

BENEDITA NATSUKO TOJO

**CONCEPÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O
ENSINO/APRENDIZAGEM DA CONGRUÊNCIA**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2006**

BENEDITA NATSUKO TOJO

**CONCEPÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O
ENSINO/APRENDIZAGEM DA CONGRUÊNCIA**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como
exigência parcial para obtenção do título de **Mestre
Profissional em Ensino de Matemática**, sob a
orientação do **Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni**.*

**PUC/SP
São Paulo
2006**

Banca Examinadora

Profa. Dra. Celina A. Almeida Pereira Abar

Prof. Dr. Marcos Antonio Santos de Jesus

Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

A Deus, por tudo.

***À querida família Tojo, pelo
apoio em todos os momentos
de minha vida.***

AGRADECIMENTO

Com carinho e admiração agradeço às pessoas que contribuíram direta e indiretamente para a elaboração dessa dissertação:

A Deus, pela oportunidade e experiência; pela presença em todos os instantes de minha vida.

Ao prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni, por sua sabedoria e dedicação; pela paciência e incentivo durante a orientação.

Aos meus pais kiyonori e Toyoko, que tornaram possível a educação escolar para os seus filhos.

Aos meus irmãos Ednilson Kiyoshi, Roberto Kiyoji, Mario Tochihaki, João Akio e Augusto Goro, e minhas irmãs Aparecida Junko e Márcia Haruko, que são minhas referências, pelo apoio e compreensão de sempre.

Ao meu cunhado e minhas cunhadas, meus sobrinhos e sobrinhas, que acompanharam minha trajetória nesse curso.

Ao prof. Dr. Marcos Antonio Santos de Jesus e a profa. Dra. Celina A. Almeida Pereira Abar pelas valiosas contribuições concedidas na qualificação.

Aos queridos professores, funcionários e alunos da escola "Verdinho", à diretora Judith, às coordenadoras Maria Aparecida (Cidinha), Maria Tereza e Valéria, pelo carinho, apoio e incentivo que sempre recebi dessa maravilhosa equipe.

Ao prof. Anderson José da Silva, ao meu sobrinho Arthur e aos alunos que participaram desta pesquisa.

Ao prof. Wellington pela amizade e revisão deste trabalho.

À amiga Maria Helena pelas reuniões, trabalhos e seminários compartilhados durante o curso de mestrado; pelo companheirismo de sempre.

Aos professores doutores da PUC-SP, pelas atualizações e renovações de idéias e pelo revigoramento profissional.

Ao Francisco e à Vera da secretaria da PUC-SP, pelo auxílio de sempre.

À equipe da Diretoria de Ensino de Jacareí, pelas orientações e atendimento sobre a Bolsa Mestrado.

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo investigar como alunos da 1ª série do Ensino Médio se apropriam do conceito de congruência e o utilizam no processo de prova.

A pesquisa foi baseada nas investigações de: Parzysz (2001) sobre o desenvolvimento do pensamento para o ensino da Geometria; Machado (2005) sobre a rede de conhecimentos; Freudenthal (1973) sobre a organização local para o estudo da congruência e Balacheff (1988) sobre os tipos de provas.

Utilizou-se como metodologia de pesquisa, alguns princípios da Engenharia Didática que envolveu 14 alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública do Estado de São Paulo.

As análises da experimentação mostraram que, o processo de transição do concreto para o espaço-gráfico contribuiu para a apropriação do conceito de congruência e que esse processo favoreceu, em parte, a passagem do empírico para o dedutivo. Outros complementos na sequência didática se tornam necessários para que a passagem do empírico ao dedutivo se concretize mais amplamente.

Palavras-chave: Congruência – Cabri-géomètre – Prova – Geometria.

ABSTRACT

This dissertation has by purpose to investigate how first grade students of the High School appropriate of the congruence conception and utilize it in the proof process.

The research was embased in the investigation of: Parzysz (2001) about thought progress for geometry teaching; Machado (2005) about knowledge net; Freudenthal (1973) about local organization for congruence teaching and Balacheff (1988) about kinds of proofs.

It was utilized while research methodology, some didactic engineering principle which involved fourteen first grade students of the High School from a public school of the São Paulo State.

The analyses of the experimentation showed that the changing process from concrete to the graphic-space contributed to the appropriation of the congruence conception and how this process collaborated, partially, to the passage from empirism to deduction. Other complements in didactic sequence become necessary to that this passage from empirism to deduction renders more widely.

Key-words: Congruence – Cabri-géomètre – Proof – Geometry.

SUMÁRIO

Capítulo 1 - Introdução

1.1. Justificativa e escolha do tema.....	1
1.2. Estrutura do Trabalho.....	4
1.3. Revisão Bibliográfica.....	5
1.4. Fundamentação teórica.....	13

Capítulo 2 - Estudo do objeto matemático "congruência"

2.1. Euclides	25
2.2. Clairaut	33
2.3. Legendre.....	36
2.4. Hadamard	40
2.5. Hilbert	42
2.6. Birkhoff.....	49
2.7. Congruência e igualdade.....	52
2.8. Congruência via isometrias.....	54
2.9. Análise de Livros Didáticos.....	60

Capítulo 3 – Sujeitos, Método e Material

3.1. Caracterização dos sujeitos.....	75
3.2. Procedimentos Metodológicos.....	75
3.3. Material.....	79
3.3.1. Análise a priori das atividades do Bloco 1	81
3.3.2. Análise a priori das atividades do Bloco 2	86
3.3.3. Análise a priori das atividades do Bloco 3	105

Capítulo 4 - Experimentação e análise a posteriori

4.1. Análise a posteriori das atividades do bloco 1	116
4.2. Análise a posteriori das atividades do bloco 2	127
4.4. Análise a posteriori das atividades do bloco 3	149

Capítulo 5 - Considerações finais..... 176

Bibliografia..... 180

Anexos

Anexo 1: Questionário do observador	187
Anexo 2: Questões sobre Congruência de Figuras.....	188
Anexo 3: Lista de Materiais da atividade 1 do Bloco 1	189
Anexo 4: Atividade do Bloco 1 – Concreto	190

Anexo 5: Atividade do Bloco 2 – Cabri-Géomètre	194
Anexo 6: Atividade do Bloco 2 - Malha quadriculada	195
Anexo 7: Atividade do Bloco 3 – Prova	196
Anexo 8: Convite	198
Anexo 9: Certificado	199
Anexo 10: Atividades e familiarização com Cabri-Géomètre	200

Tabelas

Tabela 1: Questões sobre congruência.....	4
Tabela 2: Distribuição de axiomas, postulados e proposições organizadas por Vitrac	33
Tabela 3: Justificativas da atividade com figuras plana, questão 1	121
Tabela 4: Questão 1, atividade 3.....	126
Tabela 5: Resultado atividade 3, bloco 2	131
Tabela 6: Resultado da atividade 8, bloco 2.....	134
Tabela 7: Resultado da atividade 9, bloco 2.....	135
Tabela 9: Resultado da atividade 6, bloco 3.....	162
Tabela10: Resultado da atividade 7, bloco 3.....	164
Tabela11: Resultado da atividade 9, bloco 3.....	169
Tabela12: Resultado da atividade 10, bloco 3.....	173

Quadros

Quadro 1: Comparativo Euclides e Legendre.....	38
Quadro 2: Enfoques métrico e sintético	51
Quadro 3: Folha de manipulação e de resposta –situação 1, bloco 1.....	87
Quadro 4: Folha de manipulação e de resposta –situação 2, bloco 1.....	88
Quadro 5: Jogo da congruência	89
Quadro 6: Folha 1 – Congruência e triângulos - bloco 2	100
Quadro 7: Institucionalização	110
Quadro 8: Quadro resumo dos objetivos das atividades da sequência de ensino	115
Quadro 9: Resultado esperado e obtido da atividade 1 – concreto.....	118
Quadro 10: Diálogo da dupla Ev e Va da atividade 2, situação 1.....	122
Quadro 11: Diálogo da dupla D e G da atividade 2, situação 1	123
Quadro 12: Atividade 2– Figuras planas	124
Quadro 13: Justificativas da atividade 1- transformações	128
Quadro 14: Justificativas da atividade 2 – transformações	130
Quadro 15: Galeria de fotos – placa quadriculada	144

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. JUSTIFICATIVA E ESCOLHA DO TEMA

Desde que comecei o mestrado, minha intenção era escrever sobre a geometria. O motivo é que pela própria vivência como professora, há mais de 10 anos, sendo a maioria do tempo no Ensino Médio, percebia que a cada ano os alunos parecem vir do Ensino Fundamental, com menos conhecimentos sobre assuntos elementares da geometria.

Para um bom aproveitamento de assuntos relacionados ao Ensino Médio como: trigonometria, geometria analítica, geometria espacial, entre outros, é imprescindível o conhecimento prévio dos fundamentos da geometria.

Favoravelmente à intenção de elaborar uma pesquisa em geometria, iniciou-se no segundo semestre de 2005, o projeto de pesquisa, denominado AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar, sob a coordenação de Siobhan Victoria Healy e professores membros do Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. Minha participação nesse projeto integra o trabalho dos demais professores, que também são alunos do curso de pós-graduação da PUC-SP.

Um dos objetivos do projeto AProvaME é investigar as concepções sobre a argumentação e prova em Geometria e Álgebra, de alunos da faixa etária entre 14 e 16 anos, ou seja, alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Além disso, outra finalidade do projeto é a utilização do computador como instrumento incentivador e favorável ao ensino e aprendizagem da matemática.

Motivada pelas finalidades do projeto AProvaME, que concilia a tecnologia do computador com as investigações de argumentação e prova em Geometria, e meu interesse em explorar o conhecimento em Geometria dos estudantes que concluíram o Ensino Fundamental, escolhi o tema **Congruência**, normalmente contemplado no 4º ciclo do Ensino Fundamental, caracterizando-se como um dos primeiros assuntos de contato dos alunos com a geometria dedutiva, objeto de

interesse de pesquisa no AprovaME. No 3º ciclo (5ª e 6ª séries) do Ensino Fundamental, a geometria é voltada para o empírico e as constatações ocorrem e são aceitas por meio de observações dos procedimentos e resultados de experimentos como, por exemplo, pode-se verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° por meio de dobraduras, recortes de triângulos ou medições dos ângulos do triângulo com o transferidor. Por outro lado, no 4º ciclo (7ª e 8ª séries) do Ensino Fundamental, é esperado que o aluno utilize os axiomas, os teoremas e a linguagem simbólica para provar certos enunciados, por meio de validações formais e dedutivas, exemplificando, o uso dos casos de congruência de triângulos, no estudo das propriedades dos quadriláteros.

Um trabalho que valorize também a passagem do empírico para o dedutivo, pode auxiliar na aprendizagem e desenvolvimento do conhecimento nos alunos, visto que, a transição do empírico, no 3º ciclo, para o dedutivo, no 4º ciclo, em inúmeros casos ocorre abruptamente, isto é, no 3º ciclo as constatações que são aceitas por meio de observações e resultados empíricos não são suficientes no 4º ciclo.

A transição do concreto para o abstrato, do processo empírico para o dedutivo, da linguagem natural para a simbólica, propiciando o desenvolvimento e a evolução na aprendizagem do estudante chamou minha atenção, sendo que o interesse sobre essas evoluções também é geral, e nos últimos anos, estudos têm sido realizados por pesquisadores da área de educação. Entre os estudos realizados, estão destacadas, na Revisão Bibliográfica deste capítulo, algumas pesquisas em Geometria, referentes à aquisição de conceitos matemáticos, a utilização de programas de computador auxiliando o processo de aprendizagem, e, sobre provas e demonstrações na matemática. O estudo específico sobre o tema Congruência ainda carece ser desenvolvido.

Para investigar como o tema Congruência é tratado em documentos, consultei os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF) e Médio (PCNEM), documentos atuais que sugerem e auxiliam a prática pedagógica ou seleção de materiais didáticos, e estão disponíveis a educadores e pesquisadores. O PCNEF apresenta no bloco Espaço e Forma o estudo da congruência de figuras a partir de atividades experimentais, além disso, relaciona as transformações isométricas com a congruência.

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permitam o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (PCNF, 1998, p.51).

As orientações dos parâmetros do Ensino Médio também mencionam a Congruência como um assunto já estudado no Ensino Fundamental, portanto, considerando-se que o aluno do Ensino Médio tenha tido contato com a congruência, sugere um estudo mais aprofundado, voltado ao dedutivo, como segue:

O ensino de Geometria no Ensino Fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no Ensino Médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. (PCNEM, Matemática, 2002, p.123)

Para consolidar a escolha do tema e saber se era propício desenvolver um estudo sobre congruência, decidi verificar se alunos da 1ª série do Ensino Médio se apropriaram do assunto **Congruência de figuras** no Ensino Fundamental. Assim, três questões (anexo 2) sobre congruência foram formuladas, sendo que a primeira foi discursiva; a segunda solicitava, de livre escolha do aluno, a representação de duas figuras congruentes; e a terceira, com o auxílio de uma malha pontilhada, pedia a reprodução de uma figura dada. Essas questões foram aplicadas em alunos de uma escola estadual, do 1º ano do Ensino Médio, período diurno.

Os resultados dos 144 alunos que colaboraram são mostrados na tabela da página a seguir:

	- Questão 1 - Discursiva	- Questão 2 - Representação	- Questão 3 - Malha Pontilhada
Acertos	35	44	46
Erros/não sabe/brancos	109	100	98
Total de estudantes	144	144	144

Tabela 1 - Questões sobre congruência

Entre as três questões, a que obteve menor acerto foi a questão discursiva, apesar de ocorrer pouca evolução nos acertos de uma questão para outra.

No geral, os resultados foram relevantes e me motivaram a fazer uma pesquisa sobre o assunto, pois, na primeira questão, 109 alunos (76%) não responderam corretamente, deixaram em branco ou declararam não saber responder. Na segunda questão, 100 alunos (69%) não souberam representar corretamente, deixaram em branco ou declararam não saber responder. Mesmo com o auxílio da malha pontilhada, 98 alunos (68%) não conseguiram reproduzir o desenho, deixaram em branco, ou declararam não saber responder.

Os resultados mostraram que a compreensão dos alunos da 1ª série do Ensino Médio dessa escola, em relação à congruência é em grande parte ausente, indicando o favorecimento a uma pesquisa de situação de aprendizagem sobre Congruência de figuras.

Diante dos resultados obtidos com os alunos, mais a constatação de carência de pesquisas, especificamente ligadas à situação de aprendizagem desse tópico, concluí que é importante um estudo sobre a Congruência com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, já que, além de não apresentarem o conhecimento sobre a congruência, alguns têm uma idéia equivocada sobre o assunto.

1.2. ESTRUTURA DO TRABALHO

A organização dessa pesquisa é constituída de 5 capítulos, sendo que no primeiro capítulo, justifica-se a escolha do tema e se apresenta uma revisão bibliográfica de pesquisas relacionadas à aquisição de conceitos matemáticos, à utilização de programas de computador voltados à geometria e a provas de conceitos geométricos. Finaliza-se o capítulo com a apresentação dos

fundamentos teóricos, baseados em trabalhos dos pesquisadores: Parzys, Machado, Freudenthal, Chevallard e Balacheff.

O segundo capítulo apresenta uma breve história da origem e fundamentação da geometria influenciando na concepção do conceito de congruência, envolvendo os trabalhos de Euclides, Clairaut, Legendre, Hadamard, Hilbert e Birkhoff. Finaliza-se o capítulo com a análise de alguns livros didáticos.

Os Sujeitos, Método e Material compõem o terceiro capítulo, com o intuito de esclarecer onde, quando, como, com quem e o que foi desenvolvido nessa pesquisa, isto é, organização, concepção e aplicação de uma sequência de ensino sobre congruência em alunos do 1º ano do Ensino Médio, baseados na metodologia da Engenharia Didática.

O quarto capítulo é dedicado à análise a posteriori das atividades da sequência de ensino, bem como, a confrontação desses resultados com as análises a priori, realizada no terceiro capítulo. Contempla o quinto capítulo, os resultados e considerações finais a respeito da pesquisa realizada.

1.3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A Geometria tem sido tema de pesquisadores da área de Matemática e Psicologia, que focam tanto as práticas pedagógicas, como a aprendizagem em Geometria de alunos e professores. Dentre os psicólogos, nota-se o trabalho de Klausmeier (1977), que pesquisou sobre a aquisição de conceitos. Na concepção desse autor, esta aquisição ocorre através de mudanças progressivas e ordenadas na estrutura cognitiva e nos comportamentos observáveis e de inferências, processadas durante a vida do sujeito. Ocorre em quatro níveis sucessivos: o **concreto** (como prestar atenção no objeto, realizar discriminação, reconhecer e ou lembrar de um objeto mesmo que ele esteja ausente em um conjunto de objetos); **identidade** (capacidade de generalização); **classificatório** (como reconhecer e classificar conceitos como sendo exemplos e não exemplos de uma mesma classe de coisas) e **formal** (como denominar o conceito e defini-lo e recordar o conteúdo verbal referente a ele, formular hipóteses, compreender o conceito a partir de casos particulares para os mais gerais). Sugere alguns procedimentos do professor: identificar se o aluno é capaz de formar os níveis cognitivos; programar uma sequência para ensinar o aluno a perceber

características de exemplos e não exemplos, de modo que ele mesmo identifique os atributos definidores do conceito; estabelecer uma terminologia correta e fornecer retornos ao aluno sobre os acertos e erros e, finalmente, propiciar o uso do conceito.

Pirola (1995) utilizou a teoria de Klausmeier. Sua pesquisa consistiu em investigar, dentre os 137 alunos de 5ª a 8ª séries do ensino Fundamental de uma escola pública do estado de São Paulo, se os alunos de séries mais avançadas conseguiam identificar os conceitos de triângulo e de paralelogramo, no que diz respeito aos atributos definidores, exemplos e não exemplos, de forma mais completa que alunos de séries menos avançadas. Os sujeitos analisados tiveram o mesmo professor e este utilizava a proposta curricular para o ensino de matemática. Um questionário, um teste de atributos definidores, em que os alunos assinalavam se afirmativas eram verdadeiras ou falsas, e teste de exemplos e não exemplos, foram aplicados a esses alunos e os resultados mostraram que os alunos da sétima série obtiveram melhores resultados, em seguida a sexta, depois a oitava e quinta séries. Os alunos da sétima e sexta séries conseguiram verbalizar as definições de triângulos e paralelogramo, além de desenhar e reconhecer os atributos definidores do conceito. Os exemplos e não exemplos das figuras analisadas também tiveram uma grande porcentagem de acertos na sexta série, com 68% e na sétima série com 74%. O pesquisador finaliza concluindo que naquela escola não é valorizada a aprendizagem dos conceitos de forma significativa, mas são evidenciados as fórmulas memorizadas e problemas-tipo, devido ao fato dos alunos terem calculado áreas e perímetros sem conhecer os atributos e exemplos e não exemplos das figuras.

Além de Klausmeier, outro referencial de estudo sobre a aprendizagem é Krutetskii (1968), citado por Wielewski (2005), que se refere à habilidade matemática como um fenômeno interno, resultante da interação de vários componentes que, para serem estudados, é preciso observar o sujeito durante a execução da atividade. Ele utilizou métodos experimentais (análises quantitativas e qualitativas de experimentos sobre as habilidades em matemática, nos estudantes considerados talentosos na disciplina) e não experimentais (referia-se às discussões com os estudantes, pais, professores, estudo da personalidade e desempenho em outras disciplinas, além de professores de matemática e pesquisadores matemáticos soviéticos que responderam a questionários sobre a

habilidade para aprender matemática). Segundo Krutetskii (1968), citado por Wielewski (2005), os componentes das habilidades matemáticas são: Percepção, generalização, lógica e raciocínio, redução, flexibilidade, pensamento reversível, analítico-sintética, memória matemática, conceitos espaciais.

A pesquisa realizada por Wielewski (2005) investigou os aspectos do pensamento matemático para resolução de problemas, segundo a teoria de Krutetskii. A pesquisa consistiu ser exploratória qualitativa, na forma de estudo de caso, tendo como objetivo investigar o pensamento matemático de alguns estudantes universitários. Questionários, com questões subjetivas, foram aplicados antes e depois de 13 problemas matemáticos. Os sujeitos foram 13 alunos universitários (sendo 9 do curso de Licenciatura Plena em Matemática e 4 estudantes do curso de Ciências da Computação). Diferentemente de Krutetskii, a pesquisadora investigou estudantes universitários em função da vivência e maturidade relacionadas ao pensamento matemático, se comparados aos estudantes do Ensino Fundamental. Na pesquisa exploratória, esclareceu os aspectos teóricos utilizados no trabalho científico. A parte experimental focou a resolução de problemas, envolvendo diferentes pensamentos e diferentes processos de resolução. O objetivo da pesquisa era questionar o aspecto psicológico e interpretativo sob o ponto de vista matemático. Os resultados obtidos levaram a pesquisadora a concluir que o pensamento matemático não é influenciado por características individuais, mas pela sua história cultural e social, pelo desenvolvimento da matemática, por livros didáticos e representações semióticas, por conteúdo ou áreas envolvidas, pela formação acadêmica, pelas experiências com a atividade matemática e pelos próprios problemas matemáticos.

Alves (1999) explorou as habilidades na resolução de problemas aritméticos de 53 alunos do 3º ano do Ensino Médio de escola particular e pública. Utilizou, entre outros, a teoria de Krutetskii (1976) e que segundo ele a solução de problemas é um processo cognitivo através do qual o sujeito recorre aos conceitos e princípios previamente aprendidos para elaborar uma estratégia adequada, com a finalidade de encontrar a resposta ou solução desejada, aperfeiçoando esquemas já existentes em sua estrutura cognitiva.

Um outro estudo na Educação Matemática é o modelo teórico de aprendizagem proposto por van Hiele (1955), modelo de desenvolvimento do

pensamento geométrico, que foi amplamente divulgado e traduzido para o inglês a partir década de 1970. Esta teoria identifica cinco níveis de compreensão na aprendizagem em geometria: visualização (nível 0), análise (nível 1), dedução informal (nível 2), dedução formal (nível 3) e rigor (nível 4), que de acordo com a maturidade geométrica o sujeito pode estar em um determinado nível e, através de seqüências ou situações de ensino, este sujeito poderá passar de um nível para outro mais avançado. Segundo a teoria, o avanço no nível depende mais do conteúdo e método de instrução do que da idade do sujeito. Rezi (2001, p.10) faz citação de van Hiele sobre esses níveis:

Você pode dizer que alguém atingiu um nível mais elevado de pensamento quando uma nova ordem de pensamento permite a ele, com respeito a certas operações, aplicar essas operações sobre novos objetos. O atingir de um novo nível não pode ser efetuado pelo ensino, mas ainda, pela escolha adequada de exercícios, o professor pode criar uma situação favorável para que o aluno alcance o nível de pensamento mais elevado. (van Hiele, 1955, p.289, citado por van Hiele, 1986, p.39).

Na visualização, os sujeitos são capazes de reconhecer as formas dos objetos de forma geral e não por suas partes ou propriedades. Já no nível seguinte, análise, as características e propriedades das figuras são discernidas, mas as relações entre propriedades ainda não são entendidas. Na dedução informal, os sujeitos estabelecem relações entre propriedades das figuras ou entre figuras e, na dedução formal, ocorre a compreensão das relações entre termos indefinidos, axiomas, teoremas, demonstração e definição. O ultimo nível, referente ao rigor, o sujeito é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, a geometria euclidiana e a não-euclidiana.

No Brasil, a teoria de van Hiele também tem sido divulgada por autores como: Lílian Nasser e Neide P. Sant'Anna, em "*Geometria segundo a teoria de van Hiele*", Mary Montgomery Lindquist e Albertr P. Shulte, em "*Aprendendo e Ensinando Geometria*" – tradução de Hygino H. Domingues, trabalhos de mestrado de Odaléa A. Viana e Viviane Rezi da UNICAMP, entre outros.

A pesquisadora Rezi (2001), investigou as relações entre o nível de desenvolvimento do pensamento da geometria de van Hiele e estudou alguns componentes da habilidade matemática, intrínsecos às atividades de solução de

problemas, relacionados a conceitos geométricos e componentes das habilidades matemáticas, como a percepção geométrica e a habilidade para conceitos espaciais. Inicialmente avaliou 201 estudantes, concluintes do Ensino Médio de uma escola particular e outra pública, durante o período de aula sobre seus conhecimentos na resolução de problemas com enunciado verbal, problemas que requerem processamento visual e problemas que requerem representação e manipulação mental de objetos. A pesquisadora baseou-se no trabalho de van Hiele (1986), "Structure and Insight", trabalhos anteriores de Pirola (1995), Oliveira (1998) e Vianna (2000), e textos de Nasser (1992, 1992a) e Usiskin (1982, 1994). Em suas considerações finais, a pesquisadora apresenta como resultado de pesquisa, a necessidade do professor auxiliar o desenvolvimento de habilidade nos alunos conseqüentemente a aquisição de conhecimentos.

Viana (2000) explora as habilidades geométricas segundo o modelo de van Hiele. As perspectivas da formação de conceitos, segundo Piaget e Vygotsky, são apresentadas e destaca a contribuição desses teóricos para a educação. Avaliou o conhecimento de 377 alunos do CEFAM – Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério, sobre as figuras tridimensionais e classificou-os segundo os níveis de conceituação de van Hiele. Além disso, concentrou seus estudos na análise de habilidades visual/gráfica e verbal, categorizadas através das teorias de Piaget sobre a representação do espaço e de Vygotsky sobre os conceitos científicos e espontâneos. Para classificação dos níveis de van Hiele, no nível 1 era solicitado ao aluno nomear figuras, no nível 2 era usada a planificação, para o nível 3 foram selecionadas questões sobre as relações entre figuras. Os resultados mostraram que, dos 377 alunos, 285 (75,6%%) alunos não conseguiram reconhecer e nomear as principais figuras geométricas espaciais, que geralmente são trabalhadas nas primeiras séries do Ensino Fundamental, sendo classificados no nível 0; 64 alunos (17%) conseguiram nomear e reconhecer as figuras e foram classificados no nível 1; em seguida, 21 alunos (5,6%) conseguiram analisar as propriedades das figuras e foram classificados no nível 2. Apenas 1 aluno ficou no nível 3, por estabelecer relações entre as propriedades das figuras. Os restantes, 6 alunos (1,6%), não foram classificados.

Outras pesquisas foram dedicadas à investigação da geometria dedutiva: Nasser e o grupo do Projeto Fundação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, contando com a participação de professores de ensino

fundamental e médio e de licenciandos. Os primeiros experimentos realizados em turmas, cujos professores não tinham uma prática voltada para a argumentação, mostraram que os alunos não eram capazes de justificar qualquer afirmação, por mais simples que fosse, tanto no campo geométrico quanto no algébrico. Trabalharam a habilidade de argumentação em turmas de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental e em todas as séries do Ensino Médio. Na investigação, os seguintes tipos de prova foram considerados: justificativa pragmática (a veracidade de uma afirmativa se dá com base em apenas um ou alguns casos particulares); recorrência à autoridade (o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro didático); exemplo crucial (o aluno desenvolve um raciocínio de caráter bem geral, apoiado em um exemplo e justificativa gráfica que tenha uma figura como base).

Carlovich (2005) analisa o ensino da Geometria dedutiva nos livros didáticos do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, do início de 1990 e início de 2000. Esses períodos foram escolhidos em virtude de serem anteriores e posteriores à implantação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 1995. Sua análise, apresenta uma evolução nas propostas dos exercícios dos livros analisados, aplicados no período de 1990, para exercícios com enfoque heurístico em 2000. A autora ressalta a necessidade de fornecer caminhos para a apropriação do raciocínio dedutivo em Geometria pelos alunos das séries desse ciclo, embora, as coleções dos anos de 2000 proponham atividades com validações empíricas e dedutivas. Faz referências aos casos de congruência para justificar e provar a congruência de triângulos e propriedades dos quadriláteros. Arsac (1987) e Balacheff (1987) são citados por Calovich (2005) na orientação sobre a evolução do pensamento empírico e dedutivo. O primeiro defende que provas empíricas podem aparecer na 7ª série, enquanto o segundo defende que a evolução dos fundamentos devem iniciar com justificativas empíricas e evoluir para validações dedutivas desde as séries iniciais, respeitando o nível de racionalidade dos alunos.

Mabushi (2000) realizou um estudo sobre transformações geométricas nos cursos de formação de professores. A pesquisadora se fundamenta nos trabalhos de pesquisadores como van Hiele, Brousseau e Douady. O estudo foi realizado junto aos professores inscritos no curso de Licenciatura Plena em Matemática da PUC-SP, para Professores com Licenciatura Curta em Ciências, projeto iniciado

em 1999 que visava oportunizar aos professores, com licenciatura curta em Ciências, aprimorar, atualizar e complementar seus estudos. O grupo era formado por 34 professores, com idade entre 20 e 45 anos, considerando que 51% eram recém-formados. Na pesquisa realizada por Mabuchi, 74% dos professores colaboradores nunca estudaram o assunto transformações geométricas, 70% desconheciam termos como vetor, translação, rotação e até a idéia de simetria. Em sua conclusão, Mabuchi sugere novas pesquisas sobre transformações utilizando a tecnologia.

Pietropaolo (2005) investigou sobre a necessidade e acessibilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica e suas implicações nos currículos de formação inicial de professores. Um dos motivos apresentados para o desenvolvimento da pesquisa foi que, como Integrante da equipe de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, Pietropaolo (2005) constatou que "foram pouco profundos os debates sobre argumentações e provas e sobre suas potencialidades pedagógicas durante a composição do PCN", e questionou mais adiante sobre quais experiências um professor de matemática em formação deveria vivenciar para constituir competência na organização e direção de situações de aprendizagem visando ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo de seus alunos. A pesquisa qualitativa foi realizada por meio de pesquisa bibliográfica, entrevistas com 9 pesquisadores e/ou professores em Educação Matemática e 7 professores do Ensino Fundamental e Médio. Fundamentou-se nos trabalhos dos pesquisadores Healy e Hoyles (2000), Dreyfus (2000), Balacheff (1987), Knuth (2002). Os resultados de sua pesquisa apontaram que os entrevistados eram favoráveis à inclusão de provas nas aulas de Matemática desde o Ensino Fundamental, mas que alguns defendiam um trabalho voltado à verificações empíricas e em "mostrações" para se chegar à formalização no Ensino Médio. Quanto a sua questão de pesquisa, sobre os cursos de licenciatura se estariam em condições de oferecer uma formação de qualidade para o profissional que vai ensinar provas, inclusive rigorosas e se ele próprio aprendeu a provar, o pesquisador chegou a uma conclusão negativa dessas questões.

No estudo com os programas de computador, Vaz (2004) utilizou a metodologia Experimento de Ensino para explorar o ensino e aprendizagem de

prova e demonstração, utilizando o software educativo Cabri-géomètre, com o assunto isometrias. Trata dos aspectos indutivos e dedutivos que, geralmente, não são suficientemente desenvolvidos nos alunos. Os participantes foram alunos de 7ª e 8ª séries de uma escola particular da cidade de São Paulo. A pesquisadora se fundamentou nos trabalhos de Piaget e Garcia, em particular, a transição entre a etapa intrafigural (ênfase nas propriedades internas de uma figura) e interfigural (ênfase nas relações entre figuras) e no trabalho de Balacheff no que se refere às classificações de prova. Segundo a pesquisadora, os alunos permaneceram mais no campo pragmático (campos de ação e percepção) e fizeram pouca conexão entre esse campo e o campo conceitual.

O Cabri-Géomètre auxiliou o movimento empírico/conceitual, enquanto generalização de figura, em virtude do dinamismo do software. Acrescenta que o uso das transformações geométricas na prova não consegue, por si só, resolver todos os problemas que foram apresentados no estudo que utiliza modelos euclidianos. Com sua pesquisa, os alunos conseguiram elaborar provas locais, indício para uma prova válida global.

As pesquisas em Psicologia da Educação Matemática, segundo Brito (2001), têm por objetivo estudar o ensino e a aprendizagem da Matemática e sua relação com os fatores cognitivos e afetivos dos sujeitos analisados, envolve interesse de especialistas, tanto da área de Matemática, quanto da Educação e da Psicologia. Brito (2001) ressalta Fischbein (1990) ao assinalar que as disciplinas, Psicologia e Matemática,

Embora sejam estruturalmente diferentes, sempre houve um interesse recíproco entre elas. Se por um lado psicólogos tentavam demonstrar os fenômenos psicológicos em termos de modelos matemáticos, os matemáticos como Poincaré, **Hadamard**, Polya e **Freudenthal** pesquisaram a psicologia do raciocínio matemático.(Brito, 2001, p.53).

Além de Klausmeier e Kruteskii, outros psicólogos elaboraram teorias da aprendizagem. Pode-se destacar Ausubel, que se dedicou em elaborar uma teoria da aprendizagem dentro da sistemática da sala de aula. Sua teoria, *Aprendizagem Significativa*, tem como idéia central o conhecimento prévio do sujeito, e a aprendizagem pode ocorrer por descoberta ou por recepção. A aprendizagem significativa por descoberta, segundo a teoria de Ausubel, citado

por Brito (2001), ocorre quando o sujeito é levado a encontrar, por si somente, o significado de um ou mais conceitos que se encontram imersos no conteúdo total a ser aprendido; diferentemente da aprendizagem por recepção, que tem o material apresentado ao sujeito de forma pronta, final e acabada. Brito (2001) exemplifica a aprendizagem significativa do conceito de congruência:

Por exemplo, ao ensinar o conceito de congruência e as propriedades da congruência entre segmentos (propriedade reflexiva, propriedade simétrica e propriedade transitiva) o professor prepararia o conteúdo a ser aprendido de maneira lógica e ordenada, iniciando a aula com situações motivadoras e desafiadoras, de forma a levar o aluno a descobrir os significados e as relações entre os conceitos envolvidos e os procedimentos necessários para se alcançar a solução. (p.74).

Pode-se afirmar que essa aprendizagem será significativa se, no contexto da sala de aula, o professor e o aluno forem protagonistas, visto que o professor deverá criar condições, através da preparação e organização dos materiais potencialmente significativos (de maneira não-arbitrária e substantiva), para que a aprendizagem significativa possa ser incorporada à estrutura cognitiva do aluno. Por outro lado, o aluno deverá se dispor a relacionar significativamente o material aos elementos já existentes na sua estrutura cognitiva, isto é, o aluno deverá manifestar uma disposição para a aprendizagem.

1.4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta pesquisa se apoiará nos trabalhos de Parzysz, Machado, Freudenthal, Chevallard e Balacheff.

1.4.1. PARZYSZ

Parzysz (2001) no seu artigo " Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1", faz um comparativo e análise dos trabalhos de van Hiele (1984) que distingue cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Com relação ao trabalho de van Hiele (1957), segundo Parzysz (2001), a geometria, relativa aos níveis 0 e 1, refere-se a uma geometria "concreta" (objetos são materiais do cotidiano do aluno), e a argumentação se apóia em critérios

perceptivos. Em contrapartida, a geometria correspondente aos níveis 3 e 4 é uma geometria "teórica" (objetos são conceituais e a única argumentação aceitável é a demonstração). Entre esses níveis, o nível 2 é quando aparece o conflito entre o que o aluno sabe e o que percebe, isto é, um nível intermediário entre o concreto e o teórico. De acordo com Parzysz (2001):

Esta distinção em níveis, se tomada ao pé da letra, corre o risco de se deixar pensar que um dado indivíduo, a um certo momento de seu desenvolvimento, deve situar-se num determinado nível. Mas seria não levar em conta a situação na qual encontra-se este indivíduo neste momento, e que pode desempenhar um papel determinante: sabe-se que um "perito" de um domínio específico pode não mais se comportar em perito quando é colocado numa situação não familiar, mesmo quando surgiu ao seu domínio de avaliação. (PARZYSZ, 2001, p.1, tradução nossa).

A análise leva Parzysz a propor um quadro teórico para o ensino da geometria que consiste em 4 níveis formadores das etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico. O primeiro nível G0, denominado Geometria concreta, tem como característica a identificação das figuras, exclusivamente, pelo aspecto geral. Os objetos são concretos e a validação é perceptiva.

Quando a ênfase ocorre nas representações figurais e gráficas, o nível G1, denominado geometria espaço-gráfica, é evidenciado. Nesse nível dá-se início à identificação de propriedades de certas figuras. Trabalha-se com a manipulação de objetos bidimensionais (desenhos em uma folha ou tela de computador) e a resolução está relacionada ao uso de régua, compasso, transferidor ou comandos do programa de computador utilizado. A validação é, ainda, perceptiva.

Na geometria proto-axiomática, nível G2, os objetos em jogo são teóricos (suas existências provêm de axiomas e definições) e a prova é teórica (tendendo a ser hipotético-dedutivo). Segundo Parzysz (2001, p.1), o termo "proto-axiomática" (G2) é um paradigma que aparece, de fato, como uma simplificação, uma versão vulgarizada de uma teoria axiomática completa (G3), tal como a de Hilbert. Isso quer dizer que o estudo dos axiomas e teoremas euclidianos não precisam seguir a forma rigorosa de um sistema axiomático completo, mas podem ser estudados de modo que sejam obtidos empiricamente e possam ser utilizados

em conjunto das técnicas dedutivas, cuja validação seja feita com o uso de teoremas e propriedades evidentes obtidas dessa experimentação.

O nível G3, denominado geometria axiomática, caracteriza-se pelo uso exclusivo de sistemas axiomáticos. Os objetos analisados são teóricos e a validação é por meio de axiomas e propriedades desses sistemas axiomáticos.

Assim, o quadro teórico proposto por Parzysz (2001) apresenta objetos de natureza física (G0 e G1) ou teórica (G2 e G3), e a validação pode ser perceptiva (G0 e G1) ou lógica-dedutiva (G2 e G3).

1.4.2. MACHADO

Muitos psicólogos e matemáticos contribuíram para explicar o processo de desenvolvimento cognitivo em geometria. Outros, como Machado (2005), procuraram estabelecer pontes entre as concepções e ações docentes, as generalidades das questões teóricas e a especificidade das tarefas pedagógicas, a fim de garantir a compreensão e construção do conhecimento.

Segundo Machado (2005), o conhecimento pode ser considerado como rede de significados e leva em conta a idéia de que conhecer é apreender o significado. Destaca o comentário de Dewey (1979):

Compreender é apreender a significação... Apreender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em suas relações com outras coisas... Contrariamente, aquilo a que chamamos coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram apreendidas (DEWEY, 1979, p.139, citado por MACHADO, 2005, p.35).

De acordo com Machado (2005), para que ocorra a apreensão da rede de significados em Geometria, é necessário propor atividades integradoras que propiciem a articulação entre os elementos cognitivos de percepção, de concepção, de representação e de construção dos objetos de estudo, sendo que essas atividades devem ocorrer em todos os níveis de ensino da Geometria. Esses elementos formam as faces do tetraedro (Fig. 1), designados por Machado (2005), para explicar a construção do conhecimento geométrico. A percepção

engloba a observação e manipulação direta de objetos materiais, percepção de formas e propriedades características, atividades empíricas, sensoriais. Na construção, os objetos são físicos. As atividades são realizadas por meio de objetos do cotidiano (massas, varetas, papéis). As representações de objetos ocorrem por meio de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizada, linguagem computacional, comandos, programas, algoritmos, diagramas de bloco têm lugar nas representações esquemáticas. A face da concepção tem como característica, a sistematização do conhecimento geométrico, com predomínio de definições precisas, enunciado cuidadoso das propriedades, encadeamento de proposições nas demonstrações formais ou informais de certos resultados, chamados de teoremas.

Essas quatro faces separadas têm importância limitada. Para que se atinja a organização conceitual cada face deve estar integrada a outra. A desvalorização de uma ou outra prejudica no desenvolvimento do conhecimento geométrico.

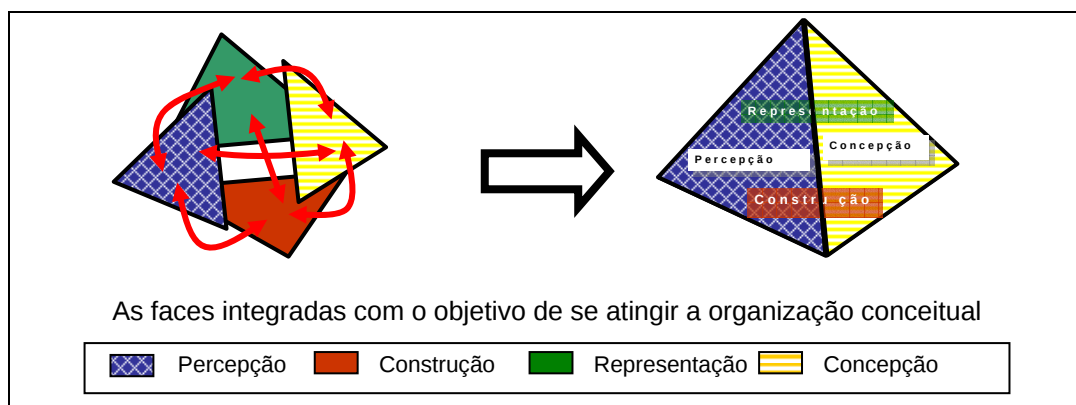


Fig. 1

A metáfora do tetraedro está no equilíbrio do sólido quando é apoiado em qualquer uma das faces e no conhecimento geométrico que se encontra, também, equilibrado, numa de suas características que serve de apoio. O aprendizado de geometria necessita da articulação das quatro faces ou características, anteriormente citadas,

uma vez que percebemos para construir ou quando construímos para representar ou representamos. Concebemos o que pretendemos construir, mediante as representações, ou construímos uma

representação como uma planta ou maquete para facilitar a percepção. Separadas, cada uma das faces tem uma importância muito restrita. Entre as atividades perceptivas e conceituais, ou para o estabelecimento de relações mais consistentes entre o conhecimento empírico e sua sistematização formal são fundamentais atividades intermediárias envolvendo a construção e a representação. (MACHADO, 2005, p.54-55)

Segundo Machado (2005), atividades relativas à representação não costumam ser suficientemente valorizadas como elementos fundamentais dos processos cognitivos. Dessa forma, defende que em todas séries do ensino da geometria o professor utilize atividades integradoras que propiciem a articulação harmoniosa das quatro faces do tetraedro, inclusive de construção e representação. Ressalta que:

é tão importante transitar, como uma criança, da percepção à construção, daí à representação e, então, à concepção, quanto o é realizar o percurso do engenheiro ou do arquiteto, que concebe o objeto geométrico antes de representá-lo e construí-lo, e só então torná-lo palpável. (MACHADO, 2005, p.56).

Os pesquisadores Parzysz e Machado estão em concordância no que diz respeito ao uso de atividades que estimulem a percepção, representação, construção e concepção dos conceitos geométricos para a construção do pensamento geométrico. Pode-se dizer que o aluno só irá atingir determinados níveis do pensamento geométrico se houver a articulação eficaz entre as faces do tetraedro. Assim, para que a aprendizagem ocorra é necessário propor atividades para que haja uma mobilização entre os sentidos e ações do indivíduo, de modo que estes sejam requisitados, reorganizados, descartados e resgatados quando necessário, a fim de contribuir para a efetiva aprendizagem.

Os níveis descritos por Parzysz e as faces do tetraedro construído por Machado estão relacionados ao que no campo da psicologia tem sido amplamente estudado no que diz respeito à relação da habilidade de percepção visual e os conceitos de geometria.

1.4.3. FREUDENTHAL

Hans Freudenthal (1905 – 1990) foi um matemático muito influente no desenvolvimento da Educação Matemática. Foi professor dos van Hiele, e em seu livro *Mathematics as an Educational Task*, de 1973, propõe uma renovação no ensino da Geometria, apresentando os trabalhos dos van Hiele (1957), que realizavam cursos onde utilizavam materiais concretos e o espaço era o ponto de partida para a formulação de conjecturas e suas justificativas.

Para Freudenthal (1973) a Geometria é “compreender o espaço” que a criança “deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor”. Prossegue afirmando que, a criança poderá “aprender a matematizar a realidade” e “realizar descobertas” por si mesma e de modo significativo para ela. Além disso, a geometria contribui para que a “criança sinta, a partir da necessidade lógica das suas conclusões, a força do espírito humano, ou seja, o próprio espírito”. Com base nessa compreensão, ao invés de desenvolver junto aos alunos o formalismo rigoroso da geometria axiomática, Freudenthal (1973) propõe um outro tipo de organização.

Para o ensino da demonstração em vez de se pretender apresentar ao aluno uma organização global da geometria (um sistema axiomático completo), devem ser apresentadas experiências de **organização local**, em que alguns resultados conjecturados por eles, sejam por meio de curtas deduções, interligados logicamente. (FREUDENTHAL, 1973, citado por VELOSO, 1998, p.27).

Como exemplo, Freudenthal propõe uma organização local para o estudo de quadriláteros, aceitando sem demonstração os casos de congruência dos triângulos (LLL, LAL, ALA, LAAo) e a igualdade dos ângulos alternos internos, sendo estes aceitos sem demonstração. Essa organização local pode ser feita com ou sem o computador. Essa inovação no ensino da Geometria foi amplamente divulgada pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), dos Estados Unidos, em 1989, quando entre outras normas, o desenvolvimento de curtas seqüências de teoremas, tinha como base a idéia de Freudenthal.

1.4.4. CHEVALLARD

Segundo Chevallard (1999), a atividade do professor envolve uma organização praxeológica que "é um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa". As atividades dos livros didáticos podem ser analisadas, utilizando-se a organização praxeológica proposta por Chevallard.

A tarefa pode ser expressa por um verbo, por exemplo, **construir** um triângulo eqüilátero, **dividir** um número inteiro por outro inteiro, **ler** um manual. A técnica pode ser relacionada como sendo uma "maneira de fazer" a tarefa proposta. Para um tipo de tarefa, constitui-se a organização praxeológica de um bloco prático-técnico (saber fazer) e um bloco tecnológico-teórico (um saber).

As tecnologias são os discursos racionais sobre a técnica. Uma das finalidades da tecnologia é o de justificar "racionalmente" a técnica para assegurar a realização da tarefa e, outra, a de explicar e fazer inteligível e clarear a técnica, isto é, dizer porque a justificativa é correta.

O discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, ocorrendo essa realização a um nível superior de justificação-explicação-produção ao da teoria, que retoma em relação à tecnologia o papel que esta última tem a respeito da técnica.

Parzysz (2001) utiliza a organização praxeológica de Chevallard para analisar problemas de níveis G1 e G2 e explica que pode ocorrer em um mesmo tipo de problema (tarefa) a distinção, ao mesmo tempo, do nível das técnicas, da tecnologia e da teoria. Por exemplo, para G1 as técnicas utilizadas para a resolução deste tipo de tarefa são essencialmente ligadas ao uso de instrumentos como regra graduada, compassos, esquadro, relator (percepção instrumentada). As tecnologias (modo de validação) fazem igualmente uso dos instrumentos, que são utilizados para controlar o desenho construído pela constatação visual de coincidências ou superposições, graduações da regra, pontas do compasso. O nível teórico - ausente na prática usual - seria uma teoria relativa à precisão ou a economia dos traçados.

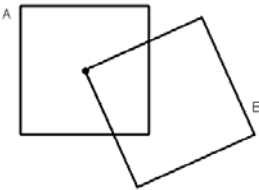
Em G2, essa mesma tarefa apresenta na técnica referência a objetos geométricos (retas, pontos, segmentos, círculos...), cuja existência é assegurada por enunciados (definições, axiomas, propriedades admitidas...), e o uso dos

instrumentos permite obter representações (desenhos). As tecnologias correspondentes consistem na produção de um discurso de tipo dedutivo aplicado nos dados do enunciado, utilizando elementos de G2 encontrados anteriormente. O nível teórico é constituído por uma geometria axiomática de tipo G3 (a geometria afim euclidiana). Contudo, uma técnica muito geral em G2 é a realização e o estudo de "figuras" (desenhos) sobre os quais fará, eventualmente, agir com técnicas de G1, com o objetivo de procurar índices que permitirão conduzir a uma demonstração.

1.4.5. BALACHEFF

Balacheff (1988) apresenta uma forma de categorizar a evolução cognitiva sobre provas. Ele apresenta quatro tipos de validações para as provas: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental.

O empirismo ingênuo é uma das primeiras formas do processo de generalização, a validação ocorre com a verificação de alguns poucos casos, sem questionamento quanto às particularidades. Em seguida, na experiência crucial a validação ocorre enunciando-se explicitamente o problema da generalização e a resolução é por meio de um caso particular que é possível. O exemplo genérico é um outro tipo de prova, em que a validação ocorre tomando-se um representante de uma situação particular para explicar a validação de uma proposição. E o último tipo de prova é a experiência mental, que se refere à apresentação de deduções lógicas baseadas em propriedades, desligadas de um representante particular. Os três primeiros tipos de prova são considerados provas pragmáticas, que segundo Balacheff são elaboradas baseando-se em fatos e ações, enquanto que a última é uma prova de tipo intelectual, cujo pensamento e atuação são teóricos. A seguir, é exemplificado, por meio de uma questão resolvida, os diferentes tipos de níveis. Esta questão foi utilizada no projeto AprovaME, fase 1.

A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A. Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?	 Fig. 2
--	--

Empirismo ingênuo: Por exemplo, uma resposta sendo igual a $\frac{1}{2}$, constatada pela observação de que há uma parte coberta e outra não coberta do quadrado A.

Outro exemplo desse tipo, tomando-se alguns casos em que, experimentalmente, se conclui de que a área é de $\frac{1}{4}$, justificando que ao "ajeitar" o quadrado B no quadrado A percebe-se que a área é $\frac{1}{4}$.

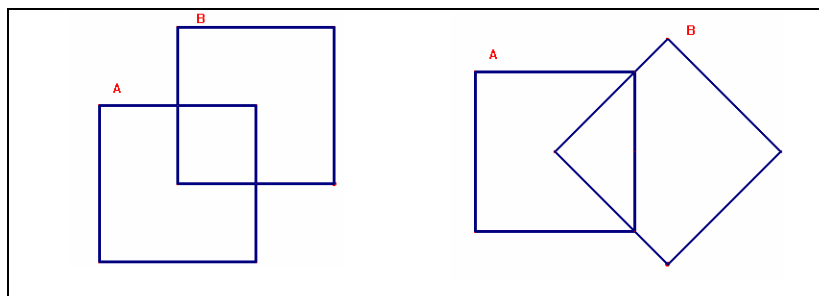


Fig. 3

Experiência crucial: Caracterizada pela verificação da proposição em causa num caso particular tido como típico. Utiliza-se um caso particular considerando-o de forma geral que também valide outros casos particulares. Por exemplo, na representação 1 os lados do quadrado B que estão sobre o quadrado A, são prolongados de modo que ocorre a divisão em 4 partes iguais do quadrado A. Como isso ocorre com a representação 1, também ocorre com as demais representações. Portanto, a área é de $\frac{1}{4}$.

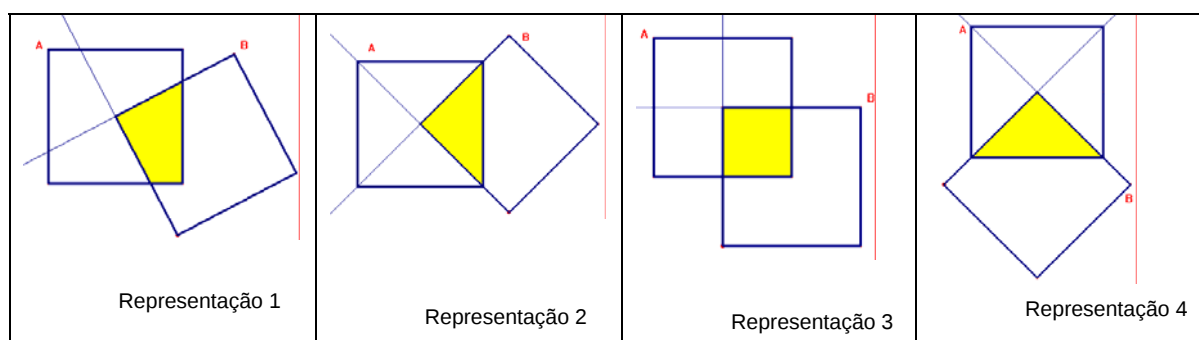


Fig.4

Exemplo genérico: Caracterizado pela apresentação de propriedades aplicadas sobre um caso típico. Por exemplo, toma-se o quadrado A e o divide em quatro quadrados iguais (C, D, E, F), pelos pontos médios dos lados desse

quadrado. Retira-se o triângulo retângulo G do quadrado D e o encaixe na parte H que sobrou do quadrado E.

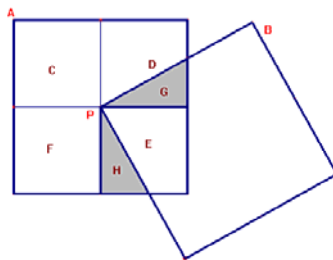


Fig. 5

Portanto, a área preenchida pelo quadrado B no quadrado A é de $\frac{1}{4}$.

Experiência mental: Pode-se justificar, utilizando o caso ALA de congruência de triângulos, que a área do quadrado A coberta pelo quadrado B é $\frac{1}{4}$.

Dividindo o quadrado em quatro partes iguais, pelo ponto médio de cada lado. O ponto P, centro do quadrado A, é vértice dos quatro quadrados originados pela divisão. Tem-se que $\Delta PQR \cong \Delta PST$, pois, $PT \cong PR$ (lados dos quadrados menores), $\hat{S}TP \cong \hat{Q}RP$ (ângulos retos dos quadrados menores), $\hat{S}PT \cong \hat{R}PQ$ ($\hat{R}PS + \hat{S}PT = 90^\circ$ e $\hat{R}PS + \hat{R}PQ = 90^\circ$, com $\hat{S}PR$ comum).

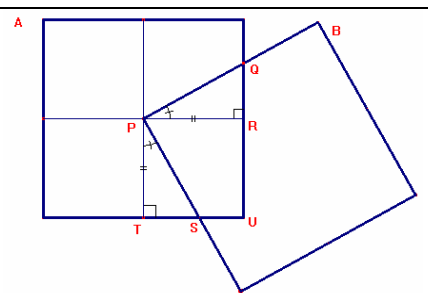


Fig. 6

Como a parte do quadrado B que cobre o quadrado A é composto pelos polígonos: PQR e PRUS, sendo que PQR e PTS são congruentes, a área coberta é de $\frac{1}{4}$.

Outros pesquisadores que realizaram estudos sobre a prova trazem valiosas contribuições, por exemplo, para Hanna, "enquanto na prática matemática a função da prova é a justificação e a verificação, a função principal na educação matemática é seguramente a da explicação". Além disso, acrescenta que numa "boa prova, além de correta e explicativa, poderia também ser levada em consideração o nível de detalhe, o contexto da aula e a experiência dos estudantes".(Hanna, 1995, p.48, citado por Pietropaolo, 2005, p. 80).

Para Nasser e Tinoco (2001), uma prova pode ter várias funções. A mais conhecida é a de *validar um resultado*, isto é, comprovar que é verdadeiro. Essa função é, sem dúvida, fundamental na Matemática, mas nem sempre é

motivadora para alunos da escola básica. A função adquire significado especial quando há alguma dúvida, ou seja, quando é preciso validar ou refutar uma conjectura. Outra função da prova é a de *explicar ou elucidar*, isto é, mostrar porque o resultado é verdadeiro. Algumas provas são perfeitamente aceitas, mas não esclarecem o motivo pelo qual a afirmativa vale. As autoras citam De Villiers (1991), “Em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova *como meio de explicação deve ser explorada*, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos”.

1.4.6. CABRI-GÉOMÈTRE

Considerando a utilização de ambientes dinâmicos computadorizados na organização de uma situação didática, o computador pode contribuir no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Em contato com esses ambientes dinâmicos, os alunos podem explorar situações que possibilitam descobrir as propriedades das figuras e conceitos geométricos, de maneira significativa para eles.

Nesse trabalho será utilizado o software de geometria dinâmica Cabri-géomètre, objetivando favorecer a aprendizagem dos alunos em relação a congruência. Esse software foi concebido por Jean-Marie Laborde e Frank Bellemain, da Université Joseph Fourier em Grenoble, França, em 1985, cuja versão em Windows foi em 1988.

Segundo Laborde e Laborde (1995), citado por Vaz (2004, p.19), uma das características do Cabri é permitir que os estudantes verifiquem propriedades visualmente identificáveis de suas construções. Dessa forma, o próprio aluno pode descobrir propriedades inerentes às figuras geométricas pela manipulação de seus elementos. Isso também é revelado no significado das iniciais que compõem a palavra Cabri (**C**ahier de **B**rouillon **I**nteractif), cuja tradução é caderno de rascunho interativo. Pode, então, ser considerado um caderno de rascunho em que as inúmeras estratégias de construção ou resolução de problemas podem ser colocadas em prática e registradas através dos comandos que o software oferece, como os utilizados no Windows, e em tempo real, as construções podem ser alteradas, movimentadas na busca de soluções problemas e de propriedades de figuras.

O Cabri-Géomètre II é acessível aos alunos, pois foi distribuído às escolas públicas do Estado de São Paulo no final da década de 1990, período em que foi implementado o programa "A Escola de Cara Nova na Era da Informática", da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. A exploração se faz através de atividades de interação dos alunos com as ferramentas do software, que permitem a eles, experimentar, modificar, transformar, construir e reconstruir, identificar propriedades, visualizar o objeto de estudo. Nesse sentido, Arcavi e Hadas (2003) afirmam que "os ambientes computadorizados dinâmicos constituem laboratórios virtuais em que os estudantes podem jogar, investigar e aprender matemática".(Arcavi e Hadas, 2003, p.25), sendo os computadores um meio de aprendizagem.

Segundo Arcavi e Hadas (2003), a visualização, a experimentação, a surpresa, a retro-alimentação e a necessidade de prova e demonstração, são características desse laboratório virtual, que ajudam a aprofundar e intensificar a aprendizagem. A experimentação permite, além da observação, a possibilidade de medir, comparar, modificar figuras e fazer construções auxiliares mais fáceis. A surpresa diz respeito às atividades que buscam motivar e surpreender os alunos diante de expectativas prévias esperadas por eles. A retro-alimentação ocasionada pela surpresa faz com que os alunos busquem maneiras de resolver e justificar suas respostas. Com o ambiente dinâmico e atividades que exploram a visualização, experimentação, surpresa e retro-alimentação, propicia-se situações para prova e demonstração.

CAPÍTULO 2

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO "CONGRUÊNCIA"

Este capítulo traz, primeiramente, como a congruência foi tratada ao longo da história, em seguida, a análise de como três livros didáticos, indicados pelo PNLD, abordam o tema congruência. Esta análise será feita segundo a teoria antropológica do didático proposta por Chevallard.

A palavra congruência vem do latim "congruentia", que significa conveniência, coerência, isto é, que há ligação ou adesão recíproca. Em Geometria, para provar que duas figuras são congruentes deve-se mostrar que é possível sobrepor uma sobre a outra, de modo que se correspondam ponto a ponto. O processo que leva a sobreposição de uma figura a outra, sem deformação, se denomina deslocamento ou transformação, que por sua vez, pode ser uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma composição entre essas transformações.

