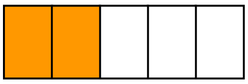
Cabe salientar que entendemos por quantidades contínuas aquelas que são passíveis de serem divididas exaustivamente, sem que necessariamente percam suas características. Por exemplo: um chocolate pode ser dividido em inúmeras partes, sem deixar de ser chocolate.

Por outro lado, quantidades discretas dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos que representam um único todo, no qual o resultado da divisão deve produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades; conforme encontramos, por exemplo, em uma situação que precisamos dividir sete bolinhas para três crianças.

O resultado dessa divisão será duas bolinhas para cada criança e sobrará uma bolinha. Portanto, as frações não funcionam como ferramenta bem adaptada para resolver tal situação. Em contraponto, se lançarmos mão de uma situação em que devemos distribuir sete chocolates para três crianças, encontraremos na fração uma ferramenta bem adaptada para expressar o resultado de tal situação, isto é, cada criança receberá 2 $\frac{1}{3}$ de chocolate.

b) a forma de apresentação dos problemas (com representação icônica e sem a representação icônica).

Cabe pontuar que entendemos por representação icônica, o conjunto de imagens relativo ao assunto, ou seja, o uso do desenho para ilustrar a situação.

Por exemplo: um chocolate dividido em cinco partes iguais e foram tomadas duas partes, que poderia ser representado por meio do ícone:  sendo que as partes pintadas representam as partes tomadas.

Assim sendo, para considerarmos essas variáveis foram elaboradas quatro questões para cada um dos significados. A exceção foi feita apenas para o significado número, pois, as frações, como os inteiros são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de representação fracionária: ordinária e decimal que representam pontos na reta numérica.

Dessa forma, os dois problemas que apresentamos referem-se apenas à quantidade contínua por representarem pontos na reta numérica; em um deles fizemos o uso do ícone. Cabe salientar que no instrumento existem 19 questões, perfazendo um total de 30 itens para serem respondidos.

As respostas desses itens serão analisadas sob três pontos de vista: quanto aos significados da fração – Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo; quanto às variáveis – quantidades contínua icônica versus contínua não icônica; quantidades discretas icônicas versus discretas não icônicas; quanto aos invariantes da fração – de ordem e de equivalência.

QUADRO 4.1: Distribuição das questões em relação aos três enfoques.

A ANÁLISE SOB TRÊS ENFOQUES

Enfoque 1

SIGNIFICADOS	QUESTÕES
Número	11 e 18
Parte-todo	1; 4; 8b e 12
Quociente	2b; 6c; 10b e 13
Medida	3; 5b; 9 e 17a
Operador Multiplicativo	7; 14; 16 e 19

Enfoque 2

VARIÁVEIS	QUESTÕES
Contínua Icônica	5b; 6c; 7; 8b e 11
Contínua Não Icônica	4; 9; 13; 18 e 19
Discreta Icônica	1; 2b; 14 e 17a
Discreta Não Icônica	3; 10b; 12 e 16

Enfoque 3

INVARIANTES	QUESTÕES
Ordem	19
Equivalência	5a; 15 e 17c

De acordo com os dados da Tabela 4.1, cabe ressaltar que os itens 2*a*; 5*b*; 6*a*,*b;* 8*a*; 10*a,* 17*b* não constam nos pontos de vista acima citados, pois as respostas desses itens poderão apontar se o aluno entendeu ou não a questão proposta. Sendo assim, as respostas poderão vir a ser quesitos relevantes a nossa análise qualitativa de dados.

Em seguida, descreveremos o questionário, apresentando as questões na mesma ordem em que foram colocadas para os alunos, acrescidas de nossa análise a priori. Esta análise será iniciada destacando e justificando em cada questão o significado da fração (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo) que desejamos enfocar, assim como a quantidade envolvida (se discreta ou contínua) e, ainda, a forma de apresentação do problema ser com o ícone ou não.

Em seguida, ressaltaremos fatores que poderão ser facilitadores ou de complexidade da questão analisada. Destacaremos, também, algumas possíveis respostas dos alunos, além de fazermos algumas inferências em relação a essas respostas.

Os dados da Tabela 4.1 referem-se à distribuição das questões, no que diz respeito aos cinco diferentes significados: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo. Além disso, segundo as variáveis quantidades contínuas e discretas, como também a representação icônica e não icônica.

Tabela 4.1: Distribuição das questões quanto ao seu significado, quantidade contínua ou discreta, icônica ou não icônica.

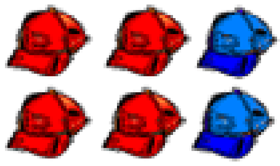
Signif. / Qtde	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multip.	Total
Contínua Icônica	Q.11	Q.8b	Q.6c	Q.5b	Q.7	5
Cont.Não Icônica	Q.18	Q.4	Q.13	Q.9	Q.19	5
Discreta Icônica	-	Q.1	Q.2b	Q.17a	Q.14	4
Discr.Não Icônica	-	Q.12	Q.10b	Q.3	Q.16	4
Total	2	4	4	4	4	18

Ao observarmos os dados da Tabela 4.1, podemos perceber que as questões de mesmo significado não estão na seqüência, pelo contrário, tivemos a intenção de espalhá-las. O motivo pelo qual tivemos essa atitude foi para que, no momento da resolução, o aluno tivesse de pensar de maneira diferente em cada uma das situações, divergindo do que, normalmente, acontece nos livros didáticos que apresentam algumas situações seguidas que requerem apenas uma estratégia de resolução.

Em seguida, apresentamos nosso estudo-piloto.

QUESTÃO 1

EM UMA LOJA DE PRESENTES HÁ 4 BONÉS VERMELHOS E 2 BONÉS AZUIS DE MESMO TAMANHO. QUE FRAÇÃO REPRESENTA A QUANTIDADE DE BONÉS AZUIS EM RELAÇÃO AO TOTAL DE BONÉS?



Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e apresenta o ícone que retrata esta situação. O significado Parte-todo é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. Trata-se de uma situação que pode empregar um tipo de contagem dupla – a quantidade total de bonés sendo o denominador e a quantidade de bonés azuis o numerador.

A quantidade discreta no significado parte-todo costuma ser pouco explorada nos livros didáticos, o que nos leva a inferir que esse pode ser o fator de complexidade da questão. Por outro lado, o ícone pode ser um fator facilitador, pois retrata de maneira clara a situação proposta. Ao nosso ver, trata-se de uma questão de pouca dificuldade.

Para essa questão poderemos ter algumas possibilidades de respostas:

- $\frac{2}{6}$ 2 bonés azuis para um total de 6 bonés, demonstrando assim que o aluno pode ter utilizado a dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;

- $\frac{1}{3}$ Esta poderia ser uma outra possível resposta. No caso, há duas possibilidades; a primeira é que o aluno poderia ter atribuído o significado de Operador Multiplicativo e, dessa forma, ter pensado “que número multiplicado por 6 dá como resposta o número 2?" A segunda possibilidade é o aluno ter atribuído o significado Parte-todo e ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$, chegando a $\frac{1}{3}$;

- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{3}{1}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta mas

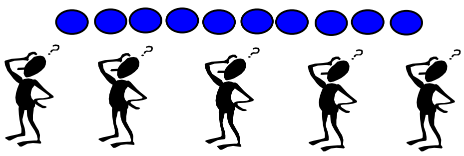
inverter o numerador com o denominador, teremos, então, respostas desse tipo;

- $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$ O aluno poderá responder de maneira equivocada

pensando na relação parte-parte, isto é, 2 bonés azuis para 4 bonés vermelhos, ou ainda, 4 bonés vermelhos para 2 azuis.

QUESTÃO 2

TENHO 10 BOLINHAS DE GUDE E VOU DIVIDIR IGUALMENTE PARA 5 CRIANÇAS.



A) QUANTAS BOLINHAS CADA CRIANÇA GANHARÁ?

B) QUE FRAÇÃO REPRESENTA ESTA DIVISÃO?

A questão foi idealizada com o intuito de enfocar o significado Quociente com quantidade discreta, utilizando o ícone para representar o conjunto de bolinhas de gude a serem divididas para cinco crianças. A questão apresenta dois itens. No item "*a",* perguntamos quantas bolinhas de gude cada criança ganhará, e esse mesmo item não será contabilizado em nossa análise quantitativa, pois se trata de uma divisão em uma situação contextualizada, procedimento que entendemos ser comum na vida escolar do aluno e, além disso, não está sendo o foco de nossa pesquisa. Apesar disso, o motivo pelo qual incluímos esse item, será o de nos certificar que, de fato, o aluno entendeu se tratar de uma situação de divisão.

Cabe ressaltar, que temos quatro questões distintas para o significado Quociente, sendo duas com quantidade contínua e duas com quantidade discreta. Para as questões com quantidade contínua fizemos as seguintes indagações: *Que fração de chocolate cada criança receberá?* (Questão 6c) e *Que fração representa o que cada criança recebeu?* (Questão 13). A resposta correta para cada uma delas é única, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$, respectivamente.

Porém, nas questões 2b e 10b de quantidade discreta fizemos pergunta de maneira diferente: *Que fração representa essa divisão?*

Esta pergunta que fizemos de maneira diferente, das duas anteriores, foi proposital. O significado Quociente pressupõe extrapolar as idéias presentes no significado Parte-todo e, sendo assim, temos duas grandezas distintas nas questões 2b ($\frac{bolinhas\deg ude}{crianças}$) e 10b ($\frac{bolasdefutebol}{crianças}$). Portanto as respostas corretas para essas questões são: $\frac{10}{5}$ e $\frac{8}{4}$ respectivamente.

Então, se perguntássemos nas questões 2b e 10b que abordam o significado quociente de quantidade discreta: *Que fração representa o que cada criança recebeu?* teríamos que aceitar, também, a resposta $\frac{2}{10}$ como certa para a questão 2b, afinal, do total de dez bolinhas de gude cada criança recebeu duas delas. Assim como, na questão 10b a resposta $\frac{2}{8}$ também estaria correta pois, do total de oito bolas de futebol, cada criança recebeu duas delas.

Apesar de estarem corretas, essas duas respostas $\frac{2}{10}$ e $\frac{2}{8}$ nos remete ao significado Parte-todo pois, o numerador e denominador referem-se a uma única grandeza (Questão 2b – bolinhas de gude; Questão 10b – bolas de futebol). Entretanto, o que queremos enfocar nessas situações é o significado Quociente.

Entendemos que o fator de complexidade resida na formalização da resposta, pois, normalmente, o aluno não faz a conexão entre fração e divisão. Isso pode ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado Parte-todo, visto que, usualmente, é baseado nesse significado que introduz o conceito de fração.

Um outro fator de complexidade pode ser o fato de estarmos lidando com quantidades discretas que, geralmente, são pouco exploradas nos livros didáticos.

Algumas possibilidades de respostas para o item “*b”,* poderiam ser:

- $\frac{10}{5}$ Para esta resposta podemos deduzir que o aluno pensou na fração com significado de Quociente, ou seja, 10 bolinhas de gude para 5 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas (bolinhas de gude e crianças), caracterizando, assim, o significado Quociente;
- $\frac{5}{10}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o denominador. É possível, que, um dos fatores dessa inversão, seja o fato que o aluno está mais familiarizado com fração cujo numerador é menor que o denominador, comumente, encontrada na situação de Parte-todo.
- $\frac{2}{10}$ Nesta resposta, podemos deduzir que, se o aluno acertou o item *a* (2 bolinhas de gude para cada criança), ele poderá ter utilizado esse dado para responder o item “*b”*. Dessa forma, a resposta poderia nos remeter ao

significado Parte-todo, ou seja, cada criança receberá 2 das 10 bolinhas de gude. No caso, o que perceberíamos, é o significado Parte-todo sobressaindo no entendimento de fração que o aluno possui;

- $\frac{10}{2}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o denominador;
- $\frac{1}{5}$ Nesta resposta, podemos inferir que o aluno poderia ter pensado em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de bolinhas de gude a serem divididas, pois, o que cada uma das 5 crianças receberá equivale a $\frac{1}{5}$ do total de bolinhas de gude.

-

QUESTÃO 3

NA ESCOLA DE PEDRO FOI FEITA UMA RIFA E FORAM IMPRESSOS 150 BILHETES. A MÃE DE PEDRO COMPROU 20 BILHETES DESSA RIFA. QUAL A CHANCE DA MÃE DE PEDRO GANHAR O PRÊMIO?

A questão aborda o significado Medida com quantidade discreta e não apresenta o ícone. O significado Medida da questão deve-se ao fato da fração referir-se a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis – total de bilhetes da rifa e bilhetes comprados.

A probabilidade do evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis – bilhetes comprados – dividido pelo número de casos possíveis – total de bilhetes da rifa, portanto, a probabilidade do evento varia de 0 a 1, e o valor com o qual trabalhamos é fracionário. Trata-se de quantidade discreta, pois refere-se a bilhetes de uma rifa e, além disso, a questão não possui ícone que represente a situação, o que poderá ser um dos fatores de complexidade.

Algumas possibilidades de respostas para esta questão são:

- $\frac{20}{150}$ Para esta resposta, podemos deduzir que o aluno pode ter pensado fração com o significado de medida, ou seja, do total de bilhetes, qual a chance que a mãe de Pedro terá para ganhar;
- $\frac{150}{20}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pode ter pensado de maneira correta, mas fez a inversão entre o numerador e o denominador;
- $\frac{2}{15}$ Para esta resposta podemos deduzir que o aluno pode ter ter feito a simplificação da fração $\frac{20}{150}$, dividindo o numerador e denominador por 10;
- $\frac{15}{2}$ Com relação a esse tipo de resposta, podemos inferir que o aluno pode ter invertido o denominador com o denominador.

QUESTÃO 4

ISABELLE GANHOU UMA BARRA DE CHOCOLATE, PARTIU EM 5 PARTES IGUAIS E DEU 2 PARTES AO ANDRÉ. QUE FRAÇÃO REPRESENTA A PARTE QUE ANDRÉ RECEBEU?

Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade contínua e o ícone não é utilizado para retratar a situação. O significado Parte-todo é muito utilizado pelos livros didáticos e por grande parte dos professores na introdução do conceito de fração. A questão representa uma situação estática, ou seja, um chocolate já dividido em 5 partes iguais, 2 dessas partes serão dadas a André.

A quantidade contínua no significado Parte-todo, via de regra, é bem explorada nos livros didáticos o que então nos leva a inferir que esse poderá ser o fator facilitador dessa questão. Quanto ao ícone que a questão não apresenta, pode ser um fator de complexidade, pois o aluno precisará imaginar ou desenhar a situação proposta.

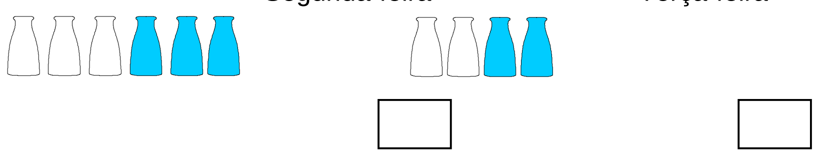
Para a questão, as possibilidades de respostas poderiam ser:

- $\frac{2}{5}$ 2 partes de chocolate para um total de 5 partes, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{5}{2}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverter o numerador com o denominador;
- $\frac{3}{2}$ ou $\frac{2}{3}$ O aluno ao responder dessa maneira poderia ter pensado em parte-parte, ou seja, as partes que Isabelle tem (3 partes) em relação às partes de André (2 partes), ou vice-versa.

QUESTÃO 5

A MISTURA DE TINTA VAI TER A MESMA COR NA SEGUNDA E NA TERÇA-FEIRA?

Segunda-feira Terça-feira



SIM NÃO

QUE FRAÇÃO REPRESENTA A QUANTIDADE DE TINTA AZUL EM RELAÇÃO À MISTURA DAS TINTAS AZUL E BRANCA?

B) NA SEGUNDA-FEIRA?

C) E NA TERÇA-FEIRA?

Esta questão aborda o significado Medida com quantidade contínua apresentando o ícone, a questão apresenta três itens "*a*", "*b*" e "*c*". O item "*a*" refere-se ao invariante Equivalência das frações dos itens "*b*" e "*c*", porém para nossa análise quantitativa consideraremos apenas o item "*b*" da questão.

O significado medida dessa questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas, tinta branca e tinta azul, ou seja, para conseguir um determinado tom de azul, misturamos 3 partes de tinta branca e 3 partes de tinta azul e a receita é medida pela razão 3 para 3 que pode ser representada como sendo $\frac{3}{3}$(relação parte-parte).

Com essa medida, podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de tinta, mantendo o mesmo tom, além disso, essa quantidade poderá nos remeter à idéia de fração, se considerarmos que o todo (a mistura) é constituído de 6 partes, e $\frac{3}{6}$ é a fração que corresponde à medida de tinta azul na mistura e, $\frac{3}{6}$ é, também, a fração que corresponde à medida de tinta branca na mistura.

Consideramos quantidade contínua por se tratar de tinta e esta questão apóia-se no ícone que representa a situação descrita. A presença do ícone da questão poderá ser o fator de complexidade, pois apresenta de maneira distinta a quantidade das tintas de cor azul e branca, 3 recipientes de cada cor, e o aluno deverá pensar na mistura como sendo a soma das quantidades (3 azuis + 3 brancas).

Nesta questão, as possíveis respostas poderão ser, entre outras, as seguintes para o item *b*:

- $\frac{3}{6}$ Para essa possível resposta, podemos deduzir que o aluno

pensou na quantidade de tinta azul em relação à mistura como um todo, ou seja, 3 partes de tinta branca somadas com 3 partes de tinta azul totalizando as 6 partes da mistura;

- $\frac{1}{2}$ Com relação à resposta, o aluno poderia ter simplificado a fração

$\frac{3}{6}$, dividindo numerador e denominador por 3 obtendo a fração $\frac{1}{2}$.

Por outro lado, o aluno poderá ter pensado no significado Operador multiplicativo, qual número que multiplicado por 6 (quantidade da mistura) dá 3, que é a quantidade de tinta azul;

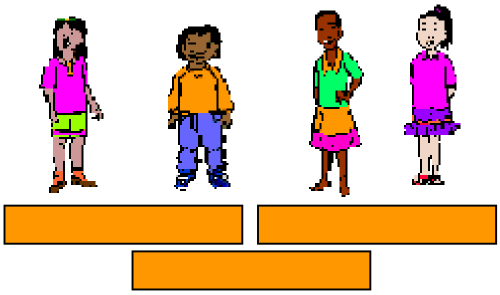
- $\frac{6}{3}$ Esta também poderá aparecer como resposta, pois o aluno

poderá ter pensado de maneira coerente, mas, na formalização da resposta inverter o numerador com o denominador;

- $\frac{3}{3}$ Esperamos também que esta possa ser uma resposta, podendo inferir que o aluno poderá ter pensado em parte-parte, 3 partes de tinta branca para 3 partes de tinta azul.

QUESTÃO 6

FORAM DIVIDIDAS IGUALMENTE PARA 4 CRIANÇAS, 3 BARRAS DE CHOCOLATE.



A) CADA CRIANÇA RECEBERÁ 1 CHOCOLATE INTEIRO? SIM ☐ NÃO ☐

B) CADA CRIANÇA RECEBERÁ PELO MENOS METADE DE UM CHOCOLATE? SIM ☐ NÃO ☐

C) QUE FRAÇÃO DE CHOCOLATE CADA CRIANÇAS RECEBERÁ?

A questão foi inspirada em uma pesquisa realizada por Nunes et al. (2003); nosso intuito foi enfocar o significado Quociente com quantidade contínua, utilizando o ícone para representar a situação. O significado Quociente está presente nas situações, em que a divisão surge como uma estratégia para resolver um problema com a idéia de divisão, partilha. Conhecido o número do grupo a ser formado – 4 crianças – o quociente representa o tamanho de cada grupo $\frac{3}{4}$.

Pressupõe, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado parte-todo, pois nas situações de quociente temos 2 variáveis (3 chocolates para 4 crianças). A questão apresenta três itens. Nos itens "*a*" e "*b*", perguntamos se cada criança ganhará 1 chocolate inteiro ou, pelo menos, metade de um chocolate, mas esses itens não serão contabilizados em nossa análise quantitativa, pois o que queremos saber, é se o aluno compreendeu a situação proposta.

O item "*c*" pede ao aluno que represente a divisão chocolate por criança na forma de fração. Sabemos ser comum a criança vivenciar situações que envolvam a operação de divisão por partição, mesmo antes de entrar na escola.

Além disso, a divisão por partição é estudada, desde as séries iniciais, porém o aluno poderá não fazer a conexão entre fração e divisão na formalização da resposta.

Entendemos que a formalização dessa divisão possa ser o fator de complexidade da questão. Isso poderá ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, de modo intrínseco mais ligado ao significado Parte-todo, pois, usualmente, é por esse significado que se inicia o conceito de fração.

Algumas possibilidades de respostas para o item *c,* poderiam ser:

- $\frac{3}{4}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração

com significado de Quociente, ou seja, 3 chocolates para 4 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas (chocolates e crianças) caracterizando, assim, o significado Quociente;

- $\frac{4}{3}$ Nesta resposta, podemos inferir que o aluno pensou de maneira

correta, mas inverteu a numerador com o denominador.

- $\frac{1}{4}$ Nesta resposta, o aluno poderia ter pensado em Operador

multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de chocolate a ser dividido, cada criança receberá a quarta parte dessa quantidade.

QUESTÃO 7

MARIA GANHOU UM CHOCOLATE E COMEU $\frac{2}{5}$. PINTE A QUANTIDADE QUE MARIA COMEU.

A questão enfoca o significado Operador multiplicativo com quantidade contínua, apresentando o ícone que será usado para a resposta do aluno, pois é sobre o ícone que o aluno deverá pintar a parte correspondente a $\frac{2}{5}$.

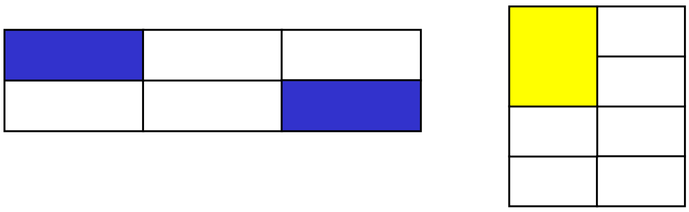
O significado Operador multiplicativo nessa questão propõe-se a delimitar a quantidade de chocolate que Maria comeu, ou seja, reduz o inteiro partido em 5 partes iguais, em 2 partes já consumidas.

Partindo do pressuposto que, geralmente, o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculos) que representam chocolate, pizza; entendemos que esse ícone seja tido como fator facilitador para a compreensão dessa questão pelo aluno.

Uma das possibilidades de resposta do aluno é a que ele pinte, ou delimite de alguma forma, o que possa corresponder a 2 das 5 partes do chocolate inteiro.

QUESTÃO 8

OBSERVE OS DESENHOS ABAIXO E RESPONDA QUAL A FRAÇÃO QUE REPRESENTA AS PARTES PINTADAS DE CADA FIGURA?



Essa questão foi inspirada em uma situação problema de uma pesquisa feita por Campos et al. (NUNES; BRYANT, 1996). Ela aborda o significado Parte-todo de quantidade contínua representada pelo ícone. O significado Parte-todo é, geralmente, usado na introdução do conceito de fração. A situação do ícone pintado em azul denominado de item "*a",* representa uma situação estática, ou seja, um retângulo dividido em 6 partes iguais, na qual para obtermos a resposta correta poderá ser utilizado o procedimento da dupla contagem, ou seja, a quantidade total de partes da figura sendo o denominador e a quantidade de partes pintadas representadas pelo numerador.

No significado Parte-todo, a quantidade contínua, normalmente, é a mais explorada nos livros didáticos, o que nos leva a inferir que esse pode ser o fator facilitador da questão. Entretanto, o primeiro ícone apresenta uma particularidade, as partes pintadas não são contíguas, o que pode ser um fator de complexidade. Cabe ressaltar que o item que corresponde o retângulo pintado de azul não será contabilizado na análise quantitativa.

Nesse ponto vamos descrever o segundo ícone da referida questão. Segundo Nunes; Bryant (1996) só a percepção não dá conta. O item enfoca também o significado Parte-todo com quantidade contínua e apresenta ícone. A diferença é que nessa figura uma das partes pintadas corresponde a duas partes não pintadas e, portanto, a dupla contagem poderá não dar conta de responder corretamente.

Para que o aluno possa responder de maneira acertada este item, ele terá de comparar duas grandezas de mesma espécie, ou seja, analisar e perceber que a maior área pintada corresponde ao dobro das outras áreas.

Assim, é possível que essa comparação seja o fator de complexidade, pois o aluno deve-se ater à conservação da área, ou seja, para que possa haver fração o todo deverá ser dividido em partes iguais.