A congruência nem sempre foi, ou é tratada do ponto de vista da geometria das transformações, como, sucintamente, foi descrito acima, mas foi considerada como proposição na obra de Euclides, ou como axioma em Hilbert. Considerando-se essas diferentes posições, pode-se afirmar que o estudo da congruência é inerente ao estudo da origem e da evolução da Geometria, outrossim, o seu estudo torna-se um convite para a utilização e desenvolvimento dos atributos cognitivos de percepção, representação, construção e de dedução.

O presente estudo toma como ponto de partida a congruência tratada por Euclides, em particular, os casos de congruência de triângulos, que têm sua importância na utilização direta ou indireta, nas proposições seguintes de sua obra.

2.1. EUCLIDES

Na origem da geometria, encontra-se entre os babilônios e egípcios a prática de uma geometria intuitiva, não axiomática. Os procedimentos e regras objetivavam principalmente as medições de áreas e volumes. A tentativa de

sistematização da geometria foi apresentada nas páginas introdutórias de Proclus (410-485) em seu "*Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides*".

Tales primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empírico. (Boyer, 1974, pág. 35)

Proclus atribui o teorema de congruência, conhecido hoje como o caso ALA, de congruência de triângulos a Tales. Após Tales, outros grandes filósofos gregos contribuíram para a formação da geometria sistematizada, entre eles, Pitágoras, Hipócrates de Quios, Platão, Aristóteles. Possivelmente, Euclides utilizou as divisões de Aristóteles para a sua organização metódica.

A obra de Euclides intitulada de "Os Elementos" era constituída de 13 livros. Sua organização foi tão bem estruturada que, durante séculos, superou todos os escritos sobre a Geometria e ainda hoje é explorada. Sobre a sua obra são expressas afirmações como:

O grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa seqüência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais. (Eves, 2004, p. 169).

Os Elementos de Euclides, escritos há mais de dois mil anos, são um feito impressionante. Juntamente com as descobertas de J. Bolyai e de N. Lobachewsky, o trabalho de Euclides, os seus prolongamentos e a análise das suas limitações têm constituído o núcleo central da geometria com que a generalidade das pessoas e dos matemáticos entram em contato, nas escolas e nos nossos institutos e universidades. (Veloso, 1998, p. 17)

O estudo da congruência legada por Euclides é, nessa pesquisa, apresentada segundo a tradução de Vitrac (1990).

Euclides edifica a geometria a partir de definições, postulados e entes primitivos. Utiliza-os numa seqüência lógica e sistemática nas proposições. Inicia seu trabalho, no livro I, apresentando 23 definições, posteriormente,

define, entre outros elementos, o ponto, a reta, o plano, o ângulo, o triângulo, o círculo. A seguir, são apresentadas algumas definições:

- Um ponto é o que não tem partes.
- Uma linha é o que tem comprimento sem largura.
- As extremidades de uma linha são pontos.
- Uma linha reta é uma linha que assenta igualmente entre as suas extremidades.
- Uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura.
- As extremidades de uma superfície são linhas.
- Uma superfície plana é uma superfície sobre a qual assenta toda a linha reta entre dois pontos quaisquer da superfície.

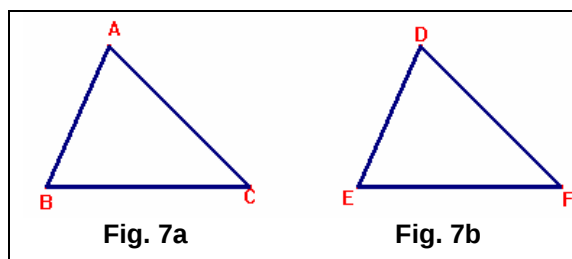
Essas definições consistiam em uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado, pois, para os gregos, a geometria não era um estudo abstrato como foi formalizado posteriormente, mas era proveniente de vivências e evidências, por exemplo, o ponto era uma idealização de partículas muito pequenas. Após essas definições, Euclides apresenta 5 postulados e 9 noções comuns ou axiomas. Dos axiomas, destaca-se o axioma 7: *"Coisas que coincidem umas com outras são iguais entre si"*, que é utilizado na proposição 4 do caso LAL.

Euclides não utilizou o termo congruência, mas seu entendimento pode-se dar com o axioma 7, que pode ser interpretado como "coisas" que se ajustam umas sobre as outras, sem se deformar. Tradicionalmente é interpretado como uma justificativa de um princípio de superposição, não mencionado por Euclides. Este axioma aparece também na proposição 8 – caso LLL de congruência, e na proposição 26 - casos ALA e LAAo.

A seguir, as proposições e demonstrações dos casos de congruência de triângulos desenvolvidos na obra de Euclides.

1º caso de congruência de triângulos (LAL) - proposição 4

Se dois triângulos têm dois lados iguais a outros dois lados respectivamente, e se os ângulos compreendidos por esses lados forem também iguais, então, os lados restantes são iguais e os ângulos que são opostos aos lados iguais, também são iguais.



Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos com os dois lados AB e AC iguais aos dois lados DE e DF respectivamente, isto é, AB é igual a DE e AC é igual a DF, e o ângulo BAC igual ao ângulo EDF.

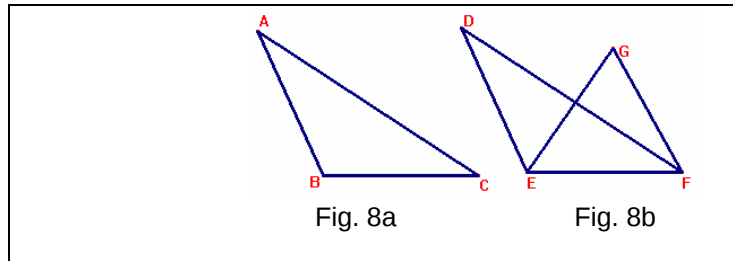
Digo que a base BC também é igual à base EF, o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, e os outros ângulos são iguais aos outros ângulos respectivamente, isto é, os que ficam opostos a lados iguais, ou seja, o ângulo ABC é igual ao ângulo DEF e o ângulo ACB é igual ao ângulo DFE.

Se o triângulo ABC é **posto sobre** o triângulo DEF e se o ponto A é posto sobre o ponto D e as linhas retas AB sobre a DE então o ponto B também **coincide** com E porque AB é igual a DE. De novo, coincidindo AB com DE, a linha reta AC também coincide com DF porque o ângulo BAC é igual ao ângulo EDF. Assim, o ponto C também **coincide** com F porque AC é igual a DF. Mas B também **coincide** com E, logo a base BC coincide com a base EF e, portanto são iguais. Assim, todo o triângulo ABC coincide com todo o triângulo DEF e, portanto são iguais. E os outros ângulos também coincidem com os outros ângulos logo são iguais, o ângulo ABC é igual ao ângulo DEF e o ângulo ACB é igual ao ângulo ao ângulo DFE. Assim, **se dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados respectivamente, e se os ângulos compreendidos por esses lados forem também iguais então os lados restantes são iguais e os ângulos que são opostos aos lados iguais são também iguais.**

O caso de congruência LAL é assumido por Euclides como sendo uma proposição (teorema) e é justificado usando a superposição através do termo "posto sobre", empregado no sentido de encaixar, transladar ou aplicar uma figura sobre a outra. Essa utilização fez com que outros matemáticos tecessem outras considerações a respeito dessa proposição, porque Euclides supôs, implicitamente, o movimento das figuras geométricas sem alteração de sua forma e tamanho, mas não mencionou anteriormente a essa o método de superposição.

2º caso de congruência de triângulos (LLL) - proposição 8

Se dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados respectivamente, e bases também iguais, então também os ângulos formados pelas linhas retas iguais são iguais.

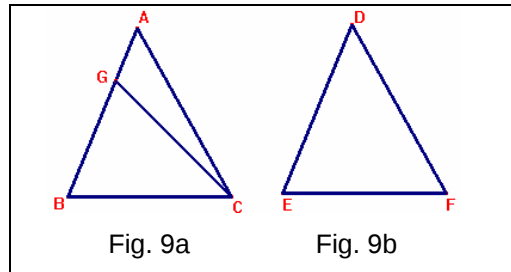


Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos com os dois lados AB e AC iguais aos dois lados DE e DF respectivamente, isto é, AB é igual a DE e AC é igual a DF, e também com a base BC igual à base EF.

Digo que o ângulo BAC também é igual ao ângulo EDF. Se o triângulo ABC é **posto sobre** o triângulo DEF, e o ponto B é posto sobre o ponto E e a linha reta BC sobre EF, então o ponto C coincide com F porque BC é igual a EF. Assim, coincidindo BC com EF, as duas linhas retas BA e AC também **coincidem** com ED e DF. E, se a base BC **coincide** com a base EF, e os lados BA e AC não **coincidem** com ED e DF, mas caem ao lado destas em EG e GF, então dadas duas linhas retas construídas sobre uma linha reta e coincidentes num ponto, foram construídas na mesma linha reta, e no mesmo lado desta, duas outras linhas retas coincidentes em outro ponto e iguais às duas formadas respectivamente, isto é, as que têm as mesmas extremidades. Mas estas não podem ser construídas. Portanto não é possível que, se a base BC coincide com a base EF, os lados BA e AC não **coincidam** com ED e DF. Logo, eles coincidem e o ângulo BAC coincide com o ângulo EDF e é igual a ele. Assim, se dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados respectivamente, e as bases também são iguais, então os ângulos formados pelas linhas retas também são iguais.

Esta proposição também utiliza a superposição de figuras como critério de congruência; utiliza o axioma 7 para mostrar que vértices e lados são ajustados; utiliza também a proposição 4, do lado AB congruente a ED e AC congruente a DF dos triângulos ABC e EDF, o ângulo BÂC também é congruente a E $\hat{D}$ F. A seguir, a proposição 26:

Se dois triângulos têm dois ângulos iguais a dois ângulos respectivamente, e um lado igual a outro lado, quer estes lados sejam adjacentes ou opostos a ângulos iguais, então, os outros dois lados dos triângulos são iguais e o outro ângulo é igual ao outro ângulo.



Esta proposição apresenta duas hipóteses. A primeira, relativa ao caso ALA, que tem um lado conhecido entre dois ângulos, e a segunda, o caso LAAo, que apresenta um lado conhecido oposto a um dos ângulos.

3º caso de congruência de triângulos (ALA) - proposição 26

Sejam ABC e DEF dois triângulos que tenham os dois ângulos ABC e BCA iguais aos dois ângulos DEF e EFD respectivamente, isto é, o ângulo ABC igual ao ângulo DEF e o ângulo BCA igual ao ângulo EFD, e tenham também um lado igual a outro lado e sejam estes lados em primeiro lugar adjacentes aos ângulos iguais, isto é, BC igual a EF. (Fig.9a e Fig 9b)

Digo que os outros lados são iguais aos outros lados respectivamente, isto é, AB é igual a DE e AC é igual a DF, e o outro ângulo é igual ao outro ângulo, isto é, o ângulo BAC é igual ao ângulo EDF.

Se AB não é igual a DE, então um deles é maior.

Ax..3
Post. 1

Seja AB o maior. Faça-se BG igual a DE e desenhe-se GC. Como BG é igual a DE, e BC é igual a EF, os dois lados GB e BC são iguais aos dois lados DE e EF respectivamente, e o ângulo GBC é igual ao ângulo DEF, logo a base GC é igual à base DF, o triângulo GBC é igual ao triângulo DEF, e os outros ângulos são iguais aos outros ângulos, isto é, os opostos aos lados iguais. Portanto o ângulo GCB é igual ao ângulo DFE. Mas o ângulo DFE é igual ao ângulo ACB por hipótese. Logo o ângulo BCG é igual ao ângulo BCA, o menor é igual ao maior, o que é impossível. Então AB não é desigual a DE e, portanto é igual. Mas BC também é igual a EF. Portanto os dois lados AB e BC são iguais aos dois lados DE e EF respectivamente, e o ângulo ABC é

igual ao ângulo DEF. Assim, a base AC é igual à base DF e o outro ângulo BAC é igual ao outro ângulo EDF.

O caso ALA é demonstrado usando-se a proposição 4 e por absurdo.

4º caso de congruência de triângulos (LAAo) - proposição 26

Sejam agora iguais os lados opostos a ângulos iguais, tal que AB seja igual a DE (Fig.9a e Fig 9b).

Digo de novo que os outros lados são iguais aos outros lados, isto é, AC é igual a DF e BC é igual a EF, e além disso o outro ângulo BAC é igual ao outro ângulo EDF.

Se BC é desigual a EF, então um deles é maior.

Seja BC o maior, se possível. Faça-se BH igual a EF e desenhe-se AH.

Prop.3
Post. 1

Como BH é igual a EF, e AB é igual a DE, os dois lados AB e BH são iguais aos dois lados DE e EF respectivamente, e têm ângulos iguais, logo a base AH é igual à base DF, o triângulo ABH é igual ao triângulo DEF, e os outros ângulos são iguais aos outros ângulos, isto é, os opostos aos lados iguais.

Prop.4

Então o ângulo BHA é igual ao ângulo EFD.

Mas o ângulo EFD é igual ao ângulo BCA, logo no triângulo AHC, o ângulo externo BHA é igual ao ângulo interno oposto BCA, o que é impossível. Então

Ax.1
Prop.16

BC não é desigual a EF, e logo é igual.

Prop.4

Mas AB também é igual a DE. Então os dois lados AB e BC são iguais aos dois lados DE e EF respectivamente, e têm ângulos iguais. Portanto a base AC é igual à base DF, o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, e o outro ângulo BAC é igual ao outro ângulo EDF.

Dessa forma, se um triângulo tem dois ângulos iguais a dois ângulos do outro triângulo, respectivamente, e um lado igual ao do outro, quer este lado ser adjacente ou oposto a ângulos iguais, então, os outros dois lados dos triângulos são iguais e o ângulo remanescente é igual ao outro ângulo.

As proposições dos casos de congruência de triângulos foram utilizadas ao longo do livro 1 e demais livros dos Elementos de Euclides. A estrutura do livro I de Euclides foi bem retratada por Vitrac (2001), no livro "Os Elementos de Euclides". Nesse livro, Vitrac (2001, p.514) apresenta na forma de tabela, as proposições e suas recorrências utilizadas por Euclides. Neste trabalho, são

destacadas em negrito, as proposições que recorrem às proposições dos casos de congruência.

Proposição	Definição	Postulado	Axioma	Proposição utilizada						
1	15,2	1,3	1							
2	15,2	1,2,3	1,3	1						
3	15	3	1	2						
4			7, 9							
5		1,2	3	3	4					
6		1	8	3	4					
7		1	8	5						
8			7	7						
9	20	1		1	3	8				
10	20			1	4	9				
11	10,2	1		1	2	3	8			
12	10,15	1,3		8	1					
13	10		1,2	11						
14		2,4	1,2,3,8	13						
15		4	1,2,3	13						
16		1,2	8	2	3	4	10	15		
17		2	4	13	16					
18		1	8	3	5	16				
19				5	18					
20		1,2	8	2	5	19				
21		2	4	16	2					
22	15	1,3	1	2	3	20				
23		1		8	22					
24		1	1,8	2	4	5	19	23		
25				4	24					
26		1	1,8	3	4	16				
27	23	2		16						
28		4	1,2,3	13	15	27				
29	23	2,5	1,2,4	13	15					
30			1	27	29					
31		1,2		23	27					
32		2	1,2	13	29	31				
33		1		4	27	29				
34		1	2	4	26	29				
35			1,2,3	4	29	34				
36		1	1	33	34	35				
37		2	6	31	34	35				
38		2	6	31	34	36				
39		1	1,8	31	37					
40		1	1,8	31	38					
41		1	1,2	34	37					
42		1	1,2	10	23	31	38	41		
43		1	2,3	34						
44		1,2,5	1,8	15	29	30	31	42	43	
45		1	1,2	14	29	30	33	34	42	44
46	22	4	1,3	2	3	11	29	31	34	
47		1,4	1,2,5	4	14	30	31	41	46	
48		1	1,2	2	3	8	11	47		

Tabela 2 – Distribuição de axiomas, postulados e proposições organizadas por Vitrac

Esta tabela deixa evidente a importância e a ampla utilização da proposição 4, caso LAL de congruência de triângulos. Esta proposição é utilizada no desencadeamento lógico de proposições que a sucedem de forma

direta, como por exemplo, as proposições 15 e 34, ou indiretamente, como por exemplo, as proposições 28 que utiliza a 15, ou a 37 que utiliza a 34. O mesmo ocorre com a proposição 8 do caso LLL. E, a proposição 26, caso ALA ou LAAo é utilizada a partir da proposição 34. De fato, Ávila (2001) ressalta que:

O aspecto mais importante dos Elementos é essa organização dos fatos, num admirável encadeamento lógico-dedutivo em que um reduzido número de proposições e definições iniciais são o bastante para se demonstrar, uns após outros, todos os teoremas considerados. Historicamente, os Elementos são a primeira corporificação desse método axiomático.(AVILA, 2001,RPM, p.5)

Estudar a congruência de figuras, em especial a congruência de triângulos, envolve tanto a questão de aprendizagem, no que diz respeito aos domínios de aspectos concretos e dedutivos, como também o preparo para um estudo axiomático do sistema euclidiano. O estudo pode ser ampliado para o sistema não-euclidiano.

2.2. CLAIRAUT (1713 – 1765)

Muitos autores tentaram revisar a obra de Euclides, porém, Clairaut publicou, pela primeira vez em 1741, uma geometria fora dos padrões de "Os Elementos". Não apresentou axiomas ou postulados, mas proposições dispostas ordenadamente. Esta pesquisa analisou a edição traduzida por João Feliciano, de 1909.

Clairaut é conhecido como anti-Euclidiano. Ao ler o prefácio de sua obra, "Elementos de Geometria", nota-se semelhança às propostas de ensino nos dias atuais, algo que se assemelha com a organização local, estimular a investigação e descoberta, representações e construções, uso da observação. A evolução das proposições ocorre utilizando-se proposições anteriores ou provas evidentes, sem o rigor da obra de Euclides, mas em linguagem natural, mais acessível ao aluno. Sua proposta foi de retomar a origem da geometria, a geometria natural, isto é, a medida de terrenos. Já na primeira parte do livro Clairaut (1909), propõe problemas envolvendo medidas de distâncias e

comprimentos entre pontos. No caso da congruência de triângulos, Clairaut (1909) utiliza o termo igual e semelhante para descrever os casos LLL, LAL e ALA de congruência.

Propõe o seguinte problema de medida de terreno, utilizando a triangulação de polígonos:

Suponhamos que seja ABCDE (Fig. 10), a figura de um campo, de um quintal, etc cuja medida se queira conhecer. Pelo que vimos, fora preciso decompor primeiro ABCDE em triângulos, como ABC, ACD, ADE, e em seguida medir estes triângulos, depois de ter baixado perpendiculares EF, CH, BG. Mas suponhamos que no espaço ABCDE encontramos algum obstáculo, por exemplo, uma elevação, um bosque, um tanque, etc, que nos impeça de traçar as linhas de que tivemos necessidade. Que faremos então? Que método será preciso seguir para obviar ao inconveniente do terreno?.

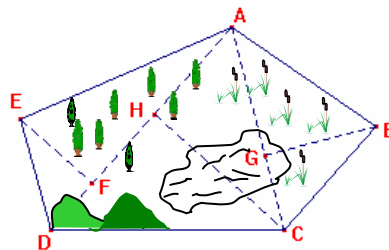


Fig. 10

Para responder as questões, o autor sugere que se encontre um terreno livre, que se possa descrever sobre esse terreno triângulos congruentes aos do terreno original. A resolução proposta por Clairaut (1909) ocorre por construção, na proposição XXVI da 1ª parte do livro, que possibilitando a relação ao **caso LLL**. Assim, tomando o triângulo ABC que tem um obstáculo impedindo a medição direta do terreno, Clairaut representa (Fig.11 e Fig. 12) e descreve:

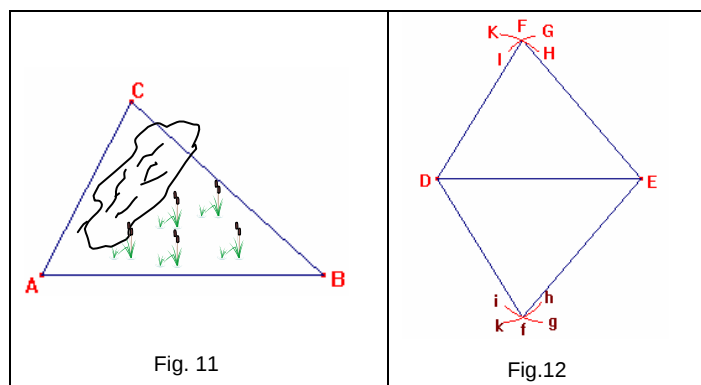


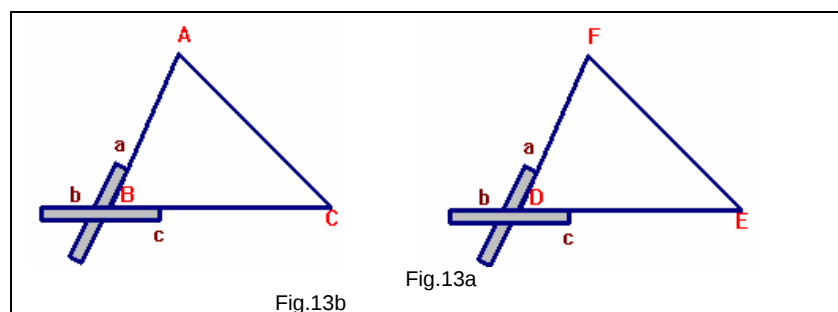
Fig. 11

Fig.12

Supondo que o obstáculo encontra-se no triângulo ABC, cujos lados são conhecidos. Querendo traçar sobre o terreno escolhido um triângulo igual e semelhante a ABC, descrevemos antes de tudo uma linha DE, igual ao lado AB (figuras 11 e 12) e depois tomando uma corda do comprimento BC, fixamos uma de suas extremidades em E e descrevemos o arco IFG, que terá a corda como raio. Tomando uma outra corda igual a AC e ligando uma de suas pontas em D, traçamos o arco FKFH, que cortará o primeiro no ponto F. Traçando então as linhas DF FE, teremos um triângulo DEF igual e semelhante ao triângulo proposto ABC. E isso é evidente, porquanto os lados DF e EF, que se unem no ponto F, sendo respectivamente iguais aos lados AC e BC, unidos no ponto C, e a base DE sendo tomada igual a AB, não seria possível que a posição das linhas DF e EF sobre DE fosse diferente da posição das linhas AC e BC sobre AB. Verdade é que se poderiam tomar as linhas Df e Ef abaixo de DE; mas o triângulo seria ainda o mesmo, estando porém invertido.

Clairaut, na 1ª parte de seu livro, item XXVII, apresenta a necessidade de haver um ângulo entre dois lados de um triângulo para determinar outro triângulo congruente – **caso LAL**. Descrevemos, a seguir, a proposição XXVII.

Se pudéssemos medir somente dois dos três lados de um triângulo ABC, os dois lados AB e BC, por exemplo, está claro que com isto só não poderíamos determinar um segundo triângulo igual e semelhante a ABC. Portanto, ainda que se tomasse o lado DE igual a BC e DF igual a AB não saberíamos que posição das a este relativamente ao outro.



Para superar essa dificuldade, é simples o recurso que se apresenta: faz-se que DF tenha sobre DE a mesma inclinação que AB tem sobre BC; ou para falar como os geômetras, dá-se ao ângulo FDE a mesma abertura que tem o ângulo ABC.

Para fazer esta operação, toma-se um instrumento como abc, composto de duas réguas que possam girar em torno de b, e colam-se esta régua sobre

os lados AB e BC. Fazem elas assim o mesmo ângulo que os lados AB e BC. Pondo depois a régua bc sobre a base DE, de modo que o centro b corresponda ao ponto D e a abertura do instrumento seja sempre a mesma, a régua ab dará a posição da linha DF, a qual fará com a linha DE o ângulo FDE igual ao ângulo ABC. Ora, a linha DF tendo sido tomada com o comprimento de AB, bastará somente traçar por F e por E a reta FE para ter o triângulo FED, inteiramente igual e semelhante ao triângulo ABC.

É simples essa prática e supõe este princípio evidente: ***Um triângulo é determinado pelo comprimento de dois de seus lados e por sua abertura; ou o que dá no mesmo, um triângulo é igual a outro quando dois de seus lados são respectivamente iguais e é igual o ângulo entre eles compreendido.***

No caso LAL, a justificativa ocorre por evidência e construção em linguagem acessível ao aluno. Utiliza instrumento para auxiliar nas construções.

O **caso ALA** corresponde à proposição XXX conforme descrito a seguir:

Quando quisermos fazer o triângulo FDE igual ao triângulo ABC, e for possível medir um só lado BC, por exemplo, podemos recorrer aos ângulos ABC e ACB. Tendo tomado DE igual a BC, colocamos as linhas FD e FE de modo que façam com DE os mesmos ângulos que AB e AC fazem com BC. Então pelo encontro destas duas linhas, temos o triângulo FDE igual e semelhante ao triângulo ABC. O princípio que esta operação supõe é tão simples, que por inútil demonstrá-lo.

O **caso LAAo** não é explicitado no livro de Clairaut, mas pode-se recorrer à proposição XXX, usando, por exemplo, os ângulos ABC e BAC. A justificativa também é por construção e evidência.

2.3. LEGENDRE (1752 – 1833)

Legendre foi professor na École Militaire de Paris. Em 1794 publica *Éléments de Géométrie* – uma geometria que satisfaz ao espírito.

A obra de Legendre foi escrita para uso escolar e acadêmico, com as primeiras publicações bem sucedidas, ainda em vida do autor, 20 edições foram

publicadas. O aprimoramento pedagógico dos Elementos de Euclides dado por Legendre foi amplamente difundido nos EUA e no Brasil.

Legendre atualiza e simplifica as proposições de Os Elementos de Euclides. Utiliza 26 definições, algumas destas citadas no quadro comparativo.

Quadro 1: Comparativo Euclides e Legendre

Euclides	Legendre
• Um ponto é o que não tem partes. • Uma linha reta é uma linha que assenta igualmente entre as suas extremidades. • Uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura • Uma superfície plana é uma superfície sobre a qual assenta toda a linha reta entre dois pontos quaisquer da superfície.	• Um ponto é o lugar em que duas linhas se cortam. • Uma linha reta é uma linha indefinida que assinala a mais curta distância entre quaisquer dois dos seus pontos. • A superfície de um corpo é o limite que o separa do espaço adjacente. • O plano é uma superfície tal que, tomando nela dois pontos à vontade e unindo-os por uma reta, esta linha fica toda situada na superfície.

O axioma 7 que Euclides utilizou na demonstração da proposição 4, referente ao primeiro caso de congruência, **"coisas que coincidem umas com outras são iguais entre si"**, foi considerado por Legendre como sendo a definição XXVI, **"duas figuras quaisquer, volumes, superfícies ou linhas, são iguais quando podemos aplicá-las uma sobre a outra de modo que coincidam perfeitamente"**.

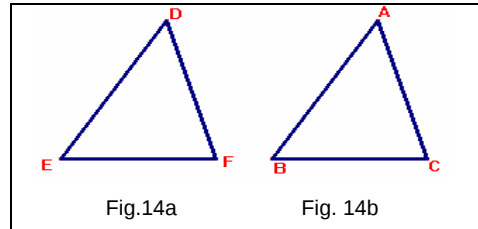
Legendre acrescenta o termo "aplicar" para coincidir. Também é saliente a apresentação de uma explicação de termos como axioma, postulado, e sinais utilizados na obra. Por exemplo:

- Axioma é uma proposição evidente por si mesma.
- Teorema é uma verdade que se torna evidente por meio de um raciocínio chamado demonstração.
- Lema é uma verdade empregada subsidiariamente para a demonstração de um teorema ou para a solução de um problema (questão proposta que exige uma solução).
- Nome comum de preposição atribui-se indiferentemente aos teoremas, lemas e problemas.
- Corolário é a consequência de uma ou mais proposições.
- Sinais das operações que comumente usamos. (+, -, x, ()).

A forma como Legendre tratou o assunto congruência é descrito a seguir:

1º caso de congruência de triângulos (LAL) - Teorema VIII

Dois triângulos são iguais, quando têm um ângulo igual compreendido por dois lados iguais cada um a cada um (Fig. 14a e Fig 14b).



Seja o ângulo A igual ao ângulo D, o lado AB igual a DE, o lado AC igual a DF: digo que os triângulos ABC, DEF são iguais.

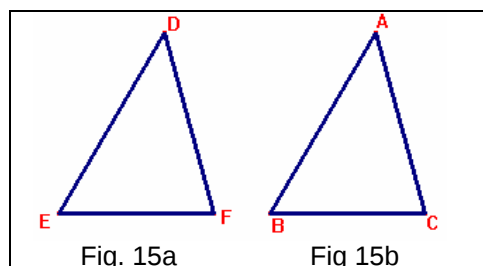
Com efeito, esses triângulos podem ser colocados um sobre o outro, de modo que **coincidam** perfeitamente. E em primeiro lugar, **se colocarmos** o lado DE sobre o seu igual AB, o ponto D cairá em A e o ponto E em B; porém sendo o ângulo D igual ao ângulo A, quando o lado DE estiver colocado sobre AB, o lado DF tomará a direção AC. Demais DF, é igual a AC: logo, o ponto F cairá em C, e o terceiro lado EF **ajusta-se** exatamente com o terceiro lado BC: por conseguinte, o triângulo DEF é igual ao triângulo ABC.

Corolário: Desde que em dois triângulos três partes são iguais: ângulo $A=D$, lado $AB=DE$, lado $AC=DF$, podemos concluir que também são iguais as outras três partes: ângulo $B=E$, ângulo $C=F$, lado $BC=EF$.

Legendre utiliza as palavras coincidência e ajusta-se, para indicar a congruência de triângulos e de lados de triângulos. Enuncia o corolário que estabelece a condição mínima de congruência do caso LAL.

2º caso de congruência de triângulos (ALA) - Teorema IX

"Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual adjacente a dois ângulos iguais, cada um a cada um".



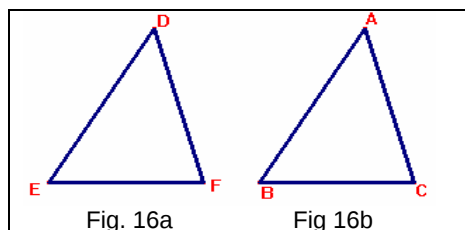
Seja o lado BC igual a EF, o ângulo B igual ao ângulo E, e o ângulo C igual ao ângulo F: digo que o triângulo DEF é igual ao triângulo ABC. Para efetuar a **superposição**, coloque EF sobre o seu igual BC: ponto E cairá em B, e o ponto F em C. Por ser o ângulo E igual ao ângulo B, e o lado ED tomará a direção BA; e assim, o ponto D há de achar-se em algum ponto da linha BA. Semelhantemente, por ser o ângulo F igual ao ângulo C, a linha FD tomará a direção CA, e o ponto D se achará sobre algum ponto do lado CA: logo o ponto D, que deve achar-se ao mesmo tempo sobre as duas linhas BA, CA, cairá sobre a interseção A: portanto, os dois triângulos ABC, DEF, **coincidem** um com o outro, e são perfeitamente iguais.

Corolário: Desde que em dois triângulos são iguais três partes a saber: $BC=EF$, $B=E$, $C=F$, podemos concluir que também são iguais as outras partes, a saber: $AB=DE$, $AC=DF$, $A=D$.

No 2º caso de congruência, Legendre utiliza o termo "superposição" no lugar da descrição em que dois triângulos podem ser colocados um sobre o outro, de modo que coincidam perfeitamente. Utiliza também a definição XXVI.

3º caso de congruência de triângulos (LLL) - Teorema XI

Dois triângulos são iguais, quando têm os três lados iguais cada um a cada um (Fig. 16a e Fig. 16b).



Seja o lado $AB=DE$, $AC=DF$, $BC=EF$: digo que se terá o ângulo $A=D$, $B=E$, $C=F$. Porque, se o ângulo A fosse maior que o ângulo D, sendo os lados AB, AC, iguais aos lados DE, DF, cada um a cada um, seguir-se-á (pelo teorema precedente) que o lado BC é maior que EF; e se o ângulo A fosse menor que o ângulo D, seguir-se-á que o lado BC é menor do que EF: ora, BC é igual a EF: logo, o ângulo A não pode ser maior nem menor que o ângulo D; e pois, é igual a ele. Provar-se-á de modo análogo que o ângulo $B=E$, e que o ângulo $C=F$.

Escólio: É fácil ver que os ângulos iguais ficam opostos aos lados iguais, assim, os ângulos iguais A e D ficam opostos aos lados BC e EF.

Legendre utiliza a proposição anterior X para demonstrar a proposição XI. O caso LAAo não é explorado por Legendre.

2.4. HADAMARD (1865 – 1963)

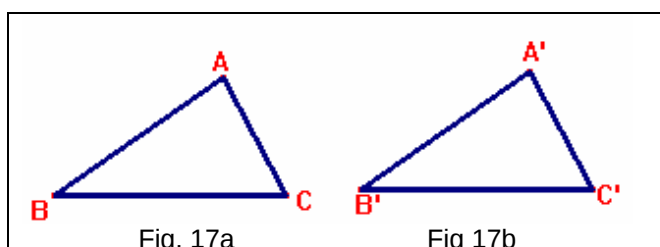
Um outro matemático a influenciar bastante o ensino da matemática foi Hadamard. Na sua obra "*Leçons de Géométrie Élémentaire*" (1937), introduz definições de figuras iguais como sendo,

Uma figura qualquer pode ser transportada de uma infinidade de maneiras no espaço sem deformação, como os corpos sólidos usuais. Nomeiam-se duas figuras iguais quando uma pode ser **transportada** sobre a outra, de maneira a fazer coincidir, exatamente, todas as partes, ou seja, duas figuras formam uma mesma figura, em dois lugares diferentes. Uma figura à qual se faz sofrer apenas deslocamento sem deformá-la é dita figura invariável (Hadamard, 1937, p.3).

Os casos de congruência de triângulos são apresentados como proposições que exprimem as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam congruentes, de acordo com a definição introduzida por Hadamard (1937).

1º caso – ALA: Dois triângulos são iguais, se eles têm-se um lado igual compreendido entre dois ângulos iguais respectivamente.

Sejam dois triângulos ABC e A'B'C' (Fig. 17a e Fig. 17b) nos quais $BC=B'C'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$.



Transporta o ângulo $\hat{B}'$ sobre o seu igual $\hat{B}$, o lado B'A' toma a direção BA e B'C' a direção BC. Como $B'C' = BC$, o ponto C' vem em C e, dado que $\hat{C}' = \hat{C}$, o lado C'A' toma a direção CA. A partir do ponto A', interseção de

$B'A'$ e de $C'A'$, vem necessariamente à interseção de BA e CA , ou seja, em A . A coincidência, por conseguinte, é estabelecida.

2º caso – LAL: Dois triângulos são iguais, se tem um ângulo igual compreendido entre dois ângulos iguais respectivamente.

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ nos quais $AB=A'B'$; $\hat{A} = \hat{A}'$; $AC = A'C'$.

Transporta o ângulo $\hat{A}'$ sobre o seu igual $\hat{A}$, o lado $B'A'$ toma a direção BA e $A'C'$ a direção AC . Como $B'A' = BA$, o ponto B' vem em B , do mesmo modo o ponto C' vem em C . $B'C'$ coincide, por conseguinte, com BC e a superposição está completa.

3º caso – LLL: Dois triângulos são iguais, se têm os três lados iguais, respectivamente.

Sejam os triângulos ABC , $A'B'C'$ que têm os três lados iguais respectivamente.

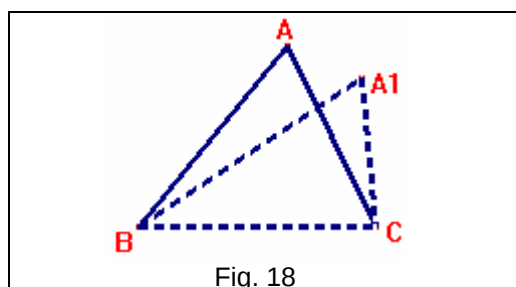


Fig. 18

Desloque o segundo triângulo de maneira a pôr $B'C'$ sobre o seu igual BC , os dois triângulos do mesmo lado de BC . Quer BCA_1 a nova posição do triângulo $B'C'A'$. Digo que o ponto A_1 coincide com o ponto A . Torna-se evidente se a reta $B'A'$ toma a direção BA ou a reta $C'A'$, a direção de CA . Se não fosse assim, teríamos formado dois triângulos isósceles BAA_1 , CAA_1 (fig.2.12) e a perpendicular no meio de AA_1 deveria passar pelos pontos B e C (corolário 23), em outros termos confundir-se com o reta BC : o que inadmissível, dado que BC , que deixa os pontos A e A_1 , do mesmo lado, não pode passar pelo meio de AA_1 . Os pontos A e A_1 , podem, por conseguinte, ser apenas confundidos, e os dois triângulos coincidem.

No capítulo VI, intitulado "Sobre o deslocamento das figuras", Hadamard (1937) apresenta teoremas sobre a rotação, simetria e translação. Ressalta que a condição necessária e suficiente para que as figuras sejam iguais e de mesma orientação, como sendo a possibilidade de fazer corresponder cada ponto de

uma figura um ponto homólogo ao de uma segunda, de modo que três pontos quaisquer e os seus homólogos formem triângulos iguais e da mesma orientação.

A translação é apresentada como uma operação que transforma qualquer figura numa figura igual e de mesma orientação. Este deslocamento pode ser considerado como recorrência de um deslizamento da figura no seu plano. Em seguida nomeia a rotação tal qual um deslocamento em que cada ponto da figura deslocada gira em redor de certo ponto fixo, chamado centro da rotação. Uma rotação pode ser obtida por um deslize da figura no seu plano, dado que, pode-se supor que o ângulo de rotação varia continuamente, desde zero até ao valor que deve tomar finalmente. Neste movimento, cada ponto descreve um arco de círculo que tem por centro o centro da rotação. Estes diferentes arcos correspondem a ângulos de mesmo centro; são, com as circunferências das quais fazem respectivamente parte, uma mesma composição. Introduce a simetria com o lema do teorema "duas figuras iguais e do mesmo modo sentido (significado) podem sempre ser conduzidos de coincidir, quer por uma translação, quer por uma rotação em redor de um ponto convenientemente escolhido".

Dessa forma, Hadamard (1937) aprimora a obra de Euclides, pois ao apresentar o estudo sobre o deslocamento de figuras, diferencia os deslocamentos em translação, rotação e simetria.

2.5. HILBERT (1862 – 1943)

Até o século XIX, eram fortes o mito de Euclides e a crença de que "os livros de Euclides continham verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas" (Davis & Hersh, 1985, p.366). Por outro lado, havia aqueles que faziam uma análise mais rigorosa e o interesse em dar consistência aos postulados e axiomas de Euclides.

Com o desenvolvimento da axiomatização da Álgebra e da Análise e a descoberta de novas geometrias, o programa formalista, desenvolvido por Hilbert, reformulou um conjunto de postulados que permitia completar a axiomatização dos "Elementos" de Euclides, que desde a sua publicação, era

questionada com relação às definições e noções comuns, as deficiências lógicas nas definições e a ausência de um sistema completo de postulados. Uma das diferenças entre a Geometria de Euclides e as geometrias que a sucederam está na concepção dos conceitos primitivos. Para os gregos o ponto e a reta eram idealizações de partículas muito pequenas e fios muito finos, isto é, idealizações do espaço físico. Hilbert, ao formalizar a geometria, buscou encontrar um conjunto de postulados que eliminasse suposições implícitas prejudiciais a axiomática de Euclides.

Em 1899, Hilbert publicou *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) e na introdução escreve:

A presente investigação é um novo ensaio para construir a Geometria sobre um sistema completo de axiomas, o mais singelo possível, deduzindo os mais importantes teoremas, de maneira tal, que nesse processo apareçam com a máxima clareza a interpretação dos distintos grupos de axiomas e as relações das conseqüências que isoladamente se derivem de cada um dos elos." (Hilbert, 1899, citado por Hilbert, 1953, p.1)

Hilbert preocupou-se em apresentar uma geometria que eliminasse as deficiências lógicas encontradas nos *Elementos* de Euclides, utilizando entes primitivos e suas relações, e o menor número de axiomas.

Hilbert fundamentou a geometria sobre os conceitos primitivos, que são os objetos aceitos sem definição: ponto, reta, plano, e as relações entre eles (relações não definidas): estar entre, congruente, paralelo, contínuo.

Entes primitivos ou objetos não definidos são:

- Pontos - indicados por letras latinas: A, B, C,
- Retas – indicadas por letras latinas: a, b, c, ...
- Planos – indicados por letras gregas: α , β , γ , ...

Hilbert denominou de grupos de axiomas as descrições das relações entre os entes primitivos. E estão divididos em cinco grupos:

- Axiomas de incidência – estabelecem as relações entre os entes primitivos (ponto, reta, plano).
- Axiomas de ordem – este grupo define o conceito "entre" que é a base da ordenação de pontos sobre uma reta, um plano ou um espaço.
- Axiomas de congruência – definem o conceito de congruência e de movimento.

- Axioma das paralelas – sobre o 5º postulado de Euclides.
- Axiomas de continuidade – que definem elemento de separação ente partes contíguas.

O grupo da congruência é constituído de cinco axiomas definidores do conceito de congruência e de movimento. Os três primeiros axiomas do grupo referem-se à congruência de segmentos, o quarto axioma é sobre a congruência de ângulos e o quinto axioma refere-se à relação entre os conceitos de congruência de segmentos e congruência de ângulos. Este último axioma refere-se ao 1º caso de congruência de triângulos, o caso LAL.

O que Euclides menciona implicitamente na proposição 4, sobre o transporte de uma figura sobre a outra de modo que ocorra o ajustamento entre elas, Hilbert proporciona a possibilidade desse transporte no axioma 1 de congruência e demonstra a sua univocidade a partir do transporte de ângulos, recorrendo ao axioma 5.

A idéia de "todo segmento é congruente consigo mesmo" é deduzido a partir dos dois primeiros axiomas, e estabelece a simetria e transitividade da congruência de segmentos.

Para introduzir os axiomas do grupo de axiomas de congruência, Hilbert (1899) explica que "os segmentos estão entre si em certas relações, cuja descrição serve a palavra congruente ou igual".

Axioma 1: Se A, B são dois pontos de uma reta a e, além disso, A' é outro ponto da mesma ou distinta reta a' , pode-se encontrar sempre sobre um dos lados de a' , determinados por A' , um só ponto B' tal que, os segmentos AB e $A'B'$ sejam congruentes ou iguais. ($AB \equiv A'B'$).

Este axioma proporciona a possibilidade de transporte de segmentos, ou seja, todo segmento pode ser transportado de maneira determinada e unívoca sobre um lado de uma reta dada a partir de um ponto dado.

Axioma 2: Se dois segmentos $A'B'$ e $A''B''$ são congruentes do mesmo segmento AB, também o segmento $A'B'$ é congruente ao segmento $A''B''$ ou se dois segmentos são congruentes com um terceiro, são congruentes entre si.

Todo segmento é congruente a si mesmo. Este fato, que não é de imediato inteligível, se deduz com os dois primeiros axiomas de congruência, transportando o segmento AB sobre qualquer semi-reta, tal como, em A'B' congruente com AB e aplicando depois o axioma 2 nas congruências $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A''B''$. Com este fundamento e demais aplicações do axioma 2, resultam a simetria e a transitividade da congruência de segmentos; isto é, a validade dos teoremas:

- Se $AB \equiv A'B'$, tem-se também $A'B' \equiv AB$ – simétrica.
- Se $AB \equiv A'B'$ e $A'B' \equiv A''B''$ se verifica $AB \equiv A''B''$ – transitiva.

Como consequência da simetria na congruência de segmentos, pode-se expressar deste modo: Os segmentos são congruentes entre si – reflexão. Em termos atuais, é possível afirmar que a congruência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva entre segmentos.

Axioma 3: Sejam AB e BC dois segmentos da reta a sem pontos comuns e, por outra parte, A'B' e B'C' dois segmentos sobre a mesma reta a ou sobre outra distinta a', mas, em todo caso, sem pontos comuns: se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$ sempre se verifica $AC \equiv A'C'$.

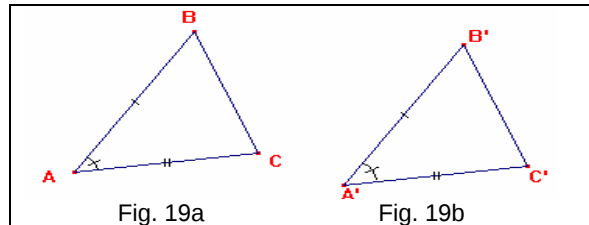
Este axioma expressa a adicionabilidade de segmento. Pode-se associar este axioma à noção comum de Euclides, "se coisas iguais se agregam a coisas iguais, os totais são iguais".

No axioma 4, Hilbert (1899) explica que os ângulos estão em certas relações entre si que para designá-los serve a palavra congruente ou igual. O transporte de ângulos é tratado do mesmo modo que se trata o transporte de segmentos. Define ângulos e os designa com os símbolos: $\angle(h,k)$ ou $\angle(k,h)$.

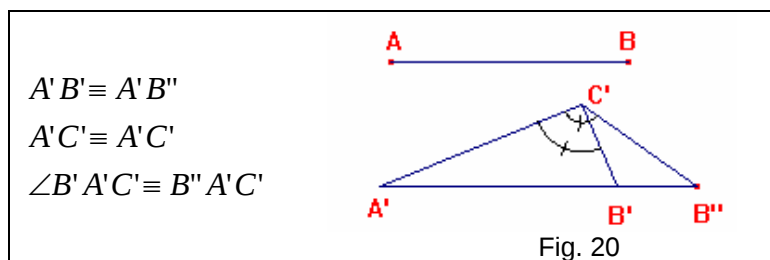
Axioma 4: Dados um ângulo $\angle(h,k)$ em um plano α , uma reta a' em um plano α' e uma das regiões de α' determinados por a'; representemos por h' uma semi-reta de a' que parte de O'. Existe, então, no plano α' um e somente um k', tal que, o ângulo $\angle(h,k)$ é congruente ou igual a $\angle(h',k')$ e, por sua vez, todos os pontos interiores do ângulo $\angle(h',k')$ estão situados na região dada com relação a a'. Simbolicamente: $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$. E todo ângulo é congruente a si mesmo.

Todo ângulo de um plano pode ser transportado de maneira unívoca de um lado e uma semi-reta dada.

Axioma 5: Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ verificam as congruências: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ também se dá por satisfeita a congruência $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ (Fig. 19a e Fig. 19b).



Este axioma introduz os casos de congruência de triângulos. Além disso, com este axioma e os axiomas 2 e 3 Hilbert (1899) demonstrou que o transporte de segmentos é unívoco. Supôs que o segmento AB se transporte de duas maneiras distintas sobre a semi-reta de origem em A' , chegando até B' e B'' . Exigiu um ponto C' fora da reta $A'B'$, obtendo as congruências:

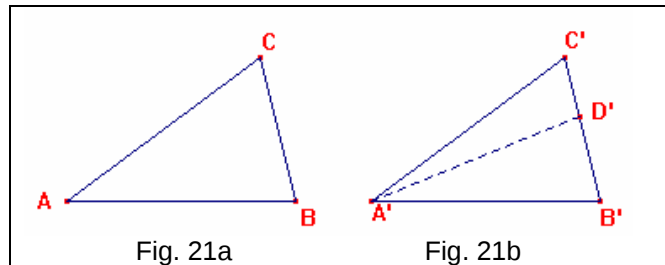


Logo, pelo axioma 5, $\angle A'C'B' \equiv \angle A'C'B''$, que está em contradição com a univocidade do transporte de ângulo exigido pelo axioma 4. Dessa forma, com o conjunto de axiomas do grupo da congruência, fica esclarecido com mais rigor, a congruência e transporte de segmentos, ângulos e conseqüentemente, de figuras, proposto anteriormente por Euclides.

Os casos de congruência de triângulos aparecem a partir do teorema 12. Hilbert (1899) retoma os triângulos do axioma 5 e demonstra que o lado BC é congruente ao lado $B'C'$ e o apresenta como sendo o 1º caso de congruência de triângulos. Atualmente, considera-se como sendo o caso LAL a união do axioma 5 e do teorema 12, em um único postulado.

1º caso de congruência de triângulos é dado pelo Teorema 12:

Um triângulo ABC é congruente a um triângulo A'B'C' no caso de que sejam válidas as congruências: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle A \equiv \angle A'$ (Fig. 21a e Fig 21b).



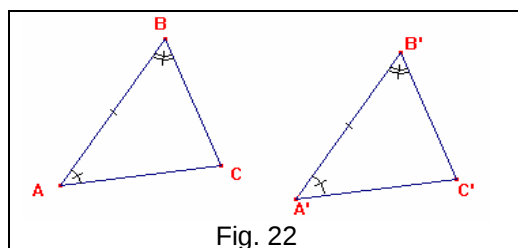
Demonstração: Segundo o axioma 5, as congruências $\angle B \equiv \angle B'$ e $\angle C \equiv \angle C'$ se verificam e, portanto, é necessário unicamente provar que BC e B'C' são congruentes.

Admitamos, por absurdo, que BC e B'C' não são congruentes e determinemos sobre B'C' um ponto D' tal que $BC \equiv B'D'$. Então, nos triângulos ABC e A'B'D' coincidem dois lados e o ângulo compreendido, conforme o axioma 5 aplicável nos triângulos ABC e A'B'D' se tem $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$ e seriam assim congruentes os ângulos $\angle BAC$, $\angle B'A'D'$ e $\angle B'A'C'$, o que não é possível, pois o axioma 4 estabelece que um ângulo qualquer só pode ser trasladado de uma só maneira em uma semi-reta dada, em uma região dada no plano. Com isso se dá a demonstração de que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Este teorema utiliza os axiomas 4 e 5 de congruência, sendo que a demonstração ocorreu por absurdo ao supor que BC e B'C' não são congruentes. Na seqüência, o ponto D' é determinado sobre B'C' tal que $BC \equiv B'D'$. Com a utilização do axioma 4, chega-se à conclusão da falsidade da suposição feita anteriormente.

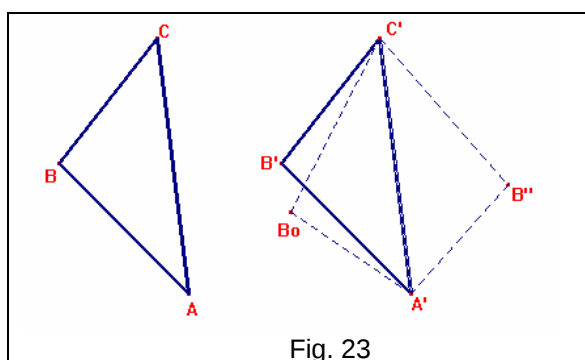
2º caso de congruência de triângulos é dado pelo teorema 13: ALA

Um triângulo ABC é congruente com um triângulo A'B'C', no caso de que sejam válidas as congruências: $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$.



3º caso de congruência de triângulos á dado pelo teorema 18: LLL

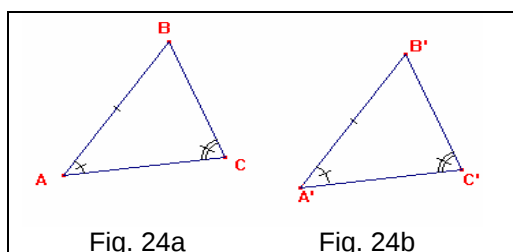
Se em dois triângulos ABC e A'B'C' os lados correspondentes são congruentes, os triângulos são congruentes.



Para a demonstração, utiliza o teorema sobre a simetria da congruência de segmentos, para provar que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

4º caso de congruência de triângulos á dado pelo teorema 25: LAAo

Dois triângulos ABC e A'B'C' são congruentes, no caso de satisfazer as congruências: $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle C \equiv \angle C'$.



O 4º caso é consequência do teorema do ângulo externo.

2.6. BIRKHOFF (1884 – 1944)

Em 1930, Birkhoff apresentou um sistema axiomático da geometria euclidiana diferente do sistema de axioma de Hilbert. Centralizou seu sistema nos números reais, para fundamentar a geometria, e utilizou as idéias fundamentais de congruência para segmentos. Separação para pontos sobre uma reta, e congruência para ângulos, que se definem em termos de distância e medida angular do seguinte modo:

1. $A-B-C$ significa, por definição, que A, B e C são pontos diferentes de uma mesma reta e $AB+BC=AC$.
2. $\overline{AB}$ se define como a união de A, B e todos os pontos entre A e B.
3. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ significa, por definição, que $AB=CD$
4. $\angle A \cong \angle B$ significa, por definição, que $m \angle A = m \angle B$.

Com este esquema, quase todas as propriedades básicas de separação e congruência para segmentos e ângulos, podem se demonstrar como teorema, a única exceção foi o postulado LAL.

O presente estudo se baseia em Moise (1963) que utilizou e difundiu a estrutura da Geometria de Birkhoff em seu livro "Geometria elementar desde um ponto de vista avançado".

Quadro 2 – Enfoques métrico e sintético

	Enfoque sintético métrico	Enfoque sintético não métrico
▪ Estrutura dada	$[S, L, P, d, m]$	$[S, L, P, B, \cong]$
▪ Distância	Dada na estrutura	Nunca se menciona
▪ Medida para ângulos	Dada na estrutura	Nunca se menciona
▪ Congruência para segmentos	Definida em termos de distância	Dada na estrutura
▪ Congruência para ângulos	Definida em termos de distância angular	Dada na estrutura
▪ Propriedades de congruência	Enunciadas em teoremas	Enunciadas em postulados
▪ Soma	Efetuada com números AB	Efetuada com classes de congruência $[\overline{AB}]$
▪ Desigualdades	Definidas entre números $AB < CD$	Efetuada com classes de congruência $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$

O enfoque sintético diz respeito à Geometria de Euclides/Hilbert, cuja estrutura é composta por ponto, reta e plano (S, L, P) , uma relação de separação (B) , e uma relação indefinida de congruência para segmentos e ângulos $(\cong)$. A

distância e a medida dos ângulos não são mencionadas, por exemplo, no postulado de soma de segmentos, aparecem como classe de congruência: se $A-B-C$, $A'B'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. As propriedades de congruência são enunciadas nos postulados.

No enfoque métrico, a estrutura é composta por ponto, reta, plano, distância e medida angular - $[S, L, P, d, m]$ e é referente ao sistema proposto por Birkhoff. Como mostra o quadro, o número aparece na estrutura de Birkhoff, nas definições e teoremas em termos de distância e medida angular, que o distingue da estrutura de Euclides. Acrescenta-se que a Geometria de Euclides consiste em uma geometria com régua e compasso, mas sem números (geometria sintética). E a de Birkhoff, uma geometria métrica, por apresentar uma geometria com régua, compasso, mas com números.

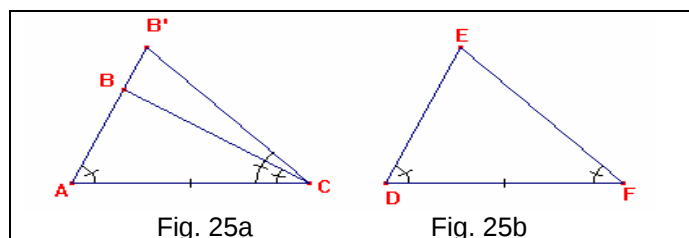
O caso LAL é considerado como sendo um postulado. Os demais casos são demonstrados. As demonstrações dos casos de congruência ALA, LLL, LAAo estão apresentados a seguir..

Caso ALA de congruência de triângulos:

Seja dada uma correspondência ALA de forma $ABC \leftrightarrow DEF$, como se indica na figura a seguir, de maneira que:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \angle A \cong \angle D; \\ AC=DF; \\ \angle C \cong \angle F. \end{array} \right.$$

Devemos demonstrar que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



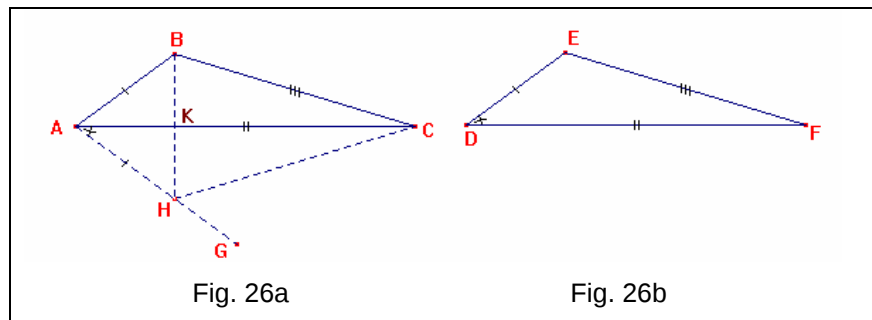
Demonstração:

2. AB contém um ponto B' tal que $AB'=DE$ – teorema de localização de pontos.
3. $AB'C \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL – passos 1 e 2.
4. $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ - postulado LAL.

5. $\angle ACB' \cong \angle DFE$ - ângulos correspondentes.
6. $CB' = CB$ – postulado da construção de um ângulo.
7. $B' = B$ – duas retas diferentes se intersectam em um ponto.
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ - passos 4 e 7.

Caso LLL de congruência de triângulos:

Este caso é demonstrado utilizando o teorema do triângulo isósceles.

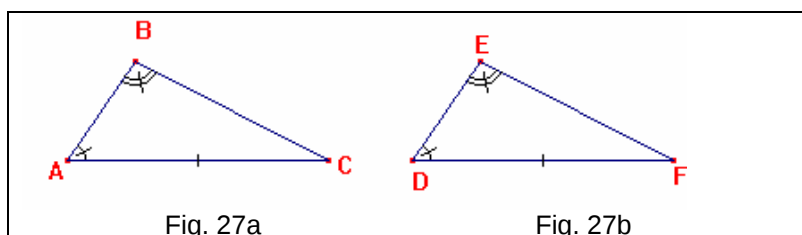


1. $AB=DE, AC=DF, \angle BAC=\angle EDF$ – dados.
2. Há um ponto G do lado oposto de AC em B, tal que $\angle CAG \cong \angle D$ – postulado da construção do ângulo.
3. Há um ponto H de AG tal que $AH=DE$ – postulado da localização do ponto.
4. $AHC \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL – passos 1, 2 e 3.
5. $\triangle AHC \cong \triangle DEF$ – LAL
6. $\angle ABH \cong \angle AHB$ e $\angle HBC \cong \angle CHB$ - teorema do triângulo isósceles.
7. $\angle ABC \cong \angle AHC$ - postulado da adição de ângulos.
8. $ABC \leftrightarrow AHC$ é uma correspondência LAL – passos 1, 5 e 7.
9. $\triangle ABC \cong \triangle AHC$ - LAL
10. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ - passos 5 e 9.

Caso LAAo de congruência de triângulos:

Definição: Se um par de lados correspondentes são congruentes e dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência se chama uma correspondência LAAo.

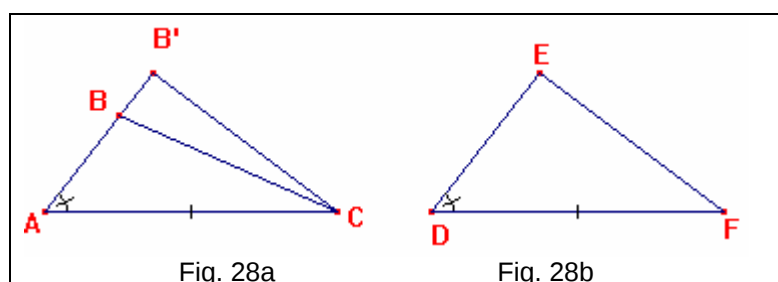
Dados os triângulos ABC e DEF. Se $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (Fig. 27a e Fig. 27b).



Demonstração: Há somente três possibilidades para AB e DE:

- (1) $AB=DE$;
- (2) $AB<DE$;
- (3) $AB>DE$.

Se o enunciado (1) é válido, então se deduz o teorema, porque, nesse caso, $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL. Demonstraremos que os enunciados (2) e (3) são impossíveis.



Suponhamos que o enunciado (2) é válido: $AB<DE$. Seja B' o ponto de AB tal que $AB' = DE$. Então, $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ em virtude do postulado LAL. Portanto $\angle AB'C \cong \angle DEF$ e, em consequência, $\angle ABC \cong \angle AB'C$. Isso é impossível, porque o teorema do ângulo externo nos diz que $\angle ABC > \angle AB'C$. De forma análoga demonstra-se que o enunciado (3) é impossível.

2.7. CONGRUÊNCIA E IGUALDADE

Ao estudar a congruência na perspectiva de Euclides, Clairaut, Legendre, Hadamard, Hilbert e Birkhoff, o vocábulo Congruência surge tardiamente. Euclides considerou a congruência como sendo uma proposição, enquanto que, Hilbert considerou como sendo parte de um grupo de axiomas. Em todos esses estudos as palavras "igualdade", "igual" apareceram em vários momentos,

enquanto que as palavras "congruência", "congruente" foram, algumas vezes, sendo incorporadas e diferenciadas das palavras anteriores, ao longo da evolução da Geometria, de forma sutil e tácita.

Em Euclides, o termo igual é utilizado para designar de forma intuitiva que um segmento AB é congruente ao segmento CD. Ele utilizou o termo AB é igual a CD, após deixar implícito o princípio de superposição. Clairaut utiliza o termo semelhante e igual para designar a congruência. Uma abordagem de forma cuidadosa é realizada no estudo de Hilbert (página 46 deste trabalho), quando apresenta o axioma 2 e acrescenta que, neste axioma, não é inteligível de imediato que "todo segmento é congruente a si mesmo" – princípio da identidade.

De acordo com a estrutura de Birkhoff, um exemplo de congruência e de igualdade é mostrado a seguir.

Teorema: Todo segmento é congruente a si mesmo.

Utiliza-se $\angle A \cong \angle B$ para indicar que $\angle A$ e $\angle B$ são congruentes.

Utiliza-se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ para indicar que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.

Assim,

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ significa que $AB=CD$.

$\angle A \cong \angle B$ significa que $m\angle A = m\angle B$.

Cada uma das igualdades da direita é uma igualdade entre números.

Cada uma das congruências da esquerda é uma congruência entre figuras geométricas.

Quando se escreve $=$ entre os nomes de figuras geométricas, quer se dizer que as figuras são exatamente as mesmas.

Exemplo: Na figura, é correto escrever que $\angle BAC = \angle EAD$, porque $\angle BAC$ e $\angle EAD$ são, não somente congruentes, senão exatamente o mesmo ângulo. De maneira análoga, $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são sempre o mesmo segmento e, por isso, é correto escrever, não somente $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ senão também $\overline{AB} = \overline{BA}$. Além disso, pode-se dizer que $\widehat{FAG} \cong \widehat{BAC}$ (ângulos opostos pelo vértice), mas $\widehat{FAG} \neq \widehat{BAC}$.

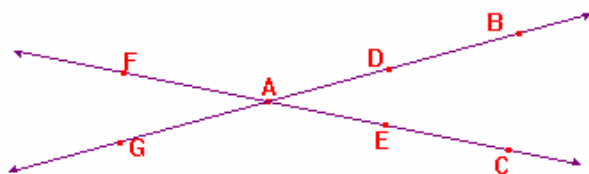


Fig. 29

Na linguagem dos conjuntos, dizer que os conjuntos A e B são iguais significa dizer que todo elemento de A é elemento de B e que todo elemento de B é elemento de A, por exemplo, dados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com as seguintes condições:

Sejam $a, b, c, k \in \mathfrak{R}_+$, $\overline{AB} = \{(x, y) \in \mathfrak{R}_+ / 1 \leq x \leq 2, \text{ com } y = 1\}$ (Fig. 30).
 $\overline{CD} = \{(x, y) \in \mathfrak{R}_+ / 3 \leq x \leq 4, \text{ com } y = 1\}$

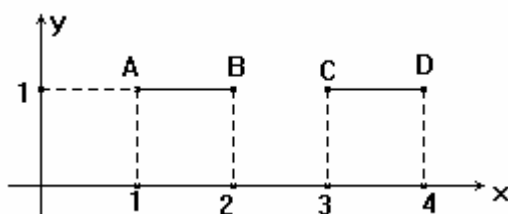


Fig. 30

- $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ pois os elementos de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são diferentes, mas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm medidas iguais: $m(\overline{AB}) = 1$ e $m(\overline{CD}) = 1$.

Um tratamento diferente ao da geometria clássica é dado com o estudo das transformações geométricas, em particular, as transformações isométricas, que serão apresentadas a seguir.

2.8. CONGRUÊNCIA VIA ISOMETRIAS

Com o desenvolvimento da Álgebra e o surgimento de novas geometrias como a geometria projetiva, a geometria analítica, as geometrias não-euclidianas, a Geometria foi estudada sob um ponto de vista algébrico. Essa nova concepção utiliza a estrutura de grupos¹ e é baseada nas pesquisas de Felix Klein (1849-1925) e Sophus Lie (1842–1899).

Klein, em 1872, apresentou o Programa de Erlangen na sua primeira aula na Universidade de Erlangen. Nessa aula, descreveu a geometria como "o

¹Um grupo consiste em um conjunto de elementos quaisquer e um conjunto de operações, obedecendo a um certo número de leis e regras prefixadas como postulados. Na matemática esses grupos constam, normalmente, de uma só operação e quatro postulados, que são: 1. o conjunto deve ser fechado com relação à operação dada; 2. tal operação deve ser associativa; 3. o conjunto deve conter o elemento neutro com respeito à dada operação; 4. cada elemento do conjunto deve ter um inverso com respeito à operação dada.

estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações" (Boyer, 1974, p.400). Desse modo, caracterizou e associou cada geometria existente a um grupo de transformações. Essa nova perspectiva fez com que houvesse grande impulso na Geometria, e que nos últimos anos tem sido dada ênfase o estudo das transformações nas escolas.

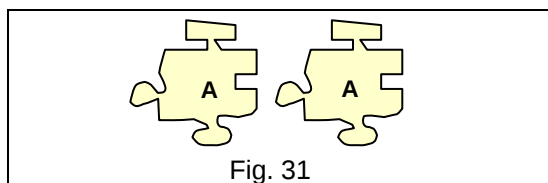
Para definir, por exemplo, a geometria métrica plana, deve-se considerar: um conjunto A (plano euclidiano) de pontos e o conjunto das isometrias que formam um grupo G relativamente à operação de composição de transformações. Da geometria métrica em A (plano euclidiano) de grupo principal G (isometrias) entende-se como sendo o conjunto de propriedades de A (congruência) invariantes para as transformações de G .

O axioma não mencionado por Euclides, sobre as figuras que permanecem invariantes quando deslocadas no plano, equivale às transformações de translação, rotação e reflexão de figuras que permanecem invariantes no plano. Essa Geometria por transformações utiliza como objetos geométricos os pontos, as retas, os planos e suas relações. A seguir, as definições e o estudo da congruência segundo as transformações isométricas.

Transformação do plano é definida como sendo uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo.

Transformação identidade é aquela pela qual a imagem de um ponto é o próprio ponto. Assim, $Id(P)=P$ para todo ponto P do plano.

Isometria do plano é uma transformação no plano F , tal que $P'Q'=PQ$ para todo par de pontos distintos P e Q do plano, onde $P'=F(P)$ e $Q'=F(Q)$. Em outras palavras, podemos dizer que F preserva distâncias entre pontos do plano. Além disso, pode-se afirmar que uma isometria conserva: a colinearidade de pontos, a ordem dos pontos numa reta, a medida dos ângulos, o paralelismo, os pontos médios, o perpendicularismo. Etimologicamente a palavra isometria vem do grego *isos*, que significa igual, e *metron* que significa medida. Por conseguinte, a isometria ou deslocamento, corresponde às transformações que conservam as medidas (tamanho) e a forma das figuras, isto é, as figuras continuam congruentes. Assim, duas figuras geométricas A e A' do plano são **congruentes** se existe uma isometria F do plano, tal que $F(A) = A'$. Esta definição se aplica a pares de figuras geométricas quaisquer do plano (Fig.31).

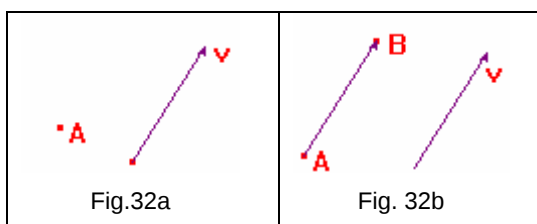


Duas figuras geométricas do plano são congruentes se e somente se estão relacionadas por uma *translação*, uma *rotação*, uma *reflexão* (*simetria axial*), ou uma *composição* dessas transformações. A simetria axial é muito importante, pois, qualquer isometria pode ser representada como resultado da composição de no máximo 3 reflexões em retas.

Translação

Uma translação pode ser entendida como um movimento de uma figura no espaço, tal que as posições final e inicial definam segmentos orientados² congruentes de mesmo sentido (eqüipolentes).

Dado o ponto A e a translação definida pelo segmento orientado $\vec{v}$, pode-se obter um outro ponto B tal que, $\vec{AB} = \vec{v}$ ($\vec{AB}$ é eqüipolente de $\vec{v}$).



De maneira formal, a translação é definida como: dado um vetor $\vec{a}$, chamamos translação de vetor $\vec{a}$ à transformação $T_a: \Pi \rightarrow \Pi$, tal que, $T_a(P) = P'$ se e somente se $\vec{PP'} = \vec{a}, \forall P \in \Pi$.

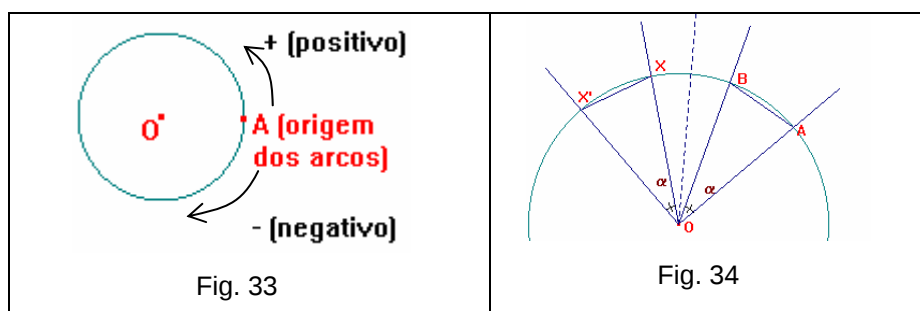
² De forma intuitiva, o segmento orientado é representado por flecha cuja ponta indica o seu sentido. De maneira formal, um segmento orientado é um par ordenado (A,B) de pontos do espaço. A é dito origem, B extremidade do segmento orientado, sendo $A \neq B$, (A,B) é diferente de (B,A). Quando os segmentos orientados são colocados em uma mesma classe de equivalência, eles possuem mesma direção, mesmo sentido e mesma medida.

Com a transformação translação, obtém-se as propriedades de congruência de triângulos. Por exemplo, dado um vetor $\vec{v}$ e um triângulo ABC, a imagem A'B'C', por uma translação do vetor $\vec{v}$, é congruente ao triângulo original, os lados permanecem paralelos. A distância entre os respectivos pontos dos triângulos ABC e A'B'C' são iguais ao comprimento (v) do vetor $\vec{v}$. A orientação (sentido horário ou anti-horário) e a ordem das imagens dos vértices A, B e C, ou quaisquer pontos não colineares do triângulo ABC, permanecem inalterados após a translação, ou seja, A', B', C' mantêm a ordem e a orientação dos vértices originais.

Rotação de centro O e ângulo α

A rotação em relação a um ponto e a um ângulo é uma transformação isométrica. Dado um ponto O e um ângulo orientado α , a rotação fixa o ponto O e, a cada ponto P do plano, distinto de O, associa um ponto P', de modo que o ângulo orientado POP' seja congruente a α e as medidas dos segmentos PO e P'O sejam iguais.

Fisicamente a rotação corresponde ao movimento realizado sobre uma circunferência com centro no centro de rotação, recorrendo ao arco cuja amplitude é igual ao ângulo de giro. Adota-se a rotação no sentido anti-horário como positivo e o sentido horário como negativo (Fig. 33 e Fig. 34).



Simetria

A simetria estudada de forma intuitiva pode ser compreendida, utilizando-se figuras planas ou objetos tridimensionais, espelhados ou refletidos em um espelho, ou mesmo, tomando-se figuras da natureza ou criada pelo homem para introduzir o eixo de simetria.

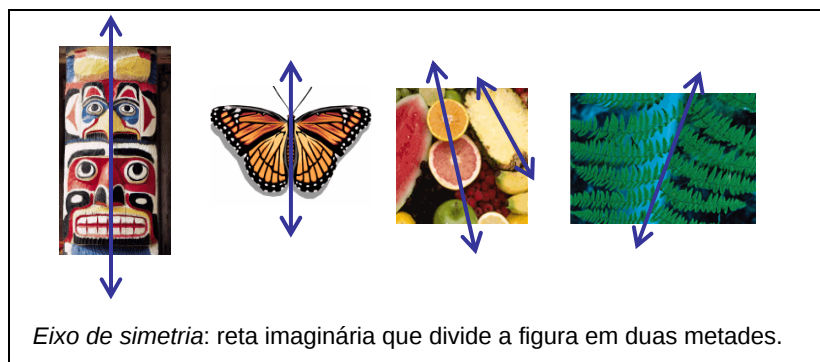
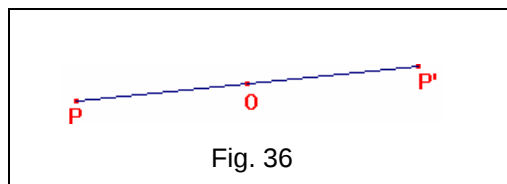


Fig. 35

Essas experimentações podem ser realizadas antes do estudo da simetria central e axial e suas propriedades.

Simetria Central

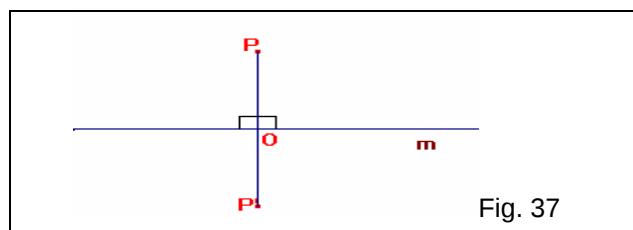
Uma reflexão em relação a um ponto O ou simetria central, é uma rotação de 180° (sentido positivo, anti-horário) em torno de um ponto O , ou seja, associa a cada ponto P do plano, com P distinto de O , o ponto P' tal que O é ponto médio do segmento PP' .



Toda simetria central é uma isometria no plano.

Simetria Axial

Uma reflexão na reta r ou simetria axial (eixo) ou simetria em relação a uma reta r , é uma aplicação que fixa todos os pontos de r e associa a cada ponto P do plano, com P não pertencente a r , o ponto P' tal que r é uma reta mediatriz do segmento PP' .



Composição de transformações

Toda isometria do plano é uma composição de reflexões segundo retas do plano. Assim, a congruência de figuras pode ser obtida, também, por uma composição de reflexões. As figuras a seguir, ilustram algumas dessas composições.

A translação como o produto de duas reflexões:

- E3 foi obtido pela reflexão de E1 em relação à reta s. Depois, E2 foi obtido pela reflexão de E3 em relação à reta r (Fig. 38a).

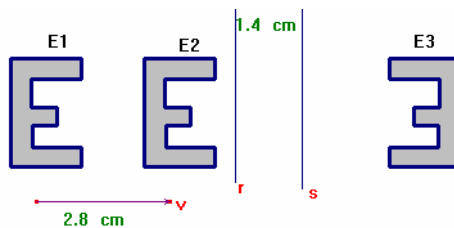


Fig. 38a

- Do mesmo modo E2 pode ser obtido utilizando-se a translação de E1, segundo o vetor v (Fig. 38b).

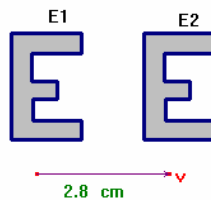


Fig. 38b

- Distância entre as retas r e s é metade da distância do vetor v.

Rotação como produto de duas reflexões:

- E3 é obtido pela reflexão de E1 em relação a reta r, obtendo E2. Em seguida, E2 é refletido em s, resultando E3 (Fig. 39a).

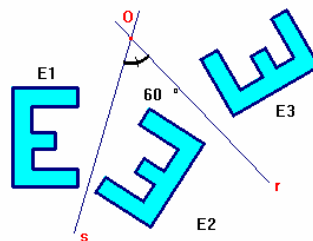
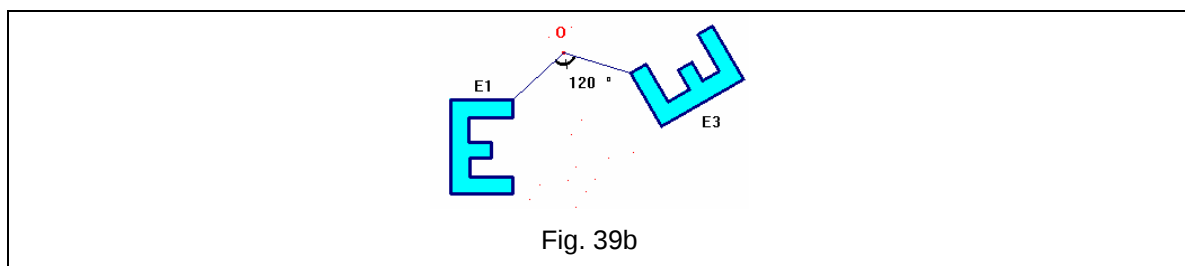


Fig. 39a

- Da mesma forma E3 pode ser obtido pela rotação de E1, em torno do ponto O, cujo ângulo é o dobro de $\angle rOs$ (Fig. 39b).



Produto de uma translação por uma reflexão (reflexão deslissante):

- E3 é obtido por meio de uma translação, segundo o vetor v , resultando E2, em seguida uma reflexão de E2 em relação a reta r (Fig. 40a).

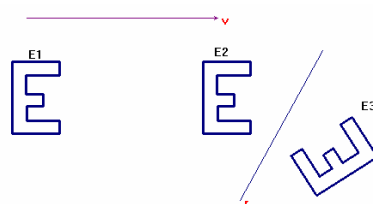


Fig. 40a

- Da mesma forma, pode ser representada como produto de três reflexões (Fig. 40b).

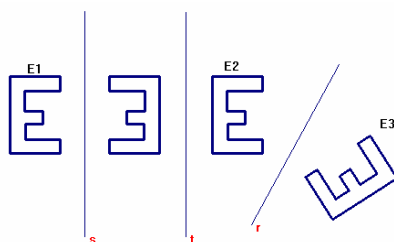


Fig. 40b

Esses resultados também podem ser explorados utilizando-se comandos de software específicos como o Cabri-géomètre.

2.9. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Até agora, este trabalho apresentou as diferentes perspectivas e contribuições de Euclides, Clairaut, Legendre, Hadamard, Hilbert e Birkhoff e Klein, no desenvolvimento da geometria, em particular na apresentação do conceito de congruência. Suas obras influenciaram na educação, através dos currículos escolares, livros didáticos e práticas pedagógicas.

Atualmente, o professor, ao adotar um livro didático estará diante da influência ou característica dessas obras. É necessária atenção para a escolha de um livro didático, pois este pode, por exemplo, apresentar na geometria, de forma contextualizada ou não-contextualizada, um estudo da prova e

demonstração, de maneira rigorosa próxima ao apresentado no sistema axiomático de Euclides e Hilbert ou de Legendre, ou de um estudo menos rigoroso, voltado a uma educação mais utilitária como Clairaut, ou utilizando as transformações, como Klein e Hadamard, ou ainda, dando ênfase a estrutura numérica como a de Birkhoff. Essa escolha dependerá da intenção do professor, da escola e da comunidade em relação aos seus alunos, porque influenciará no ensino e aprendizagem dos mesmos. Por isso, o tema congruência será analisado em três livros didáticos, recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), coordenado pela Secretaria de Educação Básica, que desde 1996 tem avaliado os livros didáticos implementados nas escolas públicas brasileiras. Serão consideradas, entre outras, as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e as propostas pedagógicas dos três livros da 7ª série do Ensino Fundamental.

No que se refere ao desenvolvimento do conceito de congruência, os parâmetros curriculares nacionais orientam a exploração de situações de aprendizagem no concreto e no dedutivo que levem o aluno a produzir e analisar transformações de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes.

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a **construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias)**. (PCN, 1998, p.86, grifo nosso)

Segundo o PCN as atividades que envolvem transformações devem ser privilegiadas, pois permitem o desenvolvimento dos conceitos geométricos de forma significativa, além de obter o caráter dinâmico. Além dos conteúdos e objetivos, o PCN orienta o professor a propor para seus alunos, atividades concretas articuladas às situações dedutivas.

Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é

desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos. (PCN, 1998, p.87).

As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: **o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas**. (PCN, 1998, p.126, grifo nosso).

Em 1989, a National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicou, entre outras orientações, algumas propostas para o ensino de geometria, como: abordagem da geometria por intermédio das coordenadas e das transformações geométricas, desenvolvimento de curtas seqüências de teoremas (organização local proposta por Freudenthal), argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos, explorações em computador de figuras bidimensionais e tridimensionais.

Na análise a seguir, será retomada a organização praxeológica de Chevallard (1988), Ressalta as tarefas propostas, as técnicas, tecnologias e discursos teóricos envolvidos no desenvolvimento do tema congruência, bem como a organização dos conteúdos.

Livro 1: Título: Educação Matemática
Autores: Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo
Série: 7ª série
Editora: Atual – 2001

O livro da 7ª série está dividido em 20 módulos. Cada módulo está subdividido nas seções: para começo de conversa; resolvendo problemas; é preciso saber; é preciso saber fazer; para saber mais; mostre que você sabe. No final do livro, os autores apresentam propostas para projetos de trabalhos, banco de imagens com legendas e proposta de trabalho interdisciplinar, questões objetivas relacionadas a cada módulo.

A proposta do livro é ajudar os alunos a perceber o caráter prático da matemática e contribuir com o desenvolvimento do raciocínio lógico-

matemático. Estabelecida de acordo com o trabalho proposto por Machado em que o conhecimento não deve ser tratado linearmente, mas como uma rede de significados. O livro traz propostas de redes conceituais para auxiliar o professor. No caso da congruência, os autores apresentam o seguinte esquema para o capítulo 18:

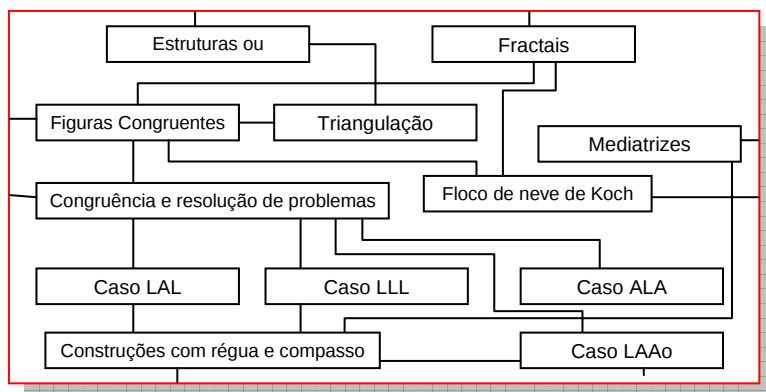


Fig. 41

O módulo 18 inicia-se com um texto intitulado **"Sobreposição de figuras"**. Apresenta o caráter prático da matemática, no caso a triangulação de estruturas que sustentam construções como prédios, casas, pavilhões, etc. Em seguida, é apresentada a seção em que o aluno, por si mesmo, pode deduzir o significado de congruência. Isso é realizado por meio de atividades em que o aluno deverá manipular instrumentos, observar e perceber regularidades para, então, concluir o que são figuras congruentes e suas propriedades. A institucionalização da congruência ocorre na seção "é preciso saber". Os casos de congruência de triângulos são apresentados de forma que os alunos possam aceitá-los, em virtude das atividades anteriores que propõem ao aluno comparar, visualizar e perceber a congruência de figuras.

A seguir a análise de questões das seções: "é preciso fazer" e "mostre que você sabe".

Situação 1: Questão 9 da página 211:

Reproduza em seu caderno o triângulo DEF ao lado.
Em seguida:

- obtenha o simétrico do triângulo DEF em relação ao vértice E.
- mostre a congruência dos triângulos, utilizando os casos de congruência.

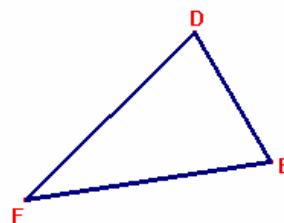


Fig. 42

Segundo a organização praxeológica de Chevallard, no **item a** ocorre:

- **Tarefa:** Construir o simétrico de DEF em relação ao vértice E.
- **Técnica:** o aluno poderá, por exemplo, utilizar um papel transparente para copiar DEF ou utilizar régua e compasso ou transferidor, para construir DEF. Em seguida, construir ED'F', utilizando as medidas dos lados e ângulos do triângulo. Prolongando os lados DE e FE com medidas de cada um dos lados de DE e FE, respectivamente, obtém-se:

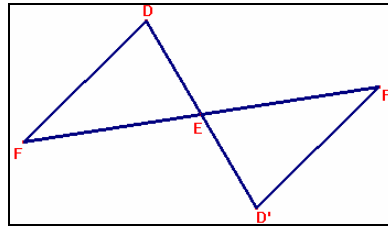


Fig. 43

- **Discurso teórico-tecnológico:** Transformação isométrica relativa a simetria em relação ao ponto E.

Nesta questão, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G1, pois, trata-se de uma construção.

Análise do Item b:

- **Tarefa:** Justificar a congruência dos triângulos DEF e ED'F'.
- **Técnica:** Análise da construção realizada na questão a.
- **Discurso teórico tecnológico:** transformação isométrica, casos de congruência de triângulos.

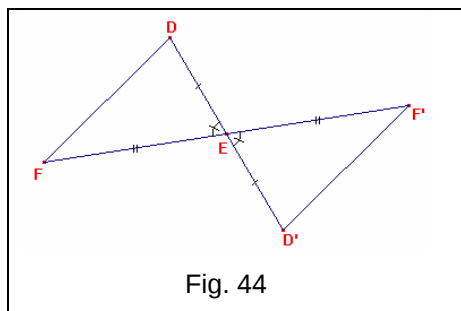


Fig. 44

Como $DE \cong D'E$, $EF \cong EF'$ e $\hat{D}EF \cong \hat{D'EF'}$, pelo caso LAL os triângulos DEF e ED'F' são congruentes.

Na questão b, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G2, pois a justificativa deverá ser conduzida pela organização local dos casos de congruências de triângulos.

Situação 2: Questão 1 da página 212

Nas figuras seguintes, verifique, sem medir, se os triângulos ABC e ACD são congruentes. Para isso utilize os casos de congruência.

a) Sabe-se que as medidas dos ângulos $\widehat{DAC}$ e $\widehat{ACB}$ são iguais.

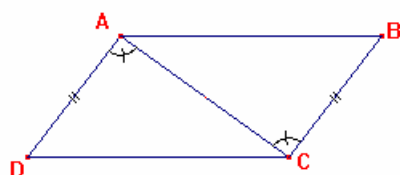


Fig. 45

b) Sabe-se que as medidas $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ são iguais.

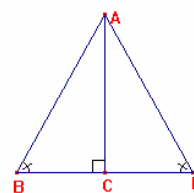


Fig. 46

Itens a e b:

- **Tarefa:** Verificar a congruência de triângulos.
- **Técnica:** Identificar os elementos congruentes dos triângulos.
- **Discurso Teórico-Tecnológico:** Casos de congruência de triângulos.

No item a: Com observação o aluno poderá verificar que AC é comum, $\widehat{DAC} \cong \widehat{ACB}$ (fornecido), e $AD \cong BC$ (fornecido) – caso LAL.

No item b: pelo caso LAAo, temos: AC – lado comum, $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$ (fornecido), $\widehat{ACB} \cong \widehat{ACD}$ (ângulos suplementares)

Esta atividade trata de uma aplicação direta dos casos de congruência, cabendo ao aluno adequar os elementos (ângulos e lados congruentes) fornecidos com os elementos dos casos de congruência.

Situação 3: Questão 4 da página 213

Mostre, por meio da congruência de triângulos, que o ponto A da mediatriz do segmento PQ está à mesma distância de P e de Q.

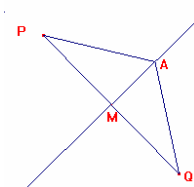


Fig. 47

- **Tarefa:** Justificar que PA tem a mesma medida que QA.

- **Técnica:** obtenção dos elementos congruentes dos triângulos APM e QAM pela análise da representação da figura dada.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** Mediatriz, ponto médio, casos de congruência, retas perpendiculares.

A análise da figura deverá levar o aluno a justificar que $PA \cong QA$, usando o caso LAL, pois, $PM \cong QM$, $\hat{QMA} \cong \hat{PMA}$, AM é lado comum.

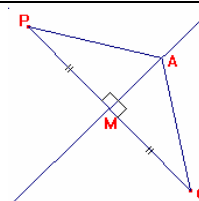


Fig. 48

Essa questão apresenta a representação figural. Exige que o aluno saiba que a mediatriz é perpendicular ao segmento e intercepta o no ponto médio e, que perceba AM como sendo lado comum aos dois triângulos. Nessa questão, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G2.

COMENTÁRIO SOBRE A CONGRUÊNCIA DO LIVRO 1

Reconhecemos que, em geral, a ocorrência do caso LAL é a mais comum entre os casos de congruência. Fato que ocorre amplamente nesse livro, contudo, seria interessante se os autores explorassem também, outros casos de congruência de triângulos. Por exemplo, não há nenhuma atividade que recorre, unicamente, nos casos LLL, ALA. Conclui-se que a abordagem desse livro é atual; os assuntos estão de acordo com os PCN's e de acordo com a proposta feita pelos autores do livro, pois recorre a utilização das transformações isométricas para desenvolver o conceito de congruência, utilizando materiais no concreto. Nesse livro didático, podem-se encontrar várias situações reais de contextualização, problemas envolvendo organizações conceituais locais e conhecimentos prévios. O aluno tem a oportunidade de construir seu conhecimento através de atividades que exploram as construções, percepções, representações e concepções dos conceitos a serem estudados (Machado, 1995).

Livro 2: Título: Matemática é tudo
Autores: Luiz Roberto Dante
Série: 7ª série
Editora: Atual – 2002

Segundo o autor, o livro traz um número reduzido de explicações, sendo a teoria construída nas atividades desenvolvidas pelos alunos. Apresenta o objetivo de auxiliar na produção de significados, priorizar atividades para aluno, estimulando a reflexão, a experimentação e a resolução de problemas.

O livro é dividido em 12 capítulos. Cada capítulo contém as seções: trocando idéias; você sabia que...; oficina de matemática; atividades, desafio; revendo o que aprendemos; projeto de equipe; redação; revisão cumulativa; para ler, pensar e divertir-se. Em geral os capítulos são introduzidos com uma pergunta aos alunos para reflexão e análise de uma situação ligada ao conteúdo a ser desenvolvido. O diálogo é realizado entre uma professora e seus alunos. Na orientação dos conteúdos específicos, o autor expõe a problemática da passagem de atividades manipulativas para as dedutivas. Propõe deduções e demonstrações locais. A linguagem simbólica é bastante explorada nos exercícios. Em vários momentos, procura trazer formas de como se deve demonstrar utilizando propriedades e teoremas já estudados.

O estudo da congruência de figuras é realizado no capítulo 6 e tem como título: Propriedades de figuras geométricas. Nesse capítulo, a professora desafia os alunos perguntando: *"como são as medidas de dois ângulos opostos pelo vértice?"*, e apresenta três resoluções: uma utilizando dobradura, outra com uso de transferidor e, por último, a demonstração usando o rigor matemático. Essas resoluções constituem as validações situadas nos níveis G0, G1 e G2 de Parzysz (2001). Após as demonstrações, são propostos exercícios do tipo: calcule as medidas ou determine os ângulos, construa a figura e compare com os colegas. Essa sequência prossegue no desenvolvimento de atividades e conteúdos, ou seja, pergunta, resolução de forma empírica e apresentação de como demonstrar formalmente e finaliza com exercícios de vários níveis.

No caso do estudo das figuras congruentes, que é apresentado na página 139, não se explora a associação das transformações isométricas com a congruência de figuras. A única menção citada está em relação a seguinte situação e apresentação de figuras: *"Imagine duas figuras tal que seja possível*

transportar uma sobre a outra de modo que coincidam. Dizemos que essas figuras são congruentes". Nesse caso, as figuras são representadas apenas por segmentos e ângulos congruentes. Não há nenhuma representação de objetos ou fotos que lembre algo da realidade, o dia-a-dia ou algo mais significativo para o aluno.

Na congruência de triângulos, são apresentados exemplos de triângulos com os elementos que garantem a congruência (LAL, LLL, ALA, LAAo) e os que não garantem a congruência (AAA, LLA). Pede-se para construir, com régua e transferidor, e comparar triângulos a partir de medidas fornecidas e somente dos casos de congruência. A seguir, apresentaremos a análise de atividades sobre congruência de figuras.

Situação 1: Exercício 31, página 140

Os triângulos ABC e EFG representados ao lado são congruentes. Determine em seu caderno as medidas assinaladas por letras.

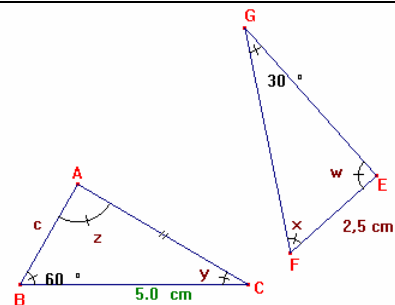


Fig. 49

- **Tarefa:** determinar as medidas relativas aos elementos congruentes de dois triângulos.
- **Técnica:** Comparar os elementos fornecidos com os elementos dos casos de congruência ou por construção.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , congruência de figuras.

O aluno deverá responder: $c=2,5\text{cm}$, $e=5\text{cm}$, $x=60^\circ$, $y=30^\circ$, $z=w=90^\circ=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)$. Nessa atividade o aluno deverá utilizar uma estratégia situada do nível G1 para G2, pois ocorre a comparação entre as figuras de modo que os valores c , x e y basta o aluno observar, enquanto que para determinar z e w é necessário uso de propriedade decorrente de experimento ou aceitação anterior.

Situação 2: Exercício 36, itens c, d, e da página 143

Verifique em cada item abaixo se é possível afirmar que os triângulos são congruentes. Em caso positivo escreva qual o caso de congruência que garante a congruência e quais os

demais elementos congruentes.

- c) Triângulo PQR tem ângulos 75° , 90° e 15° . Triângulo XYZ tem ângulos 75° , 90° e 15° .
- d) Os lados do triângulo RSP medem RS:8cm, RP:10cm, SP: 13cm. Os lados do triângulo EFG medem EG:10cm, FG:13cm e EF: 8cm.
- e)

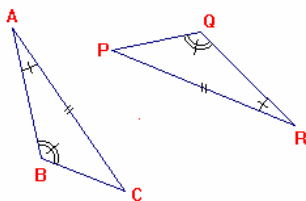


Fig. 50

Análise da situação 2, itens **c**, **d** e **e** :

- **Tarefa:** 1) Verificar se os triângulos são congruentes usando os casos de congruência; 2) se forem congruentes, justificar; determinar os demais elementos congruentes.
- **Técnica:** Comparar os elementos fornecidos com os elementos dos casos de congruência ou por construção.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** Casos de congruência de triângulos.

Não há no próprio exercício o estímulo ao aluno para fazer construções das figuras dos itens c e d. Há somente uma observação ao professor para que ele oriente os alunos a fazerem um esboço para melhor visualizar cada situação. Não é solicitado que o aluno construa com os dados fornecidos utilizando instrumentos adequados.

Nesta questão, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G1. O aluno poderá comparar os elementos que fazem parte dos casos de congruência com os elementos fornecidos no exercício, que poderá ser ou não esboçados. No item **c**, o aluno deverá chegar a conclusão de que com os dados fornecidos não se pode garantir a congruência e os lados podem não ser congruentes. Em **d**, o aluno deverá justificar que os triângulos são congruentes, usando o caso LLL, pois $RS \cong EF$, $RP \cong EG$, $SP \cong FG$. Os demais elementos serão $\hat{R} \cong \hat{E}$, $\hat{S} \cong \hat{F}$, $\hat{P} \cong \hat{G}$. O item **e** deverá se justificada usando o caso LAAo, com $AC \cong PR$, $\hat{A} \cong \hat{R}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$, e os demais elementos $\hat{C} \cong \hat{P}$, $AB \cong RQ$, $BC \cong PQ$.

Situação 3: Exercício 40, página 145.

Use um dos casos de congruência de triângulos e demonstre esta afirmação: "As diagonais de um retângulo são congruentes".

- **Tarefa:** Demonstrar propriedade do retângulo.
- **Técnica:** Utilizar propriedades anteriores.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** definição de quadriláteros, congruência de figuras.

Nesta questão, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G2, pois a validação será por meio de propriedades anteriormente validadas.

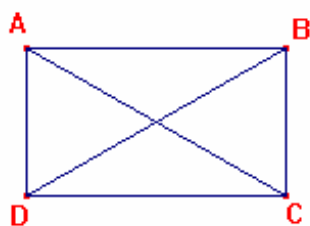


Fig. 51

Sabendo que os ângulos internos de um retângulo são todos 90° , o aluno poderá demonstrar usando o caso LAL : $AD \cong BC$ (lados opostos de um retângulo); $\hat{D} \cong \hat{C}$ (ângulos retos) ; DC (lado comum).

COMENTÁRIO SOBRE A CONGRUÊNCIA DO LIVRO 2

Com a análise conclui-se que o autor busca construir o pensamento matemático, utilizando, na maioria das vezes objetos teóricos, exemplificando como demonstrar através do uso de propriedades derivadas de organização local. São, praticamente ausentes, propostas de atividades empíricas e manipulativas com objetos de natureza física, características do nível G0 de Parzysz (2001); ocorre a transição do nível G1 para G2, pois propõe atividades de nível G1, que utiliza régua e transferidor, e as utiliza para preparar o aluno para a construção de novas propriedades e atividades de nível G2. A linguagem simbólica e termos matemáticos são extremamente presentes em todo o livro.

Os exercícios relativos à congruência de triângulos são mais voltados para o aluno analisar se ocorre ou não um dos casos de congruência. Não é proposto nenhum caso ALA e o caso que mais aparece é o LAL.

Livro 3: Título: Matemática Pensar e Descobrir
Autores: Giovanni & Giovanni Junior
Série: 7ª série
Editora: Atual – 2000

O livro apresenta 8 unidades. Cada unidade inicia com uma leitura sobre o assunto a ser estudado ou com a seção "Pense e descubra" que se refere a problemas. As demais divisões são: "Vamos resolver" apresenta exercícios sobre os conceitos desenvolvidos; "Auto-avaliação" tem o objetivo de proporcionar ao aluno a medir o grau de aproveitamento nos estudos; "Tópicos de Geometria"; Gráficos e tabelas" e "Noções de Estatística", "Saiba que". Os conteúdos de geometria são tratados como tópicos a partir da unidade 3, dessa forma, a congruência de figuras é tratada na unidade 6. No início desse capítulo, o autor apresenta a idéia de congruência de figuras a partir da sobreposição e coincidência entre duas figuras analisadas e define que "dois polígonos são congruentes quando possuem os lados respectivamente congruentes e os ângulos respectivamente congruentes".

Em seguida, o autor apresenta os casos de congruência sem demonstração ou proposta de atividades que levem os alunos a concepção sobre o assunto. Faz aplicação dos casos no estudo de triângulos retângulos, isósceles e equiláteros.

Situação 1: Exercício 96, página

239

Observe os triângulos e responda:

- a) Eles são congruentes?
- b) Qual o caso de congruência?
- c) Quais as medidas de x e y ?

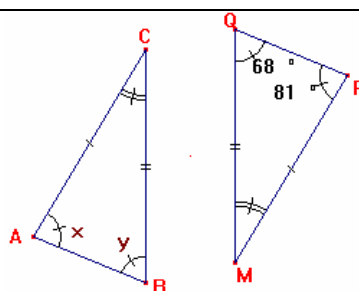


Fig. 52

- **Tarefa:** Observar e responder se são congruentes segundo os quatro casos.
- **Técnica:** Comparar os dados fornecidos.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** casos congruência de triângulos.

Esta atividade é de observação e comparação dos dados fornecidos e aplicação direta do caso LAL, portanto, segundo Parzysz é de nível G2, pois utiliza os casos de congruência para decidir.

Situação 2: Exercício 100, página 239

Na figura, temos:

- $EF \parallel DC \parallel AB$
- $EF \cong DC$
- D e C são pontos médios respectivamente de AG e BG
- $DC = AB/2$

Nessas condições, determine o perímetro do triângulo AGB.

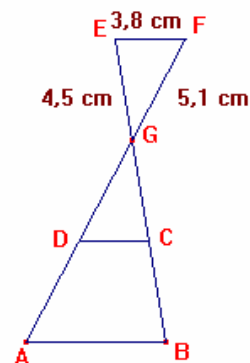


Fig. 53

- **Tarefa:** Determinar o perímetro do triângulo AGB.
- **Técnica:** Obter os elementos congruentes dos triângulos CDG e EFG.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** ponto médio, reta transversal a duas retas paralelas, casos de congruência, ângulos opostos pelo vértice.

Espera-se que o aluno responda:

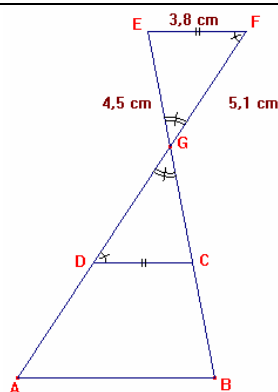


Fig. 54

O perímetro do triângulo AGB é 26,8 cm, pois os triângulos CDG e EFG são congruentes pelo caso LAAo

($\hat{C} \hat{G} D \cong \hat{E} \hat{G} F$ - opostos pelo vértice,

$CD \cong EF$ - dado, $\hat{E} \hat{F} G \cong \hat{C} \hat{D} G$ - internos alternos).

Nesta atividade, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G2, pois o aluno deverá resgatar conhecimentos, anteriormente assimilados sobre ângulos e retas.

Situação 3: Exercício 111, página 245

Na figura, AM é mediana relativa ao lado BC. Sendo $AB \cong AC$, determine as medidas x, y, z.

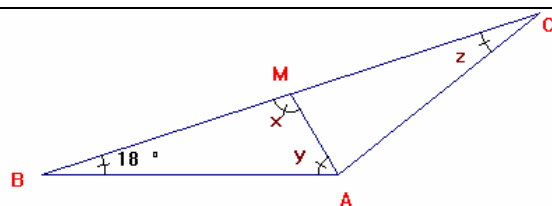


Fig. 55

- **Tarefa:** Determinar as medidas de x , y e z .
- **Técnica:** Obter os elementos congruentes dos triângulos ABM e ACM.
- **Discurso Teórico-tecnológico:** reta perpendicular, mediana, ponto médio, casos de congruência, soma dos ângulos internos do triângulo.

Espera-se que o aluno responda que $x = 90^\circ$, pois é o ângulo formado pelo lado BC com a sua mediana; $y = 72^\circ$, pois $y = 180 - (90 + 18)$. O valor de z é 18° pois, os triângulos ABM e ACM são congruentes pelo caso LLL ($MA \cong MA$ – lado comum; $BM \cong CM$ – M é ponto médio; $AB \cong AC$ – dado fornecido). Neste exercício, o aluno deverá utilizar uma estratégia situada no nível G2, pois o aluno deverá obter alguns elementos a partir de outros ou que já foram aceitos por uma organização local.

COMENTÁRIO SOBRE A CONGRUÊNCIA DO LIVRO 3

O autor apresenta problemas dos casos de congruência, posicionando os triângulos congruentes de forma diversificada, fazendo com que o aluno desperte sua percepção e comparação, para a resolução dos problemas, mas não há atividades de construção com régua e transferidor para que o aluno possa representar objetos bidimensionais.

As atividades de congruência focam a verificação dos ângulos e lados congruentes de dois triângulos. Há um exercício para provar que duas figuras são congruentes, usando um dos casos de congruência. Não aparece o caso LAAo, e há ocorrência maior dos casos LAL e ALA.

RESUMO E ANÁLISE DOS TRÊS LIVROS DIDÁTICOS

De modo geral, pode-se perceber a influência dos estudos dos matemáticos citados anteriormente nos três livros didáticos, com relação ao desenvolvimento e ao tratamento dado às provas e demonstrações do tema congruência e dos casos de congruência de triângulos. A apresentação desses assuntos é tratada de forma mais contemporânea nos três livros, através de uma organização local ou aceitando diretamente como verdadeiros os casos de congruência, para auxiliar na apresentação de novas linguagens e termos matemáticos.

Os três livros analisados apresentam características diferenciadas. O primeiro, "Educação Matemática", trabalha a congruência de figuras e de

triângulos utilizando as transformações geométricas. As atividades empíricas e de manipulação são valorizadas, fazendo com que o aluno construa o conceito de congruência pelas experiências propostas. Não há rigor no tratamento matemático e os exercícios propostos são para justificar com linguagem natural ou construir triângulos congruentes.

O livro "Matemática é tudo" não utiliza a linguagem das transformações isométricas para desenvolver o tema congruência. Os casos de congruência são desenvolvidos com a construção de triângulos, utilizando-se régua e transferidor. Destaca os enunciados das propriedades ou teoremas a serem demonstrados, e o rigor faz parte na apresentação dos conteúdos, na utilização dos termos e símbolos matemáticos e em alguns exercícios que se pede para demonstrar. Conceitos estudados anteriormente são utilizados nas atividades sobre a congruência.

O terceiro livro analisado, "Matemática, pensar e descobrir" tem destaque nos exercícios diversificados, isto é, contextualizado e também utilizando objetos matemáticos. A apresentação dos casos de congruência é de forma direta, sem proposta de atividades empíricas ou de construção. Não há referência às transformações isométricas, mas sobre a sobreposição e coincidência de lados e ângulos de polígonos para a introdução do estudo da congruência.

De modo geral, as tarefas solicitadas nos livros ajudam o aluno na compreensão do conceito de congruência, seja via transformação ou por construção, pois não se limitam às listas de exercícios com um só tipo de abordagem, por exemplo, vários exercícios para achar o caso de congruência, utilizando somente pares de triângulos congruentes. Os livros trazem atividades para justificar, construir, verificar e provar, favorecendo o emprego de técnicas diversificadas. Os três livros resgatam outros conceitos (conforme discurso teórico das atividades analisadas). O grau de formalidade é diferenciado nos livros e o rigor se faz mais presente no segundo livro.

CAPÍTULO 3

SUJEITOS, MÉTODO E MATERIAL

3.1. CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS

Os sujeitos que participaram dessa pesquisa foram alunos regularmente matriculados na 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de São Paulo. Esta escola, situada na parte central do município, oferece somente o curso de Ensino Médio e recebe anualmente os alunos oriundos das diversas escolas da cidade. Dessa forma, cada sala formada apresenta alunos em diferentes níveis de aprendizagem, grande heterogeneidade em termos de hábitos e comportamentos oriundos de suas escolas de origem. Isso se torna um desafio para o professor que deve trabalhar essas diferenças.

Inicialmente, foi feito um convite (anexo 8), com formato de curso, a alunos da 1ª série do Ensino Médio, período matutino, dos quais, 21 se inscreveram, fazendo com que o curso fosse dividido em dois momentos. O primeiro, no mês de março de 2006 com 14 participantes, e o restante dos alunos ficaram para um segundo momento, programado para o mês de novembro do mesmo ano. Serão analisadas somente as atividades do primeiro grupo constituído por 14 alunos.

Seguindo a ordem de inscrição, a seqüência foi composta por 14 alunos inscritos no curso, mas efetivamente, 13 alunos participaram das atividades. A idade desses alunos era de 14 a 16 anos. A seqüência foi realizada no período da tarde, conforme os dias e horários determinados no convite.

3.2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa resgata a idéia de organização local, proposta por Freudenthal (1973), e tem por objetivo revisitar o tema congruência de figuras. Procurará responder às seguintes questões:

- ***Em que medida o processo de transição do concreto para o espaço-gráfico contribui para a apropriação do conceito de congruência?***
- ***E em que medida esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo?***

Para responder a essas perguntas uma seqüência de atividades será elaborada e aplicada a alunos da 1ª série do Ensino Médio.

A pesquisa contempla um estudo teórico e experimental, o que favorece a utilização de elementos da metodologia da Engenharia Didática, proposta por Artigue na década de 1980. Segundo esta pesquisadora,

A Engenharia Didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino. (Artigue, 1988, p.285-286).

Assim, para responder as questões de pesquisa será utilizada a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática. A prática pedagógica e os sujeitos da pesquisa farão parte da dimensão experimental a ser realizada em sala de aula. Integradas a elas, as análises dos resultados experimentais e as investigações teóricas farão parte da dimensão teórica, caracterizando esta metodologia de pesquisa.

A Engenharia Didática é constituída de quatro fases de execução: análises preliminares, concepção e análise a priori; aplicação da seqüência didática e a análise a posteriori. Essas fases compõem as dimensões teórica e experimental.

A primeira fase, as análises preliminares, apóia-se na fundamentação teórica, num estudo histórico, na análise dos programas de livros didáticos e na concepção de alunos sobre o tema proposto. Nesta pesquisa, as análises preliminares serão constituídas pelos conhecimentos matemáticos e didáticos adquiridos no estudo da congruência de figuras e da análise de três livros didáticos, relativos ao 4º ciclo do Ensino Fundamental.

A segunda fase, relativa à concepção e análise a priori das atividades, é determinada por um número de variáveis que podem ser globais ou locais. As variáveis globais ou macro-didáticas dizem respeito à organização global da engenharia, enquanto que as locais ou micro-didáticas, referem-se à organização

de uma seção ou de uma fase, objeto dessa pesquisa. Nessa fase, objetiva-se determinar de que maneira as variáveis escolhidas permitem controlar o comportamento dos alunos e o sentido desses comportamentos, através da relação do conteúdo a ser estudado com as atividades da seqüência, visando à apreensão dos conceitos por parte dos alunos.

A fase da experimentação é caracterizada pela aplicação da seqüência a um grupo de alunos. É uma fase muito importante, pois a atenção durante essa fase é imprescindível para obtenção do maior número de informações que poderão contribuir para responder a questão de pesquisa. Finalmente será feita a análise a posteriori que consiste, na interpretação dos dados colhidos na experimentação, nas observações e produções dos alunos durante as atividades da seqüência de ensino. Da confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori obter-se-ão elementos para validar ou não as questões de pesquisa.

ORGANIZAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

A seqüência de ensino foi realizada no período da tarde, conforme os dias e horários determinados no convite feito aos alunos. Uma dupla foi acompanhada por um observador, sendo que sua tarefa foi de anotar diálogos, materiais utilizados e perguntas realizadas. Além das anotações, os diálogos da dupla foram gravados. Ao término de cada sessão, cada dupla respondeu a um questionário entregue no início da sessão. Esses dados foram recolhidos pela pesquisadora para serem utilizados nas análises a posteriori e confrontados com as análises a priori.

O curso foi dividido em duas partes. A primeira parte (anexo 10) destinou-se em despertar o interesse dos participantes, em fazer com que estes se familiarizassem como software Cabri-Géomètre e tivessem contato com as propriedades e relações entre pontos, retas, retas e pontos. Salienta-se que esse momento objetiva, apenas a familiarização, não fazendo parte das análises da seqüência. A segunda parte foi destinada à aplicação da seqüência de ensino, foi analisada segundo a metodologia da Engenharia Didática. O número de horas foi distribuído conforme descrito a seguir:

- **1a Parte - Curso de Cabri-Géomètre II:** 12 horas
 - o 3 encontros de 2 horas: dias: 6, 7 e 10 de março de 2006.
 - o 2 encontros de 3 horas: dias: 13 e 14 de março de 2006.
- **2a Parte – Geometria: Estudo da Congruência:** 12 horas (Seqüência de ensino)
 - o 4 encontros 3 horas: dias: 17, 20, 21 e 24 de março de 2006.

Na parte 1, foi estabelecido o contrato didático com os alunos: definição dos horários, uso dos materiais nas atividades (materiais fornecidos aos alunos), organização em duplas e esclarecimento sobre o objetivo do curso, que consistia em explorar a congruência com o Cabri e atividades manipulativas levando a uma compreensão do assunto. Ainda nessa etapa, introduzimos o Cabri-Géomètre aos alunos. As transformações geométricas de rotação, translação e reflexão foram trabalhadas com os alunos (vide anexo 10).

Na parte 2, ocorreu a aplicação da seqüência de ensino, que foi dividida em 3 blocos: o Bloco 1, destinado a utilização de material concreto para o estudo da congruência de figuras; o Bloco 2 que contou com a utilização do Cabri para o estudo da congruência de figuras por meio das transformações e o uso da régua e do transferidor; e finalizando, o Bloco 3 envolveu a prova e demonstração em problemas de congruência de triângulos.

A seqüência foi realizada na sala de informática da escola e em sala de aula. Ocorreram imprevistos, com relação a alguns alunos que faltaram no segundo encontro. Nesse caso, para os que faltaram, aplicamos a atividade num outro horário, anterior ao terceiro encontro. Os grupos formados receberam a numeração de 1 a 6 e as iniciais dos nomes dos alunos foram utilizadas para identificá-los. Em virtude de uma desistência, um dos grupos ficou com três componentes. Abaixo, os seis grupos formados.



Fig. 56a



Fig. 56b

3.3. MATERIAL

A seqüência de ensino foi dividida em três blocos. Em cada bloco, foi solicitado aos alunos que respondessem questões relativas às atividades realizadas. Estas questões e os procedimentos adotados pelos alunos durante a realização das atividades, foram analisadas segundo a metodologia da Engenharia Didática, fundamentadas nos trabalhos de Parzysz, Machado, Freudenthal, Balacheff e nos resultados de trabalhos de alguns pesquisadores, citados na revisão bibliográfica deste trabalho.

O bloco 1 contemplou atividades do nível G0 e G1 do modelo proposto por Parzysz. Este nível tem como ponto de partida a vivência e a realidade dos alunos. As decisões tomadas pelo aluno são conseqüências do que ele visualiza. Ainda no bloco 1, os alunos tiveram a oportunidade de conceber a noção de congruência a partir da face "concreto" do tetraedro proposto por Machado, envolvendo objetos tridimensionais e figuras no plano.

O bloco 2 objetivou fazer com que os alunos se apropriem do conceito de congruência, via transformações isométricas. O instrumento didático foi o software Cabri-Géomètre II, que por meio de suas ferramentas de transformações isométricas, o aluno pode validar a congruência de figuras planas. Neste bloco, foram apresentadas atividades do nível G1 e exploradas as duas faces do tetraedro sugerido por Machado: percepção e representação. As validações foram perceptivas. As atividades propostas foram com figuras congruentes, que buscava favorecer a transição do processo cognitivo, envolvendo as percepções e representações. Além do Cabri II, este trabalho fez uso da malha quadriculada. Os alunos se empenharam em tarefas de construção e representação de triângulos, cuja finalidade foi de abstrair os conceitos dos quatro casos de congruência de triângulos.

No bloco 3 os argumentos e provas foram deduzidos a partir da experimentação do bloco anterior. Os casos de congruência de triângulos foram aceitos pelos alunos, conforme idéias de Freudenthal. Este bloco foi analisado segundo os tipos de provas de Balacheff.

A seqüência de ensino buscou a articulação entre os elementos explorados nos blocos 1, 2 e 3, e com base na rede conceitual proposta por Pires (2001). Uma rede conceitual foi adaptada para essa pesquisa, conforme figura a seguir.

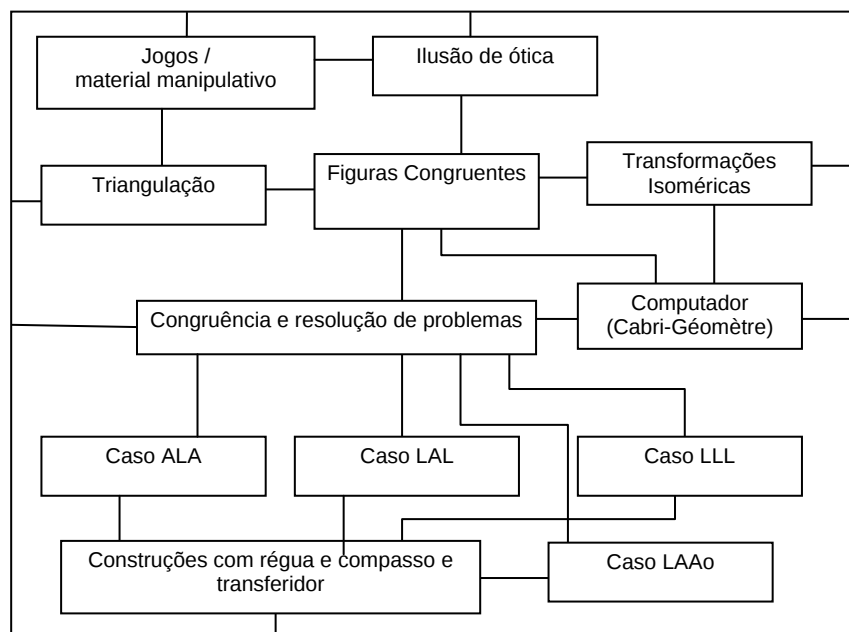


Fig. 57

A rede mostra os meios explorados na seqüência de ensino sobre as figuras geométricas congruentes, e conseqüentemente, os casos de congruência de triângulos, por meio de material manipulativo, transformação isométrica, utilizando o computador ou por meio de problemas. O primeiro contato com a congruência foi realizado no bloco 1 com atividades envolvendo os itens da rede: jogos/materiais manipulativos, a ilusão de ótica, destinados à descoberta e abstração do conceito de congruência. Em seguida, as transformações isométricas, o computador e as construções com régua, compasso e transferidor, fizeram parte do bloco 2 no estudo do objeto matemático congruência e, em particular, os casos de congruência de triângulos. O item congruência e resolução de problemas abrangeram o bloco 3, finalizando a seqüência de ensino com o uso dos casos de congruência para prova e justificativa de situações envolvendo objetos matemáticos. As atividades desenvolvidas em cada bloco foram:

Atividades do Bloco 1:

- Sacola contendo pares de objetos congruentes.
- Figuras bidimensionais congruentes.
- Jogo da Congruência.