Para o referido ícone da questão, as possibilidades de respostas, entre outras, poderiam ser:

- $\frac{2}{8}$ 2 representando as partes pintadas e 8 representando o total de partes da figura. Para essa resposta podemos deduzir que houve o entendimento, por parte do aluno, da conservação da área, ou seja, a parte pintada equivale a duas partes da figura;
- $\frac{1}{7}$ 1 representando a parte pintada e 7 representando o total de partes da figura. Para esta resposta podemos inferir que não houve a conservação da área, ou seja, o aluno simplesmente utilizou a dupla contagem como se todas as áreas pintadas tivessem a mesma dimensão;
- $\frac{2}{6}$ ou $\frac{6}{2}$; $\frac{1}{6}$ ou $\frac{6}{1}$ Nos tipos de resposta, podemos inferir que o aluno pode ter pensado na relação parte-parte, ou seja, 2 partes pintadas para 6 não pintadas, levando em conta que a maior parte pintada corresponde a duas partes da figura; ou ainda, também, pensando na relação parte-parte, mas o aluno pode não percebido a diferença de tamanho entre área pintada e não pintadas.

QUESTÃO 9

PARA FAZER UMA CERTA QUANTIDADE DE SUCO SÃO NECESSÁRIAS 2 MEDIDAS DE CONCENTRADO DE LARANJA PARA 5 MEDIDAS DE ÁGUA. QUE FRAÇÃO REPRESENTA A MEDIDA DE CONCENTRADO DE LARANJA EM RELAÇÃO AO TOTAL DE SUCO?

A questão aborda o significado Medida com quantidade contínua e não apresenta o ícone. O significado Medida dessa questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas, – concentrado de laranja e água – ou seja, para conseguir um determinado sabor do suco, misturamos 2 partes de concentrado de laranja e 5 partes de água. A receita, o sabor do suco, é medida pela razão 2 para 5 que pode ser representada como sendo $\frac{2}{5}$ (relação parte-parte).

Com a medida, podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de suco, mantendo o mesmo sabor; além disso, essa quantidade poderá nos remeter à idéia de fração, se considerarmos que o todo (o suco) é constituído de 7 partes, sendo $\frac{2}{7}$ a fração que corresponde à medida de concentrado de laranja no suco e, $\frac{5}{7}$ é também a fração que corresponde à medida de água no suco. Consideramos quantidade contínua por se tratar de água e concentrado de laranja.

Para responder a questão, o aluno deverá somar as quantidades de concentrado de laranja e água para obter a quantidade total do suco (denominador da fração), para a partir de então chegar à resposta correta $\frac{2}{7}$.

O fator de complexidade poderá ser e o aluno deverá pensar no suco como sendo a soma das quantidades (2 partes de concentrado de laranja + 5 partes de água).

Na questão, poderemos ter como possibilidades as seguintes respostas:

- $\frac{2}{7}$ Para esta possível resposta, podemos inferir que o aluno pensou na quantidade de concentrado de laranja em relação ao suco como um todo, ou seja, 2 partes de concentrado de laranja somadas com 5 partes de água totalizando 7 partes de suco;

- $\frac{7}{2}$ Esta poderá aparecer como resposta, pois o aluno poderá ter pensado de maneira coerente, mas, na formalização da resposta inverter o numerador com o denominador;

- $\frac{2}{5}$ ou $\frac{5}{2}$ Estas duas possíveis respostas podem aparecer, e assim, inferir que o aluno tenha pensado em parte-parte, 2 partes de concentrado de laranja para 5 partes de água ou vice-versa.

QUESTÃO 10

FORAM DIVIDIDAS IGUALMENTE 8 BOLAS DE FUTEBOL DE MESMO TAMANHO PARA 4 CRIANÇAS. A) QUANTAS BOLAS DE FUTEBOL CADA CRIANÇA GANHARÁ? B) QUE FRAÇÃO REPRESENTA ESSA DIVISÃO?

A questão foi idealizada no intuito de enfocar o significado Quociente com quantidade discreta, mas não utiliza ícone para representar a situação. A questão apresenta dois itens. No item "*a*" perguntamos quantas bolas de futebol cada criança ganhará, e esse mesmo item não será contabilizado em nossa análise quantitativa, por se tratar de uma divisão por partição em uma situação contextualizada que não é o foco de nossa pesquisa. Apesar disso, o motivo pelo qual incluímos esse item será o de nos certificar que de fato o aluno entendeu que a questão refere-se a uma situação de divisão.

Entendemos que o fator de complexidade possa estar na formalização da resposta, pois, normalmente, há dificuldade do aluno fazer a conexão entre fração e divisão. Isso poderá ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado parte-todo, uma vez que, é mais usual esse significado ser mais trabalhado em situações de sala de aula.

Outro fator de complexidade pode ser o fato de estarmos lidando com quantidades discretas que, em geral, são pouco exploradas nos livros didáticos.

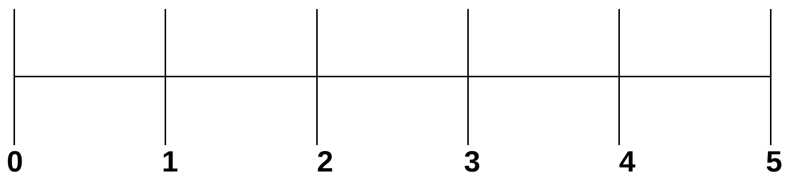
Algumas possibilidades de respostas do item "*b*" poderiam ser:

- $\frac{8}{4}$ Para a resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração com significado de Quociente, ou seja, 8 bolas de futebol para 4 crianças, o que retrata duas grandezas distintas, (bolas de futebol e crianças) caracterizando o significado Quociente;
- $\frac{2}{8}$ Nesta resposta podemos deduzir que, se o aluno acertou o item *a* (2 bolas de futebol para cada criança) ele poderá ter se utilizado desse dado para responder o item "*b*". Assim, esse tipo de resposta poderia nos remeter ao significado Parte-todo, ou seja, cada criança receberá 2 das 8 bolas de futebol. Nesse caso, percebemos que o significado Parte-todo sobressai no entendimento de fração que o aluno possui;
- $\frac{1}{4}$ Nesta resposta podemos observar que, o aluno poderia ter pensado em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de bolas de futebol a serem divididas, pois, o que cada uma das 4 crianças receberá equivale a $\frac{1}{4}$ do total de bolas de futebol.
- $\frac{4}{8}$ ou $\frac{8}{2}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o denominador. Pensamos na possibilidade do aluno responder, como sendo $\frac{4}{8}$,

por acreditar que o aluno, por estar acostumado a ver situações de parte-todo que, na maioria das vezes, o numerador é menor que o denominador.

QUESTÃO 11

REPRESENTE E IDENTIFIQUE AS FRAÇÕES $\frac{1}{2}$ E $\frac{3}{2}$ NA RETA NUMÉRICA ABAIXO:

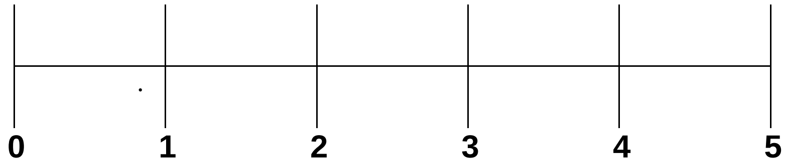


Na questão, estamos dando enfoque ao significado Número da fração, com quantidade contínua, por se tratar de uma reta numérica, apresentando o ícone que será empregado para fazer a marcação das frações indicadas. A idéia envolvida no significado Número da fração é o da notação $\frac{a}{b}$, expressando um número na reta numérica, ou ainda, sua representação na notação decimal.

Entendemos que, o fator de complexidade que possa existir nessa situação ocorre do fato que o aluno poderá não fazer a conexão que a fração representa um número. Isso pode ocorrer, pois o início do ensino do conceito de fração, normalmente, dá-se apoiado no significado Parte-todo, ou seja, relaciona a fração como sendo uma parte do todo.

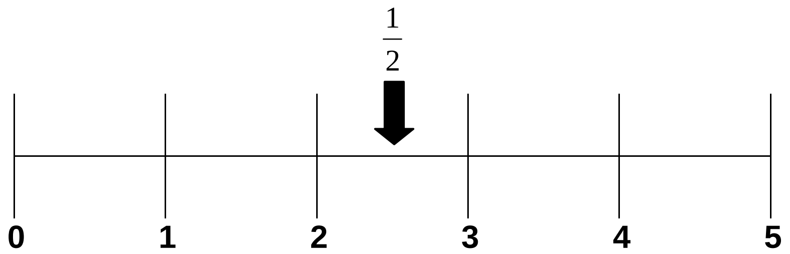
Algumas das possíveis respostas poderão ser:

- $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$



Essa resposta expressa de maneira correta a localização dos pontos $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ na reta numérica;

•



Para esta resposta, poderemos inferir que o aluno considerou a reta numérica como um todo, um inteiro e, a metade desse segmento, o $\frac{1}{2}$ estaria localizado no ponto 2,5.

QUESTÃO 12

EM UMA LOJA DE BRINQUEDOS HAVIA 6 BONECAS IGUAIS. MARIA COMPROU 2 DESSAS BONECAS PARA PRESENTEAR SUAS SOBRINHAS. QUE FRAÇÃO REPRESENTA AS BONECAS QUE MARIA COMPROU EM RELAÇÃO AO TOTAL DE BONECAS DA LOJA?

A questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e não apresenta ícone. O significado Parte-todo é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. A situação representa uma situação estática, ou seja, um conjunto de 6 bonecas, pois Maria comprou 2 dessas bonecas, a quantidade total de bonecas da loja, sendo o denominador e a quantidade de bonecas que Maria comprou representada pelo numerador.

A quantidade discreta no significado Parte-todo, normalmente, é pouco explorada nos livros didáticos, o que nos leva a inferir que esse pode ser o fator de complexidade da questão. Quanto à ausência do ícone, também, poderá ser um outro fator de complexidade, pois o aluno terá de imaginar a situação proposta.

Na questão, temos como possibilidades as seguintes respostas:

- $\frac{2}{6}$ 2 bonecas que Maria comprou para um total de 6 bonecas iguais, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{1}{3}$ Esta poderia ser uma outra possível resposta. No caso, o aluno poderia ter pensado no significado Operador multiplicativo, ou seja, que número multiplicado por 6 dá como resposta o número 2. Podemos inferir ainda que, para que o aluno chegasse a essa resposta ele pode ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$ obtendo a fração $\frac{1}{3}$;
- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{3}{1}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverter o numerador com o denominador e teremos respostas desse tipo;
- $\frac{4}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ O aluno poderá responder de maneira equivocada pensando na relação parte-parte, isto é, 4 bonecas que restaram na loja de brinquedos para 2 que Maria comprou, ou ainda, 2 bonecas que Maria comprou para 4 que restaram na loja de brinquedos.

QUESTÃO 13

FORAM DIVIDIDOS IGUALMENTE 4 CHOCOLATES PARA 5 CRIANÇAS. QUE FRAÇÃO REPRESENTA O QUE CADA CRIANÇA RECEBEU?

A questão foi inspirada no intuito de enfocar o significado Quociente de quantidade contínua, sem representação icônica. Conhecido o número do grupo a ser formado – 5 crianças – o quociente representa o tamanho de cada grupo - $\frac{3}{5}$. Pressupõe, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado parte-todo, pois nas situações de quociente temos 2 variáveis (chocolates e crianças).

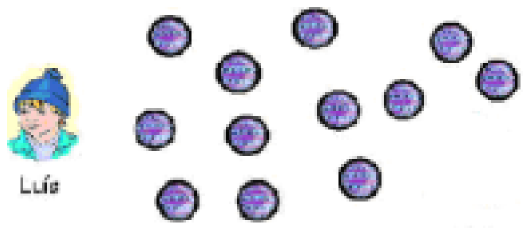
A questão pede ao aluno que represente a divisão chocolate por criança na forma de fração. Apesar da divisão por partição ser estudada desde as séries iniciais e mesmo fora do contexto escolar a criança já ter vivenciado situações que envolvam a operação de partilha, o aluno poderá não fazer a conexão entre a fração e a divisão na formalização da resposta. É possível que esse seja o fator de complexidade da questão.

Algumas possibilidades de respostas à questão poderiam ser:

- $\frac{3}{5}$ Para a resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração com significado de Quociente, ou seja, 3 chocolates para 5 crianças, o que retrata duas grandezas distintas, (chocolates e crianças);
- $\frac{5}{3}$ Nesta resposta, podemos entender que o aluno pensou de maneira correta, mas inverteu a numerador com o denominador.
- $\frac{1}{5}$ Nesta resposta, o aluno poderia ter pensado em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de chocolate a ser dividida, a quantidade que cada criança receberá, será a quinta parte do total.

QUESTÃO 14

OBSERVE A COLEÇÃO DE BOLINHAS ABAIXO:



LUÍS GANHOU $\frac{2}{3}$ DAS BOLINHAS DE GUDE DESTA COLEÇÃO.QUANTAS BOLINHAS DE GUDE LUÍS GANHOU?

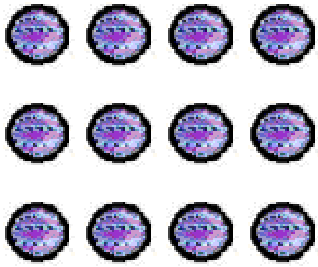
A questão foi inspirada em uma questão apresentada por Nunes et al. (2003), é associada ao significado de Operador multiplicativo, com quantidade discreta e apresenta o ícone que retrata a situação proposta.

O significado Operador multiplicativo tem o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que deve imprimir sobre um número ou quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um Operador multiplicativo, é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ em quantidades discretas atua como um multiplicador divisor. Relacionamos à quantidade discreta por se tratar de bolinhas de gude.

A questão pede ao aluno que tendo uma coleção de 12 bolinhas de gude, ele calcule $\frac{2}{3}$ dessa coleção. O cálculo poderá ser feito multiplicando 12 por 2 e, em seguida, dividindo esse produto por 3. Entendemos que o fator de complexidade da questão é o de saber por qual termo da fração deve-se dividir o

12 (quantidade de bolinhas de gude), se pelo denominador 3 ou se pelo numerador 2, mesmo sendo uma questão explorada em sala de aula.

Por outro lado, o aluno poderá resolver a questão pensando em parte-todo. Para tanto ele poderá reorganizar as bolinhas de gude da seguinte forma:



e pensar que cada linha corresponde a $\frac{1}{3}$ do todo e assim $\frac{2}{3}$ correspondem a 8 bolinhas.

Elegemos algumas das possíveis respostas que podemos encontrar:

- 8 Esta é a resposta tida como correta para essa questão, pois $12 \cdot \frac{2}{3} = 8$;

- 18 Esta poderá ser uma das respostas, pois, como descrevemos anteriormente, o aluno poderá não saber qual termo da fração ele deverá multiplicar, se pelo numerador ou denominador. Assim sendo, poderá pensar em $12 \cdot 3 : 2$. Todavia, a resposta poderá ser descartada pelo aluno, se ele perceber que Luis não poderá dar uma quantidade maior de bolinhas de gude que possui;

- 4 Para esta resposta podemos inferir que o aluno fez apenas a divisão de 12 por 3, desprezando o numerador 2;

- 6 Em relação a esta resposta podemos inferir que o aluno poderá ter dividido 12 por 2 (numerador) e desprezado o 3 (denominador).

QUESTÃO 15

UM BOLO FOI DIVIDIDO IGUALMENTE PARA 3 CRIANÇAS, E 2 BOLOS DE MESMO TAMANHO FORAM DIVIDIDOS IGUALMENTE PARA 6 CRIANÇAS.

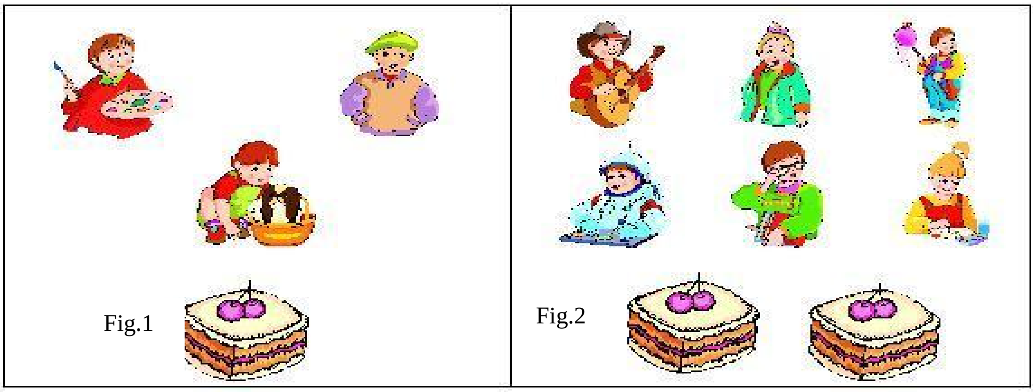


Fig.1 Fig.2

A) AS 9 CRIANÇAS COMERÃO A MESMA QUANTIDADE DE BOLO?
SIM ☐ NÃO ☐

Esta questão foi inspirada em uma das questões da pesquisa de Nunes et al.(2003), tendo como enfoque o significado Quociente com quantidade contínua e apresenta ícone que retrata a situação proposta, caracterizado pelo fato de termos duas grandezas distintas, bolos e crianças.

Esta questão será analisada somente no que diz respeito a uma dos invariantes da fração que é a Equivalência; o aluno deverá perceber que a quantidade de bolo que cada criança receberá será a mesma.

Entendemos que para responder “Sim” à esta questão, o aluno observará somente a figura e não, necessariamente, recorrendo às frações que expressam a parte do bolo – $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ respectivamente – que cada criança recebeu.

QUESTÃO 16

GUSTAVO TINHA UMA COLEÇÃO DE 15 SOLDADINHOS DE CHUMBO E DEU A SEU PRIMO FERNANDO $\frac{3}{5}$ DE SUA COLEÇÃO. QUANTOS SOLDADINHOS DE CHUMBO GUSTAVO DEU A FERNANDO?

A questão está associada ao significado de Operador multiplicativo, com quantidade discreta e não apresenta o ícone que retrate a situação proposta. O significado Operador multiplicativo exerce o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um Operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ em quantidades discretas atua como um multiplicador divisor. Relacionamos a quantidade discreta por se tratar de soldadinhos de chumbo.

A questão pede ao aluno que baseado em uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo, calcule $\frac{3}{5}$ dessa coleção. O cálculo poderá ser feito multiplicando 15 por 3 e, em seguida, dividindo esse produto por 5. Entendemos que o fator de complexidade da questão é saber por qual termo da fração deve-se dividir o 15, se pelo denominador 5 ou se pelo numerador 3, mesmo sendo uma questão explorada em sala de aula.

Não descartamos o fato do aluno pensar como Parte-todo. Caso ele faça o desenho dos soldadinhos da seguinte maneira: (S representa o possível desenho do aluno)

S S S
S S S

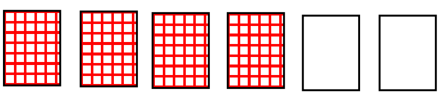
S S S
S S S
S S S

e pensar que cada linha representa $\frac{1}{5}$, a soma das três linhas dará a resposta correta (9 soldadinhos de chumbo).

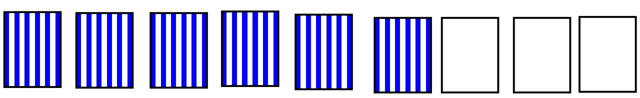
Elegemos algumas das possíveis respostas que podemos encontrar:

- 9 Esta é a resposta tida como correta para essa questão, pois $15 \cdot \frac{3}{5} = 9$;
- 25 Esta poderá ser uma das respostas, pois, como descrevemos, anteriormente, o aluno poderá não saber por qual termo da fração ele deverá multiplicar, se pelo numerador ou denominador. Assim sendo, ele poderá pensar em 15 **.** 5 **:** 3. Todavia, essa resposta poderá ser descartada ou não pelo aluno, afinal Gustavo não poderá dar uma quantidade maior de soldadinhos de chumbo que possui;
- 3 Para essa resposta, podemos inferir que o aluno fez apenas a divisão de 15 por 5, desprezando o numerador 3;
- 5 Em relação a essa resposta, o que podemos inferir, é que o aluno poderá ter dividido 15 por 3 (numerador) e desprezado o 5 (denominador).

QUESTÃO 17



A) QUAL A CHANCE DE TIRAR UMA CARTA BRANCA NESSE BARALHO?



B) QUAL A CHANCE DE TIRAR UMA CARTA BRANCA NESSE BARALHO?
C) EM QUAL DOS DOIS BARALHOS EXISTE MAIOR CHANCE DE SE TIRAR UMA CARTA BRANCA?

A questão enfoca o significado Medida com quantidade discreta e apresenta o ícone. O significado Medida da questão refere-se a quantidades extensivas, ou seja, a quantidade é medida pela relação de duas variáveis. Em outras palavras, a probabilidade desse evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis (2 cartas brancas do item "*a*"), dividido pelo número de casos possíveis, (total de 6 cartas do item "*a*"). Portanto**,** a probabilidade de um evento varia de zero a um.

Essa questão apresenta três itens, mas apenas o item "*a"* será utilizado para fazermos a análise quantitativa. Em relação ao item "*c",* esse tem a função de analisarmos o invariante da fração Equivalência no significado Medida, uma vez que o item "*b"* apresenta uma situação semelhante ao item "*a"* , mudando apenas a quantidade das cartas, porém mantendo a equivalência das cartas brancas nos respectivos baralhos.

Podemos destacar algumas das possibilidades de respostas do item *"a"* :

- $\frac{2}{6}$ Esta é a resposta correta para esse significado, pois a chance de tirar uma carta branca desse baralho é 2 em 6;
- $\frac{1}{3}$ Esta poderá também ser uma resposta, o aluno poderia ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$ por 2 para obter a fração da forma irredutível $\frac{1}{3}$;

- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{3}{1}$ Para estas respostas, podemos inferir que o aluno raciocinou de maneira correta, porém na formalização inverteu os termos do numerador com o denominador;

- $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$ Estas respostas poderão nos remeter à possibilidade do aluno ter pensado na relação parte-parte, ou seja, 2 cartas brancas para 4 vermelhas, ou, 4 cartas vermelhas para 2 cartas brancas.

QUESTÃO 18

REPRESENTE NA FORMA DE NÚMERO DECIMAL AS SEGUINTES FRAÇÕES:

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{10}$

Nesta questão, o significado que procuramos abordar foi o de Número, com quantidade contínua e não há a representação icônica. Admitir o significado Número é reconhecer que os números racionais formam um subconjunto dos números reais e as propriedades associadas com a topológica métrica dizem respeito a sua densidade. Consideraremos quantidade contínua por tratar-se de um número que pode ser representado na reta numérica.

Escolhemos fração $\frac{2}{10}$ por se tratar de uma fração decimal trabalhada em sala de aula, ou seja, estamos supondo que o aluno saiba que essa fração corresponde a dois décimos – 0,2 – e que ainda corresponda a 2 **:** 10. Sendo assim, o nosso propósito é saber se há indícios que o aluno faça a conexão entre fração e o número decimal que essa fração representa.

No que diz respeito à escolha da fração $\frac{1}{5}$, é por ser equivalente a $\frac{2}{10}$, o que poderia ajudar o aluno a resolver, caso ele perceba a equivalência.

O fator de complexidade que pode existir nessa situação, ocorre do fato que o aluno não faz conexão que a fração representa um número, mas, sim, números sobrepostos. Pode ser que isso decorra do fato que, geralmente, o início do ensino do conceito de fração dá-se com base no significado Parte-todo, relaciona a fração como sendo uma parte do todo.

Quanto às possibilidades de respostas temos:

- 0,2 e 0,2;
- 1,5 e 2,10 Entendemos que teremos esse tipo de resposta, pois no nosso Estudo Piloto obtivemos grande parte das respostas como sendo 1,5. Há $\frac{a}{b}$ indícios que o aluno não relaciona a fração com o número decimal, fortalecendo a idéia de que eles pensam na fração como números sobrepostos.

QUESTÃO 19

JOÃO GANHOU UM CHOCOLATE E MARIA GANHOU UM OUTRO CHOCOLATE DE MESMO TAMANHO. JOÃO COMEU $\frac{1}{2}$ DE SEU CHOCOLATE, ENQUANTO QUE MARIA COMEU $\frac{1}{4}$ DO CHOCOLATE DELA. QUEM COMEU MAIS CHOCOLATE? COMO VOCÊ CONVENCERIA SEU AMIGO QUE SUA RESPOSTA ESTÁ CORRETA?

A questão enfoca o significado Operador multiplicativo com quantidade contínua e não apresenta ícone. O significado Operador multiplicativo nessa questão propõe-se a delimitar a quantidade que Maria e João comeram de seus respectivos chocolates, ou seja, reduz o chocolate inteiro de Maria em 4 partes iguais e toma 1 delas, assim como o chocolate de João em 2 partes iguais tomando 1 delas.

Partindo do pressuposto que, geralmente, o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculos) que representam chocolate, pizza, entendemos que essa questão será facilmente compreendida pelos alunos, mesmo que não tenha a presença do ícone.

Todavia, a relação inversa que a fração apresenta quando os numeradores são iguais (nessa questão o numerador é 1), quanto maior o denominador menor a fração, poderá vir a ser o fator de complexidade para a resposta do aluno. O invariante Ordem da fração por ser diferente do conjunto dos números Naturais poderá ser a grande dificuldade do aluno perceber e aceitar que $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{4}$, pois, afinal no números Naturais 4 é maior que 2.

Algumas das possíveis respostas são:

- João comeu mais porque $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{4}$;
- Maria comeu mais porque $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$.

Uma vez feito o detalhamento de nosso estudo principal, passaremos a descrever os procedimentos adotados para a aplicação do mesmo que nos permitiu a coleta de dados.

4.3.3 PROCEDIMENTOS

O instrumento diagnóstico foi aplicado coletivamente em dois dias de visita no período vespertino, um dia em cada escola. Queremos deixar claro que nas duas escolas, a coleta de dados foi feita com 60 alunos, 30 de 5ª série e 30 de 6ª série do Ensino Fundamental em dois momentos distintos, de maneira análoga.

Entramos na sala com uma das professoras, onde todos os alunos já se encontravam. Éramos três na sala de aula: a professora da sala, o observador e a pesquisadora.

A presença da professora da sala teve como finalidade garantir uma maior disciplina entre os alunos, além de que eles poderiam se sentir mais tranqüilos e seguros diante de outras duas pessoas estranhas – pesquisadora e observador.

A presença do observador foi relevante, por fazer parte do mesmo grupo de pesquisa, ele sabia exatamente nosso objetivo, nos ajudou a distribuir os cadernos das questões e garantir que os alunos resolveriam individualmente as questões, sem consultar o colega ou um material qualquer, por exemplo, livros e cadernos. A pesquisadora, maior interessada, exerceu presença fundamental para o bom andamento da coleta de dados, que detalhamos a seguir.

Assim que entramos na sala de aula, a professora apresentou-nos e deu-nos a palavra. De início a pesquisadora apresentou-se e justificou sua presença, dizendo que se tratava de uma pesquisa e os testes que eles iriam receber e responder eram de questões de matemática, não especificando o conteúdo pois, pela nossa prática podemos supor que fração é um dos conteúdos que os alunos têm mais aversão.

Algumas instruções foram dadas logo no início: o teste não valeria nota, os alunos iriam responder individualmente, sem consulta quer seja de livro didático, caderno ou ainda, da pesquisadora, do observador ou da professora da sala, a não ser de uma ou outra palavra ou termo utilizado no enunciado da questão, que não tivesse entendido. Deixamos claro que não responderíamos indagações do tipo: “Está correta a minha resposta?” Para tanto responderíamos com outra indagação: “É assim que você pensa?”.

Outras instruções foram: que houvesse silêncio do início da aplicação até que o último aluno entregasse o teste respondido; as questões poderiam ser respondidas a lápis ou a caneta; assim que recebessem o caderno colocassem seu nome, idade e série que cursavam.

As questões foram lidas e repetidas na ordem que se encontravam no caderno de questões, uma a uma em voz alta pela pesquisadora.

Tivemos essa conduta por dois motivos, o primeiro foi para garantirmos que eles entenderiam a questão do ponto de vista lingüístico, pois é sabido que alguns alunos de 5ª e 6ª séries poderiam ter ainda dificuldade com leitura, e o nosso interesse é não deixar que a habilidade da leitura interfira na resolução do problema matemático. O segundo motivo é que Moutinho (2005) aplicou o mesmo instrumento aos alunos de 4ª série com essa mesma metodologia, o que nos permite confrontar e comparar os dados.

A disposição das questões no caderno, uma em cada página, teve exatamente esse propósito, a leitura de maneira pausada e uniforme do pesquisador em voz alta, seguida da repetição. Após as duas leituras, seria dado um tempo para que pudessem responder a referida questão e, conforme todos, ou pelo menos a maioria já tivesse respondido, passaríamos à próxima questão, pois a leitura era coletiva.

Com base nessas instruções, os cadernos das questões foram distribuídos pela pesquisadora que contou com a ajuda do observador e do professor da sala.

A duração da aplicação do teste foi de, aproximadamente, 50 minutos, (1 hora/aula). Quando todos os alunos entregaram os cadernos das questões, a pesquisadora retomou a palavra, agradecendo a colaboração da professora por ceder sua aula, assim como a todos alunos que, de maneira geral, colaboraram de maneira efetiva para nosso propósito.

Novamente, assim que deu o sinal de início de mais uma aula, entramos com a segunda professora e repetimos o processo acima detalhado.

Nas visitas feitas às duas escolas, no final de cada aplicação do instrumento, fomos indagados pelos alunos se eles teriam acesso ao resultado do teste, o que a nosso ver, pôde demonstrar o interesse e o esforço que os alunos tiveram ao responder o instrumento.

De posse dos questionários já respondidos, apuramos e iniciamos a análise das respostas. Pautados nisso selecionamos alguns desses questionários para posterior entrevista com os alunos. A entrevista foi feita individualmente com o aluno e seu respectivo questionário no horário de sua aula.

No próximo capítulo, faremos a análise em dois momentos; no primeiro a análise quantitativa, o número de acerto e erro de cada questão contida nos questionários. No segundo momento, a análise qualitativa das estratégias utilizadas e os erros cometidos pelos alunos na resolução das questões propostas.

CAPÍTULO V
ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo destina-se a apresentar os resultados obtidos pela análise do questionário e, posteriormente, pela análise das entrevistas de 12% dos alunos que responderam o questionário. Tal procedimento permite dividir a análise em duas etapas. A primeira será dedicada à análise quantitativa dos dados, detendo-se nos índices de acertos totais, de acertos por significado e de acertos por variáveis – quantidades contínuas e discretas, representação icônica e não icônica, além dos invariantes ordem e equivalência.

Na segunda etapa, será apresentada a análise qualitativa dos resultados, com base na resolução das questões propostas e, depois, na entrevista clínica, essa análise procurará identificar quais as estratégias utilizadas pelos alunos.

Identificadas algumas dessas estratégias de resolução serão criadas o que denominamos de categorias de análise. Iremos qualificar as respostas dos alunos obtidas nos questionário, assim como nas respostas obtidas nas entrevistas.

Nas análises, procuraremos perceber os invariantes operatórios, definidos por Vergnaud (1988) no capítulo 2, contidos nas estratégias utilizadas pelos alunos para responderem as questões propostas.

5.1 ANÁLISE QUANTITATIVA

A análise quantitativa será iniciada, observando o número e o percentual de acertos de cada uma das séries estudadas. Cabe relembrar que nosso teste foi aplicado em duas escolas públicas distintas, denominadas Escola A e Escola B, com o intuito de ter um número maior de alunos em mais de uma região da cidade de São Paulo.

Em cada uma dessas escolas, foram coletados dados de 30 alunos da 5ª série e 30 alunos da 6ª série. Com vista a diferenciar cada uma das turmas, passaremos a denominá-las da seguinte maneira: 5ª A e 6ª A para as duas turmas da Escola A, enquanto a 5ª B e 6ª B para as duas turmas da Escola B.

Na análise quantitativa, três enfoques serão considerados: um relacionado aos cinco significados da fração; o segundo diz respeito às variáveis de pesquisa. Com relação ao enfoque "Variáveis" aqui serão considerados: – tipo de quantidade (contínua e discreta) e forma de representação do problema (com ícones ou sem ícones). O terceiro enfoque refere-se aos invariantes da fração – ordem e equivalência. O Quadro 5.1 relaciona os elementos de cada um dos enfoques com as questões propostas.

Além dos cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo, (capítulo 2, seção 2.2) serão observadas as variáveis de pesquisa – quantidades contínua e discreta; representações icônica e não icônica.

QUADRO 5.1: Distribuição das questões em relação aos significados, às variáveis e aos invariantes

A ANÁLISE SOB TRÊS ENFOQUES

Enfoque 1

SIGNIFICADOS	QUESTÕES
Número	11 e 18
Parte-todo	1; 4; 8b e 12
Quociente	2b; 6c; 10b e 13
Medida	3; 5b; 9 e 17a
Operador Multiplicativo	7; 14; 16 e 19

Enfoque 2

VARIÁVEIS	QUESTÕES
Contínua Icônica	5b; 6c; 7; 8b e 11
Contínua Não Icônica	4; 9; 13; 18 e 19
Discreta Icônica	1; 2b; 14 e 17a
Discreta Não Icônica	3; 10b; 12 e 16

Enfoque 3

INVARIANTES	QUESTÕES
Ordem	19
Equivalência	5a, 15 e 17c

O Enfoque 1 tem como finalidade apresentar as questões de acordo com o significado, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003).

O significado Número é o único que apresenta apenas duas questões, pois, ao admitir a fração com o significado de Número, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para nos remeter a essa idéia.

O Enfoque 2 apresenta questões, segundo duas variáveis – quantidades discretas/ contínuas e representação icônica/não icônica. O Enfoque 3 apresenta as questões relacionadas aos invariantes da fração – ordem e equivalência.

Uma vez feita análise sob os Enfoques 1, 2, o próximo passo será mesclar esses dois enfoques para observarmos o que de fato ocorreu em cada um dos cinco significados, com relação às variáveis de pesquisa. Em seguida, faremos a análise do Enfoque 3.

Desse modo, para a análise quantitativa sob os enfoques 1 e 2, consideraremos 18 itens de questões. Isso significa que, para cada turma, 5ª séries A e B e 6ª séries A e B, poderíamos obter no máximo um total de 540 respostas corretas. Como análise preliminar, os dados da Tabela 5.1 apresentam o resultado geral das quatro coletas:

Tabela 5.1: Total e percentual de acertos das turmas 5ª A, 5ª B, 6ª A e 6ª B.

Série	Total de Acertos	% de Acertos
5ª A	109 de 540	20,19%
5ª B	105 de 540	19,44%
6ª A	133 de 540	24,63%
6ª B	110 de 540	20,37%
Total	457de 2160	21,16%

Analisando o índice total de sucesso dos alunos, os dados da Tabela 5.1 mostram que o desempenho dos alunos foi muito baixo. No total das quatro turmas, a média do índice de acerto foi de 21,16%, indicando um resultado insatisfatório.

Ao realizar uma análise do índice de cada uma das turmas, os dados da Tabela 5.1 demonstram que as porcentagens de acertos da 5ª A, 5ª B, 6ª A e 6ª B, foram muito próximas. Entre o maior e o menor índices de acertos tivemos 5,19 pontos percentuais, que nos parece uma diferença irrelevante, o que poderíamos descrever como se fosse um único grupo.

Se compararmos os percentuais de sucesso entre os alunos das 5ª séries A e B e os alunos das 6ª séries A e B, os índices de acerto foram ainda mais próximos. Há uma diferença de 0,75 pontos percentuais entre as 5ª séries, ao passo que entre as 6ª séries a diferença é de 4,26 pontos percentuais. Entendendo que as duas diferenças em pontos percentuais entre as 5ª séries A e B (0,75 pontos) e as 6ª séries A e B (4,26 pontos) são irrelevantes, não justifica tratarmos as turmas de cada série isoladamente.

Tendo exposto a composição dos grupos – 5ª série formada pela junção das duas turmas e 6ª série formada pela junção das duas turmas – passaremos, a seguir, a analisar, os resultados de acordo com os dois enfoques já relatados anteriormente.

5.1.1 Enfoque 1 – Os significados

Na análise, iremos considerar a classificação dos cinco significados (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo) devidamente explicados e explorados na seção 2.2 do Capítulo 2. Aqui caberia um questionamento: sob esse enfoque, será que a homogeneidade permeia as duas séries nos cinco significados pesquisados como apresenta os dados da Tabela 5.1?

Para tentar responder essa questão, começaremos por fazer uma análise isolada do desempenho dos alunos em cada uma das séries para, em seguida, comparar esses desempenhos.

5.1.1.1 5ª Série

Para esta análise iremos considerar os 60 alunos que cursam a 5ª série. Os dados da Tabela 5.2, a seguir, apresentam os resultados obtidos dos alunos da 5ª série, com o percentual de acerto segundo a classificação dos cinco significados:

TABELA 5.2: Descrição dos acertos das questões, a partir dos 5 significados dos alunos da 5ªsérie.

5ª Série	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Mult.	Total de acertos
Acertos %	3 de 120 2,5%	**77 de 240** **32,08%**	57 de 240 23,75%	35 de 240 14,58%	42 de 240 17,5%	214 de 1080 19,81%

Os dados da Tabela 5.2 confirmam um índice geral de acerto muito baixo, 214 respostas corretas das 1.080 respostas possíveis, ou seja, somente 19,81% de acertos. Os alunos da 5ª série tiveram o melhor índice de acerto no significado Parte-todo (32,08%). Podemos deduzir que isso decorre do fato da introdução do conceito de fração começar, normalmente, por esse significado.

Embora o percentual de acerto no significado Parte-todo esteja aquém de um resultado satisfatório, com relação aos resultados apresentados na Tabela 5.1, já temos uma diferença significativa. Ao passo que os dados da Tabela 5.1 mostram que o percentual de acerto geral foi em torno de 19,44% e 20,19% para os alunos da 5ª série; os dados da Tabela 5.2 mostram que esses mesmos alunos acertaram 32,08% no significado Parte-todo.

Se por um lado, no significado Parte-todo os alunos tiveram mais sucesso, em contrapartida no significado Número, os mesmos alunos alcançaram um percentual quase nulo (2,5%), ficando bem abaixo da média de acerto (19,81%) da 5ª série. Podemos inferir que os alunos de 5ª série não entendem a fração como sendo um número.

Na próxima seção, discutiremos os índices de acertos da 6ª série também sob o Enfoque 1 – os significados.

5.1.1.2 6ª Série

Para esta análise, iremos considerar os 60 alunos que cursam a 6ª série. Os dados da Tabela 5.3 apresentam os resultados obtidos dos alunos da 6ª série, com o percentual de acerto segundo a classificação dos significados:

TABELA 5.3: Descrição dos acertos das questões, a partir dos 5 significados dos alunos das 6ªséries A e B.

6ª Série	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Mult.	Total de acertos
Acertos %	4 de 120 3,33%	**85 de 240 35,42%**	52 de 240 21,67%	42 de 240 17,5%	60 de 240 25%	243 de 1080 22,5%

Os dados da Tabela 5.3 exibem um índice geral de acerto muito baixo, 243 respostas corretas das 1.080 respostas possíveis, ou seja, somente 22,5% de acertos. Os alunos da 6ª série tiveram um melhor índice de acerto no significado Parte-todo (35,42%). Apesar desse percentual de acerto estar aquém de um resultado satisfatório, ao compará-lo com o resultado geral da série apresentado na Tabela 5.1, já temos uma diferença significativa a favor do significado Parte-todo.

Ao passo que os dados da Tabela 5.1 mostram um percentual de acerto geral em torno de 19,44 a 25,56% para os alunos da 6ª série, temos que esses mesmos alunos acertaram 35,42% no significado Parte-todo. O resultado pode estar atrelado ao fato de, geralmente, por esse significado o conceito de fração é inserido no contexto escolar.

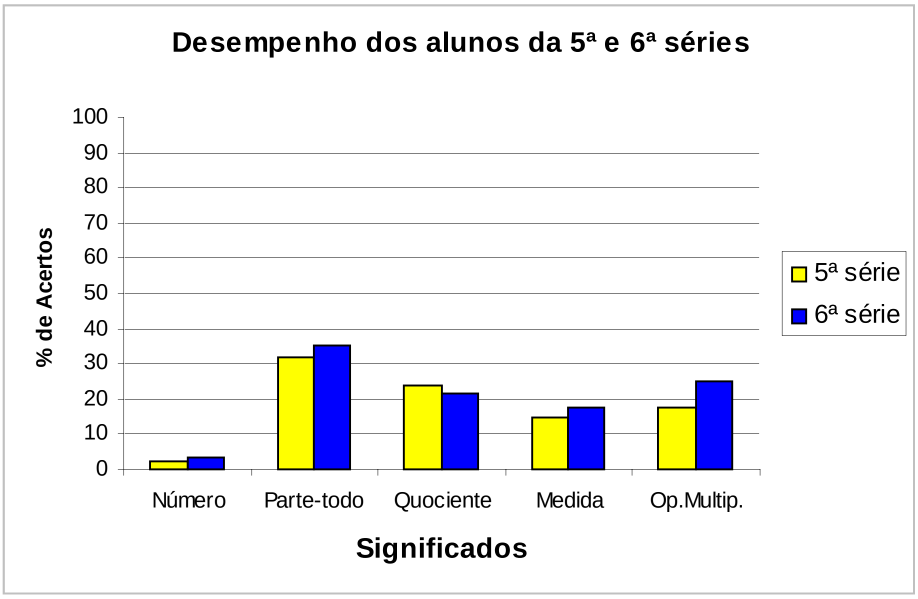
Chama também a atenção, o fato de termos obtido apenas quatro respostas certas (entre as 120 respostas possíveis) no significado Número.

De posse das análises da 5ª e 6ª séries de maneira isolada, a próxima seção apresentará a comparação entre o desempenho das séries.

5.1.1.3 Comparação entre as 5ª e 6ª séries

Nesta seção, faremos a comparação entre os resultados obtidos nas 5ª e 6ª séries pesquisadas, de acordo com o Enfoque 1 (Significados). O Quadro 5.2 retrata a seguinte situação:

QUADRO 5.2: Comparação do desempenho dos alunos das 5ª e 6ª séries em relação aos 5 significados.



	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Mult.	Total de acertos
% Acertos 5ª Série	2,5%	**32,08%**	23,75%	14,58%	17,5%	19,81%
% Acertos 6ª Série	3,33%	**35,42%**	21,67%	17,5%	25%	22,5%

No início da seção 5.1.1, fizemos o questionamento se, sob o Enfoque 1 (Significados), a homogeneidade, entre as séries, apresentada nos dados da Tabela 5.1 aparece também em relação aos cinco significados da fração? O

Quadro 5.2 aponta que essa homogeneidade ganha outro contorno levando em consideração o desempenho dos alunos dessas séries com relação aos significados da fração.

Fazendo agora uma análise mais detalhada, observamos que no Quadro 5.2 o significado Parte-todo foi o que apresentou o melhor desempenho entre os alunos da 5ª como da 6ª série. Entendemos que esse resultado poderá estar ligado à maneira pela qual, usualmente, é feita a introdução do conceito de fração, a partir do significado Parte-todo.

Entretanto, notamos que o significado Número apresentou o pior desempenho entre os alunos das 5ª e 6ª séries. A diferença entre os índices de acerto foi 0,83 pontos percentuais. Parece que os alunos da 6ª série continuam não entendendo esse significado, o que poderíamos supor que não houve avanço na aprendizagem.

O baixo desempenho nos remete ao estudo elaborado por Merlini et al (2005), em que foi solicitado a 21 professores de 5ª séries a elaboração de seis problemas, envolvendo o conceito de fração, perfazendo um total de 110 problemas para serem analisados, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). Desse total apenas 16 problemas (14,5%), contemplavam o significado Número; este resultado aponta para uma pouca exploração do significado Número da fração por parte dos professores.

Os dados do Quadro 5.2 ressaltam também, que o significado Medida foi o segundo pior desempenho tanto da 5ª como da 6ª séries.

A homogeneidade entre as séries se desfaz nos significados Quociente e Operador multiplicativo.

No significado Quociente, a 5ª série obteve o segundo melhor desempenho, ultrapassando 2,08 pontos percentuais o desempenho apontado na 6ª série. Embora o desempenho dos alunos da 5ª série, nas questões que envolviam o significado Quociente, tenha sido aquém de um resultado satisfatório, ao compararmos com os outros significados envolvidos (com exceção de Parte-todo) ele se destaca.

Esse resultado vem ao encontro de resultados de pesquisa desenvolvida na Inglaterra por Nunes (2003). Nessa pesquisa e indica que crianças inglesas conseguem compreender melhor o conceito de fração quando este é iniciado a partir de situação representada por um quociente, quer seja a divisão de chocolates para crianças.

Essa conexão que Nunes; Bryant (1996) fazem entre fração e divisão não é acidental, pois, Kieren (1988) baseado em sua análise matemática de números racionais, sugere que as frações são números produzidos por divisões. Sendo assim, as frações são elementos do campo dos quocientes.

No significado Operador multiplicativo, a 6ª série obteve o segundo melhor desempenho. Tivemos a maior diferença entre os desempenhos da 5ª e 6ª séries, 7,5 pontos percentuais. Podemos inferir que essa diferença pode ter sido ocasionada pelo fato que na 6ª série trabalha-se mais com o ensino de operações de fração, então, parece razoável esse melhor desempenho. Aponta para um relativo avanço na aprendizagem (ou no treinamento que esses alunos recebem?).

Tal inferência pode ser reforçada, ainda, com os resultados de pesquisa de Merlini et al. (2005). Dos 110 problemas elaborados pelos professores de 5ª série, 55 (50%) desses problemas referiam-se ao significado Operador multiplicativo, superior ao significado Parte-todo que obteve um total de 35 problemas (31,8%). Esse resultado aponta para uma valorização de problemas que envolvem o significado Operador Multiplicativo, por parte dos professores.

Constatamos, ainda, que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas um desempenho eqüitativo entre os cinco significados da fração.

Na próxima seção analisaremos os resultados segundo o enfoque das variáveis quantidades contínuas/ discretas, icônicas/não icônicas.

5.1.2 Enfoque 2 – As variáveis

Na análise, iremos considerar as variáveis utilizadas na elaboração das questões – quantidades contínua icônica versus não icônica; quantidades discreta icônica versus não icônica. Para cada significado, com exceção do Número, foram elaboradas quatro questões abordando cada uma dessas variáveis.

O significado Número contemplou apenas a quantidade contínua icônica e contínua não icônica.

Aqui caberia um questionamento: sob esse enfoque, será que essa homogeneidade permeia as duas séries nas variáveis de pesquisa como apresentam os dados da Tabela 5.1?

Para tentar responder a questão, iniciaremos por fazer uma análise, a princípio isolada do desempenho dos alunos em cada uma das séries e, em seguida, uma análise comparativa do desempenho das duas séries.

5.1.2.1 5ª Série

Para esta análise, iremos considerar os 60 alunos que cursam a 5ª série. A tabela, a seguir, apresenta o resultado obtido dos alunos da 5ª série, com o percentual de acerto segundo as variáveis – quantidades contínua icônica versus não icônica; quantidades discreta icônica versus não icônica.

TABELA 5.4: Acertos das questões a partir das variáveis de pesquisa 5ª Série.

Série	Repr / Qtde	I	ÑI	TOTAL
5ª	C	**61 de 300 20,33%**	44 de 300 14,67%	105 de 600 17,5%
	D	41 de 240 17,08%	**68 de 240 28,33%**	109 de 480 22,71%
TOTAL		102 de 540 18,89%	112 de 540 20,74%	214 de 1080 19,81%

Legenda:
C – QUANTIDADE CONTÍNUA **D – QUANTIDADE DISCRETA**
I – REPRESENTAÇÃO ICÔNICA **ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA**

Os dados da Tabela 5.4 mostram que, ao observarmos os totais das colunas, percebemos que os alunos da 5ª série obtiveram melhor êxito, porém pouco expressivo (1,85 pontos percentuais), na representação não icônica.

Quando observamos as linhas, percebemos que o desempenho dos alunos foi sensivelmente melhor na quantidade discreta em detrimento à quantidade contínua (5,21 pontos percentuais).

Em uma análise geral, poderíamos afirmar que as quantidades contínua e discreta foram as que mais interferiram no desempenho dos alunos da 5ª série, em relação às representações icônica e não icônica.

Entretanto, ao fazer a combinação entre as quantidades (contínua/discreta) e as representações (icônico/não icônico) percebemos resultados distintos.

Os dados da Tabela 5.4 retratam que, as questões elaboradas do teste que utilizaram quantidade contínua com representação icônica, facilitaram o desempenho dos alunos de 5ª série. Podemos perceber que a diferença entre a quantidade contínua icônica e não icônica foi de 5,66 pontos percentuais, a favor da primeira.

Entretanto, no que diz respeito às questões elaboradas que utilizaram quantidade discreta, o índice maior de acerto ficou para a representação não icônica (diferença de 11,25 pontos percentuais a favor da representação não icônica). Nesse caso, podemos inferir que o ícone não foi relevante para o sucesso dos alunos na quantidade discreta.

Em seguida, na próxima seção, analisaremos os resultados encontrados na 6ª série, segundo o Enfoque 2 – as variáveis.

5.1.2.2. 6ª SÉRIE

Para esta análise iremos considerar os 60 alunos que cursam a 6ª série. Os dados da Tabela 5.5 apresentam o resultado obtido dos alunos da 6ª série, com o percentual de acerto, segundo as variáveis – quantidades contínua icônica versus não icônica; quantidade discreta icônica versus não icônica.

TABELA 5.5: Descrição dos acertos das questões a partir das variáveis de pesquisa alunos 6ª Série.