Atividades do Bloco 2:

- Congruência de Figuras pelas transformações isométricas no Cabri-géomètre.
- Construção de triângulos e introdução aos quatro casos de congruência de triângulos – placa quadriculada.

Atividades do Bloco 3:

- Resolução de Problemas – Provas

3.3.1. ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 1 – CONCRETO

É comum a congruência ser tratada nos livros didáticos a partir de triângulos ou polígonos, ou seja, objetos bidimensionais, sem uma relação direta com a realidade dos alunos. Por isso, este bloco constitui-se de 3 atividades manipulativas, com o objetivo de possibilitar aos alunos a compreensão da congruência em seu aspecto geral. Tem como ponto de partida a exploração via objetos tridimensionais, congruentes dois a dois, comuns ao cotidiano dos alunos. Posteriormente, com figuras que causam ilusão de ótica, os alunos serão instigados a provar, mesmo que de maneira perceptiva e manipulativa, se os objetos bidimensionais são ou não congruentes. Espera-se que nessa atividade o aluno justifique, pela superposição, que duas figuras são congruentes porque se encaixam uma sobre a outra. Para consolidar a compreensão e a concepção de congruência, a atividade 3 terá figuras congruentes duas a duas, impressas em papel transparente em diversas posições, e para ocorrer a sobreposição será preciso visualizar, girar, virar uma figura em relação a outra.

Atividade 1. Sacola com objetos congruentes³

Atividade 1: Os objetos contidos na sacola são congruentes dois a dois.

Questão 1. Procure regularidades nos objetos e identifique os pares de objetos congruentes. Cole, lado a lado, com fita adesiva, os pares de objetos congruentes na folha dada.

A foto a seguir, ilustra a composição de objetos da sacola da atividade 1:

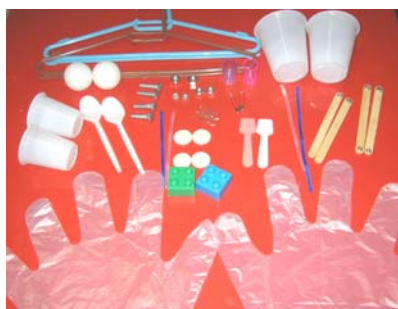


Fig. 58

O objetivo dessa atividade é descobrir o que são objetos congruentes. Como proposta serão utilizados objetos congruentes de diferentes materiais, tais

³ Anexo 3: Lista dos objetos congruentes contidos na sacola está nos anexos.

como: madeira, plástico, metal, tecido. Algumas situações foram criadas para que os alunos possam perceber o que influencia e o que não influencia na tomada de decisão. Por exemplo, alguns pares de objetos congruentes terão mesma cor, outros não; alguns pares de objetos congruentes serão semelhantes a outros pares, com cores alternadas.

Os objetos congruentes de mesma cor foram preparados para tentar fazer com que os alunos percebam que objetos congruentes são visualmente iguais em tamanho e forma. São pares de: bola de ping-pong, colher de plástico, alfinete, clips, botão de 4 furos e botão de 2 furos, palito com colchetes presos nas extremidades – mesmo lado, palito com colchetes presos nas extremidades – lados opostos, parafuso sextavado $\frac{1}{4} \times 1"$ e parafuso francês $\frac{1}{4} \times 1"$. Entretanto, com os objetos congruentes dois a dois, de cores diferentes, espera-se que os alunos notem que esses objetos, apesar das cores diferentes, têm o mesmo formato e tamanho e que, portanto, são também congruentes. São eles: cabides, peças de brinquedo de montar do tipo Lego, copos de brinquedo, colheres de sorvete, fitas de 15cm (cor rosa e azul) e fitas de 11,5cm (cor rosa e azul). Os objetos congruentes dois a dois com tamanhos diferentes e de mesma cor foram preparados a fim de diferenciar a congruência de semelhança: São eles: um par de copos de 180ml e um par de copos de 80ml de mesma cor; um par de porca de $\frac{1}{4}"$, um par de porca $\frac{5}{16}$ e um par de porca $\frac{3}{16}$, todos prateados.

Na dificuldade dos alunos em perceber a congruência de objetos, a professora poderá intervir com a seguinte instrução: a) Dois a dois os objetos têm características comuns, quais são? b) E no geral, o que é comum a todos?

Espera-se que os alunos manipulem e comparem os objetos para decidirem quais são e o que são objetos congruentes. E como análise, essa atividade poderá ser categorizada no nível G0, segundo Parzysz, pois a validação será perceptiva. Pode-se considerar também a sacola contendo os materiais analisados como sendo um objeto complexo, espaço em que os alunos deverão organizar, comparar, selecionar e abstrair, nesse primeiro momento, a idéia do que são objetos congruentes apenas com a manipulação e visualização.

Questão 2: Se você fosse explicar para um colega de classe o que são objetos congruentes, o que você diria a ele?

Essa questão, que vem após a atividade manipulativa, tem como base o que Machado (2005) ressalta ser fundamental em qualquer situação de aprendizado, que é a *"articulação entre as atividades perceptivas e momentos de elaboração conceitual, ou o estabelecimento de relações mais consistentes entre o conhecimento empírico e sua sistematização formal"*. Assim, a questão 2 tem a finalidade de articular a situação empírica experimentada pelos alunos na atividade anterior com a elaboração do conceito de congruência. Espera-se que os alunos possam expressar suas idéias e pensamentos abstraídos da atividade¹.

Atividade 2: Figuras planas congruentes

Situação 1 - Figuras 1 e 2: Nessa atividade serão fornecidas duas folhas: **uma** para a manipulação das figuras 1 e 2, e **outra** para que os alunos decidam e respondam o que são figuras congruentes. As figuras 1 e 2 da folha de resposta serão apenas ilustrativas.

Quadro 2 – Folha de manipulação e de resposta –situação 1, bloco 1

Folha de questão e manipulação	Folha para resposta
1. Decida se as figuras são congruentes.  Figura 1  Figura 2	O que você acha sobre as figuras, elas são congruentes? O que você faria para decidir se as figuras são ou não congruentes? 1. Figuras 1 e 2:  Figura 1  Figura 2 As figuras 1 e 2 são congruentes? () sim () não Justifique. Explique o que você fez para justificar sua resposta.

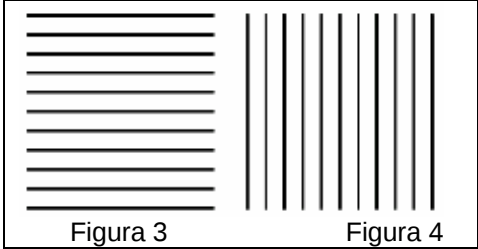
Essa atividade também é de manipulação, e a decisão a ser tomada deverá ser pela observação dos aspectos gerais das figuras bidimensionais. Serão utilizadas representações planas que, visualmente, não parecem ser congruentes. Para tanto, será utilizado um par de figuras que causam ilusão de ótica, aquilo que "parece, mas não é", para ter certeza será necessário manipular o objeto. A validação, ainda que perceptiva, será auxiliada pelo uso dos instrumentos. Para a verificação, espera-se que os alunos descrevam a necessidade de sobrepor uma figura sobre a outra, ou medir segmentos, ou lados das figuras, ou ainda, recortar, ou desenhar para comparar. Os alunos poderão utilizar os seguintes recursos:

- Papel transparente: nesse caso, o aluno copiará a figura 1 no papel transparente para **sobrepor** a cópia da figura 1 sobre a figura 2, ou vice-versa e tomar a decisão se são ou não congruentes;
- Tesoura: um aluno recortará uma das figuras e **sobrepor** sobre a outra para poder decidir sobre a congruência ou não;
- Régua, transferidor, compasso: escolhendo régua ou compasso, o aluno vai **medir** a distância de um ponto a outro de uma da figura e comparar com a distância dos pontos correspondentes da outra figura.

Caso o aluno escolha o transferidor, a professora deverá intervir e instruir o aluno sobre o uso do transferidor. Ângulos são formados por duas semi-retas com origem no mesmo ponto, o que não ocorre nas figuras da situação 1. Na utilização do papel transparente e a tesoura, o aluno precisará transportar, deslocar a figura copiada ou recortada até a outra figura. Espera-se que essa atividade faça o aluno perceber o processo de validação de sua resposta. Para isso, o aluno vai justificar, descrevendo o que foi feito na atividade para que ele tomasse tal decisão. Espera-se como resposta a necessidade de levar, transportar, deslocar uma figura ou sua cópia até outra figura a ser comparada por superposição.

Situação 2 - Figura formada por segmentos: Nessa atividade também serão fornecidas duas folhas: **uma** para a manipulação das figuras 3 e 4 e, **outra** para o aluno decidir e responder. As figuras 3 e 4 da folha de resposta serão apenas ilustrativas.

Quadro 4 – Folha de manipulação e de resposta –situação 2, bloco 1

Folha de questão e manipulação	Folha para respostas
2. Decida se as figuras são congruentes.  Figura 3 Figura 4	 Figura 3  Figura 4 Os segmentos da figura 3 são congruentes aos segmentos da figura 4? ()sim ()não Justifique. Explique o que você fez para justificar sua resposta. A figura 3 é congruente à figura 4? ()sim ()não Justifique. Explique o que você fez para justificar sua resposta.

Na situação 2, espera-se que o aluno perceba a congruência de cada um dos segmentos da figura 3 com a da figura 4. Além desses segmentos, observar a forma retangular do conjunto de segmentos. O aluno também poderá utilizar os recursos de régua, tesoura, compasso, papel transparente, como instrumentos para medir ou sobrepor. Além de transportar a medida ou a figura recortada ou desenhada, há a necessidade de girar para sobrepor.

Questão 3: Se você fosse explicar para um colega de classe como identificar duas figuras congruentes, o que você diria a ele?

Espera-se que os alunos respondam que para haver a congruência basta verificar se uma figura se encaixa sobre a outra por transporte e sobreposição.

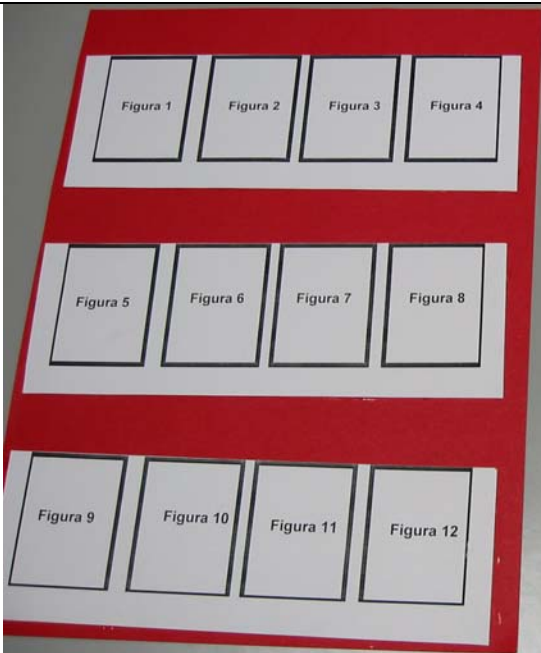
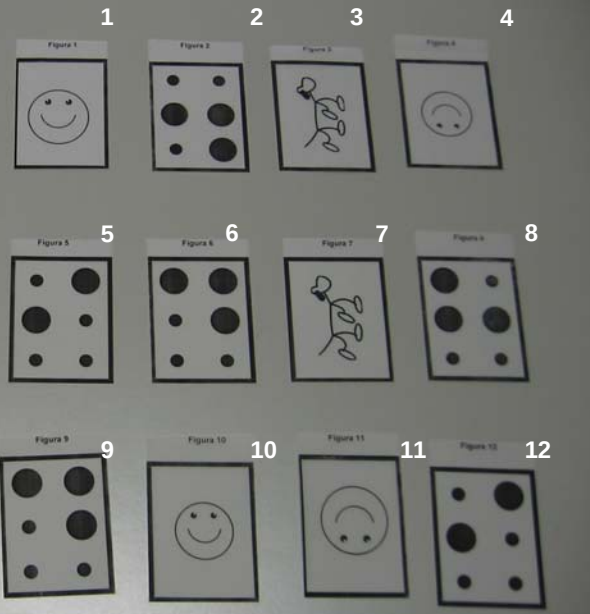
Atividade 3: Jogo da Congruência

Nessa atividade, cada dupla receberá um quadro contendo 12 retângulos congruentes. No verso dos retângulos estão escondidas figuras congruentes duas a duas.

Situação 1: No verso de cada um dos retângulos que aparecem no quadro há figuras congruentes duas a duas. O objetivo é identificar esses pares congruentes.

Questão 1: Identifique abaixo as figuras são congruentes duas a duas. Como você identificou?

Quadro 5 – Jogo da congruência

Quadro de retângulos numerados de 1 a 12	Figuras (numeradas de 1 a 12) congruentes que serão colocadas no verso dos retângulos
	

A proposta desta atividade é utilizar figuras impressas em papel transparente com o objetivo de que os alunos possam verificar a congruência através da sobreposição e encaixe dos pontos correspondentes de cada figura naturalmente. Para ressaltar que figuras congruentes mantêm as medidas, deixaremos as figuras 1, 4, 10 e 11 para que decidam que realmente são congruentes os pares de figuras 1 e 11, e as figuras 4 e 10. As figuras restantes exigirão atenção dos alunos sobre o posicionamento dos detalhes de cada figura. Terão superposição as figuras 6 e 9, figuras 3 e 7, figuras 5 e 12 e figuras 2 e 8.

Espera-se que os alunos manipulem e verifiquem que algumas figuras deverão ser giradas para o encaixe, em outras, espera-se que os alunos percebam que apesar de serem parecidas há diferença no tamanho. Poderá ocorrer também a situação em que o aluno ao invés de sobrepor, coloque lado a lado as figuras e as compare. Nesse caso, a professora deverá intervir questionando porquê da certeza de que são figuras congruentes.

Questão 2: Com que jogo tradicional esse "jogo da congruência" se assemelha? Qual o objetivo do jogo tradicional?

O objetivo dessa questão é fazer uma associação do que é comum no dia-a-dia de nossos alunos. A brincadeira do jogo da memória é presente na vida de nossos alunos e é tomada como entretenimento, sem relação com o aprendizado escolar. Procura-se estimular os alunos com relação a aprendizagem de congruência, aproveitando a idéia do jogo da memória que é encontrar figuras congruentes e fazer a integração entre todos os participantes.

3.3.2. ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 2

Esse bloco tem a finalidade de explorar as transformações isométricas no estudo da congruência de figuras, utilizando o computador. Os alunos farão a representação de objetos bidimensionais, diferentemente da situação do bloco 1 com a utilização do software Cabri-géomètre. Elementos não percebidos no bloco 1 começarão a surgir, ampliando a percepção dos alunos para além do aspecto geral das figuras congruentes.

As figuras congruentes estarão representadas na tela do computador e os alunos perceberão que mover um objeto e o encaixar sobre o outro já não será

tão simples como no bloco anterior, pois, é uma situação que está aquém da vontade dos alunos em manipular livremente os objetos. Somente formulando estratégias, observando as particularidades de cada objeto, aliados com comandos específicos do programa Cabri, é que as figuras poderão ser deslocadas e encaixadas uma sobre a outra.

3.3.2.1. CONGRUÊNCIA VIA ISOMETRIAS – CABRI-GÉOMÈTRE

Nesse bloco, as transformações isométricas: translação, rotação, reflexão axial e suas composições terão papel fundamental para uma nova abordagem da congruência de figuras. As atividades serão realizadas no **Cabri-Géomètre II**, Pressupõe-se que os alunos terão o conhecimento das ferramentas de transformação desse software, explorado na parte 1 dessa pesquisa. Serão fornecidas em cada atividade duas figuras que, para saber se são congruentes, ou a partir de figuras congruentes, os alunos deverão utilizar as ferramentas de transformação isométricas, fazendo com que uma figura se sobreponha sobre a outra, de modo que se coincidam. Os objetivos desse bloco são destacados a seguir:

1. Somente usando as ferramentas de transformações isométricas do Cabri, os alunos deverão concluir que as duas figuras dadas são congruentes. Para isto uma figura deverá ser levada a coincidir com a outra.
2. Fazer com que o aluno reconheça o tipo de transformação que será utilizada para transportar uma figura sobre a outra.

A validação deverá ser realizada com a observação dos resultados da manipulação das figuras no Cabri II. Essas atividades terão as faces de representação, percepção e dedução do tetraedro. Ao abrir os arquivos indicados na folha de instrução, os alunos encontrarão os enunciados e as representações. Convém ressaltar que os alunos deverão ter tido contato, no período de familiarização do software Cabri-géomètre (parte 1), com o vetor, mediatriz, ponto médio, bissetriz, bem como, da rotação no sentido anti-horário como sendo positivo.

Atividade 1: Abra o arquivo barco vela.

Utilize as ferramentas de transformação e descubra se as figuras 1 e 2 (Fig.59) são congruentes.

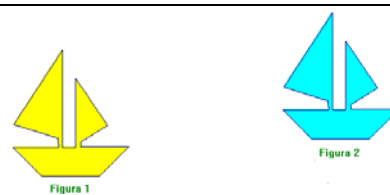


Fig. 59

O objetivo nessa atividade é saber se os alunos visualizam a necessidade de criar um vetor e, depois, transladar a figura 1 sobre a figura 2. Nesse caso o aluno deverá lembrar que para levar uma figura sobre a outra deverá usar a translação. O deslocamento deverá ser feito por um vetor. É possível que algum aluno tenha dificuldade em criar um vetor, ou mesmo, perceber a necessidade de criá-lo. Convém observar que todos os alunos passarão por uma fase de familiarização das ferramentas do software Cabri⁴, e a utilização do vetor na translação. Dessa forma, a criação de um vetor relacionada à translação deverá ser apresentada aos alunos. Em geral, caso os alunos apresentem dúvidas, a professora deverá solicitar que criem um vetor qualquer e um ponto livre e pedir que transladem o ponto livre segundo o vetor criado.

Atividade 2: Abra o arquivo hélice.

Utilize as ferramentas de transformação e descubra se as figuras 1 e 2 são congruentes (Fig. 60a).

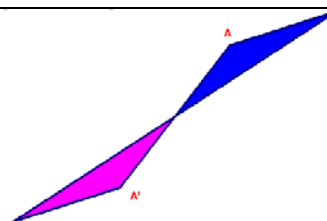


Fig. 60a

Nessa atividade o aluno poderá utilizar as seguintes transformações:

1. **Girar 180° (sentido anti-horário) com a rotação.**

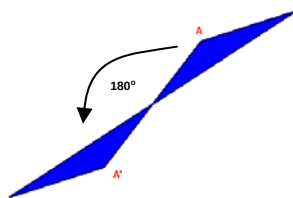


Fig. 60b

Rotacionar a figura a em 180° (sentido anti-horário) pelo vértice comum às figuras A e A'.

2. **Simetria central.**

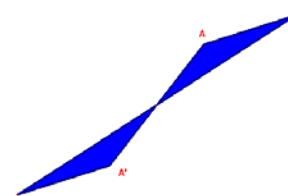
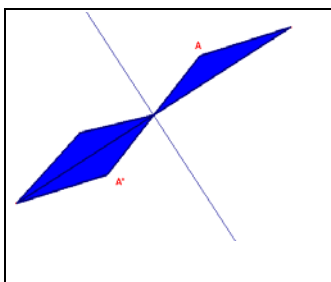


Fig.

60c

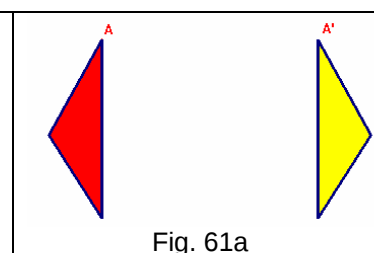
Utilizar a simetria central pelo vértice comum às figuras A e A'.

⁴ Anexo 10, item III - Ferramenta Transformar.

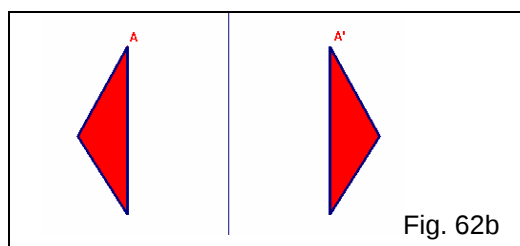
	3. Simetria Axial: Os alunos poderão criar um eixo de simetria no vértice comum à figura A e A'. Depois obter a simetria axial de A em relação à reta. Finalmente outra simetria axial da imagem de A em relação ao lado comum à figura A'. Fig. 60d
---	---

Atividade 3: Abra o arquivo triângulo

Utilize as ferramentas de transformação para verificar se a figura A é congruente à figura A'.



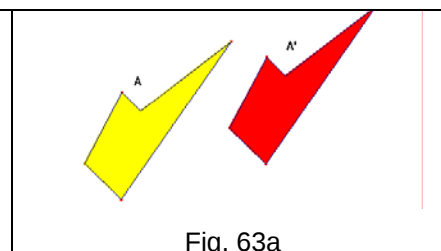
Espera-se que o aluno utilize a simetria axial para concluir que as figuras são congruentes. Para isso, deverá perceber que basta obter a mediatriz entre dois pontos correspondentes das duas figuras, por exemplo, um vértice da figura A e seu correspondente em A'.



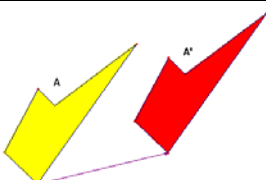
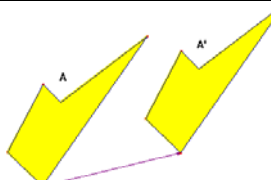
Se o aluno encontrar dificuldade, será questionado sobre o tipo de transformação utilizada para levar a figura A na figura A'. Em seguida, o que precisaria obter: eixo de simetria, vetor ou um ângulo?

Atividade 4: Abra o arquivo congruência 1

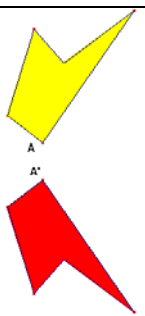
As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?



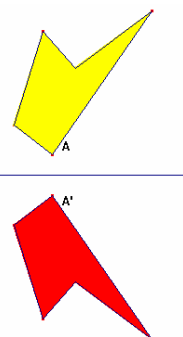
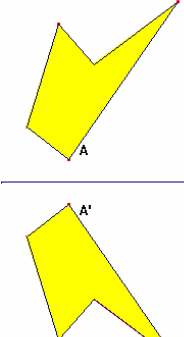
Para resolver essa questão espera-se que o aluno utilize a translação da figura A sobre a figura A', conforme os procedimentos abaixo:

 Fig. 63b ▪ Criar um vetor de um ponto na figura A e seu correspondente na figura B.	 Fig. 63c ▪ Transladar a figura A sobre A', utilizando o vetor criado.
--	---

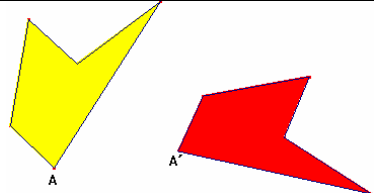
Se houver dificuldade em posicionar ou criar um vetor adequado, será solicitado ao aluno que identifique pontos correspondentes entre as figuras e os analise par a par.

<u>Atividade 5: Abra o arquivo congruência 2.</u> As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?	 Fig. 64a
---	--

Para resolver, espera-se:

 Fig. 64b ▪ criar uma mediatriz entre um ponto da figura A com o seu correspondente da figura A'.	 Fig. 64c ▪ Utilizar a ferramenta simetria axial e obter o simétrico da figura A sobre a figura A'.
---	--

Nessa atividade o aluno poderá, no princípio, se confundir com o tipo de transformação, isto é, entre a rotação e a simetria axial. Caso isso ocorra, solicitar que visualize a rotação e a simetria e decida o que usar (Fig. 64b e Fig.64c).

<u>Atividade 6: Abra o arquivo Congruência 3</u> As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?	 Fig. 65a
--	--

Espera-se que o aluno visualize a translação seguida de uma rotação. Conforme é exemplificado abaixo: **Uso de translação e rotação**.

a) Criar vetor ligando um ponto da figura A ao correspondente na figura A' e transladar a figura A, segundo o vetor criado.

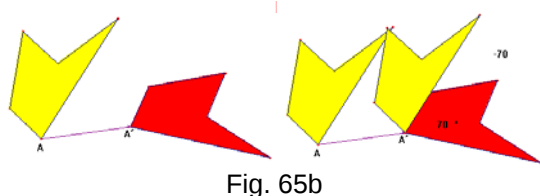


Fig. 65b

b) Rotacionar sob o ângulo de 70° (sentido horário) em torno do ponto de chegada do vetor criando.

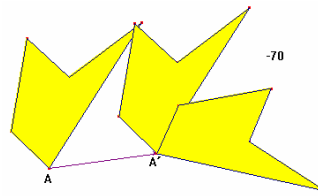


Fig. 66c

Espera-se que os alunos obtenham a congruência pelo uso de composições de transformações.

Atividade 7: Abra o arquivo Congruência 4

As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?

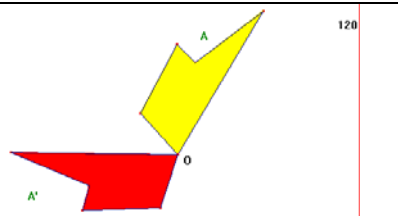


Fig. 67a

O objetivo é utilizar a rotação como transformação. Espera-se que o aluno aplique a rotação, sentido anti-horário, utilizando o ângulo de 120° (sentido anti-horário) indicado.

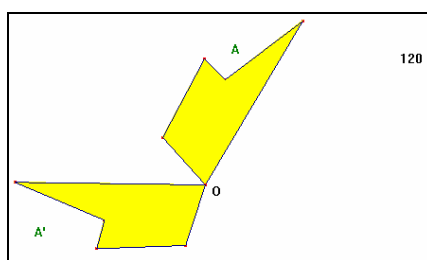


Fig. 67b

Acredita-se que o aluno não terá dificuldade nessa atividade.

Atividade 8: Abra o arquivo triângulo2

Utilize a ferramenta da caixa de transformação para verificar se os triângulos ABC e EDB são congruentes.

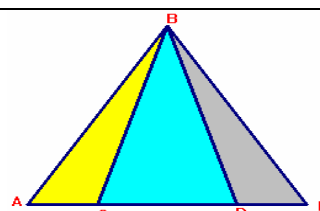
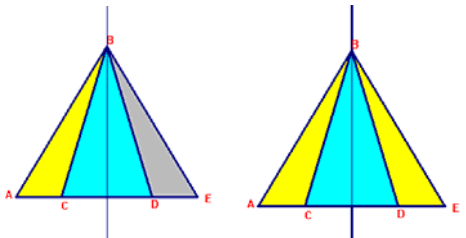
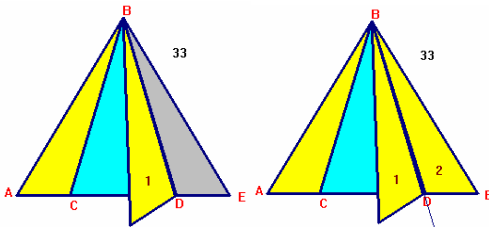
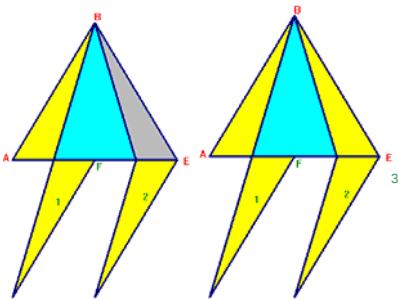
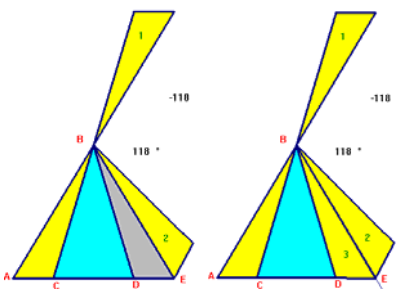
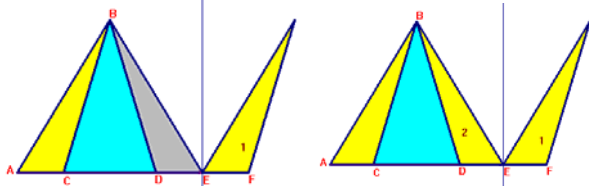


Fig. 68a

Esta atividade tem o objetivo de levar o aluno a perceber as possíveis transformações que pode fazer para levar um triângulo sobre o outro. Espera-se que os alunos obtenham a congruência a partir de um desses casos:

(1)  Fig. 68b	- Obter a mediatriz do segmento AE. - Utilizar a simetria axial, tomando a mediatriz de AE como eixo de simetria para obter a sobreposição de ABC em BDE.
(2)  Fig.68c	Para obter: Triângulo 1: identificar ângulo $\angle ABD = 33^\circ$ e rotacionar $\triangle ABC$, com ângulo de 33° em torno de B. Triângulo 2: Simetria axial da fig.1 em relação ao lado BD.
(3)  Fig.68d	Para obter: Triângulo 1: Simetria central de ABC Triângulo 2: Criar vetor CD e transladar a fig.1, segundo o vetor CD. Triângulo 3: Simetria axial da fig.2 em relação a AE.
(4)  Fig. 68e	Para obter: Triângulo 1: Simetria central do $\triangle ABC$ em relação ao vértice B. Triângulo 2: Rotação da fig.1, de -118°, em torno de B. Triângulo 3: Simetria axial de fig.2 em relação a BE.
(5)  Fig. 68f	Para obter: Triângulo 1: criar vetor AE e transladar o $\triangle ABC$, segundo o vetor AB. Triângulo 2: obter a mediatriz de DF e utilizar simetria axial e, relação ao eixo de simetria DF

Atividade 9: Abra o arquivo congruência5

Os segmentos (Fig. 69a) MN e M'N' são congruentes. Que transformações geométricas levam o segmento MN no segmento M'N', de modo que M seja levado em M' e N seja levado em N'?

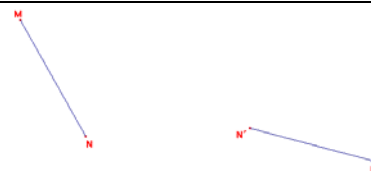
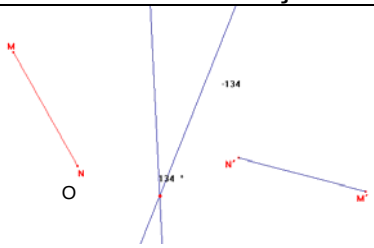
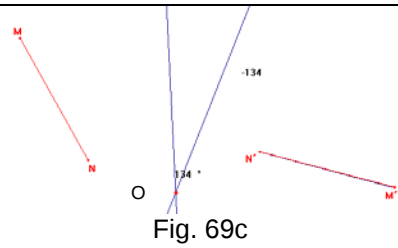
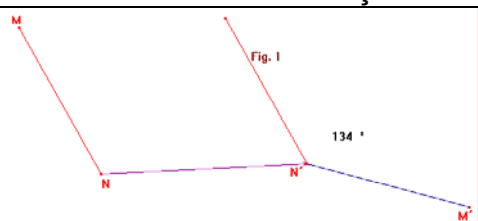
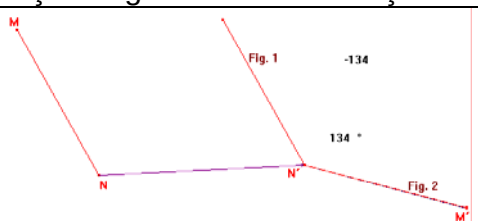


Fig. 69a

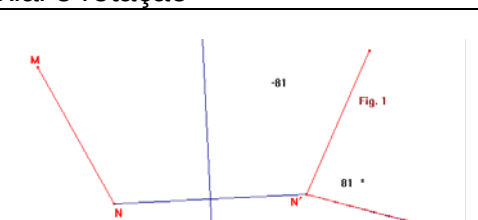
Possibilidade de resolução 1: obtenção da mediatriz de NN' e MM'.

 Fig. 69b Início - Obtenção de mediatrizes de MM' e NN'. - Identificação do ângulo formado pelo ponto N, o ponto O (obtido pela interseção entre as mediatrizes) e o ponto N'.	 Fig. 69c Resultado final Rotação do segmento MN, ao redor de O, utilizando o ângulo NÔN', sentido horário.
---	--

Possibilidade de resolução 2: uma translação seguida de uma rotação.

 Fig. 69d Início - Cria-se um vetor, por exemplo, NN'. - Translada-se o segmento MN, segundo o vetor NN'.	 Fig. 69e Resultado final - Obtenção do ângulo entre a fig1 transladada e o segmento M'N'. - Rotação da fig 1, em torno de N', usando o ângulo obtido anteriormente, sentido horário.
---	--

Possibilidade de resolução 3: Simetria axial e rotação

 Fig. 69f Início - Mediatriz de NN'. - Simetria axial e obtenção da fig.1.	 Fig. 69g Resultado final - Obtenção do ângulo entre a fig.1 transladada e o segmento M'N'. - Rotação da fig 1, em torno de N', usando o ângulo obtido anteriormente, sentido horário.
---	--

3.3.2.2 - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS – PLACA QUADRICULADA

As atividades com a placa quadriculada encerrarão a seqüência do bloco 2. Tem por objetivo levar os alunos a verificar, empiricamente, os quatro casos de congruência de triângulos por meio de construções. Em muitos livros didáticos encontramos exercícios com figuras desenhadas em malhas pontilhadas ou quadriculadas, ficando o manuseio dessas figuras nas malhas a mercê da imaginação dos alunos. A proposta é fazer com que os alunos vivenciem a construção de triângulos na malha quadriculada, tomem decisões a partir de suas construções e tenham um primeiro contato com os casos de congruência de triângulos. Em virtude disso, optou-se por realizar essas atividades na malha (fig. 76).

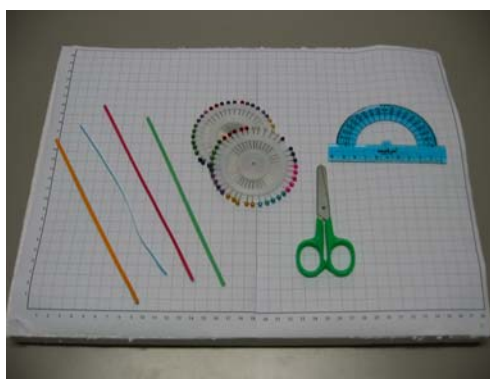


Fig. 70

Junto à malha quadriculada, serão utilizados os materiais: agulhas, régua, compasso, transferidor, fitas, tesoura, uma folha contendo instruções para a construção das figuras solicitadas (folha 1) e uma folha de análise e resposta (folha 2). As agulhas serão utilizadas para marcar ou fixar os vértices dos triângulos a serem construídos e dar mobilidade aos lados das figuras. Espera-se que a agulha possa auxiliar os alunos na hora das escolhas das posições dos lados do triângulo. Por exemplo, fixando uma das pontas da fita, a outra fica livre para a escolha de uma posição para a construção do triângulo. Essa atividade 4 terá como pressuposto o conhecimento dos alunos em reconhecer duas figuras congruentes tanto no aspecto de medições como o da sobreposição e coincidência dos pontos das figuras analisadas. Com as construções e representações, espera-se que os alunos percebam a construção dos casos de congruência. O quadro a seguir refere-se à Folha 1, que proporá instruções para

verificações de possíveis construções de triângulos, somente com os dados fornecidos:

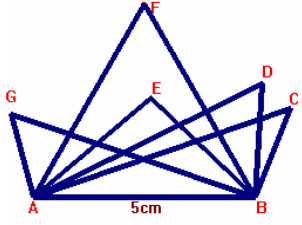
Quadro 6 – Folha 1 – Congruência e triângulos

Utilize os seguintes materiais para essa atividade: placa de malha pontilhada, fita de papel, agulha, régua e tesoura.

Construa na placa quadriculada um triângulo ABC a partir das medidas dadas abaixo. Em seguida responda às questões 1 e 2.		Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?		Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	
Item	Medidas:	sim	não	sim	não
1	dado um lado (L): AB= 5 cm				
2	dois lados (LL): AB = 5cm e AC= 3 cm				
3	três lados (LLL): AB= 9cm, AC=7cm, BC=5cm				
4	três lados (LLL): AB=7cm, AC=4cm, BC=2 cm				
5	três lados (LLL): AB=10cm, AC=7 cm, BC=3cm				
6	três ângulos (AAA): $\hat{A}=35^\circ$, $\hat{B}=70^\circ$, $\hat{C}=75^\circ$				
7	três ângulos (AAA): $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$, $\hat{C}=80^\circ$				
8	três ângulos (AAA): $\hat{A}=80^\circ$, $\hat{B}=45^\circ$, $\hat{C}=30^\circ$				
9	dois ângulos (AA): $\hat{C}\hat{A}\hat{B}=60^\circ$, $\hat{C}\hat{B}\hat{A}=35^\circ$				
10	um ângulo (A): $\hat{A}=45^\circ$				
11	um lado e um ângulo (LA): AB= 5cm, $\hat{B}\hat{A}\hat{C}=35^\circ$				
12	um lado, um ângulo e outro lado (LAL): AB=7cm, $\hat{B}\hat{A}\hat{C}=60^\circ$, AC=5cm				
13	um ângulo, um lado, outro ângulo (ALA): AB=6cm, $\hat{B}\hat{A}\hat{C}=45^\circ$ e $\hat{A}\hat{B}\hat{C}=30^\circ$				
14	um lado, outro lado, um ângulo (LLA): AB=5cm, AC= 3 cm, $\hat{C}\hat{B}\hat{A}=30^\circ$				
15	um lado, um ângulo, ângulo oposto (LAAo): AB=6cm, $\hat{C}\hat{A}\hat{B}=45^\circ$, $\hat{A}\hat{C}\hat{B}=30^\circ$				

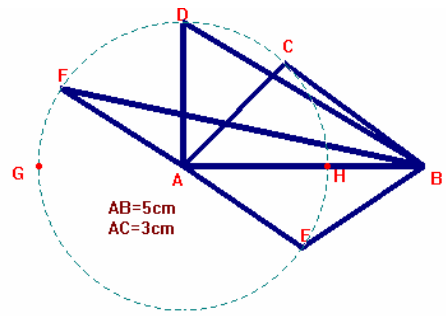
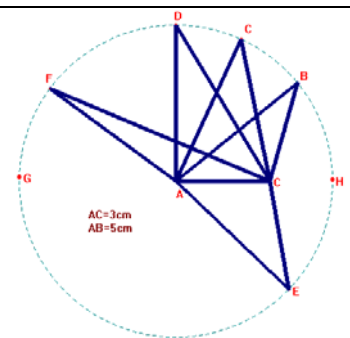
Os resultados das construções na malha quadriculada deverão ser anotados na folha 1 e analisados na folha 2. Abaixo, são descritas as possíveis respostas, estratégias e eventuais dificuldades que os alunos poderão encontrar em cada um dos experimentos desta atividade 4. É esperado que, ao longo dessa atividade, o aluno possa visualizar o triângulo, considerando como elementos os lados e os ângulos, não somente os lados.

1. Dado um lado (L): $AB = 5\text{ cm}$: Nesse experimento os alunos podem utilizar a régua ou a própria marcação da malha quadriculada para medir as fitas conforme a medida dada, e não encontrarão dificuldade na realização deste experimento.

 Fig. 71 Construções esperadas: Espera-se que sejam feitas construções de triângulos do tipo: ABC ou ABG – escaleno, ABD – retângulo, ABF – equilátero, ABE – isósceles.	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Sim.
---	---

Caso o aluno tenha dificuldade, a professora deverá pedir a construção de dois triângulos, tendo como única restrição a medida de 5cm para um dos lados.

2. Dois lados (LL): $AB = 5\text{ cm}$ e $AC = 3\text{ cm}$: Nesse experimento os alunos podem utilizar a régua ou a própria marcação da malha quadriculada para medir as fitas conforme as medidas dadas.

Construções esperadas:  Fig. 72a Possibilidade 1- Figura 78a: Espera-se que o vértice C pertença a um dos pontos de uma circunferência de um raio de 3cm, com exceção dos pontos G e H.	 Fig. 72b Possibilidade 2 - Figura 79b: Poderá ocorrer também do aluno começar com o lado AC. Então, deverá a circunferência ter um raio de 5cm e as exceções são os pontos G e H.
Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim.	

Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? **Sim.**

Caso o aluno tenha dificuldade, a professora deverá solicitar que se corte as fitas no tamanho pedido e deixe livre apenas uma das extremidades de uma fita.

3. três lados (LLL): $AB=9\text{cm}$, $AC=7\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$: Espera-se que nesse experimento os alunos utilizem a régua ou a própria marcação da malha pontilhada para medir as fitas conforme as medidas dadas.

Construções esperadas:

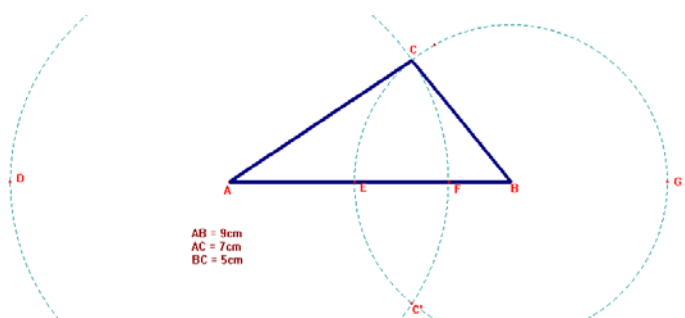


Fig. 73

Com três fitas medindo 9cm, 7cm, 5cm, apenas uma possibilidade de construção do triângulo ABC. ABC' se construído será congruente a ABC. Com os pontos D, E, F, G, não é possível construir triângulos.

Respostas esperadas:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? **Sim.**

Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? **Não.**

Espera-se que os alunos não tenham dificuldades nessa construção, porém, fiquem duvidosos com relação ao outro triângulo, se realmente a construção der somente congruente.

4. três lados (LLL): $AB=7\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$, $BC=2\text{cm}$

Construções esperadas:

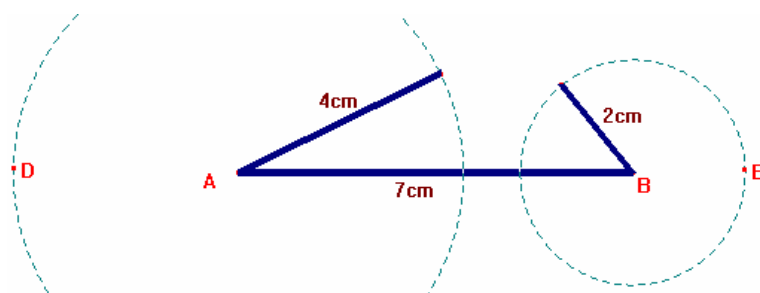


Fig. 74

Como não há interseção entre os lados com as medidas fornecidas, os alunos deverão concluir que não é possível construir o triângulo com as medidas dadas.

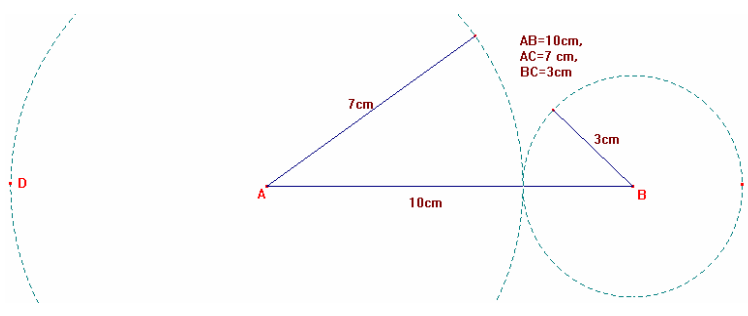
Respostas esperadas:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? **Não.**

Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? **Não.**

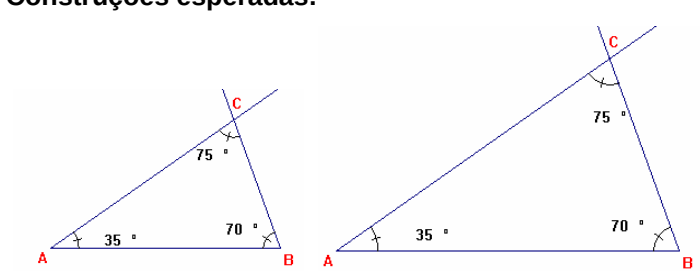
Na ocorrência de dúvidas, eles deverão ser orientados a recortarem as fitas com as medidas fornecidas, fixar as fitas com agulhas nas extremidades A e B, de modo que se procure unir as extremidades livres.

5. três lados (LLL): $AB=10\text{cm}$, $AC=7\text{ cm}$, $BC=3\text{cm}$: Acredita-se que nesse experimento, os alunos utilizem régua ou a própria marcação da malha pontilhada para medir as fitas conforme as medidas dadas. Para justificar a não existência desse triângulo, é necessário que os alunos percebam que o valor da soma das medidas de dois lados é igual ao outro lado.

Construções esperadas:  Fig. 75	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Não. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Não.
--	---

Como não há intersecção entre os lados com as medidas fornecidas, os alunos deverão concluir que não é possível construir o triângulo com as medidas dadas.

6. três ângulos (AAA): $\hat{A}=35^\circ$, $\hat{B}=70^\circ$, $\hat{C}=75^\circ$: Alguns alunos poderão apresentar dificuldades em começar a construir o triângulo, em virtude da ausência de uma das medidas dos lados, e tenha a necessidade do auxílio da professora.

Construções esperadas:  Fig. 76	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Sim.
---	---

Caso algum aluno pergunte sobre a possibilidade de usar qualquer medida do lado do triângulo a professora deve concordar e esperar que o aluno perceba que, com isso, há várias formas de construção de triângulos nesse experimento.

Espera-se que alguns alunos, ao verificarem as medidas dadas dos ângulos, possam responder de imediato que não é possível a construção de triângulos em virtude da soma dos ângulos ser maior que 180° . Caso não percebam essa propriedade dos triângulos, deverão utilizar a régua e transferidor para concluir a não possibilidade da construção.

7. três ângulos (AAA): $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$, $\hat{C}=80^\circ$

Construções esperadas:

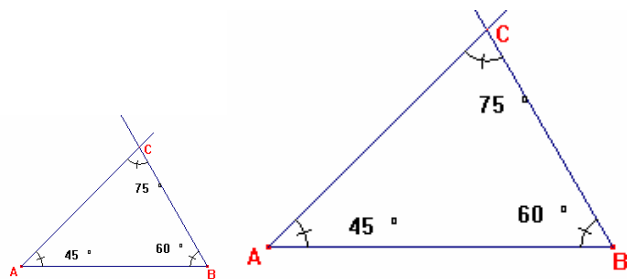


Fig. 77

Respostas esperadas:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? **Não.**

Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? **Não.**

Com as medidas fornecidas não será possível construir os triângulos. No caso, a soma dos ângulos internos do triângulo é maior que 180° . Por exemplo, no lugar de 80° deve-se ter 75° . Em caso de dúvida, o aluno deverá ser questionado sobre o que pode mudar e o que não pode ser mudado na construção.

8. três ângulos (AAA): $\hat{A}=80^\circ$, $\hat{B}=45^\circ$, $\hat{C}=30^\circ$: Como no experimento 7, espera-se que alguns alunos, ao verificarem as medidas dadas dos ângulos possam responder de imediato que não é possível a construção de triângulos em virtude da soma dos ângulos ser menor que 180° .

Construções esperadas:

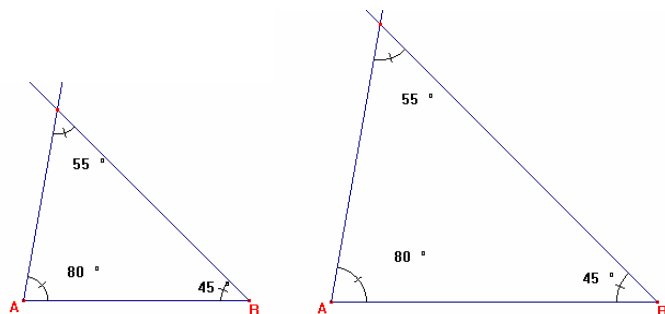


Fig. 78

Com as medidas fornecidas não será possível a construção. Nesse caso, a soma dos ângulos internos é menor que 180° . as medidas fornecidas? **Não.**

Respostas esperadas:

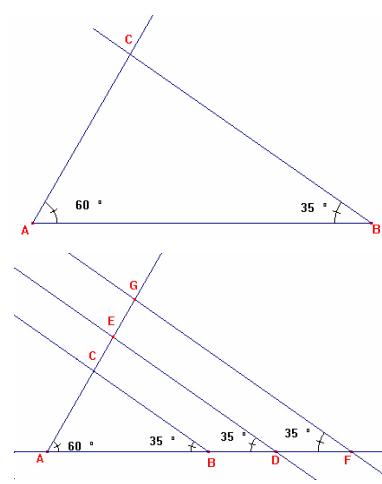
Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? **Não.**

Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? **Não.**

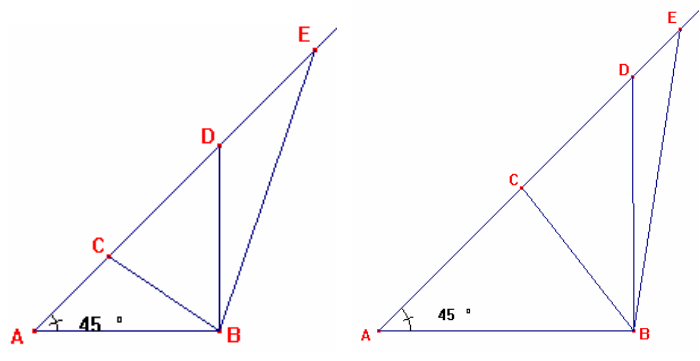
Por exemplo, com as medidas 80° e 45° o outro ângulo é 55°

Caso não percebam essa propriedade dos triângulos, deverão utilizar a régua e transferidor para concluir a não possibilidade da construção.

9. dois ângulos (AA): $\hat{CAB} = 60^\circ$, $\hat{CBA} = 35^\circ$: Nessa atividade o aluno deverá perceber que a medida do primeiro lado é de livre escolha, portanto, ele poderá construir inúmeros triângulos não congruentes ao primeiro.

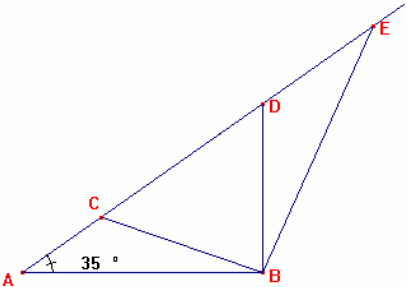
Construções esperadas:  Fig. 79	Medida do lado AB será de livre escolha do aluno. Construção dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Obtenção do vértice C pela extensão do lado compreendido do ângulo de 60° e de 35°. Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Sim. Conforme os triângulos ABC, ADE, AFG construídos acima.
--	---

10. um ângulo (A): $\hat{A} = 45^\circ$

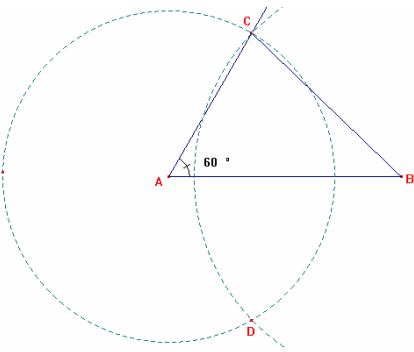
Construções esperadas:  Fig. 80	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Sim.
---	---

Nesse caso dois lados têm medidas de livre escolha do aluno. A medida do terceiro lado é obtida a partir dos outros dois. Os alunos deverão ser estimulados a modificar as posições dos lados do triângulo, sem que se altere o ângulo de 45° .

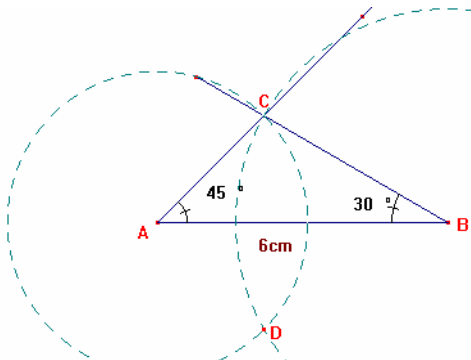
11. um lado e um ângulo (LA): $AB = 5\text{cm}$, $\hat{BAC} = 35^\circ$: Espera-se que o aluno relacione esse experimento com o de número 6, tendo agora, a medida específica de um lado do triângulo.

Construções esperadas:  Fig.81	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Sim.
---	---

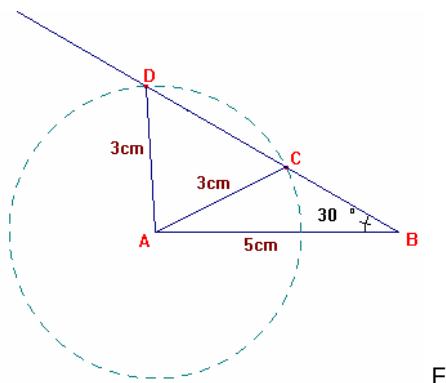
12. Um lado, um ângulo e outro lado (LAL): $AB=7\text{cm}$, $\hat{BAC}= 60^\circ$, $AC=5\text{cm}$: Espera-se que o aluno relacione esse experimento com o de número 6, tendo agora, a medida específica de um lado do triângulo.

Construções esperadas:  Fig. 82	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Não.
---	---

13. um ângulo, um lado, outro ângulo (ALA): $AB=6\text{cm}$, $\hat{BAC}= 45^\circ$ e $\hat{ABC}=30^\circ$: Espera-se que os alunos construam e percebam que não é possível a construção de outro triângulo que não seja congruente ao triângulo com as medidas dadas.

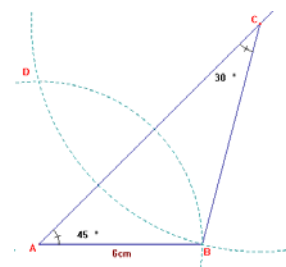
Construções esperadas:  Fig.83	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Não.
---	---

14. um lado, outro lado, um ângulo(LLA): $AB=5\text{cm}$, $AC= 3\text{ cm}$, $\angle CBA = 30^\circ$: Espera-se que os alunos percebam que devem escolher a medida do ângulo formado pelos lados 5cm e 3cm.

Construções esperadas:	Respostas esperadas:
 Fig.84	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Sim.

15. um lado, um ângulo, ângulo oposto(LAAo): $AB=6\text{cm}$, $\angle CAB=45^\circ$, $\angle CBA= 30^\circ$: Espera-se que esse experimento seja o mais desafiador entre todos os experimentos na placa quadriculada, pois a determinação do segundo lado do triângulo está implicitamente ligada com ângulo de 30° e a formação terceiro lado.

A professora deverá se certificar que todos realizem essa tarefa. Intervir, pedindo que os alunos trabalhem com o terceiro lado do triângulo simultaneamente ao segundo e ao ângulo de 30° .

Construções esperadas:	Respostas esperadas:
 Fig. 85	Respostas esperadas: Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas? Sim. Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas? Não.

Após as atividades com a placa quadriculada, forneceremos a **folha 2**, cujo objetivo das atividades será fazer com que os alunos comparem, organizem e concebam a noção de congruência de triângulos. Os alunos, tendo em mãos a tabela da folha 1 preenchida e os triângulos construídos na placa quadriculada, deverão responder as seguintes questões.

1. Explique a possibilidade ou a não possibilidade de construção de triângulos com as medidas dos experimentos 3, 4 e 5 (LLL)

O objetivo dessa questão é fazer com que os alunos percebam que nem sempre é possível a construção do triângulo, isto é, a condição de existência de um triângulo (experimentos 4 e 5). Espera-se que os alunos respondam que no experimento 3 foi possível, mas em 4 e 5 não foram, pois, a soma das medidas de dois lados do triângulo deve ser maior que o outro lado.

2. Explique a possibilidade ou a não possibilidade de construção de triângulos com as medidas dos experimentos 6, 7 e 8 (AAA).

O objetivo dessa questão é mostrar que apesar do fornecimento dos três ângulos, nem sempre é possível a construção, em virtude da soma dos valores dos ângulos serem maiores ou menores que 180° .

3. Analise os resultados da tabela e escreva abaixo o número do experimento e os casos em que a construção do triângulo foi única, isto é, apresentou as seguintes condições, simultaneamente: 1) foi possível construir um triângulo com as medidas dadas e, 2) não foi possível construir outros triângulos não congruentes.

Considera-se decisiva a resposta dessa questão. O objetivo é introduzir os casos de congruência. Espera-se que os alunos listem os casos de congruência sem dificuldade, Se houver dificuldades, as mesmas serão discutidas na fase de institucionalização.

3.3.3. INSTITUCIONALIZAÇÃO

Nesse momento da sequência será suscitada a integração dos aspectos experimentais realizados, anteriormente, pelo aluno, com os aspectos teóricos relativos aos casos de congruência de triângulos. Para isso, uma situação de institucionalização deverá ser levada em conta. Pais (2001) sintetiza a finalidade de uma institucionalização como sendo

Buscar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Sob o controle do professor, é o momento onde se tenta proceder a passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico. Por meio dessas situações, o saber passa a ter um estatuto de referência para o aluno, extrapolando o limite subjetivo. (Pais, 2001, p.73-74)

Assim, com o objetivo fazer a transição do nível G1 para G2 e a institucionalização da atividade anterior com os aspectos teóricos dos casos de congruência de triângulos, será realizada a integração entre os alunos e a apresentação de um sumário, com as condições mínimas de congruência de triângulos, conforme a experimentos já realizados pelos alunos.

A introdução de novos símbolos se faz necessária nessa fase, além da condição lógica "se... então....", que passará a ser utilizada pelos alunos.

Quadro 7 – Institucionalização

Institucionalização: Casos de congruência Condições mínimas para a congruência entre dois triângulos.		
Triângulos congruentes são aqueles que têm os lados respectivamente congruentes e os ângulos respectivamente congruentes. Não precisamos comparar todos os lados e ângulos de dois triângulos para reconhecer que são ou não congruentes. Basta verificarmos as condições mínimas de congruência. Símbolo de congruência: $\cong$ Símbolo do triângulo ABC: $\triangle ABC$ Nos triângulos abaixo, cada tracinho indica a congruência de lados ou de ângulos.		
Caso Lado, ângulo, lado (LAL) 	Se $\left\{ \begin{array}{l} _ \cong _ \\ \wedge \cong \wedge \\ _ \cong _ \end{array} \right.$	então: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
Caso Ângulo, lado, ângulo (ALA) 	Se $\left\{ \begin{array}{l} _ \cong _ \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{array} \right.$	então: $\triangle _ \cong \triangle _$
Caso Lado, lado, lado (LLL) 	Se $\left\{ \begin{array}{l} _ \cong _ \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{array} \right.$	então: $_ \cong _$
Caso Lado, ângulo, ângulo oposto (LAAo) 	Se $\left\{ \begin{array}{l} _ \cong _ \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{array} \right.$	então: $_ \cong \triangle _$
Se dois triângulos apresentam uma dessas condições então os dois triângulos são congruentes.		

3.3.3. ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 3 – PROVAS

Nas atividades desenvolvidas para esse bloco, os alunos deverão ser estimulados a justificar suas respostas de acordo com os resultados obtidos nos experimentos anteriores e os casos de congruência de triângulos. Tudo que estudaram e experimentaram até agora será imprescindível a cada aluno, pois esperamos ter estimulado o aspecto da percepção, construção, representação e dedução sobre a congruência.