Série	Repr / Qtde	I	ÑI	TOTAL
6ª	C	**74 de 300 24,67%**	65 de 300 21,67%	139 de 600 23,17%
	D	36 de 240 15%	**68 de 240 28,33%**	104 de 480 21,67%
TOTAL		110 de 540 20,37%	133 de 540 24,63%	243 de 1080 22,5%

Legenda:
C – QUANTIDADE CONTÍNUA **D – QUANTIDADE DISCRETA**
I – REPRESENTAÇÃO ICÔNICA **ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA**

Os dados da Tabela 5.5 descrevem que, ao analisarmos o total das colunas, percebemos que houve uma diferença de 4,26 pontos percentuais a favor da representação não icônica em detrimento da representação icônica.

De posse desta mesma Tabela 5.5, ao observarmos os totais das linhas, percebemos que os alunos da 6ª série obtiveram melhor êxito, porém pouco expressivo (1,5 pontos percentuais), na quantidade contínua em relação à quantidade discreta.

Em uma análise geral, poderíamos afirmar que as representações icônica e não icônica foram as que mais interferiram no desempenho dos alunos da 6ª série, em relação às quantidades contínua e discreta.

Em contrapartida, ao fazer a combinação entre as quantidades (contínua/discreta) e as representações (icônico/não icônico), percebemos resultados distintos.

Os dados da Tabela 5.5 indicam que a representação icônica, utilizada nas questões do instrumento, facilitou o desempenho dos alunos da 6ª série na quantidade contínua, pois a diferença foi de três pontos percentuais entre quantidade contínua icônica e não icônica.

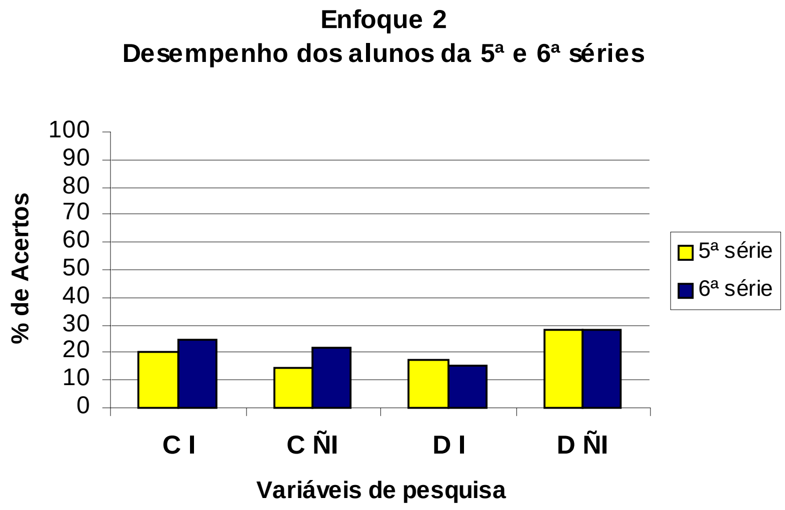
Entretanto, no que diz respeito à quantidade discreta, o índice maior de acerto ficou para a representação não icônica, (diferença de 13,33 em pontos percentuais em relação à representação icônica). Nesse caso, podemos inferir que o ícone não foi relevante para o sucesso dos alunos da 6ª série na quantidade discreta.

Em seguida, na próxima seção, faremos a análise comparativa dos resultados encontrados nas 5ª e 6ª séries, segundo o Enfoque 2 Variáveis.

5.1.2.2 Comparação entre as 5ª e 6ª séries

Nesta seção, faremos a comparação entre os resultados obtidos nas 5ª e 6ª séries pesquisadas no que diz respeito ao Enfoque 2 Variáveis. O quadro a seguir retrata a seguinte situação:

QUADRO 5.3: Comparação do desempenho dos alunos das 5ª e 6ª séries em relação às Variáveis



Série	Repr / Qtde	I	ÑI
5ª	**C**	**20,33%**	14,67%
	D	17,08%	**28,33%**
6ª	**C**	**24,67%**	21,67%
	D	15%	**28,33%**

Legenda:
C – QUANTIDADE CONTÍNUA **D – QUANTIDADE DISCRETA**
I – REPRESENTAÇÃO ICÔNICA **ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA**

De posse dos dados do Quadro 5.3, podemos responder ao questionamento se sob esse enfoque, a homogeneidade permeia as duas séries nas variáveis de pesquisa como apresenta os dados da Tabela 5.1. Poderíamos afirmar que a homogeneidade aqui, assim como no Enfoque 1, ganha outro contorno.

Os dados do Quadro 5.3 apontam que os resultados obtidos na 5ª e 6ª séries seguiram uma mesma tendência. Os alunos da 5ª e 6ª séries tiveram o melhor desempenho para a quantidade contínua com representação icônica, ao passo que para a quantidade discreta o melhor desempenho foi notado na representação não Icônica.

Além disso, apenas na quantidade discreta icônica que os alunos da 5ª série conseguiram ultrapassar em 2,08 pontos percentuais em relação ao desempenho dos alunos da 6ª série. Entretanto, os alunos da 6ª série conseguiram melhor êxito (7 pontos percentuais) na representação não icônica em relação ao desempenho dos alunos de 5ª série, o que podemos supor que a 6ª série se sobressai ao manusear dados numéricos.

Desse modo, podemos inferir que, assim como no Enfoque 1, o Enfoque 2 também tem sinais de que essa homogeneidade não é mais tão visível, como no início de nossa análise. Parece que não há um padrão ou tendência do desempenho dos alunos, segundo esta ou aquela variável, ao contrário, o que se observa é que a combinação das variáveis segue semelhante nos dois grupos (5ª e 6ª séries). O dado parece ser uma das contribuições relevantes do nosso estudo, pois não encontramos pesquisas que salientem que essas variáveis possam interferir.

Nossa próxima seção fará a análise baseada na mescla entre resultados encontrados nos Enfoques 1 e 2 já analisados.

5.1.3 Mesclando enfoque 1 e enfoque 2

Esta seção tem como objetivo cruzar e comparar os resultados obtidos nas 5ª e 6ª séries sob o Enfoque 1 e o Enfoque 2 para inquirir, indagar a respeito da homogeneidade apontada na Tabela 5.1.

Para tanto, elaboramos a tabela abaixo que apresenta o desempenho das 5ª e 6ª séries com relação às variáveis – quantidades contínuas e discretas, representação icônica e não icônica, devidamente definidas e explicadas no Capítulo 2 – dentro de cada um dos cinco significados.

Tabela 5.6: Comparação do desempenho dos alunos de 5ª e 6ª com relação aos significados e às variáveis.

SÉRIES \ SIGNIF		Número		Parte-todo		Quociente		Medida		Op.Multipl.	
		I	**Ñ I**	**I**	**Ñ I**	**I**	**Ñ I**	**I**	**Ñ I**	**I**	**Ñ I**
5ª	**C**	3	0	7	25	9	11	13	1	**29**	7
	D	-	-	16	**29**	16	21	8	13	1	5
6ª	**C**	2	2	9	24	12	16	12	10	**39**	13
	D	-	-	18	**34**	7	17	8	12	3	5

Cabe relembrar que a amostra de pesquisa conta com 60 alunos da 5ª e 60 alunos da 6ª séries, portanto, para cada uma das células da Tabela 5.6 o desempenho dos alunos poderia atingir até o máximo de 60 questões tidas como corretas.

Para a análise dos dados da Tabela 5.6 destacamos os significados na ordem que aparecem, portanto, iniciaremos pelos significado Número. Nesse item, apesar do baixo desempenho, de apenas 3 corretas para as 60 respostas possíveis, na 5ª série parece que o apoio icônico ajudou, ao passo que na 6ª série não houve diferença alguma entre a representação icônica e não icônica.

Esse baixo desempenho nos remete aos resultados encontrados na pesquisa feita por Kerslake (1986). Um dos aspectos de sua pesquisa fazia referência se seus alunos eram capazes de pensar frações como números ou se eles pensavam que a palavra "número" implicaria somente a números inteiros.

Na pesquisa a autora analisa algumas dificuldades apresentadas pelos alunos em conceber 3:5 como sendo $\frac{3}{5}$, argumentando que tal dificuldade pode estar relacionada ao fato de que os alunos não conectam a divisão (3:5) à representação fracionária $\frac{3}{5}$.

O significado Parte-todo apresenta semelhanças no desempenho das 5ª e 6ª séries, embora a quantidade discreta não icônica destaque um desempenho mais forte na 6ª série. Além disso, observamos que, para as questões do significado Parte-todo, o ícone não foi o agente facilitador para as duas séries, pois nas quantidades contínua e discreta o melhor desempenho dos alunos foi nas questões não icônicas.

Percebemos, também, como já havíamos citado na seção 5.1.1.3, foi o significado que os alunos obtiveram maior êxito. O melhor desempenho pode estar atrelado ao início do ensino do conceito de fração, que, normalmente, aborda o significado Parte-todo.

Somado a isso, temos também a abordagem de fração feita pelos livros didáticos do 3º ciclo por nós descrita no Capítulo 3, na seção 3.4, que consideramos importante relembrar nesse momento. Embora seja a partir do 3º ciclo o início do ensino das operações com as frações, a abertura do capítulo de Fração de tais livros, permeia o significado Parte-todo. É possível que esse fato justifique em parte o melhor desempenho dos alunos, diante de questões que envolvam o significado Parte-todo.

Entretanto esse melhor desempenho, como já citamos, está aquém de um resultado satisfatório. Nos estudos feitos por Nunes; Bryant (1996) a relação Parte-todo pode induzir a um procedimento de dupla contagem e transmitir a falsa idéia de que tal situação tenha sido de fato compreendida.

Em seus estudos, Pothier; Sawada (1990) apontam que os livros-texto limitam o uso de modelos físicos no trabalho introdutório das frações. Os autores evidenciam que os alunos, ao completarem tais exercícios, não necessariamente atentam às propriedades geométricas da figura (inteiro) ou das partes e, normalmente, nomeiam como frações as partes não iguais de um inteiro. Dessa forma, os autores alegam que os exercícios baseados em diagramas de figuras podem representar parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos no trabalho com o conceito de fração.

Ao analisarmos o significado Quociente, observamos que esse significado foi o segundo melhor desempenho dos alunos da 5ª série (seguido do significado Parte-todo citado acima), e o terceiro melhor desempenho dos alunos da 6ª série (seguido do significado Operador multiplicativo já comentado na seção 5.1.1.3 deste capítulo).

Embora o desempenho das séries envolvidas nas questões que abrangiam o significado Quociente, tenha sido aquém de um resultado satisfatório, ao compararmos com os outros significados envolvidos (com exceção de Parte-todo), ele se destaca, entendemos que esse dado possa ser relevante.

Esse dado nos reporta a uma das conclusões feitas por Kerslake (1986). A autora parte da argumentação que o número racional não faz parte do meio natural dos alunos. Ela conclui que o entendimento do número racional como elemento do campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Para tanto, conforme a autora, há necessidade de se estender o modelo Parte-todo e incluir o aspecto Quociente da fração.

No que diz respeito ao significado Medida houve semelhança entre a 5ª e 6ª séries somente no melhor desempenho, ou seja, na quantidade contínua icônica e quantidade discreta não icônica. Por outro lado, enquanto a 5ª série teve apenas uma questão certa na quantidade contínua não icônica, a 6ª série teve 10 nesse mesmo item.

Finalmente, analisando o significado Operador multiplicativo, temos comportamentos semelhantes nas 5ª e 6ª séries. O melhor desempenho em ambas as séries foi na quantidade contínua icônica, sendo que a 6ª série obteve o melhor resultado em relação à 5ª série. Esse melhor desempenho da 6ª série pode estar atrelado ao fato de que esse tipo de questão ter sido mais trabalhado em sala de aula com esses alunos.

Diante do exposto e voltando a questão inicial, embora os resultados apresentados nos dados da Tabela 5.1 indiquem resultados muito próximos entre a 5ª e 6ª séries, as análises feitas sob o Enfoque 1 e 2 e logo após a mescla desses dois enfoques, assinalaram que, de uma maneira geral, a homogeneidade adquiriu outro contorno. Porém, pudemos perceber na análise quantitativa, em alguns casos assinalados, a mesma tendência de desempenho dos alunos de 5ª e 6ª séries.

Finalizando, constatamos que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, desempenho eqüitativo entre os cinco significados da fração da classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). Os dados da Tabela 5.6 revelam que, enquanto os alunos das duas séries juntas acertaram, 162 das 480 respostas possíveis das questões que abordavam o significado Parte-todo (33,75%), em contrapartida esses mesmos alunos acertaram 7 das 240 respostas possíveis (2,92%) das respostas possíveis das questões que contemplavam o significado Número.

Esse dado é relevante e preocupante, pois ao retomarmos as idéias teóricas de Vergnaud (1988, 1990) temos que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de uma variedade de situações e que cada situação, normalmente, não pode ser analisada com ajuda de apenas um conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais do que um conceito e, em contrapartida, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

5.1.4 Enfoque 3 – Os invariantes

Nesta análise iremos considerar os invariantes da fração, o segundo componente da terna da Teoria dos Campos Conceituais devidamente explicados e explorados na seção 2.2 do Capítulo 2.

Cabe ressaltar que o foco de nossa pesquisa é perceber quais as estratégias que os alunos se utilizam para frente a questões que abordam os cinco significados da fração da classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003), porém, mesmo assim elaboramos questões que contemplam os invariantes da fração – ordem e equivalência.

De acordo com os dados apresentados na Tabela 5.1, o Enfoque 3 que analisa os invariantes é composto de quatro questões. A questão 19 que envolve o significado Operador multiplicativo de quantidade contínua e sem representação icônica e traz o invariante ordem.

As questões 5a, 15 e 17c abordam o invariante equivalência da fração. A questão 5a faz referência ao significado Medida de quantidade contínua e representação icônica, ao passo que a questão 15 contempla o significado Quociente de quantidade contínua e representação icônica. Quanto à questão 17c esta aborda o significado Medida de quantidade discreta e representação icônica.

Para essa análise iremos considerar os 60 alunos que cursam a 5ª série e os 60 alunos que cursam a 6ª série separadamente. Os dados da Tabela 5.7 apresentam os resultados obtidos dos alunos da 5ª e 6ª série, com o percentual de acerto segundo os invariantes – ordem e equivalência.

Tabela 5.7: Desempenho dos alunos de 5ª e 6ª com relação aos invariantes do conceito de fração.

Invariantes / Séries	ORDEM	EQUIVALÊNCIA			TOTAL
	Q19	Q5a	Q15	Q17c	
5ª	7 de 60	29 de 60	37 de 60	1 de 60	74 de 240 30,83%
6ª	13 de 60	28 de 60	42 de 60	3 de 60	86 de 240 35,83
TOTAL	20 de 120 16,67%	57 de 120 47,5%	79 de 120 65,83%	4 de 120 3,33%	160 de 480 33,33%

Com base nos dados da Tabela 5.7, podemos observar que embora percebamos o melhor desempenho na 6ª série, os resultados apontam para uma mesma tendência de sucesso entre os alunos das 5ª e 6ª séries. Os melhores índices de acerto foram obtidos na questão 15, seguidos das questões 5a, 19 e 17c.

É relevante destacar que, embora as questões 5a, 19 e 17c abordassem o mesmo invariante equivalência, percebemos que elas têm diferentes graus de dificuldade. Os dados da Tabela 5.7 assim como nos trechos de algumas entrevistas que fizemos, revelam essa percepção. Salientamos que nas entrevistas **P** quer dizer Pesquisador, e **A** o Aluno.

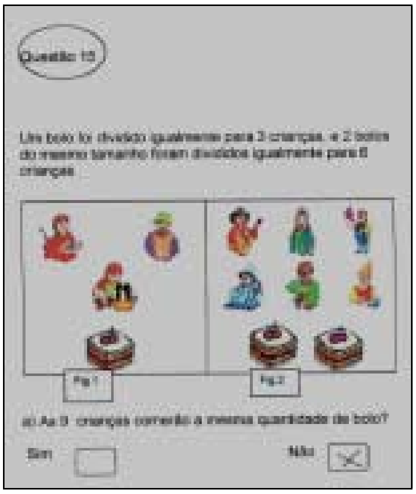


FIGURA 5.1: Questão 15, Aluno 25, 5ª Série

P: Questão 15. Um bolo foi dividido igualmente para três crianças, e dois bolos do mesmo tamanho foram divididos para seis crianças. As nove crianças comerão a mesma quantidade de bolo? Sim ou não? Você respondeu "não". Como é que você pensou?
A: "Ave que burrice"! Era pra ser "sim". Porque olha aqui: três mais três são seis, né? Se tenho um bolo dá pra dividir para três crianças, tudo bem. Agora... E aqui é quase a mesma coisa do ... É o dobro, colocaram o dobro. E eu respondi "não". é "sim".
P: Então é "sim"? Porque um bolo pra três ...
A: É "sim". Porque é a mesma coisa da gente colocar um a mais. Tipo assim, era um bolo e ficou dois bolos. Era três crianças, ficou seis crianças. Dava certo.

ENTREVISTA **5.1:** Questão 15, Aluno 25, 5ª Série

Nessa entrevista, embora o aluno 25 tenha errado a questão, quando a retoma, percebe que cada uma das nove crianças comerá a mesma quantidade de bolo. Entretanto, para que ele pudesse concluir a resposta correta, ele utilizou a relação de dobro entre as crianças e os bolos das figuras 1 e 2. Diante disso, entendemos que o aluno não se reportou às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ para responder afirmativamente.

Na questão 15, é possível que o ícone tenha sido relevante para que muitos alunos pudessem acertar a resposta.

O segundo melhor desempenho do invariante equivalência foi observado na questão 5a. Como exemplo, destacamos a entrevista feita com o aluno 17 da 5ª série que, embora tenha acertado os itens 5b e 5c da questão, responde de maneira equivocada o item 5a.

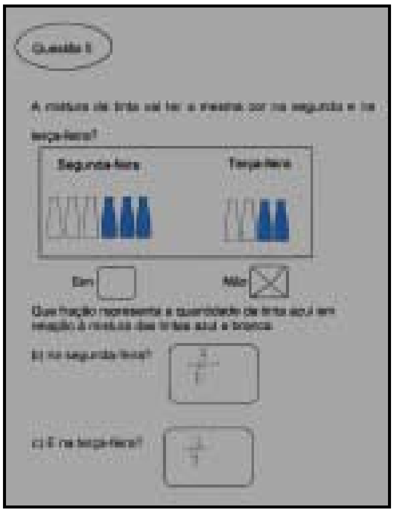


FIGURA 5.2: Questão 5a, Aluno 17, 5ª Série

P: Questão 5. A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira? Aí a gente tem: três garrafinhas de tinta branca e três garrafinhas de tinha azul, na segunda-feira. Na terça-feira duas garrafinhas de tinta branca, duas garrafinhas de tinta azul. E aí você respondeu que "não". Não vai ter a mesma cor. Como é que você pensou para responder que não?

A: Porque aqui tem três e aqui só tem dois pintado.

P: Ah! Então não vai ter a mesma cor?

A: É. Mas agora eu acho que eu fiz errado essa daí, né? Porque ó, é o dobro que tem que ter, não é? Tipo aqui tem seis e tem três pintada. Aqui tem quatro e só tem dois pintado.

P: Seria "sim"?

A: É.

ENTREVISTA 5.2: Questão 5a, Aluno 17, 5ª Série

Nessa entrevista, parece que, também, o fator relevante que fez com que o aluno pudesse perceber seu equívoco, foi o ícone. Este fez com que ele percebesse a relação de dobro entre o total de tintas e a tinta azul, tanto da segunda como na terça-feira.

As frações dadas como resposta pelo aluno 17 nos itens 5b e 5c apesar de estarem corretas, o aluno não percebeu a equivalência entre elas. Podemos inferir que, o fato dos numeradores e denominadores das frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{4}$ não serem múltiplos entre si, dificultou a percepção, por parte do aluno, da equivalência.

Destacamos agora como exemplo da questão 17c, a entrevista feita com o aluno 19 de 5ª série, que esse aluno responde corretamente a os itens 17a e 17b, porém sua resposta no item 17c está errada.

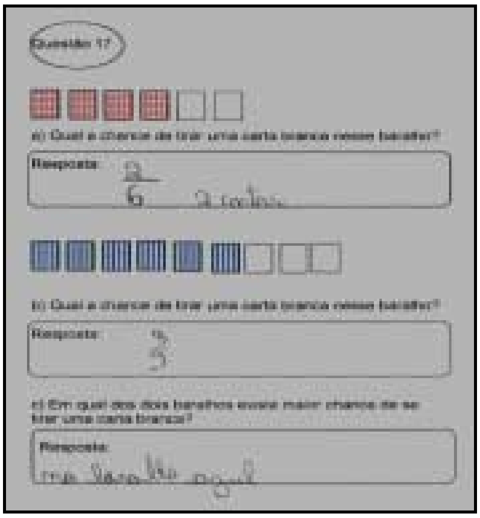


FIGURA 5.3: Questão 17c, Aluno 19, 5ª Série.

P: A questão 17 item c. Em qual dos dois baralhos existe maior chance de se tirar uma carta branca? Você respondeu: "no baralho azul". Como é que você pensou?

A: Porque no azul tinha mais cartas.

P: Ah!, tá.

ENTREVISTA 5.3: Questão 17c, Aluno 19, 5ª Série

Nessa entrevista, parece que para responder o item *c* da referida questão, o foco do aluno não foi nas respostas corretas dadas por ele nos itens *a* e *b*, mas, sim, o ícone. Percebemos isso quando o aluno responde "Porque no azul tinha mais cartas".

Nessa questão, a relação de dobro que os alunos fizeram nas duas questões anteriores (15 e 5a), não daria conta de perceber a equivalência das frações apenas pelo ícone. Mesmo retomando a questão, diferente das questões anteriores, o aluno não reconhece a equivalência das frações.

Nos estudos feitos por Tinoco, Lopes (1994) foram observados resultados semelhantes. Em uma questão enfocando a noção de frações equivalentes, o estudo propôs a seguinte indagação: "$\frac{2}{7} \quad \frac{\square}{14} \quad \frac{10}{\triangle}$. Qual o valor do quadrado? Qual o valor do triângulo?"

As autoras levantaram como hipótese para essa questão que a dificuldade residia na presença da fração intermediária. A hipótese foi confirmada na entrevista, visto que o aluno afirmou que o quadrado era 4 e o triângulo ele não sabia qual o valor.

Ao tampar a fração intermediária, as autoras refizeram a pergunta, obtendo a resposta 35. Essa evidência sugere, segundo as autoras, que os alunos não estão familiarizados com a transitividade da equivalência e que essa complexidade pode ser superada no processo de ensino, com situações que levem o aluno, por exemplo, obter uma fração equivalente a $\frac{3}{15}$ com denominador 10.

Com relação ao invariante ordem, destacamos, como exemplo, trecho da entrevista feita com o Aluno 14 com relação à questão 19.

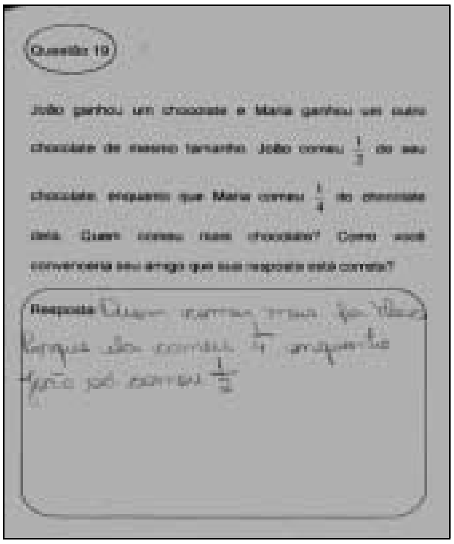


FIGURA 5.4: Questão 19, Aluno 14, 5ª Série.

P: Na questão 19. "João ganhou um chocolate e Maria ganhou um outro chocolate de mesmo tamanho. João comeu $\frac{1}{2}$ de seu chocolate, enquanto que Maria comeu $\frac{1}{4}$ do chocolate dela. Quem comeu mais chocolate? Como você convenceria seu amigo que sua resposta está correta?" Você respondeu: "Quem comeu mais foi Maria. Porque ela comeu $\frac{1}{4}$ enquanto João só comeu $\frac{1}{2}$." Como é que você pensou para responder?

A: Porque um quarto é mais do que um meio.

P: Por que você acha que é?

A: Não sei...

P: O que te faz pensar que é maior $\frac{1}{4}$?

A: Por causa do número que vem embaixo.

P: O quatro é maior que dois?

A: É.

ENTREVISTA 5.4: Questão 19, Aluno 14, 5ª Série.

Nessa entrevista, o aluno 14 ao responder a questão, focou somente os denominadores (o número debaixo), concluindo ser quatro maior que dois.

Parece-nos que o aluno transfere o conhecimento que ele possui sobre os números naturais para a fração. Resultados semelhantes foram percebidos também em pesquisas anteriores.

Em suas observações das frações e números inteiros, Kerslake (1986), notou quando se perguntava aos alunos: “Quantas frações se escondem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?” Eles respondiam: “Uma”, referindo-se a $\frac{1}{3}$. Dessa forma, a autora concluiu que os alunos observam apenas os denominadores das frações e não se dão conta das frações existentes entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Uma vez feita análise quantitativa sob três enfoques: - significados, variáveis de pesquisa e invariantes, faremos, na próxima seção, uma síntese dos principais resultados obtidos.

SÍNTESE DA ANÁLISE QUANTITATIVA

Nessa seção apresentaremos uma síntese dos principais resultados discutidos na análise quantitativa, tanto o do questionário como da entrevista.

De início, observamos que os percentuais de acerto, tanto da 5ª como da 6ª séries foram baixos e próximos, o que demonstra uma certa homogeneidade entre o desempenho das séries.

Porém essa homogeneidade ganha outro contorno ao observamos os percentuais de acerto entre os significados. O percentual de acerto do significado Parte-todo se destaca, pois ele é o maior percentual em relação ao outros.

O significado Parte-todo apresenta semelhanças no desempenho das 5ª e 6ª séries, embora a quantidade discreta não icônica destaca um desempenho mais forte na 6ª série. Além disso, observamos que, para as questões do significado Parte-todo, o ícone não foi o agente facilitador para as duas séries, pois nas quantidades contínua e discreta o melhor desempenho dos alunos foi nas questões não icônicas.

Em contrapartida, temos o percentual de acerto do significado Número, que foi o que apresentou o pior desempenho entre os alunos da 5ª e 6ª séries (2,5% e 3,33% respectivamente). Nesse item, apesar do baixo desempenho, de apenas 3 corretas para as 60 respostas possíveis, na 5ª série parece que o apoio icônico ajudou, enquanto que na 6ª série não houve diferença alguma entre a representação icônica e não icônica.

Ao analisarmos o significado Operador multiplicativo, tivemos comportamentos semelhantes nas 5ª e 6ª séries. O melhor desempenho em ambas as séries foi na quantidade contínua icônica, sendo que a 6ª série obteve o melhor resultado em relação à 5ª série.

Ao analisarmos o significado Quociente, observamos que esse significado foi o segundo melhor desempenho dos alunos da 5ª série (seguido do significado Parte-todo citado acima), e o terceiro melhor desempenho dos alunos da 6ª série (seguido do significado Operador multiplicativo).

Embora o desempenho das séries envolvidas nas questões que envolviam o significado Quociente, tenha sido aquém de um resultado satisfatório, ao compararmos com os outros significados envolvidos (com exceção de Parte-todo) ele se destaca.

Constatamos que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho eqüitativo entre os cinco significados da fração, da classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). Os dados da Tabela 5.6 revelam que, enquanto os alunos das duas séries juntas acertaram, 162 das 480 respostas possíveis das questões que abordavam o significado Parte-todo (33,75%), em contrapartida esses mesmos alunos acertaram 7 das 240 respostas possíveis (2,92%) das respostas possíveis das questões que contemplavam o significado Número.

O que pudemos perceber, também, na análise quantitativa, em alguns casos assinalados, a mesma tendência de desempenho dos alunos de 5ª e 6ª série.

Consideraremos agora os invariantes da fração, o segundo componente da terna da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1988, 1990) . Cabe ressaltar que o foco de nossa pesquisa é perceber quais as estratégias que os alunos se utilizam para frente a questões que abordam os cinco significados da fração, porém mesmo assim elaboramos questões que contemplam os invariantes da fração (ordem e equivalência).

Pudemos observar que, apesar de percebermos o melhor desempenho na 6ª série, os resultados apontam para uma mesma tendência de sucesso entre os alunos da 5ª e 6ª séries. Os melhores índices de acerto foram obtidos na questão 15, seguido das questões 5a, 19 e 17c.

É relevante destacar que, embora as questões 5a, 19 e 17c abordassem o mesmo invariante equivalência, percebemos que elas têm diferentes graus de dificuldade.

Na questão 15, para que o aluno pudesse responder de maneira correta, ele poderia se utilizar da relação de dobro entre as crianças e entre os bolos das figuras 1 e 2. Diante disso, entendemos que o aluno não necessitaria se reportar às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ para responder corretamente. Nessa questão, é possível, que o ícone tenha sido relevante para que os alunos pudessem acertar a resposta.

O segundo melhor desempenho, do invariante equivalência, foi observado na questão 5a. Na nossa entrevista percebemos que o ícone fez com que o aluno percebesse a relação de dobro entre o total de tintas e a tinta azul, tanto da segunda como na terça-feira.

Apesar das respostas dadas pelo aluno 17 nos itens 5b e 5c estarem corretas, pareceu-nos que as mesmas não foram relevantes para que o aluno percebesse a equivalência entre elas. Podemos inferir que, o fato dos numeradores e denominadores das frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{4}$ não serem múltiplos entre si, dificultou a percepção, por parte do aluno, da equivalência.

Nessa questão, o invariante operatório (a relação de dobro) utilizado pelos alunos nas duas questões anteriores (15 e 5a), não deu conta de perceber a equivalência das frações. Mesmo retomando a questão, o aluno não reconheceu a equivalência das frações.

Com relação à questão que se referia ao invariante ordem, na entrevista que fizemos com o aluno percebemos que ele ao responder essa questão, focou somente os denominadores, concluindo que quatro é maior que dois. Parece-nos que o aluno transfere o conhecimento que ele tem sobre os números naturais para a fração.

Feita a síntese da análise quantitativa, passaremos para a próxima seção cujo enfoque será a categorização dos erros cometidos pelos alunos, ao responderem o referido instrumento de pesquisa.

5.2 ANÁLISE QUALITATIVA

Na seção anterior, fizemos a análise quantitativa dos resultados, cujo enfoque foi o número de acertos que os alunos obtiveram ao responder o instrumento de pesquisa. A presente seção tem como objetivo dar qualidade às estratégias de resolução utilizadas pelos alunos ao responder às questões propostas.

Como o percentual geral de sucesso nos dois grupos de pesquisa foi baixo (aquém de 25%), optamos por analisar as estratégias que resultaram em erro (insucesso). Estas estratégias foram agrupadas de tal forma a permitir o surgimento das categorias de análise.

Como já foi explicado no capítulo da Metodologia, o instrumento de pesquisa constou de 19 questões que foram respondidas pelos alunos. Algumas dessas questões apresentaram mais de um item, perfazendo um total de 29 itens.

Entretanto, as respostas que interessam-nos para análise, tanto a quantitativa como a qualitativa, fazem o total de 18 itens. Dessa forma, sendo 120 o número de alunos pesquisados, multiplicado por 18 possibilidades de respostas, poderíamos obter 2160 respostas distintas.

Os dados da tabela abaixo retratam o número de acertos, erros e respostas em branco de nossa amostra:

Tabela 5.8 : Distribuição das respostas obtidas no instrumento de pesquisa.

Série	Total de Acertos	**Total de Erros**	Total de Brancos
5ª	214 de 1080 19,81%	842 de 1080 77,96%	24 de 1080 2,22%
6ª	243 de 1080 22,5%	810 de 1080 75 %	27 de 1080 2,5%
Totais	457 de 2160 21,16%	1652 de 2160 76,48%	51 de 2160 2,36%

Os dados da Tabela 5.8 chamam a atenção para três pontos. O primeiro deles, é o baixo percentual de respostas em Branco nas duas séries, o qual não passou de 2,5%. Isto mostra que, de fato, houve empenho por parte dos alunos para responder às questões propostas.

O segundo ponto a ser destacado é que a porcentagem de erro foi muito superior em relação à porcentagem de acerto. Os dados da Tabela acima mostra a diferença de 58,15 pontos percentuais na 5ª série, e 52,5 pontos percentuais na 6ª série. Com relação ao terceiro ponto, os dados da Tabela 5.8 assinalam que existe um total de 1652 respostas para serem analisadas, no que tange à categorização dos erros.

Conforme já citamos, nosso enfoque será reconhecer e categorizar as estratégias utilizadas pelos alunos que responderam de forma incorreta. Conseguimos, após um estudo minucioso, obter nove categorias, a saber:

Tabela 5.9 : Relação das Categorias de Análise

Categoria	Nome da Categoria
E1	Relação Parte-parte
E2	Inversão do numerador com denominador
E3	Quociente remete para o Parte-todo
E4	Interpretação da fração literalmente
E5	Desprezo da conservação da área
E6	Utilização dos dados do problema
E7	Denominador maior que numerador
E8	Números sobrepostos
E9	Utilização de operação

Além das nove categorias, incluímos outros três itens de classificação que denominamos como sendo:

- Pictórica (PIC) – quando o aluno respondeu a questão somente com algum tipo desenho. Tivemos ocorrências desse tipo somente na 5ª série, perfazendo o total de 16 respostas similares ao que exemplificamos abaixo:

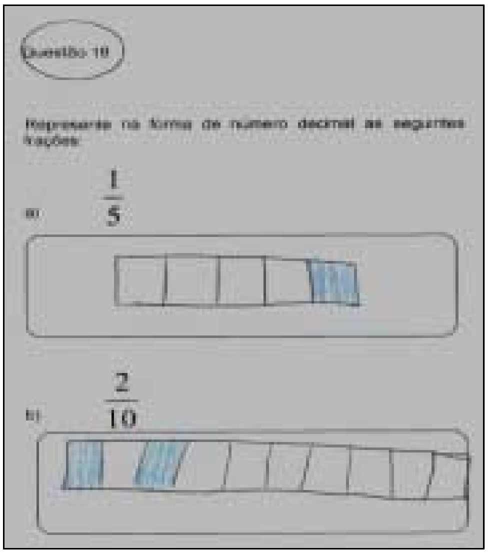


FIGURA 5.5: Questão 18, Aluno 30, 5ª Série

➢ Não Sei(NS) – quando o aluno respondeu à questão com frases do tipo "não sei" ou "não entendi": Tivemos ocorrências desse tipo apenas com cinco alunos da 6ª série. Exemplificando:

FIGURA 5.6: Questão 11, Aluno 54, 6ª Série

➢ Inconsistente (INC) – classificamos como sendo inconsistente quando, ao analisar a resposta dada pelo aluno, não conseguimos enquadrá-la em nenhuma das nove categorias por nós definidas anteriormente.

Houve 315 ocorrências, a maioria delas foi respostas única, que não foi repetida por outros alunos. A distribuição desse tipo de resposta inconsistente foi de 135 na 5ª série e 180 na 6ª série. A título de ilustração, apresentamos abaixo três exemplos dessa categoria.

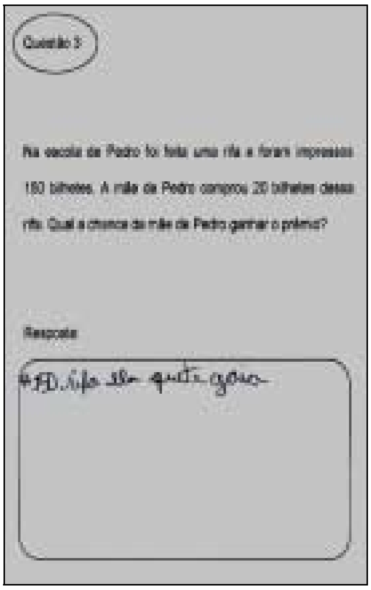


FIGURA 5.7: Questão 3 Aluno 27, 5ª S

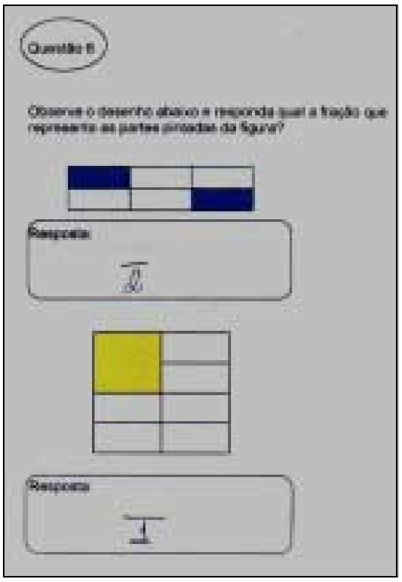


FIGURA 5.8: Questão 8, Aluno 56, 6ª S

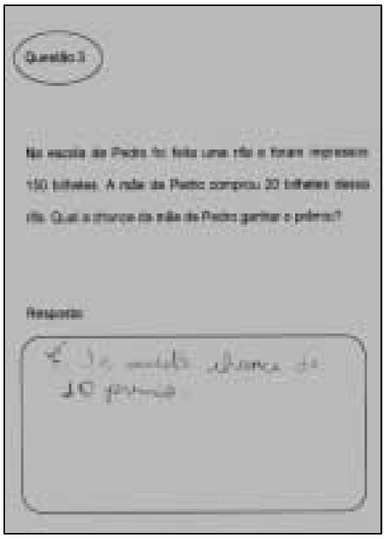


FIGURA 5.9: Questão 3, Aluno 22,6ª S

Conforme fomos categorizando as respostas incorretas dadas nos questionários e complementadas pelas entrevistas com alguns dos alunos, pudemos perceber que algumas se encaixam dentro de mais de uma categoria. Sendo assim, o número de respostas incorretas é menor do que de respostas categorizadas como mostram os dados da Tabela 5.9 abaixo.

Tabela 5.10: Respostas incorretas das 5ª e 6ª séries segundo nossa categoria de análise.

	Série	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	PIC	NS	INC	TOTAL
TOTAL 1652 (1996)	5ª	167	108	31	14	39	252	26	110	131	16	-	135	1029
	6ª	150	97	30	16	37	228	24	106	94	-	5	180	967
	TOTAL	317	205	61	30	76	480	50	216	225	16	5	315	1996

Para melhor compreensão dos dados da Tabela 5.10, cabe ressaltar que o total número de respostas incorretas foi de 1.652, porém, algumas respostas foram enquadradas em mais de uma categoria de análise, o que fez com que o número de respostas atingisse o total de 1.996, aumentando, assim, 344 o número de respostas categorizadas. Dessa forma nossa análise qualitativa delineada dentro de nove categorias, teve um total de 1.996 respostas categorizadas.

A seguir abordaremos uma a uma das nove categorias, definindo-as e colocando, para cada uma delas, a estratégia utilizada pelo aluno que possa justificá-la.

- **E1 – Relação Parte-parte**

Entendemos como Relação Parte-parte a estratégia utilizada pelo aluno ao desprezar o todo envolvido. Nesse caso, o aluno fez a contagem das partes sem relacionar com o todo, tanto com quantidades discretas como as quantidades contínuas. Um exemplo que consideramos como clássico desse erro seria:

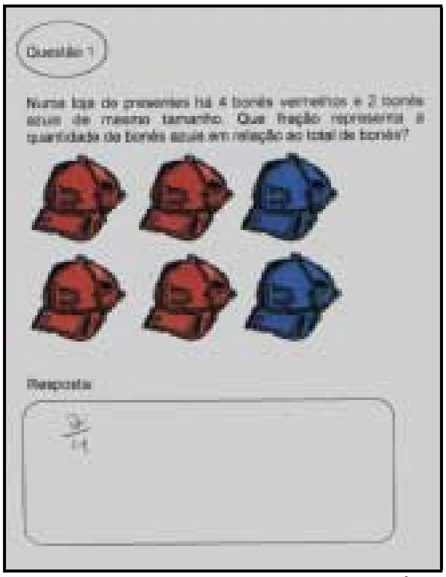


FIGURA 5.10: Questão 1, Aluno 5 6ª Série.

O aluno 5 da 6ª série ao responder esta questão, referiu-se apenas às partes (2 bonés vermelhos e 4 bonés azuis) sem se reportar ao todo referente (total de bonés). Nesta questão, podemos supor também que o aluno tenha apenas utilizado os dados do problema para dar a resposta, o que caracterizaria em um erro do tipo E6.

A tabela abaixo apresenta as questões nas quais esse tipo de erro (E1) ocorreu, relacionando-as aos significados, às variáveis de pesquisa e o número de respostas enquadradas nesse erro. Salientamos que aqui não mais há separação das séries.

Tabela 5.11: Distribuição do E1 nas questões.

Sig./Rep Qtde	Parte-todo		Medida		Total
	I	**Ñ I**	**I**	**Ñ I**	
C	Q8b 53	Q4 13	Q5b 55	**Q9 92**	213
D	Q1 57	Q12 1	Q17a 34	Q3 12	104
Total	110	14	89	104	317

Nos dados da Tabela 5.11, podemos observar que o E1 teve maior ocorrência no significado Medida na quantidade contínua não icônica (Questão 9). Um exemplo comum desse tipo de erro está ilustrado abaixo.

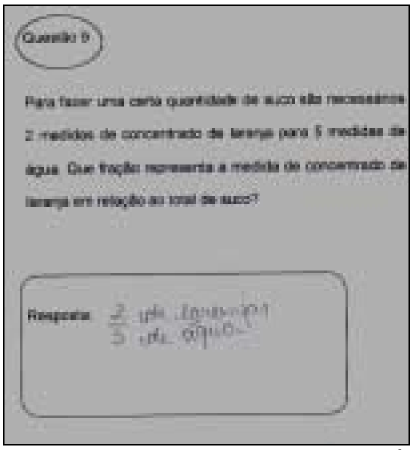


FIGURA 5.11: Questão 9, Aluno 59 6ª Série

A resposta dada pelo aluno 59 da 6ª série explicita a maneira pela qual ele pensou ao responder, escrevendo ao lado do numerador (2 de laranjas) e denominador (5 de água) da fração. Ele fez a relação das partes – concentrado de laranja e água – sem se preocupar em relacionar a quantidade de laranja com o todo referente (quantidade de laranja+quantidade de água).

Cabe salientar que, nas questões 4 e 12 de significado Parte-todo de quantidade contínua e discreta respectivamente, assim como na questão 3 de significado Medida de quantidade discreta, todas sem representação icônica, esse tipo de resposta poderia ser caracterizado, também, em um erro do tipo E9. Nessas questões o aluno operou com o numerador e denominador para obter a resposta (fez a subtração entre denominador e numerador).

O outro exemplo que ilustra o erro do tipo E1 pode ser observado no trecho da entrevista feita com o Aluno 23 da 5ª Série:

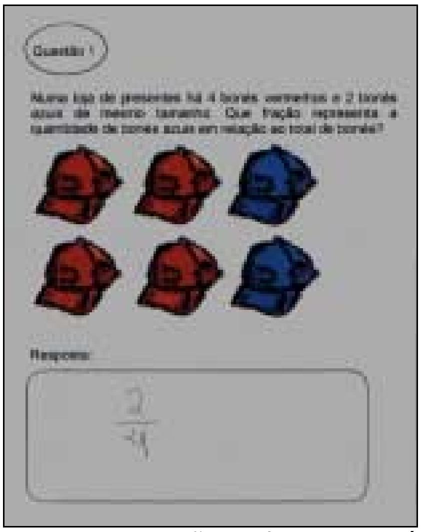


FIGURA 5.12: Questão 1, Aluno 23, 5ª Série

P: Você respondeu dois quartos, como é que você pensou?

A: Pensei que esses dois azul era tipo, é ... pensei que era tipo, aqui era uma parte e aqui era outra. E eu ...

P: Você colocou dois quartos, pensando que a parte azul era uma parte e a parte vermelha era outra?

A: É.

P: "Tá", mas por que você não colocou quatro meios?

A: Ah, porque eu tava um pouco nervosa, e eu pensei que era pra nota.

E: Você pensou que fosse pra nota?

S: É. Eu coloquei sem pensar.

ENTREVISTA 5.5: Questão 1, Aluno 23 5ª Série

Nessa entrevista, percebemos que o foco do aluno estava nas partes (bonés azuis e bonés vermelhos) e não no total de bonés que apresentamos. Poderíamos, também, supor que o aluno simplesmente utilizou os dados do problema, o que caracteriza o E6, porém o aluno não cita essa possibilidade, ao contrário, ele fixa seu foco no ícone e não tanto no enunciado da questão.

Em seus estudos, Bezerra (2001) também observou esse tipo de erro na relação Parte-todo, tanto em quantidades discreta como contínua. O autor afirma que o aluno procedeu a contagem da parte destacada e, em seguida, procedeu a contagem das demais partes, esquecendo de relacionar o todo.

- **E2 – Inversão do Numerador com Denominador**

A categoria denominada por nós como E2 compreende a estratégia em que há uma inversão das posições do numerador pelo denominador.

Entendemos que o erro que qualifica essa categoria, pode ser pelo fato do aluno entender a situação, porém não sendo capaz de representá-la utilizando a fração. Entendemos que o aluno não sabe distinguir a relação que há entre numerador e denominador. Um exemplo que consideramos como clássico desse erro seria:

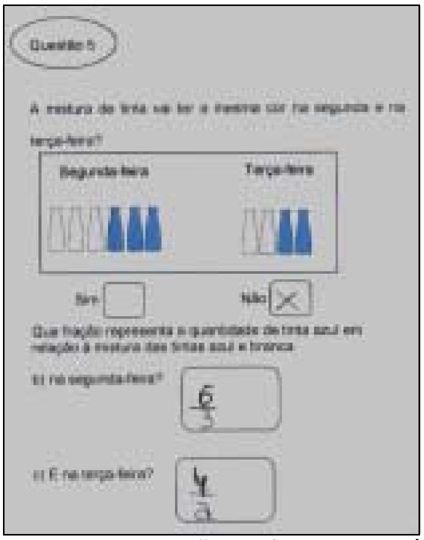


FIGURA 5.13: Questão 5, Aluno 16, 6ª Série.

Ao responder a questão 5, o Aluno 16 da 6ª série inverteu o numerador com o denominador. Entendemos que, para o aluno, não está clara a idéia da parte (quantidade da tinta azul) em relação ao todo (mistura das tintas azul e branca) na fração.

A tabela abaixo apresenta as questões, nas quais esse tipo de erro (E2) ocorreu, relacionando-as aos significados, tipos de representação e quantidades, além dos números de respostas enquadradas nessa categoria. Destacamos ainda que não discriminação das séries:

Tabela 5.12: Distribuição do E2 nas questões.

Sig/Rep Qtde	Parte-todo		Quociente		Medida		Total
	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI	
C	Q8 16	Q4 34	Q6 30	Q13 14	Q5 9	Q9 1	104
D	Q1 6	**Q12 38**	Q2 16	Q10 9	Q17 3	Q3 29	101
Total	22	72	46	23	12	30	205

Podemos observar, conforme os dados da Tabela 5.12, que o E2 teve maior ocorrência no significado Parte-todo na quantidade discreta não icônica (Questão 12), seguido muito de perto pelo significado Parte-todo na quantidade contínua não icônico. Um exemplo comum desse tipo de erro (E2) está ilustrado abaixo.

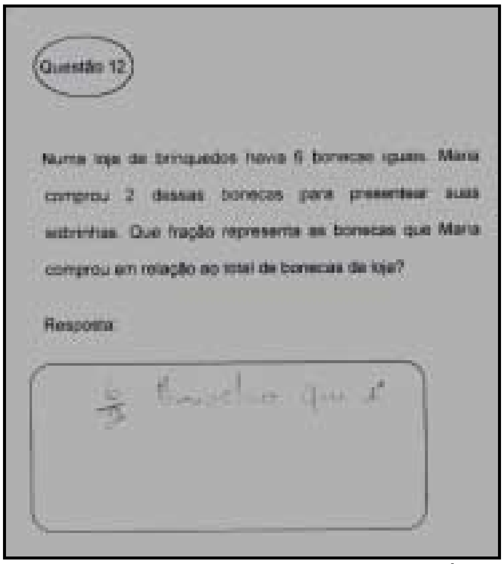


FIGURA 5.14: Questão 12, Aluno 31, 6ª Série.

Entendemos que a resposta dada pelo aluno 31 da 6ª série retrata a característica da categoria E2, a inversão do numerador e denominador. Além disso, essa resposta, especificamente, aponta também uma certa insegurança por parte do aluno (“Eu acho que é”).

Cabe ressaltar que no significado Parte-todo, as questões 4 e 12 também poderiam ser classificadas como E-6. Nessas questões, o aluno poderia ter invertido numerador e denominador (característica do E-2), por ter utilizado os dados do problema para dar a resposta, pois os mesmos aparecem nessa ordem (o primeiro dado do problema corresponde ao todo e o segundo dado à parte).

O mesmo poderia ter acontecido no significado Quociente, na questão 6; assim como no significado Medida na questão 3.

Ressaltamos ainda que no significado Quociente as questões 2 e 10 poderiam ter essa inversão por conta da característica do E7, ou seja, o aluno poderia ter assumido que o denominador deve ser maior que o numerador, conforme apuramos na entrevista.

Esse tipo de erro que compreende a inversão das posições do numerador com o denominador, também foi detectado nos estudos de Bezerra (2001). Da mesma forma, D’Ambrósio (1989) afirma que os resultados de sua pesquisa apontam algumas dificuldades dos alunos ao trabalhar com o conceito de fração. Uma dessas dificuldades é retratada pela confusão que os alunos fizeram entre o numerador e o denominador (ora o numerador era o número total de partes, ora era o número de elementos).