De acordo com propostas de Freudenthal, os blocos que precederam a este, objetivavam organizar localmente o estudo e concepção de congruência de figuras, em particular, os casos de congruência de triângulos, dando condições para os alunos utilizarem, de forma significativa, os casos de congruência e realizarem provas em problemas. O objeto utilizado nesse bloco é teórico e as validações ocorrerão no nível G2.

A seguir, são apresentados os problemas em que os alunos deverão utilizar os casos de congruência, a partir da vivência e descobertas realizadas anteriormente.

Utilize os casos de congruência de triângulos para justificar e responder as questões a seguir:

1. Uma reta é perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio M. Seja P um ponto qualquer da reta, diferente de M (Fig. 86). Prove que $PA \cong PB$. Justifique.

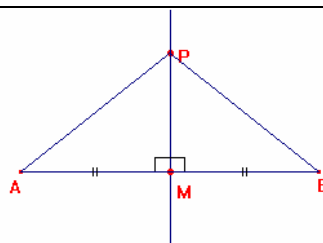


Fig. 86

Está será a primeira atividade após a institucionalização. Espera-se que os alunos visualizem o caso de congruência LAL entre os triângulos congruentes PMA e PMB, pois, $AM \cong MB$, PM é lado comum, $\hat{PMA} \cong \hat{PMB}$. Se o aluno encontrar dificuldade na resolução, será solicitado que identifique os triângulos que parecem ser congruentes e os construa separadamente com seus respectivos lados e ângulos congruentes.

2. Rafael quer ir da cidade A para a cidade B. Porém a estrada que liga diretamente as duas cidades está interditada. Ele tem que optar, então, por dois caminhos possíveis, veja a figura.

Qual o menor caminho a ser percorrido: ir de A para C e depois B ou ir de A até D e depois B?
Justifique sua resposta.

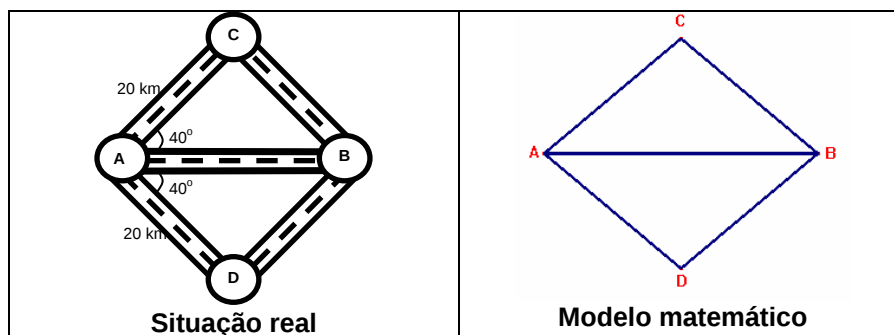


Fig. 87

Este problema apresenta a representação real e o modelo matemático para auxiliar o aluno a interpretar a situação proposta. Espera-se que os alunos respondam que não importa o caminho a ser escolhido: $AB+CB = AD+DB$. A justificativa está na constatação, utilizando o caso LAL, que os dois triângulos ABC e ABD são congruentes, pois: $\hat{B}AC \cong \hat{D}AB$ (ângulos de 40°), $AC \cong AD$ (dado no problema), AB é lado comum.

- Um avião levanta vôo para ir da cidade A à cidade B, situada a 500km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção do vôo de um ângulo de 90° . Se a rota não tivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500km previstos. **Justifique** a sua resposta.

O objetivo dessa questão é fazer com que os alunos interpretem o problema e resolvam utilizando o caso LAL de congruência de triângulos. Espera-se que os alunos recorram à representação da situação, pois, uma boa representação os levará a um caso de congruência:

Espera-se a seguinte interpretação da questão:

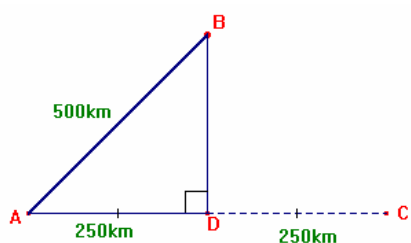


Fig. 88a - Interpretação inicial

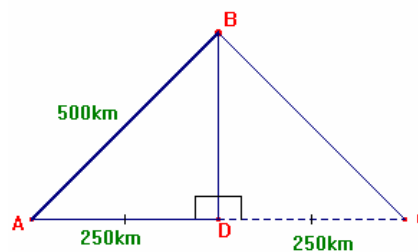


Fig. 88b - Interpretação final

Inicialmente, os alunos deverão ser capazes de reconhecer que o avião chega ao seu destino (ponto B) e reconhecer que D é ponto médio do segmento AC.

O aluno deverá responder que a distância da cidade B até C (se não tivesse sido corrigido) é de 500km, pois o triângulo $ABD \cong$ triângulo CDB . Justificado pelo caso LAL : $AD \cong CD$ – D é ponto médio; $\hat{A}DB \cong \hat{C}DB$ - $AC \perp BD$; $BD \cong BD$ – lado comum

Se os alunos encontrarem dificuldades, deverão ser estimulados a desenhar separadamente as duas figuras (triângulos congruentes) e analisá-las.

4. O solo é considerado a base de todas as outras provas da Ginástica Olímpica. Os rolamentos são os primeiros elementos a se aprender. Na ilustração a ginasta realiza um dos movimentos básicos. Considere o alongamento perpendicular AB inicial igual ao final EF. Considere, também, que BC é congruente a DE. O que você pode dizer sobre a distância CF e DA? Justifique.

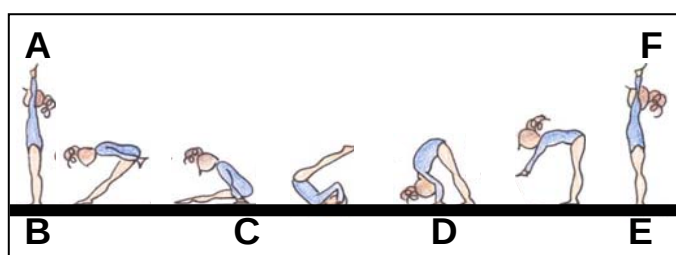


Fig. 96 - Rolamento de costas carpado

Espera-se que os alunos transcrevam a situação num modelo matemático para justificar a congruência entre CF e DA. As possíveis repostas estão descritas a seguir:

Uma estratégia de resolução poderá ser: Fig. 89a	Os triângulos ABD e FEC são congruentes pelo caso LAL, pois: $AB \cong EF$ (dado do problema) ; $BD \cong CE$ (CD é comum aos lados BC e CE); $\hat{A}BC \cong \hat{F}ED$ (dado do problema: AB e EF são perpendiculares ao segmento BE)
Outra estratégia de resolução poderá ser: Percebendo a congruência entre os triângulos ABC e DEF, pelo caso LAL, pode-se verificar também: Fig. 89b	• Triângulos ACD e FDC são congruentes pelo caso LAL, sendo: $\hat{F}DC \cong \hat{ACD}$ - ângulos suplementares de $\hat{ACB}$ e $\hat{FDE}$ respectivamente • CD lado comum • $AC \cong FD$ – lados correspondentes dos triângulos congruentes ABC e FDE

O aluno poderá resolver também com a seguinte estratégia:

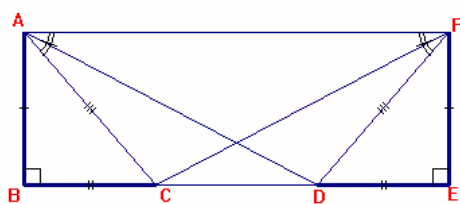


Fig.89c

Traçando uma paralela passando pelos pontos A e F: os triângulos ACF e FDA são congruentes pelo caso LAL, sendo: $AF \cong AF$ – lado comum; $AC \cong FD$ – lados correspondentes dos triângulos congruentes ABC e FDE; $\hat{AFD} \cong \hat{FAC}$ - ângulos complementares de $\hat{CAB}$ e $\hat{DFE}$ respectivamente.

Será solicitado ao aluno que visualize o que estudou no Cabri com relação às transformações, no caso o que foi feito do triângulo ABC para transformar em FDE. Na hipótese do aluno não visualizar alguma dessas formas, forneceremos régua para que ele possa confirmar a congruência do lado AD com FC. Outrossim, será solicitado ao aluno que construa a figura separadamente indicando ângulos e lados correspondentes congruentes.

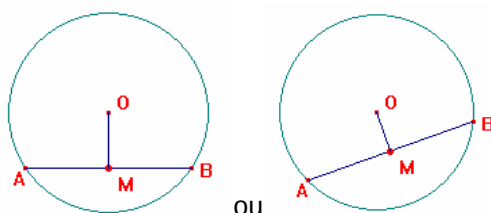
5. Considere uma circunferência de centro O e uma corda AB. Seja M o ponto médio da corda. Complete a frase abaixo usando as palavras sempre, nunca, às vezes. "O segmento OM é perpendicular ao segmento AB". Justifique sua resposta.

Espera-se que o aluno possa representar a figura:

Resposta esperada:

Construção 1: O centro O da circunferência não pertence à corda AB.

- OB e AO são congruentes, pois têm a medida do raio da circunferência.
- Os triângulos AOM e BOM são congruentes, pelo caso LLL: $OA \cong OB$ (raio da circunferência); $MA \cong MB$ (M é ponto médio) e $OM \cong OM$ (lado comum).



ou

Fig. 90a

Construção 2: O centro da circunferência O pertence à corda AB

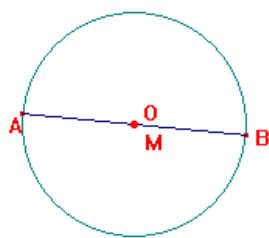


Fig.90b

Nesse caso, não haverá segmento OM, pois o ponto O coincide com M.

Portanto, pode-se afirmar que às vezes "o segmento OM é perpendicular ao segmento AB".

6. Um triângulo CDE pode ser obtido pela rotação de 90° do triângulo ABC, sentido anti-horário (positivo), ao redor do ponto C (Fig.91a). Podemos afirmar que o ângulo $\hat{CDB}$ tem medida igual a _____. Justifique sua resposta.

Essa questão está ligada às atividades que serão realizadas no Cabri II quando os alunos utilizarão a rotação. Nesse caso toma-se como congruente o triângulo CDE originado de uma rotação do triângulo ABC. É uma tarefa trabalhosa, senão difícil, pois, espera-se que o aluno possa identificar os elementos congruentes, que se lembre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , que o triângulo BCD é isósceles e, portanto, os lados BC e CD são congruentes.

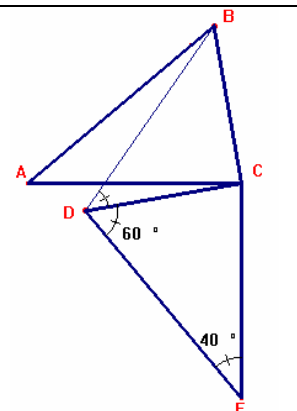


Fig. 91a

Identificação esperada:

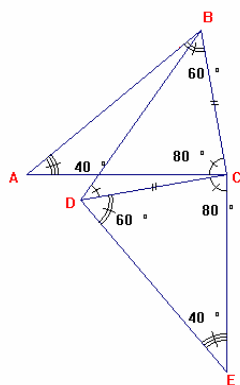


Fig. 91b

Resposta esperada: Nessa questão os alunos deverão identificar:

1. $\hat{ECD} = 80^\circ$, pois complementa a soma dos ângulos $40^\circ + 60^\circ$ do total 180° ,
2. $\hat{BCA} = 80^\circ$, $\hat{ABC} = 60^\circ$, $\hat{CAB} = 40^\circ$,
3. $\hat{BCA} = 80^\circ$ e $\hat{ACD} = 10^\circ$, pois o giro foi de 90° ($\hat{BCD} = 90^\circ$) sentido positivo anti-horário,
4. $\triangle BCD$ é isósceles, pois $BC \cong CD$.
5. De 3 e 4, temos que $\hat{CBD} = 45^\circ$ e $\hat{CDB} = 45^\circ$
Portanto, $\hat{CDB}$ é igual a 45° .

Algumas questões e orientações deverão ser feitas para auxiliá-los: 1) Quais são as medidas dos ângulos dos triângulos ABC e CDE? 2) Indique os ângulos e lados correspondentes. 3) Se girou 90° os lados correspondentes devem ter girado quantos graus? 4) Construa novamente a figura, identificando as medidas dos lados e ângulos, bem como seus lados e ângulos correspondentes congruentes.

7. Um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados congruentes. Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Estratégia 1:

- Representar dois triângulos ACD e BDC traçando uma bissetriz relativa ao ângulo C.
- Utilizando o caso LAL prova-se que os ângulos da base são congruentes, pois $AC \cong BC$ (lados congruentes do triângulo isósceles); CD lado comum; $\hat{A}CD \cong \hat{BCD}$ (ângulos formados pela bissetriz relativa ao ângulo C).

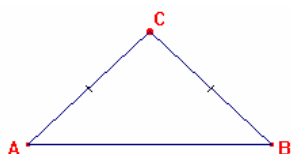


Fig. 92a

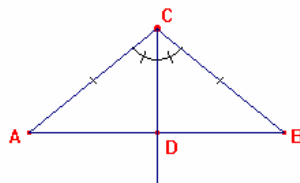


Fig. 92b

Estratégia 2:

- Como $AC \cong BC$, pode-se traçar, passando por C, uma mediana CD relativa ao lado AB, onde D é ponto médio de AB.
- $\triangle ACD \cong \triangle BCD$, pois pelo caso LLL prova-se que os ângulos da base são congruentes ($AC \cong BC$, CD é lado comum, $AD \cong BD$).

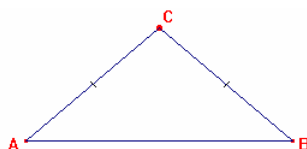


Fig. 93a

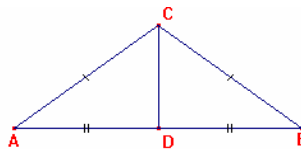


Fig. 93b

Caso o aluno tenha dificuldade será solicitado a ele que separe as figuras e identifique os elementos congruentes.

8. Seja o triângulo ABC e M o ponto médio do lado AC. Uma semi-reta com origem em B passando por M é traçada. P e Q são pontos da semi-reta. AP e CQ são perpendiculares à semi-reta dada. Prove que $AP \cong QC$.

Respostas esperadas:

Estratégia 1: O aluno poderá pensar num triângulo equilátero ou isósceles. Nesse caso o aluno poderá notar que o ponto M coincide com P e Q. Como M é ponto médio, $AP \cong QC$.

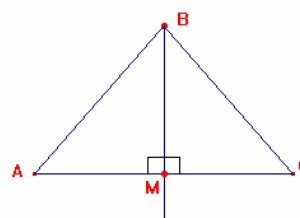


Fig. 94a

Estratégia 2: Se o aluno pensar e representar num triângulo escaleno, poderá obter uma figura como construída abaixo. Nesse caso, o aluno deverá justificar que os triângulos APM e OQM são congruentes pelo caso LAAo, pois: $\hat{A}MP \cong \hat{C}MQ$ - opostos pelo vértice; $\hat{APM} \cong \hat{CQM}$ (mediana do lado AC é perpendicular aos segmentos AP e CQ); $AM \cong MC$ (M é ponto médio). Portanto $AP \cong QC$.

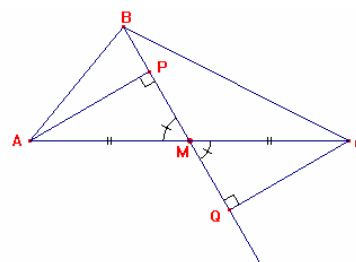


Fig. 94b

Estratégia 3: Podemos perceber também que AP é paralelo QC e a mediana do lado AC e o lado AC são as transversais. Com isso, os triângulos APM e OQM são congruentes pelo caso ALA $\hat{P}\hat{A}M \cong \hat{Q}\hat{C}M$ - ângulos alternos internos;
 $\hat{A}\hat{M}P \cong \hat{C}\hat{M}Q$ - opostos pelo vértice; $AM \cong MC$ (M é ponto médio). Portanto $AP \cong QC$.

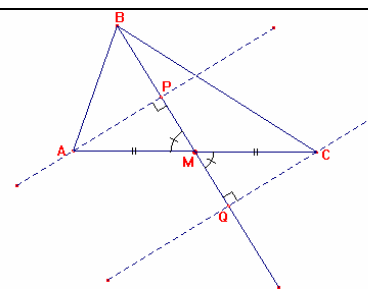


Fig. 94c

Espera-se que o aluno interprete o problema, identifique os elementos congruentes e se caso tiver dúvidas, deverá ser estimulado a representar triângulos e identificar elementos fornecidos pelo problema.

9. Dadas as retas r e s com ponto de interseção em O . B é simétrico do ponto A em relação à reta r e C é simétrico do ponto B em relação à reta s . O ponto B está na região em que as retas r e s formam o ângulo θ (teta). O que se pode dizer do ângulo $A\hat{O}C$ e relação ao ângulo θ ? Justifique.

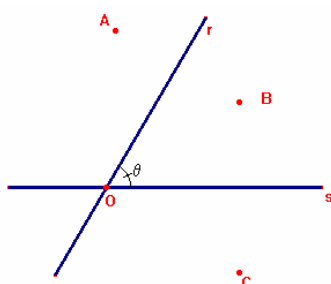


Fig. 95a

Nesta atividade o aluno poderá por em prática os conceitos estudados no Cabri sobre as transformações. Deverá saber que A é o ponto original, sendo que, pelo uso da simetria axial será obtido o ponto B em relação a reta r e, depois, o ponto C simétrico do ponto B pela reta s . O segmento AB deverá ser perpendicular ao eixo de simetria, reta r . A reta r é mediatriz do segmento AB e a reta s é mediatriz do segmento BC .

Possíveis construções:

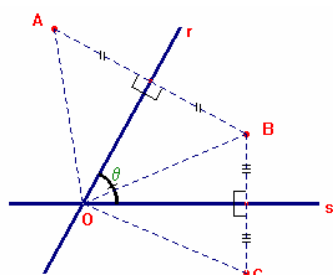


Fig. 95b

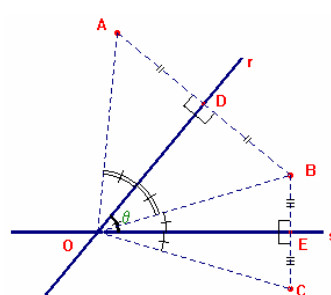


Fig. 95c

Dessa forma tem-se dois triângulos isósceles AOB e BOC. O aluno poderá utilizar os seguintes casos de congruência para justificar que $\widehat{AOC} = 2\theta$.

1. A e B sendo simétricos, temos $\widehat{AOD} \cong \widehat{DOB}$ pois os triângulos AOD e DOB congruentes pelo caso LAL: $\widehat{ADO} \cong \widehat{BDO}$ (OD é perpendicular a AB); $AD \cong BD$ (D é ponto médio); OD lado comum.
2. Da mesma maneira, prova-se que $\widehat{COE} \cong \widehat{EOB}$. Como $\theta = \widehat{DOB} + \widehat{EOB}$, então, pelos resultados obtidos em 1 e 2, temos que $\widehat{AOD} + \widehat{COE} = \theta$, portanto $\widehat{AOC} = \widehat{DOB} + \widehat{EOB} + \widehat{AOD} + \widehat{COE} = 2\theta$.

10. Considere uma circunferência de centro O e uma corda AB. Pelo ponto O trace uma reta perpendicular ao segmento AB. Essa reta intersectará o segmento AB num ponto G. Complete a frase usando as palavras sempre, nunca, às vezes. "G é ponto médio do segmento AB". Justifique sua resposta.

Essa questão tem por objetivo analisar a representação e construção da figura, a interpretação do texto pelos alunos, aplicação dos casos de congruência de triângulos. Os alunos, igualmente, deverão utilizar propriedades anteriormente estudadas como o ponto médio, mediatriz, retas perpendiculares.

Construções esperadas: Exemplificam-se abaixo algumas das possíveis construções que os alunos podem chegar a fazer: O centro da circunferência não pertence ao segmento AB.

Possivelmente, a figura que mais aparecerá será a figura como a Fig. 96a. Nesses casos, esperamos como justificativa: O triângulo AOB é isósceles, pois $AO \cong BO$ – raio da circunferência. Os triângulos BOG e AOG são congruentes pelo caso LAAo, pois, $AO \cong BO$ – raio da circunferência, $\widehat{OGB} \cong \widehat{OGA}$ – é dado que OG é perpendicular a AB; $\widehat{B} \cong \widehat{A}$ – resultado da questão 7. Portanto, $AG \cong BG$, e G está entre A e B e é ponto médio.

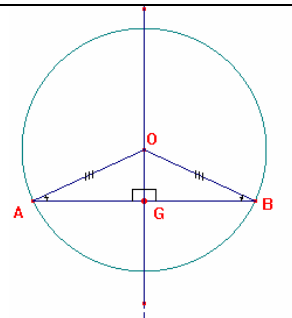


Fig. 96a

Outra situação deverá ser analisada pelos alunos:

O centro da circunferência pertence ao segmento AB.

Sendo AB o diâmetro da circunferência, temos que G coincide com o centro O da circunferência; $AO \cong BO$ são raios da circunferência. Portanto G é ponto médio de AB.

Como em todos os casos possíveis G é ponto médio, então, podemos acrescentar a palavra sempre.

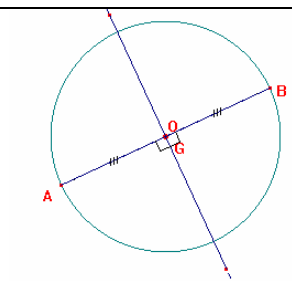


Fig. 96b

11. Os Quadriláteros ABCD e AEFG (Fig. 97a) são quadrados. Mostre que os segmentos DG e BE são congruentes.

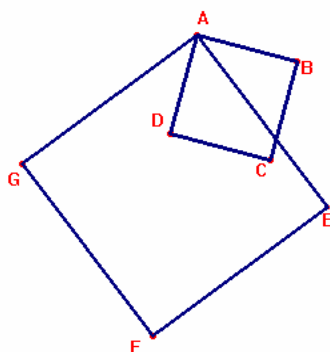


Fig. 97a

Esta atividade está associada ao estudo dos quadriláteros. No caso, o quadrado deverá ser entendido como sendo uma figura que tem os lados congruentes e os ângulos internos retos. O objetivo é verificar se os alunos conseguem perceber os triângulos congruentes ADG e EBA. Um dos itens que dificultará a visualização é o ângulo DAE que é comum, não faz parte dos dois triângulos a serem analisados, mas que é imprescindível para a decisão da congruência.

Construção esperada: O aluno deverá perceber que:

- $AG \cong AE \cong EF \cong FG$ – lados do quadrado AEFG.
 - $AB \cong BC \cong CD \cong AD$ – lados do quadrado ABCD.
 - $\widehat{BAD} = 90^\circ$ e $\widehat{EAG} = 90^\circ$ – ângulos dos quadrados ABCD e AEFG.
 - $\widehat{BAD} = \widehat{e} + \widehat{i} = 90^\circ$ e $\widehat{EAG} = \widehat{o} + \widehat{i} = 90^\circ$.
 - $\widehat{e} \cong \widehat{o}$ pois, $\widehat{e} + \widehat{i} = \widehat{o} + \widehat{i} = 90^\circ$ – $\widehat{i}$ é comum.
- Os triângulos ABE e EDG são congruentes pelo caso LAL:

$$\begin{cases} AB \cong AD \\ AE \cong AG, \text{ portanto } DG \cong BE. \\ \widehat{e} \cong \widehat{o} \end{cases}$$

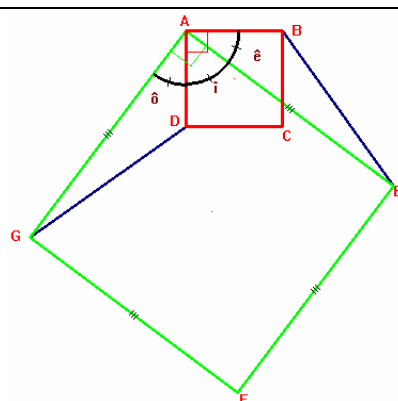


Fig. 97b

Na ocorrência de dúvida, a professora deverá auxiliar com um dos seguintes itens: 1) a pedir que identifiquem os triângulos congruentes; 2) a reconstruírem as figuras identificando os elementos congruentes, visando o que a questão pede; 3) a tentar imaginar o quadrado menor girando em torno de A.

Poderá auxiliar o aluno: imaginar ou representar o quadrado menor girando sobre o menor e analisar algumas posições em que poderá facilitar a visualização da congruência.

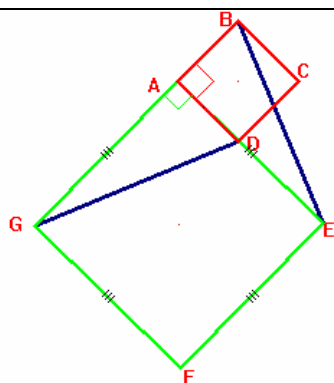


Fig. 97c

Fazendo com que um dos lados do quadrado ABCD coincida sobre o lado AE do quadrado EFGA: $DG \cong BE$, pelo caso LAL: $AG \cong AE$ (lados do quadrado EFGA); $AD \cong AB$ (lados do quadrado ABCD); $\widehat{GAD} \cong \widehat{EAB}$ (ângulos internos dos quadrados). Portanto $DG \cong BE$.

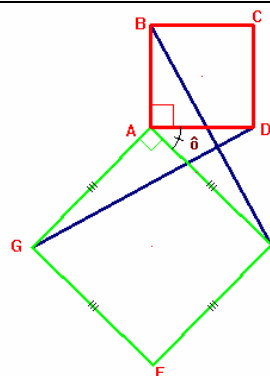


Fig. 97d

Levando os lados do quadrado ABCD para fora do quadrado EFGA, tem-se: Triângulo $ABE \cong ADG$, com $AB \cong AD$ (lados de ABCD); $AG \cong AE$ (lados de EFGA); e $\widehat{BAE} \cong \widehat{DAG}$ (sendo $\hat{a}$ comum), $\widehat{BAD} + \hat{a} = \widehat{GAE} + \hat{a}$. Portanto $DG \cong BE$.

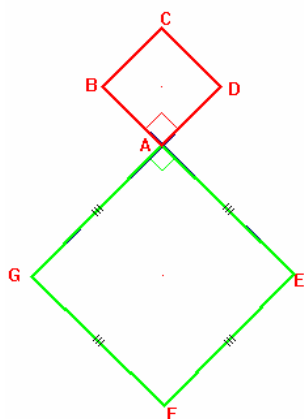


Fig. 97e

Sendo $\widehat{BAD}$ oposto a $\widehat{GAE}$ pelo vértice A, GD é perpendicular a EB. $DG \cong BE$ pois, $DG = GA + AD = BE = AE + BA$, com $GA \cong AE$ e $AB \cong AD$.

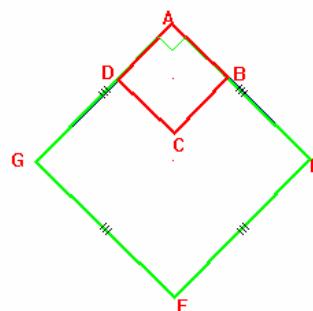


Fig. 97f

Nesse caso ao invés de somarmos, subtraímos as medidas dos lados dos quadrados. Portanto $DG \cong BE$.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

As pesquisas em educação matemática mostram que o conceito de congruência não se resume a uma definição, para a sua apropriação é necessário explorar atividades que levem, "o aluno a descobrir os significados e as relações entre os conceitos envolvidos" (Brito, 2001, p.74). Segundo Machado (2005) essas atividades devem permitir a transição da percepção à conceptualização, incorporando atividades de construção e representação

A rede conceitual proposta no capítulo 3 (pág. 83) foi aplicada na seqüência didática e os resultados dessa aplicação e as expectativas e objetivos descritos na análise a priori serão comparados e analisados nesse capítulo. No bloco 1 e 2, serão utilizados para análise, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico propostos por Parzsy (2001) e no bloco 3, as categorias de prova de Balacheff.

A análise buscará respostas para as questões de pesquisa, formulada no capítulo 3: *Em que medida o processo de transição do concreto para o espaço-gráfico contribui para a apropriação do conceito de congruência? E em que medida esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo?*

No quadro abaixo, é apresentada uma síntese dos principais objetivos de cada atividade da seqüência.

Quadro 8 - Quadro resumo dos objetivos das atividades da seqüência de ensino

B	A	Q	Atividade	Objetivo
1	1	1	Sacola com objetos congruentes	Utilização de material concreto, objetivando a descoberta do significado de congruência, de forma geral. (Objeto físico e validação perceptiva).
1	1	2	Explicar o que são objetos congruentes	Expressar, via escrita a concepção sobre os objetos congruentes em seu aspecto geral.
1	2	1	Figuras 1 e 2 bidimensionais	Explorar a superposição de figuras congruentes, por meio de representação de figuras bidimensionais. (Objeto físico e validação perceptiva).
1	2	2	Figuras 3 e 4 bidimensionais	Explorar a superposição de segmentos e figuras congruentes, por meio de representação de figuras bidimensionais. (Objeto físico e validação perceptiva).
1	2	3	Explicar o que são figuras congruentes	Expressar, via escrita a concepção sobre os objetos tri e bidimensionais congruentes em seu aspecto geral.
1	3	1	Jogo da	Utilização de vários objetos bidimensionais, objetivando a

			congruência	descoberta do significado de congruência por superposição. (Objeto físico e validação perceptiva).
1	2	2	Jogo da congruência	Explorar a congruência com a realidade do aluno. Analogia com jogo tradicional.
2	1	1-9	Transformações	Explorar as transformações isométricas utilizando o computador. Identificar os elementos e propriedades de cada transformação. Transição entre o concreto e o abstrato.
2	2	1-15	Placa quadriculada	Explorar a construção de triângulos e suas propriedades (condição de existência e os 4 casos de congruência de triângulos).
2			Institucionalização	Institucionalizar o objeto matemático congruência, em particular os 4 casos de congruência de triângulos.
3	1	1-11	Problemas	Explorar os casos de congruência de triângulos. (objeto teórico, validação dedutiva).

B: Bloco; **A:** Atividade; **Q:** Questão.

Atendendo a um convite para um curso de Geometria, com ênfase no estudo da Congruência, 13 alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo, participaram da sequência de ensino desta pesquisa. Inicialmente, esses alunos formaram 6 grupos, sendo 5 duplas e 1 trio: (D e G), (Ev e Va), (Am e Re), (Da e Ma), (Gi e Rs) e (A, El e Ro).

Nos dias da aplicação da sequência, novas duplas foram constituídas, em virtude da ausência de alguns alunos. Para tanto, foram consideradas nesta pesquisa, para fins de análise e acompanhamento das resoluções, as atividades das duplas (A, El e Ro), (Gi e Rs) e (D e G) que estiveram sempre presentes.

4.1. ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 1 - CONCRETO

Atividade 1: Sacola com objetos congruentes.

Os objetos contidos na sacola são congruentes dois a dois.

Questão 1. Procure regularidades nos objetos e identifique os pares de objetos congruentes. Cole, lado a lado, com fita adesiva, os pares de objetos congruentes na folha dada.

O objetivo dessa atividade era a apropriação do conceito de congruência pelos alunos, por meio da visualização (nível G0) de objetos de natureza física (Parzys, 2001). Para isso, os alunos deveriam organizar, comparar, selecionar e buscar regularidades entre pares de objetos congruentes que foram previamente selecionados e introduzidos em uma sacola. Através da percepção dos aspectos gerais dos objetos, os alunos deveriam chegar à conclusão de que objetos

congruentes mantêm a forma e o tamanho. As fotos (Fig. 98a e 98b) ilustram um dos momentos e o resultado final da atividade.



Fig. 98a



Fig. 98b

Não houve perguntas e pode-se perceber que os componentes de cada grupo participaram ativamente, trocando idéias e opiniões, separando ou agrupando os objetos antes de fixar na cartolina. A dupla (D e G) apresentou dificuldade para perceber, assegurar e descrever o que são objetos congruentes. Utilizou os termos "parecido, semelhante e igual", para designá-los: "*Objetos congruentes são **iguais***"; "*Ou objetos **parecidos**. Não são da mesma cor, são parecidos*"; "... **Semelhantes**. Como vocês estão vendo... colher, palito, copo, cabides são iguais, bolinha, copo de plástico, são objetos semelhantes". O diálogo mostrou que a dupla ainda estava bastante confusa em descrever o que são objetos congruentes.

A dupla (Ev e Va) comentou "*não mudar de forma*", "*não se pode quebrar, não deformar, não mudar o comportamento da forma*". As anotações do observador foram importantes para esclarecer o que a dupla realmente queria dizer. Além de anotar os procedimentos utilizados pela dupla, "*separação dos objetos conforme o formato, comparação e análise dos objetos*", *anotou, também, alguns comentários esclarecedores: "são congruentes quando são grandes, de mesma forma"; "congruentes, os que são iguais"* (disseram quais eram os objetos "iguais"). Com essas informações pode-se constatar que a dupla estava a caminho de atingir a noção do conceito de congruência, no que se refere ao aspecto geral de objetos congruentes.

Com relação à atuação dos grupos, alguns objetos que não eram tão evidentes, mas se comparados com outros, era possível perceber as regularidades no aspecto geral, dificultaram a identificação da congruência. Destacam-se as fitas congruentes, pois, todos os grupos tiveram, de alguma

forma, dificuldades para separá-las. A cor influenciou muito e gerou muita dúvida. Ignoraram o fato de se ter outros objetos congruentes dois a dois, com cores diferentes.

Quadro 9 – Resultado esperado e obtido da atividade 1 – concreto

Resultado Esperado	Resultados obtidos
 Fitas de 15 cm Fitas de 11,5cm Era esperado, uma resposta conforme a ilustração ao lado: duas fitas de 15cm(azul congruente à rosa) e duas fitas de 11,5 cm (azul congruente à rosa).	1. Cinco duplas, influenciadas pela cor, separaram as fitas ignorando o tamanho.  2. O trio, também influenciado pela cor, cortou as pontas das fitas de 15cm para que ocorresse a congruência. 

O grupo formado pelas três alunas tomou a iniciativa de cortar as fitas de modo que as tornassem congruentes. A aluna **EI** esclarece: *"Tinham duas fitinhas azuis e duas rosas. Ai, o que a gente fez para ficar congruente, tipo..., a gente cortou a azul para ficar do mesmo tamanho que a azul, a rosa com a rosa. Mas, tipo..., antes a gente deveria ter medido, tipo uma azul com uma rosa e a gente já cortou. Mas foi uma forma que a gente achou de ficar congruente"*.

De maneira geral, pode-se dizer que os grupos atingiram parcialmente o objetivo da atividade 1, pois, na cartolina representaram os objetos congruentes, com exceção das fitas, e nos diálogos e observações, os alunos mencionaram o tamanho e forma para caracterizar objetos os congruentes. Por outro lado, tiveram dificuldades em descrever (questão 2) o que perceberam das regularidades. Na busca de um significado para congruência, constantemente utilizaram o termo igual, coincide, parecido e semelhante para designar a congruência. A seguir, a questão 2 e as fotos que ilustram o momento em que responderam a essa questão.

Questão 2: Se você fosse explicar para um colega de classe o que são objetos congruentes, o que você diria a ele?



Fig. 99a

Fig. 99b

Esta questão objetivava explorar nos alunos a justificativa em linguagem natural. Os alunos deveriam explicar o que eram objetos congruentes. As respostas dos grupos à **questão 2**, são transcritas a seguir:

- **D e G:** Diria que são objetos semelhantes.
- **EV e VA:** São aqueles que podemos ou não mudar de forma. Ex.podem mudar de forma: clips, alfinete, luva e as fitas. Ex: não podem mudar de forma: botões, as porcas, os copos de brinquedo, as bolinhas “.
- **Da e Ma:** 1. Os objetos estão em pares, e os pares são idênticos uns aos outros, o que muda é o tamanho (copo descartável, colher descartável, fitas, parafuso, porca); 2. Diríamos que objetos congruentes são objetos com mesmo jeito, o que muda é o tamanho e a cor .
- **Am e Re:** Diria que são objetos iguais, ou seja, têm os mesmos formatos e são dois ou mais.
- **Gi e Rs:** Que são objetos que se ligam em um ponto.
- **El, Ro e An:** Em primeiro lugar, daria, a ele um exemplo que seria congruência. Para se ter noção disso, seria mais simples imaginar uma figura diante de um espelho. Se olharmos no reflexo, perceberemos que a figura se inverteu. No caso da geometria, invertem-se os pontos.



Fig. 100

Na foto, visualiza-se que o trio percebeu a congruência pela reflexão, pois a disposição dos objetos, realmente estão "espelhados", e está claramente explícito que escolheram os objetos de mesmo tamanho e mesma forma, para a apresentação na cartolina. Tal fato pode ser relacionado a utilização de

informações obtidas do estudo com as ferramentas de transformações do Cabri-géomètre (anexo 10), em particular a simetria axial.

No geral, a tarefa foi cumprida por todos os grupos. Não foi uma tarefa fácil, pois perceber os objetos congruentes e descrever o que são objetos congruentes são tarefas que estão entre a percepção e concepção do conceito de congruência, mas que segundo Machado (2005), é fundamental a articulação entre as atividades perceptivas e momentos de elaboração conceitual.

Verificou-se também, que os alunos separaram e fixaram os objetos na cartolina, adequadamente, mas tiveram dificuldades em redigir o que entendiam por objetos congruentes. Nesse caso, ocorre um conflito entre o que se percebe e o que, realmente, se sabe sobre a congruência (Parzysz, 2001). Exemplificando, a dupla (Gi e Rs) separou os objetos na cartolina adequadamente, com exceção das fitas, mas explicou que os objetos deveriam se ligar em um ponto. A ocorrência de tal evento conduz ao seguinte parecer: a dupla necessita visualizar outras regularidades e até mesmo irregularidades entre os objetos para decidir sobre a congruência. Importante ressaltar a ocorrência da dificuldade em expressar, por meio da escrita, tal como ocorreu na pesquisa para verificação e viabilidade de um estudo sobre congruência, descrito no capítulo 1, que ocorreu um menor número de acertos na questão 1 (descrição de figuras congruentes) do que na questão em que os alunos deveriam representar as figuras congruentes.

Na atividade 2 a seguir, os alunos continuaram a trabalhar com objetos de natureza física (no concreto) e tiveram a oportunidade de se aprofundar no conceito de congruência.

Atividade 2: Figuras planas congruentes

O objetivo dessa atividade foi apresentar uma situação em que o aluno tivesse que escolher entre medir, comparar ou sobrepor para validar sua resposta, dando continuidade na elaboração do conceito de congruência. Nesse caso, apenas olhar já não bastaria para justificar, com certeza, se os objetos eram congruentes. A exploração se deu em figuras com segmentos e curvas (situação 1) e com segmentos (situação 2). Os objetos são bidimensionais e para essas atividades foram deixados à disposição alguns instrumentos para auxiliar os

alunos na tomada de decisão: régua, tesoura, compasso, papel transparente, transferidor.

Situação 1: O que você acha sobre as figuras 1 e 2, elas são congruentes? O que você faria para decidir se as figuras são ou não congruentes?

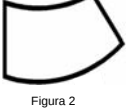
Figuras 1 e 2:		As figuras 1 e 2 são congruentes? ()sim ()não Justifique.
 Figura 1	 Figura 2	Explique o que você fez para justificar sua resposta.

Fig. 101

Os resultados da situação 1, da atividade 2, estão na tabela abaixo:

Situação 1: As figuras 1 e 2 são congruentes?				
Dupla	Sim	Não	Justificativa	Instrumentos solicitados pelos alunos
<u>1</u> D e G	x		Mesmo as figuras sendo de forma curva, elas são do mesmo tamanho. Se colocarmos uma figura em cima da outra, elas serão iguais.	Régua e comparação (visual).
<u>2</u> Ev e Va	x		Porque elas parecem ser diferentes umas das outras, mas acabam sendo idênticas. 1º medimos várias vezes e pensamos que fossem diferentes. 2º cortamos e vimos que era só impressão e que tinham as mesmas medidas.	Fita Régua Tesoura
<u>3</u> Am e Re	x		Porque as duas têm medidas iguais. Eu peguei uma fita e medi com uma linha na fita marcando os cm de cada figura.	Fita Régua
<u>4</u> Da e Ma	x		Medimos os lados com a régua e verificamos que a figura 1 tem essas medidas (10,5cm; 7cm; 14,5cm; 6cm) e a figura 2 essas outras medidas (10,5cm; 14,25cm; 6cm; 7cm).	Régua
<u>5</u> A,El e Ro	x		Elas são congruentes porque uma tem o mesmo tamanho e formato da outra. Recortamos a figura 2 e colocamos uma sobre a outra.	Tesoura
<u>6</u> Gi e Rs		x	Pois se grudarmos uma na outra elas vão se ligar por pontos, mas vai ser uma figura paralela a outra. 1º mudamos a posição da figura 2 e formamos uma nova figura ligada por pontos. Recortamos as figuras numa 2ª tentativa de achar a resolução.	Percepção visual Tesoura

Tabela 3 – Justificativas: atividade 1, com figuras planas, questão 1.

As duplas, em sua maioria, satisfizeram-se em medir as figuras 1 e 2 para validar suas respostas. Essa escolha mostra que a atividade foi resolvida no nível G1 de Parzysz (2001). O fato das duplas solicitarem mais a régua pode estar associado ao que eles utilizam, comumente, no cotidiano escolar. Por exemplo,

nenhuma dupla solicitou papel transparente para reproduzir e verificar a congruência por superposição.

A tesoura foi utilizada por três grupos, sendo que dois grupos (Ev e Va) e (Na, El e Ro) constataram a congruência por superposição de figuras ao afirmarem: *"colocamos uma figura sobre a outra"*.

A outra dupla (Gi e Rs), não percebeu que a congruência era justamente o que estava negando *"Pois se grudarmos uma na outra elas vão se ligar por pontos, mas vai ser uma figura paralela à outra"*. Para a dupla, a congruência ocorre se houver intersecção entre as figuras. A utilização da palavra "paralela" ou "intersecção" pode ter sido resgatada das atividades anteriores com o palito de sorvete ou nas atividades com as ferramentas do Cabri (vide anexo 10).

As duplas 4 e 6 ainda apresentam idéia equivocada do conceito de congruência de figuras. O aspecto visual ainda foi relevante para as duas duplas, dada das expressões: *"se colocarmos uma figura sobre a outra"*, ou *"se grudarmos uma figura na outra"*, sem que realizassem experimentalmente.

Apenas a dupla (Ev e Va) justificou, a congruência pela sobreposição e encaixe das figuras. No diálogo da Dupla Ev e Va destaca-se a surpresa de Va ao constatar que as figuras 1 e 2 eram congruentes. A dupla solicitou a fita métrica, instrumento que não era disponível, porém, foi fornecida uma fita de tecido, maleável como a fita métrica solicitada, e régua para a medição.

Quadro 10 – Diálogo da dupla Ev e Va da atividade 2, situação 1

		
Utilizando fita comum associada à régua, Ev auxiliava Va com marcações das medidas na figura. Va: Essa daqui é muito maior. Medir de novo? Executaram medições com a fita e a mediram na régua. Va: Aqui também vai dar 7... Com a régua não dá? É 7. É quase 7. 6,9. Ev: É igual. Va: 6,9cm e aqui, 5,8. Ev: aqui é menor mesmo, porque é menorzinho. Va: aqui tem 14,9. Ev: não espera aí. Va: deu 14,2. Va: 14,8 Ev: Aqui está maior e aqui está menor. 14,8.		

Não satisfeita com os resultados, a dupla solicitou uma tesoura.



Ev e Va resolvem recortar a figura e manter como parâmetro suas medidas.

Va: 7,5; 14,5; 5,8; 10,9.

Após recortar as duas figuras, seguem os seguintes diálogos.

Va: Então porque que aqui deu errado e aqui não.

Ev: É a figura...

Va **sobrepôs** uma figura sobre a outra e depois as colocava sobre a mesa uma ao lado da outra. Sem querer acreditar que as figuras se encaixavam ao sobrepor uma sobre a outra.

Va: Não é igual. Não pode ser igual

Ev: é igual sim Va. Olha. Mesma medida. Ficou certinho. (Ev sobrepõe uma figura sobre a outra)

Aos poucos, a dupla foi descobrindo como mostrar que realmente as figuras 1 e 2 eram congruentes e buscaram solução no recorte dessas figuras e, com surpresa, certificaram que eram congruentes usando a sobreposição.

Com a dupla D e G os diálogos foram os seguintes:

Quadro 9 - Diálogo da dupla D e G da atividade 2, situação 1

Ao receberem a atividade 2, imediatamente D comentou: essa parte aqui pode ser a mesma que aqui"– apontando para o arco maior da figura 1 e o da figura 2.	E: D agora está medindo...14 cm Vamos ver a parte de cima.Deu? D: 10,3cm. Aqui também 10,3cm E: Os lados da figura agora, 6cm. 6cm; 7cm, 7cm. Como podem ver as figuras têm lados iguais.	D: Mesmo as figuras sendo de forma curva, elas são do mesmo tamanho. Se colocarmos uma figura em cima da outra, elas serão iguais.

Esta dupla utilizou a validação pela visualização, depois medição e supôs a congruência por sobreposição, mas não chegou a realizá-la; generalizaram a possibilidade de congruência de figuras quaisquer.

Situação 2: Figura formada por segmentos

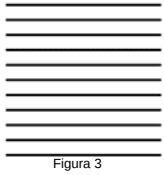


Figura 3

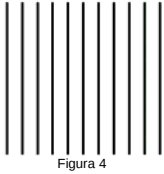


Figura 4

Os segmentos da figura 3 são congruentes aos segmentos da figura 4?
☐ sim ☐ não
Justifique.

Explique o que você fez para justificar sua resposta.

A figura 3 é congruente à figura 4?
☐ sim ☐ não
Justifique.

Explique o que você fez para justificar sua resposta.

Fig. 102

O quadro a seguir, apresenta os resultados dessa atividade.

Quadro 12 - Atividade 2– Figuras planas

A) Os segmentos da figura 3 são congruentes aos segmentos da figura 4?				
Dupla/ Trio	Sim	Não	Justificativa	Instrumentos Solicitados pelos alunos
1 D e G	x		Mesmo estando uma figura na horizontal e outra na vertical, elas são do mesmo tamanho.	Régua
2 Ev e Va	x		Pois elas têm a mesma medida. 	Tesoura Régua
3 Am e Re	x		Pois apesar de estarem uma deitada e outra em pé, são iguaizinhas (as linhas).	Régua
4 Da e Ma		x	Em branco	Régua
5 A, El e Ro	x		Elas são congruentes porque se a figura 4 for invertida e colocada por cima da figura 3 elas ficam com os mesmos segmentos. Mas se colocarmos da maneira que se pede no exercício, veremos que os segmentos não são congruentes.	Tesoura
6 Gi e Rs	x		Porque os segmentos se cruzam. Se colocarmos os segmentos da figura 4 sobre os segmentos da figura 3 e eles se ligaram por pontos médios.	Visual
B) A figura 3 é congruente à figura 4?				
Dupla/ Trio	Sim	Não	Justificativa	Instrumentos Solicitados pelos alunos
1 D e G	x		Se invertermos a 3 na vertical, poderemos ver que elas são congruentes.	Régua
2 Ev e Va	x		Pois elas têm as mesmas medidas e formas, mas uma está na vertical e outra na horizontal.	Régua

3 Am e Re	x		Pois se parecem muito e uma está deitada e outra em pé e por isso são iguais.	Régua
4 Da e Ma		x	Porque está com lados e tamanhos iguais. Medimos as linhas e os espaços entre as linhas.	Régua
5 A, El e Ro	x		Porque elas se encaixam se invertermos a figura 4 e colocarmos por cima da figura 3.	Tesoura
6 Gi e Rs	x		Porque se colocarmos uma figura sobre a outra elas irão se cruzar por pontos.	Percepção visual

Percebe-se que os alunos procuraram palavras para dar significado à congruência, associando-as à idéia de que as figuras congruentes devem ter o mesmo tamanho e forma, independente de estarem invertidas. Há, porém uma forte associação com as palavras igual e parecido para tentar explicar e designar a congruência. Apenas a dupla 6 respondeu utilizando a visualização, sem medir ou sobrepor. Nesse caso, a resolução apresentada ainda permanece no nível G0. A dupla 4 como apresenta o quadro, ainda não chegou numa conclusão sobre o conceito de congruência.

A questão 3 que pedia para o aluno explicar a um colega como identificar duas figuras congruentes, as duplas responderam:

- D e G: Não respondeu.
- Ev e Va: Sempre medir as figuras e sempre fazer com um colega para discutir as idéias.
- Am e Re: Diria que são objetos iguais, pois têm os mesmos formatos.
- Da e Ma: Diríamos que primeiro devemos comparar e ver se os lados estão iguais, se estiverem todos iguais podemos dizer que não são congruentes.
- A, Ro, El: eu diria que duas figuras são congruentes porque elas são semelhantes. Mas para ter certeza, nada melhor do que comparar uma com a outra, e colocar uma por cima da outra.
- Gi e Rs: Para observarem se os pontos se ligam formando pontos que se cruzam.

As respostas se assemelham às da primeira questão da atividade 1, porém, já incluem instrumentos de medição para comprovarem a congruência, a questão do tamanho e forma, mas ainda ocorre dificuldade na assimilação do conceito pela dupla 6 e a dupla 1 omitiu a resposta.

Atividade 3: Jogo da Congruência

Situação 1: No verso de cada um dos retângulos que aparecem no quadro (ver página 85) há figuras congruentes duas a duas. O objetivo é identificar esses pares congruentes.

Questão 1: Identifique abaixo se as figuras são congruentes duas a duas. Como você identificou?

Na **questão 1** da atividade 3, esperava-se que o aluno utilizasse a transparência do papel para sobrepor uma figura sobre a outra para identificar quais figuras eram congruentes a outras. Esperava-se também que os alunos chegassem à conclusão de que algumas figuras eram congruentes, independentes de estarem em outras posições. Além disso, esperava-se que os alunos identificassem que as figuras de mesmo formato, mas tamanhos diferentes não eram congruentes. Todos perceberam a congruência das figuras, mas de diferentes modos. Os resultados estão resumidos na tabela a seguir:

Perceberam a congruência?	Sim	Não	Como fez
D e G	X		Posicionou lado a lado as figuras.
Ev e Va	X		Por sobreposição
Da e Ma	X		Visualizou e comparou apenas.
El, Ro e A	X		Por sobreposição
Gi e Rs	X		Posicionou as figuras refletindo uma da outra.

Tabela 4 – Questão 1, atividade 3

D e G: "G identificou as figuras retirando-as dos envelopes. Juntou-as aos pares, girando ou invertendo as figuras pareando-as".

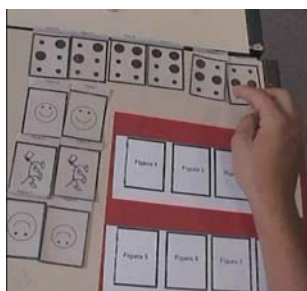


Fig. 104

Re e Am: "jogo da memória. Quem ganha são os que acertam os pares corretos".



Fig. 103

- Foi interessante a resposta dada pela dupla (Gi e Rs): "*É como se tivesse um eixo de simetria, onde as figuras se espelham*" que resgatou um conhecimento adquirido no processo de familiarização com o Cabri, na 1ª parte do curso, o eixo de simetria.

Questão 2: Com que jogo tradicional esse "jogo da congruência" se assemelha? Qual o objetivo do jogo tradicional?

O objetivo dessa questão é fazer uma associação do que é comum no dia-a-dia de nossos alunos. A brincadeira do jogo da memória é presente na vida de nossos alunos e é tomada como entretenimento, sem relação com o aprendizado

escolar. Procura-se estimular os alunos com relação a aprendizagem de congruência, aproveitando a idéia do jogo da memória que é encontrar figuras congruentes e fazer a integração entre todos os participantes.

Com exceção da dupla Gi e Rs que respondeu dominó, ainda sob a influência da reflexão. Os demais grupos associaram ao jogo de memória.

CONCLUSÃO DAS ATIVIDADES DO BLOCO 1

As produções dos alunos no bloco 1 mostraram que o conceito de congruência no seu aspecto geral foi percebido. Ao trabalharem com as figuras bidimensionais, os grupos procuraram validar suas respostas por meio de instrumentos como régua para medir e comparar, ou usando a tesoura para sobrepor uma figura sobre a outra e decidir se eram congruentes (situações 1 e 2 da atividade 2).

Percebe-se que as atividades realizadas anteriormente foram resgatadas por algumas duplas que mencionaram: "eixo de simetria em que as figuras se espelham". Isso se refere à parte 1, destinada à familiarização das ferramentas do Cabri, quando os alunos estudaram a simetria axial, mas, salienta-se que naquele momento, não foi dada nenhuma relação da simetria axial com a congruência. Nesse caso, o ambiente computadorizado contribuiu no aprendizado do grupo (Arcavi e Hadas, 2003).

Houve dificuldades nas respostas por escrito, relativas à descrição do conceito de congruência e forte associação com termos "igual e idêntico", não trabalhados nesta pesquisa, mas que os alunos utilizaram para tentar explicar ou substituir o termo congruência. O grupo (Da e Ma) ainda não percebeu a congruência por sobreposição, preferindo a comparação ou a medição, pois, em nenhum momento do bloco 1 mencionou a sobreposição.

4.2. ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 2

Atividades com o Cabri-Géomètre

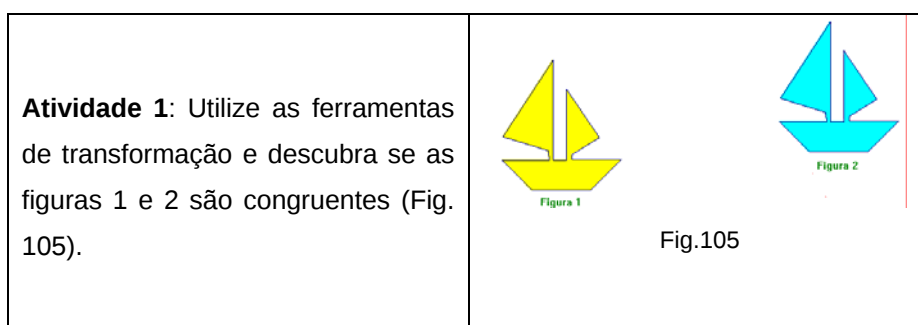
Uma semana após a familiarização com as ferramentas do Cabri, em particular, com o menu das transformações (translação, rotação, simetria axial),

os alunos retornaram ao computador e realizaram as atividades, relativas às congruências via transformações.

Este bloco explora as representações e visualizações de figuras para validação da congruência de figuras. A resolução dos alunos poderá estar nos níveis G1, G2 ou na transição entre G1 e G2 dos níveis de Parzysz.

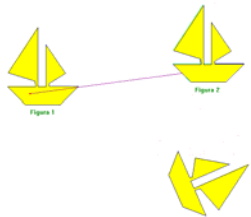
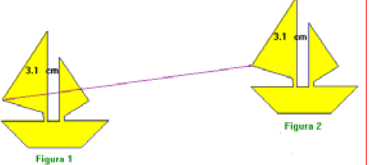
Na familiarização do software, os alunos puderam transladar uma figura criando um vetor; obter o simétrico de uma figura por meio de um eixo de simetria, rotacionar uma figura ao redor de um ponto tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário, sem menção à congruência.

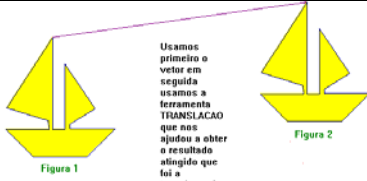
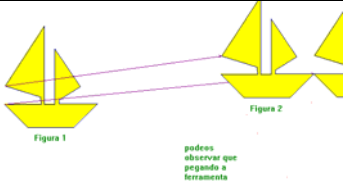
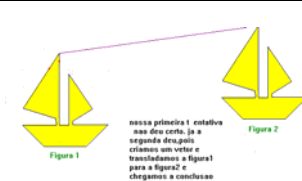
As atividades com o Cabri-géomètre foram realizadas em dois dias, sendo que o primeiro dia foi após as atividades do bloco 1. Todos os alunos estavam presentes nesse encontro. As alunas Ma e Ro faltaram no segundo dia da aplicação das atividades com o Cabri, assim Da se juntou à dupla El e A. A seguir as atividades:



O objetivo dessa atividade era, verificar se as figuras eram congruentes utilizando a ferramenta "Translação" do Cabri. Para isso o aluno deveria criar um vetor, com origem em um ponto qualquer da figura 1 até a sua imagem na figura B, que poderia ser de um vértice da figura 1 ao vértice correspondente na figura B e por fim transladar a figura com a ferramenta translação. Os resultados dos grupos foram os seguintes:

Quadro 13 – Justificativas da atividade 1- transformações

 1: D e G Usando o vetor e a translação colocamos o barco azul encima do amarelo. Fazendo isso provamos que eles eram do mesmo tamanho porque o barquinho cobriu o amarelo. Tentamos também usar a translação sem o vetor, mas não funcionou.	elas são idênticas umas às outras, apenas a essa conclusão usando o vetor e subseqüente as figuras.  2: E e V Sim são idênticas umas às outras. Chegamos a essa conclusão usando o vetor e	 3: D e M Não redigiu o comentário, mas na figura final, percebe-se que antes de utilizar a translação, a dupla mediu
--	--	---

mesmo tamanho porque o barco azul cobriu o amarelo. Tentamos também usar a translação sem o vetor, mas não funcionou.	sobrepondo as figuras.	um dos lados da vela do barco.
 Usamos primeiro o vetor em seguida usamos a ferramenta TRANSLACAO que nos ajudou a obter o resultado atingido que foi a transferência da figura 1 até a figura 2. 4: E, R e A Usamos primeiro o vetor em seguida usamos a ferramenta translação que nos ajudou a obter o resultado atingido que foi a transferência da figura 1 até a figura 2.	 podemos observar que pegando a ferramenta "vetor", e levamos para o outro barco de cima, depois utilizamos a ferramenta translação 5: R e A Podemos observar que pegando a ferramenta vetor e levamos para o outro barco de cima, depois utilizamos a ferramenta translação.	 nossa primeira tentativa não deu certo. Já a segunda deu, pois criamos um vetor e transladamos a figura 1 para a figura 2 e chegamos a conclusão de que as figuras são congruentes, pois elas são iguais. Usamos a ferramenta de transformações. 6: G e R Nossa primeira tentativa não deu certo. Já a 2ª deu, pois criamos um vetor e transladamos a figura 1 para a figura 2 e chegamos a conclusão de que as figuras são congruentes, pois elas são iguais. Usamos a ferramenta de transformações.

Todos conseguiram realizar a tarefa, porém com dificuldade. D e M, tentaram fazer medições. A análise dos resultados dessa tarefa conduz aos seguintes pareceres: 1) a idéia de deslocamento e movimento começou a surgir entre os grupos ao expressarem com as palavras "*levamos*", "*transladamos*" e "*transferência*". 2) a idéia de prova e justificativa nos grupos, em especial, (D e G) que constatou que estava provando ao afirmar que utilizou a translação para *provar* que uma figura era congruente a outra. 3) a congruência foi justificada pela sobreposição, mas o termo "*igual*" e "*idêntico*" aparecem como sinônimas de congruência.