- **E3 – Quociente remete ao Parte-todo**

A categoria E3 está diretamente ligada às questões, cujo significado que queríamos enfocar era o de Quociente. A categoria que denominamos como E3 compreende a estratégia em que há o desprezo das duas grandezas envolvidas (chocolate/criança; bolinhas de gude/criança; bolas de futebol/criança), levando em conta somente uma delas, o que de fato está sendo dividido (bolinhas de gude; chocolate, bolas de futebol), desconsiderando para quem está sendo dividido (crianças).

Nesse procedimento, o aluno deu como resposta a parte (quer seja do chocolate, das bolinhas de gude ou das bolas de futebol) que cada criança teve direito em relação ao todo que fora dividido. Destacamos um exemplo clássico desse tipo de estratégia:

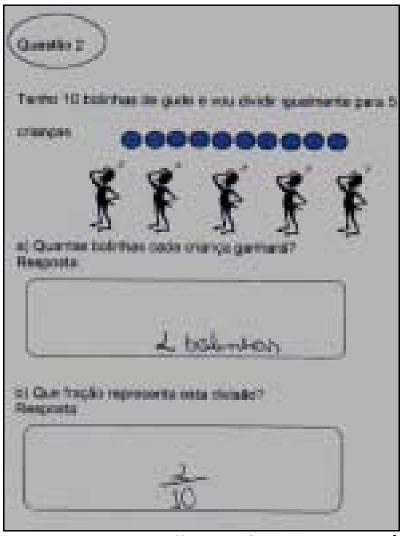


FIGURA 5.15: Questão 2, Aluno 58, 6ª Série.

Nesse tipo de estratégia, o aluno não representa a fração que corresponde à divisão (total de bolinhas de gude/total de crianças). O aluno despreza as duas grandezas, considerando apenas uma delas (bolinhas de gude). Sua resposta diz respeito apenas à parte das bolinhas de gude que coube a cada criança em relação ao total de bolinhas de gude.

A categoria de erro, como já citamos anteriormente, refere-se apenas às questões cujo significado é o Quociente. A os dados da Tabela abaixo descreve as questões, na quais esse tipo de erro (E3) ocorreu relacionando-as aos tipos de representação e quantidades, entretanto, sem discriminar as séries:

Tabela 5.13: Distribuição do E3 nas questões.

Sig/Rep Qtde	Quociente		Total
	I	**ÑI**	
C	Q6c 10	Q13 8	18
D	Q2 17	**Q10** **26**	43
Total	27	34	61

Os dados da Tabela 5.13 mostram que, dentre as questões que envolviam o significado Quociente, a estratégia que caracteriza o E3 teve maior ocorrência na quantidade discreta não icônica (Questão 10). Um exemplo comum desse tipo de erro (E3) está ilustrado abaixo:

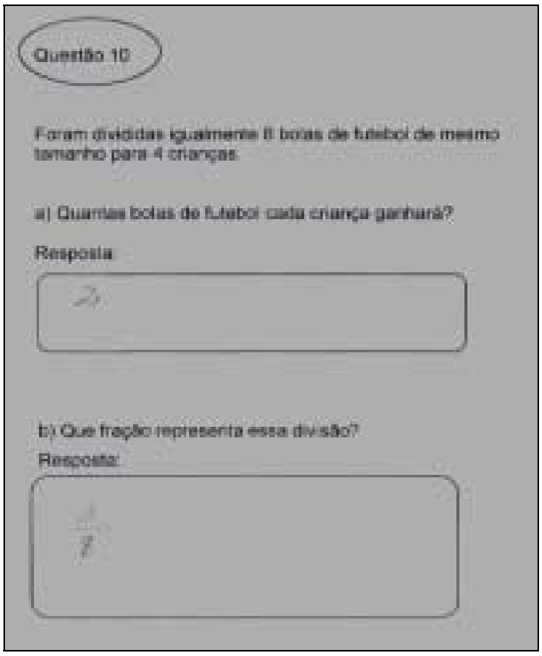


FIGURA **5.16:** Questão 10, Aluno 43, 6ª Série.

A resposta $\frac{2}{8}$ dada pelo Aluno 43 da 6ª série fez supor que a relação Parte-todo está muito arraigada em sua estratégia de resolução.

O aluno centra sua atenção no todo (8 bolas de futebol) e na parte que cada criança recebeu (2 bolas de futebol). Esta suposição decorre do fato de que a introdução do ensino do conceito de fração é feita, normalmente, com base na relação Parte-todo e, possivelmente, o mais trabalhado em sala de aula.

Outro exemplo que ilustra o erro do tipo E3, pode ser observado no trecho da entrevista feita com o Aluno 20 da 5ª Série a respeito de sua resposta da questão 6c de quantidade contínua com representação icônica:

FIGURA 5.17: Questão 6, Aluno 20, 5ª Série.

P: Eu pergunto assim: Que fração de chocolate cada criança receberá? E você me dá como resposta $\frac{1}{3}$. Como é que você pensou nesse $\frac{1}{3}$?

A: Tem 3 barras de chocolate, na minha opinião, pelo menos, um pedaço de chocolate cada criança poderia estar recebendo. Aí foi o que eu pensei na hora, né? “Tava” muito confusa, mas, na minha opinião achei certo colocar um sobre três.

P: Então, são três chocolates e cada criança receberá um pedaço de chocolate.

A: Pelo menos, assim, igual, tem quatro crianças, né? E tem três barras de chocolate. Se eu dividisse, eu sei que ia sobrar. No meu cálculo, ia sobrar um pouco, mas, é... Na quantia mesmo, cada criança ia receber o mesmo tanto. Não ia uma criança ficar sem e a outra criança ganhar mais, né?

ENTREVISTA **5.6:** Questão 6c, Aluno 20 5ª Série.

Nessa entrevista, ao nosso ver, o Aluno 20 reconhece as três barras de chocolate como sendo o Todo, da Relação Parte-todo. Esse Todo será partido e cada criança receberá uma parte dele.

Parece-nos que, dessa forma, justifica-se o 3 (barras de chocolate) como sendo o denominador e o 1 (um pedaço de chocolate que cabe a cada uma das crianças) como sendo o numerador.

Podemos inferir que, sendo a relação Parte-todo o início do ensino de fração, o aluno tende a procurar o Todo, o que será dividido, repartido, quer seja chocolate (quantidade contínua) ou bolinhas (quantidade discreta). O aluno não fez a conexão entre fração e divisão.

Podemos observar que nossos resultados são semelhantes aos encontrados pelos estudos de Kerslake (1986). Em seus estudos, a pesquisadora conclui que o entendimento dos números racionais, como elemento do campo quociente, requer a oportunidade de realizar experiências com os aspectos partitivos da divisão. Nesse sentido, há necessidade de se estender o modelo Parte-todo e incluir o aspecto Quociente da fração.

Em seus estudos, Kerslake (1986) tinha como uma das questões propostas: "Aqui estão três doces. Há quatro crianças que desejam a sua parte. Como você pode fazer?" Os alunos dividem os três doces para quatro pessoas, mas não se preocupam se as partes são iguais ou não. Na intenção de observar o processo de divisão realizado pelos alunos, avaliou-se que eles não fazem a conexão entre 3:4 e $\frac{3}{4}$.

- **E4 – Interpreta a fração literalmente**

A categoria determinada como E4 compreende a estratégia em que o aluno faz a interpretação da fração literalmente. A estratégia somente pode ser detectada pautada na entrevista que fizemos com parte dos alunos de nossa amostra.

A categoria E4 está diretamente ligada à questão 11, cujo significado que queríamos enfocar era o de Número. A tabela abaixo mostra a incidência desse erro. Salientamos que não há mais a separação das séries.

Tabela 5.14: Distribuição do E4 nas questões.

Sig/Rep Qtde	Número		Total
	I	**ÑI**	
C	Q11 30	-	30
Total	30	-	30

Nos dados da Tabela 5.14, podemos observar que apenas a Questão 11 apresenta esse tipo de estratégia. Para o aluno responder a questão, ele associou a leitura das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ para dar a resposta, marcar na reta numérica os pontos correspondentes. Um exemplo comum desse tipo de erro (E4) está ilustrado abaixo.

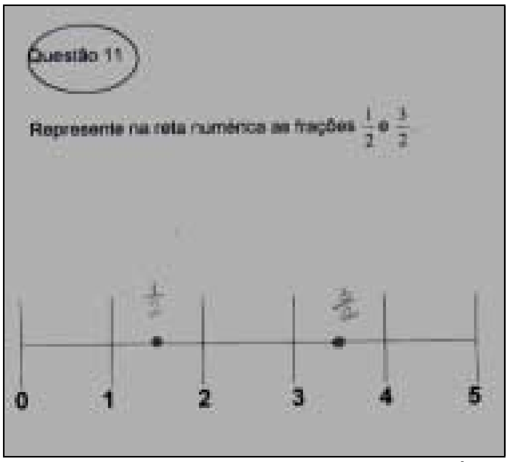


FIGURA 5.18: Questão 11, Aluno 19, 6ª Série.

Entretanto, como já citamos, essa categoria E4 somente pode ser percebida com base nas entrevistas feitas com alguns dos alunos pesquisados como, por exemplo o trecho da entrevista feita com o Aluno 25 da 5ª Série:

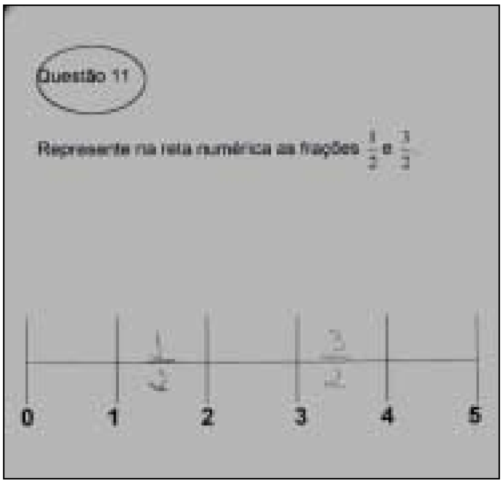


FIGURA 5.19: Questão 11, Aluno 24, 5ª Série.

P: Na questão 11: Represente na reta numérica as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$. Como é que você pensou para colocar $\frac{1}{2}$ entre 1 e 2, e $\frac{3}{2}$ entre 3 e 4?

A: Porque aqui no meio do 1 do 2 aí dá um meio, e do 3 e do 4 dá três meio.

P: Então $\frac{3}{2}$ está entre 3 e 4?

A: É. E um meio entre 1 e 2.

ENTREVISTA 5.7: Questão 11, Aluno 24, 5ª Série.

Nesse trecho de entrevista o Aluno 25 ressalta a razão pela qual ele escolhe os pontos um e meio e três e meio da reta numérica. Ele lê as referidas frações dessa forma, identificando-as na reta numerada literalmente.

- **E5 – Desprezo da conservação da área**

A categoria determinada como E5, refere-se ao fato do aluno não considera a conservação da área dividida. A categoria E5 está diretamente ligada à questão 8b, cujo significado que queríamos enfocar era o de Parte-todo. A tabela abaixo mostra a incidência desse erro, ressaltando que não há mais a separação das séries.

Tabela 5.15: Distribuição do E5 nas questões.

Sig/Rep Qtde	Parte-todo		Total
	I	**ÑI**	
C	Q8b 76	-	76
Total	76	-	76

Os dados da Tabela 5.15 apontam que esse tipo de estratégia E5 foi observado somente no significado Parte-todo de quantidade contínua e icônica, pois o referido item da questão exigia que o aluno percebesse que a parte pintada correspondia ao dobro das demais partes não pintadas.

Para exemplificar a estratégia E5 colocamos a seguinte resolução:

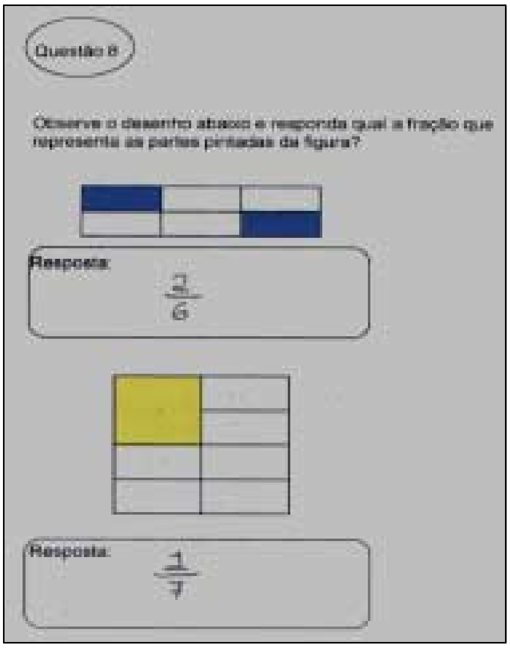


FIGURA 5.20: Questão 8b, Aluno 40, 6ª Série.

Esse exemplo deixa claro que o referido aluno não se ateve à diferença entre o tamanho da área pintada das demais áreas não pintadas. Sendo assim, para o aluno o todo é composto de 7 partes, sendo que 1 delas está pintada.

Esse tipo de estratégia (E5) também pode ser observada no trecho da entrevista feita com o Aluno 1 da 5ª Série:

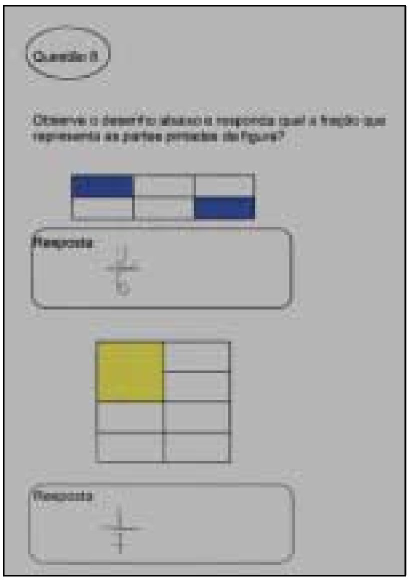


FIGURA 5.21: Questão 8b, Aluno 1, 5ª Série.

P: Questão 8: Observe o desenho abaixo e responda qual a fração que representa as partes pintadas da figura? Aqui, na que está pintado em amarelo, você colocou $\frac{1}{7}$, como é que você pensou nisso?

A: Tinha sete espaços e só um pintado, aí um sétimo.

P: "Tá". Mesmo sendo maior essa parte, não teria problema?

A: Não.

P: São sete partes?

A: Sim.

ENTREVISTA 5.8: Questão 8b, Aluno 1, 5ª Série

Na fala do Aluno 1, percebemos que sua preocupação era contar a quantidade de "espaços", sem se importar com o tamanho dos mesmos. Sua preocupação foi colocar o total de "espaços" embaixo e o "espaço" pintado em cima.

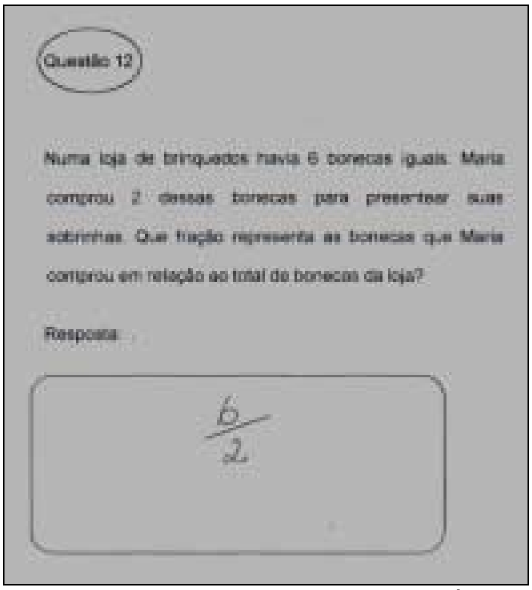
A questão foi inspirada, conforme já citada no Capítulo 2, em uma pesquisa de Campos et al.(1995) citada por Nunes (1997), e os resultados que tivemos na referida questão são equivalentes aos já encontrados pela pesquisadora.

Em seus estudos Campos et al. (1995) mostrou que, a introdução da fração pelo modelo Parte-todo simplesmente induz os alunos aplicar um procedimento de dupla contagem sem necessariamente entender o significado da fração. Os resultados dos estudos de Campos confirmam a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

- **E6 – Utilização dos dados do problema**

A categoria determinada como E6 compreende a estratégia que o aluno elaborou sua resposta, de maneira equivocada, com os dados contidos no enunciado e ou parte da resposta da referida questão. A estratégia só pode ser detectada com base na entrevista que fizemos com parte dos alunos de nossa amostra.

Um exemplo que poderia justificar essa categoria, seria a resposta dada pelo aluno 1 da 6ª série na questão 12:


Questão 12

Numa loja de brinquedos havia 6 bonecas iguais. Maria comprou 2 dessas bonecas para presentear suas sobrinhas. Que fração representa as bonecas que Maria comprou em relação ao total de bonecas da loja?

Resposta:

$\frac{6}{2}$

FIGURA 5.22: Questão 12, Aluno 1, 6ª Série.

A resposta apresentada pelo aluno pode revelar que ele, simplesmente, utilizou os dados do problema, obedecendo a ordem em que eles aparecem, pois no enunciado da questão 12 o 6 aparece antes do 2.

Embora esse mesmo tipo de resposta da questão 12, classificamos, também, como sendo um erro do tipo E2, inversão do numerador/denominador.

A tabela abaixo apresenta as questões, nas quais esse tipo de erro E6 ocorreu, destacando os enfoques nela contidos e os números de respostas enquadradas nessa categoria de erro. Ressaltamos que aqui não há distinção das séries.

Tabela 5.16: Distribuição do E6 nas questões.

Sig/Rep Qtde	Número		Parte-todo		Quociente		Medida.		Op.Multip		Total
	I	**ÑI**	**I**	**ÑI**	**I**	**ÑI**	**I**	**ÑI**	**I**	**ÑI**	
C	-	Q18 13	-	Q4 32	Q6c 50	Q13 24	Q5 10	**Q9 92**	-	-	221
D	-	-	Q1 57	Q12 38	-	Q10 14	Q17 72	Q3 33	Q14 40	Q16 5	259
Total	-	13	57	70	50	38	82	125	40	5	480

Os dados da Tabela 5.16 apontam que a Questão 9, que aborda o significado Medida com quantidade contínua sem representação icônica, foi a que mais induziu o aluno ao erro denominado E6.

Cabe salientar que algumas respostas obtidas nas questões 6c e 3 podem ser caracterizadas como do tipo E2 inversão do denominador com numerador. Assim como algumas das respostas dadas pelos alunos nas questões 9 e 17 podem se caracterizar também na estratégia do tipo E1, relação parte-parte.

Para ilustrar esse tipo de estratégia, ilustraremos com o seguinte exemplo:

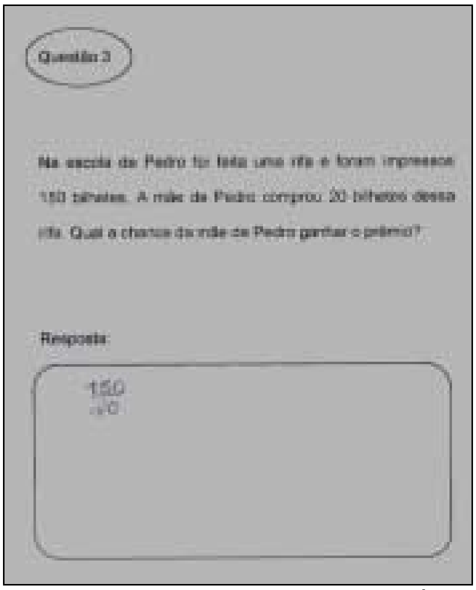
FIGURA 5.23: Questão 14, Aluno 8, 6ª Série.

Na questão 14, cujo significado é Operador multiplicativo de quantidade discreta e com representação icônica, o aluno 8 da 6ª série utilizou o um dos dados do problema, o denominador 3, para dar sua resposta.

Essa mesma estratégia foi encontrada nos estudos de Bezerra (2001), quando foi solicitado ao aluno que circulasse a quinta parte de um conjunto de dez elementos. Na ocasião o procedimento utilizado pelo aluno foi o de circular cinco elementos do conjunto.

Nas duas estratégias, o aluno não operou adequadamente, ele utilizou uma informação fornecida no enunciado da questão.

Outro exemplo que ilustra o erro do tipo E6 pode ser observado no trecho da entrevista feita com o aluno 14 da 5ª série, quando esse explica como ele resolveu a questão 3, que envolvia o significado Medida de quantidade discreta sem a representação icônica.


Questão 3

Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?

Resposta:

150

FIGURA 5.24: Questão 3, Aluno 5, 5ª Série.

P: Na escola de Pedro, foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de

Pedro ganhar o prêmio? Você respondeu $\frac{150}{20}$. Como é que você pensou para responder essa pergunta?

A: Eu pensei em uma questão normal ... Tipo, assim, tem oito partes e só três pintadas, a gente coloca três oitavos, aí eu pensei assim, sabe? Eu chutei, tipo, fiz no chute.

P: Um chute? "Tá". E por que você não colocou 20 sobre 150?

A: Porque 150 veio primeiro.

P: O 150 veio primeiro e por isso que você colocou em cima?

A: É.

ENTREVISTA 5.9: Questão 3, Aluno 5, 5ª Série

Nessa entrevista, o Aluno 5 deixa claro que, ao responder utilizou não somente os dados do problema, o que nessa questão seria um procedimento adequado, mas, na ordem que esses dados aparecem. Assim não houve a preocupação, por parte do aluno, de perceber que a chance de ganhar o prêmio pode ser medida na relação entre os bilhetes comprados e o total de bilhetes, e não o contrário, como ele respondeu. Mesmo o aluno dando um exemplo correto de como ele pensou, respondeu de maneira incorreta a questão proposta pois, obedeceu a ordem como os dados aparecem.

- **E7 – Denominador maior que numerador**

Entendemos a categoria determinada por E7 àquelas estratégias utilizadas pelo aluno que inverte o numerador pelo denominador pelo simples fato do numerador ser maior que o denominador.

A categoria E7 foi evidenciada na fala dos alunos entrevistados. Muitos deles, durante a entrevista, falaram literalmente que o denominador é sempre maior que o numerador.

Analisando as possíveis respostas, pudemos observar que tal categoria pode ser encontrada apenas nas questões que abordam o significado quociente de quantidade discreta com e sem representação icônica. Isso se justifica pelo fato de que somente nessas duas questões as respostas seriam frações impróprias (numerador maior que denominador).

Os dados da Tabela 5.16 apresenta a incidência da categoria E7. Cabe ressaltar que aqui não há distinção entre as séries.

Tabela 5.17: Distribuição do E7 nas questões.

Sig/Rep Qtde	Quociente		Total
	I	**ÑI**	
D	Q2b 24	Q10b 26	50
Total	24	26	50

Os dados da Tabela 5.17 evidenciam que a estratégia de resolução E7 foi percebida, de maneira praticamente eqüitativa, nas duas questões que enfocam o significado Quociente em quantidades discretas. Para exemplificar esse tipo de erro (E7) destacamos a resolução abaixo:

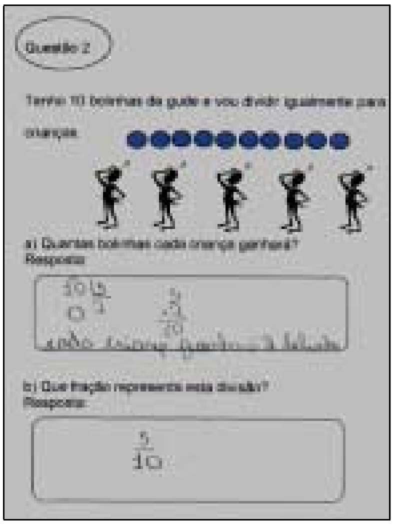


FIGURA **5.25:** Questão 2, Aluno 19, 5ª Série.

Nesse protocolo o Aluno 19 deixa claro seu raciocínio. No item a ele faz a divisão com o emprego do algoritmo, acrescido da chamada “prova real”, certificando-se que a operação de divisão está correta com a operação de multiplicação. Mas, na representação dessa divisão, o aluno não admite o numerador ser maior que o denominador. A estratégia fica nítida no trecho da seguinte entrevista:

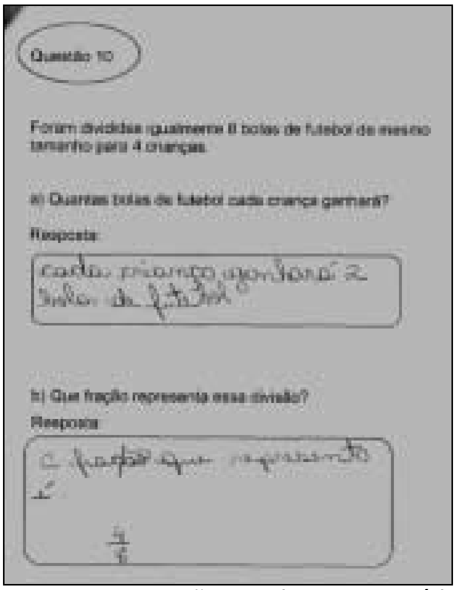


FIGURA 5.26: Questão 10, Aluno 25, 5ª Série.

P: Foram divididas igualmente oito bolas de futebol de mesmo tamanho para quatro crianças. Que fração representa essa divisão?
A: Quatro oitavos, ... não. É quatro oitavos.
P: Quatro oitavos? Como é que você pensou para responder quatro oitavos?
A: Ah! Eu fiz a mesma coisa que da outra. Porque eu acho que eu não poderia colocar oito quartos.
P: Ah, é? E como é que você chega nisso?
A: Porque o número debaixo sempre tem que ser maior!?

ENTREVISTA 5.10: Questão 10, Aluno 25, 5ª Série.

Nesse trecho da entrevista, pareceu-nos que o Aluno 25 teve dúvida em colocar $\frac{4}{8}$ como resposta ao item b da questão 10. Tivemos a impressão que o aluno só colocou essa resposta por conta de que “o número debaixo tem que ser maior”, pois ele fala: “– ... eu acho que não poderia colocar oito quartos.”

Nessa questão que aborda o significado Quociente, podemos inferir que ainda aqui, o aluno ainda se reporta a Parte-todo. O significado Parte-todo é trabalhado para iniciar o conceito de fração e, normalmente, com quantidade contínua e que, apenas um todo é dividido em partes iguais (nesse caso, o numerador sempre será menor que o denominador). Esse procedimento pode, muitas vezes, não dar a chance do aluno perceber as frações impróprias (numerador maior que denominador).

- **E8 – Fração tida como números sobrepostos**

Entendemos a fração tida como números sobrepostos, tida por nós como sendo categoria E8, cuja característica principal da estratégia de resolução é o fato do aluno ter tratado a fração como dois números, naturais e distintos, que estão sobrepostos e separados pelo traço.

Constatamos essa categoria, tanto na fala de alguns de nossos alunos, como na estratégia utilizada para a resolução de algumas das questões que envolvem os significados Número e Operador multiplicativo.

Um exemplo clássico desse tipo de estratégia seria a resposta dada na questão 11 pelo aluno 21 da 5ª série:

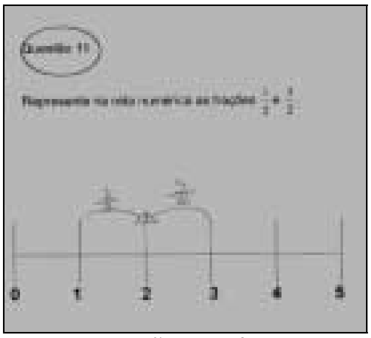


FIGURA **5.27:** Questão 11, Aluno 21, 5ª Série.

A estratégia de resolução utilizada pelo aluno 21 da 5ª série qualifica a categoria E7, pois para representar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, ele fez a ligação com um arco apontando os números 1 e 3 (numeradores das frações) para o número 2 (denominador comum das frações) da reta numérica. Entendemos que esse procedimento caracteriza a fração como sendo números sobrepostos, 1 e 2 como sendo $\frac{1}{2}$ assim como 3 e 2 como sendo $\frac{3}{2}$.

A tabela abaixo apresenta as questões nas quais esse tipo de erro E8 ocorreu, destacando os enfoques nelas contidos e o número de respostas enquadradas na categoria de erro. Destacamos que aqui não há separação das séries.

Tabela 5.18: Distribuição do E8 nas questões.

Sig/Rep Qtde	**Número**		**Op.Multipl.**		**Total**
	I	**ÑI**	**I**	**ÑI**	
C	Q11 48	Q18 73	-	**Q19 95**	216
Total	48	73	-	95	216

Ao levarmos em conta que, para cada item da Tabela 5.18 poderíamos ter no máximo 120 respostas, percebemos que a questão 19 apresenta uma alta incidência (95 respostas no total – 79,17% das respostas possíveis) da estratégia que levou ao erro E8.

Para ilustrar essa estratégia de resolução, tomamos dois exemplos, um que contém o significado Operador multiplicativo, e o segundo com o significado Número sem a representação icônica:

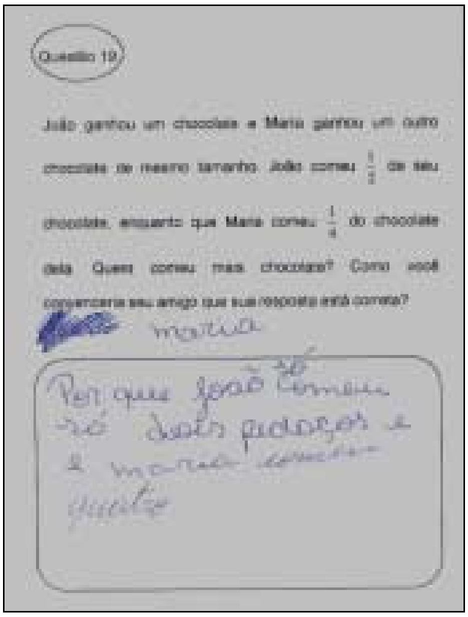


FIGURA 5.28: Questão 19, Aluno 46, 6ª Série.

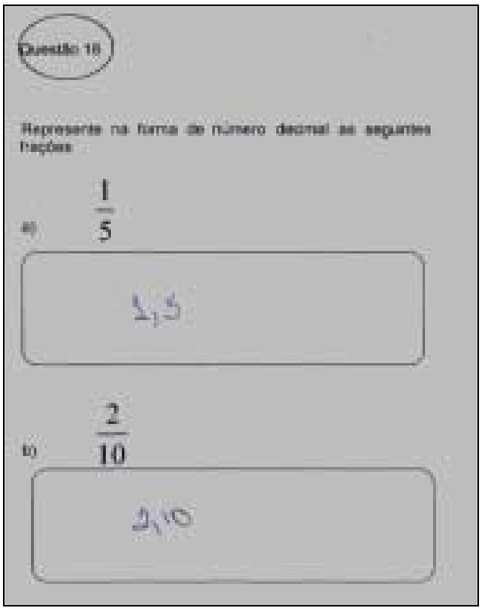


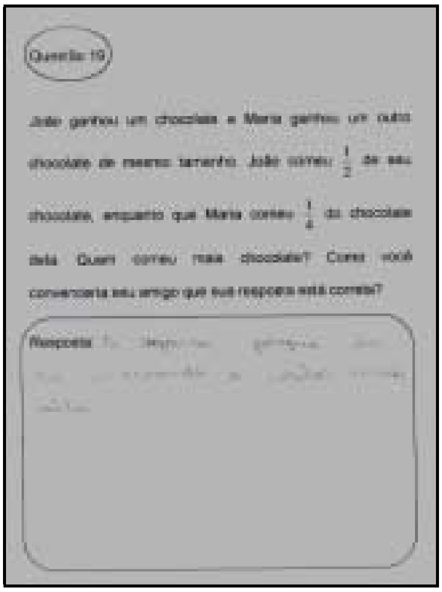
FIGURA 5.29: Questão18, Aluno 44, 6ª Série.

No exemplo dado da questão 19, o aluno 46 da 6ª série responde como se os denominadores 2 e 4 das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ fossem números naturais. Esse tratamento dado pelo aluno fica claro em sua afirmação, quando ressalta que João comeu só dois pedaços, ao passo que Maria comeu quatro pedaços.

No outro exemplo da questão 18, o Aluno 44 da 6ª série transformou a fração $\frac{1}{5}$ no número decimal 1,5 , apenas trocando o traço da fração pela vírgula do número decimal. A mesma estratégia de resolução observamos no item b da Questão 18.

Essa estratégia também foi encontrada no estudo de Bianchini (2001) feito com alunos de 3ª série do Ensino Fundamental. Em uma de suas atividades, os alunos representaram 1,9 como $\frac{1}{9}$, confundindo a vírgula com o traço de fração. Os alunos pensaram que 1,9 era o mesmo que ter um inteiro dividido em nove partes e, portanto, separaram uma parte.

Outro exemplo dessa estratégia de resolução que caracteriza a categoria E8, está no trecho da seguinte entrevista feita com o aluno 3 da 5ª série, quando ele explica como resolveu a questão19, que envolvia o significado Operador multiplicativo, com quantidade contínua e sem a representação icônica.



Questão 19

João ganhou um chocolate e Maria ganhou um outro chocolate de mesmo tamanho. João comeu $\frac{1}{2}$ de seu chocolate, enquanto que Maria comeu $\frac{1}{4}$ do chocolate dela. Quem comeu mais chocolate? Como você convenceria seu amigo que sua resposta está correta?

Resposta:

FIGURA 5.30: Questão 19, Aluno 4, 5ª Série.

P: João ganhou um chocolate e Maria ganhou um outro chocolate de mesmo tamanho. João comeu $\frac{1}{2}$ de seu chocolate, enquanto que Maria comeu $\frac{1}{4}$ do chocolate dela. Quem comeu mais chocolate? Como você convenceria seu amigo que sua resposta está correta? Você responde: “A Maria, porque ela tá marcando o valor mais alto”. Que valor que é esse que você escreveu?

A: Seria $\frac{1}{4}$. Porque $\frac{1}{2}$ seria comeu um inteiro ... a metade e ela ... essa parte não. $\frac{1}{4}$ comeu mais, eu acho.

P: $\frac{1}{4}$ comeu mais?

A: É.

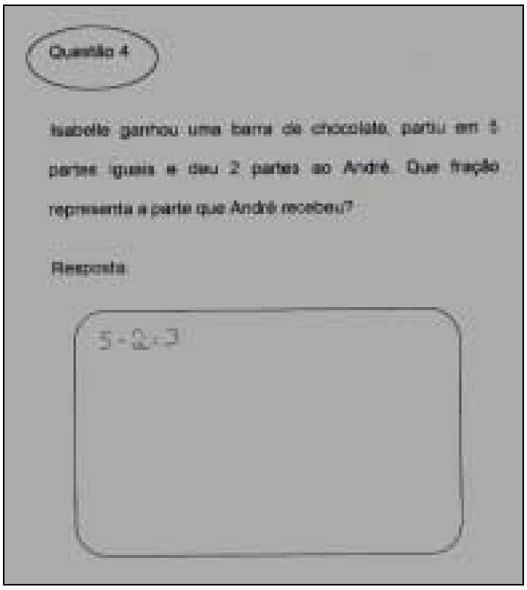
ENTREVISTA 5.11: Questão 19, Aluno 4, 5ª Série.

Nesta entrevista, podemos observar que o “valor maior” a que o aluno se refere é o 4 do denominador $\frac{1}{4}$. O aluno transfere as idéias construídas dos números naturais para o número racional. Desse modo, podemos inferir que o aluno em algumas situações, refere-se a frações não como um número, mas, sim, como números sobrepostos.

- **E9 – Utilização de Operação**

Entendemos como categoria E9 Utilização de operação, a estratégia utilizada pelo aluno que, com o intuito de revelar a resposta, procede algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre numerador e denominador.

Um exemplo que ilustra esse tipo de erro E9, pode ser observado na resposta dada pelo aluno 48 da 5ª série:


Questão 4

Isabele ganhou uma barra de chocolate, partiu em 5 partes iguais e deu 2 partes ao André. Que fração representa a parte que André recebeu?

Resposta

5-2=3

FIGURA 5.31: Questão 4, Aluno 2, 6ª Série.

Nessa resolução, podemos perceber que ao responder esta questão, o aluno adotou como estratégia a subtração entre o denominador (5) e o numerador (2), característica da categoria E9.

Podemos perceber esse tipo de procedimento nas questões que abordaram os significados Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo.

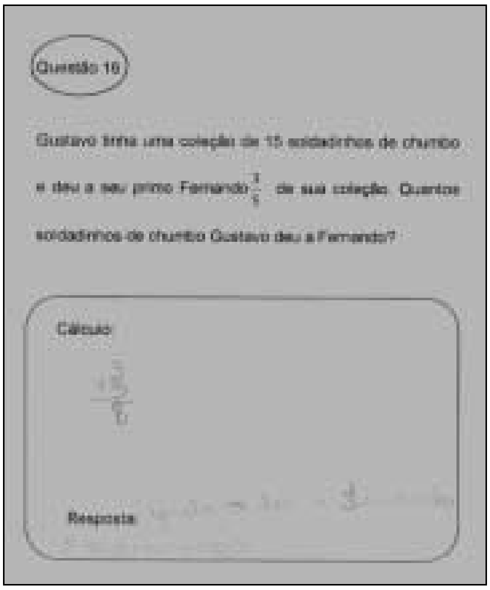
Os dados da Tabela 5.18 apresentam as questões nas quais esse tipo de erro (E9) ocorreu, destacando os enfoques nelas contidos e o número de respostas enquadradas nessa categoria. Ressaltamos que não há separação das séries.

Sig/Rep Qtde	**Número**		**Parte-todo**		**Quociente**		**Medida**		**Op.Multip**		**Total**
	I	**ÑI**	**I**	**ÑI**	**I**	**ÑI**	**I**	**ÑI**	**I**	**ÑI**	
C	-	Q18 8	-	Q4 19	Q6 2	Q13 6	Q5 2	-	-	Q19 1	38
D	-	-	Q1 6	Q12 4	Q2 21	Q10 3	Q17 1	Q3 15	Q14 53	**Q16 84**	187
Total	-	8	6	23	23	9	3	15	53	85	225

Tabela 5.19: Distribuição do E9 nas questões

Conforme os dados da Tabela 5.19, podemos observar quais as questões que o aluno utilizou a estratégia que gerou a categoria E9. A maior incidência desse tipo de erro foi na questão 16 que aborda o significado Operador multiplicativo com quantidade discreta sem a representação icônica, com 84 respostas (70%) das 120 respostas possíveis.

Para exemplificar, destacamos um protocolo para exemplificar esse tipo de estratégia E9, a seguir:



Questão 16

Gustavo tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo Fernando $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldadinhos de chumbo Gustavo deu a Fernando?

Cálculo

Resposta

FIGURA 5.32: Questão 16, Aluno 48, 5ª Série.

Nessa resposta, o Aluno 48 da 5ª série explicita a estratégia utilizada ao montar a conta de adição entre o numerador e o denominador da fração contida no enunciado da questão. Entendemos, portanto, que para o aluno dar sua resposta ele teria de operar com os números que compõem a fração. Com base na resposta detalhada (a conta de adição explícita) dada pelo aluno, pudemos entender as respostas de outros alunos que, simplesmente, colocaram o numeral 8 como resposta.

Outro exemplo que ilustra o erro do tipo E9, pode ser observado no trecho da entrevista feita com o Aluno 3 da 5ª série, quando este explica como resolveu a questão 14, que abordava o significado Operador multiplicativo de quantidade discreta com representação icônica.

FIGURA 5.33: Questão 14, Aluno 3, 5ª Série.

P: Observe a coleção de bolinhas abaixo. Então tem 12 bolinhas aqui, né? Luis ganhou $\frac{2}{3}$ das bolinhas de gude desta coleção. Quantas bolinhas ele ganhou? Você colocou que ele ganhou cinco bolinhas. Você fez um retângulo partido ao meio e um retângulo partido em três partes. Com é que você chegou nas cinco bolinhas?

A: É, porque eu fiz dois mais três, aí chegou nas cinco bolinhas.

ENTREVISTA 5.12: Questão 14, Aluno 3, 5ª Série.

Nessa entrevista o Aluno 3 deixa nítida sua estratégia de resolução, ou seja, ele manipulou, somou os números que compõem a fração, numerador e denominador para obter o resultado da questão.

SÍNTESE DA ANÁLISE QUALITATIVA

Nesta seção apresentaremos uma síntese dos principais resultados discutidos na análise qualitativa, tanto nos questionários como nas entrevistas.

Relação Parte-parte: estratégia utilizada pelo aluno ao desprezar o todo envolvido. O aluno faz a contagem das partes sem relacionar com o todo, tanto com quantidades discretas como as quantidades contínuas.

Inversão do numerador pelo denominador: compreende a estratégia em que há uma inversão das posições do numerador pelo denominador. Entendemos que o erro que qualifica essa categoria pode ser pelo fato do aluno entender a situação, porém não é capaz de representá-la utilizando a fração. Parece que o aluno não sabe distinguir na fração, a relação que há entre o numerador e denominador.

Quociente remete para o Parte-todo: compreende a estratégia em que há o desprezo das duas grandezas envolvidas (chocolate/criança; bolinhas de gude/criança; bolas de futebol/criança), levando em conta somente uma delas, o que de fato está sendo dividido (bolinhas de gude; chocolate, bolas de futebol), desconsiderando para quem está sendo dividido (crianças). Essa estratégia de resolução está diretamente ligada às questões cujo significado que queríamos enfocar era o de Quociente.

Interpretação da fração literalmente: a estratégia em que o aluno recorre é a de fazer a interpretação da fração literalmente. A estratégia está diretamente ligada à questão 11 cujo significado que queríamos enfocar era o de Número.

Desprezo da conservação da área: essa estratégia refere-se ao fato do aluno não considerar a conservação da área dividida. Essa estratégia está diretamente ligada à questão 8b cujo significado que queríamos enfocar era o de Parte-todo.

Utilização dos dados do problema: compreende a estratégia do aluno que elaborou sua resposta com os dados contidos no enunciado e ou parte da resposta da referida questão.

Denominador maior que numerador: estratégia utilizada pelo aluno que inverte o numerador pelo denominador pelo fato de que o aluno entende que numerador não pode ser maior que o denominador.

Números sobrepostos: a estratégia de resolução cuja característica principal é o fato do aluno ter tratado a fração como dois números, naturais e distintos, que estão sobrepostos e apenas separados por um traço.

Utilização de operação: a estratégia utilizada pelo aluno que, com o intuito de revelar a resposta, procedeu algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre numerador e denominador.

Percebemos que não houve uma regularidade nas estratégias utilizadas pelos alunos. Para o mesmo significado observamos diferentes estratégias de resolução.

Finalizamos com a síntese da análise qualitativa o capítulo da análise dos resultados, passando em seguida para o fechamento de nosso estudo que será feito em seguida, no capítulo 6.

CAPÍTULO VI
CONCLUSÃO

A realização deste estudo teve como objetivo investigar as estratégias de resolução de questões que abordavam o conceito de fração. A pesquisa utilizou a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003) que discutem a fração contemplando cinco significados – Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo.

Para alcançar tal objetivo, passamos por algumas etapas, a primeira delas constituiu-se na problematização e questão de pesquisa (capítulo 1). Em seguida, para que pudéssemos planejar e realizar o estudo, foi necessário contar com um suporte teórico. Nesse sentido, o estudo baseou-se na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1988; 1990) e dentro desta os Invariantes Operatórios. Nunes et al. (2003) e sua proposta de classificação teórica da fração foi o outro suporte teórico.

Na seqüência, versamos a respeito do conceito de fração sob três aspectos. No primeiro aspecto, a fração na matemática – descrevemos a trajetória histórica de sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades. No segundo, a fração na Educação Matemática – revisamos estudos relevantes correlatos ao cerne de nossa pesquisa e, finalmente, o último aspecto, a fração na escola – descrevemos as recomendações feitas pelos PCN (1997) e relatamos ainda como a fração é abordada em três coleções de livros didáticos, no que tange às 5ª e 6ª séries.

Sustentadas nas idéias teóricas, planejamos o desenvolvimento da pesquisa descritiva, diagnóstica, na qual procuramos conhecer e interpretar a realidade sem o intuito de interferir para modificá-la (RUDIO, 1979).

Para tanto foram aplicados dois instrumentos diagnósticos. O primeiro consistiu de um questionário para 120 alunos oriundos das 5ª e 6ª séries, o segundo foi uma entrevista semi-estruturada, aplicada a 12% dessa amostra (capítulo 4).

Assim, o presente capítulo propôs-se a fazer o fechamento de nosso estudo, apresentando as conclusões possíveis extraídas apoiadas na análise dos instrumentos aplicados (capítulo 5).

Para proporcionar uma melhor apresentação das conclusões do estudo, iremos dividir este capítulo em três partes, a primeira será voltada para uma síntese dos principais resultados obtidos nos questionários e entrevistas; a segunda parte, para responder nossa questão de pesquisa e, finalmente, a terceira será dedicada a sugestões às futuras pesquisas a respeito do tema.

6.1 SÍNTESE DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

Nesta seção, apresentaremos uma síntese dos principais resultados discutidos no capítulo da análise, tanto aqueles advindos do questionário como os das entrevistas.

De início, observamos que os percentuais de acerto, tanto da 5ª como da 6ª séries foram baixos e próximos um do outro, o que demonstra uma certa homogeneidade entre o desempenho das séries.

No entanto, essa homogeneidade ganha outro contorno se levarmos em consideração o desempenho dos alunos dessas séries com relação aos significados das frações, assim como em relação às variáveis de pesquisa.

O significado Parte-todo mantém homogeneidade no desempenho de ambas as séries, embora a 6ª série tenha apresentado melhor desempenho na questão que envolvia quantidade discreta não icônica. Além disso, observamos que, para as questões do significado Parte-todo, o ícone não foi o agente facilitador às duas séries, pois, nas quantidades contínua e discreta o melhor desempenho dos alunos estava nas questões não icônicas.

O significado Número foi aquele que os alunos da 5ª e 6ª séries apresentaram o pior desempenho (2,5% e 3,33% respectivamente). Apesar desse baixo desempenho, parece que o apoio icônico ajudou os alunos (3 das 60 respostas possíveis) da 5ª série, ao passo que para a 6ª série não houve diferença alguma entre representação icônica e não icônica.

O significado Medida foi o segundo pior desempenho e, assim como Parte-todo e Número, manteve a homogeneidade entre as séries. No significado Medida, as 5ª e 6ª séries mostraram maior sucesso nas questões que envolviam quantidade contínua icônica e, também, quantidade discreta não icônica.

A homogeneidade do desempenho entre as séries rompeu-se nas situações que envolveram os significados Quociente e Operador multiplicativo.

Ao analisarmos o significado Operador multiplicativo, percebemos que este foi o segundo melhor desempenho entre os alunos da 6ª série, que alcançaram maior sucesso na questão de quantidade contínua icônica.

O significado Quociente foi o segundo melhor desempenho entre os alunos da 5ª série, alcançando maior sucesso nas questões não icônicas.

Embora o desempenho dos alunos da 5ª série nas questões que envolviam o significado Quociente, tenha sido aquém de um resultado satisfatório (23,75%), ao compararmos com os outros significados envolvidos (com exceção de Parte-todo), ele se destaca. Entendemos que este dado possa ser relevante, porque este resultado vem ao encontro de resultados de pesquisa desenvolvida na Inglaterra por Nunes et al. (2003).

Nesta pesquisa, os autores citados indicam que crianças inglesas conseguem compreender melhor o conceito de fração, quando este é iniciado pautado em situações representadas por um quociente, quer seja a divisão de chocolates para crianças.

A conexão que Nunes e Bryant (1996) fazem entre fração e divisão não é acidental, pois, Kieren (1988), baseado em sua análise matemática de números racionais, sugere que as frações são números produzidos por divisões. Sendo assim, as frações são elementos do campo dos quocientes.

Considerando que situações que envolvem fração com o significado Quociente são pouco trabalhadas nas escolas, como mostrou a análise que fizemos nos livros didáticos, os resultados obtidos em nosso estudo apontam para um nível de sucesso quase satisfatório dos alunos de 5ª série. Este fato parece ser uma contribuição do presente estudo, para que se reflita a respeito de utilizar mais esse significado no ensino do conceito de fração.

Constatamos que não houve, em nenhuma das séries pesquisadas, um desempenho eqüitativo entre os cinco significados da fração propostos por Nunes et al. (2003). Os dados da Tabela 5.6 (p.149) revelam que, enquanto os alunos das 5ª e 6ª séries juntas acertaram 162 das 480 respostas possíveis das questões que abordavam o significado Parte-todo (isto é, 33,75%), esses mesmos alunos acertaram juntos 7 das 240 respostas possíveis das questões que contemplavam o significado Número (2,92%).

Este dado é relevante e preocupante, pois ao retomarmos as idéias teóricas de Vergnaud (1998), o conhecimento conceitual deve emergir dentro de uma variedade de situações e que cada situação, normalmente, não pode ser analisada com ajuda de apenas um conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais do que um conceito e, em contrapartida, um conceito não pode ser apropriado com base na vivência de uma única situação.

Com relação aos invariantes da fração – ordem (questão 19) e equivalência (questões 5a, 15 e 17c), pudemos observar que, apesar de percebermos o melhor desempenho na 6ª série, os resultados apontam para uma mesma tendência de sucesso entre os alunos das 5ª e 6ª séries. Os melhores índices de acerto foram obtidos na questão 15, seguido das questões 5a, 19 e 17c.

É relevante destacar que, embora essas três questões (5a, 15 e 17c) abordassem o mesmo invariante equivalência, notamos que elas tiveram diferentes graus de dificuldade.

Para que o aluno pudesse responder de maneira correta à questão 15 – um bolo a ser dividido para três pessoas e dois bolos a serem divididos para seis pessoas –, ele poderia utilizar a relação de dobro entre as crianças e entre os bolos. Diante disso, entendemos que o aluno não necessitaria se reportar às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ para responder corretamente. É possível que o ícone tenha sido relevante, para que os alunos pudessem acertar a resposta da questão. Na questão, tivemos 65,83% de respostas certas somando os dois grupos.