Atividade 2: Utilize as ferramentas de transformação e descubra se as figuras 1 e 2 são congruentes.

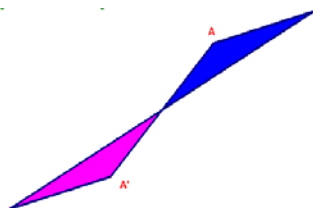
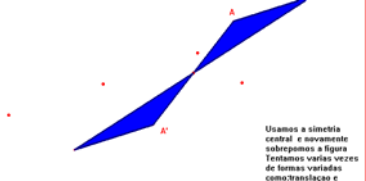
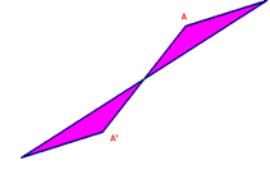
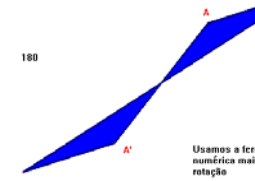
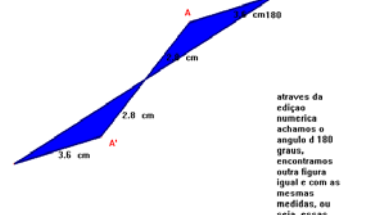
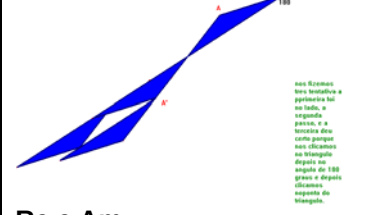


Fig.106

Era esperado que os alunos justificassem que as figuras eram congruentes, utilizando a ferramenta rotação e edição numérica de 180°, para girar em 180° (sentido anti-horário) uma figura sobre a outra, ou utilizar a ferramenta simetria central, ou ainda, a simetria axial (duas vezes).

Quadro 14 – Justificativas da atividade 2 - transformações

 Usamos a simetria central e novamente sobrepomos a figura. Tentamos várias vezes de formas variadas como: translação e rotação. E e V Usamos a simetria central e novamente sobrepomos a figura. Tentamos várias vezes de formas variadas como: translação e rotação.	 As figuras são congruentes. Mas para chegarmos a essa conclusão erramos muito. E finalmente usamos as ferramentas certas que foram EDIÇÃO NUMÉRICA e ROTAÇÃO. A e E As figuras são congruentes. Mas para chegarmos a essa conclusão erramos muito. E finalmente usamos as ferramentas certas que foram Edição numérica e Rotação.	 Usamos a ferramenta numérica mais a ferramenta rotação. D e G Com a ajuda da professora: Usamos a ferramenta edição numérica mais a ferramenta rotação.
 através da edição numérica achamos o ângulo de 180 graus, encontramos outra figura igual e com as mesmas medidas, ou seja, essas figuras são congruentes. Da e Ma Através da edição numérica achamos o ângulo de 180°, encontramos outra figura igual e com as mesmas medidas, ou seja, essas figuras são congruentes.	 aos Escoteiros tentamos a primeira foi no lado, a segunda posso, e a terceira deu certo porque nós clicamos no triângulo depois no ângulo de 180 graus e depois clicamos no ponto do triângulo. Re e Am Nós fizemos três tentativas. A primeira foi no lado, a segunda posso, e a terceira deu certo porque nós clicamos no triângulo depois no ângulo de 180° e depois clicamos no ponto do triângulo.	Ros e Gis Não gravou.

Percebe-se que os alunos tiveram muita dificuldade na utilização da ferramenta adequada. Utilizaram a medição, a translação, antes da rotação de 180° (sentido anti-horário). Não utilizaram a ferramenta simetria axial. Pode-se afirmar que não associaram o que estavam visualizando com o que já fizeram nas atividades com objetos bidimensionais.

Atividade 3: Utilize as ferramentas de transformação para verificar se a figura A é congruente à figura A'.

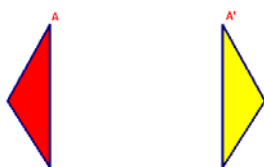


Fig. 107

Esperava-se que o aluno utilizasse a simetria axial. Para isso, deveriam construir uma mediatriz entre dois pontos correspondentes das duas figuras, por exemplo, um vértice da figura A e seu correspondente em A'. Os grupos conseguiram completar a tarefa e os resultados das tentativas dessa atividade estão resumidos abaixo:

	Medição	Translação	Simetria axial	Rotação	Simetria central	Composições de transformações
D e G	x		x			
Ro e Va	x		x		x	
El, Da e A			x			
Re e Am						x
Gi e Rs		x	x			

Tabela 5 – Resultado atividade 3, bloco 2

Duas duplas (D e G) e (Ro e Va) recorreram à medição, como fizeram no bloco 1, depois utilizaram a simetria axial. A dupla (Re e Am) relata que *"usamos a ferramenta de reta, depois a simetria axial, depois usamos o vetor e deu certo"*. Esta dupla utilizou um produto de uma reflexão com uma translação. Utilizou um lado do triângulo como eixo de simetria e obteve a imagem do triângulo original, e depois transladou a figura, utilizando um vetor. Não era necessária a construção da reta citada por eles, mas, talvez, o fato de tê-la construído, tenha ajudado a lembrar da ferramenta simetria axial.

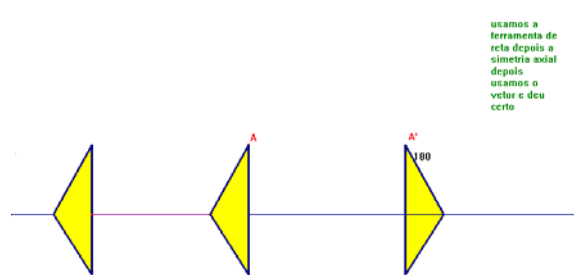


Fig. 108

O trio (El, A e Da) não teve dificuldade na resolução e "Devido aos outros exercícios que já fizemos relativos a essa, ficou fácil fazê-lo. Só tivemos que utilizar a mediatriz e a translação para provar que o A é igual ao A' ".

Atividade 4: As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?

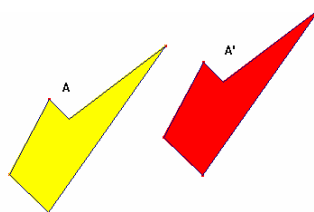


Fig. 109

Esperava-se que os alunos criassem um vetor para transladar a figura A. Os alunos não tiveram dificuldades em obter o resultado desejado, conforme previsto na análise a priori e todos realizaram a tarefa. Salienta-se que essa

atividade foi realizada após a atividade do barco a vela, que também estava relacionada com a translação.

Atividade 5: As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?

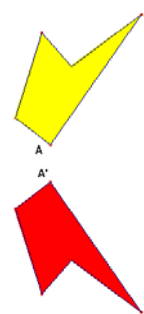


Fig. 110

Como foi previsto na análise a priori todos iniciaram pela rotação e finalizou com a simetria axial. Isso ocorre porque é perceptível um giro que parece ser no próprio plano que contém A e A', mas não é muito perceptível um movimento ou giro em que a figura A saísse do papel para sobrepor à figura B (simetria axial). A dupla (A e EI) descreve sua dificuldade: *"Tentamos utilizar a rotação, mas não deu certo depois tentamos a translação e foi pior ainda. Até que pegamos a mediatriz de um ponto ao outro, e utilizando a simetria axial transferimos uma figura na outra"* (Fig. 111).

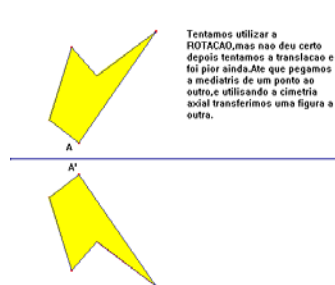


Fig 111

A dupla (Re e Am) dialogam: *"eu acho que a gente vai usar a edição numérica, vai girar em 180 graus"*. Depois de algumas tentativas Re comentou: *"Acho que a gente vai ter que usar a forma do espelho"*, atingindo o objetivo da atividade.

Atividade 6: As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?

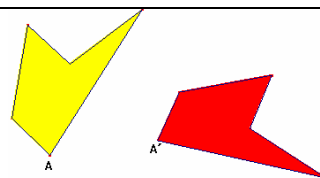
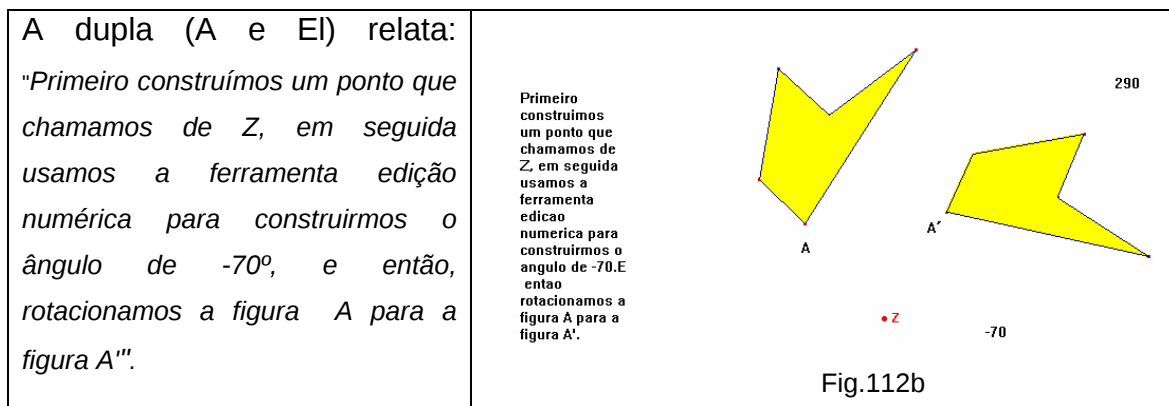


Fig. 112a

Para os alunos, essa atividade era visivelmente esclarecedora a utilização da rotação, mas o como fazer é que não foi fácil. Não conseguiram associar a composição de uma translação e uma rotação, porque na prática um único

movimento bastaria para levar A até B, sem pensar em sua particularidade, por isso, todos acabaram construindo um ponto livre entre a figura A e a figura B e tentaram a rotação da figura A ou B ao redor desse ponto criado. Foi por erro e tentativa. Exemplificando:



Mesmo tendo essa dificuldade, os alunos procuraram transformações para garantir a sobreposição das figuras.

Atividade 7: As figuras A e A' são congruentes. Transformar a figura A na figura A'. Que transformação você usou?

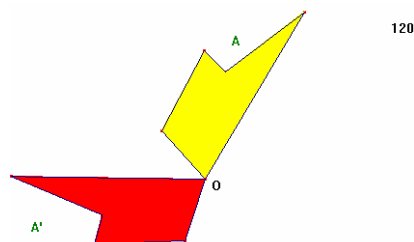


Fig. 113

Como esperado os grupos não tiveram dificuldades em rotacionar a figura A em torno do ponto O, em 120° , sentido anti-horário.

Percebeu-se que nas atividades 4, 5 e 6, os alunos se desprenderam da condição de medir a figura antes de tentar a transformação, sobressaindo-se a superposição de figuras.

Atividade 8: Utilize a ferramenta da caixa de transformação para verificar se os triângulos ABC e EDB são congruentes.

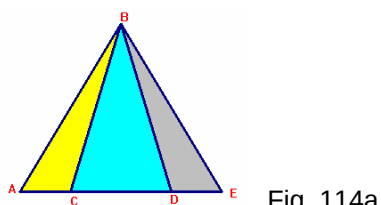


Fig. 114a

Como esperado, os grupos utilizaram a simetria axial ou alguma composição de transformações. Os resultados são mostrados na tabela abaixo:

	Medição	Translação	Simetria axial	Rotação	Simetria central	Composição de transformações
Re e Am			X	X		
Ro e Va	X	X	X	X		
El, Da e A			X			
Gi e Rs			X	X		

Tabela 6 – Resultado da atividade 8, bloco 2

Re e Am: "primeiro nós usamos um ponto qualquer depois pegamos a ferramenta edição numérica com rotação depois usamos reta e simetria axial e conseguimos obter este resultado".

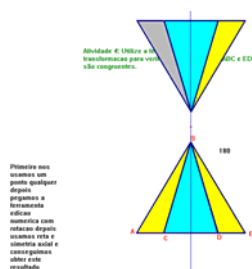


Fig.114b

Va e Ro: tiveram muita dificuldade nessa atividade. Fizeram várias tentativas, inclusive medição para certificação da congruência.

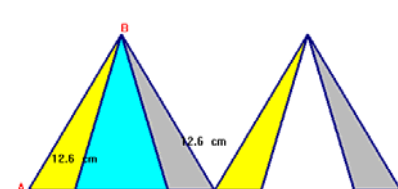
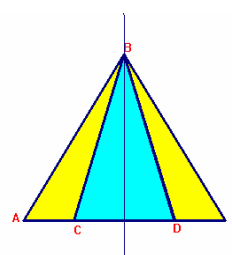


fig. 114c

Iniciaram com medições e com a translação:



nós fizemos uma reta e usamos a simetria axial para confirmarmos se eram congruentes ou não

Fig 114d

depois de várias tentativas e auxiliadas pela professora:

Atividade 9: Os segmentos (Fig 115a) MN e M'N' são congruentes. Que transformações geométricas levam o segmento MN no segmento M'N', de modo que M seja levado em M' e N seja levado em N'?

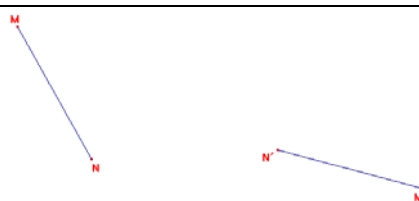


Fig. 115a

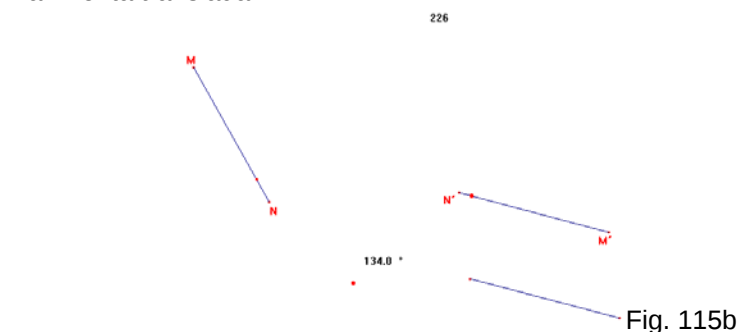
Esperava-se que os grupos fizessem composição de transformações para levar o segmento MN em M'N'. Os grupos tentaram utilizar apenas uma transformação, como na atividade 6. Percebe-se que a composição de duas transformações foi um obstáculo para a conclusão da atividade. Aos poucos os grupos foram se lembrando das particularidades de cada ferramenta e conquistando sua própria conclusão nessa atividade.

	Medição	Translação	Simetria axial	Rotação	Simetria central	Composições de transformações
Ro e Va		x	x	x		x
El, Da e A			x	x		
Gi e Rs		x		x		

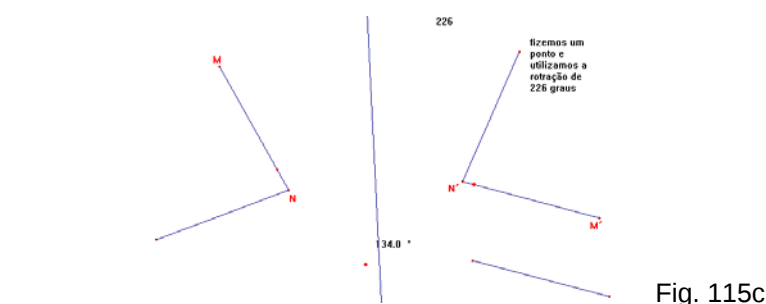
Tabela 8– Resultado da atividade 9, bloco 2

Não há registro de (D e G) e (Re e Am). Outros grupos apresentaram os seguintes resultados:

Depois de muitas tentativas a professora entrevistou:
P: existe alguma transformação que... Lembram daquelas figurinhas...
Va: Foi colocada uma sobre a outra.
P: O que se pode fazer para que se leve essa figura sobre essa?
V: Tente girar ela agora.
Tentaram também transladar.
Va: Tenta transladar.



Tentativa 2 Por fim, utilizaram a simetria axial e rotacionaram.



Rs e Gi
Nas primeiras tentativas não conseguimos porque estávamos erradas. Agora conseguimos, pois criamos um vetor do ponto N ao N', depois transladamos o segmento MN (clicando no segmento MN, e ajustando o

ângulo que estava 180°) e obtemos um novo segmento e colocamos um novo segmento e colocamos sobre o segmento $M'N'$.

nas primeiras tentativas não conseguimos, porque estávamos usando ferramentas erradas. Agora conseguimos pois criamos um vetor do ponto N ao N', depois trasladamos o segmento MN clicando no segmento MN, e ajustando o ângulo que estava 180° e obtemos um novo segmento e colocamos sobre o segmento $M'N'$.

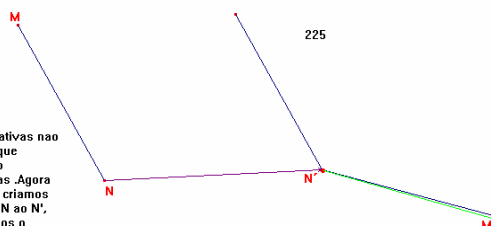
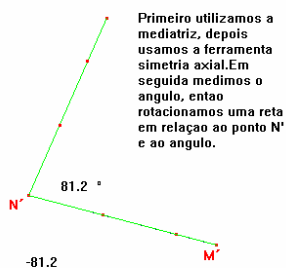
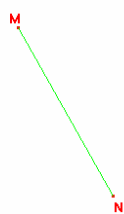


Fig. 115d

A e EI: Primeiro utilizamos a mediatriz, depois usamos a ferramenta simetria axial. Em seguida, medimos o ângulo, então rotacionamos uma reta em relação ao ponto N' e ao ângulo.



Primeiro utilizamos a mediatriz, depois usamos a ferramenta simetria axial. Em seguida medimos o ângulo, então rotacionamos uma reta em relação ao ponto N' e ao ângulo.

Fig. 115e

Com relação às atividades no Cabri, o observador fez as seguintes anotações: "Diferentemente da aula passada os alunos estão mais concentrados e fazendo poucas perguntas à professora. Nestes momentos, percebe-se que os alunos estão fazendo um verdadeiro experimento laboratorial com o software: experimentam um recurso, testam, apagam, refazem, comparam com o anterior, etc". A aula anterior referida pelo observador diz respeito ao encontro que ocorreu após as atividades do bloco 1 e não foi feita nenhuma revisão ou retomada no que eles fizeram na fase de familiarização do Cabri. Já no segundo dia, os alunos foram questionados e instigados a lembrarem de conceitos tais como transformações, retas perpendiculares, mediatrizes, retas paralelas, ponto médio, antes de voltarem às atividades, o que foi positivo, conforme comentou o observador.

Atividades com a placa quadriculada

O objetivo da placa quadriculada era fazer com que os alunos explorassem atividades de construção e ao mesmo tempo verificassem algumas propriedades dos triângulos, principalmente, os 4 casos de congruência de triângulos, resgatando a proposta de Machado (2005) que é importante transitar da percepção para a teorização, valorizando também as atividades de representações e as de construções. Nas construções dos triângulos os alunos apresentaram respostas no nível G1 e G2. Por exemplo, sem realizar a construção do triângulo, o aluno poderia perceber nas questões 7 e 8, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo não é igual a 180° , por isso, os triângulos não poderiam ser construídos com os dados fornecidos.

As atividades com a placa quadriculada foram realizadas em dois dias. No primeiro dia foram formadas as duplas: (El e A), (Gi e Rs), (Ro e Va), (D e G), e (Am e Re). No segundo dia: (El e A), (Gi e Rs), (Ev e Ma), (D e G), e (Rs e Va). As duplas (El e A) foram gravadas.

A seguir a orientação geral dada para a realização das atividades e as análises das questões:

Construa na placa quadriculada um triângulo ABC **a partir** das medidas dadas abaixo. Em seguida responda às questões 1 e 2.

Construção 1: Dado um lado (L): AB= 5 cm:

Esperava-se que os alunos construíssem um triângulo, cuja restrição era que um lado medisse 5cm, em seguida, para responder às duas questões, construíssem outro triângulo não congruente ao primeiro construído. Em todos os grupos, o primeiro triângulo construído foi o equilátero, em virtude da não compreensão de que somente o lado AB deveria ter 5cm. Já, para o segundo triângulo, construíram isósceles ou escalenos e triângulo retângulo. Não tiveram dificuldades em responder sim e sim nas duas questões.

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	sim

Construção 2: Dois lados (LL): $AB = 5\text{cm}$ e $AC = 3\text{cm}$

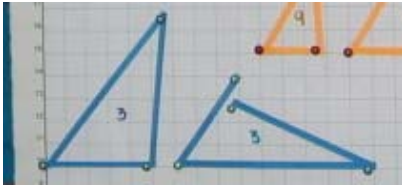
Esperava-se que construíssem triângulos a partir das medidas de AB ou AC. No grupo (El e A) comentam "Bom se congruente é igual, não congruente é diferente. Porque só esticar esse aqui oh. Dá um triângulo diferente...É só trazer o AC para cá". Apesar de se usar a palavra igual para congruente, El já pensa em outras classes de objetos que não fazem parte do que é ser congruente. Os grupos não tiveram dificuldades na construção, e para responder às questões:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	sim

Em virtude da construção 1, esta ficou fácil de se resolver e os grupos também não tiveram dúvidas.

Construção 3: três lados (LLL): $AB = 9\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$

Nesta construção, que é um exemplo de um dos casos de congruência de triângulos, esperava-se que os alunos duvidassem da não possibilidade de construção do segundo triângulo.

 Fig. 116	Em uma das resoluções da dupla Gi e Rs: Tentou-se construir os triângulos alternando-se a base e os lados e achou que não era possível construir no segundo triângulo, pois não observou que as aberturas entre os lados poderiam ser alteradas (as agulhas permitiam essa mobilidade).
---	--

Realmente, os alunos fizeram várias tentativas e não descartavam a hipótese de se construir um segundo triângulo não congruente ao primeiro construído. Responderam, inicialmente, sim para a possibilidade de construção de um triângulo não congruente ao primeiro. Isso ocorreu porque ao alterar o início da construção entre os lados AB, AB, AC, os alunos obtinham triângulos congruentes, mas em diferentes posições, o que gerou dúvidas. Somente depois de relacionar os dois triângulos quanto ao tamanho e a forma, é que os alunos fizeram as correções e responderam **sim** para a primeira questão e **não** para a segunda.

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Não

Somente a dupla (Am e Re) construíram na primeira tentativa.

Construções: 4: três lados (LLL): AB=7cm, AC=4cm, BC=2 cm

5: três lados (LLL):AB=10cm, AC=7 cm, BC=3cm

Esperava-se que as construções 4 e 5 não oferecessem dificuldades para responder às duas questões. Isso se comprovou, mas, alguns ficaram surpresos por não ser possível construir triângulos com três medidas fornecidas. Na construção 4 a mobilidade dos lados (representados pelas fitas) ajudou na conclusão, mas na construção 5, devido às dimensões da fita, alguns alunos obtiveram triângulos, o que foi pedido para que eles fossem mais precisos nas medidas ou utilizassem régua. Os resultados para a construção 4 e 5 foram:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Não
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Não

Construção 6: três ângulos (AAA): $\hat{A}=35^\circ$, $\hat{B}=70^\circ$, $\hat{C}=75^\circ$

Esta construção introduz o estudo da congruência dos ângulos nos triângulos congruentes. Era esperado que os alunos tivessem dificuldade na construção em virtude do não fornecimento das medidas dos lados do triângulo. Isso se comprovou em todos os grupos. da dupla (El e A) tem o diálogo:

- em relação aos lados El comentou: "... *mas é para a gente inventar. É para a gente tentar fazer um triângulo com o que eles deram. Esse aqui é só para a gente medir*".

Em seguida, a dupla chamou a professora, que perguntou:

P: É dado o lado? Quem vai fornecer as medidas dos lados?

As duas: A gente.

- Após construir o triângulo, a dupla chega a algumas conclusões com relação ao segundo triângulo:..."*mas pode ser maior...*" "*já deixa de ser congruente... então tem como fazer*".

Nessa construção e nas seguintes, os alunos fizeram uso do transferidor.

Na construção 6, as respostas às questões 1 e 2 foram:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Sim

Construções: 7: três ângulos (AAA): $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$, $\hat{C}=80^\circ$
8: três ângulos (AAA): $\hat{A}=80^\circ$, $\hat{B}=45^\circ$, $\hat{C}=30^\circ$

Estas medidas não possibilitam a construção de nenhum triângulo, pois se verifica a propriedade do triângulo, em que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . A soma das medidas dos ângulos da construção 7 é maior que 180° e na construção 8, a soma das medidas fornecidas é menor que 180° . A dupla (El e A) identificou essa propriedade: "*dá 185...então é por isso*".

Os demais alunos demoram na verificação da construção 7 e 8, pois, construíam os triângulos com duas medidas dos ângulos, mas não conferiam a medida do terceiro ângulo. Somente quando questionados com relação ao terceiro ângulo, eles identificaram a não possibilidade de construção. As respostas nas construções 7 e 8 foram:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Não
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Não

A dupla (EL e A) usou uma estratégia de construção: "A gente põe a tira e depois a gente corta", possibilitando acomodar os ângulos sem se preocupar com as medidas dos lados. Depois de algumas tentativas, El se lembra da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo: "Não dá porque se for 30° , vai dar aqui. Primeiro, a gente tem que ver que a soma dos ângulos tem que dar 180° ". "Por isso!!!!" A compartilha satisfeita da constatação de EL.

Pode-se afirmar que El exemplificou um caso de transição do nível G1 para G2, pois ela utilizou a construção, mas considerou fortemente a propriedade do triângulo e isso bastou para que encerrasse a construção.

- Construções:**
- 9:** dois ângulos (AA): $\hat{CAB} = 60^\circ$, $\hat{CBA} = 35^\circ$
- 10:** um ângulo (A): $\hat{A} = 45^\circ$
- 11:** um lado e um ângulo (LA): $AB = 5\text{cm}$, $\hat{BAC} = 35^\circ$

As seguintes repostas para as construções 9, 10 e 11:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Sim

Os alunos não tiveram dificuldades na resolução. Possivelmente porque as construções anteriores ajudaram na compreensão e no entendimento dos dados dessas construções. Como ressalta a dupla (El e A): "Independente do tamanho, o ângulo nunca muda, pode ser não congruente, mas o ângulo não muda. Na 7 (construção 7) já fomos analisando..."

Construção 12: Um lado, um ângulo e outro lado (LAL): $AB = 7\text{cm}$, $\hat{BAC} = 60^\circ$, $AC = 5\text{cm}$

Esta construção refere-se ao caso LAL de congruência de triângulos e esperava-se que os alunos construíssem triângulos sempre congruentes ao primeiro.



Fig. 117

Os grupos não tiveram dificuldades visto que já haviam construído triângulos com contendo as medidas dos ângulos e dos lados como condição inicial de construção. As respostas obtidas foram:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Não

Construção 13: um ângulo, um lado, outro ângulo (ALA): $AB = 6\text{cm}$, $\hat{BAC} = 45^\circ$ e $\hat{ACB} = 30^\circ$

Outro caso de congruência de triângulos, essa construção não apresentou dificuldade para os alunos e resolveram com facilidade. As construções anteriores facilitaram na compreensão e construção do item 13.



Fig. 118

As respostas obtidas com as construções foram:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Não

Construção 14: um lado, outro lado, um ângulo(LLA): $AB=5\text{cm}$, $AC= 3\text{ cm}$, $\angle CBA = 30^\circ$

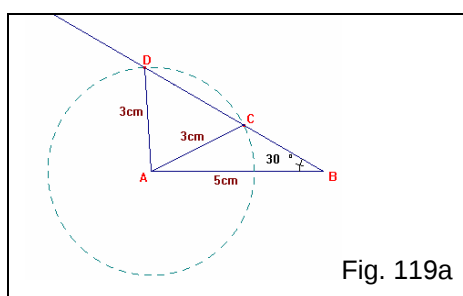


Fig. 119a

Era esperada uma construção como é mostrado em (Fig.119a), a construção do triângulo ABC e ABD, com medida de AC ou AD iguais a 3cm.

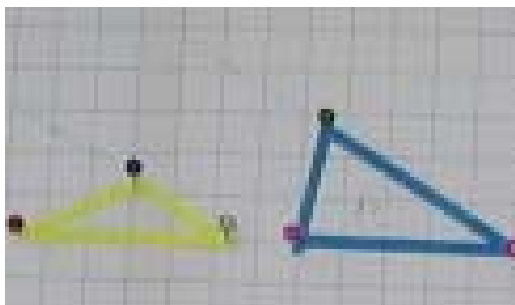


Fig.119b

Foi difícil a construção em virtude dos lados de 3cm e 5cm e o ângulo de 30° que particulariza a construção em apenas dois triângulos não congruentes. A dupla (El e A) encontrou sozinha a resolução; a manipulação das fitas fixada nas agulhas ajudou e facilitou encontrar o triângulo desejado (fig. 119b). Como ressalta El "estava com a fita assim... do nada, formou o triângulo".

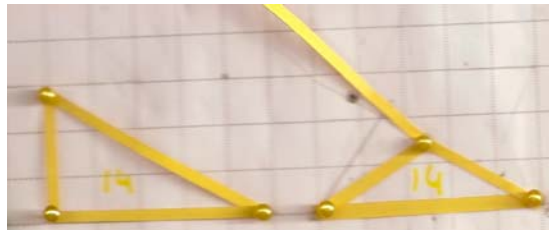


Fig. 119c

A dupla (Rs e Gi) construiu primeiro, um triângulo como o de cor azul da figura 119b, depois tentou obter um triângulo não congruente, iniciando a construção com a medida $AC=3\text{cm}$ e obteve um triângulo congruente ao primeiro posicionado diferentemente. Tentou novamente, iniciando com a medida de $AB=5\text{cm}$, obtendo outro congruente. Esse tipo de estratégia foi promissor nas atividades anteriores. Após a orientação da professora que pediu para usar a mobilidade das fitas, a dupla deixou de recortar a fita relativa ao lado BC e movimentou as fitas dos outros dois lados. Chegando afinal, na construção de um triângulo não congruente (Fig. 119c). Os demais grupos restringiram-se em construir o primeiro triângulo.

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Sim

Construção 15: um lado, um ângulo, ângulo oposto (LAAo): $AB=6\text{cm}$, $\hat{CAB}=45^\circ$, $\hat{CBA}=30^\circ$

Na análise a priori foi previsto que esta última construção traria dificuldades para a obtenção do primeiro triângulo, porque os alunos deveriam definir as medidas de dois lados do triângulo a partir do ângulo de 30° . Eles tiveram essa dificuldade e foi solicitado que construíssem o lado AB com 6cm, tomassem duas fitas e as fixassem nas extremidades do lado AB. Depois disso, trabalhassem os ângulos de 45° e 30° . O triângulo formado por eles foi como mostra a figura a seguir:

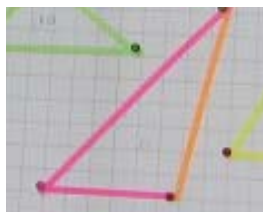


Fig. 120

Os alunos obtiveram as seguintes respostas:

Questão 1: É possível construir um triângulo a partir das medidas fornecidas?	Sim
Questão 2: É possível construir outros triângulos não congruentes ao que você construiu, usando as medidas fornecidas?	Não

A seguir, alguns momentos de cada grupo enquanto realizavam as tarefas e os resultados finais:

Quadro 15: Galeria de fotos – placa quadriculada



A organização dos resultados das construções foi realizada com o auxílio de três questões:

1. Explique a possibilidade ou a não possibilidade de construção de triângulos com as medidas dos experimentos 3, 4 e 5 (LLL)

Esta questão era para se verificar a condição de existência de triângulos. Os alunos observaram que as construções 4 e 5 não eram possíveis, afirmando, por exemplo, "as medidas são *incompatíveis*" e a construção 3 foi "*possível devido a diferença das medidas dos lados*". Porém, não ocorreu uma relação mais pertinente com relação às medidas dos lados. O desconhecimento da

propriedade: "*Em qualquer triângulo, a medida de um lado deve sempre ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados*", mostra que os alunos não estão familiarizados com particularidades do objeto matemático triângulo.

2. Explique a possibilidade ou a não possibilidade de construção de triângulos com as medidas dos experimentos 6, 7 e 8 (AAA).

Nessa questão, a dupla (EI e A) mostrou conhecimento com relação à soma das medidas dos ângulos de um triângulo e respondeu: "*na 6, foi possível construir porque a soma (das medidas) dos ângulos deu 180°* ". Exemplificaram uma resolução de nível G2.

Outros grupos restringiram-se em informar a possibilidade de construção do experimento 6, e a não possibilidade de construção dos experimentos 7 e 8. Esses alunos não estabeleceram relações entre os ângulos dos triângulos, fixaram suas conclusões na visualização da figura que não formou um triângulo (G1).

3. Analise os resultados da tabela e escreva abaixo o número do experimento e os casos em que a construção do triângulo foi única, isto é, apresentou as seguintes condições, simultaneamente: 1) foi possível construir um triângulo com as medidas dadas e, 2) não foi possível construir outros triângulos não congruentes.

Foi considerada decisiva a resposta dessa questão, pois introduzem os 4 casos de congruência. Como resposta, listaram as construções 3, 12, 13 e 15, como sendo as construções em que não foram possíveis construir triângulos não congruentes.

Finalizando, as ações da dupla (EI e A) chamaram a atenção do observador, que fez as seguintes anotações: "*elas constroem as figuras, falando o que executam (como se estivessem no Cabri): primeiro vamos achar o lado... depois encontramos um respectivo ângulo de s graus... certo lado tem y centímetros.... se aqui tem x graus, então lá tem que ter y graus... Vamos ter raciocínio lógico: se aqui é 80° , então aqui tem x graus e não tem como formar a figura...*". Essas anotações indicam que as alunas começam a ter uma maneira própria de resolver problemas, que será muito útil no bloco 3.

CONCLUSÃO DAS ATIVIDADES DO BLOCO 2

Nas atividades com o Cabri-géomètre, os alunos puderam explorar as transformações de translação, rotação, reflexão e suas combinações de forma experimental.

As produções dos alunos mostraram que o conceito de congruência foi associado à sobreposição de figuras. Em todos os momentos eles procuraram uma ou mais transformações para justificar a sobreposição de figuras. A idéia de deslocamento e movimento começou a surgir entre os grupos ao expressarem as palavras "*levamos*", "*transladamos*" e "*transferência*" – atividade 1.

Trouxeram da atividade anterior o fato das figuras poligonais congruentes manterem as medidas dos lados, pois, em vários momentos realizaram medições dos lados das figuras (Atividades 1, 2 e 3). Não relacionaram ainda, a congruência com as medidas dos ângulos.

A dupla (D e G) constatou que estava provando ao afirmar que utilizou a translação para "*provar* " que uma figura era congruente a outra, referindo-se a um dos objetivos desta pesquisa.

Nas atividades com a placa quadriculada, ressalta-se que os alunos puderam explorar melhor o objeto matemático triângulo, pois os resultados das construções 4 e 5, mostraram que não tinham o conhecimento sobre a condição de existência de triângulos, fato que ninguém relacionou o resultado da construção com a propriedade "*Em qualquer triângulo, a medida de um lado deve sempre ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados*", e como justificativa apenas afirmaram que as construções não eram possíveis porque "*as medidas são incompatíveis*" – validação perceptiva (G0). Os ângulos também foram aos poucos introduzidos e percebidos como elementos preponderantes. A dupla (E1 e A) percebeu a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, após a construção "*Não dá porque se for 30° , vai dar aqui. Primeiro, a gente tem que ver que a soma dos ângulos tem que dar 180°* " (construções 7 e 8), fato que favorece a passagem do nível G1 para G2. Além disso, o ângulo foi percebido como elemento de congruência e não congruência "*Independente do tamanho, o ângulo nunca muda, pode ser não congruente, mas o ângulo não muda. Na 7 (construção 7) já fomos analisando...*" (construções 9, 10 e 11).

As atividades foram extensas (fizeram pelo menos 30 construções), mas os alunos se dedicaram e cumpriram as tarefas. Os instrumentos régua, transferidor, fitas, agulhas e marcações da placa quadriculada auxiliaram na construção dos triângulos. Não tiveram problemas com o transferidor. As agulhas e as fitas que permitiam a mobilidade dos lados do triângulo auxiliaram, principalmente, nas construções 4, 5, 14 e 15, descritas abaixo.

Todas as atividades da placa quadriculada que foram possíveis construir um triângulo não congruente ao primeiro construído, os alunos não tiveram dificuldades e a construção foi breve. Essas construções apresentavam a medida de pelo menos um lado ou pelo menos um ângulo, e as demais medidas eram por conta do aluno: construções 1 (L), 2 (LL), 9 (AA), 10 (A), 11 (LA), 4 (LLL), 5 (LLL),

Dos 4 casos de congruência de triângulos, as construções: 3 (caso LLL), 12 (caso LAL), 13 (caso ALA), geraram dúvidas aos alunos com relação à congruência dos triângulos construídos, em virtude da mudança de posição dos triângulos, fato incomum para os alunos.

Nas construções 7(AAA) e 8 (AAA), houve demora na construção porque os alunos deixavam de verificar que a medida do terceiro ângulo não era compatível à medida fornecida. Apenas os grupos (El e A) e (Gi e Rs) conseguiram construir os triângulos da construção 14 (LLA), em virtude da restrição que as medidas fornecidas causavam. Com os materiais disponíveis (régua, transferidor, placa quadriculada, fitas e agulhas), somente utilizando a mobilidade das fitas que a construção na placa seria possível.

Os alunos construíram os triângulos sabendo que o segundo (não congruente ao primeiro) deveria ter dimensões diferentes ou formatos diferentes. Por isso, pode-se concluir que as atividades do bloco 1 favoreceram a realização das atividades de tarefas no nível G1 na placa quadriculada. Na construção ocorreu a passagem de G1 para G2 de Parzsy (2001). Dessa forma, os alunos analisados se apropriaram dos 4 casos de congruência de triângulos.

INSTITUCIONALIZAÇÃO

A partir dos resultados apresentados da questão 3, em que os alunos listaram os casos de congruência, foi realizada a institucionalização do conceito de triângulos congruentes.

Não tiveram dificuldades em identificar os elementos e os casos de congruência de triângulos. Institui-se o uso do símbolo de congruência $\cong$, os tracinhos indicando a congruência de lados e ângulos dos triângulos, as condições mínimas para a ocorrência dos 4 casos de congruência de triângulos.

Caso Lado, ângulo, lado (LAL)	Se $\begin{cases} \underline{AB} \cong \underline{PQ} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \\ \underline{AC} \cong \underline{PR} \end{cases}$	então: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
Caso Ângulo, lado, ângulo (ALA)	Se $\begin{cases} \underline{AC} \cong \underline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \\ \underline{AB} \cong \underline{PQ} \end{cases}$	então: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
Caso Lado, lado, lado (LLL)	Se $\begin{cases} \underline{AB} \cong \underline{PQ} \\ \underline{AC} \cong \underline{PR} \\ \underline{BC} \cong \underline{QR} \end{cases}$	então: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
Caso Lado, ângulo, ângulo oposto (LAAo)	Se $\begin{cases} \underline{AC} \cong \underline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{C} \cong \hat{R} \end{cases}$	então: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

Se dois triângulos apresentam uma dessas condições então os dois triângulos são congruentes.

A) = $\begin{cases} \underline{AC} \cong \underline{PR} \\ \underline{CB} \cong \underline{RP} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \end{cases}$ caso LAL

B) = $\begin{cases} \underline{AC} \cong \underline{PR} \\ \underline{AB} \cong \underline{PQ} \\ \hat{C} \cong \hat{R} \end{cases}$ caso LLL

C) = $\begin{cases} \underline{BC} \cong \underline{PR} \\ \hat{B} \cong \hat{P} \\ \hat{A} \cong \hat{Q} \end{cases}$ (LAAo)

Fig. 121

Foram realizados alguns exemplos para a identificação dos casos de congruência, sem que houvesse dificuldades. Os quatro casos de congruência de triângulos foram apresentados na institucionalização após a constatação dos resultados da placa quadriculada.

4.3. ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 3 – PROVA

A análise do bloco 3 será feita considerando-se as classificações de prova, proposto por Balacheff (1988) e os níveis Parzsy (2001). Este bloco refere-se ao uso de objetos teóricos obtidos por meio de experimentação anterior, utilização de justificativa por meio de linguagem natural e ou simbólica. A proposta das atividades foi de utilizar os 4 casos de congruência de triângulos para justificar a resolução dos problemas. Esta última sequência foi realizada em dois encontros de 3 horas cada.

Em virtude das ausências de alguns alunos nos dias anteriores, para estas atividades, eles mesmos se organizaram e formaram os seguintes grupos: (Re e G), (Va e Ro), (Da e Ma), (D e Ev), (Rs e Gi) e (El e A). Os diálogos da dupla (El e A) foram acompanhados com um gravador.

12. Uma reta é perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio M. Seja P um ponto qualquer da reta, diferente de M. Prove que $PA \cong PB$. Justifique.

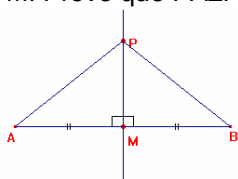


Fig. 121a

Esperava-se que os alunos identificassem quais eram os dois triângulos e os respectivos elementos congruentes na figura fornecida no problema e que utilizassem o caso LAL de congruência de triângulos para justificar que $PA \cong PB$. Caso algum grupo tivesse dificuldade seria solicitado que separassem os triângulos e identificassem os elementos congruentes.

Na resolução deste primeiro problema, os grupos fizeram referências às atividades realizadas no Cabri. Os grupos (D e Ev) e (Ma e Da), redigiram (em linguagem natural) e outro grupo (Re e G) representou com um desenho, modificando a figura dada. A seguir a resolução do grupo (D e Ev) que redigiu:

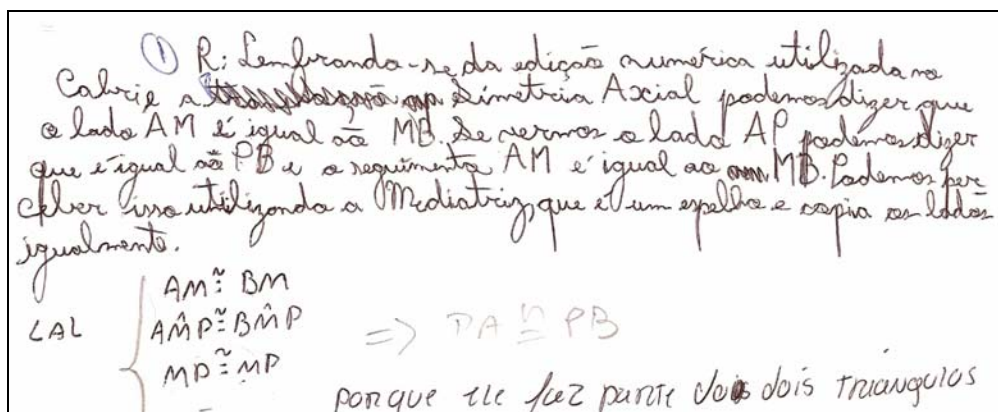


Fig.121b

Esta dupla tentou visualizar a figura como se estivesse utilizando o Cabri, e resgatou o fato da mediatriz estar ligada à simetria axial, deixando a figura espelhada uma da outra. Neste momento, em que essa dupla tentou utilizar as informações do Cabri, pode-se categorizar a resolução do problema, como sendo um exemplo *genérico*, pois a validação ocorre por meio de um caso particular (uso de simetria axial), e apresenta propriedades desse caso (uso de mediatriz). Após esta tentativa, a dupla concluiu a resolução, utilizando o caso LAL de congruência de triângulos. A dupla (Re e G) também utilizou informações que indicam serem obtidas do Cabri, porém, utilizou a representação como forma de expressão (Fig. 121c).

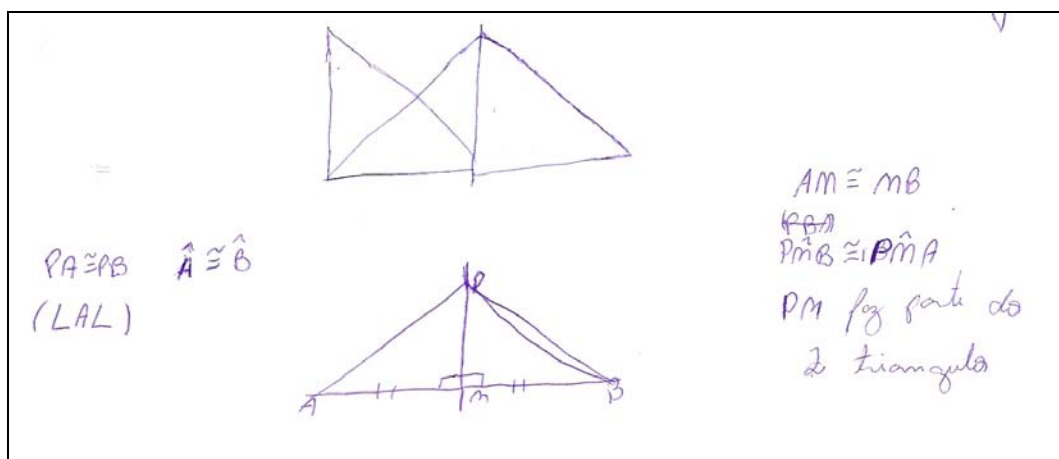


Fig. 121c

Percebe-se que a dupla (Re e G) iniciou a resolução com o deslocamento do triângulo PBM, de modo que o lado MB se sobrepõe ao lado AM (é possível, pois na figura indica que AM é congruente a MB), tal como poderia ser feito no Cabri. Nesse caso, a dupla poderia estar pensando na translação, mas omitiu o uso do vetor. pode-se afirmar que se trata de um exemplo *genérico*, pois, a validação ocorreu tomando-se um representante de uma situação particular para

tentar explicar a validação de uma proposição. Em seguida, justifica usando o caso LAL, que os triângulos APM e BPM são congruentes e identifica PM, como o lado comum.

No diálogo da dupla (El e A) os elementos da figura dada foram aos poucos sendo identificados e também relacionados ao uso do Cabri: "... *mediatriz* essa reta aqui a gente viu isso no cabri"; "... Porque se fosse pelo Cabri a gente considerava essa reta *perpendicular* uma mediatriz"; "... tipo AM congruente a MB. Então já é um caso lado ai". Ao final, essa dupla atingiu parcialmente a resolução do problema, pois, elas consideraram apenas duas condições $AM \cong MB$ e $\hat{A}MP \cong \hat{B}MP$ e já concluíram que AP era congruente a PB. Organizaram suas justificativas por meio de linguagem natural e linguagem simbólica, apontando como consequência os lados AP e PB congruentes, sem que fossem instruídas dessa maneira. A dupla apoiou-se também, na representação da figura dividida em duas partes congruentes. A seguir a resposta de (A e EL).

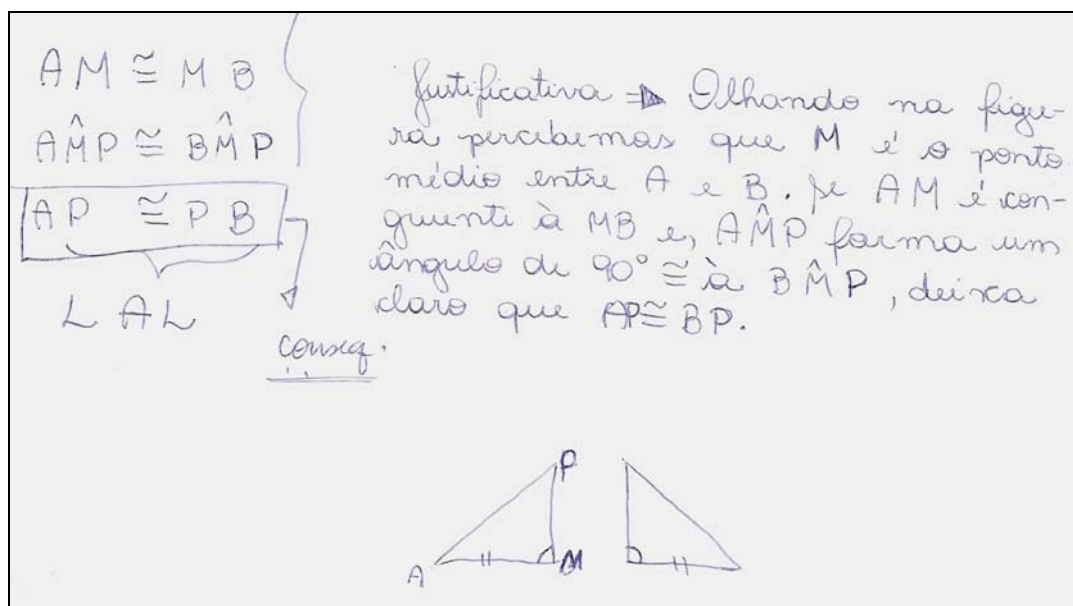


Fig. 121d

A dupla (Va e Ro), inicialmente apresentou resposta que pode ser categorizada como sendo empirismo ingênuo: "sim, pois o ângulo é igual e os lados também", sendo posteriormente auxiliada pela professora, que identificasse triângulos que poderiam ser congruentes e os desenhassem separadamente para tentar justificar, utilizando os casos de congruência, que PA era congruente a PB.

De forma geral, os grupos atenderam parcialmente as expectativas, as duplas (El e A), (Rs e Gi), apesar de utilizarem o caso LAL como justificativa, identificaram apenas dois elementos congruentes; cada dupla, a sua maneira, começou a organizar sua resposta, seja por meio de linguagem natural ou simbólica, com estilo próprio de apresentação.

13. Rafael quer ir da cidade A para a cidade B. Porém a estrada que liga diretamente as duas cidades está interditada. Ele tem de optar, então, por dois caminhos possíveis, veja a figura. Qual o menor caminho a ser percorrido: ir de A para C e depois B ou ir de A até D e depois B? Justifique sua resposta.

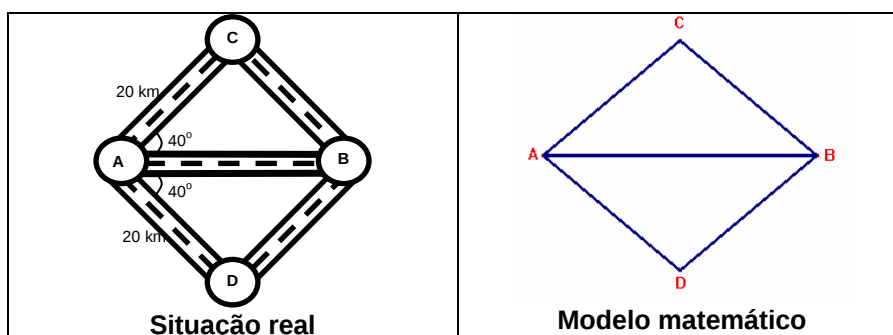


Fig. 122

Esperava-se que os alunos respondessem que não fazia diferença entre os caminhos (A para C e depois B) e (A para D e depois B), utilizando o caso LAL de congruência de triângulos; que identificassem o lado comum AB para os dois triângulos congruentes.

A dupla (D e Ev) resolveu completamente o problema. Identificou o lado AB comum aos dois triângulos congruentes, desenhou, separadamente os triângulos ABC e ABD e identificou os elementos congruentes (Fig. 123).



Fig.123

Os demais grupos, afirmaram que não importava o caminho escolhido e, alguns, indicaram o caso LAL de congruência de triângulos, mas as suas justificativas não estavam de acordo com as condições desse caso de congruência. A análise das respostas leva a concluir que os alunos apresentaram as seguintes dificuldades: 1. perceber o lado comum; 2. considerar e utilizar a condição "se...então..." adequadamente. Acredita-se que a utilização da condição "se... então...", não seja comum para esses alunos, sendo, para eles, peculiar a esta seqüência. Essa dificuldade está também associada ao uso inadequado dos casos de congruência e o lado comum que é uma dificuldade a ser superada.

A seguir, a justificativa e o diálogo da dupla (El e A):

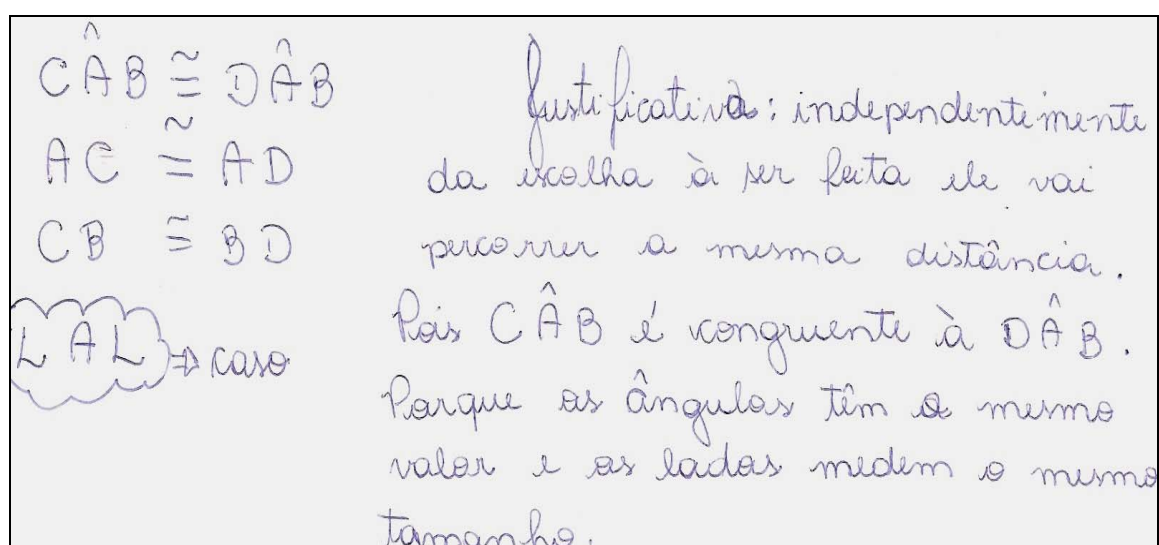


Fig. 124

E: Oh, já está dando aqui, que tem o ângulo né. Assa. Achou!!!!

E: CAB congruente a DAB. Ai vem...

A: CAB é congruente a DAB? BAD né, Elaine.

E: Dá no mesmo. já está dando o lado aqui.

A: 20 km

E: AC é congruente a AD. Isso significa que CB é congruente a BD.

A: BC é congruente a BD né.

E: então o caso é...

A: ângulo lado lado

E: É...professora... Pode ser ângulo lado lado?

P: Nós temos casos de congruência assim?

A: então pode ser Lado ângulo lado. Então só pode ser um desses 4 casos.

E: então é lado ângulo lado. Porque o ângulo está no meio, né.

No diálogo, pode-se notar que a dupla percebeu os lados e o ângulo congruentes devidamente, mas a justificativa, por escrito não ficou de acordo com o diálogo. Apesar da intervenção da professora, a dupla ainda mantém o lado CB e BD como condição de congruência do caso LAL, talvez, por não estar familiarizada com a utilização da condição "se...então...". No diálogo, parece que elas perceberam o lado comum AB, mas ainda não se deram conta da sua importância.

A dupla (MA e Da) poderia explorar mais a figura que fizeram, pois elas separaram os dois triângulos, e entre eles posicionou uma reta indicando, possivelmente, um eixo de simetria (Fig. 125).

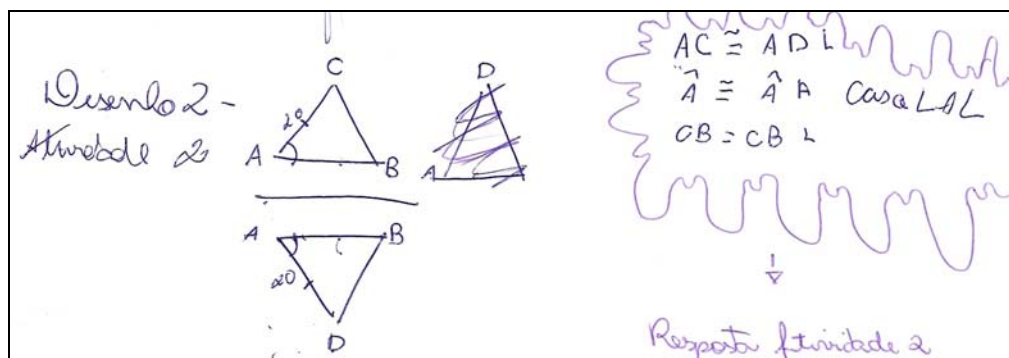


Fig. 125

Essa dupla também não indicou adequadamente os elementos congruentes para se chegar no caso LAL. Conclui-se que nessa atividade os alunos não atingiram os objetivos esperados.

14. Um avião levanta vôo para ir da cidade A à cidade B, situada a 500km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção do vôo de um ângulo de 90° . Se a rota não tivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500km previstos. **Justifique** a sua resposta.

O objetivo desse problema era explorar, inicialmente, a interpretação, evidenciando a geometria espaço-gráfica (nível G1) de Parzys, pois ao ler a questão, o aluno poderá representar graficamente a situação proposta. Indicará o ângulo reto e as medidas dos lados fornecidos.

Os alunos tiveram dificuldades em interpretar e representar a situação do problema. A posição da cidade A com relação à cidade B, era determinada pelas

informações complementares do problema e o que se deveria considerar inicialmente era apenas a distância de 500km (Fig. 126 e 127).

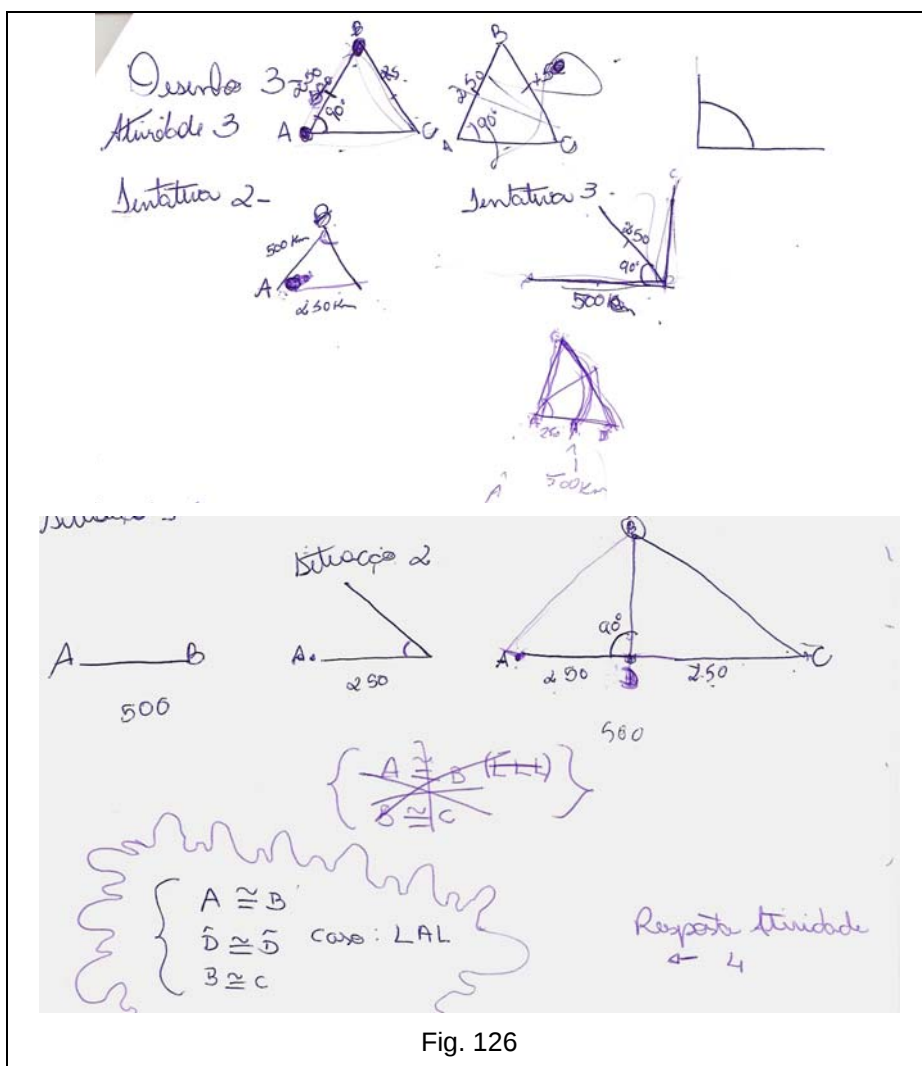


Fig. 126

A Fig. 126 refere-se à resolução de (Ma e Da), que após várias tentativas, representou a situação por etapas: a primeira, o segmento AB, depois, na situação 2, indicou a cidade A, um caminho percorrido de 250, um ângulo e uma nova rota. Representou novamente com os demais dados e posicionou a cidade B e C adequadamente. Para justificar, tentou-se utilizar o caso LAL, mas numa linguagem simbólica diferente a da proposta. Utilizou as letras A, B e C, maiúsculas para indicar segmento e não pontos.

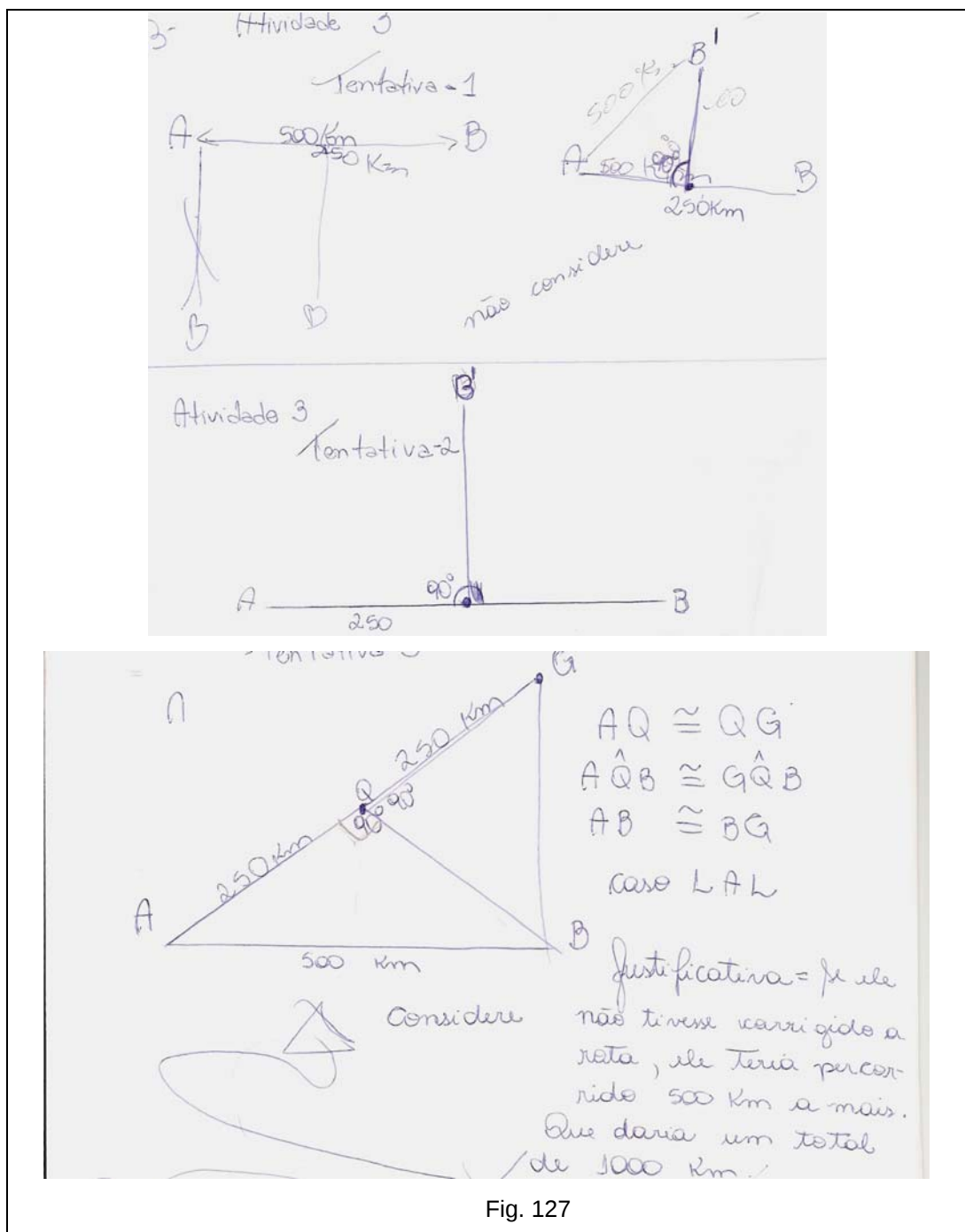


Fig. 127

A Fig. 127 refere-se à resolução de (El e A). Elas também tiveram dificuldade para interpretar a situação e no final, apesar de ter dado como resposta 1000km, (A) percebeu que esse valor seria se o avião tivesse percorrido da cidade A até a cidade errada e depois para a cidade B. Isso é constatado no diálogo entre El e A. As duas duplas também mantêm equivocada a condição necessária para justificar usando os casos de congruência de triângulos. Após várias tentativas como as realizadas pelas duplas (El e A) e (Da e Ma), com a intervenção da professora, a dupla (Gi e Rs) apresentou a seguinte resposta final:

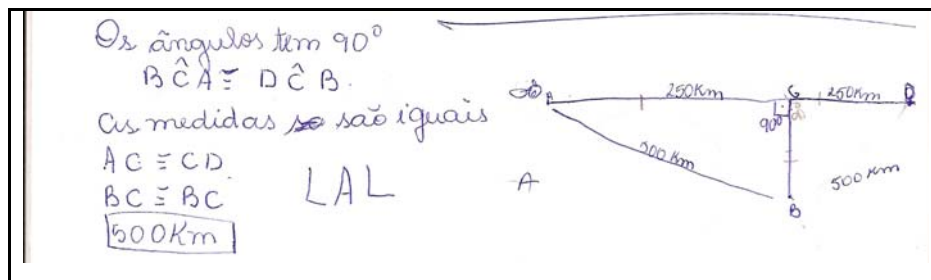


Fig. 128

Parece haver entendimento no que se refere ao lado comum BC, que antes não havia ocorrido. Além dessa dupla, as duplas (Ro e Va), (Re e G) conseguiram resolver o problema. A dupla (D e Ev) inicialmente apresentou a seguinte resolução:

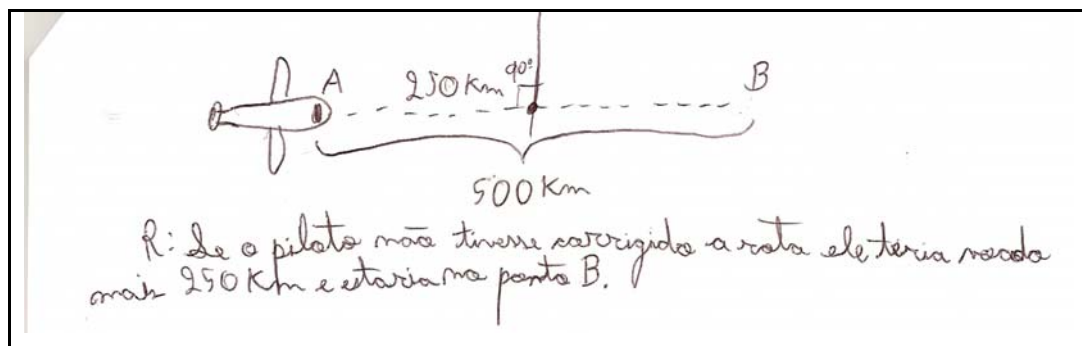


Fig. 129

Essa resposta apresenta característica de um exemplo de empirismo ingênuo, segundo Balacheff (1988), pois não há nenhum questionamento sobre as outras particularidades que são relevantes para a resolução do problema. Essa dupla reconsiderou a questão e finalizou indicando o caso de congruência LAL, mas equivocou-se ao afirmar: $AC \cong BC$, e não $AC \cong CD$. Identificou corretamente o lado comum e o ângulo reto: $\hat{A}CB \cong \hat{BCD}$ e $CB \cong CB$. Responderam que BD é igual a 500km.

Apenas duas duplas ainda não conseguiram justificar usando os casos de congruência de triângulos, mas parece haver uma pequena evolução dos demais grupos.

15. O solo é considerado a base de todas as outras provas da Ginástica Olímpica. Os rolamentos são os primeiros elementos a se aprender. Na ilustração a ginasta realiza um dos movimentos básicos. Considere o alongamento perpendicular AB inicial igual ao final EF. Considere, também, que BC é congruente a DE. O que você pode dizer sobre a distância CF e DA? Justifique.

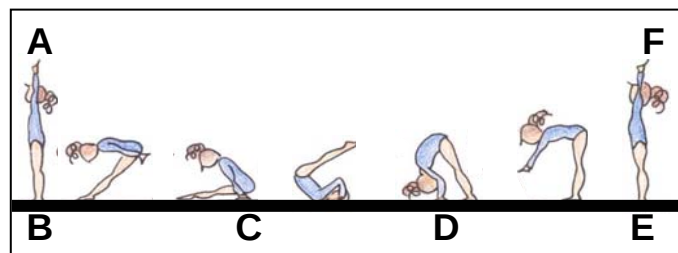


Figura 130 - Rolamento de costas carpado

Em uma das tentativas de resolução a dupla (A e EI) apresentou o seguinte comentário: "se fizermos o segmento DA e o segmento CF vão se transformar em triângulos, e se fossemos utilizar o Cabri, teríamos que usar **alguma ferramenta de transformação** para comprovar se um triângulo é ou não congruente a outro. No caso, usaríamos **simetria axial**. Para isso construiríamos uma mediatriz entre as figuras e depois, acionaríamos a ferramenta simetria axial, clicaríamos na mediatriz construída e aí, o triângulo (ABD) seria transferido ao outro (FEC). Portanto os triângulos formados são consequência dos segmentos construídos (CF e DA)".

Esse comentário feito pela dupla (A e EI) mostra que, o que elas conceberam nas atividades com o Cabri, está sendo utilizado nesse bloco, contribuindo para a visualização e compreensão do problema proposto. Caso a dupla interrompesse a resolução nessa resposta, estaria exemplificando uma prova categorizada como sendo exemplo genérico, pois toma um representante (com o uso da simetria axial) para explicar a validação de sua resposta. Elas resolveram o problema com facilidade, utilizando os casos de congruência, após a intervenção da professora que sugeriu que representassem os dois triângulos separadamente e identificassem os pontos A, B, C, D, E e F nos triângulos. Assim, foi possível identificar que CD era comum para os dois triângulos.

Em uma das tentativas de resolução feita por (Va e Ro), encontra-se a utilização de ângulos opostos pelo vértice. Em outra, utilizando um modelo matemático da situação fornecida, a dupla tentou utilizar uma linguagem simbólica própria e chegou a identificar que CD fazia parte do segmento BD e do segmento CE.

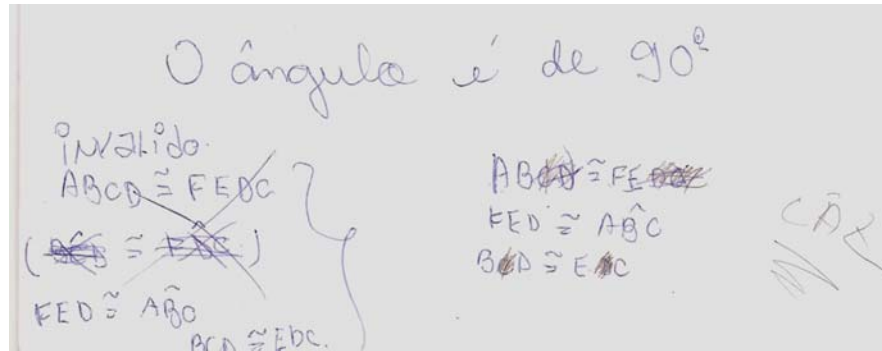
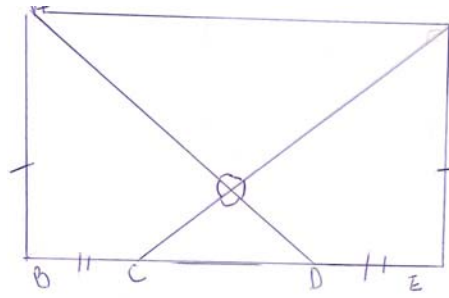


Fig.131

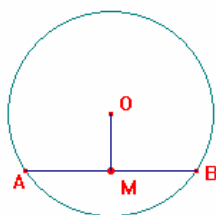
Pode-se considerar que a dupla foi seguindo os pontos na representação e, talvez, percebido que, como os segmentos formados por esses pontos eram congruentes, a dupla fez as indicações: $ABCD \cong FEDC$ e $BCD \cong EDC$; ao mesmo tempo, visualizou os ângulos congruentes $\hat{FED} \cong \hat{ABC}$. O que era relevante foi reescrito, e depois foram eliminadas as partes que não eram associadas ao caso LAL.

16. Considere uma circunferência de centro O e uma corda AB. Seja M o ponto médio da corda. Complete a frase abaixo usando as palavras sempre, nunca, às vezes. "O segmento OM é perpendicular ao segmento AB". Justifique sua resposta.

Esperava-se as seguintes repostas:

Construção 1: O centro O da circunferência não pertence à corda AB.

- OB e AO são congruentes, pois têm a medida do raio da circunferência.
- Os triângulos AOM e BOM são congruentes, pelo caso LLL: $OA \cong OB$ (raio da circunferência); $MA \cong MB$ (M é ponto médio) e $OM \cong OM$ (lado comum).



ou

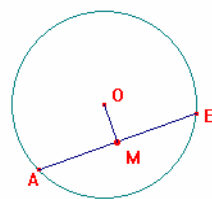
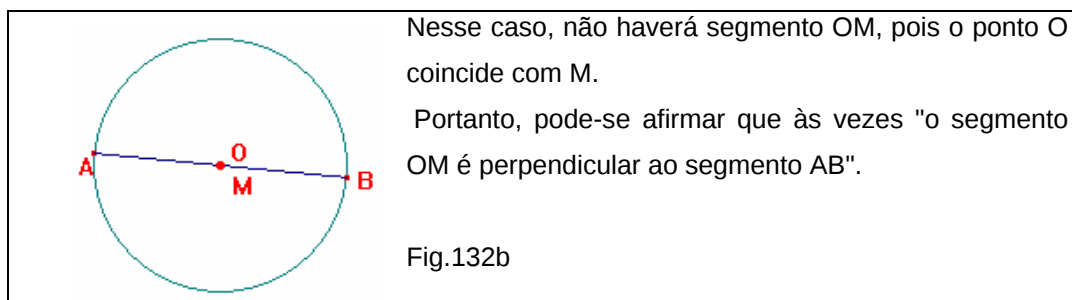


Fig. 132a

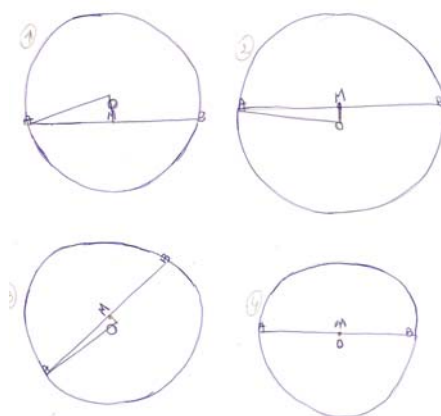
Construção 2: O centro da circunferência O pertence à corda AB.



Quatro duplas (Rs e Gi), (El e A), (Va e Ro), (Re e G), apresentaram o ponto médio M coincidente ao centro O, como a construção 2 (Fig. 132b) - exemplo particular de um caso possível (crucial)

A dupla (Rs e Gi), inicialmente considerou a corda AB como diâmetro e o ponto médio M coincidente ao centro da circunferência. Após intervenção da professora, que questionou sobre o caso em que a corda não passasse pelo centro da circunferência, elas representaram uma nova figura com a corda AB passando abaixo do centro. Concluíram a resolução, com o auxílio da professora, pois elas tiveram dificuldade em perceber os dois triângulos AOM e BOM para a justificativa. Foi relevante a afirmação, de forma espontânea, de Gi ao dizer que **OM era congruente a OM**, que pode ser considerado um indício de que ela, agora, mostrou que concebeu a idéia do lado comum, utilizado nas questões 1 e 2 desse bloco. A resolução pode ser categorizada como sendo de experiência mental, pois utilizou propriedades como o ponto médio, a identificação do raio, e as propriedades dos casos de congruência.

A dupla (El e A) representaram também várias situações de construção 2, mas a resposta baseou-se na visualização (G1). Interpretou e representou corretamente "O ponto O é o centro da circunferência mesmo. O ponto M é que pode ser em outro lugar", mas a validação ocorreu com a verificação de alguns casos sem questionamento quanto às particularidades. Portanto, pode-se categorizar essa resolução como empirismo ingênuo. No final elas escrevem: "As vezes, pois, em todos os casos foi possível a construção de triângulos, mesmo no caso 4". Não verificaram que no caso 4 não ocorre triângulos e, nas outras construções, não procuraram justificar porque OM é perpendicular à corda AB.



R = "às vezes", pois em todas as cases foi possível a construção de triângulos, menos no caso 4.

Fig. 132c

A dupla (Re e G), (Ma e Da) e (Ev e D) não conseguiram interpretar a situação proposta.

17. Um triângulo CDE pode ser obtido pela rotação de 90° do triângulo ABC, sentido anti-horário (positivo), ao redor do ponto C. Podemos afirmar que o ângulo $\hat{CDB}$ tem medida igual a _____. Justifique sua resposta.

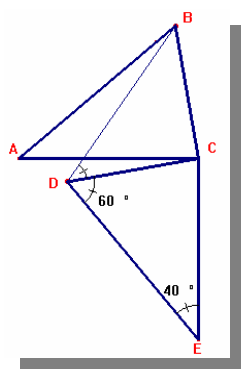


Fig. 133

O problema, apesar de mencionar a rotação de 90° , transformação estudada no Cabri pelos alunos, é complexo, visto que é necessário perceber e aplicar algumas propriedades:

- Identificar os lados congruentes dos triângulos ABC e CDE.
- Identificar o ângulo $\hat{ECD} = 80^\circ$, aplicando a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.
- Identificar o ângulo $\hat{ACD} = 10^\circ$, em virtude do giro de 90° (sentido anti-horário) do lado BC.

- Identificar que o triângulo ABC é isósceles e, portanto, $BC \cong DC$, $\hat{BCD} = 90^\circ$, e o ângulo $\hat{BDC} = 45^\circ$.

Os resultados são resumidos na tabela abaixo:

Grupo	Categoria	Procedimentos
Ev e G		Não respondeu
Re e D	Experiência mental	Interpretaram, separaram os triângulos, não identificaram o valor de 45°
Va e Ro	Empirismo ingênuo	Interpretação e associação a um caso de congruência de triângulo sem identificar particularidades.
Rs e Gi	Experiência mental	Interpretaram, separaram os triângulos, identificaram o valor de 45°
El e A	Experiência mental	Identificaram o triângulo isósceles. Faltou responder
Ma e Da	Empirismo ingênuo	Interpretação e associaram a um caso de congruência de triângulo sem identificar particularidades.

Tabela 9 – Resultado da atividade 6, bloco 3

Como era esperado, os grupos tiveram dificuldades na resolução desse problema. A dupla (Ev e G) não respondeu. Duas duplas permaneceram na identificação dos elementos congruentes (lados e ângulos) dos triângulos ABC e CDE. A resolução de (Ro e Va) é mostrada a seguir:

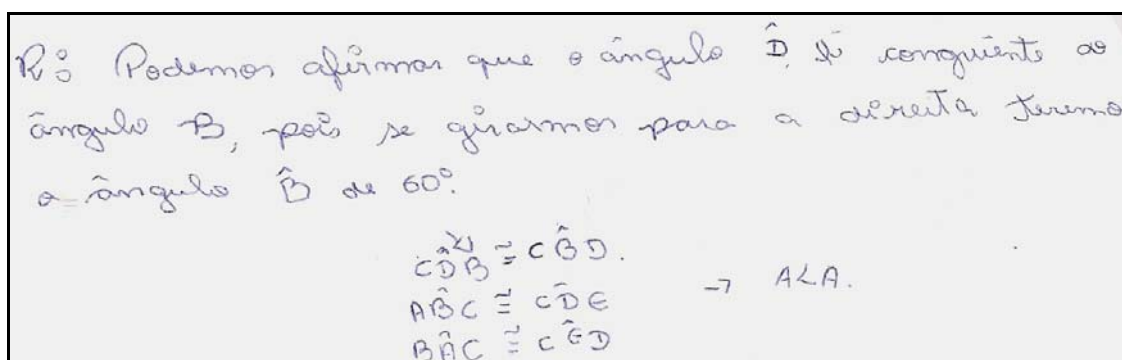


Fig. 134

Percebe-se que a dupla visualizou o giro, em que o ângulo D do triângulo CDE se sobrepõe ao ângulo B do triângulo ABC. Depois, tenta identificar os demais ângulos congruentes, incluindo o ângulo solicitado $\hat{CDB} \cong \hat{CDE}$. Faltou identificar outros elementos congruentes, por exemplo o ângulo $\hat{ECD} = 80^\circ$, e organizar esses elementos de modo a visualizar três triângulos, sendo dois congruentes entre si e outro isósceles.

Os que avançaram, lembraram da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e identificaram os ângulos $\hat{DCE}$ e $\hat{BCA}$ congruentes e iguais a 80° . (Rs e Gi) chegou no valor de 45° . A dupla (El e A) identificou o triângulo isósceles, mas não finalizou com a resposta desejada, e (Re e G) não conseguiu identificar o ângulo de 45° .

Durante a resolução desse problema os alunos solicitaram ajuda da professora que deu as seguintes orientações:

- reconstruir a figura dada e identificar os elementos congruentes (ângulos e lados).
- Identificar o ângulo $\hat{ECD}$. Lembrar da atividade feita na placa quadriculada, em que não era possível construir um triângulo.
- Retornar à questão do problema e identificar o triângulo formado BCD e suas propriedades.

A resolução a seguir é da dupla (El e A), que ao final da gravação diz: "Tivemos dificuldades. A professor ajudou, falou para rotacionar ABC de 90° para achar CDE. A gente viu as medidas que a gente tinha e completou o resto".

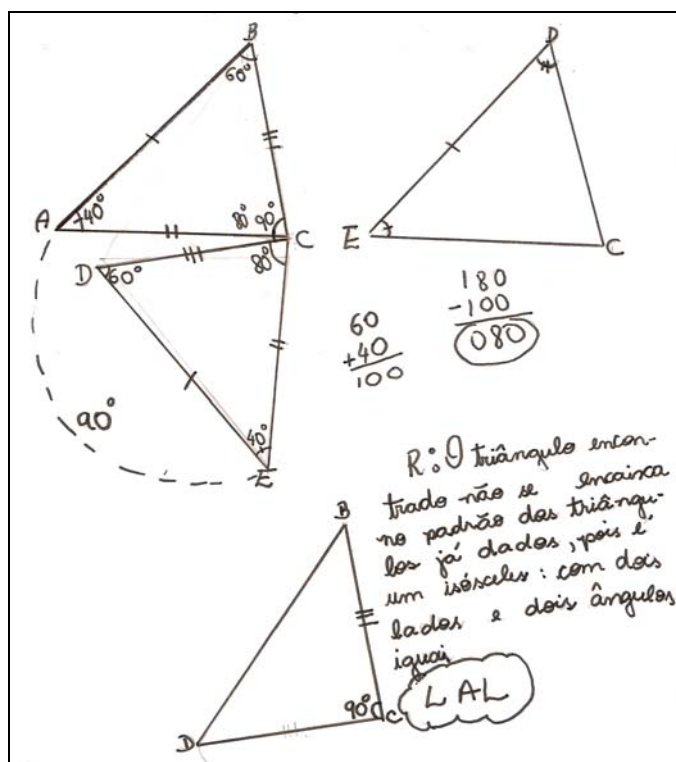


Fig. 135

Essa dupla identificou de imediato o ângulo de 80° e o triângulo isósceles, mas não respondeu à questão. Fez uma associação com o caso LAL sem necessidade. Talvez observando os dois lados congruentes BC e CD e o ângulo

de 90° . Outras intervenções foram feitas pela professora: "Se daqui até aqui tem 90° e daqui até aqui tem 80° esse ângulo é quanto?", "identifiquem os lados congruentes com tracinhos..."

A resolução da atividade estabeleceu-se em torno do nível G1 e G2, pois os alunos recorreram à reconstrução da figura dada. Depois, mantiveram-se no nível G2, ao usar as propriedades dos ângulos de um triângulo e do triângulo isósceles. A essas características, pode-se associar a categoria de Balacheff da experiência mental. Pode-se dizer que alguns alunos atingiram parcialmente os objetivos da questão.

18. Um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados congruentes. Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Era esperado que os alunos pudessem aplicar a bissetriz ou a mediana para resolver este problema. De fato, os alunos tentaram resgatar a bissetriz e a mediana, porém, não utilizaram corretamente. O resultado é apresentado na tabela abaixo:

Grupo	Categoria	Procedimentos
Ev e D	Empirismo ingênuo	Usou erradamente a mediatriz, como se fosse uma bissetriz ou mediana, relacionou ao caso LAL
Re e G	Experiência mental	Usou a mediana, não apresentou o caso de congruência.
Va e Ro	Empirismo ingênuo	Usou erradamente a mediatriz, como se fosse uma bissetriz ou mediana, relacionou ao caso LAL
Rs e Gi	Experiência crucial	Usou dados de quando se usa uma mediatriz e de uma bissetriz e tomou um triângulos retângulo com ângulos de 45° , 45° e 90°
El e A	Empirismo ingênuo	Usou informação de quando se usa mediatriz e de quando se usa bissetriz.
Ma e Da	Empirismo ingênuo	Usou erradamente a mediatriz, como se fosse uma bissetriz ou mediana, relacionou ao caso LAL

Tabela 10 – Resultado da atividade 7, bloco 3

A dupla (Re e G) parece ter identificado corretamente, utilizando a mediana do lado AB, mas não identificou o caso LLL de congruência de triângulos.

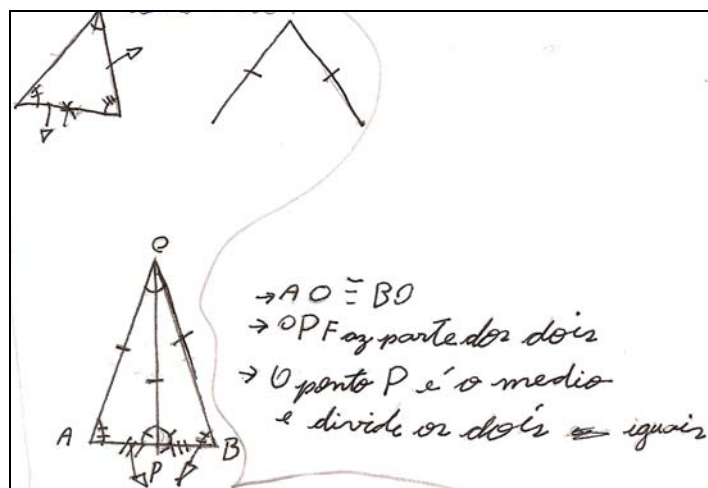


Fig. 136

A dupla (Rs e Gi) apresentou uma resolução do tipo experiência crucial:

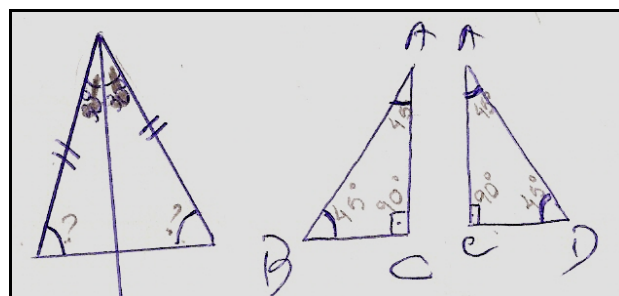


Fig. 137

A dupla considerou a semi-reta com origem em A uma bissetriz. Depois, ao separar os triângulos congruentes, apresentou o lado AC como se fosse originado de uma mediatriz, indicando o ângulo de 90° . Acredita-se que a dupla não tenha se apropriado da propriedade da bissetriz e da mediana no estudo dos triângulos, considerando elementos de uma como de outra propriedade. Por fim, a validação ocorreu por meio de um caso particular possível, isto é, um triângulo isósceles com os ângulos: 90° , 45° , 45° . O mesmo ocorreu com as duplas (EL e A) e (Ev e D). A seguir a resolução de (EL e A).

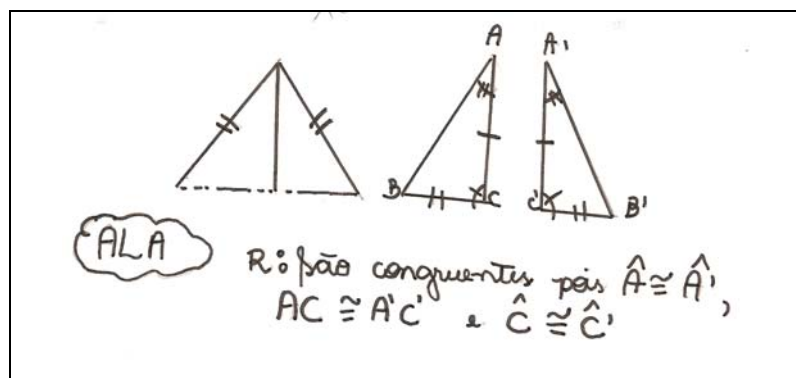


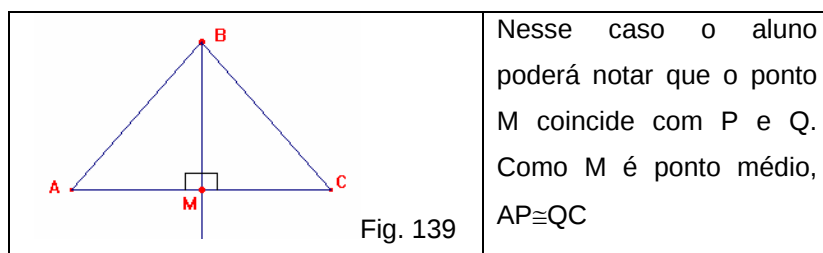
Fig. 138

A análise geral dessa atividade leva aos seguintes pareceres:

- Os alunos tiveram dificuldades em utilizar corretamente as propriedades da bissetriz e da mediana nos triângulos. Acredita-se que essa dificuldade tenha ocorrido devido a não familiarização nos triângulos, pois, por exemplo, a semi-reta formada pela bissetriz do ângulo C, não garante a perpendicularidade dessa semi-reta com o lado AB.
- Os alunos, de forma geral tentaram utilizar elementos da categoria experiência mental, pois tentaram recorrer à propriedade da bissetriz, mas não atingiram o objetivo por não terem devidamente se apropriado dessas propriedades nos triângulos.

19. Seja o triângulo ABC e M o ponto médio do lado AC. Uma semi-reta com origem em B passando por M é traçada. P e Q são pontos da semi-reta. AP e CQ são perpendiculares à semi-reta dada. Prove que $AP \cong QC$.

Na análise a priori esperava-se que os alunos interpretassem e representassem uma figura conforme os dados do problema. Como estratégia inicial, foi previsto que o aluno escolheria um triângulo equilátero ou isósceles para obter a seguinte uma idéia inicial de prova (Fig. 139):



A dupla (Da e Ma) utilizou essa estratégia e justificou usando o caso ALA. A princípio a dupla teve dificuldade em identificar os pontos P e Q. Depois, separando os triângulos, pode-se dizer que: se a dupla tivesse utilizado a propriedade "em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base também é bissetriz e altura", não provada nessas atividades, a resolução poderia ser considerada correta. Mas a dupla não mencionou se o triângulo era isósceles, ou equilátero, ou escaleno e por fim, de acordo com os elementos congruentes selecionados, o caso de congruência deveria ser LAAo.

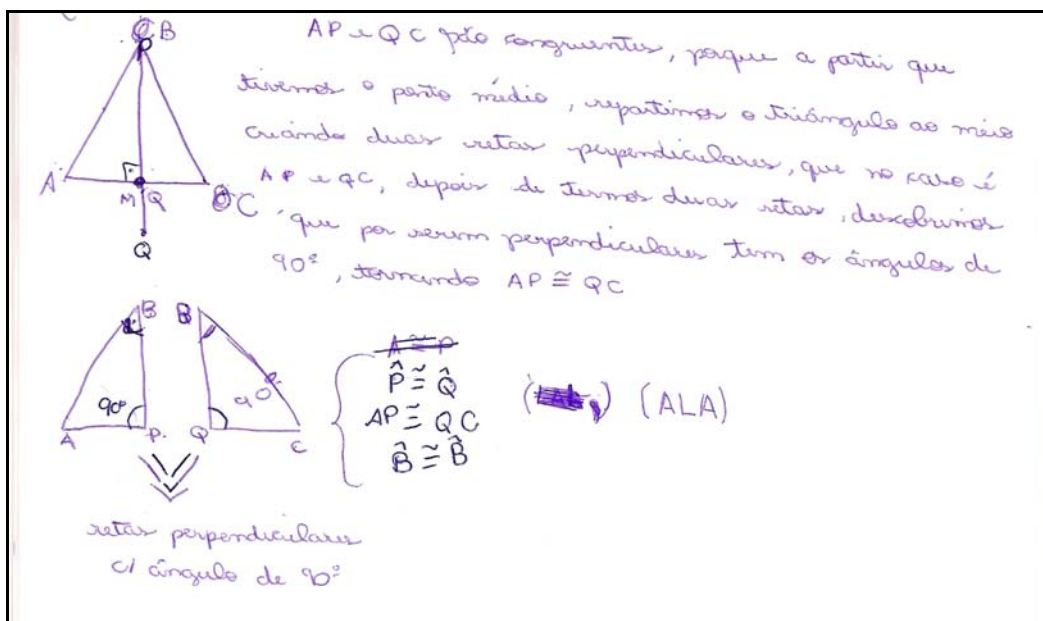


Fig. 140

Uma segunda estratégia poderia ser realizada da seguinte maneira:

Fig. 141	Com um triângulo escaleno: A justificativa é que os triângulos APM e OQM são congruentes pelo caso LAAo, pois: $\hat{A}MP \cong \hat{C}MQ$ - opostos pelo vértice; $\hat{A}PM \cong \hat{C}QM$ (mediana do lado AC é perpendicular aos segmentos AP e CQ); $AM \cong MC$ (M é ponto médio). Portanto $AP \cong QC$.
-----------------	--

Em geral, os alunos que representaram um triângulo escaleno foram auxiliados na interpretação das posições dos pontos P e Q. Tiveram dificuldades em localizar o ângulo reto não identificaram o ângulo $\hat{A}MP \cong \hat{C}MQ$ opostos pelo vértice, consideraram o lado QP congruente ao lado PM, sem que pudessem considerá-los (Fig. 141a e 141b).

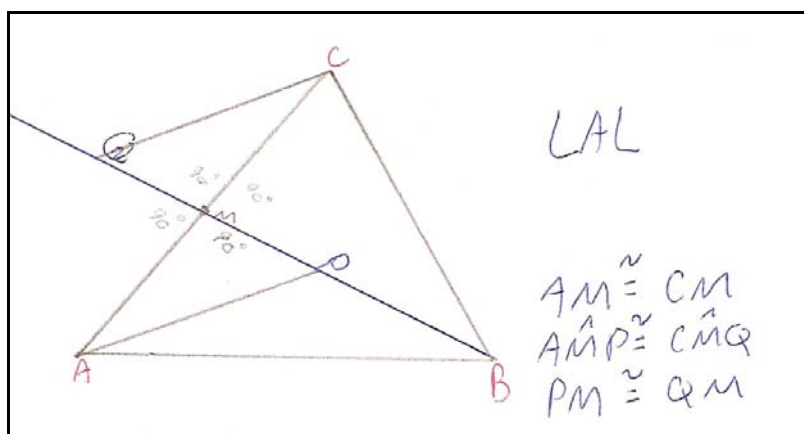


Fig. 141a

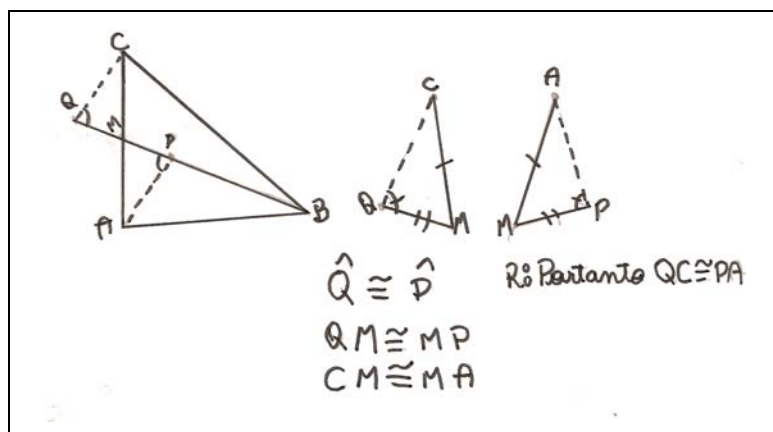


Fig. 141b

Todos os grupos tiveram dificuldades em interpretar e resolver o problema. Tentaram utilizar propriedades, mas a análise das respostas leva a concluir que os alunos utilizaram mais, os aspectos visuais para estabelecer a congruência dos elementos dos dois triângulos. Nesse caso, não será apresentada uma tabela categorizando o tipo de prova, pois, pode-se dizer que os alunos utilizaram exemplificaram prova crucial, pois apresentaram algumas propriedades. E considerando-se os níveis de Parzsy (2001), os alunos transitaram do nível G2 para G1, pois utilizaram algumas propriedades, mas a validação de alguns elementos congruentes foi perceptiva.

20. Dadas as retas r e s com ponto de interseção em O . B é simétrico do ponto A em relação à reta r e C é simétrico do ponto B em relação à reta s . O ponto B está na região em que as retas r e s formam o ângulo θ (teta). O que se pode dizer do ângulo $A\hat{O}C$ e relação ao ângulo θ ? Justifique.

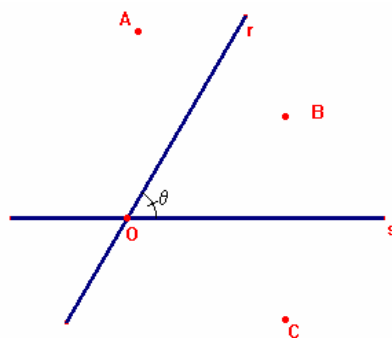


Fig. 142

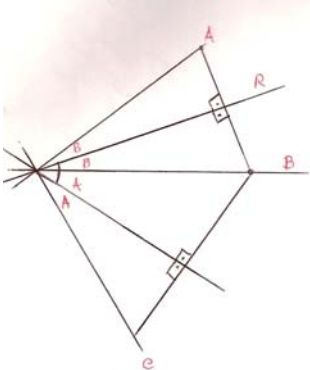
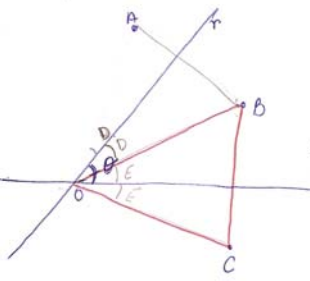
O objetivo deste problema era retomar a simetria axial estudada no Cabri, de modo que se sobressaíssem as propriedades dessa transformação. Os alunos deveriam visualizar retas perpendiculares, bissetrizes, mediatrizes, pontos médios, além de compor e decompor triângulos. A tabela a seguir mostra um

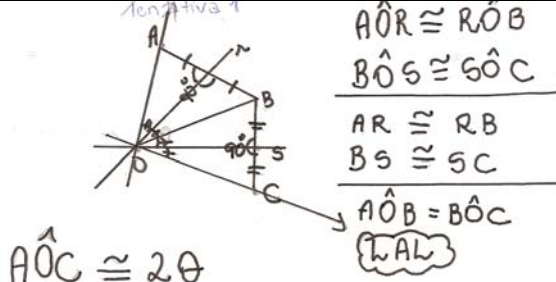
resumo dos elementos, possivelmente, **percebidos e indicados na figura** representada por cada grupo:

	(Ev e D)		(Re e G)		(Va e Ro)		(Rs e Gi)		(El e A)		(Ma e Da)	
A dupla identificou:	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
retas perpendiculares	x		x			x		x	x		x	
bissetrizes	x		x			x	x		x			x
mediatrizes		x		x	x			x	x		x	
pontos médios		x		x	x			x	x		x	
ângulos congruentes	x		x			x	x		x			x
lados comuns	x		x			x	x			x		x
ângulo $A\hat{O}C=2\phi$		x		x		x		x	x			x

Tabela11 – Resultado da atividade 9, bloco 3

A tabela mostra que a mediatriz e o ponto médio não foram identificados por três grupos, sendo que era importante, pois indicava, por exemplo, a congruência dos lados AR e BR dos triângulos ABO e BRO, respectivamente, e o entendimento da transformação simetria axial, sem a utilização do Cabri. Os lados comuns, OR e OS não foram percebidos por três grupos e apenas um grupo chegou na resposta desejada. A seguir, a resolução dos grupos (Ev e D) – fig.142a , (Rs e Gi) – Fig. 142b e (El e A) – Fig.142c.

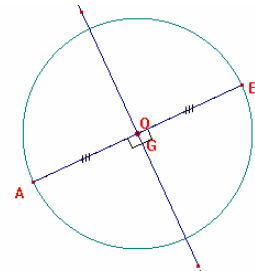
 Fig. 142a	A dupla (Ev e D) justificou a congruência dos triângulos ARO e BRO e os triângulos BOS e COS corretamente, utilizando o caso ALA, porém, não responderam à questão.
 Fig. 142b	A dupla (Rs e Gi) não relacionou a nenhum caso de congruência. Indicou a congruência $A\hat{R}O \cong O\hat{R}B$ simbolicamente, mas não indicou na representação. Não respondeu à questão.

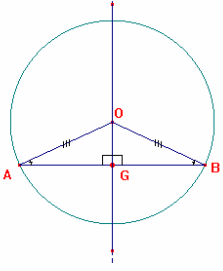
 Fig. 142c	A dupla (El e A) identificou alguns elementos congruentes, mas não relacionou corretamente ao caso de congruência. Esta dupla não relaciona as três condições necessárias para a congruência de triângulos. Chegou no valor 2θ para o ângulo solicitado.
--	---

Foi uma tarefa árdua para os alunos, pois eram vários os elementos que deveriam identificar. Com isso, percebe-se que os alunos identificaram algumas propriedades e outras não, prejudicando a conclusão do problema. Com relação à congruência, a dupla (El e A) ainda não percebeu que as condições mínimas de congruência são três e não duas. Geralmente, elas relacionam duas e na terceira incluem os elementos que devem ser consequência. Os grupos apresentaram respostas que podem ser categorizadas como sendo experiência mental, e de nível G2.

21. Considere uma circunferência de centro O e uma corda AB. Pelo ponto O trace uma reta perpendicular ao segmento AB. Essa reta intersectará o segmento AB num ponto G. Complete a frase usando as palavras sempre, nunca, às vezes. "G é ponto médio do segmento AB". Justifique sua resposta.

Esperava-se que nessa questão os alunos interpretassem e representassem a figura conforme os dados do problema, identificassem triângulos congruentes cujos elementos indiquem o caso LAAo de congruência de triângulos.

Situação 1  Fig. 143a	O centro da circunferência pertence ao segmento AB Sendo AB o diâmetro da circunferência, temos que G coincide com o centro O da circunferência; $AO \cong BO$ são raios da circunferência. Portanto G é ponto médio de AB. Como em todos os casos possíveis G é ponto médio, então, podemos acrescentar a palavra sempre.
---	---

Situação 2  Fig. 143b	O centro da circunferência não pertence ao segmento AB. Era esperado como justificativa: O triângulo AOB é isósceles, pois $AO \cong BO$ – raio da circunferência. Os triângulos BOG e AOG são congruentes pelo caso LAAo, pois, $AO \cong BO$ – raio da circunferência, $\hat{OGB} \cong \hat{OGA}$ – é dado que OG é perpendicular a AB; $\hat{B} \cong \hat{A}$ – resultado da questão 7. Portanto, $AG \cong BG$, e G está entre A e B e é ponto médio.
---	---

Conforme a análise a priori, a representação da figura Fig. 143a foi a que mais apareceu. As duplas (Ev e D), (Rs e Gi) interpretaram e representaram a figura solicitada; não identificaram os elementos congruentes e a justificativa foi pela visualização. As respostas das duplas podem ser categorizadas como sendo de nível G1 de Parzys (2001).

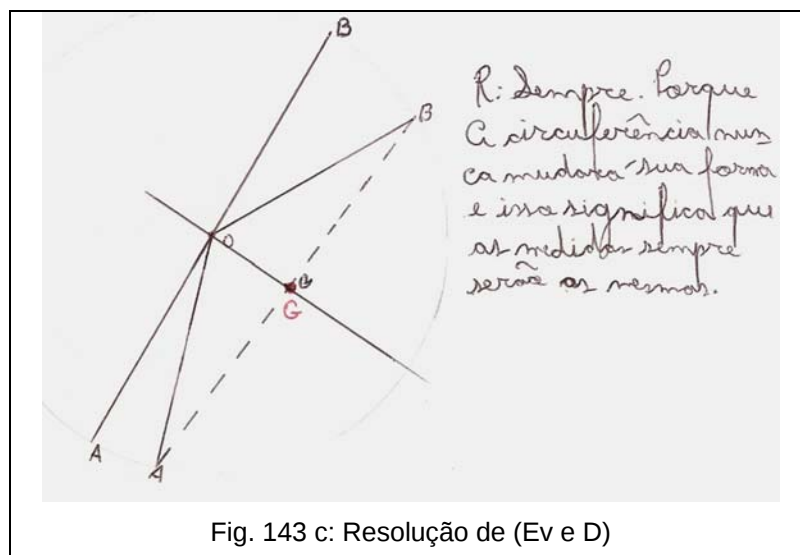


Fig. 143 c: Resolução de (Ev e D)

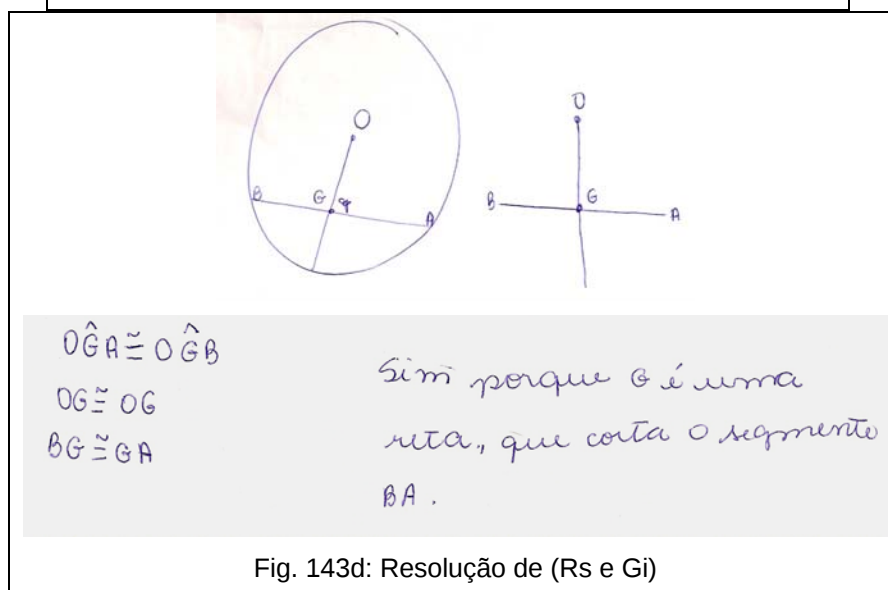


Fig. 143d: Resolução de (Rs e Gi)

A dupla (Rs e Gi) interpretou e representou a figura corretamente e identificou alguns elementos inerentes à figura: a congruência do lado comum OG e, o ângulo reto formado pelo segmento AB e a reta perpendicular. Antecipou ao informar que BG e AG são congruentes. Parece não ter considerado esses dados para a justificativa final: "sim, porque G é uma reta (na verdade, um ponto) que conta o segmento BA". O aspecto geral da figura foi mais relevante para a dupla, sendo a validação perceptiva (G1). No que se refere aos tipos de prova de Balacheff (1988), pode-se considerar um exemplo de empirismo ingênuo, pois, a validação ocorreu com a verificação de alguns poucos casos, sem questionamento quanto às particularidades. Se a dupla tivesse explorado mais a figura formada e procurado encontrar triângulos congruentes e seu elementos, talvez tivessem sucesso na conclusão do problema.

A figura a seguir, refere-se à resposta da dupla (El e A).

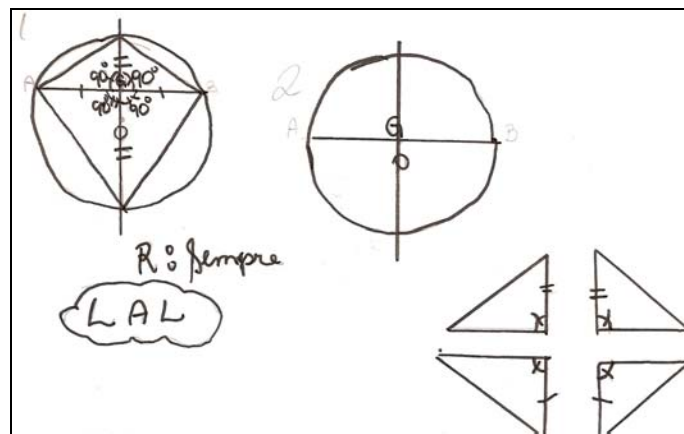


Fig.144

A dupla (El e A), parece ter considerado as duas situações previstas na análise a priori. Na situação 1, a dupla não relacionou triângulos ao centro O, mas às intersecções da reta com a circunferência que formou 4 triângulos, sendo congruentes dois a dois (isso é verificado nos triângulos representados separadamente), formando um quadrilátero (figura não explorada neste trabalho). Infelizmente a dupla ainda está considerando dois elementos congruentes e um terceiro, que deveria ser a conclusão para justificar e validar o resultado. A dupla generalizou (exemplo genérico), mas não conseguiu explicar porque escolheu o caso LAL. Acredita-se que havendo um tempo maior para esclarecimento, a dupla consiga resolver completamente o problema proposto. A tabela a seguir, resume os resultados apresentados pelas duplas.

Grupo	Procedimentos
Ev e D	Respondeu sempre. Representou as duas situações previstas em numa só circunferência. Não identificaram propriedades ou elementos congruentes. Validação foi perceptiva.
Re e G	Respondeu sempre, com validação perceptiva. Representou as duas situações previstas em uma só circunferência.
Va e Ro	Como Rs e Gi, e não conseguiram visualizar o caso de congruência.
Rs e Gi	Representou somente com AB menor que o diâmetro e tentou usar os critérios da congruência.
El e A	Respondeu sempre, identificou as duas situações esperadas. Separou os triângulos congruentes, mas não relacionou os elementos congruentes com o caso devido de congruência de triângulos.
Ma e Da	Não conseguiram visualizar o segmento AB igual ao diâmetro e não conseguiram usar os casos de congruência.

Tabela12– Resultado da atividade 10, bloco 3

Em virtude da complexidade do problema e do tempo que tinham disponível para resolver as questões, os alunos não atingiram completamente a resolução da questão, apresentando provas com características entre o empirismo ingênuo e experiência mental.

22. Os Quadriláteros ABCD e AEFG são quadrados. Mostre que os segmentos DG e BE são congruentes.

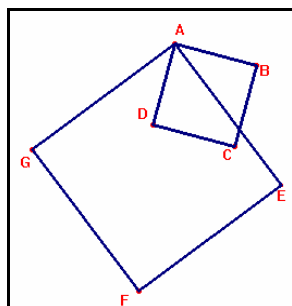


Fig. 145

Conforme análise a priori, esperava-se que os alunos resolvessem de forma intuitiva ou de forma dedutiva, utilizando os casos de congruência.

A figura abaixo, foi apresentada pela dupla (Da e Ma).

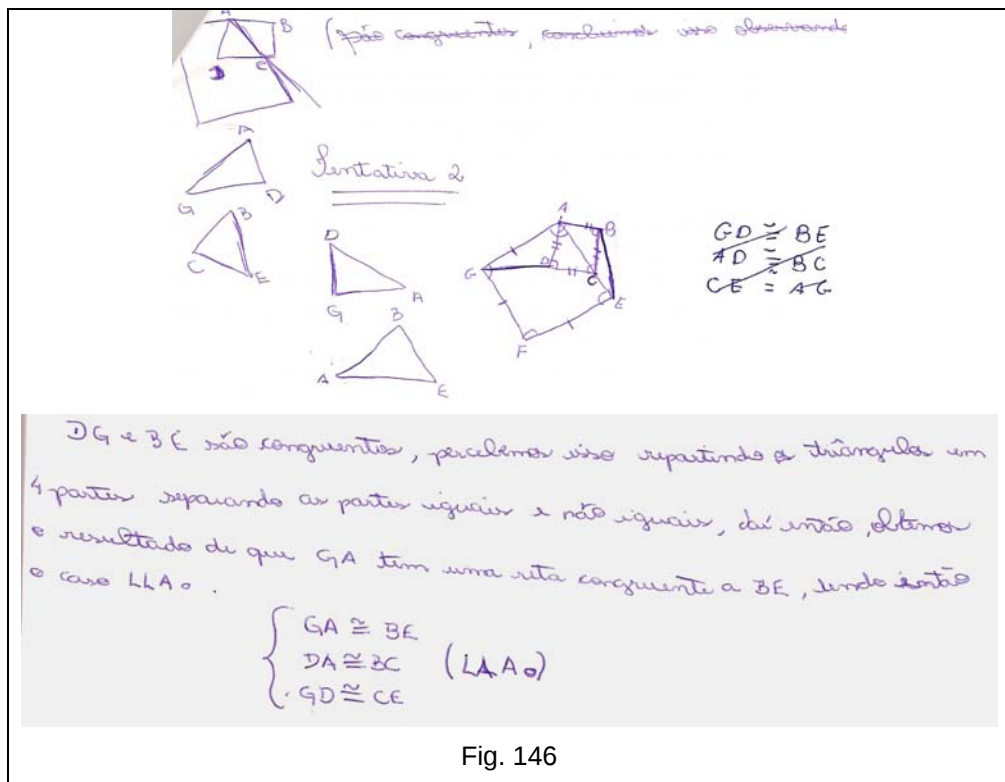


Fig. 146

Pode-se perceber que na tentativa 1 a dupla (Ma e Da) respondeu visualizando o objeto, denotando um exemplo de empirismo ingênuo, pois as particularidades não foram consideradas e a validação foi perceptiva (G0). Na tentativa 2, a dupla usou como estratégia representar separadamente os triângulos AGD, BCE, ABE e novamente o triângulo AGD, que achou conveniente. Também, pela visualização a dupla concluiu que DG e BE eram congruentes: "DG e BE são congruentes, **percebemos** isso repartindo os triângulos em 4 partes, separando as partes iguais e não iguais...". Em seguida, desconsiderou totalmente a conservação das medidas e relacionou como congruentes os lados dos triângulos AGD e BCE, e indicaram o caso LAAo como justificativa de congruência desses triângulos. Pode-se dizer que a estratégia usada poderia levar a uma conclusão satisfatória, caso a dupla identificasse os elementos congruentes dos triângulos representados separadamente. Fazendo isso, a dupla encontraria a congruência dos triângulos AGD e ABE. Como resultado a dupla não conseguiu resolver o problema.

Os demais grupos utilizaram o caso LAL de congruência de triângulos, mas não sabiam explicar porque o ângulo BÂE era congruente ao ângulo GÂD. Essa atividade foi exaustiva para os alunos, e não conclusiva.

CONCLUSÃO DO BLOCO 3 – PROVA

Ressalta-se que nesse bloco os alunos iniciaram a resolução das atividades apresentando explicitamente o que foi estudado no Cabri, por meio da linguagem natural, mencionando a simetria axial *"lembrando-se da edição numérica utilizada no Cabri e a simetria axial, podemos dizer..."* (problema 1, dupla (D e Ev)), ou por representação lembrando uma translação (problema 1, dupla (Re e G)).

Algumas dificuldades que impediram a conclusão das tarefas foram identificadas, tais como: os grupos, (El e A), (Va e Ro), não identificaram o lado comum ou o ângulo comum nos triângulos congruentes; não souberam identificar as condições mínimas de congruência de triângulos. Essas dificuldades podem ser superadas com uma retomada nos problemas, visto que, a dificuldade com relação ao lado comum, pode ser esclarecida se o aluno representar, separadamente os triângulos congruentes e identificar os seus elementos congruentes e não congruentes. Sobre as condições mínimas para a congruência de triângulos, deve-se rever com os alunos, a utilização da condição "se...então...". Nesse caso, se três elementos de um triângulo, pertencentes a um dos casos de congruência de triângulos, forem congruentes aos outros três elementos respectivos de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Portanto, os outros elementos dos dois triângulos também são congruentes entre si.

Percebe-se que os alunos utilizaram provas de categoria empirismo ingênuo (como nas atividades 3, 5 e 9) , crucial (como nas atividades 2, 5 e 7), genérico (como nas atividades 1 e 4) e experiência mental (como nas atividades 2, 3 e 6), segundo Balacheff, sendo que os últimos problemas foram mais complexos, exigindo dos alunos a utilização e percepção de propriedades relacionadas aos casos de congruência de triângulos, por exemplo, a mediatriz, bissetriz, ponto médio, retas perpendiculares, elementos da circunferência, como corda, diâmetro, raio.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa contempla um estudo teórico e experimental sobre o tema Congruência. A escolha desse tema foi motivada pelos seguintes fatores: a participação no projeto AprovaME que concilia a tecnologia às investigações de argumentação e prova em matemática; os resultados de uma pesquisa realizada em alunos da 1ª série do Ensino Médio; e a carência de pesquisas específicas sobre esse tema. Ademais, uma revisão bibliográfica foi realizada com o objetivo de fortalecer e vincular esta pesquisa a outras investigações realizadas na área de Educação Matemática.

O estudo histórico da congruência como objeto matemático revelou a importância desse conceito matemático. Para isto, foram consultadas as obras de Euclides, Clairaut, Legendre, Hadamard, Hilbert e Birkhoff e feito um estudo sobre as isometrias.

Esta pesquisa foi fundamentada nos trabalhos de Parzysz (2001), sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico; Balacheff (1988), sobre os tipos de prova; Machado (2005), sobre a rede de conhecimentos; Freudenthal (1973), sobre a organização local num processo dedutivo. Para a análise da congruência em 3 livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), foi utilizada a organização praxeológica de Chevallard (1999). A parte experimental da pesquisa, trata de uma sequência de atividades sobre a congruência, concebida em 3 blocos: o bloco 1 com atividades exploratórias no concreto, o bloco 2 que explorou a geometria espaço-gráfica, e o bloco 3 relativo a problemas cujas soluções necessitam de provas teóricas.

Os resultados das atividades permitem apresentar alguns elementos de resposta para a primeira indagação dessa pesquisa: ***Em que medida o processo de transição do concreto para o espaço-gráfico contribui para a apropriação do conceito de congruência?***

A questão está relacionada às atividades dos blocos 1 e 2, que tinham por objetivo a construção do significado de congruência por meio de atividades de manipulação e visualização dos objetos bidimensionais e tridimensionais, bem

como de atividades de sobreposição de figuras e de construção de triângulos para a verificação dos critérios de congruência.

No bloco 1, os alunos procuraram em objetos tridimensionais, selecionados previamente, regularidades que caracterizavam a congruência em seu aspecto geral. A validação ocorreu de forma perceptiva (G0). Nas atividades desse bloco, os alunos utilizaram vocábulos como *"igual"*, *"semelhante"*, *"idêntico"* para substituir, explicar ou designar o termo congruência (ver dupla D e G na atividade 1 do bloco 1). Os alunos entenderam a congruência de objetos como tendo a mesma forma e mesmo tamanho, visualizando, medindo, sobrepondo uma figura em relação à outra: *"Porque as duas têm medidas iguais. Eu peguei uma fita e medi com uma linha na fita marcando os cm de cada figura"*; *"Elas são congruentes porque uma tem o mesmo tamanho e formato da outra. Recortamos a figura 2 e colocamos uma sobre a outra"*. Mencionaram conceitos estudados anteriormente como simetria axial, eixo de simetria, como a dupla (Gi e Rs) comentou: *"É como se tivesse um eixo de simetria, onde as figuras se espelham"*. A sobreposição de figuras e coincidências de seus respectivos pontos foram sendo percebidos no bloco 1, como o trio (El, a e Ro) comentou na situação 2 da atividade 2: *"Porque elas se encaixam. Se invertermos a figura 4 e colocarmos por cima da figura 3."*, e (D e G) *"Mesmo as figuras sendo de forma curva, elas são do mesmo tamanho. Se colocarmos uma figura em cima da outra, elas serão iguais"*. Entretanto, no bloco 2, a sobreposição de figuras e coincidência de seus respectivos pontos formaram as condições necessárias nas atividades com o Cabri. A congruência foi explorada por meio das transformações como a dupla D e G comenta: *"Usamos a simetria central e novamente sobrepomos a figura. Tentamos várias vezes de formas variadas como: translação e rotação. Tentamos também usar a translação sem o vetor, mas não funcionou"*. Essas observações são um exemplo de como se processou a transição do concreto (manipulação de objetos do cotidiano) para a espaço-gráfica, explorada no Cabri.

Os alunos realizaram todas as tarefas no Cabri, porém, uma dificuldade encontrada foi a utilização das composições de transformações, pois em algumas atividades, os alunos desejavam utilizar uma única transformação para sobrepor duas figuras congruentes. Nas atividades 2, 3 e 11, do Cabri, os alunos recorreram às medições dos lados das figuras como no bloco 1, resgatando a condição de congruência através de medidas e comparações. Destaca-se a atividade 1 em que os alunos perceberam que a congruência estava relacionada

com o deslocamento e movimento das figuras ao expressarem palavras como: *"levamos", "transladamos", "transferência"*. Começou-se a formar uma idéia de prova, útil para o bloco 3, e da congruência por superposição. Isso foi constatado quando um grupo afirmou: *"fazendo isso, provamos que eles eram do mesmo tamanho porque o barco azul cobriu o amarelo"*.

Para a construção e representação dos triângulos congruentes e não congruentes na placa quadriculada, os alunos já consideravam o tamanho e forma para decidirem sobre o objeto construído, como constatado no diálogo da dupla (EL e A), na construção 6, do bloco 2: *"mas pode ser maior..."*, *"já deixa de ser congruente"*. Os alunos a partir de atividades exploratórias verificaram os "casos de congruência" de triângulos de maneira empírica. As estratégias utilizadas estavam situadas no nível G1 (construção e comparação entre os retângulos construídos) e, em alguns casos aplicaram propriedades anteriormente estudadas transitando para o nível G2: *"Não dá porque se for 30°, vai dar aqui. Primeiro, a gente tem que ver que a soma (das medidas) dos ângulos tem que dar 180°"*. Ainda nesse bloco, ocorreu a institucionalização dos casos de congruência de triângulos.

Dessa forma, os resultados das atividades nos blocos 1 e 2 revelam que o processo de transição do concreto para o espaço-gráfico contribuiu para que os alunos se apropriassem do conceito de congruência.

A segunda questão: ***E em que medida esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo?***, está relacionada às atividades de prova do bloco 3. Foram apresentados problemas com ou sem representações, de modo que, deveriam ser interpretados pelos alunos. Depois, os alunos deveriam reconhecer os elementos congruentes das figuras e associá-los aos casos de congruência de triângulos. Nos problemas mais complexos, os alunos deveriam reconhecer também, outros elementos geométricos ou propriedades.

Na utilização dos casos de congruência de triângulos, as produções dos alunos mostraram que houve a passagem de validações empíricas (nível G1) para validações dedutivas (nível G2) e vice-versa. Os alunos utilizaram informações de atividades dos blocos anteriores para resolver alguns problemas, em outros recorreram diretamente aos casos de congruência. Detectamos nos protocolos dos alunos analisados, os tipos de provas segundo a classificação de Balacheff (1988): empirismo ingênuo (7), experiência crucial (8), exemplo genérico (7) e experiência mental (14).

A análise das produções dos alunos revelou aspectos favoráveis à passagem do empírico para o dedutivo e outros desfavoráveis. A exploração dos blocos 1 e 2 auxiliou na interpretação dos problemas propostos, e os alunos apresentaram justificativas em linguagem natural ou simbólica, de forma a resgatar informações das atividades do concreto, do Cabri e da placa quadriculada. Isso ocorreu, por exemplo, na atividade 1 do bloco 3: A dupla (Ev e G) utilizou a linguagem natural para explicar como resolveriam no Cabri, só depois resolveram o problema usando os casos de congruência, enquanto que a dupla (Re e D) deslocou para a esquerda um dos triângulos dados, indicando a translação de figuras. Nas provas dos problemas 6 e 9, os alunos utilizavam conceitos geométricos tais como reta perpendicular, mediatriz, bissetriz, ponto médio, de forma bastante natural. Julgamos que o trabalho com o software Cabri no bloco 2 favoreceu o uso espontâneo de tais conceitos.

Outro aspecto favorável foi que as atividades resolvidas na placa quadriculada ajudaram os alunos na compreensão dos 4 casos de congruência de triângulos e favoreceram o uso da organização local proposta por Freudenthal na resolução das atividades do bloco 3.

Entre os fatores desfavoráveis à passagem do empírico para o dedutivo, pode-se apontar algumas dificuldades ocorridas na experimentação que impediram a conclusão de algumas tarefas: para alguns grupos foi difícil a identificação do lado comum ou do ângulo comum nos triângulos congruentes. Em outros problemas, os grupos não souberam identificar as condições mínimas de congruência de triângulos, identificavam somente dois elementos e como terceiro indicavam o resultado que deveria ser provado (por exemplo: problema 1, dupla (El e A), fig. 121d). Uma terceira dificuldade que surgiu foi com o uso do “se...então”. Após verificar as condições mínimas de congruência de dois triângulos, havia uma dificuldade em concluir que os restantes elementos correspondentes dos dois triângulos eram respectivamente congruentes entre si.

Em virtude dessas dificuldades pode-se dizer que o processo de transição do concreto para o espaço-gráfico favoreceu, em parte, a passagem do empírico para o dedutivo. Outros complementos na seqüência didática se tornam necessários para que a passagem do empírico ao dedutivo se concretize mais amplamente.

BIBLIOGRAFIA

ABAR, Celina A. A. P. **Noções de Lógica Matemática**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1999. Disponível em <<http://www.pucsp.br/~logica/>>. Acesso em 10 jul. 2006.

ALVES, Erica Valéria. **Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do Ensino Médio**. 1999. 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em <<http://www.bibli.fae.unicamp.br/sitescb.htm>>. Acesso em 9 jul. 2006.

ALVES, Sérgio & GALVÃO, Maria E. E. L. **Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares**. São Paulo: IME, 1996.

ANDRAUS, Silvio; SANTOS, Udmir Pires dos. **Matemática 2º grau 1ª série**. São Paulo, Atual, 1977, 215p.

ARCAVI, A & HADAS, N. **El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque**. Tradução Maria F. Mejía e Edinsson F.M. Instituto de Educación y Pedagogia Universidad del Valle, 2003.

ARTIGUE, Michele. **Engenharia Didáctica. Recherches en didactique des mathematiques**. vol. 9/3, 281-308. Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

AVILA, Geraldo. Euclides, Geometria e Fundamentos. **Revista Professor Matemática**. Nº 45, 2001, p. 1-9. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

BALACHEFF, Nicolas. **Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics**. Pimm D. (ed.) Mathematics, Teachers and Children. London: Hodder and Stoughton, p. 316-230, 1988.

BALDIN, Y.Y; VILLAGRA, G.A.L. **Atividades com Cabri-Géomètre II**. São Carlos: EdUFSCar, 2002. 240p.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan. **Geometria Analítica**: Um tratamento Vetorial. São Paulo, MacGraw-Hill, 1987, 385p.

BOYER, Carls Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC /SEF. 1998. 148p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 30 out. 2005.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Parte 3. Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002b. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 25 fev. 2005.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC / SEMTEC, 2002a. 144p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em 25 fev. 2005.

BRITO, Márcia Regina F. **Psicologia da educação Matemática**. Florianópolis, Insular, 2001, 280p.

BUSHAW,D, POLLAK, H. O., THOMPSON, M, USISKIN, Z. **Aplicações da matemática escolar**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

CARLOVICH, Marisa. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do estados de São Paulo para o 3º e 3º ciclos do Ensino Fundamental**. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

CHEVALLARD, Yves. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didático**. Recherches en Didactiques des Mathematiques, Vol 19, no 221-266, 1999.

CLAIRAUT, Alexis C. **Elementos de Geometria**. Tradução de José Feliciano. São Paulo: Augusto Siqueira & C, 1909.

CROWLEY.M.L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In LINDQUIST Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. Aprendendo e ensinando geometria .Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual,1994, p.1-20.

DANTE, Luiz.R. **Matemática é tudo**. Editora Ática, 7ª série. Editora Atica.São Paulo, 2002.

DAVIS, Philip. J; Hersh, Reuben. **A Experiência Matemática**. Tradução João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro, F.Alves, 1985. 481p.

DEL GRANDE, John J. **Percepção espacial e geometria primária**. In LINDQUIST Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. Aprendendo e ensinando geometria. Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p.156-167.

DEWEY, John. **Como pensamos**. São Paulo: Nacional 1979.

EVES, Horalld. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 2004.

FANTI, Ermínia de Lourdes Campelo; SILVA, Aparecida Francisco. **Informática e Jogos no Ensino da Matemática**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador, 25 a 29 de outubro 2004. Disponível em <www.bienasbm.ufba.br/M6.pdf>. Acesso em 13 de jul. 2006.

FARRELL, M.A. **Geometria para professores da escola secundária**. In LINDQUIST Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. Aprendendo e ensinando geometria. Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p.290 - 308.

FONSECA, Lina. **A demonstração e os futuros professores de matemática da Educação Básica**. ESE de Viana do Castelo,. Disponível em:

www.mytwt.net/cibem5/MyFiles/outros/Lina_Fonseca.pdf. Acesso em 19 mar.2006.

GIOVANNI & GIOVANNI. **Matemática pensar e descobrir**. 7ª série. São Paulo: Editora FTD. 2000.

HADAMARD, Jacques. **Leçons de Géométrie élémentaire**. Paris: Editora Librairie Armand Colin, 1937.

HILBERT, David. **Fundamentos de la Geometria**. Tradução Francisco Cebrian. Editora Instituto Jorge Juan, Madrid, 1953.

KLEIN, Felix. **Matemática Elemental desde um punto de vista superior**. Vol II. Tradução R. Fontanilla, Editora Madrid, 1931.

LABORDE, C. **The computer as part of the learning environment: the case of geometry**. In C. Keitel & K. Tuthven, (Eds.) Learning from Computers: Mathematics education and technology. New York: Spring Verlag, p. 48-67, 1993.

LAURO, Maria Mendias; BARUFI, Maria Cristina Bonomi. A perspectiva de Clairaut para o ensino de geometria no século XVIII. In: 1º SEMINÁRIO PAULISTA DE HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, São Paulo. **Anais...** São Paulo: IME-USP, 2005.

LEGENDRE, Adrien-Marie. **Elementos de Geometria**. Tradução de Manoel Ferreira de A. Guimarães. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1886.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1996.

LINDQUIST, M. M , SHULTE, A.P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações geométricas**: uma trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

MACHADO, Nilson J. **Epistemologia e didática**: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005, 320p.

MELLO, Elizabeth G.S. **Demonstração**: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria. Dissertação Mestrado. 1999. 189p. PUC-SP, 1999.

MICROSOFT OFFICE ONLINE. Clipart e multimédia. Disponível em <<http://office.microsoft.com/pt-pt/default.asp>>. Acesso em 23 ago. 2006.

MOISE, E & DOWS, F.L. **Geometria Moderna**. Tradução Mariano Garcia. México: Reading Addison. Wesley, 1966.

MOISE, Edwin. **Geometria Elemental desde um ponto de vista Avanzado**. México: Compañia Editorial Continental, S. A, 1968.

MOREIRA, Marco A., MASINI, Elcie F. S. **Aprendizagem Significativa**: A teoria de David Ausubel. São Paulo, Moraes, 1982.

NASSER, Lílian e TINOCO, L. **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro:IM/UFRJ, Projeto Fundação, 2001.

National Coucil of Teachers of Mathematics. **Curriculum na evaluation standards for school mathematics**. Reston, Virginia, 1989.

OLIVEIRA, A. M., SILVA, A. **LISA – Biblioteca da matemática moderna**. São Paulo: Lisa , livros irradiantes s.a, 1976, volumes 1, 2, 5.

PAIS, Luiz C. **Didática da Matemática** – Uma análise da influência francesa. BH: Editora Autêntica, 2001.

PARZYSZ, Bernard. **Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1**. Extrait du colloque de la COPIRELEM – Tours – 2001.

PARZYSZ, Bernard. **Pre-service elementary teachers and the fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving**. IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM (université Paris-7)- 2002.

PASTOR, A.J & RODRIGUES, A.G. **El grupo de las isometrias Del plano**. Espanha: Editorial Síntesis, S.A, 1996.

PIRES, Célia C. & CURI, Edda C. & Pietropaolo, Ruy. **Educação Matemática**. 7ª série. São Paulo: Atual, 2001

PIRES, Célia M. C. **Currículos de Matemática: da Organização linear à idéia de rede**. São Paulo : FTD., 2000.

PIROLA, Nelson Antonio; Brito, Márcia Regina F. A formação dos conceitos de triângulo e de paralelogramo em alunos da escola elementar. In **Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Pesquisa**. Márcia Regina F. (org). Florianópolis: Insular, 2001, p.85-106.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

REZI, Viviane. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. 2001. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001. Disponível em <<http://www.bibli.fae.unicamp.br/sitescb.htm>>. Acesso em 9 jul.2006.

SÃO PAULO. **Subsídios para a implementação do guia curricular de Matemática** – Geometria para o 1º grau 5ª a 8ª séries. São Paulo: SE/CENP.

SÃO PAULO. **Subsídios para a implementação do guia curricular de Matemática** – Geometria para o 1º grau 5ª a 8ª séries: Atividades. São Paulo: SE/CENP.

USISKIN, Zalman. **Resolvendo os dilemas da geometria escolar**. In LINDQUIST Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. Aprendendo e ensinando geometria. Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p.21-39.

VAN HIELE, Pierre M. **De Problematiek van het insicht**: Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetthunde-leerstof, 1957.147p. Tese Doutorado. Universidade Real Utrecht,1957. tradução em espanhol por Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa del C.I.D.E, 1990.

VAZ, Regina, L. **O uso das isometrias do software Vabri-Géomètre como recurso de Prova e demonstração**. 2004. 216p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

VELOSO, E. Geometria: **Temas Actuais**: materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional,2000.

VERA, Francisco. **Científicos Griegos**. Madrid: Editora Aguilar, 1970.

VIANA, Odaléa Aparecida. **O conhecimento geométrico de alunos do CEFAM sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito**. 2000. 249 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em <<http://www.bibli.fae.unicamp.br/sitescb.htm>>. Acesso em 9 jul.2006.

VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. Educação Matemática. **Revista Educação Matemática**, número 62, 2001.

VILLIERS, M. D. Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica. **Revista Educação Matemática**, número 62, 2001.

VITRAC, B; CAVEING, M. **Euclide Les Éléments**. Paris, Presses Universitaires de France,1990.

WIELEWSKI, G.D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii**. 2005. 407 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

Anexo 1: Questionário do observador

Atividades do bloco 1 - concreto

- O aluno percebeu a congruência de objetos tridimensionais? Houve dificuldade na identificação?
- O aluno percebeu a superposição de figuras congruentes?
- Quantas vezes solicitou ajuda?

Atividades do bloco 2

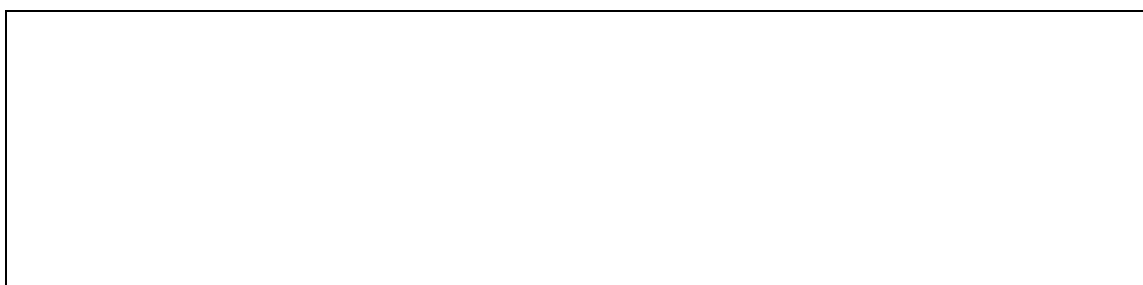
- **Utilizando o Cabri-géomètre**
 - O aluno identificou as ferramentas de transformação do Cabri?
 - O aluno entendeu o enunciado do exercício?
 - O aluno lembrou de criar vetores quando para usar a translação, um eixo de simetria para usar a simetria axial e um ângulo e um ponto fixo para usar a rotação?
 - Quantas vezes solicitou ajuda?
- **Utilizando a placa quadriculada**
 - O aluno entendeu como preencher a tabela para a construção de triângulos e seus congruentes?
 - O aluno entendeu o enunciado das questões?
 - A régua e o transferidor, foram utilizados? Houve dificuldade em utilizar esses instrumentos?
 - O aluno percebeu que nem sempre é possível construir triângulos?
 - Houve dificuldade em construir outros triângulos congruentes nos casos em que era possível a construção?
- **Institucionalização**
 - O aluno conseguiu preencher associando os lados e ângulos congruentes de cada caso de congruência de triângulos?
 - O aluno associou a atividade da placa quadriculada com os casos de triângulos congruentes?
 - Foi fácil a aceitação dos casos?
 - Solicitou ajuda? Quantas vezes?
- **Atividades do bloco 3 – Prova**
 - O aluno interpretou os enunciados? Construiu figuras?
 - Precisou reconstruir as figuras?
 - Utilizou os casos de congruência?
 - Utilizaram argumentos a partir do que experimentaram nos blocos anteriores, ou seja, justificaram a partir de observações ou construções?
 - Quantas vezes solicitou ajuda?

Anexo 2: Questões sobre Congruência de Figuras

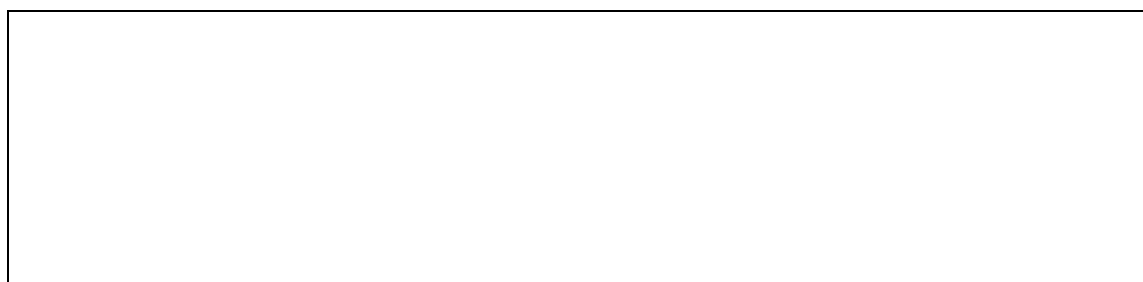
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Programa: Mestrado Profissional de Ensino de Matemática
Responsável: Benedita Natsuko Tojo

Nome: _____ Nº _____ série: _____ data: _____

1. Explique o que são figuras congruentes.



2. Desenhe duas figuras congruentes.



3. Construa uma figura congruente à figura dada.



Anexo 3: Lista de Materiais da atividade 1 do Bloco 1

Lista de Materiais contidos na sacola de objetos congruentes

- Botão com 4 furos – cor creme
- Botão com 2 furos – cor creme
- Bola de ping-pong
- Peça de brinquedo de montar tipo Lego – cores diferentes
- Colher de plástico – cor branca
- Copo de brinquedo- cores diferentes
- Copo de plástico de 180 ml – cor branca
- Copo de plástico de 80 ml – cor branca
- Colher de sorvete – cores diferentes
- Clips
- Alfinete
- Parafuso sextavado $\frac{1}{4} \times 1"$
- Parafuso francês $\frac{1}{4} \times 1"$
- Porca $\frac{1}{4}$
- Porca $\frac{5}{16}$
- Porca $\frac{3}{16}$
- Cabide – cores diferentes
- Palito com colchetes presos nas extremidades – mesmo lado
- Palito com colchetes presos nas extremidades –lados opostos
- Fita 11,5 cm – cores diferentes
- Fita 15 cm – cores diferentes
- Luva

Anexo 4: Atividades do Bloco 1

Pontifícia Universidade de São Paulo Programa de Pós-Graduação Educação Matemática		Data:
Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni	Aplicadora: Profª Benedita Natsuko Tojo	Observador: Prof. Anderson José da Silva
Assunto: Curso de Cabri-Géomètre e Congruência de Figuras Planas		
Nome:		Identificação:
Nome:		Identificação:

Estudo da Congruência - Concreto

Atividade 1. Sacola com objetos congruentes

1. Os objetos contidos na sacola são congruentes dois a dois.

Procure regularidades nos objetos e identifique os pares de objetos congruentes.

Cole, lado a lado, com fita adesiva, os pares de objetos congruentes na folha dada.

2. Se você fosse explicar para um colega de classe o que são objetos congruentes, o que você diria a ele?

Atividade 2. Figuras planas

O que você acha das figuras abaixo. São congruentes? O que você faria para decidir se as figuras são ou não congruentes.

Situação 1: Figuras 1 e 2:

 Figura 1	As figuras 1 e 2 são congruentes? () sim () não Justifique.
 Figura 2	Explique o que você fez para justificar sua resposta.

Situação 2. Figura formada por segmentos.

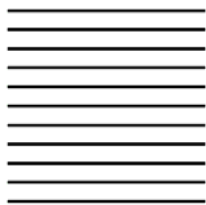


Figura 3

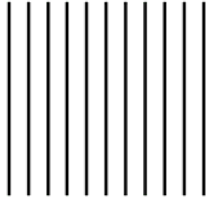


Figura 4

Os segmentos da figura 3 são congruentes aos segmentos da figura 4?

()sim ()não

Justifique.

Explique o que você fez para justificar sua resposta.

A figura 3 é congruente à figura 4? ()sim ()não

Justifique.

Explique o que você fez para justificar sua resposta.

3. Se você fosse explicar para um colega de classe como identificar duas figuras congruentes, o que você diria a ele?

Atividade 3: Jogo da Congruência

No verso de cada um dos retângulos que aparecem no quadro há figuras congruentes duas a duas. O objetivo é identificar esses pares congruentes.

1. Identifique abaixo as figuras são congruentes duas a duas. Como você identificou?
2. Com que jogo tradicional esse "jogo da congruência" se assemelha? Qual o objetivo do jogo tradicional?

Manipulação de objetos - atividade 2 do Bloco 1

3. Decida se as figuras são congruentes.

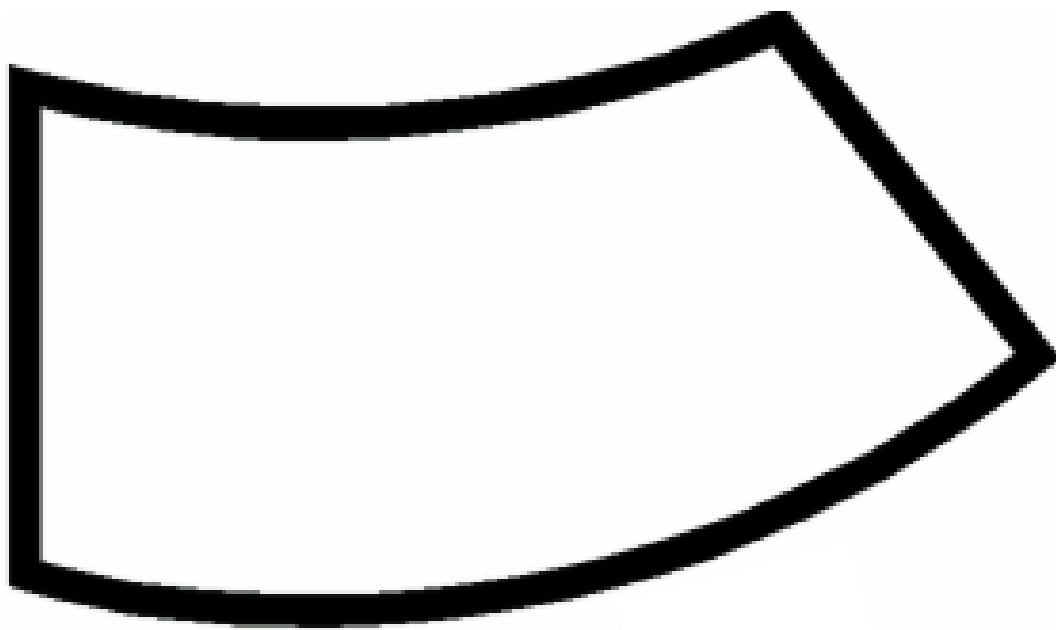


Figura 1

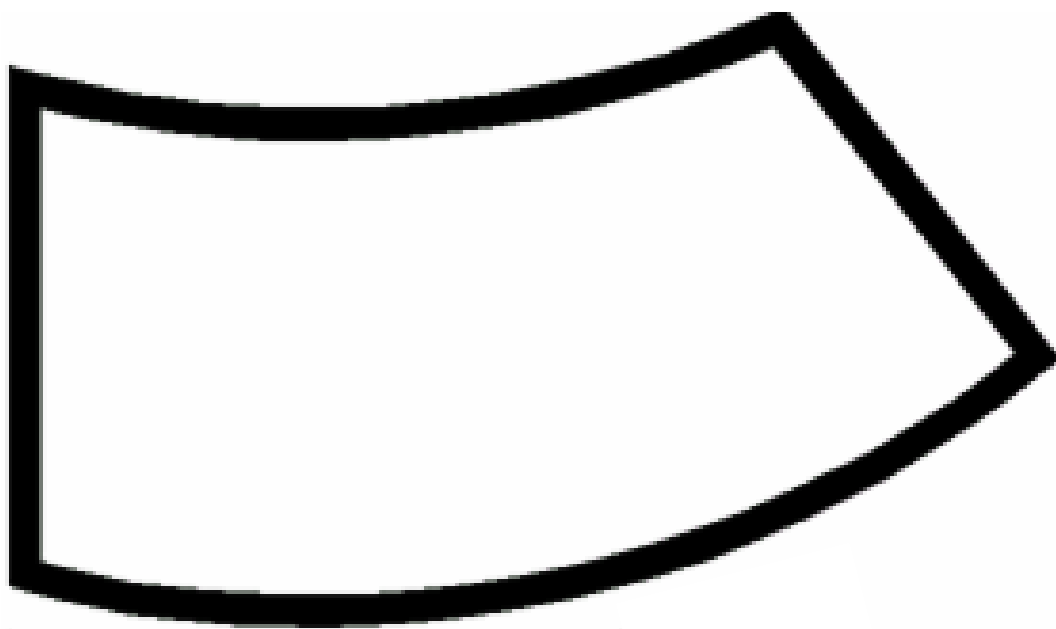


Figura 2

Manipulação de objetos - atividade 2 do Bloco 1

4. Decida se as figuras são congruentes.

Figura 3

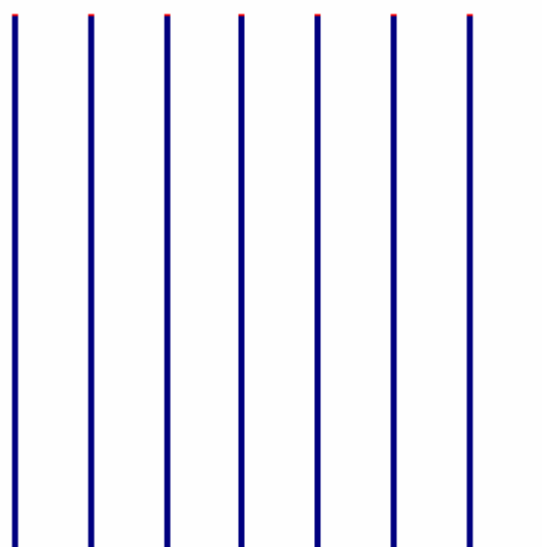
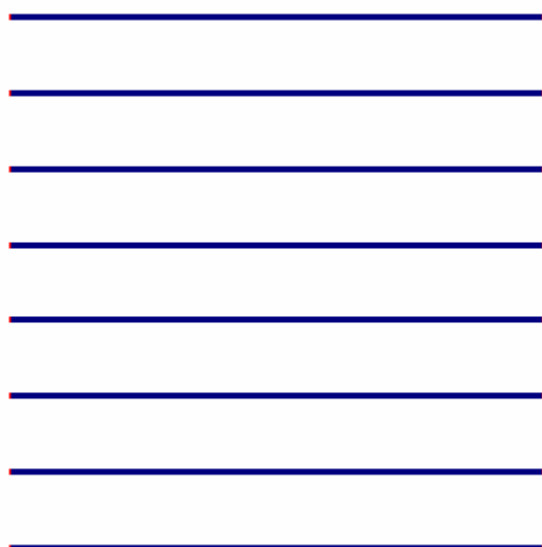


Figura 4

Anexo 5: Atividade do Bloco 2 – Cabri-Géomètre

Pontifícia Universidade de São Paulo Programa de Pós-Graduação Educação Matemática		Data:
Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni	Aplicadora: Profª Benedita Natsuko Tojo	Observador:
Assunto: Curso de Cabri-Géomètre e Congruência de Figuras Planas Congruência de triângulos – Cabri II		
Nome:		Identificação:
Nome:		Identificação:

As ferramentas de transformações geométricas estão na caixa de ferramenta transformação do Cabri. Abra os arquivos abaixo e resolva as atividades propostas.

Lembre-se de fazer os comentários e gravar o arquivo no final de cada atividade.

Atividade 1. Abra o arquivo barco_vela.

Atividade 2. Abra o arquivo hélice.

Atividade 3. Abra o arquivo: triângulo

Atividade 4. Abra o arquivo: triângulo2

Atividade 5. Abra o arquivo congruência1

Atividade 6. Abra o arquivo congruência2

Atividade 7. Abra o arquivo congruência3

Atividade 8. Abra o arquivo congruência5

Atividade 9. Abra o arquivo congruência6

Anexo 6: Atividades do Bloco 2 - Malha quadriculada

Utilizando os resultados dos experimentos da folha 1:

Explique a possibilidade e a não possibilidade de construção de triângulos com as medidas dos experimentos 1, 2 e 3 (LLL)

1. Explique a possibilidade e a não possibilidade de construção de triângulos com as medidas dos experimentos 6, 7 e 8 (AAA).
2. Analise os resultados da tabela e escreva abaixo os casos em que foi possível construir apenas um triângulo, ou seja, a construção foi única.

Institucionalização: Casos de congruência Condições mínimas para a congruência entre dois triângulos.

Dois triângulos são congruentes quando eles têm os lados respectivamente congruentes e os ângulos respectivamente congruentes.

Não precisamos comparar todos os lados e ângulos de dois triângulos para reconhecer que são ou não congruentes. Basta verificarmos as condições mínimas de congruência.

Símbolo de congruência: $\cong$

Símbolo do triângulo ABC: $\triangle ABC$

Nos triângulos abaixo, cada tracinho indica a congruência de lados ou de ângulos.

Caso Lado, ângulo, lado (LAL) 	Se $\begin{cases} _ \cong _ \\ \wedge \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{cases}$	então: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
Caso Ângulo, lado, ângulo (ALA) 	Se $\begin{cases} _ \cong _ \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{cases}$	então: $\triangle _ \cong \triangle _$
Caso Lado, lado, lado (LLL) 	Se $\begin{cases} _ \cong _ \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{cases}$	então: $_ \cong _$
Caso Lado, ângulo, ângulo oposto (LAAo) 	Se $\begin{cases} _ \cong _ \\ _ \cong _ \\ _ \cong _ \end{cases}$	então: $_ \cong \triangle _$

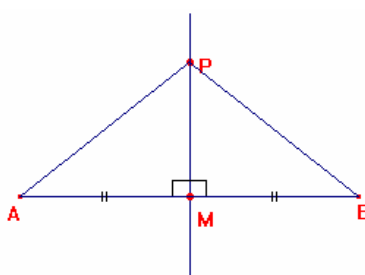
Se dois triângulos apresentam uma dessas condições então os dois triângulos são congruentes.

Anexo 7: Atividade do Bloco 3 – Prova

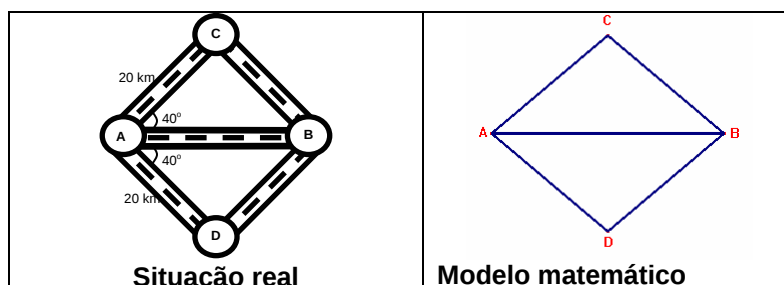
Pontifícia Universidade de São Paulo Programa de Pós-Graduação Educação Matemática		Data:
Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni	Aplicadora: Profª Benedita Natsuko Tojo	Observador: Prof.
Assunto: Curso de Cabri-Géomètre e Estudo da Congruência de Figuras Planas Congruência de triângulos - Prova		
Nome:		Identificação:
Nome:		Identificação:

Utilize os casos de congruência de triângulos para justificar e responder as questões a seguir:

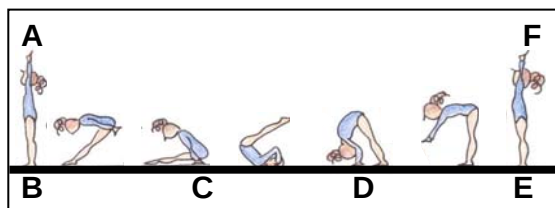
23. Uma reta é perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio M. Seja P um ponto qualquer da reta, diferente de M. Prove que $PA \cong PB$. Justifique.



24. Rafael quer ir da cidade A para a cidade B. Porém a estrada que liga diretamente as duas cidades está interditada. Ele tem de optar, então, por dois caminhos possíveis, veja a figura. Qual o menor caminho a ser percorrido: ir de A para C e depois B ou ir de A até D e depois B? Justifique sua resposta.



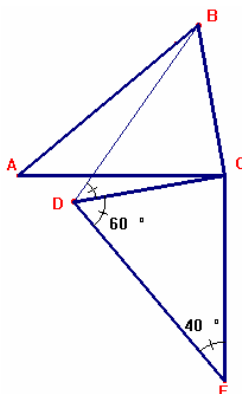
25. Um avião levanta vôo para ir da cidade A à cidade B, situada a 500km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção do vôo de um ângulo de 90° . Se a rota não tivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500km previstos. **Justifique** a sua resposta.
26. O solo é considerado a base de todas as outras provas da Ginástica Olímpica. Os rolamentos são os primeiros elementos a se aprender. Na ilustração a ginasta realiza um dos movimentos básicos. Considere o alongamento perpendicular AB inicial igual ao final EF. Considere, também, que BC é congruente a DE. O que você pode dizer sobre a distância CF e DA? Justifique.



Rolamento de costas carpaldo

27. Considere uma circunferência de centro O e uma corda AB . Seja M o ponto médio da corda. Complete a frase abaixo usando as palavras sempre, nunca, às vezes. "O segmento OM é perpendicular ao segmento AB ." Justifique sua resposta.

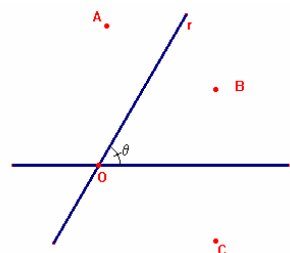
28. Um triângulo CDE pode ser obtido pela rotação de 90° do triângulo ABC , sentido anti-horário, ao redor do ponto C . Podemos afirmar que o ângulo $\widehat{CDB}$ tem medida igual a:
Justifique sua resposta.



29. Um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados congruentes. Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

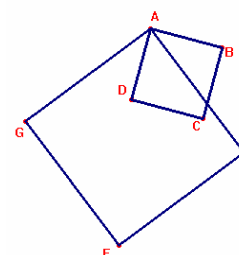
30. Seja o triângulo ABC e M o ponto médio do lado AC . Uma semi-reta com origem em B passando por M é traçada. P e Q são pontos da semi-reta. AP e CQ são perpendiculares à semi-reta dada. Prove que $AP \cong QC$.

31. Dadas as retas r e s com ponto de interseção em O .
 B é simétrico do ponto A em relação à reta r e C é simétrico do ponto B em relação à reta s .
O ponto B está na região em que as retas r e s formam o ângulo θ (teta).
O que se pode dizer do ângulo $\widehat{AOC}$ e relação ao ângulo θ ?
Justifique.



32. Considere uma circunferência de centro O e uma corda AB . Pelo ponto O trace uma reta perpendicular ao segmento AB . Essa reta intersectará o segmento AB num ponto G . Complete a frase usando as palavras sempre, nunca, às vezes.
"G é ponto médio do segmento AB ". Justifique sua resposta.

33. Os Quadriláteros $ABCD$ e $AEFG$ são quadrados. Mostre que os segmentos DG e BE são congruentes.



Anexo 8 – Convite



Curso Cabri-Géomètre II e Introdução à Geometria Plana - Congruência

Aos alunos da 1ª série do Ensino Médio **E.E. Prof. Francisco Feliciano Ferreira da Silva – Chico Ferreira**

Convidamos você a participar do curso ***Cabri-Géomètre II e Introdução à Geometria Plana – Congruência*** para atualizar e aprimorar seus conhecimentos sobre a Geometria Plana.

Este curso é parte integrante da Dissertação de Mestrado da professora Benedita Natsuko Tojo da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC.

O curso contará com atividades práticas e teóricas e também será utilizado o programa Cabri-Géomètre II, software destinado ao estudo da Geometria.

O curso será realizado no mês de março, nessa escola.

Semana 1	6/mar/06	seg	13h00~15h00
	7/mar/06	ter	13h00~15h00
	10/mar/06	sex	13h00~15h00
Semana 2	13/mar/06	seg	13h00~16h00
	14/mar/06	ter	13h00~16h00
	17/mar/06	sex	13h00~16h00
Semana 3	20/mar/06	seg	13h00~16h00
	21/mar/06	ter	13h00~16h00
	24/mar/06	sex	13h00~16h00

Agradecemos e esperamos contar com a sua participação.

Ficha de inscrição	 Curso Cabri-Géomètre II e Introdução à Geometria Plana - Congruência		
Número:			
Nome:			Idade:
Série:	Telefone contato:		

Anexo 9 - Certificado

Certificamos que



participou do curso "*Introdução à Geometria com ênfase nos estudos sobre congruência, usando o software Cabri-Géomètre II*", proferido pela Professora Mestranda Benedita Natsuko Tojo da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, realizado na *E. E. Prof. Francisco Feliciano Ferreira da Silva - Chico Ferreira*, no período de 06/03/2006 a 27/03/2006, carga horária de 24 horas.

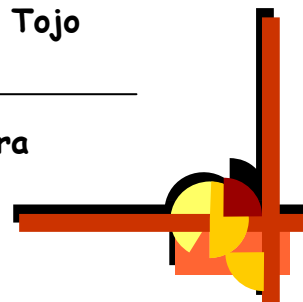
Jacareí, 27 de março de 2006

Judith Raymundo da Silva

Diretora de Escola

Benedita Natsuko Tojo

Professora



Anexo 10: Atividades e familiarização com o Cabri-géomètre

Parte 1

"Curso Cabri-Géomètre e Geometria - Estudo da Congruência"

A primeira parte que antecede a seqüência de ensino deste trabalho foi desenvolvida segundo os itens: I) Introdução e Apresentação das ferramentas do Cabri II; II) Ferramenta Construir; III) Ferramenta Transformar.

I) Introdução e Apresentação das ferramentas do Cabri II: Como motivação para o início do curso, uma atividade foi realizada com palitos de sorvete para formar polígonos, de modo a mostrar para os alunos que o triângulo é o polígono mais simples, em termos de número de lados e ângulos se comparado com outros polígonos, mas que apresentam propriedades como, por exemplo, a rigidez de sua forma. Esses palitos foram confeccionados com colchetes de pressão nas extremidades (colados), para facilitar a conexão de um palito com outro, e possibilitar modificar a forma dos polígonos.

Atividade 1: Construção de polígonos com palitos de sorvete

Você está recebendo 10 palitos de sorvete com colchetes de pressão colados nas extremidades. Construa polígonos de 3 lados, 4 lados, 5 lados, etc, de modo que cada palito represente um lado do polígono construído.

1. Sem desconectar os palitos experiente, em cada polígono construído, obter novos formatos. Comente os resultados.
2. Ao tentar obter novos formatos, o que ocorre com os ângulos e os lados de cada polígono?
3. Como na figura, por que é usual reforçar portas ou portões com traves na diagonal?



Atividade 2: com palitos de sorvete.

Conecte os dois palitos de sorvete movimente as extremidades. Observe a abertura formada a partir do vértice. O que você percebe?

Em seguida, foi apresentado sucintamente, um contexto histórico sobre a geometria euclidiana e as transformações, ressaltando o papel de Euclides, de Hilbert e de Klein.

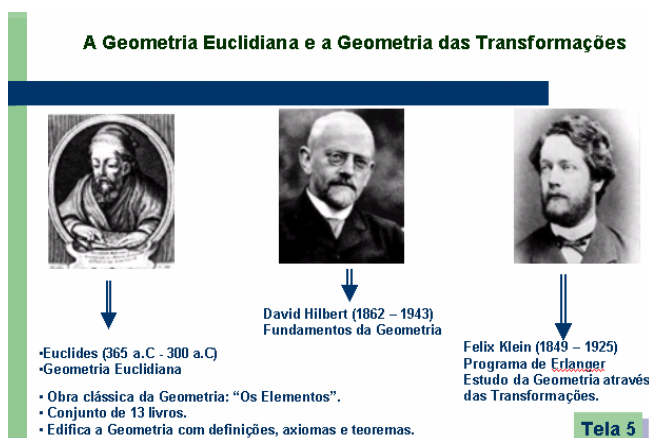
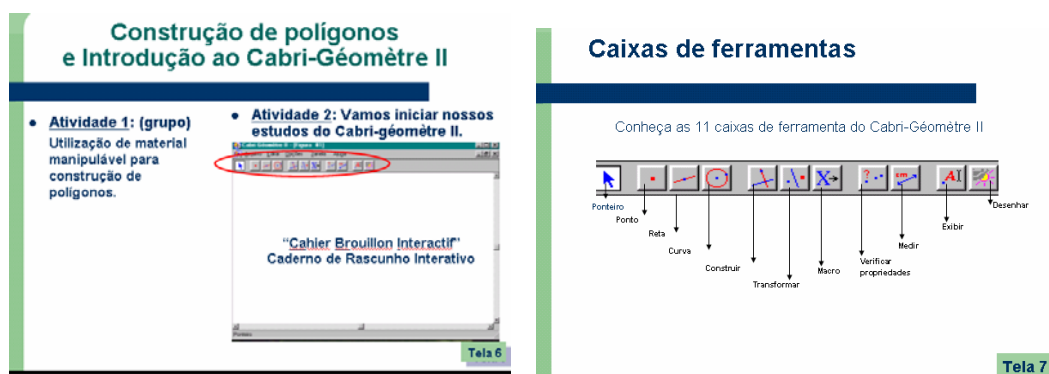


Figura A1: Contexto histórico da geometria

II) Ferramenta Construir : A familiarização com as ferramentas do Cabri-Géomètre II, foi realizada com atividades de construção, que possibilitou aos alunos reverem ou construírem conceitos, por si mesmos: ponto, ângulo, retas, segmentos, e suas relações e figuras geométricas, algumas propriedades das figuras, como a mediana, bissetriz, ponto médio, mediatriz.



As seguintes atividades foram propostas:

Atividade 1: Criando pontos e segmentos sobre o plano

1. Acione a ferramenta ponto e clique no plano. Chame de A.
2. Crie outros pontos e nomeie com uma letra maiúscula qualquer.
3. Para desativar a ferramenta, clique na parte cinza ou na ferramenta ponteiro.
4. Agora, construa o segmento com extremidades A e B. Construa outros segmentos.

Atividade 2: Abrir o arquivo Quadrado.

Com os palitos de sorvete verificamos que os triângulos são considerados estruturas rígidas porque quando definidos os lados, os ângulos não se alteram. No Cabri, uma figura é considerada

robusta se suas propriedades são mantidas mesmo quando seus lados e vértices são movimentados. Nessa atividade explore as seguintes ferramentas: distância e comprimento, ângulo.

1. Somente observando: As duas figuras podem ser chamadas de quadrados? Por que?
2. Agora, movimente os lados e os vértices das figuras. Que figura você escolheria para representar o quadrado? Justifique.

Atividade 3: Nomeando os itens criados.

1. Crie um ponto e chame de A.
2. Construa um segmento com extremidades B e C.
3. Clique em "ponto sobre objeto" e crie o ponto D sobre o segmento BC.
4. Movimente os pontos A e D e explique a diferença entre eles. Grave o arquivo.

Atividade 4: Abra o arquivo Segmento.

Dados os segmentos AB e CD. Construa um segmento EF de medida igual a AB+CD.

1. use a ferramenta "distância e comprimento" para medir os segmentos AB e CD.
2. Acione a ferramenta "calculadora". Some as medidas de AB+CD. Arraste o resultado da soma para fora da calculadora.
3. Acione a ferramenta "transferência de medidas" e crie um segmento EF com medida AB+CD (para isso, clique no resultado da soma de AB+CD e no ponto E). Movimente as extremidades dos segmentos AB e CD. Comente. Grave o arquivo.

Atividade 5: Ângulos O.P.V. – opostos pelo vértice.

1. Desenhe abaixo, como você imagina ser a representação da seguinte situação: *Duas retas concorrentes r e s dividem o plano em quatro regiões. O ponto O é o ponto de interseção das retas r e s. Tem-se que $P \in r$ e $Q \in s$.*
2. Abra o arquivo opv.
Movimente os pontos P e Q. Comente a relação entre os ângulos PÔQ formados com o movimento dos pontos em cada região. Sugestão: Abaixo, você pode criar uma tabela comparando as regiões com os ângulos formados e fazer seus comentários. Grave o arquivo.
3. Movimente as retas e responda: *Quando as duas retas concorrentes r e s formam quatro ângulos iguais?*

Atividade 6: Reta perpendicular

1. Dada uma reta r e um ponto P fora dela.
Acione a ferramenta "reta perpendicular" e clique em P e num ponto qualquer de r.
Com isso você tem um ponto P que pertence a uma reta concorrente à reta r. Descubra as medidas dos ângulos formados pelas 4 regiões. Comente a sua resposta. Grave o arquivo.

Atividade 7: Reta paralela

1. Dada uma reta r e um ponto P fora dela. Construa uma reta s que passa pelo ponto P e é paralela a reta r.

Atividade 8: Ponto médio.

1. Construa um segmento AB.
2. Acione a ferramenta "ponto médio" e obtenha o ponto Q, médio de AB.
3. Qual a relação do ponto Q com as extremidades A e B?

Atividade 9: Abra o arquivo pto_medio.

1. Seja o segmento AB. O ponto P é móvel.
2. Q é ponto médio de AP e R é ponto médio de PB.
3. O que se pode dizer sobre o segmento QR?

Atividade 10: Soma dos ângulos internos de um triângulo é _____

Passo 1: Construa um triângulo ABC.

Passo 2: Utilize a ferramenta "ângulo" e obtenha as medidas de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ internos do triângulo ABC.

Passo 3: Acione a ferramenta "calculadora" e some os ângulos internos do triângulo ABC. Arraste o resultado para a tela do computador.

Passo 4: Movimente os vértices e os lados e some os novos ângulos.

Passo 5: Repita mais vezes o procedimento e responda: Com movimentos nos vértices e nos lados, o que se altera e o que não se altera?

Atividade 11: Triângulo equilátero.

Construa um triângulo equilátero.

Passo 1: Construa um segmento AB.

Passo 2: Construa uma circunferência de raio AB, com centro em A.

Passo 3: Construa uma circunferência de raio AB, com centro em B.

Passo 4: Obter o ponto C que é a interseção das duas circunferências.

Passo 5: ligar os segmentos AC e BC. Medir os ângulos e os lados. Comente. Grave o arquivo.

Atividade 12: Mediatriz de um segmento

1. Construa um segmento AB. Utilize a ferramenta "mediatriz" e marque o ponto M, que é interseção da mediatriz com o segmento AB. Que relação existe entre o ponto M e as extremidades A e B?
2. Crie um ponto P sobre a mediatriz e movimente-o. Que relação existe entre o ponto P da mediatriz e as extremidades A e B do segmento?

Atividade 13: Triângulo isósceles

Sabendo que: Um triângulo isóscele tem dois lados iguais, construa o triângulo isóscele ABC. O que se pode dizer sobre os ângulos da base do triângulo isóscele?

Atividade 14: Obtendo as medianas de um triângulo.

Chama-se mediana de um triângulo o segmento cujas extremidades são o vértice e o ponto médio do lado oposto.

1. Construa um triângulo ABC. Obtenha o ponto médio M do lado AB.
2. Ligue M ao vértice oposto C. (o segmento MC é mediana relativa ao lado AB).
3. Obtenha a mediana NB relativa ao lado AC. Obtenha a mediana PA relativa ao lado BC.
4. Movimente os lados e vértices do triângulo ABC.

Chama-se Baricentro o ponto de interseção das três medianas do triângulo.

Atividade 15: Bissetriz de um ângulo

1. Determinar três pontos não colineares (não alinhados).
2. Traçar a reta definida pelos pontos A e B e a reta definida por A e C.
3. Acione a barra de ferramenta e construa a bissetriz BAC.
4. Determinar um ponto D sobre a bissetriz.
5. Medir os ângulos BÂD e DÂC. Defina bissetriz.

Atividade 16: Bissetriz de um ângulo

1. Utilizando a mesma construção do item anterior, trace uma perpendicular à reta AB pelo ponto D. Obtenha o ponto R de interseção dessas duas retas.
2. Pelo ponto D, trace uma perpendicular à reta AC. Obtenha o ponto S de interseção dessas duas retas.
3. Determinar as medidas DR e DS e observá-las ao movimentar o ponto D. Comente. Grave o arquivo.

Atividade 17: Obtendo as bissetrizes de um triângulo.

Chama-se bissetriz de um triângulo o segmento da bissetriz de um ângulo do triângulo cujas extremidades são o vértice do ângulo e a interseção com o lado oposto.

1. Construa um triângulo ABC.
2. Acione a ferramenta "bissetriz" e clique em A, B e C. Você obterá a bissetriz BN relativa ao ângulo B. Obtenha as bissetrizes relativas aos ângulos C e A.

Chama-se incentro o ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo.

3. Identifique o incentro do triângulo que você construiu.

Atividade 18: Utilize o que você aprendeu até agora – lembre-se que as figuras devem ser robustas.

1. Construa um quadrado de 6cm de lado.
2. Construa um retângulo.

Atividade 19: Abra o arquivo paralelogramo.

Um quadrilátero é um paralelogramo quando seus lados opostos são paralelos.

1. Utilize a ferramenta "reta paralela" e continue a construção do paralelogramo ABCD.
2. Movimente os vértices. O que se pode escrever sobre os ângulos e lados do paralelogramo?

III) Ferramenta Transformar: As atividades a seguir deverão levar os alunos a estudarem, de modo intuitivo, a noção de vetor e descobrir que ele está associado à translação. Na simetria axial o eixo de simetria se faz necessário e que na rotação há a necessidade do ângulo e um ponto como centro de rotação.

Explorando a ferramenta Translação

1. Abra o arquivo: Translação_1: Utilize a ferramenta "Translação" para transladar :
 - O ponto A e obter o translado A', segundo o vetor v.
 - O segmento PQ e obter o translado P'Q', segundo o vetor v.
 - O polígono F e obter o translado F', segundo o vetor v.Movimente os pontos, segmentos e o vetor v e descubra onde estão os pontos translados. O que ocorre com uma figura quando é aplicada a translação?
2. Pavimentação
 - Construa um retângulo de 4cm de base e 2cm de altura.
 - Crie um vetor v sobre a base e translate o retângulo, segundo esse vetor.
 - Repita o processo algumas vezes com o novo retângulo, segundo o vetor v.
 - Crie um vetor w sobre a altura, com sentido para baixo e translate o retângulo segundo o vetor w. Repita o processo com os demais retângulos. Qual foi o resultado?
3. Abra o arquivo cao.
Utilize a ferramenta translação e leve o cão para o interior da casinha. Quais foram os procedimentos?
4. Abra o arquivo paralelogramo2.
Utilize a ferramenta translação para a construção do paralelogramo. Quais foram os procedimentos?

Explorando a ferramenta Simetria Axial

5. Abra o arquivo R_basico_1.
 - Ative a ferramenta "simetria axial" e obtenha as imagens das figuras dadas segundo o eixo de simetria (reta s).
 - Movimente as figuras, os pontos das figuras, o eixo de simetria e descubra as imagens de cada um dos pontos e nomeie-os com A', B', C', etc.
 - Como é o translado em relação à figura original?
6. Continue com as figuras da questão 6.
 - Ligue os pontos das figuras iniciais com suas respectivas imagens. (ex.: construa o segmento AA', BB', etc).
 - Movimente as figuras, a reta s e descubra propriedades e faça seu comentário sobre:
 - o a relação entre a reta s e os pontos ligados,
 - o as medidas dos quatro ângulos formados entre a reta r e o segmento construído.
 - o Pelo que você estudou até agora, que nome você daria para o ponto de interseção da reta s e os segmentos construídos? Por quê?
 - o E a reta s, que nome você daria?
7. A partir de dois pontos A e B recupere o eixo de simetria.

8. Construa um triângulo ABC e um eixo de simetria. Sem utilizar a ferramenta simetria axial, obtenha a imagem simétrica do triângulo ABC em relação ao eixo de simetria.
9. Abra o arquivo Letra_F.
Utilizando a ferramenta "simetria axial" obtenha as imagens de F segundo as diagonais do hexágono. Em seguida, movimente o desenho original e escreva sobre os resultados obtidos.
10. Bissetriz de um ângulo.
Edite o número 36. A seguir, construa um ângulo de 36 graus. Finalmente, usando a simetria axial construa um ângulo de 72 graus.

Explorando a ferramenta Simetria Central

11. Realize os seguintes experimentos:
 - a) crie os pontos A e O. Acione a ferramenta simetria central e obtenha o simétrico de A em relação a O. Movimente os pontos e comente o resultado.
 - b) Construa um segmento AB e um ponto O. Use a ferramenta simetria central e obtenha o segmento A'B' que é simétrico de AB em relação ao ponto O. Identifique os pontos A' e B'. Comente os resultados.
 - c) Construa um polígono qualquer e um ponto O. Use a ferramenta simetria central e obtenha o simétrico do seu polígono em relação ao ponto O.
12. Construa um triângulo ABC. Acione a ferramenta simetria central e clique em um dos vértices. Comente sobre os resultados obtidos.
13. Construa um triângulo retângulo com os catetos medindo 5cm cada.
 - Encontre o ponto médio da hipotenusa.
 - Acione a ferramenta simetria central e clique na sequência: no triângulo, depois no ponto médio. Que figura você obteve? Justifique.

Explorando a ferramenta Rotação

14. Ferramenta Edição numérica
 - Construa um segmento AB.
 - Acione a ferramenta "edição numérica" e digite 90.
 - Acione a ferramenta "rotação" e clique na sequência: no segmento, depois, 90 e finalmente no ponto A.
 - Comente os resultados.
15. Construa um quadrado usando a ferramenta rotação.
16. Construa um triângulo equilátero utilizando a ferramenta rotação.
17. Utilize a ferramenta rotação e construa um triângulo retângulo com as medidas dos catetos 6cm e 4 cm.
18. Construa um ângulo AÔB qualquer. Usando a ferramenta "rotação", construa um ângulo DÔB de modo que o OA seja bissetriz de DÔB.
19. Considere um triângulo ABC. Realizando uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice A. O que se pode dizer sobre o segmento AB?
20. Centro de rotação.
 - Abra o arquivo Barco_rotacao. Clique em edição numérica: digite 50
 - acione a ferramenta rotação e clique na sequência: figura, 50, centro O da circunferência.
 - repita o processo clicando sempre na nova figura formada.
 - Movimente o ponto O. Faça o seu comentário.