O segundo melhor desempenho foi observado na questão 5a – relação entre a quantidade da mistura das tintas branca e azul e a quantidade de tinta azul. Na entrevista, percebemos que o ícone ajudou o aluno perceber a relação de dobro entre a tinta azul o total de tintas, tanto na segunda como na terça-feira.

Como na questão 15, pareceu-nos que a representação fracionária não foi relevante, para que o aluno estabelecesse a equivalência entre as quantidades de tinta azul. De fato, com base nas respostas obtidas na entrevista, podemos inferir que o fato dos numeradores e denominadores das frações ($\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{4}$) não serem múltiplos entre si, dificultou a percepção, por parte do aluno, da equivalência entre elas.

O esquema de ação que os alunos utilizaram para responder as duas questões anteriores de equivalência (relação de dobro percebida pelo ícone) não deu conta de responder corretamente a questão 17c – em qual dos dois baralhos existe a maior chance de se tirar uma carta branca. Os alunos não reconheceram a equivalência das frações, mesmo retomando a questão durante a entrevista.

Entendemos que a relação de dobro seria um bom ponto de partida para explicar o invariante da fração equivalência. Mas, segundo Vergnaud (1990) para que o aluno possa se apropriar de um conceito, há necessidade que ele vivencie diferentes situações.

Com relação à questão 19 que se referia ao invariante ordem (Maria comeu $\frac{1}{4}$ do chocolate dela, João comeu $\frac{1}{2}$ do chocolate dele), notamos com base nas entrevistas que os alunos utilizavam apenas os denominadores para responder a questão, concluindo que quatro é maior que dois. Pareceu-nos que o aluno transferiu o conhecimento que ele tem sobre a comparação dos números naturais para a fração.

6.2 RESGATE DA QUESTÃO DE PESQUISA

Antes de respondermos a questão de pesquisa, entendemos ser importante relembrar que nosso estudo faz parte de um Projeto de pesquisa mais amplo desenvolvido dentro de uma cooperação internacional entre o grupo da Oxford Brookes University e o grupo da PUC-SP.

Na Inglaterra, já foi feito um estudo de intervenção, que apontou que as crianças inglesas conseguem compreender melhor o conceito de fração, quando este é iniciado, baseado em uma situação representada por um quociente, o resultado de uma divisão.

O grupo brasileiro ainda se encontra na fase de compreensão das estratégias utilizadas por alunos e professores. Portanto, os primeiros estudos desse grupo têm privilegiado o exame diagnóstico.

O presente estudo foi um dos primeiros a fazer parte desse projeto, apesar de já termos observarmos os resultados da pesquisa na Inglaterra, julgamos necessário desenvolver estudos diagnósticos para conhecer nossa realidade. Aqui, no Brasil, os alunos procederiam da mesma forma, isto é, nossos alunos teriam êxitos similares em situações que contemplassem o significado quociente?

De acordo com nossos resultados, responderíamos afirmativamente, pois, embora os resultados de nossa amostra estejam aquém do esperado (insatisfatório para alunos de 5ª e 6ª séries), o significado Quociente foi o segundo melhor desempenho da 5ª série e o terceiro melhor da 6ª série.

Este resultado está atrelado ao estudo feito por Merlini et al. (2005) realizado com professores e alunos do Ensino Fundamental, ao constatarem que os professores não contemplavam o significado Quociente na elaboração de seus problemas. O estudo de Merlini et al. (2005) faz uma séria reflexão sobre a “involução” da apropriação do conceito de fração como quociente, já que como tal significado não é trabalhado no ensino das frações, a concepção intuitiva que o estudante apresentava no início do ensino da fração (3ª série) não é formalizada e, conseqüentemente, vai se perdendo ao longo das séries.

Fundamentados nesses resultados, argumentamos que existe a possibilidade que nossos alunos teriam êxito semelhante ao encontrado na pesquisa com os alunos ingleses, caso o conceito de fração iniciasse com situações elaboradas com o significado quociente.

Percebemos, ainda, que o significado Operador multiplicativo foi o segundo melhor desempenho da 6ª série e o terceiro melhor da 5ª série. Novamente, retomando o estudo de Merlini et al. (2005), vemos que houve uma predominância acentuada dos professores para elaborar problemas que contemplassem esse significado. Os resultados sugerem que os professores valorizam o algoritmo, já que o significado Operador multiplicativo é o que mais necessita desse aspecto procedimental (multiplicação e divisão ou vice-versa).

Expostas as considerações iniciais, partiremos agora para responder a nossa questão de pesquisa:

> **Quais estratégias de resolução alunos de 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?**

Para responder esta questão, procuramos diagnosticar as possíveis estratégias que os alunos utilizaram frente a problemas que abordassem o conceito de fração no que diz respeito a seus cinco diferentes significados.

O foco de nossa pesquisa foi um mapeamento (um diagnóstico) das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos da amostra, passaremos agora a apontá-las.

- Estratégia relação Parte-parte, o aluno desprezava o todo envolvido, fazendo a contagem das partes sem relacionar com o todo. Esta estratégia foi constatada tanto com quantidades discretas quanto com quantidades contínuas. Em seus estudos, Bezerra (2001), também, observou esse tipo de erro.
- Estratégia Inversão do numerador pelo denominador, o aluno fez a inversão das posições do numerador pelo denominador. Supomos que o aluno não saiba distinguir a relação que existe entre o numerador e denominador. Esse tipo de estratégia também foi detectado nos estudos de Bezerra (2001) e D'Ambrósio (1989).
- Estratégia Quociente remete para o Parte-todo, o aluno desprezou as duas grandezas envolvidas (chocolate/criança; bolinhas de gude/criança; bolas de futebol/criança), levando em conta somente uma delas. Esta estratégia de resolução está diretamente ligada às questões, cujo significado, que queríamos enfocar, era o de Quociente. Os dados encontrados nos estudos de Kerslake (1986) sinalizam esta dificuldade.

Nesta estratégia de resolução, existem indícios acentuados que apontam a necessidade do aluno "localizar" o todo envolvido, o que nos faz supor que o que está por trás dessa atitude, é a relação parte-todo, uma vez que é por esse significado que se inicia o ensino do conceito de fração.

- Estratégia interpretação da fração literalmente, o aluno fez a interpretação da fração literalmente. Ao ler $\frac{1}{2}$ (um meio), o aluno a interpretou como sendo “um e meio” (1 inteiro e metade do inteiro). Esta estratégia de resolução está diretamente ligada à questão que envolve o significado Número icônico.

- Estratégia desprezo da conservação da área, o aluno não levou em conta a conservação da área. Esta estratégia de resolução está diretamente ligada à questão Parte-todo de quantidade contínua icônica. O aluno não percebeu que a parte pintada representava duas das partes que foram divididas na figura. A estratégia também foi constatada nos estudos de Campos et al.(1995) citada por Nunes e Bryant (1996).

- Estratégia utilização dos dados do problema, o aluno elaborou sua resposta, de maneira equivocada, com os dados contidos no enunciado e ou parte da resposta da referida questão.

- Estratégia denominador maior que numerador, o aluno inverteu o numerador pelo denominador, porque entende que numerador não pode ser maior que o denominador.

É possível que esta estratégia também esteja ligada ao significado Parte-todo da fração. É comum observarmos exemplos de relação Parte-todo com apenas um todo envolvido, conseqüentemente, o número das partes tomadas será, no máximo, igual ao número das partes do todo, excluindo, assim, a possibilidade do numerador ser maior que o denominador.

- Estratégia números sobrepostos, cuja característica principal é o fato do aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos e que estão sobrepostos, apenas separados por um traço. A mesma estratégia de resolução foi encontrada por Bianchini (2001).

- Estratégia utilização de operação, o aluno com o intuito de revelar a resposta, procedeu algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre numerador e denominador.

Listadas as principais estratégias de resolução encontradas nas respostas dos alunos de nossa amostra, podemos pontuar que não houve uma regularidade. Em outras palavras, para um mesmo significado encontramos diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

Dessa forma, sentimos-nos inclinados a concluir que o modo do ensino do conceito fração abordado nas escolas, privilegiando alguns significados (Parte-todo e Operador multiplicativo), em detrimento de outros, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito. Diante do exposto, podemos inferir que a hipótese que levantamos no início do estudo foi confirmada.

Entretanto, o que nos surpreendeu neste estudo foi que os resultados obtidos pelos alunos de 5ª e 6ª séries no significado Parte-todo estão muito aquém do esperado. Isto nos leva a concluir que, pelo menos, nesta população, a maneira como o processo de ensino tem sido feito, oferece pouco recurso para favorecer a construção do conceito de fração.

Muito embora os dados de nossa amostra tenham sido retirados de uma população de escola pública que representa a maioria dos alunos brasileiros, não possuímos dados estatísticos suficientes que nos permitam inferir para além de nossa população. Ainda assim, sentimo-nos confortáveis ao fazer algumas afirmativas que, possivelmente, poderão contribuir para dar pistas sobre prováveis concepções dos alunos dessa faixa etária, relativas a compreensão e representação da fração.

Cabe ressaltar que as conclusões, aqui apresentadas, são resultados da análise de dados obtidos na aplicação dos instrumentos diagnóstico e, portanto, circunscritas ao limite de nosso universo de estudo.

6.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Ao longo do estudo, na busca de responder nossa questão de pesquisa, outras questões foram surgindo e assim inspirando novas investigações. O fato de ter sido feito um estudo diagnóstico, tem como premissa ser uma alvanca para futuras pesquisas de intervenção.

Dessa forma, destacaremos três sugestões de pesquisa com intervenção no Ensino Fundamental: duas delas com alunos de 3ª e 5ª e a outra com professores do segundo ciclo.

A primeira sugestão de pesquisa seria desenvolver uma seqüência para o início do ensino de fração para a 3ª série do Ensino Fundamental, que abordaria três dos cinco significados da fração (NUNES et al., 2003): Quociente, Parte-todo e Medida.

Escolheríamos esses três significados por entender que são mais próximos do cotidiano do aluno. Situações que contemplem o significado Quociente permitem ao aluno uma prática comum em sua vida diária, que é dividir chocolate/balas entre crianças. Quanto ao significado Parte-todo, devem ser relacionadas as partes tomadas com relação ao(s) todo(s) envolvido(s). Para enfocar o significado Medida, elaborar situações que permitam que o aluno perceba a chance de tirar uma bola branca, tendo bolas brancas e azuis na caixa, ou ainda, o quanto representaria o concentrado de suco dentro da mistura de concentrado e água.

A segunda sugestão de pesquisa seria, também, desenvolver uma seqüência de ensino destinada a alunos de 5ª série. Nessa etapa escolar a fração é retomada, porém, abordando o significado Número, assim como o significado Operador multiplicativo já como ferramenta (DOUADY,1993 citada por MARANHÃO, 1999) para resolver problemas matemáticos. Entretanto, nossa pesquisa apontou que os alunos de 5ª série apresentam defasagem no conhecimento do conceito de fração. Dessa forma, esta proposta de seqüência de ensino para a 5ª série permearia os cinco significados da fração (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo).

Cabe ressaltar que, ao elaborar situações para as seqüências de ensino, essas deverão apresentar quantidades contínua e discreta com representações icônica e não icônica.

Quanto à terceira sugestão de pesquisa, seria trabalhar com professores do 2º ciclo, pois é nessa fase que se inicia o ensino de fração. Desenvolver esse trabalho com o conceito de fração baseado nos cinco significados – Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo –, embora os professores desse ciclo não trabalhem com seus alunos os significados Número e Operador multiplicativo. Entendemos ser importante que os professores tenham clareza de que a fração, esse tão complexo conceito matemático, poderá ser construído pelos alunos se explorado seus diferentes significados nos diversos contextos, sobretudo, nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. **Introdução à análise Matemática.** 2ª ed. rev. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BEHR, M. J. et al. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 296-333.

BEZERRA, F. J. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações**: uma abordagem criativa para a sala de aula. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BIANCHINI,B.L. **Estudo sobre a aplicação de uma seqüência didática para o ensino dos números decimais.** Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1997.

______, Ministério da Educação e do Desporto. **Sistema Nacional de Avaliação Básica.** Brasília, DF, 2002.

CAMPOS, T. et al. **Lógica das equivalências**: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Não publicada. 1995.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Gradiva, 1998.

CISCAR, S. L.; GARCÍA, M. S. (coord). **Fraciones**: la relacion parte/todo. Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

DAVID, M. M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica**, Minas Gerais, v. 3, n. 14, mar./abr.1997.

DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico** descobrindo o pensamento das crianças. Tradução Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

FERREIRA, A.B.H. **Minidicionário Aurélio.** Rio de Janeiro: E.Nova Fronteira. 1977.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 155-196.

FREITAS, J.L.M.de. Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 65-87.

GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR, J.R. **Matemática pensar e descobrir: novo** quinta série, primeiro grau: livro do professor. São Paulo: FTD, 2000. 304 p.

GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR, J.R. **Matemática pensar e descobrir: novo** sexta série, primeiro grau: livro do professor. São Paulo: FTD, 2000. 312 p.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade:** 5ª série, primeiro grau: livro do professor. 4ª ed.reform. São Paulo: Atual. 2000. 302 p.

IEZZI, G. et al. **Matemática e realidade:** 6ª série, primeiro grau: livro do professor. 4ª ed.reform. São Paulo: Atual. 2000. 272 p.

IFRAH, G. **Os números:** a história de uma grande invenção. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo, 1996.

IMENES, L.M.; LELLIS, M. **Matemática paratodos:** 5ª série, primeiro grau: livro do professor. São Paulo: Scipione, 2002. 120 p.

IMENES, L.M.; LELLIS, M. **Matemática para todos** 6ª série primeiro grau: livro do professor. São Paulo: Scipione, 2002. 128 p.

KERSLAKE, D. **Fractions: children's strategies and errors**: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T. E. Number and measurement: **mathemathical, cognitive and instrucional foundaments of rational number**, Columbus, OHERIC/SMEA, p. 101-144, 1976.

_______. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: J. HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): **Number concepts and operations in the Middle Grades**. New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-80.

MACK, N. K. **Learning rational numbers with understanding**: the case of informal knowledge. In: T. P. Carpenter; E. Fennema, and T.A. 1993.

MAGINA, S. et al. **Repensando adição e subtração**. São Paulo: PROEM, 2001.

MARANHÃO, M.C.S.A. Dialética –ferramenta-objeto. In: **Educação Matemática** uma introdução. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 115-134

MERLINI, V.L. et. al. **Fração: o significado quociente para professores e estudantes** – um estudo comparativo. In: V CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIBEM. Lisboa. 2005. CD-ROM.

MOUTINHO, L.V. **o conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação a ser defendida (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

NUNES; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática.** Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

_______ et al. **The effect of situations on children´s understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p. 53-92.

POTHIER, Y.; SAWADA, D. Partitioning: an approach to fractions. In: **Arithmetic Teacher**, v. 38, p. 12-16, 1990.

PROEM. **Uma análise da construção do conceito de fração**. Coordenadora: Campos, T.N. e Orientadora: D’Ambrósio, B. 1989.

RUDIO, F.V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica.** Petrópolis: Vozes, 1979.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação a ser defendida (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, S. S. **O desenvolvimento de conceitos elementares do bloco tratamento da informação com o auxílio do ambiente computacional**: um estudo de caso com uma professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

SÃO PAULO, Secretaria dos Negócios da Educação. **Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar.** São Paulo. 2000.

SILVA, M. J. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

TINOCO, L. A. A.; LOPES, M. L. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. In: **A Educação Matemática em Revista-SBEM**, n. 2, p. 13-18, 1º sem. 1994.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathemtics concepts and processes.** New York: Academic Press Inc., 1983. p. 127-174.

_______. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). **Research agenda in Mathematics Education**: number concepts and operations in the Middle Grades. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

_______. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.

_______. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). 1º Seminário Internacional de Educação Matemática. **Anais...** Rio de Janeiro: Seminário Internacional de Educação Matemática, 1993. p. 1-26.

ANEXO

QUESTIONÁRIO

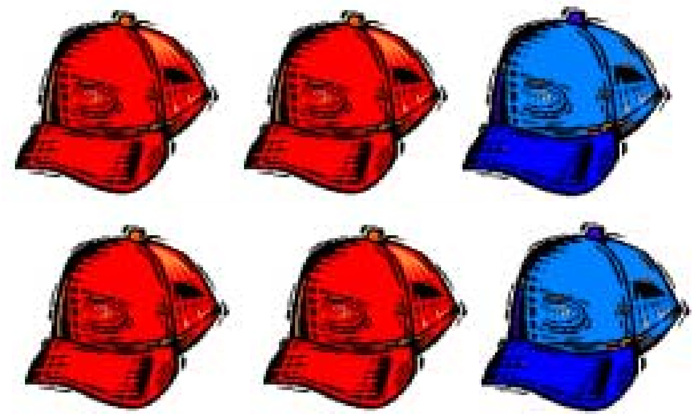
NOME:

IDADE:

SÉRIE:

Questão 1

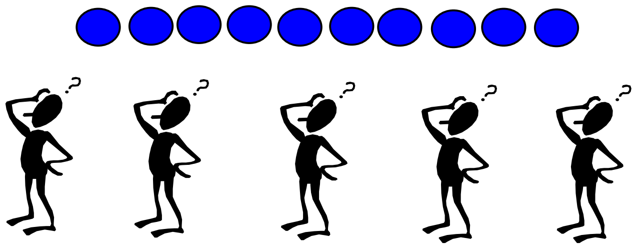
Numa loja de presentes há 4 bonés vermelhos e 2 bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?



Resposta:

Questão 2

Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças.



a) Quantas bolinhas cada criança ganhará?
Resposta:

b) Que fração representa esta divisão?
Resposta:

Questão 3

Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?

Resposta:

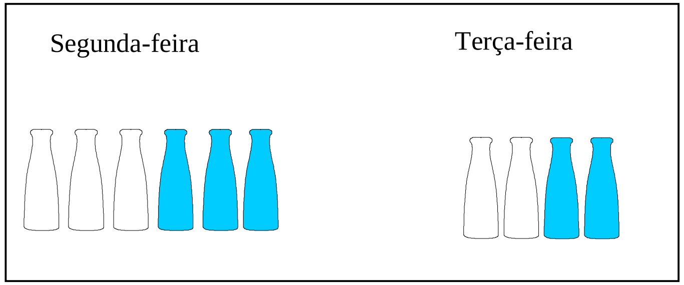
Questão 4

Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 5 partes iguais e deu 2 partes ao André. Que fração representa a parte que André recebeu?

Resposta:

Questão 5

A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?



Sim ☐ Não ☐

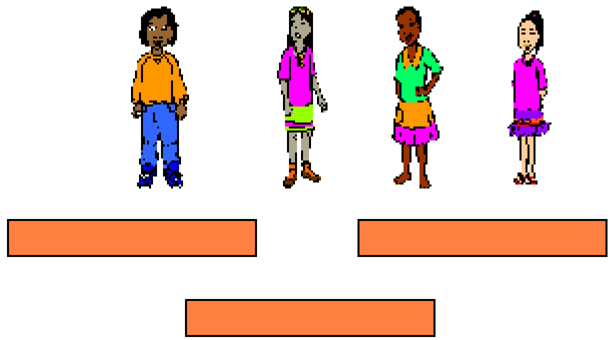
Que fração representa a quantidade de tinta azul em relação à mistura das tintas azul e branca

b) na segunda-feira?

c) E na terça-feira?

Questão 6

Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



a) Cada criança receberá 1 chocolate inteiro?

Sim ☐ Não ☐

b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate?

Sim ☐ Não ☐

c) Que fração de chocolate cada criança receberá?

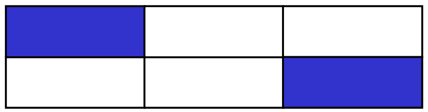
Resposta:

Questão 7

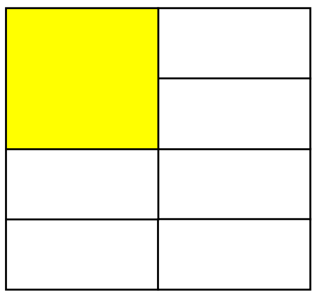
Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{5}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu.

Questão 8

Observe o desenho abaixo e responda qual a fração que representa as partes pintadas da figura?



Resposta:



Resposta:

Questão 9

Para fazer uma certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de concentrado de laranja para 5 medidas de água. Que fração representa a medida de concentrado de laranja em relação ao total de suco?

Resposta:

Questão 10

Foram divididas igualmente 8 bolas de futebol de mesmo tamanho para 4 crianças.

a) Quantas bolas de futebol cada criança ganhará?

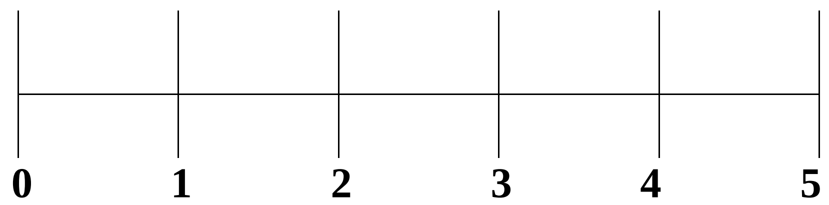
Resposta:

b) Que fração representa essa divisão?

Resposta:

Questão 11

Represente na reta numérica as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.



Questão 12

Numa loja de brinquedos havia 6 bonecas iguais. Maria comprou 2 dessas bonecas para presentear suas sobrinhas. Que fração representa as bonecas que Maria comprou em relação ao total de bonecas da loja?

Resposta:

Questão 13

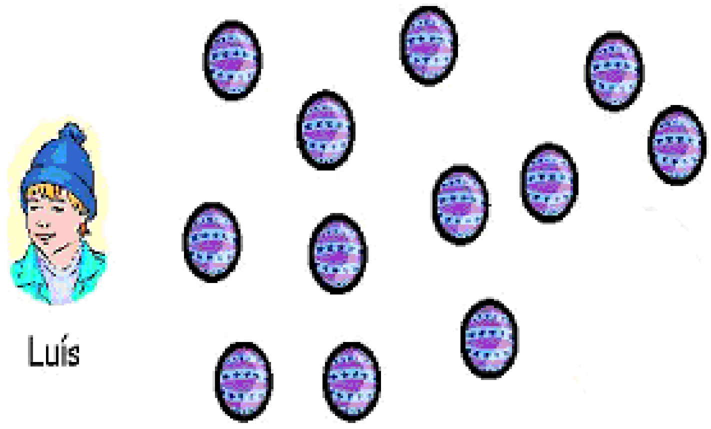
Foram divididos igualmente 4 chocolates para 5 crianças.

Que fração representa o que cada criança recebeu?

Resposta:

Questão 14

Observe a coleção de bolinhas abaixo:



Luís ganhou $\frac{2}{3}$ das bolinhas de gude desta coleção.

Quantas bolinhas ele ganhou?

Resposta:

Questão 15

Um bolo foi dividido igualmente para 3 crianças, e 2 bolos do mesmo tamanho foram divididos igualmente para 6 crianças.

Fig.1

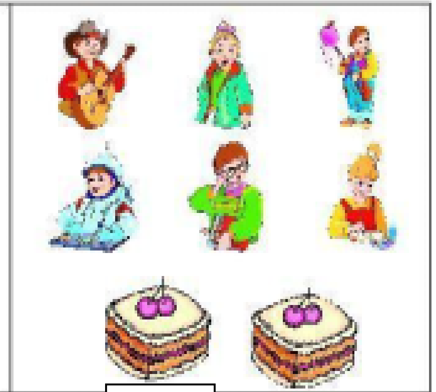


Fig.2

a) As 9 crianças comerão a mesma quantidade de bolo?

Sim ☐ Não ☐

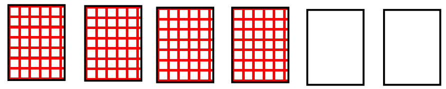
Questão 16

Gustavo tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo Fernando $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldadinhos de chumbo Gustavo deu a Fernando?

Cálculo:

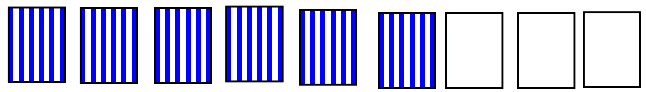
Resposta:

Questão 17



a) Qual a chance de tirar uma carta branca nesse baralho?

Resposta:



b) Qual a chance de tirar uma carta branca nesse baralho?

Resposta:

c) Em qual dos dois baralhos existe maior chance de se tirar uma carta branca?

Resposta:

Questão 18

Represente na forma de número decimal as seguintes frações:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{10}$

Questão 19

João ganhou um chocolate e Maria ganhou um outro chocolate de mesmo tamanho. João $\frac{1}{2}$ de seu chocolate, enquanto que Maria comeu $\frac{1}{4}$ do chocolate dela. Quem comeu mais chocolate? Como você convenceria seu amigo que sua resposta está correta?

Resposta: