IRENE DA CONCEIÇÃO RODRIGUES PRESTES

GEOMETRIA ESFÉRICA:

Uma conexão com a Geografia

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

PUC/SP
São Paulo
2006

IRENE DA CONCEIÇÃO RODRIGUES PRESTES

GEOMETRIA ESFÉRICA
Uma conexão com a Geografia

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr**. **Vincenzo Bongiovanni**.

PUC/SP
São Paulo
2006

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a produção total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura________________________ Local e Data__________________

Dedicatória

Dedico este trabalho às duas mulheres que sempre me incentivaram na busca do conhecimento:

Minha Mãe, Esmeralda, que pelo estímulo carinho e exemplo de perseverança não me deixou esmorecer.

Minha “vózinha”, Alice, que está com certeza numa outra dimensão torcendo por mim, como sempre fez. “As pessoas que amamos não terminam, continuam conosco e nosso coração percebe isso. Viram estrelas, e delas, de alguma forma, nos vêm força e claridade”. (Osvaldo D. Tórtora).

Agradecimentos

É com muita alegria que, ao final deste estudo, eu tenha uma lista extensa de pessoas que contribuíram para a sua realização. Desde já, desculpo-me se, porventura, minha memória falhar num momento tão importante.

Ao meu orientador, Professor Doutor Vincenzo Bongiovanni, pelo exemplo de responsabilidade e dedicação e ainda, pela confiança, amizade e companheirismo, que propiciaram a tranqüilidade necessária para a elaboração deste trabalho.

Aos Professores Doutores, Paulo Roberto de Oliveira e Marcos Antonio Santos de Jesus pelas sugestões oferecidas na qualificação.

Aos meus pais, João e Esmeralda, pelo dom da vida...

Aos alunos Allan, Augusto, Bianca, Bruno, Diego, Julia, Juliana, Mariana, Munique, Priscila, Rádila , Rodrigo, Thaís e Vinicius que se prontificaram a participar da pesquisa, pela disposição e colaboração, fundamentais para a Investigação . Aos seus pais, por permitirem que os filhos participassem do projeto.

Aos amigos e "Professores Observadores": Ana Alice, Fernanda, Giane, Helena, Luciana e Rogério, por deixarem suas casas e seus familiares, nas manhãs de sábado, para auxiliarem neste projeto, por todo apoio dispensado, antes, durante e depois da aplicação das atividades.

Ao meu sobrinho Lucas, que se prontificou a desenvolver as atividades, auxiliando na análise a priori e por dispensar seu tempo aos sábados para efetuar a filmagem.

À direção da EE Sidrônia Nunes Pires, por permitir a utilização da escola para o desenvolvimento das atividades.

Ao pessoal do projeto Escola da Família, em especial à Renata e ao Gilberto, auxiliando na organização da sala de informática e ao Luciano pelo cafezinho tão esperado.

Ao amigo Aristides, pela confecção das esferas de arame.

À amiga Profª. Lia, pelas correções ortográficas, empréstimo de gravador e todo apoio dispensado para a realização deste trabalho.

Aos meus irmãos, Ana, Beto, Carlos, Cláudia e Naninha, que de uma forma ou outra, contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus sobrinhos, pelo carinho dispensado durante toda esta trajetória.

Aos amigos Gilberto, Nanci, Shilene, Sueli, que dispensaram seu tempo auxiliando na busca e organização do material, empréstimo de gravadores, entre outros.

Aos professores de geografia por se prontificarem a responder ao questionário e, aos professores de geografia Cleusa, Elaine, Fernando e Mara, da EE Sidrônia Nunes Pires por auxiliarem com o empréstimo de material.

Às amigas Profª. Elvira e Profª. Miriam, por auxiliarem na correção final do texto.

Ao "meus" alunos, pela paciência e respeito ao meu trabalho.

Aos colegas do Mestrado e do Doutorado em Educação Matemática, pelos bons momentos e trocas de saberes.

Aos professores do programa de pós-graduação da PUC-SP, pelo apoio, de forma direta ou indireta.

Aos funcionários da PUC-SP, pelo acolhimento e carinho demonstrados por seus serviços.

À Secretaria de Estado da Educação, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a concretização deste projeto.

Muito Obrigada!!!

Se a Terra
tivesse apenas alguns metros de
diâmetro e flutuasse acima de um campo
qualquer, as pessoas viriam de toda parte para
admirá-la. Caminhariam ao seu redor, maravilhadas com
suas grandes poças d'água, suas pequenas poças e a água
que flui entre elas. As pessoas admirariam suas protuberâncias
e seus buracos. Admirariam a camada de gás muito fina que
a envolve e a água suspensa nesse gás. Admirariam todos os
animais caminhando na superfície da bola e os animais na água.
As pessoas declarariam aquela bola sagrada, porque seria única,
e elas a protegeriam para que nunca fosse danificada. A bola
seria a maior maravilha conhecida e as pessoas viriam rezar
para ela, para serem curadas, para adquirir conhecimento,
para conhecer a beleza e para se maravilhar de como
aquilo podia existir. As pessoas a amariam e defenderiam
com suas vidas, porque de algum modo saberiam
que suas vidas não seriam nada sem ela.
Se a Terra tivesse apenas alguns
metros de diâmetro.

Joe Miller

Resumo

Este trabalho pretende contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Geometria da Esfera, procurando subsidiar a implementação de propostas que visam a interação entre Matemática e Geografia.

Procurou-se responder à questão de Pesquisa: “Uma introdução à Geometria Esférica pode favorecer o estudo da Geografia do Globo Terrestre e em particular o estudo de mapas?”.

Para auxiliar no delineamento desta proposta realizou-se um estudo experimental, partindo de uma seqüência de ensino que teve como intuito investigar as possíveis relações que os alunos estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de geometria esférica.

Para tanto foi utilizada como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática e o referencial teórico foi baseado na formação de conceitos das teorias de Vergnaud e Vygotsky.

As produções e interações dos alunos, durante o desenvolvimento da seqüência de ensino, apontam que um trabalho integrando conteúdos de Geometria Esférica contribui para o processo de compreensão de conteúdos específicos de geografia, em particular do estudo dos mapas.

Palavras-Chave: Geometria Esférica, Geografia, Matemática, Interdisciplinaridade, Ensino e Aprendizagem.

Abstract

This work intends to help the teaching-learning process of geometry, mainly the sphere geometry, in order to help the implementation of the purposes that has as a goal the interaction of Math and Geography.

It tried to answer the question of the research: Will the study of the contents of the Sphere Geometry help the comprehension of the Earth geometry?

In order to clear this up it was done an experimental study, starting with a teaching sequence which could investigate possible relations made by the pupils when they needed i to solve situations involving the notions of the Sphere Geometry.

It was used as a research methodology the ¨Teaching Engeneering¨ and the theoric reference was based on the ideas od Vergnaud's and Vygotsky's theories.

The results of the experiments made with the students during the sequence development point to the importance of a work which integrates more than one subject matter.

Key-words: Spherical Geometry, Geography, Mathematic, Interdisciplinarity, Teaching and Learning.

Sumário

Introdução

"Abrir uma janela é uma condição necessária para que a luz solar ilumine uma sala, mas essa necessidade é apenas uma condição, e não a causa suficiente da iluminação solar." (Humberto Rohden)

Desde que iniciei minha carreira como professora, uma das minhas preocupações tem sido buscar caminhos para facilitar a aprendizagem dos alunos.

Professora, onde vamos usar isto?

Quem, como professor, não ouviu esta pergunta ou semelhante? Esta pergunta sempre foi uma constante em todas as séries em que lecionei.

A resposta: "Se não puder aplicar em nada de sua vida, pelo menos terá aprendido algo" ou "O importante é que você está aprendendo a pensar"

Eu havia recebido esta resposta inúmeras vezes enquanto aluna. Não custava nada repeti-la.

Mas a pergunta me incomodava, e passei a procurar em livros, revistas, cursos..., formas de relacionar o conteúdo ensinado com o dia-a-dia do aluno, buscando a aplicação dos conteúdos trabalhados.

Ao iniciar o curso de Mestrado, tinha em mente um trabalho ligado à informática, queria desenvolver uma pesquisa relacionada a softwares educacionais.

Ao cursar a disciplina Tópicos de Geometria, um dos temas sugeridos pelo professor Vincenzo, para seminário, era a Geometria Esférica. O tema me atraía, e no momento em que vi a sugestão para desenvolver um trabalho, não tive dúvidas, seria uma oportunidade para aprofundar o estudo desta geometria.

Eu já havia tido contato com as Geometrias Não-euclidianas em uma disciplina de geometria, durante um curso de especialização, além de artigos que li na RPM (Revista do Professor de Matemática) e um capítulo do livro "Meu Professor de Matemática e outras histórias" onde o autor cita "... por causa da Geometria Esférica. Ela é tão bonita e singela que dá pena ver como foi relegada ao esquecimento..." (LIMA, 2001).

Ao desenvolver o tema para o seminário, surgiu a idéia de trabalhar a Geometria Esférica com os alunos da escola básica. A aplicação desta geometria no ensino de Geografia, buscando um trabalho interdisciplinar, iria ao encontro de uma das minhas aspirações como professora, mostrar aos alunos onde a matemática pode ser aplicada.

O estudo da Geometria Esférica não faz parte do currículo de matemática do Ensino Fundamental ou Médio inclusive pela sua complexidade. Em matemática, no Ensino Fundamental e Médio, a única geometria com que os alunos têm contato formal é a Geometria Plana e a Espacial, porém, quando estudam o Globo Terrestre, em Geografia, trabalham com pontos, linhas e ângulos sobre a esfera e no seu interior.

Surgiu então a pergunta: não seria interessante mostrar aos alunos a existência de uma outra geometria? Será que um estudo, mesmo que superficial, sobre a esfera não seria importante para a criação de significados em relação às linhas traçadas sobre o Globo Terrestre? Será que o estudo da esfera ajudaria na compreensão da latitude e da longitude?

Talvez, o intuito seja ainda maior. Quando o aluno estuda os elementos do globo está preparado para isto? Tem elementos matemáticos suficientes para compreender o que o professor de geografia fala?

> Partindo-se do pressuposto de que a realidade do mundo é muito mais ampla do que a possibilidade teórica de qualquer área do conhecimento para dar conta de sua explicação e compreensão isoladamente, e de que isso não pode ser feito de forma fragmentada, a prática didática e pedagógica da interdisciplinaridade torna-se um recurso para impedir o ensino fragmentado do mundo. (PCN DE GEOGRAFIA, 1998, p. 37)

Segundo Oliva (1983), "De uma forma simplista muitos consideram a Matemática englobando essencialmente a Geometria, a Álgebra e a Análise. A geometria é provavelmente a mais antiga das três áreas e surgiu, sem dúvida, da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos, etc”.

Mas hoje, percebe-se que na escola a matemática é ensinada de forma desvinculada das outras disciplinas, não existem pontes de ligação entre a matemática da sala de aula e a geografia, por exemplo.

Este estudo objetivou investigar possíveis contribuições da matemática no desenvolvimento de tópicos de geografia, com o interesse de contribuir para a melhoria do ensino e com o desenvolvimento de propostas de trabalhos interdisciplinares.

No primeiro capítulo, denominado “A problemática” apresenta-se o resultado de uma pesquisa realizada com professores de geografia, a análise de livros didáticos de geografia e das propostas curriculares e parâmetros curriculares de matemática e geografia, de modo a delimitar a questão de pesquisa e justificar a pertinência de se buscar relações entre as duas disciplinas.

No segundo capítulo , intitulado “O estudo do objeto matemático: A Esfera”, apresentam-se objetos ligados ao estudo da geometria esférica bem como da parte da geografia que trata do estudo do globo e dos mapas. São apresentados, ainda, alguns fatos históricos relacionados à geografia do Globo Terrestre.

No terceiro capítulo, ”Sujeitos, método e material” são descritos a trajetória de pesquisa, os sujeitos, métodos e materiais que foram utilizados no encaminhamento e execução deste estudo. Na parte final, análise a priori, descrevem-se as atividades destacando-se seus objetivos e soluções bem como as estratégias esperadas em suas resoluções.

O quarto capítulo, “Experimentação e análise a posteriori” destina-se à apresentação e descrição dos dados, a análise das soluções e comportamentos apresentados pelos sujeitos.

No capítulo V, “Considerações finais”, apresentam-se as principais conclusões da pesquisa, assim como algumas reflexões para aprofundamento ou continuidade desse tipo de pesquisa.

Capitulo 1

A Problemática

1.1. UMA PESQUISA COM PROFESSORES DE GEOGRAFIA

Ao decidir-se por desenvolver um trabalho relacionando tópicos de geometria esférica com a geografia, pensou-se em ouvir a opinião de professores de geografia em relação aos conteúdos de matemática necessários para o desenvolvimento de conteúdos inerentes à geografia.

Amadurecendo a idéia inicial, objetivando buscar elementos entre os profissionais que no contexto interessavam, foi elaborado um questionário dividido em duas partes: na primeira com o objetivo de caracterizar o perfil do professor pesquisado, e na segunda direcionar o trabalho com perguntas dissertativas.

Pensando em atingir professores de diferentes regiões utilizou-se como meio uma comunidade do orkut intitulada "Professores de Geografia", com mais de três mil membros. Foi quando colocou-se no fórum da comunidade a seguinte mensagem:

"**Pesquisa** (29/09/2005 18h36)
Olá, sou professora de Matemática e estou cursando o mestrado em Educação Matemática. Pretendo fazer o meu trabalho final de curso, relacionando a Geografia e a Matemática. Para isso precisarei de opiniões de professores de Geografia.
Quem tiver interesse em conhecer um pouco mais de meu projeto e responder um questionário, por favor entre em contato comigo através do orkut ou pelo endereço: irene_prestes@terra.com.br.
Tenho certeza que através desta comunidade conseguirei colher informações importantíssimas para o meu trabalho."

Foram 27questionários respondidos pelos colegas professores do orkut.

Além do orkut, foi solicitado aos colegas de curso e amigos que conseguissem professores para responder ao questionário.

Foram, no total, 43 questionários respondidos.

Numa breve análise do Perfil dos professores que responderam as questões, observa-se que:

- Os professores entrevistados têm entre 26 e 52 anos.
- a média das idades é de 37,5 anos com desvio padrão de 7,04.
- 60% dos entrevistados são do sexo feminino e 40% masculino
- As respostas vieram de 31 cidades, de 11 estados diferentes, sendo: BA(2), CE(1), GO(2), MG(4), MT(1), PB(1), PR(2), RJ(5), RS(2), SC(1), SP(22).
- O tempo de magistério variou de 1 a 27 anos na ativa, sendo que a média foi de 12,5 anos, com desvio padrão de 6,91 e a mediana, também de 12,5 anos.
- Dos 43 professores, 21 atuam apenas em escola pública, 10 apenas na rede privada e o restante (12) leciona em ambas.
- A Carga horária semanal esteve entre 10 e 74 aulas semanais, sendo que os professores em média dão 29,76 aulas por semana, com desvio padrão de 11,75 e tendo como mediana, 29 aulas semanais.

Na segunda parte da pesquisa, as questões apresentadas para os professores de geografia foram as listadas abaixo:

1) A falta de conteúdo de algum assunto da matemática prejudica o ensino de algum tema de Geografia?

2) Quais os conteúdos de geografia que estão relacionados com a matemática? (por favor, especifique por série)

3) Como o professor de Matemática poderia contribuir para o melhor desenvolvimento dos conteúdos de Geografia relacionados com a Matemática?

Será feito, agora, um breve resumo das respostas dos professores, para cada uma das questões, serão identificados os questionários por uma seqüência que vai de 1 a 43, introduzida aleatoriamente nos questionários preenchidos pelos 43 professores participantes da pesquisa:

1) A falta de conteúdo de algum assunto da matemática prejudica o ensino de algum tema de Geografia?

Os professores, com exceção de dois, responderam sim a esta pergunta, muitos fizeram referência aos conteúdos e suas respostas serão adicionadas ao quadro da questão 2.

O professor 22 respondeu que o problema não é a falta de conteúdo, mas como ele é abordado pelos professores de matemática e o professor 14 respondeu que falta uma fundamentação na interpretação e elaboração de conceitos.

Seguem, abaixo, algumas das respostas dos professores:

Prof. 8 – sim, no estudo das Coordenadas Geográficas (latitude e longitude) dos círculos da Terra ou linhas imaginárias (paralelos e meridianos), as zonas térmicas da Terra, enfim, necessitamos da utilização do grau (unidade de medida de ângulo) e alguns alunos confundem muito 10º (décimo) que é um numeral ordinal com 10º (dez graus) que é a medida de um ângulo. Acredito que, se fosse visto com a matemática seria mais fácil para o aluno entender. Outro exemplo: os múltiplos e os submúltiplos do metro, que utilizamos na escala, assim como para transformar “centímetros em metros” ou “centímetros em quilômetros”. Noções de gráficos e tabelas também e cartografia: construindo mapas – projeções cartográficas.

Prof. 26 – Sim, diversos conteúdos dependem de conhecimentos matemáticos que aparecem sempre depois. Um exemplo é a localização de um ponto no mapa (5ª série), os alunos só estudam coordenadas cartesianas na 8ª série.

Prof. 28 – Sim, na quinta série por exemplo, é notória a falta de conhecimento básico matemático para a compreensão dos conteúdos: projeções, escalas, fusos horários, climogramas, etc.

Prof. 31 – Sim, pois a falta de compreensão desde as quatro operações, até noções de geometria, prejudica o andamento de alguns conteúdos o que compromete o aprendizado da disciplina como um todo. Como exemplo posso citar o da minha cidade: os alunos chegam ao Ensino Médio e não sabem o que é um transferidor, compasso ou esquadro, não sabem trabalhar com calculadora e não entendem regra de três, muito menos fração.

Prof. 37 – Os alunos não entendem a medida em graus sobre o globo, de onde vêm as medidas de longitude e latitude, talvez por só estudarem ângulo em matemática após terem visto em geografia. Outro problema também é a localização no plano, talvez se vissem coordenadas cartesianas juntamente com as coordenadas geográficas...

Prof. 43 – Acho que o professor de matemática poderia estar em sintonia com o professor de geografia em diversos momentos, quando do ensino de coordenadas geográficas, no estudo de escalas e na leitura de gráficos durante todo o ensino fundamental e médio.

Após tomar conhecimento das respostas dos professores, veio a seguinte pergunta: Será que o currículo está de acordo com as necessidades das diferentes disciplinas? O aluno aprende na hora certa um determinado conteúdo de matemática e de geografia? (Não vamos fazer referência às outras áreas do conhecimento).

2) Quais os conteúdos de geografia que estão relacionados com a matemática? (por favor, especifique por série)

Com esta questão, pretendeu-se verificar se há um padrão de conteúdos para cada série. Muitos dos professores entrevistados não especificaram a série, apenas listaram os conteúdos.

Na tabela abaixo, estão relacionados os temas sugeridos com maior freqüência, pelos professores de geografia; não serão indicadas as séries por faltar em diversas respostas a sua referência:

Conteúdo	Questionário respondido nº	Total de referências	Percentual
Escala de um mapa.	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16,18, 20, 21, 24, 25, 26, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41e 43	32	74,4 %
Estatística; gráficos e tabelas; coleta de dados.	1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42 e 43	35	81,4 %
Fuso horário; latitude e longitude; coordenadas geográficas; estudo da Terra.	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 25, 26, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42 e 43	31	72,0 %
Cartografia; projeção cartográfica.	6, 7, 9, 10, 11, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 41 e 42	24	55,8 %
Densidade demográfica; porcentagem; regra de três.	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 16, 22, 25, 26, 29, 32, 33, 36, 37, 38 e 41	21	48,8 %
Transformação de unidades de medida.	2, 5, 8, 10, 15, 16, 18, 34, 36, 38, 41, 42 e 43	13	30,2 %

Analisando a tabela, tem-se uma visão geral dos temas sugeridos para um trabalho integrado, matemática-geografia.

Os temas, fuso horário, latitude e longitude, coordenadas geográficas ou estudo da Terra, são sugeridos por 31, o que equivale a 72% do total, sendo este número significante para este trabalho, tendo em vista a idéia inicial de trabalhar-se a Geometria esférica.

O tema escala de um mapa é também indicado por um número significativo de professores (74,4%), bem como a cartografia (alguns se referiram à projeção cartográfica) que aparecem como referência em mais de 50% dos questionários.

Observa-se também, que muitos sugerem um trabalho com porcentagem, coleta de dados, gráficos e tabelas para o estudo da Geografia Humana e

Econômica. Os PCN de Matemática do Ensino Fundamental I e II (1998) trazem o bloco TI (tratamento da informação) onde, acredita-se já ter sido iniciado um trabalho com a implantação de atividades voltadas para o estudo de estatística nos livros didáticos de matemática do Ensino fundamental I e II.

Tais respostas deram subsídios para a concepção de uma seqüência de ensino, que será apresentada posteriormente. Decidiu-se escolher o estudo do Globo Terrestre e da cartografia, bem como a passagem de um para o outro, como parte deste trabalho.

3) Como o professor de Matemática poderia contribuir para o melhor desenvolvimento dos conteúdos de Geografia relacionados com a matemática?

Ao responder esta questão foi unânime a alusão à interdisciplinaridade e, na maioria dos questionários, foi sugerido um planejamento integrado.

Alguns professores sugerem a revisão da ordem dos conteúdos de cada série, tendo em vista que, em muitos casos, o aluno não tem o pré-requisito necessário para atingir os objetivos.

Muitos apontam a falta de comunicação entre os professores como um problema que deve ser sanado e sugerem o uso dos HTPC (Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo) para abertura de um espaço para este tipo de discussão.

Alguns apontaram a necessidade de produção de material que provoque esta conexão entre as áreas.

Após ter tomado conhecimento da opinião dos professores de Geografia, concluiu-se estar no caminho certo ao buscar uma conexão da matemática com o estudo do Globo Terrestre, através da geometria esférica.

Traçou-se então uma seqüência de trabalho, tendo como meta a análise de livros didáticos, propostas curriculares de matemática e PCN, com o objetivo de estudar as noções matemáticas ligadas ao Globo Terrestre e à cartografia, bem como procurar vestígios da passagem de um deles para o outro. O segundo passo seria a busca de trabalhos acadêmicos ligados ao tema.

1.2. O QUE DIZEM OS LIVROS DIDÁTICOS DE GEOGRAFIA.

Foram analisadas três coleções de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, relacionadas a seguir como obra 1, 2 e 3, das quais, as duas primeiras fazem parte do PNLD de 2005, a terceira do PNLD de 2002 e 7 livros do Ensino Médio (volumes únicos), relacionados a seguir como obra de 4 a 10.

Obra	Título	Autor(es)	Editora	Ano
01	Trilhas da Geografia, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª	Sene, E e Moreira, J. C.	Scipione	2005
02	Geografia - Espaço e Vivência 5ª, 6ª, 7ª e 8ª	Boligian, L.; Martinez, R. ; Garcia, W e Alves, A.	Atual	2005
Obra	Título	Autor(es)	Editora	Ano
03	Geografia, vol 1, 2, 3 e 4	Adas, M.	Moderna	2002
04	Geografia – O homem no espaço global	Lucci, E. A.	Saraiva	1999
05	Sociedade e espaço – Geografia Geral e do Brasil	Vesentini, J. W.	Ática	2000
06	Geografia – A natureza humanizada	Pitte, J. R. (coordenação Geral)	FTD	1998
07	Geografia no Ensino Médio	Piffer, O.	IBEP	2000
08	Geografia Geral	Nakata, H. e Coelho, M. A.	Moderna	1985
09	Geografia – Paisagem e território	Magnoli, D. e Araújo, R.	Moderna	2001
10	Novo Ensino Médio: Geografia	Almeida, L.M.A. e Rigolin, T	Ática	2002

As obras (1), (2) e (3) apresentam os conteúdos ligados ao estudo do Globo Terrestre, tais como: meridianos, paralelos, coordenadas geográficas (latitude e longitude), movimentos de translação e rotação, fuso horário, solstícios e equinócios, estações do ano e estudo dos mapas nos exemplares destinados à 5ª ou 6ª série. As projeções cartográficas são apresentadas nos exemplares destinados à 7ª ou 8ª séries.

Em (1) no exemplar destinado à 5ª série, os autores dedicam um capítulo ao estudo dos mapas. Intitulado “A linguagem Cartográfica” eles partem de um trabalho de mapeamento da sala de aula, do prédio da escola, até como são feitos os mapas através da imagem de satélites e, no exemplar da 6ª série, os autores dedicam um capítulo à história da cartografia, das grandes navegações e às coordenadas geográficas. Sugerem uma atividade na qual os alunos, com uma laranja, dois palitos e barbante, marcam os pólos, traçam as linhas do Equador, meridianos e paralelos.

Em (2) ao estudar as coordenadas geográficas, na 5ª série, os autores sugerem um jogo de coordenadas, semelhante à batalha naval.

Das obras destinadas ao Ensino Médio, a obra (5) não apresenta nenhum tópico relacionado ao estudo do globo ou da cartografia, as obras (6), (7) e (9) fazem referência à cartografia, sendo que as obras (7) e (9) de uma forma superficial. As obras (4), (8) e (9) trabalham as coordenadas geográficas, fuso horário, solstícios e equinócios, projeções cartográficas e escalas dos mapas além de apresentarem referencial histórico.

Na obra (10) os autores apresentam um quadro denominado “geografia e matemática” onde sugerem um trabalho interdisciplinar:

> A construção de coordenadas não é de uso exclusivo da geografia. Procure aplicar o que você aprendeu em matemática e as noções deste capítulo, estabelecendo relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas. Se necessário converse com os professores das duas disciplinas. (ALMEIDA E RIGOLIN, 2002, p. 13)

Após analisar alguns livros didáticos e observar que aos alunos do Ensino Fundamental são apresentados conteúdos tais como coordenadas geográficas, rotação e translação, solstícios e equinócios, escalas de mapas, entre outros, na 5ª série, volta-se à pergunta: O aluno está preparado para absorver estes conceitos?

1.3. O QUE DIZEM AS PROPOSTAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA E O PCN.

Na proposta curricular para o ensino de matemática do 1º grau, 4ª edição, de 1991, encontra-se entre os conteúdos a serem desenvolvidos na 5ª série o estudo dos elementos de uma superfície esférica : centro, raio, corda, diâmetro, arco e circunferência máxima:

> Através de cortes diversos em bolas de isopor ou de colagem de tiras estreitas de fitas adesivas, e cores diversas, na superfície dessas bolas, concretizar as noções de círculos máximos e circunferências máximas, respectivamente, em esferas e superfícies esféricas, e o fato de que nem todas as circunferências que podem ser traçadas numa superfície esférica, são máximas. É útil que, nesse momento, se mostre aos alunos como esses elementos são aplicados em Geografia na determinação de linhas imaginárias na superfície terrestre (paralelos e meridianos). Nessa perspectiva, e como já definimos o segmento de reta como o menor caminho entre dois pontos de um plano, a noção de arco de circunferência pode ser introduzida através das seguintes etapas.... (PROPOSTA CURRICULAR DE MATEMÁTICA,1991, p. 88)

Entre os conteúdos a serem desenvolvidos na 6ª série encontra-se uma atividade para o estudo da bissetriz onde, através de algumas marcas e medições, os alunos determinam o meridiano do lugar.

Nos PCN de Geografia para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, os conteúdos ligados ao estudo do Globo Terrestre e da cartografia estão concentrados nas sugestões para o 3º ciclo (5ª e 6ª série), já para o 4º ciclo foi encontrada a seguinte referência:

> Neste ciclo a cartografia não se constitui num eixo, mas é fundamental utilizá-la como um recurso para trabalhar as informações geográficas, permitindo as correlações e sínteses mais complexas. Ela é um recurso para melhor visualização e espacialização dos temas. (PCN GEOGRAFIA, 1998, p. 100)

Nos PCN de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental encontrou-se a seguinte referência:

> A respeito do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial, a leitura e a utilização efetiva de mapas e de plantas, nas situações cotidianas, são fonte de numerosas dificuldades para muitas pessoas. Por exemplo, localizar um escritório num grande edifício, deslocar-se numa cidade, encontrar um caminho numa montanha, são procedimentos, que muitas vezes solicitam uma certa sistematização dos conhecimentos espaciais. Porém, essas habilidades não têm objeto de aprendizagem nas aulas de matemática. (PCN DE MATEMÁTICA, 1998, p. 123)

Ainda os PCN de matemática, sugerem que os professores trabalhem com mapas e com as coordenadas geográficas, trazendo, também para a matemática a responsabilidade sobre a formação desses conceitos.

> A partir de contextos que envolvam a leitura de guias, plantas e mapas pode-se propor um trabalho para que os alunos localizem pontos, interpretem deslocamentos no plano e desenvolvam a noção de coordenadas cartesianas, percebendo que estas constituem um modo organizado e convencionado, ou seja, um sistema de referência para representar objetos matemáticos como ponto, reta e curvas. Também é interessante que os alunos percebam a analogia entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas geográficas. (Ibidem, p.123)

Entre os objetivos propostos para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries) encontrou-se:

> Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> * resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas. (Ibidem, p. 64)
>
> Por meio de situações-problema, extraídas dos contextos práticos em que essas grandezas se encontram, como na arquitetura, nas artes, nos esportes, na culinária, nas atividades comerciais e na leitura de mapas, plantas e croquis, evidenciam-se para os alunos as aplicações práticas da Matemática e a necessidade de contar com

> unidades padronizadas e com sistemas comuns de medida e também a necessidade de encontrar estimativas plausíveis. (Ibidem, p. 69)

Entre as Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática encontram-se:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

1.4. TRABALHOS ACADÊMICOS RELACIONADOS AO TEMA

Foram procurados outros trabalhos que pudessem dar subsídios para a concepção da seqüência de ensino, teve-se acesso a duas dissertações de mestrado em educação matemática. A dissertação de Zionice Garbelini Martos, intitulada “Geometrias Não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental”, apresentada em 2002, na UNESP de Rio Claro e a dissertação de Irene Pataki, intitulada: “Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma Proposta Interdisciplinar”, apresentada em 2003, na PUC – SP.

O trabalho de Martos (2002) apresenta uma proposta didática ao ensino da geometria euclidiana e não-euclidiana para o Ensino Fundamental, buscando o desenvolvimento significativo dessas geometrias, para alunos de 8ª série, a partir da metodologia desenvolvida por Istvan Lénárt.

A autora procurou, por meio da interdisciplinaridade, relacionar conceitos geométricos com conceitos geográficos. Adotando a pesquisa–ação como metodologia de pesquisa, numa sala com 40 alunos, da rede estadual de ensino.

Apresentou situações-problema em fichas de trabalho, com descrições de atividades que seriam desenvolvidas, inclusive duas delas, baseadas na história de Pole “O pequeno príncipe” de Saint Exupéry.

Em suas considerações finais a autora fala sobre a Geometria Esférica:

> Os alunos participantes da pesquisa tiveram contato com um tipo diferente da geometria com que estavam acostumados a trabalhar: a Geometria Esférica. O trabalho pedagógico com esse outro modelo de Geometria fez com que os alunos pudessem vislumbrar sua inserção no planeta em que vivem, estabelecendo relações com conceitos geográficos através da Matemática. Os conceitos da Geometria esférica, abordados por meio de fichas de trabalho, uso de materiais manipulativos e discussão entre grupos, permitiram uma aprendizagem com significado. (MARTOS, 2002, p. 138)

O trabalho de Pataki (2003) objetiva levar aos professores de matemática uma proposta de um trabalho interdisciplinar, formando interconexões entre a geometria e a Geografia. O trabalho proporciona aos professores envolvidos reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino de Geometria Esférica. A autora afirma:

> Trata-se de um tema que visa a interação entre alguns campos do conhecimento, tais como Geometria, Trigonometria, Geografia e História, contextualizando, proporcionando reflexões e questionamentos aos professores e possibilitando a cumplicidade entre o aprender esses conhecimentos e os diferentes olhares que teremos do nosso dia-a-dia. (PATAKI, 2003, p.17)

E ainda:

> Em vista disso, o ensino e aprendizagem da Geometria Esférica precisam constar das grades curriculares, adentrar as salas de aula, com alardes, se necessário, e ocupar o lugar que há muito tempo lhe pertence. (Ibidem, p.18)

O presente trabalho, face a estas pesquisas, a partir das sugestões dos professores de geografia pesquisados e da análise dos livros de geografia, pretende realizar atividades que permitam aos alunos manipular e compreender as linhas de referência sobre o Globo Terrestre, a partir de um estudo sobre a geometria da esfera e a passagem do globo para o mapa.

Almeja-se, ainda, desenvolver inteligências compatíveis com uma capacidade cognitiva para a aquisição de conceitos geográficos.

1.5. REFERENCIAL TEÓRICO

Este trabalho fundamenta-se, basicamente, nas teorias de Vygotsky e Vergnaud para estruturar a interdisciplinaridade e a construção do conhecimento, através das relações do sujeito com o meio, sua percepção e conceituação.

1.5.1. INTERDISCIPLINARIDADE

Em minha trajetória como educadora, deparei freqüentemente com o tema "interdisciplinaridade", o qual aparece no planejamento no início do ano letivo e nas reuniões pedagógicas, ao longo do ano.

Entendendo que a interdisciplinaridade não é apenas o encontro das diferentes disciplinas em projetos gerais da escola, mas em sala de aula, no desenvolvimento dos conteúdos, pensei em desenvolver um "projeto para a sala de aula" onde fosse possível buscar conexões com outras disciplinas.

> A idealização de um projeto, seja em que meio for, revela, então, a existência de uma certa motivação para antecipar modos de ação em busca de um futuro que se crê realizável, mas que ao admitir abertura para o novo como uma condição vital, trabalha a idéia de um futuro não totalmente determinado. Isto coloca o projeto como oportunidade ímpar para fazer valer as possibilidades de transformação que certamente devem povoar a mente de quem projeta. (OLIVEIRA, 2004, p. 122)

Pensando-se no trabalho interdisciplinar, como a interação das disciplinas, encontra-se em Fazenda (1998): “A interdisciplinaridade, para ser exercida coletivamente, requer o diálogo aberto através do qual, cada um reconhece o que lhe falta e o que deve receber”

A interdisciplinaridade pode ser entendida como uma revisão de nossa relação com o conhecimento, de modo a buscar interconexões, mudança de comportamento, de diálogo e de parceria.

> Um olhar interdisciplinarmente atento recupera a magia das práticas, a essência de seus movimentos mas, sobretudo, nos induz a outras superações, ou mesmo reformulações. Exercitar uma forma interdisciplinar de teorizar e praticar Educação demanda, antes de mais nada, o exercício de uma atitude ambígua. (FAZENDA, 2001, p. 23)

Em face disto, para desenvolver a interdisciplinaridade, faz-se necessário que se busque, com as outras áreas, o desenvolvimento da prática do trabalho conjunto.

A interdisciplinaridade ocorre quando as disciplinas se integram e colaboram entre si.

Acredita-se, portanto, que se faz necessário rever os pontos fundamentais que se constituem de uma reflexão indispensável no sentido de nos aproximarmos da interdisciplinaridade.

> Continua sendo papel fundamental do professor considerar os conhecimentos que os alunos já possuem para planejar situações de ensino e aprendizagem significativas e produtivas. Para isso, é preciso conhecer os avanços e os problemas de seus alunos, bem como a adequação de suas propostas, de modo a aperfeiçoar sua ação pedagógica. A interface com as demais disciplinas também deve ser observada, de modo a proporcionar estudos mais completos sobre um tema cuja compreensão, por parte dos alunos, tanto a Geografia, como a História, as Ciências, a Arte e a Matemática podem ampliar, por meio de suas abordagens e explicações. (PCN GEOGRAFIA, 1998, p. 95)

Nos PCN de matemática é proposta a integração da matemática com as outras áreas do conhecimento:

> Como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a interpretação deste, as possibilidades de integração da Matemática com as outras áreas do ensino fundamental ficam evidentes, como Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias). (PCN DE MATEMÁTICA, 1998, p. 85)

> Assim, o conceito de semelhança é proveitoso para estabelecer conexões com outros conteúdos matemáticos, como razões e proporções, propriedades das figuras, ângulos, medidas (áreas, volumes) e conteúdos de outras áreas (artes, educação física, ciências, geografia, física). (Ibidem, p. 125)

> (...) como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais (utilização de bússolas, e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas etc.). As medidas também são necessárias para melhor compreensão de fenômenos sociais e políticos, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos Temas Transversais. (Ibidem, p. 128)

Acredita-se, ainda, que o sentido de um trabalho interdisciplinar está na compreensão e na intencionalidade da efetivação de parcerias mais consistentes e no desenvolvimento de projetos das partes envolvidas.

> (...) a interdisciplinaridade é hoje uma palavra-chave para a organização escolar; pretende-se com isso o estabelecimento de uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas, através da fixação de um objeto comum diante do qual os objetos particulares de cada uma delas constituem subprojetos. (MACHADO, 1995, p.193)

De modo geral, o trabalho desenvolvido nas escolas é, naturalmente, multidisciplinar.

> **Multidisciplinaridade, Pluridisciplinaridade**. Caracterização do enfoque científico e pedagógico aplicado a atividades e projetos que prevêem a participação de especialistas de várias disciplinas, permanecendo praticamente cada qual com a visão mais ou menos restrita da sua área. (ASSMANN, 2002, p. 166)

O que se observa é que a conceituação de Interdisciplinaridade pode ser contraposta com a noção de multidisciplinaridade, onde existe a justaposição de profissionais, cada um fazendo o que sabe. Neste caso, não há interação entre nível de método nem de conteúdo. Já na Interdisciplinaridade, tal integração ocorre durante a construção do conhecimento, de forma conjunta, desde o início da colocação do problema.

> **Interdisciplinaridade**. Enfoque científico e pedagógico que caracteriza por buscar algo mais do que mera justaposição das contribuições de diversas disciplinas sobre um mesmo assunto, e se esforça por estabelecer um dialogo enriquecedor entre especialistas de diversas áreas científicas sobre determinada temática. Aplica-se a problemas, atividades e projetos que ultrapassam a capacidade de uma só área disciplinar. (Ibidem, p. 162)

Neste trabalho, deseja-se expressar a Interdisciplinaridade como conceito, como horizonte, no sentido da articulação e integração das áreas envolvidas. O desenvolvimento de um projeto interdisciplinar não é apenas um conceito teórico. Cada vez mais parece impor-se como uma prática. Em primeiro lugar, aparece como uma prática individual: é fundamentalmente uma atitude de espírito, feita de curiosidade, de abertura, de sentido da descoberta, de desejo de enriquecer-se com novos enfoques, de gosto pelas combinações de perspectivas e de convicção, levando ao desejo de superar os caminhos já batidos. Enquanto prática individual, a interdisciplinaridade não pode ser aprendida, apenas exercida. Em segundo lugar, a interdisciplinaridade aparece como prática coletiva, é preciso que estejam todos abertos ao diálogo, que sejam capazes de reconhecer aquilo que lhes falta e que podem ou devem receber dos outros. Só se adquire essa atitude de abertura no decorrer do trabalho em equipe.

1.5.2. VYGOTSKY

Para Vygotsky (1991), a formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. No entanto o processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, à inferências ou à tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo (palavra artificial), ou palavra, como meio pelo qual são conduzidas as operações mentais; controla-se o seu curso e as canalizações em direção à solução do problema que será enfrentado.

A formação de conceitos passa por três fases básicas dividas em vários estágios:

- Agregação desorganizada – amontoados vagos de objetos desiguais; os fatores perceptuais são irrelevantes e há um predomínio do sincretismo.
- Pensamento por complexos – estabelecer elos e relações a partir da experiência concreta.
- Abstração – o grau de abstração deve possibilitar a simultaneidade da generalização e da diferenciação.

> O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras, e a definição verbal será, na maioria dos casos, muito mais limitada do que seria de esperar a partir do modo como utilizou o conceito. (VYGOTSKY, 1991, p.69)

O processo de aquisição do conhecimento ocorre pela interação do sujeito com o meio. A formação dos conceitos de construção de significados pelo sujeito, ao processo de internalização e ao saber ensinado em ambiente escolar. A internalização interagindo com o meio cultural compõe as funções psíquicas superiores, ou seja, são construídas ao longo do histórico humano, em sua relação com o mundo, dependendo de ações conscientes e fruto de processos de aprendizagem.

Existem, pelo menos, dois níveis de desenvolvimento identificados por Vygotsky: um real, e um potencial:

- Desenvolvimento Real: é determinado por aquilo que a criança é capaz de fazer sozinha, porque já tem um conhecimento consolidado. Se domina a adição, por exemplo, esse é um nível de desenvolvimento real.
- Desenvolvimento Potencial: é determinado por aquilo que a criança ainda não domina, mas é capaz de realizar com auxílio de alguém mais experiente. Por exemplo, uma multiplicação simples, quando ela já sabe somar.

Vygotsky (1991) toma como posição que a aprendizagem tem um papel importante e estimulante no desenvolvimento. Assim, introduziu o conceito de zona de desenvolvimento proximal.

Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é a distância entre aquilo que a criança faz sozinha e o que ela é capaz de fazer com a intervenção de um mediador; potencialidade para aprender, que não é a mesma para todas as pessoas; ou seja, distância entre o nível de desenvolvimento real e o potencial, que está próximo mas ainda não foi atingido. Esse conceito tem implicações importantes na concepção de ambientes de aprendizagem, o que implica intervenções, que ajudam o aprendiz a dominar com autonomia os comportamentos que constituem esta zona de desenvolvimento e estimulam o desenvolvimento cognitivo, através de intervenções que criem zonas de desenvolvimento proximal.

Mediador é quem ajuda a criança a concretizar um desenvolvimento que ela ainda não atinge sozinha. Na escola, o professor e os colegas mais experientes são os principais mediadores.

A aprendizagem interage com o desenvolvimento, produzindo abertura nas zonas de desenvolvimento proximal, nas quais as interações sociais são centrais, estando, então, ambos os processos, aprendizagem e desenvolvimento, inter-relacionados; assim, um conceito que se pretenda trabalhar, como por exemplo, em matemática, requer sempre um grau de experiência anterior para a criança.

A intervenção pedagógica intencional do ambiente escolar é responsável pelo desencadear do processo ensino-aprendizagem, e cabe ao docente estimular o avanço do sujeito dentro de sua zona proximal, sendo a construção de conceitos, o objeto de atuação. A importância da intervenção espontânea dos demais membros mediadores compõe o processo de desenvolvimento, tomando o aluno, não tão somente como o sujeito da aprendizagem, mas, aquele que aprende, junto ao outro, o que o seu grupo social produz, inclusive o conhecimento.

> A colaboração entre pares durante a aprendizagem pode ajudar a desenvolver estratégias e habilidades gerais de solução de problemas através da internalização do processo cognitivo implícito na interação e na comunicação. (Vygotsky, 1991, p. 17)

Dentro desse último conceito, o aluno também aprende junto ao outro o que o seu grupo social produz, tais como: valores, linguagem e o próprio conhecimento. O poder da aprendizagem através da discussão e da conversação ocorreria pelo compartilhamento de diferentes perspectivas, pela necessidade de tornar explícito seu pensamento e pelo entendimento do pensamento do outro, através da interação oral ou escrita, implicando num processo de comunicação, dentro de uma dimensão cooperativa e colaborativa.

A formação de conceitos espontâneos ou cotidianos desenvolvidos no decorrer das interações sociais diferenciam-se dos conceitos científicos adquiridos pelo ensino, parte de um sistema organizado de conhecimentos. A aprendizagem é fundamental ao desenvolvimento dos processos internos na interação com outras pessoas.

Ao observar a zona proximal, o educador pode orientar o aprendizado no sentido de adiantar o desenvolvimento potencial de uma criança, tornando-o real. Nesse ínterim, o ensino deve passar do grupo para o indivíduo. Em outras palavras, o ambiente influenciaria a internalização das atividades cognitivas no indivíduo, de modo que, o aprendizado gere o desenvolvimento. Portanto, o desenvolvimento mental, só pode realizar-se por intermédio do aprendizado.

A interação com o meio social, através da linguagem, tem função primordial no desenvolvimento: um real, presente, uma competência própria do sujeito, e um potencial, uma competência que o sujeito tem capacidade de adquirir na relação com o outro. A distância entre estes níveis de desenvolvimento, chamada Zona de Desenvolvimento Proximal, torna-se campo de atuação da aprendizagem.

1.5.3. VERGNAUD

Vergnaud (1991) estudou a elaboração de conceitos em situações didáticas, valendo-se da solução de problemas. Com base na idéia de campo conceitual, analisa o papel da formação de conceito na solução de problemas, buscando identificar a função das palavras, definições, explicações ou representações simbólicas na formação conceitual e na própria solução de problemas.

Segundo Vergnaud (1991) um campo conceitual é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. Um conceito é apreendido pelos indivíduos quando os mesmos dominam três conjuntos de fatores relacionados com esses conceitos.

- Um conjunto de situações que dão sentido aos conceitos (a referência);
- Um conjunto de invariantes operacionais que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto (o significado);
- Um conjunto de representações simbólicas que são socialmente usados para veicular idéias sobre o conceito (significante).

A teoria dos Campos Conceituais foi construída com o intuito de analisar as condições de compreensão do significado do saber pelo aluno. O saber escolar trata dos conceitos matemáticos provenientes da educação escolar, diferenciando-se e localizando-se entre o saber proveniente de uma vivência e o saber científico.

A teoria dos campos conceituais trata, ainda, da conceituação do real, permitindo situar a análise das filiações e rupturas entre os conhecimentos. Envolve, também, a análise da relação entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios, implícitos nos comportamentos dos sujeitos em uma dada situação.

Para Vergnaud (1991), o funcionamento cognitivo repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados, e ao mesmo tempo, repousa sobre novos aspectos de conhecimento incorporados pelos próprios sujeitos.

Uma aprendizagem significativa provém da estruturação de conexões, concebidas pela sucessão de adaptações que o aluno realiza, face a situações-problema, coordenando e ajustando conhecimentos e conceitos anteriores. Um campo conceitual é definido pelo seu conteúdo e, resumidamente, podemos estabelecer a extensão deste conceito pelo conjunto de situações que lhe dão sentido.

> (...) Ausubel chama atenção para o fato de que os princípios de assimilação de conceitos que são relevantes para a aprendizagem escolar são essencialmente os mesmos princípios da aprendizagem verbal significativa. Aprender um novo conceito depende de propriedades existentes na estrutura cognitiva, do nível de desenvolvimento do aprendiz, de sua habilidade intelectual, bem como do conceito em si e do modo como é apresentado. (MOREIRA e MASINI, 2001, p. 31).

Um conceito envolve muitas situações e, reciprocamente, estas, envolvem vários conceitos. O desenvolvimento de conhecimentos no sujeito, se constitui por meio de um conjunto relativamente vasto de situações, entre as quais existem relações de parentesco (analogias, contrastes, variações) e, para analisá-las, apela-se para muitos conceitos e vários tipos de simbolismos.

As situações constituem a entrada de um campo conceitual. A situação é um conjunto de tarefas, que dão sentido ao conceito. O conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações. As relações que o sujeito estabelece com as situações e com os significantes proporcionam o sentido. Vergnaud separa duas classes de situações:

- As classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato das situações.
- As classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso.

Um significante ou uma situação, podem evocar no sujeito esquemas, que constituem o sentido dessa situação ou desse significante.

O esquema, é uma organização invariante para uma determinada situação ou classe de situações. Um esquema é um universal eficiente para um conjunto de situações e pode gerar diferentes seqüências de ações, procedimentos de coleta e controle de informações, dependendo de cada situação característica. Em particular os esquemas necessariamente se referem a situações.

A ação do sujeito em situação e a organização de seu comportamento devem ser consideradas quando se pretende compreender o sentido das situações e dos símbolos, por exemplo. Por isso, é atribuído ao conceito de esquema a importância de não prescindi-lo da análise, uma vez que este organiza o comportamento do sujeito, abrangendo regras de antecipações.

Os componentes de um esquema são:

- objetivos e antecipações;
- regras de ação do tipo *se – então* que controlam a informação e proporcionam regras de busca, permitindo a seqüência de ações do sujeito;
- invariantes operatórios – *teoremas em ação* e *conceitos em ação*, que permitem que o sujeito reconheça os elementos pertinentes à situação e a categoria de informação que corresponde a tal situação;
- possibilidades de inferência – os raciocínios, que permitem ao sujeito determinar as regras e antecipar informações a partir de invariantes operatórios.

Os invariantes operatórios, cujas categorias principais são teoremas em ação e conceitos em ação, constituem a base conceitual implícita, ou explícita, que permite obter a informação pertinente, os objetivos a serem alcançados, sendo responsável também pela inferência das regras de ação pertinentes. São os invariantes operatórios que fazem a articulação essencial entre teoria e prática. O reconhecimento de invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema.

A busca e a seleção da informação estão baseadas no sistema de conceitos em ação que o sujeito possui e nos teoremas em ação que estão subjacentes a sua conduta. Um teorema em ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real e um conceito em ação é uma categoria de pensamento considerada como pertinente da situação.

As competências e concepções dos estudantes vão se desenvolvendo ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações, tanto dentro, quanto fora da escola. Os esquemas organizam a conduta para uma dada classe de situações. Em geral, quando defrontados com uma nova situação eles usam o conhecimento desenvolvido através de experiência em situações anteriores, e tentam adaptá-lo a esta nova situação. Esta atividade é eventualmente interiorizada, e ao se depararem com uma nova situação, poderá ser utilizada, ao ser adaptada também para esta nova situação.

Quando os indivíduos começam a dominar essas dimensões de um conceito, o mesmo começa a fazer-lhes sentido. Um conceito é progressivamente apreendido à medida que os indivíduos dominam mais e mais as propriedades do conceito, as formas possíveis de representação e as relações com situações diversas. Aprender a lidar com um conceito significa ter apreendido um determinado número de invariantes relativos a esse conceito. Esse aprendizado ocorre a longo prazo e, durante muito tempo, de forma intuitiva.

A operacionalidade de um conceito deriva de diversas situações que resultam de uma variedade de ações e de esquemas.

Partindo do núcleo conceitual do aluno, Vergnaud (1991) destaca que o funcionamento e o desenvolvimento cognitivo dependem de como os conceitos são trabalhados a partir de situações-problema.

O desenvolvimento das representações, invariantes e situações do conceito não ocorrem de forma estanque. Pelo contrário, mobilizamos invariantes relativos a um conceito em situações específicas e essa mobilização dá-se mediada por artefatos culturais. Os três conjuntos de componentes dos conceitos desenvolvem-se ao mesmo tempo com as relações que estabelecemos entre eles. É importante ressaltar o fato de que os conceitos não fazem sentido isoladamente para os indivíduos.

As Zonas de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky também influenciaram na construção da Teoria dos Campos Conceituais, já que percebemos a necessidade da existência de espaços de situações-problema, os quais, o aluno coordena às adaptações necessárias à sistematização de um novo conhecimento. Entretanto, Vergnaud supõe o conceito como base para o desenvolvimento cognitivo, dando maior atenção à análise dos conceitos envolvidos nas situações criadas na aprendizagem.

Os conceitos matemáticos, na verdade, terão sentido, do ponto de vista do processo ensino-aprendizagem, se forem abordados e explorados em nível de tarefas que envolvam solução de problemas. A escola desempenha papel essencial no desenvolvimento do conhecimento matemático, visto que existe uma variedade de situações no âmbito escolar, que proporcionam aprendizagem de novos e sofisticados procedimentos em relação à compreensão de conteúdos matemáticos, os quais não são adquiridos formalmente fora da escola.

Capítulo 2

O estudo do objeto matemático: A Esfera

> *"Plana ou redonda? Circulo com duas dimensões ou esfera com três dimensões? Nossa terra nunca conheceu, salvo algumas exceções aberrantes e efêmeras, outra representação desde os tempos mais remotos." (Randles)*

A matemática sempre esteve vinculada à vida. Historicamente todo o conhecimento se desenvolveu pela necessidade de se conhecer o mundo, pela curiosidade do ser humano. "Não há quem, observando o Sol diurnamente, não tenha notado seu movimento no céu". (BOCZKO, 1984).

2.1. DA GEOMETRIA DE EUCLIDES ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Segundo o historiador grego Heródoto (sec. V a.C.), a geometria nasceu provavelmente no antigo Egito, das medições da terra necessárias devido às inundações periódicas do rio Nilo, e foi rapidamente alargada à agrimensura e à navegação, mas é certo que muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica.

A palavra "geometria" deriva do grego e significa "medição da Terra".

Dos primeiros matemáticos que contribuíram para a origem da geometria pouco se sabe, tem-se referências de Tales de Mileto e de Pitágoras de Samos entre outros.

> A história da matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos depende, necessariamente, em grau indesejável, de conjecturas e inferências, pois faltam inteiramente documentos da época. Há muito mais incerteza quanto à matemática grega de 600 a.C. a 450 a.C.do que acerca da álgebra babilônica ou da geometria egípcia de cerca de 1700 a.C. Nem mesmo artefatos matemáticos dos primeiros tempos da Grécia se preservaram. (Boyer, 1974, p. 44)

Os Elementos de Euclides, como hoje é conhecido, foi escrito por seu autor reunindo e sistematizando a matemática dos que o precederam.

Nos Elementos, formado por 13 livros, Euclides, por meio de um sistema de definições, postulados e axiomas, construiu como hoje é conhecida a geometria Euclidiana.

> No primeiro livro do Elementos, Euclides enuncia vinte e três definições, cinco postulados (denominados “demandas” ou “pedidos”) e nove noções comuns ou axiomas. Em seguida, deduz 48 proposições, ou teoremas, que constituem o saber geométrico. (VITRAC, 1990, p. 194)

Euclides buscou o ideal de uma organização axiomática, que em última instância se reduz ao estabelecimento de um pequeno número de proposições notoriamente verdadeiras daquele domínio do conhecimento, e a posterior dedução de todas as outras proposições verdadeiras desse domínio, a partir daquelas.

Abaixo serão apresentados os postulados de Euclides que foram encontrados em Boyer (1974).

Postulados:

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais
5. Uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos. (Fig. 2.1)

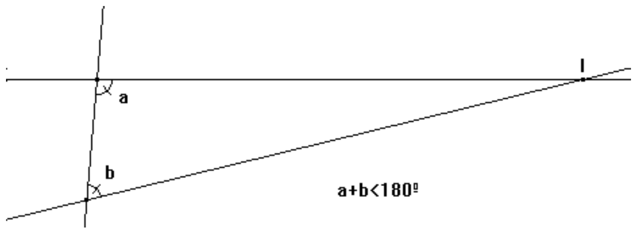


Figura 2.1: ilustração do quinto postulado de Euclides

Hoje o quinto postulado de Euclides é apresentado por um enunciado equivalente, denominado Postulado das paralelas, apresentado por John Playfair em 1795:

> "Por um ponto P exterior a uma reta r, consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta dada." (Fig. 2.2)

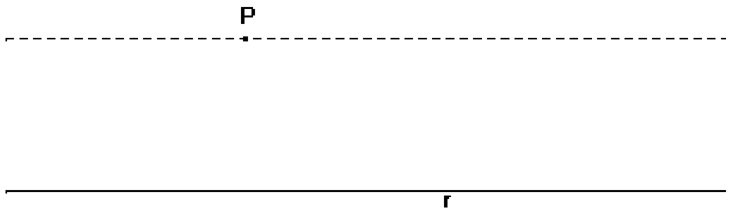


Figura 2.2: Quinto postulado na formulação de Playfair

Desde a primeira formulação dos postulados de Euclides para a geometria, os matemáticos acreditavam que o quinto postulado de Euclides poderia ser demonstrado como teorema. Entre as tentativas de demonstração encontraram-se os seguintes matemáticos: Ptolomeu, Proclus (410 – 485), Alhazen (cerca de 965 – 1039), Omar Khayyam (cerca de 1050 – 1122), Nasir Eddin al – Tusi (ou at – Tusi, 1201 – 1274), Saccheri (1667 – 1733), Lambert (1728 – 1777), Legendre (1752 – 1833)

Na tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides, sempre se esbarrava em outras afirmações, que também eram logicamente equivalentes ao quinto postulado. Esse processo culminou com a descoberta das Geometrias Não-euclidianas. Aceitando-se uma nova redação para o quinto postulado é possível construir outras geometrias, tão consistentes como a de Euclides.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), por volta de 1824, chegou a uma importante conclusão, não publicada, sobre o postulado das paralelas.

Nicolai Lobachevsky (1793 – 1856) entre 1826 e 1829 ficou convencido de que o postulado das paralelas não poderia ser provado com base nos outros quatro. Com a publicação de um artigo em 1829 sobre uma geometria construída sobre uma hipótese em conflito direto com o postulado das paralelas: “Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB”, Lobachevsky deduziu uma estrutura geométrica harmoniosa sem contradições lógicas inerentes, a qual chamou “geometria imaginária”, mais tarde denominada por Félix Klein (1849 – 1925) como “geometria hiperbólica”.

Janos Bolyai (1802 – 1860), que passou parte de sua vida tentando provar o postulado das paralelas, ao invés de tentar o impossível, desenvolveu o que chamou de “Ciência Absoluta do espaço”, partindo da hipótese que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas infinitas retas do plano, não uma só, cada uma paralela à reta dada.

G. F. B. Riemann (1826 – 1866), ao abandonar a hipótese da infinitude da reta, interpretando o “plano” como a superfície de uma esfera e uma “reta” como um círculo máximo sobre a esfera, desenvolveu a geometria que ficou conhecida como Geometria Riemanniana, mais tarde denominada por Klein como “geometria elítica”.

2.2. A GEOMETRIA ESFÉRICA

A Geometria Esférica foi criada por Riemann, considerando que a reta não é infinita, como na geometria euclidiana, mas ilimitada, estabelecendo como um de seus axiomas que não existem paralelas a uma reta dada, indo contra o quinto postulado de Euclides, criou um novo universo geométrico.

Nesta Geometria, dados dois pontos A e B sobre a superfície da esfera, chama-se de reta a circunferência máxima que passa por esses dois pontos.(Fig. 2.3)

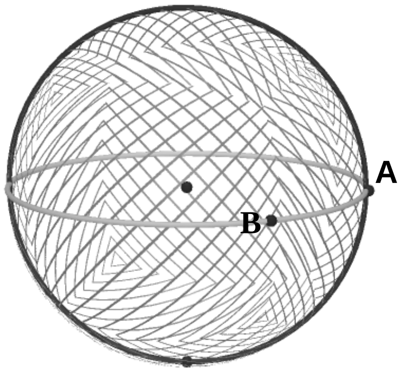


Figura 2.3

Os pontos A e B dividem a reta em dois arcos.

Esses dois arcos podem ser:

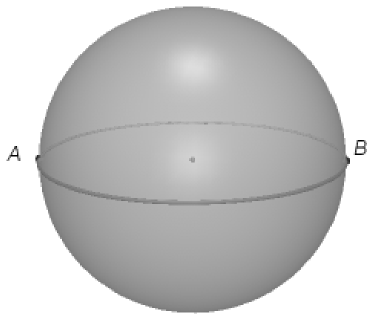


Figura 2.4

- iguais se A e B forem extremos de um mesmo diâmetro da esfera. (Fig 2.4)

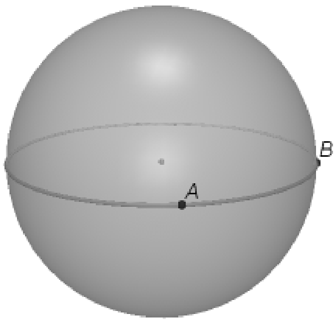


Figura 2.5

- Um maior e o outro menor.(Fig. 2.5)

Cada um desses arcos recebe o nome de Segmento de reta.

Hoje, com a rotina dos vôos internacionais, essa noção de "reta" ficou corriqueira. Um avião que vai de Fortaleza a Lisboa, sem escalas, não segue uma reta (tracejada) traçada no mapa-múndi. Segue a trajetória (contínua) correspondente a um segmento de círculo máximo entre as duas cidades. (Fig.2.6)

Figura 2.6[1]

O Postulado de Riemann

“Por um ponto P qualquer, fora de uma reta r, nenhuma reta que passa por P é paralela a ela.”

Na geometria esférica o Quinto Postulado de Euclides sofre um baque. Como uma "reta" é um círculo máximo chegou-se às seguintes constatações:

1) Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro

Uma maneira de interpretar o postulado acima seria pensar na superfície esférica, onde “retas” seriam as circunferências máximas ou geodésicas da superfície esférica. Nessa superfície quaisquer duas circunferências máximas se interceptam, aliás, em mais de um ponto. (Fig. 2.7)

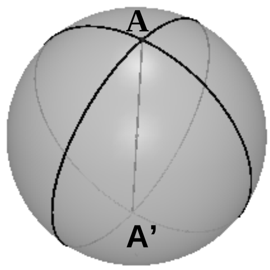


Figura 2.7

2) Dados dois pontos sobre a esfera, podem se encontrar infinitas retas que passam por esses dois pontos. (Fig. 2.8)

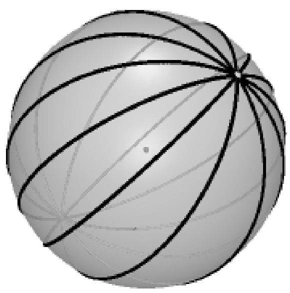


Figura 2.8

1. Disponível em: <http://www.isba.com.br>. Acesso em 12 mar. 2006.

Dois pontos diametralmente opostos são chamados antípodas, ao traçar duas retas que passam por dois pontos antípodas e uma reta perpendicular a ambas, a nova reta receberá o nome de polar e os pontos serão os pólos.

Observe-se a figura (Fig 2.9):

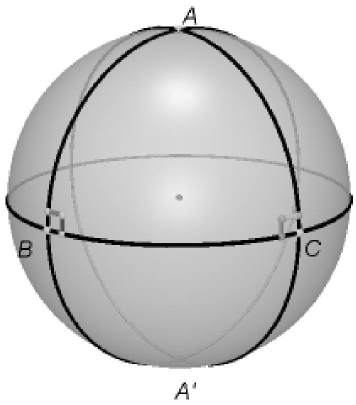


Figura 2.9

Os pontos A e A' são os pólos da reta BC, que é chamada de reta polar.

As retas ABA' e ACA' são perpendiculares à reta BC.

A distância do ponto A (ou do ponto A') a qualquer ponto da reta BC é constante e mede 90º.

Quaisquer duas retas que passem pelos pontos A e A' terão uma única reta perpendicular BC.

Na Geometria Esférica, a distância de qualquer reta a seu pólo é uma constante igual para todas as retas.

4) Ao traçar-se um plano cortando uma esfera, a sua intersecção com essa esfera é um círculo máximo ou um círculo menor. (Fig. 2.10)

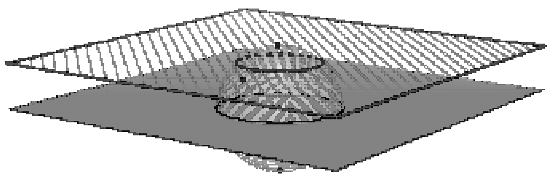


Figura 2.10

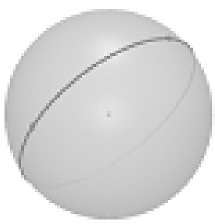


Figura 2.11

Os círculos são máximos quando os planos que interceptam a esfera passam pelo centro da esfera. Pode-se observar que o centro do círculo máximo coincide com o centro da esfera correspondente. A reta é a circunferência deste círculo.(Fig. 2.11)

Figura 2.12

Quaisquer outros círculos serão considerados menores.(Fig. 2.12)

5) Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência máxima, a distância entre esses pontos é a menor porção da circunferência que os contém. Embora, por A e B outros círculos possam ser considerados, a distância entre eles é sempre medida sobre o único círculo máximo determinado por A e B. (Fig. 2.13)

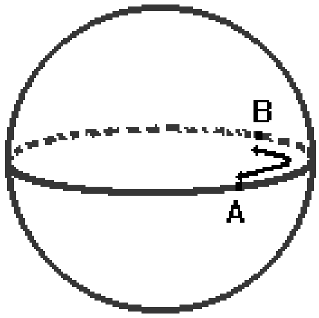


Figura 2.13

Para medir a distância sobre uma superfície esférica pode-se usar como unidade de medida o grau ou o radiano. Uma volta completa sobre a esfera corresponde a 360º.

6) O ângulo sobre a esfera, também chamado de <u>ângulo esférico</u>, é intersecção de duas retas (circunferências máximas) e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção. (Fig. 2.14)

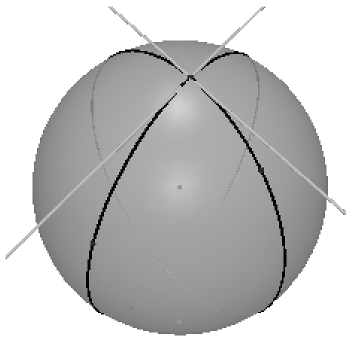


Figura 2.14

7) Dados três pontos, A, B e C, distintos e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima, a figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico. (Fig. 2.15)

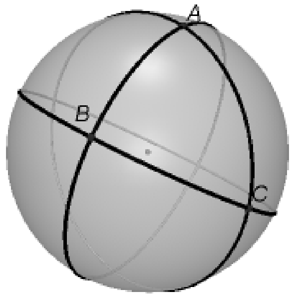


Figura 2.15

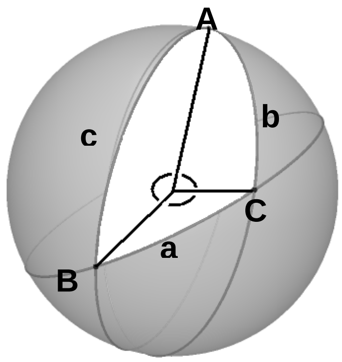


Figura 2.16

Os lados BC, AC e AB do triângulo esférico são denotados, respectivamente, por a, b e c e medidos pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera. Os ângulos do triângulo ABC são os ângulos esféricos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ que também podem ser indicados por $B\hat{A}C, A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, respectivamente.(Fig. 2.16)

Além dos lados e ângulos, os triângulos esféricos possuem três alturas, três bissetrizes, três medianas, etc. que são definidas da mesma maneira como se faz para os triângulos planos, com a diferença que para os triângulos esféricos, fala-se em circunferências máximas e não em retas.

Os lados dos triângulos esféricos, como foi visto acima, subentendem ângulos com vértices no centro da esfera, por isso podem ser medidos em graus ou em radianos.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo varia entre 180º e 540º, tendo um valor fixo dependendo do triângulo considerado.

$\alpha + \beta + \gamma > 180^o$ (fig. 2.17)

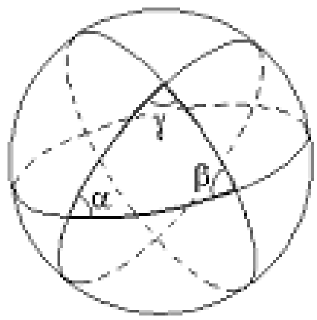


Figura 2.17

Dado um triângulo ABC a soma das medidas de seus ângulos pode ser expressa por:

$$180º < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540º$$

Em relação à soma das medidas dos lados a, b, e c tem-se também uma faixa de variação de extremos 180º e 360º, ou seja:

$$180^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

sendo que nenhum dos lados do triângulo esférico pode ser maior do que 180º.

Ao contrário dos triângulos planos, os esféricos podem ter os três ângulos medindo 90º e os três lados medindo 90º. Pode-se classificar os triângulos esféricos quanto aos ângulos em retângulo (um ângulo reto), birretângulo (dois ângulos retos) e trirretângulo (três ângulos retos) e quanto aos lados em retilátero (um lado medindo 90º), birretilátero (dois lados medindo 90º, cada um) e trirretilátero (cada um dos lados medindo 90º).

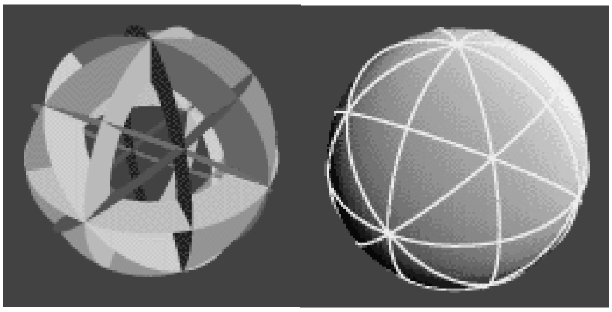


Figura 2.18[2]

Observando-se as figuras ao lado (Fig. 2.18), a superfície da esfera é dividida em 48 “triângulos”, todos iguais entre si, e cujos ângulos são de 90, 60 e 45 graus:

Observando-se os vértices, onde se juntam quatro triângulos (portanto, cada um dos quatro ângulos que aqui se encontram é de 90º = 360º/4), os vértices, onde se juntam seis, cada um com 60º = 360º/6 e outros onde se juntam oito triângulos, cada um com 45º = 360º/8.

No entanto: 90º + 60º + 45º dá 195º, e não 180º: tem-se, portanto, um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos não é 180º graus! Porém, o que não deve surpreender muito, porque, na verdade, não se trata propriamente de um triângulo: trata-se de um triângulo “gordo”, desenhado sobre uma esfera, e cujos lados não são segmentos, mas sim o que de mais parecido com segmentos pode ser desenhado numa esfera, ou seja, arcos de círculo máximo.

2. Disponível em: <http://www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/triangulos3.htm>. Acesso em 02 nov. 2005.

2.3. O GLOBO TERRESTRE

A primeira referência sobre a esfericidade da Terra que foi encontrada é atribuída a Parmênides de Elea que viveu por volta de 450 a.C (Boyer, p. 55). Parmênides defendeu a esfericidade da terra e seu interior ígneo. O universo teria a terra como centro; em torno se formariam círculos sucessivos de fogo e terra, com sucessões, ora de fogo puro, ora de misturas.

O conceito de geografia (geo (terra [grego])+ graphos (desenho) [latim]) data de aproximadamente do século III, mas o estudo da terra, quer tenha sido as medições da esfera, quer tenha sido um esboço de mapa do mundo conhecido, surgiram antes do conceito de geografia.

A noção mais importante para se entender isso é exatamente aquilo que não era considerado, a terra habitada ou a terra conhecida, ou seja, "as terras mais distantes" a partir das quais foram erigidas as tradições míticas, tanto referentes aos aspectos naturais quanto biológicos. Mais especificamente aos espaços imaginados na superfície da Terra.

Entre 1480 e 1520, ocorreu uma mudança epistemológica em relação à concepção da forma da Terra (RANDLES,1994). Passou-se da visão em que ela era plana à sua redondeza, o que alterou profundamente o pensamento e a história da Geografia. Antes dessa mudança, as várias concepções medievais teriam partido de duas noções de Terra: uma plana e outra redonda, de Crates de Malo (c.160 a.C.) e de Aristóteles (384-322 a.C.). Elas originaram as sínteses bíblicas (cratesiana e aristotélica), a teoria das cinco esferas e da existência ou não dos antípodas, bases da concepção de ecúmeno medieval.

Estas concepções orientavam a explicação do mundo medieval. A bíblico-cratesiana acreditava na existência de quatro ilhas separadas por uma imensidão de água, o que tornava impossível a comunicação entre elas, reduzindo o ecúmeno (universo) cristão a somente uma delas. A bíblico-aristotélica acreditava na existência de quatro esferas superpostas, formadas pelos quatro elementos, com a existência de terra firme plana em função da grande quantidade de água em volta (proporção de 1 para 10). A concepção das cinco zonas pré-supunha uma terra redonda, atribuída a Parmênides (V a.C.), pressupunha uma terra redonda dividida em duas zonas geladas, uma tórrida e duas temperadas, diametralmente opostas, somente nestas duas últimas seria possível a existência de pessoas, redefinindo o ecúmeno cristão e fonte importante na discussão acerca da existência dos antípodas. Entre os argumentos defendidos por clérigos medievais que duvidavam da existência de seres humanos no outro hemisfério, estava a impossibilidade das pessoas viverem de cabeça para baixo sem cair "para fora" da Terra ! (RANDLES,1994)

As especulações sobre a forma da Terra estavam ligadas ao ecúmeno, terra habitada (ou habitável) que representava o espaço geográfico da cristandade ao alcance da palavra de Deus. Logo, tem-se especulações sobre a extensão deste "ecúmeno cristão", reproduzido cartograficamente sob a forma dos mapas T-O, que datam desde o século VII. Estes mapas se caracterizavam por dispor os continentes - Europa, Ásia e África - divididos pelo Mar Mediterrâneo e seu núcleo central era a cidade de Jerusalém, o "umbigo do mundo".

RANDLES (1994) afirma que até 1520, coexistiram várias interpretações acerca da forma da Terra. , com desdobramentos vários sobre as terras possíveis de existir (i.e. as Quatro Ilhas, o Grande Hemisfério Austral). Porém, outras interpretações de caráter geográfico desenvolveram-se durante a chamada Idade Média e algumas sobreviveram até o século XVII. Elas se referem aos habitantes do hemisfério e de regiões na época desconhecidas.

A circunferência máxima da Terra (em nível do Equador) é cerca de 40.000 km. No século XVII (1600 – 1699) pensava-se que era muito menor. Assim, quando Colombo partiu para a Índia e aportou em uma das ilhas Bahamas, achou que já estava na Índia, logo sua margem de erro foi maior que a largura dos Estados unidos, mais a do Oceano Pacifico.(PCEM – 1991 – pág 110)

Medindo a circunferência da Terra

Em Boczko (1988) encontra-se um modelo de como determinar as estações do ano.

Finquemos uma vara num plano horizontal. Tal associação pode ser chamada *Gnômom* (relógio solar [grego]). Verifica-se que a sombra da vara, causada pela luz solar, varia durante o dia.

O instante em que a sombra da vara tem o menor comprimento do dia será chamado de *Meio-Dia*.

Se medirmos o comprimento da sombra da vara ao meio-dia, durante vários dias sucessivos veremos que ela varia.

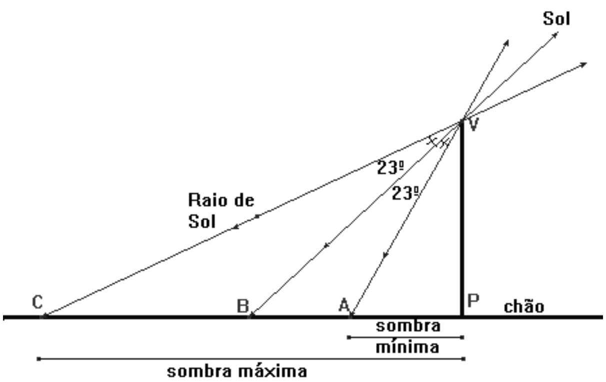


Figura 2.19

Os instantes em que ocorriam as sombras com comprimentos PA e PC recebiam o nome de solstícios (sol estático [latim]. Os instantes correspondentes às sombras de comprimento PB, onde B pertence a bissetriz do ângulo $P\hat{V}C$, recebem o nome de Equinócios (duração igual do dia e noite [latim]). (Fig. 2.19)

Convencionou-se dizer que o ano estava dividido em 4 estações. Os antigos notaram que quando a sombra era mínima (PA) o clima mostrava-se mais quente;quando a sombra era a mais longa, estava-se com a temperatura mais baixa. Assim temos:

- Solstício de Verão – é o instante em que a sombra é mínima (PA). Define o início de Verão.
- Equinócio de Outono – é o instante em que a sombra é (PB), indo de A para C. Define o início do Outono.
- Solstício do Inverno – é o instante em que a sombra é máxima (PC). Define o início do Inverno.

- Equinócio da Primavera – é o instante em que a sombra é (PB), indo de C para A. Define o início da Primavera.

Há vários séculos antes de Cristo alguns povos já tinham verificado que o tempo necessário para que a sombra ao meio-dia voltasse a ter o mesmo tamanho era de cerca de 365 dias. Sabemos hoje, ser de 365,242199 dias.

Se precisarmos medir a circunferência de uma bolinha de isopor, podemos colocar uma linha ou fita em torno dela e medir o comprimento obtido com uma régua. Mas, como fazer para medir a circunferência da Terra?

A partir de uma informação obtida num papiro da biblioteca de Alexandria, Erastóstenes obteve um valor aproximado do raio da Terra.

Na cidade de Siene, localizada no Egito, no dia mais longo do ano (chamado solstício de verão), ao meio-dia, uma estaca em posição vertical não projetava sombra e o reflexo do Sol podia ser visto na água, no fundo de um poço.

Figura 2.20[3]

Eratóstenes, então, fez o seguinte experimento: (Fig.2.21)

Verificou que em Alexandria, no solstício de verão, próximo ao meio-dia, estacas verticais projetavam sombra.

O Sol está tão distante que seus raios são paralelos quando chegam à Terra.

Pelo comprimento da sombra em Alexandria, o ângulo θ foi medido, encontrando-se aproximadamente 7°12'.

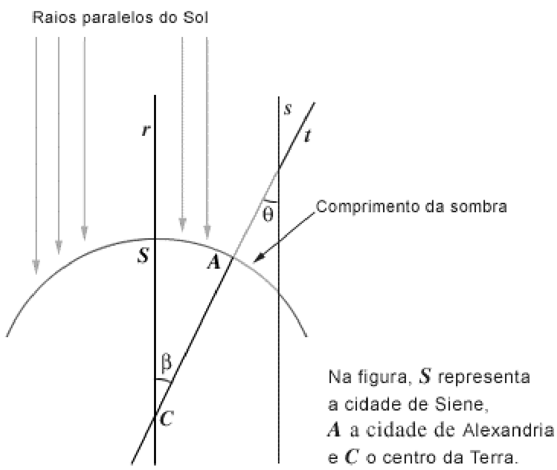


Figura 2.21

3. Disponível em: <http://www.paginas.terra.com.br>. Acesso em 05 mar. 2006.

Observando que as retas *r* e *s* eram paralelas interceptadas pela transversal *t*, Eratóstenes concluiu que os ângulos θ e β eram congruentes (ângulos alternos internos).

O ângulo β tem o vértice no centro da Terra e determina na circunferência da Terra o arco compreendido entre Siene e Alexandria (o arco *SA*). Logo, esse arco também mede 7°12'.

Como $\frac{7°12'}{360} = \frac{7 \, x \, 60' + 12'}{360 \, x \, 60'} = \frac{432'}{21600'} = \frac{1}{50}$, o referido arco é igual a $\frac{1}{50}$ da circunferência da Terra.

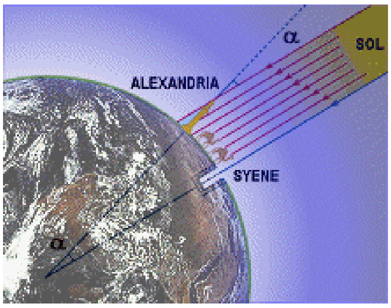


Figura 2.22[4]

Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano e 5000 estádios ao norte de Siene, verificou-se que o Sol lançava uma sombra, indicando que a distância angular do sol ao zênite era um cinquentavo de um círculo; é claro que a circunferência da Terra deve ser cinqüenta vezes a distância entre Siene e Alexandria. Isso fornece um perímetro de 250.000 estádios, ou, como um estádio era cerca de um décimo de milha, de 25 000 milhas ou 37 000 quilômetros. (textos posteriores indicavam 252 000 estádios, talvez para fornecer a cifra redonda de 700 estádios por grau.)

O resultado é aproximadamente 15% maior, em comparação com as medidas modernas, mas o resultado dele foi extremamente bom, considerando as suposições e o equipamento com que as observações foram feitas.

Os pontos cardeais e meridiano local

Na proposta curricular para o ensino de matemática do estado de São Paulo (1991) encontra-se na pagina 101, como sugestão de atividade para alunos de 6ª série, uma atividade visando um aplicação direta das noções de

---

4. Disponível em: <http://www.esteio.com.br>. Acesso em 05 mar. 2006.

perpendicularismo e de retas bissetrizes em uma outra área do conhecimento: a geografia, apresentando uma forma de determinação dos pontos cardeais.

Também em Boczko (1984) encontra-se na página 32 uma descrição de como determinar-se os pontos cardeais e o meridiano local. Meridiano é uma palavra que tem origem no latim e significa meio-dia.

O processo constituí-se dos seguintes passos: (Fig.2.23)

1) Finque-se, num plano horizontal, uma vara vertical – que será o nosso gnômon (para isso utilizar um fio de prumo ou um esquadro de madeira). Observa-se o tamanho e a direção da sombra dessa vara projetada pelo sol. Ao nascer e pôr do sol, as sombras serão muito grandes.

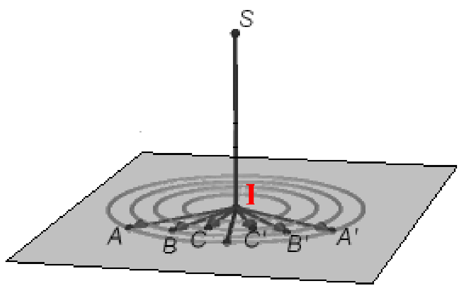


Figura 2.23

2) Traçam-se no chão, várias circunferências concêntricas centradas no pé da vara.

3) Seja I a parte inferior da vara e S a sua extremidade superior. Num determinado instante seja IA o segmento que representa a sombra do gnômom causada pelo sol. Com o correr do tempo verifica-se que a sombra do gnômom vai mudando de direção, bem como diminuindo de tamanho, até que após certo instante, o tamanho começa a aumentar novamente. Com algumas marcações das sombras sobre as circunferências, têm-se os raios IA, IB e IC. Quando a sombra for tal que sua extremidade distante atinja a circunferência de raio IC, assinalamos o ponto C' e a direção IC', procedendo de modo idêntico para os pontos B' e A', respectivamente correspondentes às circunferências de raios IB e IA.

4) Traça-se a bissetriz de cada ângulo $A\hat{I}A'$, $B\hat{I}B'$, $C\hat{I}C'$, verifica-se que as bissetrizes coincidem. Note que essa bissetriz também coincide com a sombra de menor tamanho.

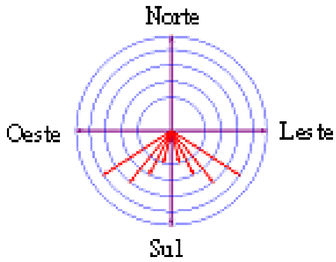


Figura 2.24

Essa bissetriz comum é a linha meridiana do lugar e indica a direção Norte-Sul desse lugar. A direção perpendicular a essa é a direção Leste-Oeste. (Fig. 2.24)

Alguém que apontasse o braço direito esticado para o Leste e o esquerdo para Oeste, olhasse de frente para o Norte, o Sul estaria às suas costas.

As abreviaturas geralmente utilizadas para os pontos Norte, Sul, Leste e Oeste são, respectivamente N, S, E e W.

Coordenadas geográficas

Admitindo a Terra como esférica, o eixo de rotação furará a superfície esférica da Terra em dois pontos diametralmente opostos, chamados pólos da Terra, um denominado Pólo Norte e o outro Pólo Sul.

A circunferência polar, aos pontos que representam o Pólo Sul e o Pólo Norte, será a Linha do Equador.

Além do Equador, quatro outros paralelos recebem nomes: o trópico de Câncer e o círculo polar Ártico, no hemisfério Norte; o trópico de Capricórnio e o círculo polar Antártico no hemisfério Sul.

Os trópicos estão distantes 23º 27’ do Equador e indicam os limites máximos ao sul e ao norte em que incidem verticalmente os raios solares durante o solstício de verão.

Os círculos polares estão distantes 66º 33’ da linha do Equador e 23º 67’ dos pólos. Eles assinalam o limite máximo de iluminação total das regiões polares nos solstícios de verão. Toda a região polar recebe os raios solares durante 24 horas, não havendo, portanto, um período de noite. No início do inverno acontece exatamente o contrário, não havendo, portanto, um período de dia.

Todos os planos, paralelos ao Equador Terrestre, que interceptam a superfície terrestre definirão circunferências chamadas Paralelos Geográficos. As semi-circunferências centradas no centro da Terra e passando pelos pólos determinam os Meridianos Geográficos. Esses infinitos Meridianos e Paralelos são usados para definir o sistema de referência ou sistema de coordenadas Geográficas que adota dois planos fundamentais: o plano do Equador e o meridiano passando por Greenwich, na Inglaterra.

A idéia de determinar a nossa posição leste-oeste veio do astrônomo grego Ptolomeu, que nasceu por volta do ano 100 d. C. Em seu livro a Geografia Ptolomeu introduzia o sistema de latitudes e longitudes tal como é usado hoje.

Latitude (= medida em largura [latim])

Latitude (ϕ) é o ângulo medido sob um meridiano, entre o Equador e o paralelo que passa por um ponto P que queremos determinar (Fig 2.25). Por convenção adota-se que a latitude é positiva quando o ponto P pertence ao hemisfério Norte (ou Boreal, ou Setentrional), e negativa quando P pertence ao hemisfério Sul (ou Austral ou Meridional) Assim: -90º $\leq \phi \leq$ 90º.

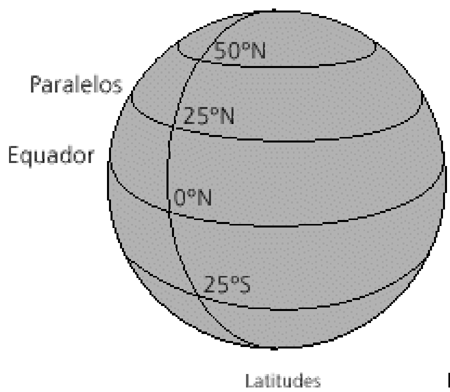


Figura 2.25[5]

5. Disponível em: <http://www.paginas.terra.com.br>. Acesso em 05 mar. 2006.

A latitude do Equador é portanto 0º. Considerando-se nos hemisférios Norte e Sul, respectivamente, latitudes norte (N) e sul (S) que medem até 90º. Assim se forem traçados 90 paralelos eqüidistantes em cada hemisfério a distância entre eles será de 1º. Todos lugares situados num mesmo paralelo têm mesma latitude.

Para determinar a latitude de um lugar durante o dia, é necessário saber, para além do ângulo que o Sol ao meio do dia faz com o horizonte, a data e a nossa posição aproximada sobre a Terra é preciso saber se estamos no hemisfério Norte ou no hemisfério Sul e qual a nossa posição em relação aos trópicos. No hemisfério Norte a inclinação da Estrela Polar é a latitude de um lugar.

A latitude de um lugar é a medida do ângulo que se percorre quando se vai do Equador até ao paralelo que passa por esse lugar (Fig. 2.26), perpendicularmente ao Equador. Esse ângulo é igual ao ângulo que a Estrela Polar faz com o horizonte, a qualquer hora. Medir a latitude é simples, pois no céu noturno do hemisfério Norte da Terra, a Estrela Polar está sempre presente.

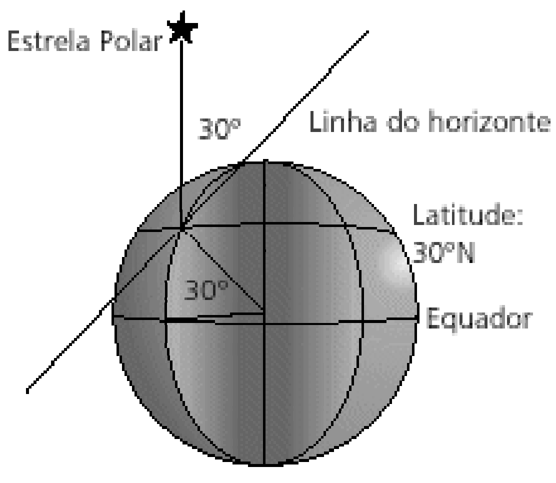


Figura 2.26[6]

6. Disponível em: <http://www.paginas.terra.com.br>. Acesso em 05 mar. 2006.

Longitude (= Comprimento [latim])

A Longitude (λ) é o ângulo, medido sobre o Equador, entre o Meridiano de Greenwich e o meridiano do ponto P que se quer determinar (Fig. 2.27). Ela é considerada positiva quando medida no sentido horário ao ser vista do pólo norte; isso significa que é positiva a oeste de Greenwich e negativa a leste de Greenwich, podemos considerar a longitude de 0º a 180º E (leste, alguns autores substituem o E por L) ou de 0º a 180º W (oeste, alguns autores substituem o W por O).

Vale a relação: $-180º \leq \lambda \leq 180º$

Figura 2.27[7]

Cada meridiano, junto com o seu antimeridiano, divide a esfera terrestre em duas partes iguais ou hemisférios. Assim para estabelecer um meridiano referencial ou principal, foi escolhido em 1884 o que passa próximo à cidade de Londres (Inglaterra), no subúrbio de Greenwich, onde há um observatório astronômico de mesmo nome, desativado desde 1958, razão pela qual esse meridiano principal é conhecido como meridiano de Greenwich.

O Meridiano de Greenwich e o seu antimeridiano dividem a esfera em dois hemisférios: Leste ou Oriental e Oeste ou Ocidental.

7. Disponível em: <http://www.paginas.terra.com.br>. Acesso em 05 mar. 2006.

É costume definir-se um ângulo de 15º correspondente à *Unidade Angular Hora.* Observemos que para os pólos não se define longitude.

Dessa forma, para determinar a localização exata de um ponto na superfície terrestre basta ter a sua latitude e sua longitude.

Fuso horário

Em virtude do avanço nos meios de transporte e comunicação, um sistema comum para determinar a hora local foi tornando-se mais necessário.

Em 1884, 25 países reunidos em Washington estabeleceram uma divisão do mundo em 24 fusos de uma hora, baseando-se no fato de que a Terra demora praticamente 24 horas para dar uma volta completa em torno de seu próprio eixo (o movimento de rotação da Terra completa-se em exatamente 23 horas, 56 minutos e 4 segundos). Dessa forma, dividindo os 360º da circunferência terrestre por 24, temos 15º, que é a medida de cada fuso horário.

Cada fuso é delimitado por dois meridianos e todas as localidades situadas no seu interior têm a mesma hora, que é chamada hora legal.

O fuso referencial para determinação das horas é o de Greenwich, delimitado pelos meridianos 7º30' leste e 7º30' oeste. A hora determinada pelo fuso de Greenwich recebe o nome de GMT (*Greenwich Meridian Time*).

Como a Terra gira de oeste para leste, os fusos a leste de Greenwich têm horas adiantadas (+) em relação à hora desse fuso inicial. Já os fusos situados a oeste têm as horas atrasadas (-) em relação à hora de Greenwich.

O horário de determinadas áreas de alguns países não corresponde ao horário do fuso em que estão localizadas. É que, para facilitar as comunicações, existe um limite prático entre os fusos, fazendo com que eles não sejam uma faixa reta e contínua que liga um pólo ao outro. Eles são sinuosos, deformados, porque seguem os contornos das fronteiras entre os países e das fronteiras entre os estados.

As nações com grande extensão territorial no sentido leste-oeste são atravessadas por vários fusos. A Rússia, por exemplo, possui 11 fusos horários.

Pelo Brasil passam quatro fusos, que determinam horários distintos, dependendo da localidade. Observe o mapa (fig. 2.28):

Hora Legal: é a hora civil do meridiano central do fuso

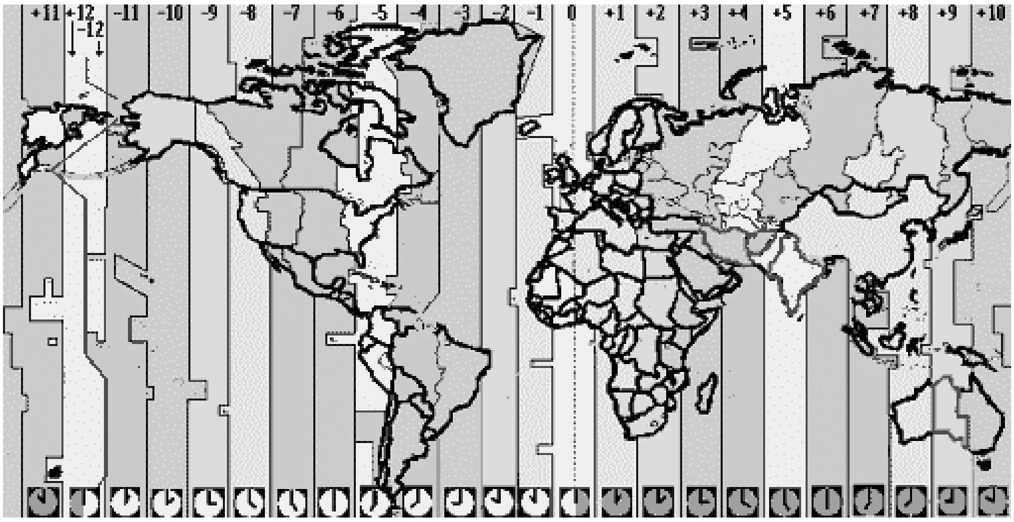


Figura 2.28[8]

Na tabela a seguir temos a correção necessária em relação ao Tempo Universal e a hora de Brasília para diversas localidades do Brasil.

Localidade	Correção ao Tempo Universal	Correção à hora de Brasília
Acre, **Amazonas** (Região de Atalaia do Norte, Boca do Maoco, Benjamin Constant, Eirunepé, Envira, Ipixuna)	-5 h	-2 h
Amazonas (Região de Boca do Acre, Jutaí, Manaus, Floriano Peixoto), **Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Pará** (Região de Altamira, Oribidos, Prainha, Oriximina, Santarém), **Rondônia, Roraima**	-4 h	-1 h
Rio Grande do Sul, Paraná, Santa Catarina, **Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo, Alagoas, Bahia, Ceará, Maranhão, Paraíba, Pernambuco, Piauí, Rio Grande do Norte, Sergipe, Goiás, Amapá, Pará** (Região de Belém, Marabá, Serra Norte, São Félix do Xingu)	-3 h	0 h
Ilhas de Fernando de Noronha, Trindade, Martin Vaz, Atol das Rocas, Penedos de São Pedro e São Paulo	-2 h	+1 h

obs.: As correções não consideram o horário de verão.

8. Disponível em: <http://www.astral-online.com/amostra/fuso/shtm>. Acesso em 12 mar. 2006.

Quando se calcular a diferença a menos de horas do Brasil em relação ao GMT deve-se levar em conta os fusos horários, como também o horário de verão aqui e na Europa.

Linha internacional de mudança de data

Do lado contrário do Meridiano de Greenwich, no Oceano Pacífico, criou-se o Antimeridiano de Greenwich ou Linha Internacional de Mudança de Data (LDI), a 180º. Ao ir daqui do Rio de Janeiro para Tóquio, ultrapassa-se a LID e, assim, além de mudar as horas, tem-se que aumentar 1 (um) dia; ao retornar, diminui-se 1 dia. Ou seja, ultrapassando a LID de oeste para leste aumenta-se 1 dia; de leste para oeste, diminuí-se 1 dia.

Uma observação importante e prática: em todo e qualquer exercício de fusos horários é necessário que se dê a localização geográfica em longitude das cidades e se memorize aquela questão prática: ao caminhar para o oriente aumenta-se a hora; para o ocidente, diminuí-se a hora.

2.4. MAPAS E PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

2.4.1. Mapas

O mapa não deve ser entendido apenas como uma simples ilustração. Ele é um meio de comunicação, uma fonte de conhecimento sobre determinada realidade. Segundo Yves Lacoste, geógrafo francês, ler uma carta ou um mapa significa “saber agir sobre o terreno”. Tendo como objeto de estudo o espaço geográfico, os mapas são de fundamental importância para a geografia, pois armazenam e trabalham uma documentação espacial.

Quanto à escala os mapas podem ser: plantas (ou cartas cadastrais), cartas ou mapas topográficos, e os mapas geográficos.

Quanto aos seus objetivos, os mapas podem ser: gerais (para divulgação a pessoas comuns como os mapas-múndi, os continentes, que se usam em sala-de-aula), e temáticos (mostram certas características específicas da realidade geográfica, como os estudos de população, de solos, dos mares, ...)

A escala é a relação matemática entre o comprimento ou distância figurada no mapa e a superfície real da superfície representada. Há duas modalidades de escala: a numérica e a gráfica.

2.4.2 Escalas

A escala numérica se representa por uma fração ordinária (como 1/1.000.000) ou de uma razão matemática (1:1.000.000). O número 1 significa a unidade no mapa (1 cm) e o número 1.000.000 o tamanho real (1.000.000 de cm, ou seja 10 km)

Quanto menor for o segundo número, no caso o denominador da fração ordinária, maior será a escala; e vice-versa. Assim as escalas inferiores a 100.000 são consideradas grandes; quanto superiores a 500.000, são pequenas

Quanto maior a escala mais detalhada é a carta geográfica. Assim, as plantas (ou cartas cadastrais) se fazem com escalas entre 1/500 e 1/20.000. Os mapas topográficos têm escalas entre 1/25.000 e 1/250.000, que são escalas médias; estes mapas são conceituados como de informação oficial. O governo brasileiro, através do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e da Diretoria do Serviço Geográfico do Exército, além dos institutos cartográficos estaduais, adota esse tipo de mapa, o topográfico.

A escala gráfica é representada sob a forma de um segmento de reta graduado em km. É dividida em partes iguais, indicativas da quilometragem; a primeira parte (chamada de talão ou escala fracionária) é seccionada de tal modo a permitir uma avaliação mais precisa das distâncias ou tamanhos no mapa. Essa escala gráfica facilita de maneira mais prática o cálculo dessas distâncias.

2.4.3. Projeções cartográficas

Todo mapa é uma representação de dados da superfície terrestre. A única maneira de representar a superfície da Terra, que é uma curva, sem que haja deformações, é por meio do globo, mas não é uma forma prática para manuseio e transporte de um lado para outro.

Representá-la no plano de uma folha de papel (ou de papiro como antigamente) provoca deformações. O objetivo das projeções cartográficas é o de resolver os problemas decorrentes dessa representação da Terra num plano.

Entre as projeções cartográficas mais utilizadas estão a cilíndrica, a cônica, a azimutal e a de Robinson. Contando-se todas as variações, há mais de 200 tipos de projeções.

No quadro a seguir (Fig. 2.29) encontra-se um resumo das classificações das projeções:

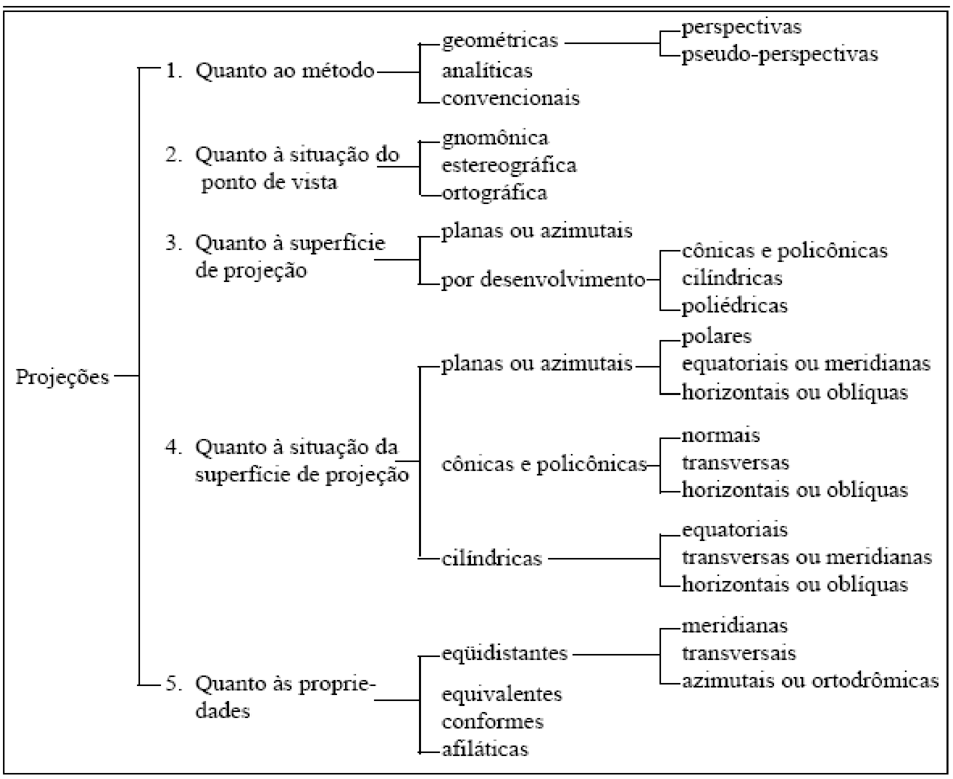


Figura 2.29

Para este trabalho, será apresentada apenas a projeção cilíndrica.

Projeção cilíndrica

Denominadas assim porque são feitas pelo envolvimento da esfera terrestre por um cilindro tangente a ela (Fig 2.30). Elas apresentam o inconveniente de deformar as superfícies de altas latitudes, mantendo as de baixas latitudes em forma e dimensão mais próximas do real. Uma demonstração disso: a Groelândia parece que é maior que a Austrália, mas é 3 vezes menor.

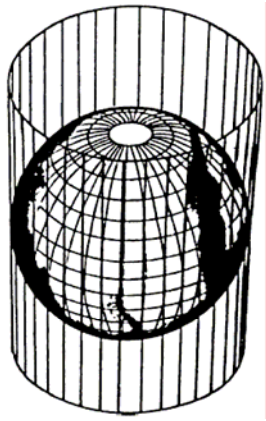


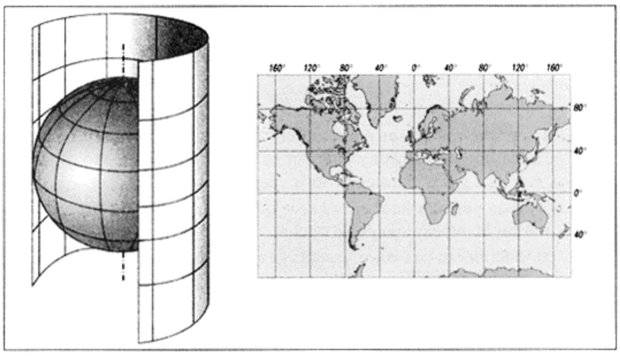
Figura 2.30[9]

As duas projeções cilíndricas mais conhecidas são as de Mercator e a de Peters. Elas apresentam algumas diferenças embora sejam do mesmo tipo de projeção.

A projeção de Mercator é a mais antiga. Foi criada no século XVI, é uma projeção cilíndrica conforme, ou seja, conserva a forma dos continentes, direções e ângulos. Nesta projeção os ângulos de latitude e longitude, portanto as distâncias angulares e lineares (estas no Equador), são precisas.

A projeção de Arno Peters surgiu apenas em 1952, é uma projeção cilíndrica de área igual, pois não mantém as formas, direções e ângulos, mas preserva as áreas dos continentes. Os países e continentes situados em baixas latitudes ficam alongados no sentido N – S, enquanto os situados em altas latitudes ficam como que esgarçados no sentido L – O porque as distâncias angulares entre os paralelos são diminuídas gradativamente do Equador para os pólos.

9. Disponível em: <http://www.dpi.inpe.br>. Acesso em 12 mar. 2006.



Fonte: *Atlas 2000*; la France et le monde. Paris, Nathan, 1998.

Figura 2.31[10]

2.5. ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOGRAFIA

Os gregos foram os primeiros geógrafos e, considerando as limitações de seus instrumentos, suas realizações foram notáveis.

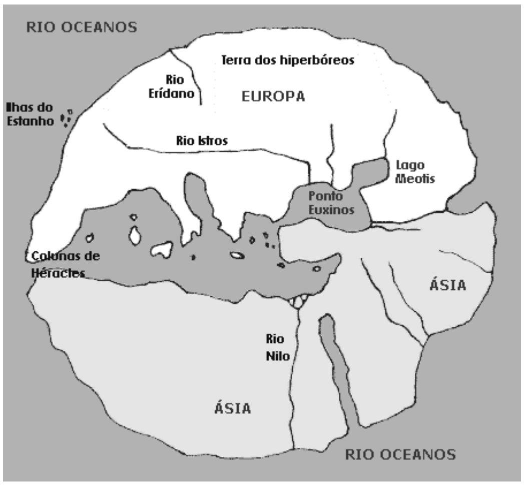
As primeiras concepções geográficas gregas estão nas duas epopéias atribuídas a Homero (*c*. -750), a *Ilíada* e a *Odisséia*, criadas no final da Idade das Trevas.

Na *Ilíada*, a Terra é descrita como um disco achatado em cujo centro encontrava-se o santuário de Delfos (Fócida). A Grécia Continental e os demais territórios conhecidos eram rodeados em sua totalidade por um imenso rio, oceano, de onde provinham as águas dos mares, rios e fontes. A *Odisséia* é, em grande parte, um pormenorizado diário de viagens do herói Odisseu, que vagou por dez anos após a Guerra de Tróia.

O mais antigo geógrafo conhecido é o filósofo milesiano, Anaximandro (-610/-540), o primeiro a desenhar um mapa do mundo conhecido, conforme as crenças da época.

10. Disponível em: <http://www.isba.com.br>. Acesso em 12 mar. 2006.

Outro milesiano, Hecateu de Mileto (-550/-475), escreveu o mais antigo tratado de geografia, *Periegesis*, que não chegou até nós. Sabe-se apenas que dava descrições detalhadas de povos e lugares, era dividido em duas partes, Europa e Ásia (denominação que englobava o norte da África) e continha um mapa-múndi, que pôde ser reconstituído. (Fig. 2.32)



Reconstrução conjuntural do mapa-múndi que acompanhava, provavelmente, a obra de **Hecateu de Mileto** [*cf*. P. CARTLEDGE (ed.), *History of Ancient Greece*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, p. 300, 1998]. Data: fim do século -VI. [11]

Figura 2.32

O primeiro "Globo Terrestre" (Fig 2.39) na concepção de Crates de Malos (*fl*. séc. -II) [*cf*. A. AZEVEDO, *O Mundo Antigo*, São Paulo, DESA / Edusp, p. 129, 1965]. Data: séc. -II.

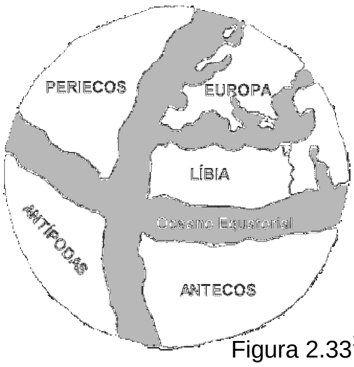


Figura 2.33[12]

Tem-se referência de que foi Eratóstenes quem criou, por volta de -200, a palavra *geografia*, que significa "descrição da terra".

Foi com os gregos na Antiguidade que a cartografia evoluiu bastante. Hiparco, astrônomo da escola da ilha de Rodes, no século II a.C., dividiu pela primeira vez a circunferência da Terra em 360º e traçou sobre a esfera terrestre paralelos e meridianos eqüidistantes. Tornava-se fácil, assim, não só a localização das cidades e regiões, mas também a confecção de mapas.

---

11. Disponível em: <http://warj.med.br/cie/index2.asp>. Acesso em 06 set. 2004.
12. Disponível em: <http://warj.med.br/cie/index2.asp>. Acesso em 06 set. 2004.

Entretanto muitas obras dos gregos sobre geografia e cartografia do período da Antiguidade perderam-se no tempo (LUCCI, 1999).

As duas sínteses, que na Idade Média permitiam conciliar as noções de Terra plana e Terra redonda foram construídas a partir de Crates de Malos (c. 160 a.C) e de Aristóteles (384 – 322 a.C.). Na primeira, sobre uma esfera, coberta em sua maior parte por água, representavam-se quatro pequenas ilhas diametralmente opostas e na segunda, dava-se ao cosmo a forma de quatro esferas concêntricas, constituídas pelos quatro elementos, e ordenando-se segundo suas respectivas importâncias.

A teoria das cinco zonas, atribuída a Parmênides (primeira metade do século V a. C.) dividia a esfera em cinco “praias”: duas geladas, logo inabitáveis, perto dos pólos e, de um lado e de outro sobre o Equador, a zona tórrida, também inóspita e intransponível, separando as duas zonas temperadas, as únicas suscetíveis de acolher as populações. A idade media estava familiarizada com o corte rigoroso das partes da terra graças ao Traite de la Sphère, de João Sacrobosco. (RANDLES ,1994)

Como se pode ver, existiam diversas crenças a respeito do modelo ideal para a Terra. Foram muitas as teorias entre os historiadores da ciência, e isto , desde o século XVI. (RANDLES, 1994).

Grande parte dos conhecimentos cartográficos da Antiguidade está sintetizada na obra Geografia, de Ptolomeu (90- 168 d.C.) Os originais foram perdidos mas a obra foi copiada em numerosos manuscritos gregos, árabes e latinos até o século XV, e, finalmente impressa em 1475.

Em sua obra composta de 8 livros Ptolomeu retrata de forma abrangente a superfície terrestre conhecida na época: quase toda a Europa, grande parte da Ásia e parte da África.

> A *Geografia* de Ptolomeu introduzia o sistema de latitudes e longitudes tal como é usado hoje, descrevia métodos de projeção cartográfica, e catalogava cerca de 8 000 cidades, rios, e outros aspectos importantes da terra. (Boyer, 1974, p. 123)

Quando a obra *Geografia* tornou-se conhecida dos europeus, os grandes descobrimentos já estavam em curso e muitas áreas recém-descobertas mostravam que o “mundo” de Ptolomeu havia sido bastante ampliado. Apesar disso, os seus cálculos foram extremamente oportunos para os navegantes e cartógrafos da época, que ficaram impressionados com a qualidade da sua obra. (Lucci, 1999).

Foi Nicolau Copérnico, que nasceu no ano 1473, na Polônia, quem pela primeira vez apresentou provas convincentes de que a Terra gira em torno do Sol. Copérnico escreveu as suas idéias no livro “Sobre a Revolução dos Corpos Celestes”, publicado no ano de 1543, na Alemanha.

A concepção heliocêntrica de Copérnico e as posteriores descobertas de Galilei (movimento de rotação da terra), Kepler (Leis da Mecânica Celeste) e Newton (Lei da gravitação Universal) lançaram as bases da Astronomia moderna.

Durante a Idade Média, as concepções religiosas fundamentaram a cartografia produzida na Europa. Os planisférios elaborados pelos sábios religiosos, principais portadores do conhecimento, são uma visão simbólica que mistura conhecimentos geográficos, fé cristã e monstros místicos.

No Renascimento, os conhecimentos cartográficos se transformaram em instrumentos vitais de conhecimento e controle das rotas comerciais e dos Estados, ainda em formação. A partir do século XV, o espírito mercantil das navegações tomou o lugar da religiosidade medieval. Enquanto o desenvolvimento científico possibilitava técnicas cada vez mais precisas para os cálculos das coordenadas.

É bem no fim do século XVI que se encontra o melhor enunciado em termos matemáticos do princípio do globo terráqueo, através de um português André de Avellar que analisou do ponto de vista da longitude, a relação entre a distância angular e deslocamento horário, e depois do ponto de vista da latitude, a relação entre distância angular e caminho percorrido. Chamando a atenção para a existência de uma proporção regular e invariável entre dois tipos de observações bem diferentes e, alem do mais, sobre dois eixos perpendiculares um ao outro. Avellar baseia sistematicamente a esfericidade do Globo Terrestre na experiência. (RANDLES, 1994).

Gerhard Kramer (1512 – 1594) conhecido por Mercator, através da sua projeção, concebida em 1569, consolidou a prática de colocar o norte no topo, invertendo a tendência medieval de raiz religiosa, que consistia em colocar o leste (onde está Jerusalém) na parte superior. O planisfério de Mercator é, até hoje, utilizado em livros e Atlas da maior parte do mundo.

No início da década de 1970, o autor Arno Peters divulgou uma projeção que logo ganhou celebridade mundial. Contudo, não foi Peters que inventou a projeção que passou a levar o seu nome. Peters apenas tirou do esquecimento a projeção cilíndrica de área igual de Gall (1808 – 1895).

Durante séculos os mapas foram desenhados a mão, caracterizando-se como produtos artesanais. Os mapas artesanais, embora obedecendo aos padrões convencionais da cartografia, eram documentos singulares, autorais. Por isso, situavam-se na intersecção dos domínios da técnica e da arte.

Na década de 1960, com o advento da informática, apareceram os primeiros mapas desenhados por computador. A nova tecnologia da cartografia automática, ou cartografia assistida por computador, revolucionou a concepção de produção de mapas e ampliou as possibilidades do seu uso. Situam-se, nitidamente, no domínio da técnica e apresentam maior facilidade de leitura. Assim, na comparação com mapas clássicos, perdem em originalidade mas ganham em eficácia.

Capítulo 3

Sujeitos, método e material

"Não se pode supor que a escola contribuirá, efetivamente, para a valorização do homem, realizando apenas mecanicamente as tarefas que lhes dizem respeito". (Célia Maria Carolino Pires)

3.1.SUJEITOS

Os sujeitos envolvidos neste estudo foram 14 alunos, com idades entre 13 e 14 anos, regularmente matriculados na 8ª série do ensino fundamental do período diurno (tarde), na EE Sidrônia Nunes Pires, localizada no distrito de Caucaia do Alto, Município de Cotia.

Fez-se um convite aos alunos da 8ª A e 8ª B, expondo-se que as atividades que seriam desenvolvidas faziam parte de um projeto de mestrado. Os alunos que se interessaram, levaram para seus pais ou responsáveis uma carta (ver anexo XXVI), onde estava exposto o objetivo do trabalho e solicitava-se a autorização dos mesmos, para que os alunos participassem do projeto e que suas imagens pudessem ser utilizadas através de fotografias.

3.2. MÉTODO

Com o intuito de propor um trabalho integrando Matemática e Geografia, foi elaborada uma seqüência de ensino, a fim de que fossem produzidos significados para conceitos básicos de Geometria Esférica, os quais serão utilizados no estudo do Globo Terrestre e dos Mapas.

Os encontros aconteceram em três sábados, nos dias 25 de março, 01 de abril e 08 de abril de 2006, no período da manhã, das 9 às 12 horas, e utilizou-se o laboratório de informática da escola. A escolha de desenvolver o projeto aos sábados, foi feita devido à disponibilidade dos alunos e dos professores observadores.

A seqüência foi aplicada para os alunos organizados em duplas, inspirados na Teoria de Vygotsky, de modo a privilegiar a colaboração e a interação.

Ao conceber-se a seqüência, tinha-se em mente que um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando se interessa por sua aprendizagem. Segundo Vergnaud "é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido". Desta forma as atividades deveriam conter situações-problema, que possibilitassem a aquisição do conceito através da exploração de objetos e que proporcionassem momentos de reflexão.

Concebeu-se a seqüência em três etapas:

- Na primeira etapa o objetivo foi construir alguns significados geométricos sobre a esfera a partir de atividades que propõem a manipulação de bolas de isopor, alfinetes e linhas representando a esfera, pontos e retas respectivamente. Os alunos desenvolveram atividades ligadas à Geometria Esférica, localizando retas, circunferências, ângulos e triângulos sobre a esfera. Partiu-se da elaboração de atividades que poderiam proporcionar aos educandos a compreensão de conceitos de Geometria Esférica que, mais tarde, poderão ser utilizados no estudo das linhas de referência do Globo Terrestre.

- Na segunda etapa, a seqüência foi desenvolvida com o auxilio do Globo Terrestre, momento da busca de conexões da Geometria Esférica com o estudo do Globo Terrestre. Ainda nesta etapa foram propostas atividades com o intuito de desenvolver o conceito de projeção cartográfica, especificamente a projeção cilíndrica. Os alunos receberam uma esfera de arame, vela e cartolina.

- Na terceira e última etapa, foi utilizado o Atlas Geográfico, onde foram propostas, buscando relacionar as linhas do globo com as do mapa, as idéias de fuso horário e de escala.

Ao elaborar-se a seqüência partiu-se do referencial teórico, do estudo histórico apresentado e da idéia de rede, apresentada por Nunes (2000) “A idéia de rede, utilizada com o propósito de articular disciplinas do currículo, traz novas possibilidades para projetos interdisciplinares” e por Oliveira (2005) “Os conceitos não são entidades isoladas, mas elementos de um sistema complexo de inter-relações. (...) Os conceitos não se encontram isolados na mente do sujeito, mas sim organizados em algum tipo de todo estruturado, uma espécie de rede de significados, em que há relações entre os elementos”

As atividades procuraram favorecer a construção do conhecimento. Na teoria de Vergnaud, um dos eixos teóricos deste trabalho, os conceitos se desenvolvem por meio de resolução de problemas, do reconhecimento da existência de um campo conceitual ligado ao estudo da geografia e de situações a-didáticas, contribuindo para que o aluno desenvolva esquemas de ação e privilegiando a observação e reflexão em dupla. Planejou-se dar tempo para que os alunos discutissem e elaborassem suas próprias conclusões.

> Os conceitos não são entidades independentes dentro do funcionamento psicológico, mas formam parte de um todo complexo, no qual os elementos se relacionam entre si, de maneira constante e dinâmica, produzindo permanentemente o psiquismo humano, com formas de pensamento heterogêneas, que convivem no interior de um mesmo sujeito. (VYGOTSKY APUD OLIVEIRA, 1992)

3.2.1. QUESTÃO DE PESQUISA

No atual estudo, houve a preocupação com o modo como poderiam ser trabalhados os conceitos da Geometria Esférica de modo a traçar-se uma ponte com a geografia.

A pergunta que norteou o trabalho foi:

"Uma introdução à Geometria Esférica pode favorecer o estudo da Geografia do Globo Terrestre e em particular o estudo de mapas?".

Para responder a esta questão, pretende-se desenvolver uma seqüência de ensino que trabalhe conceitos de geometria esférica e que serão utilizados para auxiliar na compreensão de conceitos geográficos. Serão utilizados alguns elementos da metodologia de pesquisa intitulada Engenharia Didática de Michèle Artigue.

3.2.2 PROCEDIMENTOS

Para responder a questão de pesquisa foi utilizada a Engenharia Didática, que emergiu em didática da matemática no início da década de 80 e trata da elaboração de situações de pesquisa.

Artigue (1989) apresenta o trabalho da Engenharia Didática comparando-o com o trabalho do engenheiro. Ao realizar um projeto, apoiando-se sobre o conhecimento científico de seu domínio, o engenheiro, assim como o professor ou pesquisador da Engenharia Didática, aceita a submeter-se a um controle científico, e ao mesmo tempo encontra-se obrigado a trabalhar sobre objetos menos precisos que os científicos. O trabalho do professor, ao elaborar ou escolher uma seqüência de ensino, deve levar em conta de forma integrada: o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos seus alunos.

> Colocar o problema da engenharia didática é colocar, relacionando-o com o desenvolvimento atual e futuro da didática da matemática, o

problema da ação e dos meios da ação sobre o sistema de ensino. (CHEVALLARD apud ARTIGUE, 1988, p. 194)

O processo envolve: uma análise da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e uma revisão de todo processo em função desta avaliação.

No que se refere à escolha e planejamento da seqüência de ensino deste estudo, compartilha-se de questões levantadas por Artigue (1989), ao tratar da engenharia didática destacando a importância da realização de um projeto que possua um referencial teórico adequado, permitindo a realização de uma prática que seja submetida a um controle sistemático, preservando as características de uma atividade científica.

Para uma maior sistematização durante a aplicação da seqüência, procurar-se-á percorrer as quatro fases da engenharia didática, proposta por Artigue (1989): a fase 1 das análises prévias, a fase 2 da concepção e da análise a *priori* das situações didáticas, a fase 3 da experimentação e, por fim a fase 4 da análise a *posteriori* e da avaliação.

Análises Prévias

A fase da concepção efetua-se num quadro teórico didático geral, em conhecimentos didáticos já adquiridos, nas análises preliminares que envolvem a análise epistemológica dos conteúdos que se pretende trabalhar e no estudo sobre os processos educacionais desenvolvidos em classe (o meio, os instrumentos, a mediação do professor). Neste processo pretende-se dar subsídios ao desenvolvimento da análise a *priori,* tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

Concepção e Análise a *priori*

Esta fase consiste na preparação de seqüências de ensino e do esquema experimental, para a ação em classe.

A análise a *priori* objetiva determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Ela contém uma parte descritiva e uma parte preditiva. Trata-se de uma análise matemática das atividades.

Experimentação

É a fase da organização, aplicação e coleta de dados da seqüência de ensino.

Os dados obtidos podem ser completados por outros através de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final.

Análise a *posteriori* e Validação

É nesta fase que ocorre a interpretação dos resultados da experimentação, seu objetivo é oferecer um feedback para o desenvolvimento de uma nova análise a priori e uma nova experimentação, concebendo o desenvolvimento das atividades como uma atualização dos processos em questão.

É no confronto entre as análises a priori e a posteriori que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação, a validação é essencialmente interna.

3.2.3. ORGANIZAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

Elaboraram-se as atividades procurando conectar a Geometria Esférica com o estudo do Globo Terrestre e sua representação no plano, visando motivar a criação de significados das linhas traçadas sobre a esfera, que representa a Terra, e a utilização dos fusos horários, bem como da distância de um ponto a outro sobre o mapa e do uso de escalas na confecção dos mesmos.

Iniciou-se com questões que eram totalmente desconhecidas dos alunos, como: *“O que seria uma reta sobre a esfera?”*

A seqüência foi dividida em três partes. Na primeira os alunos manipularam materiais concretos, bolas de isopor, linhas e alfinetes, para que compreendessem a idéia de reta sobre a esfera, objetivando a mobilização de alguns conceitos para a construção de significados para as linhas do Equador , dos Meridianos e dos Paralelos Terrestres, bem como a idéia de retas perpendiculares sobre o globo, que é o caso dos Meridianos e seus antimeridianos e da linha do Equador, os quais foram trabalhados na segunda parte.

Na segunda parte também foi trabalhada a idéia de planificação do Globo Terrestre através da projeção cilíndrica. Aqui também foram utilizados materiais concretos, tais como esfera de arame, vela, cartolina. Os alunos colocaram a cartolina em volta da esfera, formando um cilindro, projetaram as linhas da esfera de arame sobre a mesma e puderam observar como se comportam estas linhas ao serem projetadas, a partir do centro sobre o cilindro. Os alunos puderam observar, também, a projeção de figuras geométricas colocadas sobre a esfera e projetadas sobre o cilindro.

Na terceira parte, utilizando o Atlas geográfico, os alunos resolveram atividades que utilizavam conceitos de localização, partindo das coordenadas geográficas, fuso horário e escala de mapas.

3.2.4. COLETA DOS DADOS

Os alunos receberam folhas com as atividades e, durante o desenvolvimento das mesmas, foram convidados a lerem textos relacionados ao assunto. Os textos foram apresentados em documentos do Word, em CD-Rom e cada dupla teve acesso a um micro.

Os textos tinham por objetivo fazer a institucionalização das atividades e apresentar subsídios para que os alunos desenvolvessem as atividades subseqüentes. Entendeu-se que seria interessante apresentar questões que seriam depois respondidas através de textos que os alunos receberiam em CD para leitura no computador, tendo em vista a qualidade das figuras e a facilidade de manipulação.

Procurou-se incluir as atividades de modo a favorecer a construção do conhecimento, evitando expor conceitos sem propiciar ao menos a validação local dos mesmos.

Para o desenvolvimento das atividades, iniciou-se com a manipulação de objetos (bolas de isopor, linhas e alfinetes), Cada dupla recebeu uma bola de isopor, linha e alfinetes e caso as duplas solicitassem, tinha-se disponíveis: laranja, fita métrica, régua e transferidor.

Os alunos foram distribuídos em 7 duplas, aleatoriamente, e, para acompanhamento das duplas, a pesquisadora contou com o apoio de seis professores de matemática da EE Sidrônia Nunes Pires, sendo que houve um revezamento entre os mesmos, tendo três observadores presentes a cada encontro. Cada observador recebeu um roteiro a cada etapa (anexo de IX a XI), para acompanhar o desenvolvimento das atividades. Foram observadas três duplas. Foi efetuada a filmagem dos três encontros, procurando registrar o trabalho de todas as duplas, sem privilegiar nenhuma.

As três duplas observadas foram fixadas aleatoriamente, sendo posteriormente nomeadas de A, B e C, além dos observadores as duplas A e B contaram com gravadores. As duplas que não estavam sendo observadas foram nomeadas de D, E, F e G. A opção de nomeá-las por letras foi para facilitar a análise.

A seqüência de ensino foi aplicada no formato de um curso, em que previam-se três encontros de três horas cada, com um intervalo de 15 minutos. No primeiro encontro o trabalho com a esfera, no segundo com o Globo Terrestre e no terceiro com o mapa.

No primeiro encontro as duplas foram acomodadas por micro, ficando as duplas que seriam observadas distantes uma das outras. Um dos computadores que seria utilizado apresentou problema, então uma observadora foi, com uma dupla, utilizar o computador da sala da coordenação, ficando no laboratório apenas seis duplas, duas acompanhadas pelos observadores.

A primeira etapa, com 4 atividades, correu dentro do cronograma, os alunos conseguiram desenvolver todas as atividades. Estava prevista também para esta etapa uma avaliação diagnóstica, mas ao concluir-se as atividades propostas para esta etapa, achou-se que seria melhor deixar a atividade diagnóstica (anexo XII) para o próximo encontro, servindo então para resgatar alguns pontos deste encontro, inclusive por ter sido observado que alguns conceitos não ficaram claros.

No segundo encontro as duplas se mantiveram, porém a dupla que foi nomeada E não compareceu. As atividades foram desenvolvidas com apenas 6 duplas. As duplas A, B e C continuaram a ser observadas e as duplas A e B contaram também com gravador.

As duplas foram acomodadas em carteiras, dispostas em forma de círculo na sala, sobre as quais foram colocados os Globos Terrestres. Cada dupla recebeu um globo e, à medida que todos concluíam a atividade, fazia-se a socialização das respostas. Quando a atividade exigiu a leitura do texto, as duplas iam até o computador, retornando para as carteiras.

Antes do desenvolvimento das atividades da parte II os alunos receberam a avaliação diagnóstica, após a resolução, as respostas foram socializadas, havendo a necessidade da intervenção, por parte da pesquisadora, para elucidação de alguns pontos os quais serão tratados posteriormente.

Por haver um atraso no horário previsto para o encerramento das atividades, não foi possível concluir todas as atividades propostas para este encontro, ficando as atividades 4 e 5, onde se trabalhava a idéia de projeção cilíndrica, para o próximo encontro.

No terceiro encontro, voltou-se à disposição de círculos das carteiras, tendo em vista o trabalho com o mapa e o pouco espaço na bancada do computador, mas, por sugestão dos alunos, as carteiras foram colocadas próximas ao computador, para facilitar o acesso aos textos. Neste dia faltaram os alunos da dupla G e uma aluna da dupla E. Uma aluna da dupla D chegou após o desenvolvimento das atividades da parte II que tivemos que transferir para este encontro. Montou-se uma nova dupla com uma aluna da dupla D e um aluno da dupla E que foi nomeada de D*. A aluna da dupla D que chegou atrasada resolveu as atividades sozinha.

As atividades da parte III foram desenvolvidas após a conclusão da parte II, teve-se que avançar no horário para conseguir terminar todas as atividades. As atividades foram concluídas por volta das 13 horas.

As fotos que acompanharão a análise, foram resgatadas a partir da filmagem das atividades.

3.3. MATERIAL

Os instrumentos utilizados neste estudo foram uma seqüência de ensino, roteiros para os observadores, gravação das discussões de duas duplas e a filmagem das atividades.

A seqüência de ensino, composta de 12 atividades, divididas em três partes, foi aplicada para as duplas e ao término de cada atividade, após as discussões cabíveis, os alunos entregavam as folhas com as respostas.

Os roteiros para os observadores (anexos de IX a XI e XIII), foram entregues aos professores dias antes da aplicação da seqüência, para que os mesmos pudessem se familiarizar com as questões, e foram recolhidos após a conclusão das atividades. Foram observadas três duplas, as quais foram nomeadas de (A), (B) e (C).

As duplas que contaram com gravador durante a realização da seqüência foram as duplas nomeadas de (A) e (B).

A filmagem das atividades teve como objetivos registrar possíveis diálogos durante a socialização das respostas e resgatar fotos do desenvolvimento das atividades, tendo em vista que foi utilizada uma câmera digital.

Para o desenvolvimento das atividades da seqüência, foram utilizados materiais concretos: bolas de isopor, alfinetes, linhas, régua, transferidor, esfera de arame, velas, cartolinas, Globos Terrestres, Atlas geográficos, computador e textos em CD-rom (anexos de I a VIII).

3.4. ANÁLISE A PRIORI.

Uma análise a priori das atividades propostas foi feita com o objetivo de antecipar a linha de raciocínio necessário para a resolução das atividades.

Nessa análise procura-se dizer qual é o objetivo da atividade, quais as possíveis estratégias dos alunos, quais as dificuldades que os alunos poderão ter, quais os pré-requisitos para progredir na resolução das atividades e caso haja bloqueio do aluno na resolução quais providências o pesquisador deverá tomar para que o aluno progrida na resolução da mesma.

Para a realização da análise a pesquisadora colocou-se no lugar do aluno, pensando em quais seriam suas principais dificuldades com relação aos conteúdos propostos e os saberes mobilizados pelas atividades. Contou-se também, com o auxílio do Lucas, aluno da 8ª série, com 14 anos, o qual auxiliou resolvendo, sozinho, todas as atividades que serão apresentadas.

As atividades serão analisadas, uma a uma, na ordem em que serão aplicadas.

Os observadores serão orientados para que não interfiram na resolução das atividades, salvo em alguns momentos em que, no roteiro do observador (anexos de IX a XI e XIII) é dada abertura para intervenção, sem deixar de anotar tal fato. Caso o pesquisador tenha que interferir em alguma atividade, os observadores também serão orientados para que anotem a intervenção.

PARTE I – A ESFERA

A parte I é dividida em 4 atividades sendo que a primeira contém 2 questões, a segunda, 3 questões, a terceira, 4 questões e a quarta 4 questões. Estas atividades deverão ser desenvolvidas no primeiro encontro e direcionadas com a manipulação do material concreto (bola de isopor, linha e alfinetes).

As duplas irão receber as atividades em folhas individuais, na ordem em que aparecem nesta análise, distribuídas de modo a fornecer espaço para que escrevam suas conclusões.

Nesta análise, cada quadro constitui uma atividade.

ATIVIDADE 1

1) Se resolvêssemos "fatiar" a esfera, que figuras encontraríamos? 2) O que seria uma reta na superfície da esfera? (coloque 2 pontos representados por alfinetes e trace a "reta" com a linha)

Os itens 1 e 2 têm por objetivo definir reta na superfície esférica, de modo que o aluno perceba que existem círculos de vários diâmetros, mas que a reta será a circunferência máxima (o círculo que divide a esfera em duas metades "iguais").

Ao perguntar para os alunos, no item 1, o que encontraríamos se fatiássemos a esfera, espera-se que eles consigam "enxergar" que serão diversos círculos, mas os alunos serão deixados livres para decidir sobre a estratégia para resolução do problema. Serão disponibilizadas laranjas e facas para que, caso não cheguem a resposta, apenas por abstração, o pesquisador ou os observadores sugiram o uso dos mesmos.

No item 2, acredita-se que dificilmente os alunos associarão reta com a circunferência máxima, mas pode ocorrer que alguns respondam reta na superfície esférica como sendo as circunferências máximas, para tanto os alunos terão em mãos bolas de isopor, alfinetes e linha ou ainda que respondam que é a circunferência que divide a esfera ao meio.

Concluída esta atividade, os alunos serão convidados a ler o texto 1 do CD (ver anexo I), onde são definidos círculos, círculos máximos, retas, arcos e segmentos sobre a superfície esférica.

ATIVIDADE 2

1) Marque um ponto sobre a esfera.
a) Quantas "retas" vocês podem traçar passando por esse ponto?
b) Na bola de isopor tracem uma dessas retas.

2) Duas retas são chamadas concorrentes quando estão num mesmo plano e possuem um ponto em comum.
a) Na superfície esférica existem retas concorrentes?
b) Se existirem, na bola de isopor, trace duas retas concorrentes.

3) Duas retas são paralelas se estão num mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum.
a) Na superfície esférica existem retas paralelas?
b) Se existirem, na bola de isopor, trace duas retas paralelas.

O objetivo desta atividade é a ruptura com a geometria Euclidiana, mostrar que não existem retas paralelas na geometria esférica. Com estas questões pretende-se verificar se os alunos percebem que, tendo como plano a superfície da esfera e como retas as circunferências máximas, a idéia de paralelismo é abandonada.

No item "a" da questão 1, espera-se que os alunos respondam infinitas retas (ou mesmo "muitas"), sem dificuldade para visualizar tal fato, tendo em vista que na Geometria Plana eles tiveram contato com o postulado "por um ponto passam infinitas retas”. Quando é solicitado (em b) que tracem uma delas, espera-se que tracem uma circunferência máxima sobre a esfera. Com esta atividade, busca-se um feedback, para confirmar se a idéia de reta sobre a esfera foi compreendida, de modo a certificar-se de que não estão pensando em circunferências menores sobre a esfera.

No item “a” da questão 2, espera-se que respondam com tranqüilidade que todas as retas se encontram (se cruzam). No item b, é solicitado que tracem duas delas de modo a verificar se estão com o conceito correto.

No item “a” da questão 3, espera-se que os alunos percebam que não existem retas paralelas, pois, sobre a esfera todas as retas irão se encontrar. É provável que tenham dificuldade em aceitar tal fato, haja vista que vai contra os conceitos já formados em relação ao paralelismo entre retas.

Ao concluírem esta atividade os alunos serão convidados a ler o texto 2 do CD (ver anexo II), onde se encontra um breve relato sobre a criação das geometrias Não-euclidianas e a institucionalização das questões anteriores, onde procura-se chamar a atenção para a não existência de retas paralelas sobre a esfera.

ATIVIDADE 3

1) Tomando dois pontos sobre a superfície esférica, como você determinaria a distância entre eles? Qual a unidade de medida que você usaria para medir essa distância?

2) Na superfície esférica que você possui, faça o esboço de duas retas (circunferências máximas).

a) Quantos são os pontos de intersecção entre duas retas? Quantos são os arcos determinados por esses pontos?
b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na superfície esférica? Quantos?
c) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura de um ângulo esférico? Você conhece algum instrumento que poderia auxiliar para obter a medida do ângulo esférico?

3) Marque, sobre a bola de isopor, 2 pontos que pertençam a um mesmo diâmetro. Qual a distância entre estes dois pontos em graus? (lembre-se, uma circunferência inteira mede 360º).

4) Na bola de isopor, coloque dois alfinetes de modo que a distância entre eles seja de 60º. Justifique.

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que sobre a superfície esférica a unidade de medida usual para determinar distâncias é o grau além do reconhecimento do ângulo esférico. Com esta atividade procura-se dar significado à medida da distância em graus para que, mais tarde, no estudo do Globo Terrestre, seja utilizada no estudo da latitude e longitude.

Na questão 1, espera-se que os alunos respondam que para determinar a distância entre os pontos utilizamos o centímetro, mas como já têm um conhecimento anterior sobre a medida da circunferência em graus, pode ocorrer que alguns respondam que podemos determinar a distância entre dois pontos em graus, como uma fração da circunferência máxima.

O ideal seria, que se utilizasse uma régua esférica, ou que se construísse uma com os alunos, mas objetivando não estender demais as atividades optou-se pela não construção da régua esférica.

No item “a” da questão 2, espera-se que respondam que são dois os pontos de intersecção e que esses pontos determinam quatro arcos. No item b, espera-se que não tenham dificuldade em visualizar os ângulos entre as retas e que cada ponto de intersecção determinam 4 ângulos, num total de 8 ângulos. No item c, espera-se que respondam que a medida angular é determinada em graus e que se pode utilizar o transferidor para determinar a medida do ângulo.

Na questão 3, espera-se que, caso os alunos não tenham respondido que as distâncias sobre a esfera são medidas em graus, com o enunciado, percebam tal fato. Espera-se também, que consigam através de uma regra de três simples, determinar a distância entre dois pontos na unidade pedida após medir com a linha ou com a fita métrica a medida da circunferência máxima da bola de isopor.

Na questão 4, espera-se que, novamente, utilizando a regra de três, eles relacionem a medida da circunferência máxima e desta forma determinem o comprimento em cm de um arco de 60 graus na bola de isopor. Outra estratégia esperada, é que ao observar que a distância entre dois pontos diametralmente opostos é de 180 graus, eles dividam este arco em 3 de mesma medida.

Ao fim desta atividade, os alunos serão convidados a efetuar a leitura do texto 3 (ver anexo III) e discutir sobre as atividades anteriores. O texto define a distância entre dois pontos sobre a superfície esférica, apresentando um exemplo, onde foi utilizada a regra de três e define ângulo esférico.

ATIVIDADE 4

1) Na superfície esférica, marque três pontos, distintos e não alinhados, A, B e C e trace os segmentos menores AB, AC e BC.

a) Descrevam a figura encontrada.
b) Que nome vocês dariam a essa figura?

2) Na superfície esférica, marque três pontos distintos e não alinhados A, B e C. Trace as retas que passam por AB, por AC e por BC. Quantos triângulos ficaram determinados pelas três circunferências máximas?

3) Marque dois pontos em uma reta (circunferência máxima), de tal forma que a circunferência fique dividida em dois arcos de mesma medida.

a) Qual a medida em graus de um ponto ao outro?
b) Trace uma reta perpendicular (ângulo de 90º) à reta que vocês encontraram. O que vocês observam?

4) Marque dois pontos, diametralmente opostos, sobre a superfície da esfera. Trace duas retas, que passam por estes pontos, de tal forma que a esfera fique dividida em quatro “partes iguais”. Encontre uma reta que seja perpendicular às retas anteriores.

a) Em quantas partes a esfera ficou dividida? Que figuras representam estas “partes”?
b) O que podemos observar em relação aos ângulos da figura?
c) Qual o comprimento (em graus) dos segmentos que formam o lado do triângulo?

O objetivo desta atividade, é que os alunos percebam a existência de triângulos esféricos e que, ao trabalharem com os pólos, construam a idéia de reta polar (ou Equador como veremos no estudo do globo).

Na questão 1, espera-se que os alunos unam dois a dois os pontos e observem que a figura encontrada é um triângulo.

Na questão 2, espera-se que observem que, ao traçarem as retas, são encontrados oito triângulos, porém pode ocorrer que os alunos ao responderem a questão 1, ao invés de traçarem segmentos, tracem as retas que passam pelos pontos dois a dois, e que com apenas uma estratégia respondam as duas questões.

Na questão 3, espera-se que percebam que dois pontos diametralmente opostos, determinam arcos com 180º cada e que, ao marcar os pontos que dividem estes arcos, em arcos de 90º, podem traçar por eles uma reta perpendicular à reta anterior. (Fig 3.1)

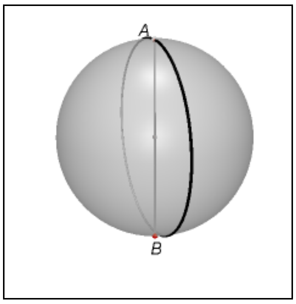


Figura 3.1

Os alunos podem observar ainda que a esfera ficará dividida em 4 partes “iguais”. (Fig 3.2)

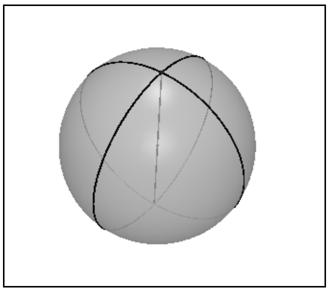


Figura 3.2

Espera-se que os alunos resolvam esta atividade sem dificuldades, caso haja necessidade, os observadores serão autorizados a interferir, não deixando de anotar tal fato.

Na questão 4, se os alunos perceberam que a esfera ficou dividida em 4 partes iguais, podem, a partir da configuração anterior, completar a atividade, traçando uma reta perpendicular às retas anteriores. Caso contrário, espera-se que tracem as retas sobre a bola de isopor, de modo a obter uma configuração como a da figura abaixo. (Fig 3.3)

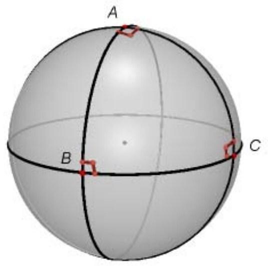


Figura 3.3

Espera-se, ainda, que os alunos resolvam as atividades sem dificuldade, haja vista que terão em mãos a bola de isopor para manipulação.

No item "a" espera-se que percebam que a esfera ficou dividida em 8 triângulos "iguais". No item "b" espera-se que observem as relações entre os ângulos do triângulo e que concluam que os mesmos medem 90º cada e; no item "c", quando questionados quanto ao comprimento dos segmentos que formam os lados do triângulo, espera-se que percebam que os ângulos e lados do triângulo medem 90 graus. O que pode causar um certo "desconforto", devido ao conhecimento anterior da geometria plana.

Será solicitado, que leiam o texto 4 (ver anexo IV) e discutam as suas respostas.

O texto 4 define triângulo esférico, reta polar e pólos da circunferência. Apresenta uma classificação dos triângulos esféricos, quanto ao número de ângulos retos e número de lados medindo 90º. O texto, ainda chama a atenção, para o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo, na geometria esférica, ultrapassa 180º.

Após a leitura e discussão do texto 4, será aplicada uma atividade, (anexo XIII) que fornecerá elementos para a institucionalização e avaliação do que foi apreendido nesta primeira etapa.

PARTE II – O GLOBO TERRESTRE

A parte II é dividida em 3 atividades, sendo que a primeira apresenta 2 questões, a segunda 5 e a terceira 5. Para o desenvolvimento das atividades 1, 2 e 3, cada dupla irá receber um Globo Terrestre. No final de cada atividade, serão socializadas as respostas, de modo a elucidar possíveis dúvidas. Somente após a socialização das respostas as duplas receberão a folha da atividade seguinte, para, desta forma, ser possível avançar com todas as duplas simultaneamente, no desenvolvimento das atividades.

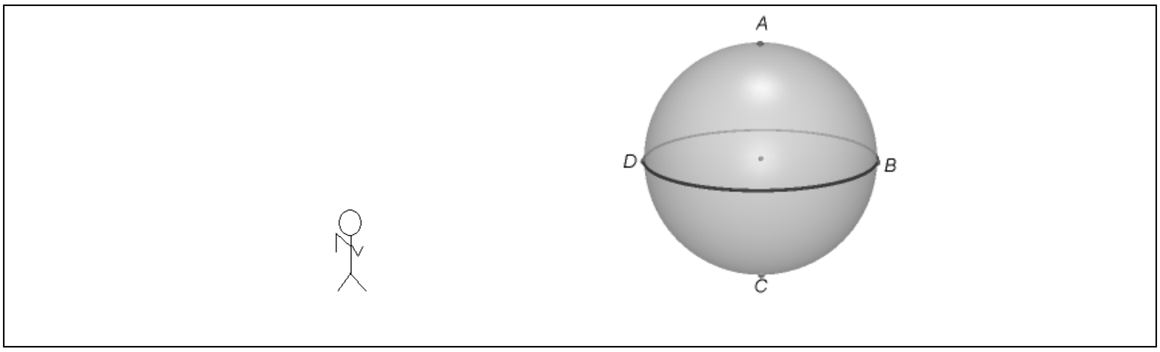
ATIVIDADE 1

1) “Podemos observar, que o dia se sucede a noite e que a noite se sucede ao dia. Vemos o Sol nascer, percorrer o céu e iluminar-nos. Mas, ao fim do dia ele desaparece no horizonte. Então, surgem as estrelas e a Lua, nascendo e desaparecendo para de novo dar lugar ao Sol.”

Como vocês justificariam esta afirmação?

2) Um Astronauta, em uma missão, olhou para o céu da Lua e viu a Terra. Ele viu que a Terra era azulada, redonda, enorme (umas 4 vezes maior do que vemos a Lua aqui da Terra) e que flutuava no espaço, tal qual vemos a Lua flutuando no espaço. Imagine que o Astronauta tivesse levado um telescópio com ele. Para quem não sabe, telescópio é um aparelho usado pelos astrônomos para ver as coisas que estão muito longe. Imagine que o astronauta tivesse olhado para a Terra com o telescópio e que ele tivesse visto 4 pessoas.
Uma estava no pólo norte (ponto A na figura abaixo). Outra estava no pólo sul (ponto C na figura abaixo). Uma terceira, um brasileiro (ponto D na figura abaixo). E a quarta, um japonês (ponto B na figura abaixo, pois o Japão fica do outro lado da Terra, em relação ao Brasil).
Imagine que a figura abaixo é um esboço do Globo Terrestre. Desenhe o boneco abaixo, sobre cada um dos pontos A, B, C e D, tal como o astronauta teria visto as quatro pessoas. (O boneco está muito magrinho e está fora de escala em relação à Terra)

Questão adaptada da V Olimpíada
Brasileira de Astronomia – V OBA – 2002



O objetivo desta atividade é verificar o conhecimento dos alunos em relação ao Globo Terrestre e ao movimento de rotação da terra.

Na questão 1, espera-se que os alunos respondam que é devido ao movimento de rotação da Terra ou simplesmente porque a terra gira.

Na questão 2, espera-se que os alunos coloquem os bonecos sobre cada ponto, de modo que os “pés” dos bonecos toquem os pontos. Acredita-se que os alunos tenham esta noção anterior.

Antes de iniciarem a próxima atividade, os alunos serão convidados a ler o texto 1 do CD (anexo V)

ATIVIDADE 2

1) Observando o Globo Terrestre, identifiquem que tipos de circunferências vocês vêem na superfície do Globo Terrestre.

2) O Globo Terrestre possui um eixo de rotação. Como se chamam os pontos, onde o eixo de rotação corta o Globo Terrestre?

3) Observem que pelos pólos do globo, passam várias circunferências máximas. Qual o nome dessas circunferências?

4) Se duas circunferências máximas, passam pelos pólos, que circunferência máxima é perpendicular a ambas? Qual o nome dado a essa circunferência?

5) Quais das circunferências são denominadas Paralelos Terrestres?

O objetivo desta atividade é relacionar os conhecimentos adquiridos na parte I, no estudo da esfera, com o Globo Terrestre. Localizar e definir pólos terrestres. Identificar e definir o Equador, os meridianos e os paralelos terrestres e observar as relações que os alunos fazem com as retas da geometria esférica (circunferências máximas), bem como os círculos menores e as distâncias medidas em graus.

Espera-se que os alunos mobilizem conhecimentos de conceitos geográficos, tais como pólos terrestres, Equador, meridianos, paralelos e alguns conceitos trabalhados na parte I desta seqüência: circunferências máximas, círculos menores, semicircunferências, arcos, distância, ângulos...

Espera-se ainda que conceituem meridiano como a circunferência que passa pelos pólos, e não uma semicircunferência, como é o conceito geográfico de meridiano, mas no momento da socialização a pesquisadora procurará discutir a idéia de meridiano e antimeridiano.

Na questão 1, espera-se que os alunos respondam que as circunferências marcadas sobre o globo, são circunferências máximas (ou retas da geometria esférica) e circunferências menores, fazendo alusão ao encontro anterior onde foram trabalhados alguns conceitos geométricos sobre a esfera.

Na questão 2, espera-se que identifiquem os pólos como pontos de intersecção do eixo de rotação com o globo e ainda que os alunos observem o fato dos pólos serem pontos diametralmente opostos.

Na questão 3, espera-se que identifiquem as circunferências que passam pelos pólos, como sendo os meridianos pois é possível que tenham em algum momento, nas aulas de geografia, explorado o tema.

Na questão 4, espera-se que identifiquem o Equador como reta perpendicular aos meridianos, lembrando que no encontro anterior, foram traçadas retas sobre a esfera e retas perpendiculares.

Na questão 5, espera-se que identifiquem os círculos menores, como paralelos terrestres. Pode acontecer que observem ainda, que os círculos que representam os paralelos, são círculos menores paralelos ao Equador.

ATIVIDADE 3

1) Localizem no Globo Terrestre os hemisférios Norte e Sul e as marcas da latitude e da longitude em graus.

2) Observando um Globo Terrestre, determinem as coordenadas geográficas de cada uma das cidades da tabela abaixo:
Não se esqueçam, é necessário informar se a latitude é Norte (N) ou Sul (S) e se a longitude é Leste (L) ou Oeste (O)

Cidade	Latitude	Longitude
São Paulo		
Maceió		
Belo Horizonte		
Roma		
Nova York		
Buenos Aires		
Londres		
Tóquio		
Cidade do México		

3) Qual a latitude e a longitude do lugar onde vocês moram?
4) Localizem no Globo Terrestre os trópicos de Câncer e Capricórnio, assim como os círculos polares Ártico e Antártico e completem a tabela anotando a latitude de cada linha.

Linha de referência	Latitude
Trópico de Câncer	
Trópico de Capricórnio	
Equador	
Círculo Polar Ártico	
Circulo Polar Antártico	

5) Se você estiver exatamente na metade da distância entre o Equador e o pólo Norte e a leste do meridiano de Greenwich, na sexta parte do comprimento em graus da linha do Equador, a que latitude e longitude você se encontrará?

Questão retirada de LUCCI, E. A.
Geografia – O homem no espaço global, Ed. Saraiva, 1999. p.305

O objetivo desta atividade é desenvolver o conceito de latitude e longitude, tendo como base a distância entre dois pontos, discutida na parte I, medida em graus.

Será trabalhada a idéia da localização de um ponto sobre o globo, por meio de suas coordenadas geográficas, sem fazer referência às coordenadas de um ponto sobre o plano cartesiano, pois em matemática, ainda não foi trabalhado este conceito.

Na questão 1, espera-se que os alunos não tenham dificuldades em localizar os dois hemisférios e as marcas das latitudes e longitudes.

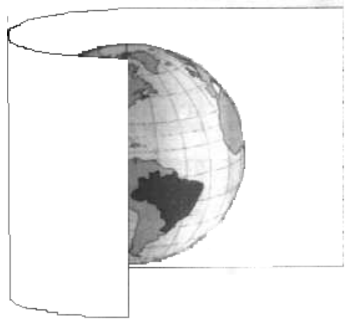
Na questão 2, espera-se que determinem as latitudes e longitudes sem grandes problemas.

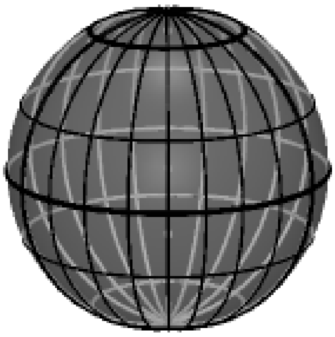
Na questão 3, bastará copiar as coordenadas do estado de São Paulo da questão anterior, espera-se que os alunos percebam isto.

Na questão 4, espera-se que localizem as linhas de referência sem dificuldade, suas latitudes e observem que os dois trópicos têm a mesma distância do Equador o que ocorre também com os dois círculos polares.

Na questão 5, espera-se que utilizem o fato de que a distância entre o Equador e os pólos é de 90º, que a latitude é de 45º e para determinar a longitude que o Equador é uma circunferência máxima, logo com 360º, então a sexta parte é de 60º, além de observarem a informação de que o ponto encontra-se a leste do meridiano de Greenwich.

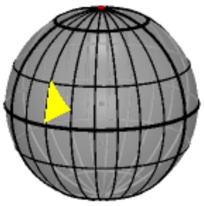
ATIVIDADE 4

1) Imagine, se colocássemos em volta da esfera uma cartolina e projetássemos, a partir do centro da esfera, as linhas que representam o Equador, os meridianos, os trópicos e os círculos polares. Como essas linhas seriam projetadas sobre a cartolina?	

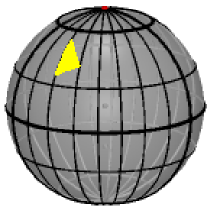


2) Como ficaria a projeção dos triângulos, que estão sobre as esferas abaixo, no plano, ao projetarmos a partir do centro da esfera sobre a cartolina?

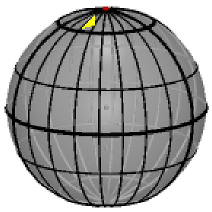
a)



b)



c)



O objetivo desta atividade, é observar se os alunos têm idéia da planificação do globo, a partir da projeção cilíndrica e das deformações que ocorrerem à medida que nos afastamos do Equador.

Para responder às questões 1 e 2 os alunos irão se valer apenas da abstração, não dispondo de material concreto e não devendo haver interferência por parte da pesquisadora ou dos observadores.

Na questão 1, espera-se que encontrem linhas verticais (representando os meridianos) e horizontais (representando o Equador, os trópicos e os círculos polares). Espera-se ainda, por terem tido acesso a mapas-múndi nas aulas de geografia, que representem as linhas horizontais retas e os meridianos curvos.

Na questão 2, se na atividade anterior os alunos tiverem encontrado linhas verticais e horizontais, espera-se que desenhem os triângulos sobre as linhas, e que em “c” o triângulo sofra deformações maiores do que em “a”.

Caso tenham imaginado, na atividade anterior, as linhas horizontais retas e os meridianos curvos, espera-se que desenhem os triângulos acompanhando as linhas de sua “planificação”, encontrando assim, triângulos menores.

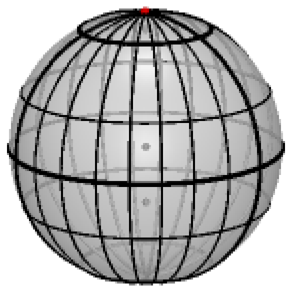
ATIVIDADE 5

1) Utilizando a esfera de arame vamos projetar a esfera sobre um cilindro de cartolina utilizando uma vela no centro.

O que vocês observaram?

Como vocês planificariam agora a esfera?

Vocês haviam imaginado, na atividade anterior, as linhas como na projeção observada na experiência?



2) Coloque sobre a esfera de arame as figuras geométricas e observe a projeção sobre o cilindro.

Registrem as suas observações.

Esta atividade, tem por objetivo, mostrar um dos modelos de projeções cartográficas, a projeção cilíndrica, e as deformações que ocorrerem à medida que nos afastamos do Equador. Para auxiliar na observação, cada dupla irá receber uma esfera de arame, uma vela, um suporte para a esfera (parte superior de uma garrafa de refrigerante PET) e uma cartolina.

Os alunos serão instruídos a colocarem a chama da vela no centro da esfera de arame e com a cartolina, em forma de cilindro, observar a projeção das linhas sobre a cartolina.

Na questão 1, espera-se que observem as linhas verticais e horizontais e caso não tenham observado tal fato na atividade 1, possam, desta forma, adquirir este conceito.

Para responder a questão 2, os alunos receberão triângulos, quadrados e retângulos em EVA. Serão orientados a colocá-los sobre a esfera, partindo do Equador em direção aos pólos e a observarem o que acontece.

Espera-se que observem, que quanto mais afastadas da linha que representa o Equador, maior a deformação das figuras.

Após concluírem esta atividade, os alunos serão convidados a ler o texto 2 do CD (ver anexo VI).

O texto fala sobre as projeções cartográficas e apresenta as projeções cilíndrica, cônica e azimutal.

Parte III – O MAPA

A parte III é dividida em 3 atividades sendo que a primeira e a segunda contêm seis questões cada e a terceira duas.

Para o desenvolvimento das atividades desta etapa cada dupla receberá um Atlas Geográfico Escolar (IBGE, 2002) e uma régua.

ATIVIDADE 1

1) No Atlas (pág 38), observem o mapa-múndi, localizem o Equador, o Trópico de Capricórnio, o Trópico de Câncer, os círculos polares: Ártico e Antártico.

2) Localize no Atlas um país cortado por cada linha de referência da tabela:

Linha de Referência	**País**
Círculo Polar Ártico	
Trópico de Câncer	
Equador	
Trópico de Capricórnio	

No País escolhido na tabela acima, localize uma cidade próxima à linha de referencia e indique sua latitude (N ou S) e longitude (L ou O) utilizando o mapa político por continente.

Linha de Referência	País	Cidade	Longitude	Latitude
Círculo Polar Ártico				
Trópico de Câncer				
Equador				
Trópico de Capricórnio				

3) Indiquem três países localizados no hemisfério Norte.

4) Indiquem três países localizados no hemisfério Sul.

5) O Brasil está localizado em qual hemisfério?

6) Observando o mapa político do Brasil, pág 97, localize o estado que possui as latitudes e longitudes indicadas abaixo:

2º N e 60º O ______________________
0º e 52º O ______________________
9º S e 70º O ______________________
10º S e 36º O ______________________
3º S e 38º O ______________________
15º S e 49º O ______________________
5º S e 35º O ______________________
25º S e 51º O ______________________
27º S e 49º O ______________________
23º S e 46º O ______________________

O objetivo desta atividade, é utilizar os conceitos de latitude e longitude vistos na parte II, quando se foi trabalhado com o Globo Terrestre, porém agora as linhas de referência e as coordenadas geográficas serão vistas no mapa, com o auxílio do Atlas.

No item 1, espera-se que os alunos localizem, sem problemas, as linhas de referência. Ao propor esta questão pensou-se em buscar uma forma dos alunos se familiarizarem com o novo elemento, que é o mapa, e que será utilizado em todas as atividades que seguem.

Os alunos poderão escolher dentre os países cortados pelas linhas de referência, o que mais lhes agradar, cada dupla deverá buscar o “mapa ideal” para localizar a cidade, haja vista que, no mapa-múndi só encontramos referências aos países.

Espera-se que não tenham dificuldade em localizar e escolher a cidade, como também em localizar as latitudes e longitudes sobre o mapa.

Os itens 2, 3 e 4 buscam uma exploração do mapa bem como observar se está claro o conceito de Norte e Sul.

No item 5, apresentam-se algumas coordenadas para que localizem o estado do Brasil correspondente. Com esta atividade pretende-se fixar a idéia de latitude e longitude, partindo das coordenadas, o que não havia sido feito anteriormente, pois as atividades propostas, pediam determinação da latitude e longitude de um lugar e não o inverso.

Espera-se que os alunos não apresentem dificuldade para localizar os estados.

Após a conclusão desta atividade, serão socializadas as respostas para possíveis correções e discussões cabíveis.

ATIVIDADE 2

01) Que horas e dia serão no estado de Minas Gerais localizado a 45º O, quando no Vietnã localizado a 105º L forem 22 horas do dia 26/04?

02) Que horas e dia serão na cidade de Anadir localizada a 180º L, quando na Groelândia a 30º L forem 18 horas do dia 26/04 ?

03) A cidade de São Paulo está situada no fuso horário 45º O. Quando em São Paulo forem 13 horas do dia 28/04 que horas e dia serão em Lisboa localizada a 8º O?

04) Um avião saiu de Tóquio 135º L às 20 horas do dia 29/04, com destino a Fernando de Noronha 30º O. A viagem durou 07 horas. Pergunta-se:

A que horas e dia o avião pousou em Fernando de Noronha?

05) Um avião saiu de Honolulu, no Havaí 150º O às 22 horas do dia 28/04, com destino a Santiago do Chile 60º O. A viagem durou 11 horas. Pergunta-se:

A que horas e dia o avião pousou em Santiago ?

06) Um dos meios de transporte mais rápidos de nossa época, o avião supersônico Concorde, é uma maravilha tecnológica que já começa a ultrapassar a compreensão humana. No interior do avião, os passageiros nem notam o estampido que se produz quando a avião atinge a velocidade do som.

Uma velocidade duas vezes superior a do som confunde facilmente a própria noção do tempo. O horário local de chegada em Nova Iorque é o mesmo da partida de Londres.

Como você explica o fato de o horário de chegada em Nova Iorque ser o mesmo da partida de Londres?

Questão retirada de LUCCI, E. A.
Geografia – O homem no espaço global, Ed. Saraiva, 1999. p.305

Antes de iniciar esta atividade os alunos serão convidados a ler o texto 1 do CD (anexo VII) que trata do fuso-horário e apresenta alguns exemplos, os quais serão utilizados nas questões seguintes.

Com esta atividade, procura-se mostrar, mais uma aplicação da matemática no estudo da geografia e verificar se a seqüência, até este momento, possibilitou a aprendizagem de conceitos geográficos nela embutidos. Objetiva-se também criar condições para o desenvolvimento de conceitos ligados à idéia de fuso horário.

Para a resolução desta atividade, os alunos poderão utilizar o Atlas (IBGE,2002); na página 40 é apresentado um mapa-múndi com todos os fusos e ainda poderão contar com o auxílio do texto. É possível que, em algum momento de sua escolaridade, os professores de geografia tenham explorado este tema. A pesquisadora e os observadores não deverão interferir. Caso haja necessidade de intervenção, será solicitado às duplas que retornem ao texto, caso não o façam por si só.

Na questão 1, espera-se que encontrem 150º o que equivale a 10 fusos (10 horas) de diferença e que respondam que em Minas Gerais serão 12 horas do mesmo dia. O texto apresenta que, para hemisférios diferentes (L e O) deve-se somar as latitudes e que o resultado obtido deverá ser divido por 15 e ainda que 15º equivale a uma hora.

Na questão 2, espera-se que encontrem 150º, o que equivale a 10 fusos (10 horas) de diferença. Se na Groenlândia for 18 h, deverá ser 28 h em Anadir, o que não acontece, logo serão 4 horas do dia seguinte (27/04).

O texto apresenta que, para hemisférios iguais (L e L ou O e O) deve-se subtrair as latitudes. Espera-se, ainda, que os alunos observem o fato de terem encontrado 28 horas, o que representa mais do que um dia e percebam a necessidade de mudar a data do calendário para mais um.

Na questão 3, espera-se que encontrem 37 graus, o que equivale a dois fusos e meio (aproximadamente), mas como não há diferença no mesmo fuso, deverão encontrar como resposta 3 horas de diferença e respondam que, em Lisboa, serão 16 horas do mesmo dia.

Acredita-se, que tenham problemas ao encontrar um número quebrado, mas que, observando o mapa com os fusos, o problema seja sanado.

Caso não tenham concluído que dois fusos e meio estão localizados no fuso de 3 horas, a pesquisadora poderá solicitar que voltem ao texto. O texto traz a seguinte informação: "Caso a divisão não seja exata, verifica-se o intervalo onde está localizado o ponto e verificam-se as horas". Se a dúvida persistir e não tenham tido a idéia de observar o mapa, a pesquisadora poderá sugerir o uso do mapa.

Na questão 4, espera-se que encontrem 165º, o que equivale a 11 horas de diferença. No momento em que o avião saiu de Tóquio em Fernando de Noronha eram 9 horas. Depois de 7 horas de vôo, o pouso aconteceu às 18 horas do mesmo dia.

Espera-se que os alunos concluam que, além da diferença horária entre Tóquio e Fernando de Noronha, precisam somar o tempo de vôo ao horário de Fernando de Noronha, no momento da partida. Caso tenham dificuldade será necessária a intervenção da pesquisadora, com perguntas que direcionem a linha de raciocínio dos alunos para este fato, caso contrário eles terão a mesma dificuldade na próxima questão, que envolve a mesma idéia, havendo como diferença básica, o fato de encontrarem como resposta um horário superior a 24 horas, ou seja, a necessidade de mudança do calendário.

Na questão 5, espera-se que encontrem 90º, o que equivale a 6 horas de diferença. No momento em que o avião saiu de Honolulu, eram 16 horas em Santiago. Após 11 horas de vôo, o avião pousou às 27 horas (como não existem 27 horas) pousou às 3 horas do dia seguinte (29/04).

Como já dissemos na questão anterior, a idéia envolvida nas duas questões é a mesma, acredita-se que, caso os alunos tenham compreendido a questão anterior, não terão dificuldade para responder a esta questão.

Na questão 6, espera-se que respondam que a viagem demora, exatamente, o mesmo tempo que é a diferença horária das duas cidades. Pode acontecer que busquem a medida da longitude das duas cidades para verificarem o tempo de viagem.

Esta questão irá permitir que seja verificado se houve compreensão em relação ao estudo do fuso horário.

ATIVIDADE 3

1) Usando o mapa político da Região Sudeste (Pág 167 do Atlas), qual é a distância em linha reta entre as cidades A e B da tabela?

Cidade A	Cidade B	Distância em cm (no mapa)	Distancia em km (aprox.)
São Paulo	Belo Horizonte		
São Paulo	Jaú		
Pres. Venceslau	Sorocaba		
Rio de Janeiro	Vitória		

2) No Mapa político do Brasil (pág 97 do Atlas), escolham três capitais e determinem a distância, em linha reta, até a capital do Brasil.

Capital	Distância em cm (no mapa)	Distancia em km (aprox.)

Antes de iniciar a resolução das questões desta atividade, os alunos serão convidados a ler o texto 2 do CD (ver anexo VIII). O texto apresenta a escala do mapa e suas diferentes representações, bem como, a utilização de uma régua para determinar a distância em centímetros sobre o mapa e a conversão para a medida real.

Com esta atividade procuramos mais uma vez, mostrar o uso de conceitos matemáticos para a resolução de atividades inerentes à geografia.

Na questão 1, quanto à distância em cm no mapa, espera-se que encontrem aproximadamente:

São Paulo – Belo Horizonte: 7,3 cm ; São Paulo – Jaú: 3,5 cm; Presidente Venceslau – Sorocaba: 7 cm; Rio de Janeiro – Vitória: 6,1 cm.

Quanto à distância em Km, espera-se que tomem cada centímetro correspondendo a 70 km, como está indicado na escala do mapa, e façam a multiplicação correta. As respostas serão respectivamente: 511 km, 245 km, 490 km e 427 km (caso tenham obtido outras medidas, por erro de medição, serão desconsiderados os valores, será observado se o raciocínio está correto).

Pode acontecer de não prestarem atenção à escala do mapa e fixarem a sua atenção para a escala apresentada no mapa do texto, que é de 1:10.000.000, ou seja cada 1 cm corresponde a 100 km.

Na questão 2, caberá à dupla decidir qual capital escolher para determinar a distância até o Distrito Federal. Espera-se que não tenham dificuldade para determinar as distâncias em centímetros no mapa e para calcular a distância real aproximada.

O mapa sugerido para a atividade anterior, trazia a escala de 1:7.000.000, ou seja, cada cm corresponde a 70 km. O mapa sugerido para esta atividade ,traz uma escala de 1:25.000.000, ou seja , cada cm corresponde a 250 km.

Pode acontecer, que os alunos tenham interesse em verificar as distâncias que determinaram entre São Paulo e Belo Horizonte e entre Vitória e RJ no mapa anterior, agora, também neste mapa, de escala menor.

Ao concluírem as atividades, as respostas das duplas serão socializadas e dada por encerrada a seqüência, com a esperança de que tenham sido abertas portas e dado embasamento para o desenvolvimento de projetos, que propiciem um trabalho integrando as duas disciplinas, matemática e geografia.

Capítulo 4

Análise a Posteriori

“A Engenharia Didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em <<realizações didáticas>> na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino.” (ARTIGUE, 1988, p.196).

Após a seqüência de encontros elaborados a partir de um embasamento teórico e da aplicação das atividades, serão apresentadas as ponderações sobre o que foi construído em sala de aula.

A análise a posteriori, agora permite estabelecer a ponte entre os fatores observados e o que foi a priori definido, visando à apreensão de conceitos da geometria da esfera e os conteúdos de geografia estudados.

Nesta análise, serão colocadas entre parênteses as letras correspondentes a cada dupla (A), (B), (C), (D) e (F) . As duplas E e G foram excluídas da análise por não terem participado dos três encontros.

4.1. PARTE I – A ESFERA

ATIVIDADE 1

Iniciou-se a seqüência de ensino com a seguinte pergunta:

1. Se resolvêssemos “fatiar” a esfera, que figuras encontraríamos?

A dupla (A) registrou: “Teríamos vários círculos menores. Encontraríamos círculos menores, pois cortaríamos a esfera em fatias e não no centro”.

As duplas (B) e (C): “Encontraríamos círculos”.

A dupla (D): “Se fatiássemos em vários pedaços paralelos, encontraríamos círculos e se fatiássemos de qualquer forma, encontraríamos gomos”.

A dupla (F): “Metade de uma esfera”.

Os observadores fizeram o seguinte registro: A dupla (A) utilizou a laranja e, durante a discussão da dupla, disseram que, se cortassem no meio, teriam duas meias esferas, mas não registraram esta conclusão, e a dupla (B) conseguiu responder sem dificuldade, esta só se deu ao dar nome à figura, não sabiam se poderiam nomear de círculos.

Observou-se nesta atividade a importância do uso do material concreto para manipulação. Após muita discussão, o fato de poucos terem chegado à resposta esperada não foi fator de preocupação, afinal estava presente a busca de relações a partir de uma experiência concreta. Lembrando Vygotsky:

> O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras, e a definição verbal será, na maioria dos casos, muito mais limitada do que seria de esperar a partir do modo como utilizou o conceito. (VYGOTSKY, 1991, p.69)

Esperava-se que os alunos conseguissem visualizar os círculos que se formariam ao fatiar a esfera, o que aconteceu ao fatiarem a laranja, durante a discussão da dupla (B) pudemos perceber que os alunos “enxergavam” os diversos círculos que se formavam, um integrante da dupla afirmou:

“Aqui, se cortarmos, teremos círculos que irão aumentar à medida que formos subindo, depois começa a diminuir de novo”.

A idéia de obter-se círculos de diversos tamanhos ao fatiar a esfera surgiu durante o debate dos alunos, o que acredita-se ter sido o primeiro passo para a formação de conceitos sobre a geometria da esfera.

2. O que seria uma reta na superfície da esfera? (coloque 2 pontos representados por alfinetes e trace a "reta" com a linha)

A dupla (A) apagou sua resposta após a leitura do texto e redigiu outra. A observadora anotou que só chegaram à conclusão de que a reta seria uma circunferência máxima após a leitura do texto e que antes haviam discutido a possibilidade de reta ser o que mais tarde vieram a concluir ser um segmento de reta.

Pediu-se então aos alunos que deixassem registradas as conclusões e que não fizessem alterações após a leitura dos textos, mesmo quando julgassem que a resposta dada não fosse a correta.

As duplas (B) e (C) fizeram os seus registros com figuras sendo que a dupla (B) traçou um segmento de reta no papel e a dupla (C) desenhou uma circunferência e traçou uma linha unindo dois pontos como na figura ao lado (Fig. 4.1).

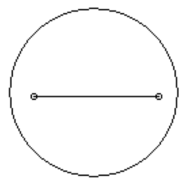


Figura 4.1

Os observadores das duplas (A) e (B) registraram que os alunos visualizaram segmentos.

A dupla (D) respondeu "Seria uma forma de dividir a esfera em partes, se imaginássemos uma reta contínua"

A dupla (F) "Seria uma esfera sendo dividida ao meio por uma linha"

Observou-se que todas as duplas, enquanto manipulavam a bola de isopor, traçavam as retas corretamente, mas não conseguiram definir o que seria uma reta por escrito, talvez por não concordarem que uma curva, ou circunferência, pudesse vir a ser chamada de reta.

As fotos (resgatadas da filmagem da atividade) mostram que os alunos traçaram a reta, apesar de não conseguirem defini-la, isto pode ser observado em (C) (Fig. 4.2) e (F) (Fig. 4.3) , com a reta traçada sobre a esfera. Observa-se também que (F) dá várias voltas com a linha por sobre a esfera, passando sempre pelos dois pontos.

Figura 4.2

Figura 4.3

As fotos abaixo mostram dois momentos da dupla (D), ao fixarem os alfinetes, a tentativa de traçarem uma reta (fig 4.4) e a reta traçada (fig. 4.5).

Figura 4.4

Figura 4.5

Após o desenvolvimento da atividade 1, os alunos foram convidados a efetuar a leitura do texto 1 do CD (anexo I). O texto traz a definição de: círculos máximos e círculos menores; reta, como sendo a circunferência máxima (ou geodésica) e segmento de reta.

Com a apresentação das definições contidas no texto procurou-se uma institucionalização das atividades anteriores, buscando-se uma forma de conceituação dos novos objetos sobre a esfera.

Antes de iniciar a atividade 2 os alunos encontraram a seguinte frase para ser completada:

“Então, podemos definir reta sobre a esfera como ....”

Esperava-se que respondessem “Então, podemos definir reta sobre a esfera como circunferência máxima”.

Nenhuma dupla, aparentemente teve dificuldade para completar a frase. Acredita-se que a idéia de reta tenha ficado clara após a leitura do texto.

ATIVIDADE 2

1. Marque um ponto sobre a esfera.
a) Quantas “retas” você pode traçar passando por esse ponto?
b) Na bola de isopor trace uma dessas retas.

Apesar da atividade não sugerir que traçassem várias retas sobre a esfera, ao tentar responder o item “a”, as duplas traçaram várias retas por um ponto. As fotos nos mostram dois exemplos disto (Fig 4.6) e (Fig. 4.7):

Figura 4.6.

Figura 4.7.

As duplas (A), (C) e (D) responderam infinitas retas, mas, segundo relatório do observador, a dupla (A), antes de escrever esta resposta, pensou em traçar retas até que a esfera estivesse totalmente coberta, a discussão da dupla permitiu que concluíssem que eram infinitas retas.

A dupla (B) respondeu "muitas retas", mas a observadora fez o seguinte comentário "utilizaram segmentos na esfera para mostrar as infinitas retas. Não conseguiram diferenciar reta de segmento de reta". Ao observarmos o desenho que fizeram para o item "b" (Fig. 4.8), fica bastante claro que a reta, para eles, ainda é um segmento de reta.

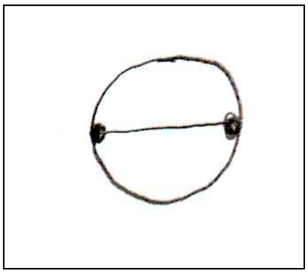


Figura 4.8

A dupla (F) respondeu: "Na bola de isopor, podemos traçar até a linha acabar". Quando lhes foi perguntado: "E se a linha não acabar nunca?". Responderam: "Então até cobrir totalmente a bola de isopor".

As figuras abaixo representam os registros das duplas (A) (Fig. 4.9) , (C) (Fig. 4.10) e (D) (Fig. 4.11).

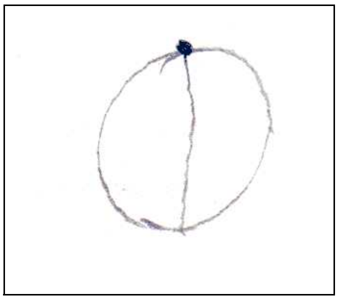


Figura 4.9

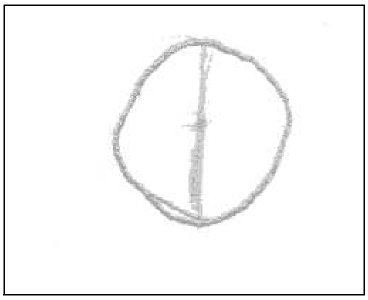


Figura 4.10

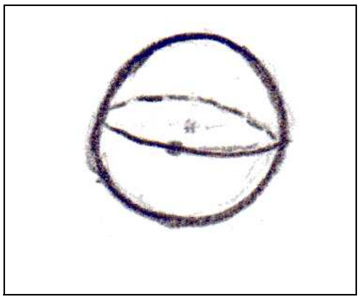


Figura 4.11

Percebe-se que as duplas (A), (C) e (D) imaginaram a reta como uma circunferência máxima, porém as duplas (A) e (C) não conseguiram desenhar o que viam em três dimensões, ao contrário da dupla (D).

Observou-se na discussão das duplas que, a partir do momento em que mais de uma hipótese pôde ser admitida, o debate entre os alunos tornou-se inevitável e teve como conseqüência a modificação ou a eliminação de certas interpretações, o que ficou evidente num trecho da discussão da dupla (A):

(...) “depois de colocar o alfinete, podemos passar a linha até cobrir a bola toda”.

“Mas, no plano, se começarmos a traçar retas, vamos ter infinitas retas, na bola não é a mesma coisa?”.

“Então, acho que a resposta vai ser infinitas retas, também”.

Os alunos da dupla discutiram, analisaram, testaram e utilizaram conceitos anteriores para responder à questão apresentada, concluindo que sobre uma esfera pode-se traçar infinitas retas.

2. Duas retas são chamadas concorrentes quando estão num mesmo plano e possuem um ponto em comum.

a) Na superfície esférica existem retas concorrentes?

b) Se existirem, na bola de isopor, tracem duas retas concorrentes.

Todas as duplas, com exceção de (A), responderam apenas “sim”. (A) escreveu “Sim. Porque todas se encontram num mesmo ponto e com isso elas acabam se tornando retas concorrentes”.

Como o enunciado trazia a definição de retas concorrentes, nenhuma dupla, aparentemente, teve dificuldade em responder. Não houve questionamento sobre o “plano”, parece que para os alunos a idéia de ter a superfície esférica como um plano não se tornou um problema.

Ao traçarem as retas concorrentes sobre a esfera, pedidas em “b”, observou-se que os alunos possuíam o conceito euclidiano de retas concorrentes e o utilizaram com naturalidade em uma superfície esférica, sem que houvesse conflito entre elas, porém percebe-se a dificuldade de algumas duplas em registrarem sua conclusão, seguem os registros das duplas (A) (Fig. 4.12), (B) (Fig. 4.13), (C) (fig. 4.14) e E (Fig. 4.15):

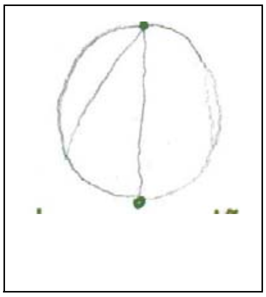


Figura 4.12

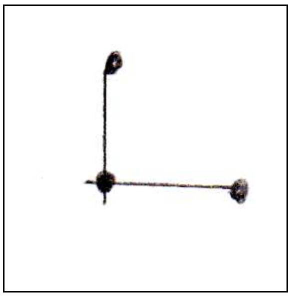


Figura 4.13

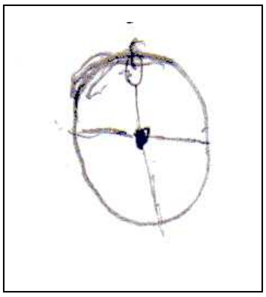


Figura 4.14

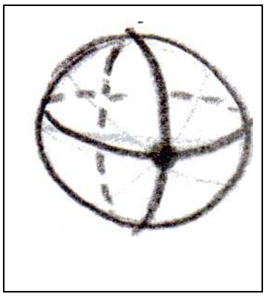


Figura 4.15

As duplas (A), (C) e (D) em seus registros mostram que a idéia de reta sobre a esfera está clara, faltando para as duplas (A) e (B), como no item anterior, a visão do desenho em três dimensões. A dupla (B) continua tratando a reta como segmentos.

Ao detectar a "falha" conceitual da dupla (B), resolveu-se aguardar a conclusão da atividade 2 para então discutir com (B) alguns pontos, de modo a tentar mostrar que uma reta é a "volta toda", não apenas a linha entre dois pontos. Foi solicitado ao observador que ficasse atento para este fato, (a comunicação entre a pesquisadora e o observador foi através de escrita, de modo a não chamar a atenção de (B)).

3. Duas retas são paralelas se estão num mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum.

a) Na superfície esférica existem retas paralelas?

b) Se existirem, na bola de isopor, tracem duas retas paralelas.

Esperava-se que os alunos "enxergassem" que não existe paralelismo sobre a esfera, porém, mesmo os que achavam que não existem retas paralelas, demonstraram que a idéia de retas paralelas não existia para um ponto, mas, tendo um segundo ponto, seria possível traçar retas paralelas.

A dupla (A) respondeu: “Não. Porque numa superfície esférica elas sempre se encontram em algum ponto” e colocou como observação “Só existiriam retas paralelas se tivesse na superfície esférica dois pontos”

A dupla (B) respondeu “Não” e, pelo comentário do observador, concluiu-se que, para esta dupla, não havia ficado dúvidas.

A dupla (C) respondeu “sim” e apresentou a seguinte figura: (Fig 4.16)

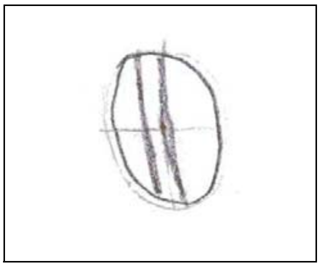


Figura 4.16

A dupla (D) respondeu “Sim, se houverem 2 pontos” e registrou (Fig. 4.17):

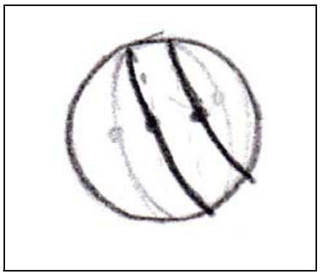


Figura 4.17

A dupla (F) respondeu “Não” e não deixou mais nenhum registro.

Esperava-se que, com a leitura do texto, pudessem, por si só, perceber a falta de paralelismo, porém, na avaliação diagnóstica (anexo XII), que foi aplicada no início do segundo encontro, uma das frases onde se pedia que verificassem se eram verdadeiras ou falsas era a seguinte:

“É possível traçar retas paralelas sobre a esfera.”

Verificou-se que a dupla (A), apesar de julgar a frase “falsa”, manteve o conceito de que existem retas paralelas sobre a esfera, caso tenha dois pontos. A dupla (A) escreveu: “Só podemos traçar retas paralelas sobre a esfera se tivermos dois pontos”

Como o momento era para socialização das respostas, foi pedido que a dupla (A), utilizando a bola de isopor, marcasse dois pontos sobre a esfera e traçasse então, duas retas paralelas.

Com a bola de isopor, a linha e os alfinetes em mãos, colocaram dois pontos e tentaram traçar as retas. Neste momento um dos elementos da dupla disse: “Só podemos traçar uma reta e um círculo paralelo, mas não vai ser reta”.

Ao serem questionados, parece que ficou clara, a partir de então, a idéia de que reta sobre a esfera é a circunferência máxima e de que não existem retas paralelas sobre a esfera. Após a discussão houve a institucionalização do conceito de reta, na qual estabeleceu-se que:

“Na geometria esférica, as retas são circunferências máximas e duas circunferências máximas sempre se interceptam em dois pontos, então, elas podem ser chamadas de concorrentes. Por conseqüência, podemos dizer que na geometria esférica não existem retas paralelas.”

Tendo-se em mente que um conceito envolve várias situações e, tendo em vista que o objeto em estudo era novidade para os alunos a qual envolvia uma ruptura com o que, para eles, era uma verdade inquestionável, a existência de paralelismo, acredita-se que há um longo percurso entre a aquisição do conceito de reta sobre a esfera, como sendo a circunferência máxima, e a compreensão da falta de paralelismo nesta geometria.

ATIVIDADE 3

1. Tomando dois pontos sobre a superfície esférica, como você determinaria a distância entre eles? Qual a unidade de medida que você usaria para medir essa distância?

A dupla (A) pensou em utilizar o grau para medir a distância entre dois pontos.

A dupla (B) afirmou: "Usando a fita métrica, a unidade é o centímetro".

A dupla (C) afirmou: "Centímetros. Não é grau, porque ele não é para medir distância externa e sim ângulos e espaço interno".

Percebe-se que a dupla C "enxergou" o grau como unidade de medida, mas pelo conhecimento anterior de geometria, não aceitaram tal fato.

A dupla (D) : "traçando uma reta entre pontos e depois medindo essa reta. No nosso caso usamos o centímetro".

A dupla (F) leu o texto antes de resolver esta atividade, o que comprometeu as respostas.

Acreditava-se que os alunos tentariam inicialmente utilizar a régua centimetrada e, verificando a impossibilidade de medir com ela, buscassem os outros instrumentos e, finalmente, concluíssem ser a fita métrica o mais adequado, para medir a distância entre os dois pontos em uma unidade de comprimento.

Para resolver esta atividade seriam mobilizados os conhecimentos da geometria euclidiana acerca de unidades de medidas de comprimento, de arco de circunferência e comprimento de circunferência.

Provavelmente as dificuldades surgidas seriam relacionadas com a unidade de medida adequada (o grau) para medir a distância entre dois pontos, o que surgiria como elemento novo.

Percebeu-se na discussão das duplas que o grau aparecia como uma possível unidade, mas, com exceção da dupla (A), os alunos não aceitavam esta hipótese o que, aparentemente, após a leitura do texto (anexo III) deixou de ser um entrave.

2. Na superfície esférica que você possui, faça o esboço de duas retas (circunferências máximas).

a) Quantos são os pontos de intersecção entre duas retas? Quantos são os arcos determinados por esses pontos?

b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na superfície esférica? Quantos?

c) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura de um ângulo esférico? Você conhece algum instrumento que poderia auxiliar para obter a medida do ângulo esférico?

As duplas precisaram do auxilio da pesquisadora para traçar as retas.

No item a todos responderam 2 pontos e quatro arcos.

A dupla (A) não apresentou dificuldade já as duplas (B) e (C) após discussão chegaram à resposta. Pela figura apresentada pela dupla (C), percebe-se que confundiram arcos com ângulos. (Fig 4.18)

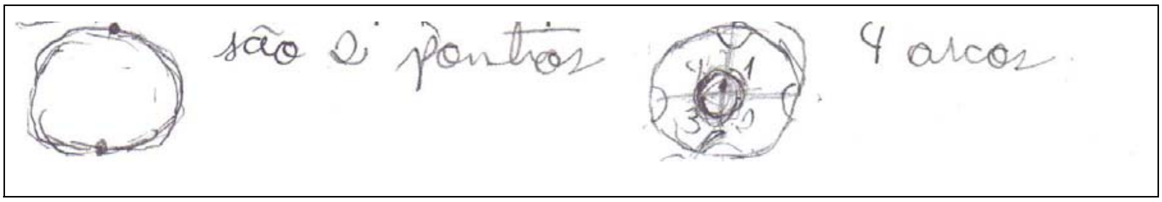


Figura 4.18

No item b, as duplas (A), (B) e (D) responderam 8 ângulos, sendo que a dupla (A) abriu uma discussão antes de concluir, pois um dos alunos da dupla se fixou em um ponto apenas.

A dupla (F) conseguiu “enxergar” os 8 ângulos, mas só após alguns questionamentos feitos pela professora pesquisadora.

A dupla (C), apresentou a seguinte resposta (Fig. 4.19):

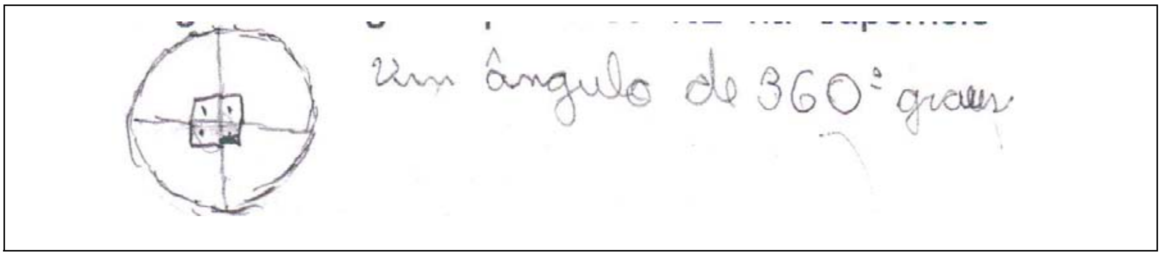


Figura 4.19

Percebe-se que observaram que a cada ponto de encontro, tem-se 4 ângulos. Pela configuração apresentada as retas traçadas formam 4 ângulos de 90º (um caso particular), porém não registraram se “enxergaram” 8 ângulos.

Esperava-se que o termo “ângulo esférico” chamasse a atenção dos alunos, por ser um termo novo, o que não ocorreu. Todos acharam que o instrumento ideal seria o transferidor plano e não foi registrado nenhum tipo de discussão em relação a isto. Com o transferidor plano em mãos, os alunos conseguiram determinar medidas aproximadas da abertura do ângulo, o que para eles foi suficiente. (Fig. 4.20)

Figura 4.20

Durante a discussão da atividade notou-se que o conceito de ângulo esférico foi entendido a partir da idéia de ângulo plano. A dupla (A) afirmou que “O ângulo esférico é a abertura entre dois arcos” e ainda “Para medir a abertura, basta colocar o transferidor e projetar as marcas das medidas sobre as linhas da bola".

Todas as duplas concordaram que a medida ideal para determinar a medida do ângulo esférico é o grau.

Concluiu-se que se pode definir ângulo esférico como uma figura formada por dois arcos de circunferência máxima (ou retas) e que duas retas determinam dois pontos de intersecção, os quais determinam quatro ângulos.

Mais uma vez, pode-se observar que os alunos mobilizavam conceitos anteriores para as discussões em torno de uma nova situação.

3. Marque, sobre a bola de isopor, 2 pontos que pertençam a um mesmo diâmetro. Qual a distância entre estes dois pontos em graus? (lembre-se, uma circunferência inteira mede 360º).

Para a resolução desta atividade foi necessária a intervenção da pesquisadora. Os alunos não sabiam o que seria um diâmetro na esfera. Abriu-se então uma discussão sobre o que seria o diâmetro de uma circunferência, de modo que as duplas conseguiram continuar a desenvolver a atividade.

Após conseguirem colocar os pontos, todas as duplas responderam que a distância entre os dois pontos era de 180º. As duplas (A) e (D) justificaram relacionando com o comprimento de uma circunferência, que é 360º e a dupla (C) apresentou a seguinte resposta (Fig. 4.21):

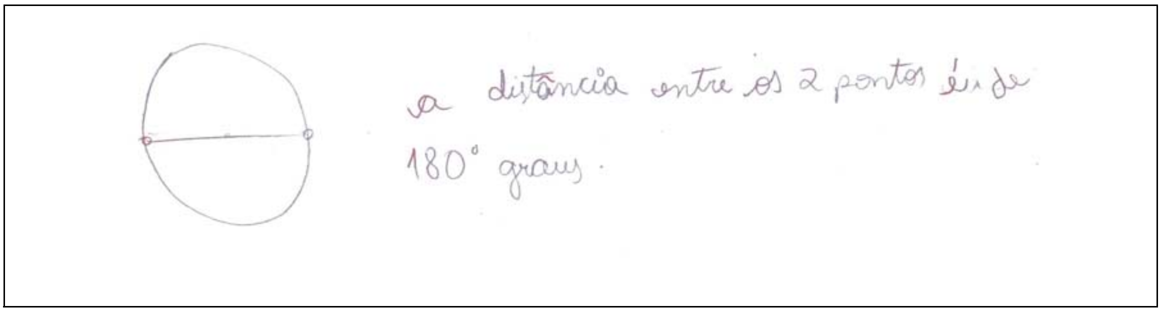


Figura 4.21

Na avaliação diagnóstica (anexo XII), que foi aplicada no início do segundo encontro, a atividade 2 pedia que marcassem verdadeiro (V) ou falso (F) para algumas afirmações e, caso a afirmação fosse falsa, reescrevessem a frase de modo a torná-la verdadeira.

A sétima frase era a seguinte:

"Dados dois pontos A e B sobre uma circunferência máxima, diametralmente opostos, a distancia entre eles é de 90 graus"

Esperava-se que respondessem que a afirmação era falsa.

As duplas (A), (B) e (D) responderam corretamente e souberam corrigir a frase. A dupla (F) apenas marcou que a afirmação era falsa, não reescrevendo a frase.

A dupla (C) marcou que a afirmação é verdadeira. No relatório do observador encontrou-se a seguinte anotação: "Um dos alunos acreditava ser falsa a alternativa, entretanto aceitou a outra resposta dada pelo aluno".

Durante a socialização das respostas, pareceu terem sido esclarecidas possíveis dúvidas a respeito desta questão.

4. Na bola de isopor, coloque dois alfinetes de modo que a distância entre eles seja de 60º. Justifique.

Uma das estratégias esperadas era que utilizassem a regra de três.

A dupla (B) "primeiro medimos a distância de 180º. Depois medimos com a fita métrica e vimos que dava 15 cm. Então dividimos por 3, pois 60º é a terça parte de 180º, e deu 5 cm., e então, colocamos o alfinete onde dava 5 cm".

A observadora fez o seguinte registro: "inicialmente pensaram em dividir a distância de 180º em três, pois 180º : 3 = 60; abandonaram a idéia, pois lembraram da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e tentaram construir um triângulo na esfera; perceberam que não conseguiriam obter um triângulo eqüilátero, pois não sabiam como medir os ângulos internos; voltaram para a idéia inicial, mediram com a fita métrica a distância entre os alfinetes e dividiram por 3"

A dupla (C) registrou o seguinte, acompanhado da figura abaixo (Fig 4.22): "Nós rachamos a cabeça, mas chegamos à resposta. Nós sabemos que metade da esfera é 180º e nós precisaríamos chegar ao ângulo de 60º, aí, nós fizemos 3 vezes 60º que deu 180º, chegando à resposta"

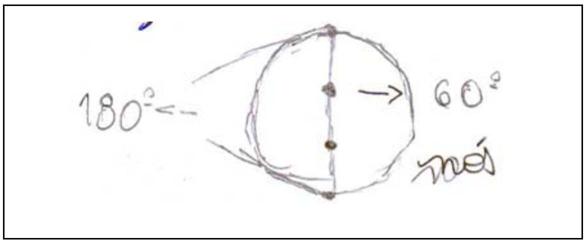


Figura 4.22

A dupla (A) deu a seguinte resposta:

"1º nós colocamos 90º, para a partir disto chegar aos 60º".

2º calculamos o ângulo de 120º para descobrirmos o de 60º (que é a metade)".

A observadora da dupla (A) fez o seguinte registro: "dividiram a circunferência máxima em duas partes iguais, e a seguir, dividiram um dos lados em três partes iguais e somaram uma parte à outra metade. A seguir dividiram o resultado por dois, obtendo o ângulo de 60º. Houve muita discussão"

A dupla (D) registrou: Usando os dois pontos que pertenciam a um mesmo diâmetro, com uma distância de 180º e dividindo esse espaço em três partes iguais, pois 1/3 de 180º é 60º.

Ao buscarem elementos para resolver esta questão, as várias tentativas e formas de encaminhamento trazem a idéia de esquema, como uma organização invariante, defendida por Vergnaud. Percebe-se que os alunos se utilizaram de invariantes operatórios na busca de elementos para resolver o problema.

Segundo Vergnaud:

> Um esquema não é um estereotipo e sim uma função temporalizada de argumentos, que permitem gerar diferentes seqüências de ações e tomadas de informação em função dos valores das variáveis da situação. (Vergnaud apud Franchi, 1999, p. 166)

Analisando as resoluções dos alunos, observa-se que eles utilizaram diferentes esquemas e uma seqüência de ações na tentativa de propor uma solução para o problema.

ATIVIDADE 4

1. Na superfície esférica, marque três pontos, distintos e não alinhados, A, B e C e trace os segmentos menores AB, AC e BC,

a) Descrevam a figura encontrada.

b) Que nome vocês dariam a essa figura?

Todas as duplas concluíram que a figura encontrada é de três lados e que representa um triângulo. Durante a discussão entre os alunos das duplas, a dupla (A) ficou em dúvida se seria realmente um triângulo, pois, os lados não pareciam estar retos. A dupla (C) concluiu se tratar de um triângulo “gordo”.

Imaginava-se que alguma dupla poderia partir da construção de três circunferências máximas, o que não aconteceu. Todas as duplas marcaram primeiro os três pontos e em seguida os segmentos.

As figuras abaixo foram apresentadas pelas duplas (A) (Fig. 4.23) e (D) (Fig. 4.24).

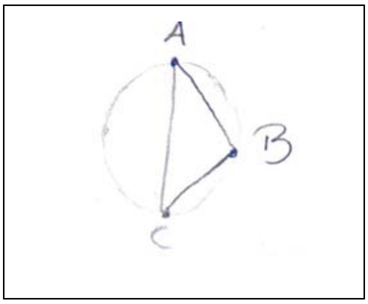


Figura 4.23

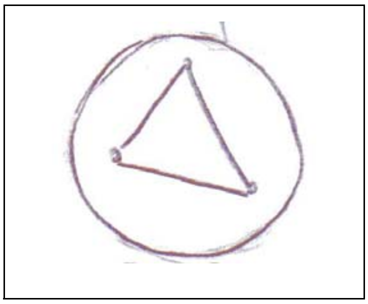


Figura 4.24

Acreditava-se que, ao ligarem os três pontos nas condições dadas, a figura encontrada seria facilmente identificada como um triângulo. Poderiam descrever a figura como composta por três lados e três vértices. Mas, mais uma vez, o conceito anterior de triângulo criou um certo desconforto nas duplas, percebeu-se que aceitaram o nome “triângulo” por não encontrarem outra forma de nomeá-lo, apesar de terem traçado, convenientemente, um triângulo sobre a bola de isopor. (Fig. 4.25) e (Fig 4.26)

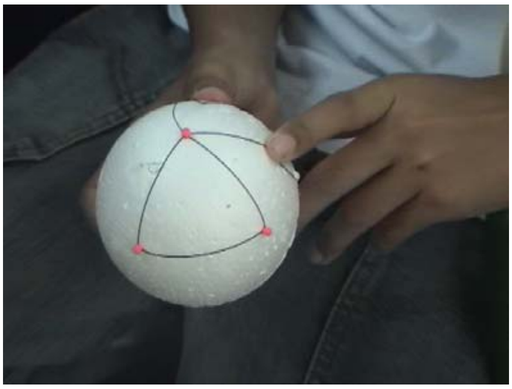


Figura 4.25


Figura 4.26

Acredita-se que, com a leitura do texto (anexo IV) e com a discussão entre as duplas, foi possível sanar as dúvidas que ainda existiam em relação a esta atividade.

2. Na superfície esférica marque três pontos distintos e não alinhados A, B e C. Trace as retas que passam por AB, por AC e por BC. Quantos triângulos ficaram determinados pelas três circunferências máximas?

As duplas apresentaram dificuldade para traçar as três retas unindo dois a dois dos três pontos. A dupla (C), com lápis, nomeou cada um dos pontos para então conseguir traçar as retas (Fig 4.27) e (Fig 4.28) . A observadora da dupla (A) fez o seguinte comentário: “Estavam traçando segmentos de retas, foram orientados a traçar retas, circunferências máximas, se atrapalharam na montagem das retas sobre a esfera, concluíram que haviam colocado os alfinetes muito longe uns dos outros”.

Figura 4.27

Figura 4.28

Esperava-se que as duplas encontrassem 8 triângulos, o que as duplas (B), (C) e (D) concluíram sem dificuldade. A dupla (A) afirmou ter encontrado apenas um triângulo.

A dupla (F) afirmou encontrar infinitos triângulos. Quando questionados, responderam que poderiam traçar infinitos trios de retas, então infinitos triângulos. Ao perguntar-lhes: “E se olhassem apenas para três retas de cada vez”? Responderam que seriam 8 triângulos.

4.1.4.3. Marque dois pontos em uma reta (circunferência máxima), de tal forma que a circunferência fique dividida em dois arcos de mesma medida.

a) Qual a medida em graus de um ponto ao outro?

b) Trace uma reta perpendicular (ângulo de 90º) à reta que vocês encontraram. O que vocês observam?

As duplas não apresentaram dificuldade na resolução desta atividade apenas a idéia de retas perpendiculares teve que ser discutida com as duplas (A), (C) e (F).

No item "a", todos afirmaram ser 180º. As figuras abaixo foram registradas por (A) (Fig. 4.29) e (D) (fig 4.30):

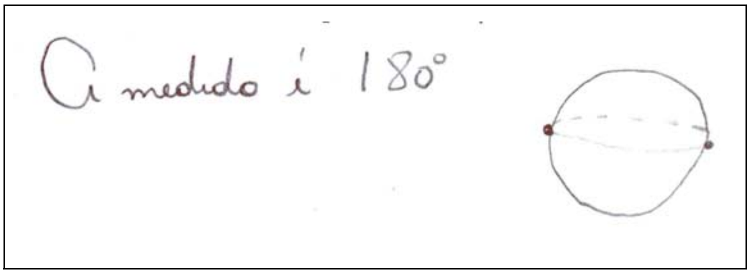


Figura 4.29

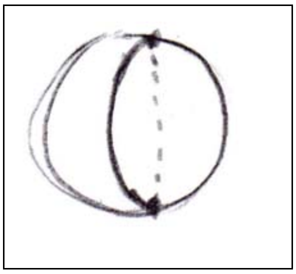


Figura 4.30

No item "b", encontramos as seguintes respostas:

Dupla (A): "Nós observamos que a esfera foi dividida em 4 partes e as retas são concorrentes".

Dupla (B): "Observamos que se formaram 4 ângulos de 90º".

Dupla (C): "Nós observamos que dois arcos (180º) viraram 4 arcos (90º)".

Dupla (D): "A esfera foi dividida em 8 partes de 90º".

As fotos a seguir ilustram o desenvolvimento da atividade pelos alunos. A esfera dividida em 4 partes (Fig 4.31) e os quatro ângulos retos, formados pela interseção de duas retas perpendiculares (Fig 4.32) e (Fig 4.33):

 Figura 4.31	 Figura 4.32	 Figura 4.33

4. Marque dois pontos diametralmente opostos sobre a superfície da esfera. Trace duas retas, que passam por estes pontos, de tal forma que a esfera fique dividida em quatro “partes iguais”. Encontre uma reta que seja perpendicular às retas anteriores.

a) Em quantas partes a esfera ficou dividida? Que figuras representam estas “partes”?

b) O que podemos observar em relação aos ângulos da figura?

c) Qual o comprimento (em graus) dos segmentos que formam o lado do triângulo?

As duplas tiveram dificuldade para traçar as retas. Após discussão e intervenção da pesquisadora conseguiram a configuração desejada.

No item a, esperava-se que “enxergassem” os 8 triângulos, o que as duplas (A), (D) e (F) perceberam, porém a dupla (A) afirmou encontrar 4 partes e 8 triângulos, a dupla (B) respondeu 8 partes, mas descreveu a figura como arcos e não triângulos, a dupla (C) respondeu 4 partes e 4 arcos.

Percebe-se que, pela resposta da dupla (A), a dúvida que havia surgido na questão dois, desta parte da seqüência, foi sanada, mas quando afirmaram que a esfera ficou divida em 4 partes e 8 triângulos, não consideraram cada triângulo como uma parte da divisão. A dupla (C), pelo comentário do observador, deu a resposta antes de traçar a terceira reta, perpendicular às anteriores, o que justifica a resposta dada.

No item b, as duplas apresentaram as seguintes respostas:

Dupla (A) “Que são ângulos congruentes. As medidas dos ângulos são de 90º”

Dupla (B) “Todos medem 90º.”

Dupla (C) “Podemos observar que existem 4 ângulos de 90º em cada ponto” e ainda registraram a figura (Fig. 4.34):

Figura 4.34

No item c, todos concluíram que o comprimento (em graus) dos segmentos que formam o lado do triângulo é de 90º.

A dupla (B) inicialmente queria medir o comprimento do lado do triângulo com a fita métrica, o observador chamou a atenção da dupla para a medida em graus e não em centímetros.

As fotos abaixo mostram duas duplas no desenvolvimento da atividade. Percebe-se (Fig 4.35) e (Fig 4.36) os alunos numerando os triângulos formados após traçarem as retas, estratégia que utilizaram para evitar contar mais de uma vez o mesmo triângulo, como foi explicado pela dupla. A outra dupla, enquanto traçavam as retas (Fig 4.37) e observando a configuração na bola de isopor (Fig 4.38).

Figura 4.35

Figura 4.36

Figura 4.37

Figura 4.38

Ao concluírem esta atividade, as respostas foram socializadas e dado por encerrado o primeiro encontro. Percebeu-se que os alunos estavam satisfeitos com o tipo de trabalho realizado.

Julgou-se que não havia erros a serem registrados, existiam sim, reflexões seguidas de validações das afirmações que cada dupla apresentou.

4.2. RESUMO DAS CONCLUSÕES DA PARTE I

O objetivo desta parte da seqüência era a formação de conceitos de Geometria Esférica, para tanto, os alunos manipularam materiais concretos, buscando a validação das hipóteses levantadas em cada atividade.

Acredita-se que o conceito de reta sobre a esfera, como sendo a circunferência máxima, foi apreendido. Isso pôde ser constatado ao observar que os alunos, quando solicitados a traçarem uma reta sobre a esfera, traçavam circunferências máximas. E também, quando foi solicitado que verificassem quantas retas podem ser traçadas passando por um ponto, os alunos traçavam facilmente circunferências máximas sobre a bola de isopor.

A não existência de paralelismo sobre a superfície da esfera, foi um ponto que precisou ser amplamente discutido, pois os alunos, apesar de perceberem que duas retas sempre se encontravam, não admitiram facilmente este fato, o que exigiu uma parada para discussão em grupo.

Segundo Oliveira:

> Adquirir conhecimentos sobre um certo assunto é operar transformações na estrutura de conceitos, já adquiridos, relacionados a esse assunto. Sendo assim, é fundamental a relação do novo conhecimento com a estrutura conceitual de quem vai aprender. (OLIVEIRA, 1992, p. 49)

Os alunos tinham o conceito de paralelismo da Geometria Euclidiana, o que gerou muitas dúvidas em relação ao fato de duas retas sobre a esfera não serem paralelas. Apesar de estarem com o material concreto em mãos e observarem que, ao traçar duas retas, elas necessariamente iriam se cruzar, os alunos buscaram então outra forma de solucionar o problema. Tentavam traçar circunferências máximas e circunferências menores.

Durante o debate da questão do paralelismo, surgiu o seguinte diálogo:

Pesquisadora: “É possível traçar retas paralelas sobre a esfera?”

Aluno: “Não, se tivermos somente um ponto”

Pesquisadora: “Então se tivermos dois pontos, será possível?”

Aluno: “Se tivermos dois pontos acho que a resposta é sim!”

Foi pedido então ao aluno que marcasse dois pontos sobre a esfera e traçasse as retas paralelas. Ao tentar traçar as retas ele concluiu que não seriam circunferências máximas, logo não seriam retas, mas círculos paralelos.

O conceito de retas concorrentes sobre a esfera então foi discutido, concluindo-se que, sempre que fossem traçadas duas retas sobre a esfera elas seriam sempre concorrentes.

A medida da distância entre dois pontos, sobre a esfera, foi outro ponto que gerou discussões interessantes. Inicialmente os alunos achavam que teriam que utilizar o centímetro, mas, após o desenvolvimento das atividades, concluíram que a medida ideal seria o grau. Fato que virá a ser utilizado no desenvolvimento das atividades com o Globo Terrestre.

Os alunos perceberam que a distância entre dois pontos diametralmente opostos é de 180º e conseguiram marcar dois pontos sobre a esfera, de modo que a distância entre eles era de 60º, apenas fracionando a circunferência máxima.

A mobilização de conhecimentos anteriores foi percebida em diversas situações. Por exemplo: quando traçaram retas sobre a esfera e encontraram triângulos, quando buscaram uma forma de medir o ângulo esférico, sugerindo a utilização do transferidor, ao traçarem retas perpendiculares sobre a esfera.

O desenvolvimento das atividades em duplas e as discussões abertas com o grupo foram muito importantes. Percebeu-se que os alunos, à medida que discutiam suas hipóteses e as validavam, ou não, criavam conceitos novos, os quais foram possíveis devido à interação das duplas.

4.3.PARTE II – O GLOBO TERRESTRE

Para a resolução das atividades seguintes cada dupla recebeu um globo terrestre, o qual ficou à disposição das duplas durante todo o encontro, desde a primeira atividade.

ATIVIDADE 1

1. “Podemos observar que o dia se sucede a noite e que a noite se sucede ao dia. Vemos o Sol nascer, percorrer o céu e iluminar-nos. Mas ao fim do dia ele desaparece no horizonte. Então, surgem as estrelas e a Lua, nascendo e desaparecendo para de novo dar lugar ao Sol.”

Como vocês justificariam esta afirmação?

As duplas (B), (C) e (D) fizeram alusão ao movimento de rotação, mas apenas a (D) falou em rotação.

A dupla (A) justificou da seguinte forma (Fig 4.39):

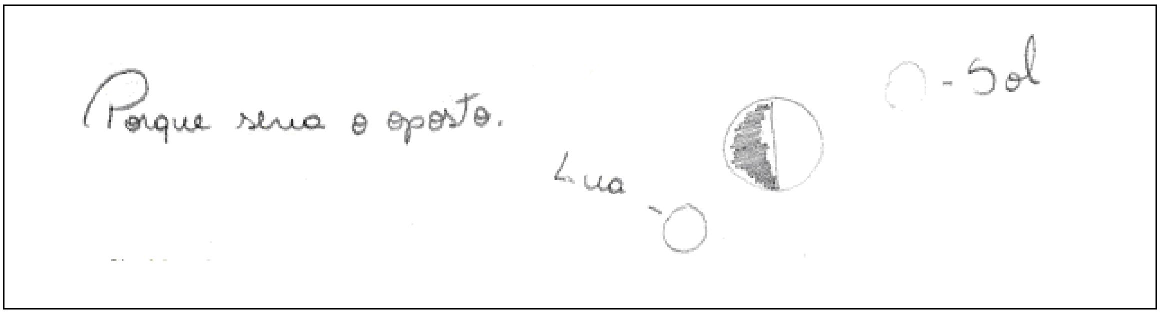


Figura 4.39

Durante a gravação da discussão da dupla (A) registrou-se o seguinte diálogo:

Aluno 1: “Será que tem alguma coisa a ver com o 180º?”

Aluno 2: “Como 180º?”

Aluno 1: “Se a gente está aqui e tem outro no Japão, aqui é dia e lá é noite, e estamos a 180º do Japão”

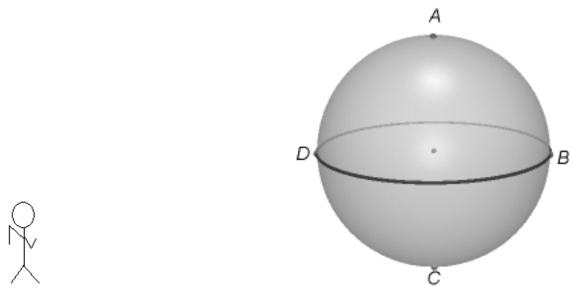
Aluno 2: “Será? Mas é 180º?”

Aluno 1: “Melhor desenhar.”

Percebe-se no diálogo da dupla (A) que os alunos associaram a idéia de distância em graus sobre a esfera, como sendo de 180º para pontos diametralmente opostos e pelo desenho que apresentaram, que têm noção da posição do sol e da lua, mas em momento algum citaram o movimento da terra. A dupla (B) respondeu corretamente após pequena discussão e a dupla (C) respondeu sem dificuldade. O observador da dupla (C) fez o seguinte comentário: “Os alunos não citaram o nome movimento de rotação, mas o identificaram dizendo que a Terra gira em torno de si mesma”.

2. Um Astronauta, em uma missão, olhou para o céu da Lua e viu a Terra. Ele viu que a Terra era azulada, redonda, enorme (umas 4 vezes maior do que vemos a Lua aqui da Terra) e que flutuava no espaço, tal qual vemos a Lua flutuando no espaço. Imagine que o Astronauta tivesse levado um telescópio com ele. Para quem não sabe, telescópio é um aparelho usado pelos astrônomos para ver as coisas que estão muito longe. Imagine que o astronauta tivesse olhado para a Terra com o telescópio e que ele tivesse visto 4 pessoas. Uma estava no pólo norte (ponto A na figura abaixo). Outra estava no pólo sul (ponto C na figura abaixo). Outra era um brasileiro (ponto D na figura abaixo). Outra era um japonês (ponto B na figura abaixo, pois o Japão fica do outro lado da Terra, em relação ao Brasil).

Imagine que a figura abaixo é um esboço do globo Terrestre. Desenhe o boneco abaixo sobre cada um dos pontos A, B, C e D, tal como o astronauta teria visto as quatro pessoas. (O boneco está muito magrinho e está fora de escala em relação à Terra) (questão retirada da OBA – Olimpíada Brasileira de Astronomia – 2002)



Apenas a dupla (C) colocou os “bonequinhos” com o pé sobre os pontos. Segundo o observador, responderam rapidamente e sem dificuldade. As demais apresentaram a seguinte configuração (fig 4.40):

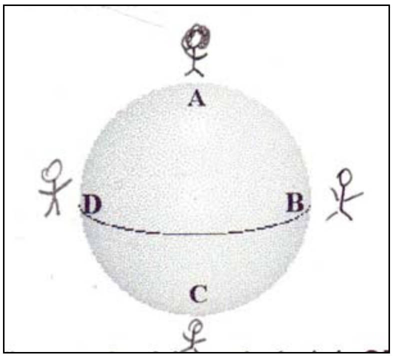


Figura 4.40

O observador da dupla (A) fez o seguinte comentário: “Tiveram muita dificuldade em interpretar o problema, não sabiam o que fazer com os bonecos e não tiveram o olhar do astronauta” e ainda completou “Nas duas questões propostas os alunos não recorreram ao globo. Preferiram desenhos planos o que dificultou muito a resolução dos problemas”.

Após a resolução das questões 1 e 2, abriu-se uma discussão geral para socialização das respostas. Uma das alunas tinha um bonequinho na sua mochila o qual foi utilizado na discussão da questão 2, o que permitiu que todos concluíssem que os pés do boneco deveriam tocar o globo.

Antes de continuar a resolução das atividades, as duplas foram convidadas a ler o texto 1 da parte II (anexo V).

O texto objetivava responder a questão 1, além de trazer informações para que os alunos pudessem desenvolver as atividades 2 e 3, no trabalho com o globo terrestre e as coordenadas geográficas.

ATIVIDADE 2

1. Observando o Globo Terrestre, identifiquem que tipos de circunferências vocês vêem na superfície do globo terrestre.

As duplas (A) e (B) responderam: Circunferências máximas e círculos menores.

A dupla (C): “Retas concorrentes”.

A dupla (D) respondeu: “Circunferências máximas e arcos”.

A dupla (B) fez referência ao encontro anterior, lembrando da esfera, as demais não comentaram nada a respeito do encontro anterior.

A dupla (C) só “enxergou” circunferências máximas e, mesmo retornando ao texto, não comentaram a existência de círculos menores.

A foto abaixo (Fig.4.41) mostra uma das duplas durante a discussão da atividade

Figura 4.41

Nos relatórios dos observadores encontram-se os seguintes comentários:

Dupla (A): “Os alunos não associaram as respostas ao conteúdo do encontro anterior”.

Dupla (B): “Os alunos identificaram corretamente as linhas do globo, mas não sabiam o nome correto, chamaram-nas de paralelo”

Dupla (C) “Os alunos associaram as circunferências máximas em relação ao globo, depois de discutirem novamente, mudaram sua resposta para retas concorrentes”

Durante a discussão da dupla (B) foi gravado o seguinte diálogo:

Aluno 1: “Ah, igual na esfera, circunferências máximas e círculos menores.”

Aluno 2: “É isso aí.”

Aluno 1: “Será que é isso?.... Olha aqui.... é só uma a máxima, as outras são menores.”

Para responder esta questão, esperava-se que os alunos associassem a atividade do encontro anterior (Parte I), onde foram convidados a fatiar a esfera para reconhecerem as circunferências que se formavam, e respondessem círculos máximos e círculos menores ao observarem as linhas sobre o globo. Pelas respostas apresentadas, concluí-se que alguns alunos fizeram a associação esperada, como é o caso da dupla (A) o que pode ser observado no diálogo, da dupla (C), que respondeu retas concorrentes, referindo-se aos Meridianos e da dupla (D) ao referir-se a arcos.

2. O globo terrestre possui um eixo de rotação. Como se chamam os pontos onde o eixo de rotação corta o globo terrestre?

Esperava-se que as duplas respondessem: Pólos. As respostas foram as seguintes:

Dupla (A): “O Meridiano de Greenwich, a linha do Equador e as escalas de latitude e longitude traçadas pela linha do Equador”.

Duplas (B) e (C): “Latitude e Longitude”.

Dupla (D): “Diâmetros opostos”.

Dupla (F): “Equador”.

A dupla (C), segundo comentário do observador, durante a discussão, falou em pólos norte e sul, fato que pode ser ilustrado na foto (Fig 4.42), mas procurou uma resposta adequada no texto, o que possivelmente gerou uma resposta incorreta.

Figura 4.42

Durante o desenvolvimento da parte I desta seqüência, o texto 4 (anexo IV) trazia a idéia de pólos de uma reta e retas polares. Pelas respostas dos alunos, acredita-se que apenas a dupla (D) associou o que foi discutido em relação aos pólos de uma reta sobre a esfera, aos pólos do globo terrestre. Os alunos se preocuparam em buscar respostas no texto, fato que será discutido posteriormente.

3. Observem que pelos pólos do globo passam várias circunferências máximas. Qual o nome dessas circunferências?

As duplas (A) e (F) responderam: “São a latitude e a longitude”

A dupla (B) deu a seguinte resposta: “As circunferências chamam-se paralelos”

A dupla (C) respondeu: “Latitudes”

A Dupla (D) respondeu: “Retas concorrentes”

Esperava-se que respondessem Meridianos, acreditando que tivessem tal referência das aulas de geografia e fizessem tal associação a partir do texto.

Os observadores registraram os seguintes comentários:

Dupla (A): “Os alunos não associaram as respostas ao conteúdo do encontro anterior, eles até localizaram os meridianos sobre o globo, mas acabaram respondendo “latitude e longitude”, termos que encontraram no texto”.

Dupla (B): “Os alunos identificaram corretamente as linhas no globo, mas não sabiam o nome correto, chamaram de paralelo”

Dupla (C): “Os alunos localizaram as circunferências no globo mas depois de discutirem mudaram sua resposta para latitude”

Durante a gravação da dupla (B) registrou-se o seguinte diálogo:

Aluno 1: “Shiiiiii, qual o nome?”

Aluno 2: “Olha... são essas....”

Aluno 1: “Mas isso não estava no texto...”

“Não tem!”

Aluno 2: “É lógico que tem, tá no globo!”

Aluno 1: “Vamos voltar pro texto.”

Esperava-se que respondessem que as circunferências que passam pelos pólos são os meridianos, porém, para responder a esta questão, era necessário que soubessem localizar sobre o globo terrestre os pólos, fato que seria esperado se tivessem respondido corretamente a questão anterior. Mais uma vez, observa-se que a dupla (D) dá respostas, aparentemente, baseadas nas atividades da parte I, e os demais alunos buscam as respostas no texto.

4. Se duas circunferências máximas passam pelos pólos, que circunferência máxima é perpendicular a ambas? Qual o nome dado a essa circunferência?

Esperava-se que respondessem: “linha do Equador” ou apenas “Equador”.

As respostas das duplas foram as seguintes:

Dupla (A): “A latitude. Seriam os círculos menores”

Duplas (B), (C) e (D): “linha do Equador”

Dupla (F): “Meridiano”

O observador da dupla (A) registrou o seguinte comentário: “Os alunos conseguiram identificar as circunferências e a perpendicular, mas não sabiam nomeá-las”

Para esta questão esperava-se que os alunos utilizassem as discussões do encontro anterior, além de terem respondido corretamente as questões anteriores. Observou-se que os alunos não tiveram dificuldade em localizar as linhas solicitadas, porém, mais uma vez, algumas duplas se concentraram na busca da resposta no texto que foi disponibilizado.

5. Quais das circunferências são denominadas Paralelos Terrestres?

As duplas apresentaram as seguintes respostas:

Dupla (A): “O Meridiano de Greenwich e a linha do Equador”.

Dupla (B): “As circunferências que passam por onde tem terra”.

Dupla (C): “50º N, 25º N, 0º N, 25º S”.

Dupla (D): “As latitudes”

A dupla (F) não respondeu.

Segundo os observadores nenhuma dupla conseguiu identificar as circunferências.

Esperava-se que os alunos respondessem que os paralelos terrestres são os círculos menores, associando o estudo sobre a esfera no globo terrestre. Mais uma vez, percebe-se a concentração na busca das respostas no texto que foi apresentado no início da atividade.

Pela resposta da dupla (B), “As circunferências que passam por onde tem terra”, deve ter surgido a partir da pergunta: “Quais circunferências são denominadas Paralelos Terrestres?”, o que sugere a falta de associação desta atividade às atividades desenvolvidas na parte I deste estudo.

Do diálogo dos alunos da dupla (B):

Aluno 1: “Eu acho que é onde tem terra... olha só... aqui só tem água.”

Aluno 2: “Eu acho que ta errado, mas põe pra ver!”

Aluno 1: “É, eu acho que ta errado...”

Aluno 2: “Vamos procurar no globo... olha aqui, a circunferência equatorial.”

Depois de concluída a atividade 2, decidiu-se parar para uma discussão geral. Abriu-se um debate sobre cada uma das questões apresentadas nesta parte, de modo a tentar eliminar possíveis conflitos.

Durante a discussão das questões foi possível perceber que os alunos relacionavam circunferência máxima, círculos menores, “retas” perpendiculares, conceitos discutidos na parte I desta seqüência, os quais esperava-se que tivessem utilizado na resolução da atividade.

Pelas respostas das duplas foi percebida uma falha na concepção da seqüência. Ao fornecer o texto, as informações confundiram os alunos, gerando as respostas incorretas, como pode ser observado pelas respostas dadas nas questões anteriores, os alunos se prenderam às informações sobre latitude e longitude, não conseguindo responder corretamente várias das questões.

Após a socialização das respostas deu-se continuidade ao desenvolvimento das atividades.

ATIVIDADE 3

1. Localizem no Globo Terrestre os hemisférios Norte e Sul e as marcas da latitude e da longitude em graus.

Esta atividade era apenas de observação.

Apenas a dupla (A) não apresentou dificuldade, as demais duplas foram auxiliadas pela professora pesquisadora, ou pelos observadores, para localizarem as marcas de latitude e longitude sobre o globo e para diferenciá-las. Quanto aos hemisférios Norte e Sul, todas as duplas souberam localizá-los.

Os observadores foram orientados a auxiliar, caso os alunos tivessem dificuldade na localização das marcas de latitude e longitude, tendo em vista que, o fato de não saberem distinguir uma da outra, poderia comprometer as questões seguintes.

2. Observando um Globo terrestre, determinem as coordenadas geográficas de cada uma das cidades da tabela abaixo:

Não se esqueçam, é necessário informar se a latitude é Norte (N) ou Sul (S) e se a longitude é Leste (L) ou Oeste (O)

Cidade	Latitude	Longitude
São Paulo		
Maceió		
Belo Horizonte		
Roma		
Nova York		
Buenos Aires		
Londres		
Tóquio		
Cidade do México		

As duplas (A), (B) e (C) não tiveram dificuldade em localizar as latitudes e longitudes, há apenas uma pequena diferença em graus nos registros.

As duplas (D) e (F) inverteram, registraram latitude no lugar de longitude e vice-versa. Houve intervenção da pesquisadora, discutindo a questão com cada dupla individualmente, de modo a evitar possíveis trocas nas atividades seguintes.

As figuras abaixo (Fig 4.43) e (Fig 4.44) mostram duas duplas na busca das coordenadas.

Figura 4.43

Figura 4.44

Para resolver esta questão, as duplas observaram o globo em busca das coordenadas. Percebeu-se um debate bastante rico.

Da discussão da dupla (B) ficou registrado o seguinte diálogo:

Aluno 1: “Este é fácil, eu lembro... são os graus da esfera.”

Aluno 2: “Mas como eu sei se é leste ou oeste? É o meridiano de ‘não sei o que’ que determina?”

Aluno 1: “É isso mesmo! Esquerda é Oeste.”

Aluno 2: Então São Paulo é só vir até aqui (olhando no globo) e imaginar a linha... é sul e oeste... vamos ver.”

Percebe-se que mais uma vez os alunos fizeram dessa questão associação ao estudo da Geometria Esférica enquanto resolviam problemas utilizando o Globo Terrestre.

3. Qual a latitude e a longitude do Lugar onde vocês moram?

As duplas (B), (C) e (D) copiaram as coordenadas de São Paulo, da tabela da atividade anterior.

A dupla (A) registrou: Latitude Sul e Longitude Oeste.

Acredita-se que a resposta da dupla (A) mostra compreensão do conceito de latitude quanto aos hemisférios norte e sul e da longitude quanto aos hemisférios leste e oeste e não como coordenadas de um ponto.

4. Localizem no globo terrestre os trópicos de Câncer e Capricórnio, assim como os círculos polares ártico e antártico e completem a tabela anotando a latitude de cada linha.

Linha de referência	Latitude
Trópico de Câncer	
Trópico de Capricórnio	
Equador	
Círculo Polar Ártico	
Circulo Polar Antártico	

As duplas (A), (B), (C), (D) e (F) localizaram sem problemas, apresentando diferenças nas respostas, por erro de aproximação.

Observa-se também que apenas a dupla (D) percebeu, ou já tinha o conceito, de que os trópicos e os pólos estão localizados na mesma distância em relação ao Equador, apenas em hemisférios diferentes, fato que foi discutido na socialização das respostas. As demais duplas apresentaram coordenadas diferentes, como por exemplo (A) colocou Trópico de Câncer 24º N e Trópico de Capricórnio 22º S.

Durante a socialização das respostas as duplas voltaram ao globo para verificar as coordenadas de cada linha de referência. Um dos alunos da dupla (C) levantou a questão de que os trópicos estão a uma mesma distância do Equador, só que em hemisférios diferentes, o mesmo acontecendo com os círculos polares.

As fotos que seguem (Fig 4.45), (Fig 4.46), (Fig 4.47), (Fig 4.48) e (Fig 4.49), ilustram o trabalho dos grupos na observação do globo.

Figura 4.45

Figura 4.46

Figura 4.47

Figura 4.48

Figura 4.49

5. Se você estiver exatamente na metade da distância entre o Equador e o Pólo Norte e a leste do Meridiano de Greenwich, na sexta parte do comprimento em graus da linha do Equador, a que latitude e longitude você se encontrará? (LUCCI, E. A. Geografia – O homem no espaço global, Ed. Saraiva, 1999. p.305)

As duplas apresentaram as seguintes respostas:

Dupla (A): “A latitude é 45º e a longitude é 90º”.

Dupla (B): “45º N e 90º O”.

Dupla (C): “latitude 45º N e longitude 0º”.

Dupla (D): “45º longitude leste e 60º latitude norte”.

Esperava-se que as duplas percebessem que a distância do Equador ao pólo é de 90º e que o comprimento da linha do Equador é de 360º, fazendo uma associação com as atividades do encontro anterior, onde foi determinada a distância entre dois pólos sobre a circunferência, tendo em vista que a circunferência mede 360º.

Com exceção da dupla (F), as demais duplas perceberam que metade da distância entre o equador e o pólo norte era de 45º. No relatório dos observadores ficou registrado: dupla (A): “Os alunos tiveram muita dificuldade em entender a 6ª parte. Eles contaram 6 linhas meridionais”; dupla (B) “Os alunos responderam rapidamente, mas não prestaram atenção ao enunciado, onde estava escrito sexta parte, consideraram seis meridianos” ; dupla (C): “Os alunos tiveram muita dificuldade com a idéia de sexta parte, além disso estavam cansados e o raciocínio ficou prejudicado”.

Durante a discussão da dupla (A) registrou-se o seguinte diálogo:

Aluno 1: “Na metade. Se é 180º do Pólo Sul ao Pólo Norte, então é 90º do equador ao pólo... metade é 45º.”

Aluno 2: “É, ta certo!”

Aluno 1: “Na sexta parte do comprimento do Equador.”

Aluno 2: “Aqui, 1, 2, 3, 4, 5 ,6, então a longitude é 90º.”

Para resolver esta questão todas as duplas recorreram apenas ao globo terrestre, não utilizando desenhos ou esquemas gráficos.

As respostas foram socializadas, percebeu-se que os alunos associavam o comprimento da circunferência como sendo de 360º, mas se utilizaram das marcas de latitude e longitude do globo para responder à questão.

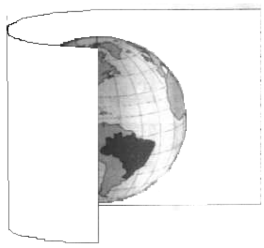
A resolução das atividades 1, 2 e 3 demandou mais tempo do que o esperado, decidiu-se, então, que as atividades 4 e 5, desta parte, seriam desenvolvidas no início do próximo encontro.

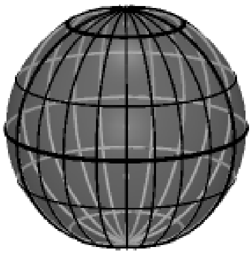
Além do fator tempo, levou-se em conta também que os alunos já se encontravam cansados, fato observado por mais de um dos professores observadores.

ATIVIDADE 4

Para responder as questões desta atividade não foram utilizados materiais concretos, os alunos deveriam resolvê-las apenas por abstração.

1. Imagine se colocássemos em volta da esfera uma cartolina e projetássemos, a partir do centro da esfera, as linhas que representam o equador, os meridianos, os trópicos e os círculos polares. Como essas linhas seriam projetadas sobre a cartolina?





A dupla (A) registrou como observação: "A partir de um ponto formaram as linhas" e apresentou a figura (Fig 4.50). As demais figuras foram apresentadas pela dupla (B) (Fig 4.51) , pela dupla (C) (Fig 4.52) e pela dupla (D) (Fig 4.53).

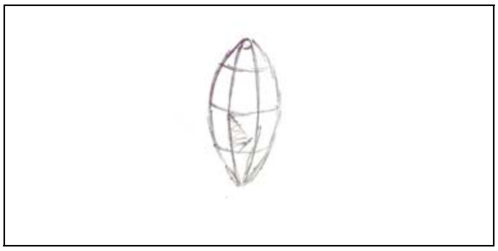


Figura 4.50

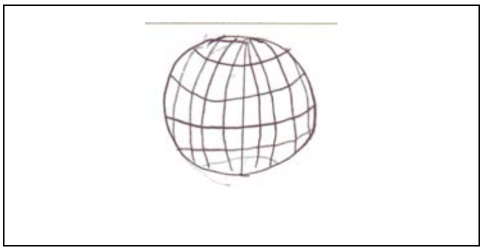


Figura 4.51

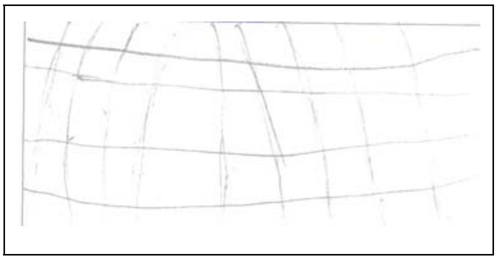


Figura 4.52

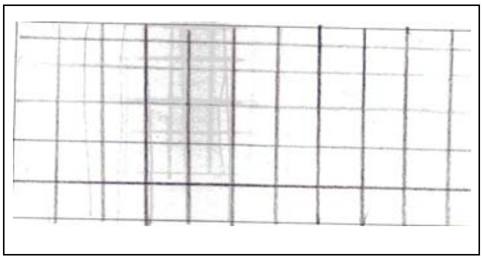


Figura 4.53

O Observador da dupla (A) registrou: “Os alunos partiram de um ponto sobre a esfera, não levaram em conta que o problema sugeria um ponto no centro da esfera”.

O observador da dupla (C) registrou: “Ao desenharem sobre a folha que envolvia o globo, no desenho, imaginaram linhas retas. Ao desenharem no retângulo, colocaram as linhas curvas”.

Percebe-se pela resolução desta atividade que os alunos, com exceção da dupla (D), não possuem o conceito de planificação, sobre um cilindro, partindo do centro da esfera.

Durante a discussão da dupla (A) foi gravado o seguinte diálogo:

Aluno 1: “Como seria esse ponto?”

Aluno 2: “Seria mais ou menos colocado no centro.”

Aluno 1: (...) “Vai sair do lado oposto.”

Aluno 2: “É, se pegar o globo e girar vai sair do lado oposto.” (...)

“Mas tem alguma coisa faltando...”

Aluno 1: “Como sairão?”

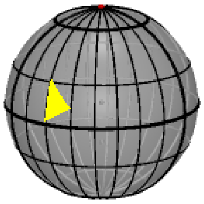
Aluno 2: “Não vai sair em forma de bola, em forma esférica... Aqui na ponta não vai pegar se puser tinta na esfera.”

Aluno 1: “É, iria pegar só os lados dela.” (a esfera)

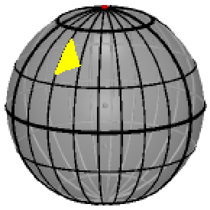
Percebe-se que os alunos da dupla (A) iniciaram pensando na projeção do ponto a partir do centro da esfera, mas, como precisavam desenhar no plano, partiram em busca de outra estratégia. Pensaram então em passar tinta sobre a esfera de arame e, ao rolar a esfera sobre o papel, imaginaram como ficariam as marcas da tinta.

2. Como ficaria a projeção dos triângulos, que estão sobre as esferas abaixo, no plano, ao projetarmos a partir do centro da esfera sobre a cartolina?

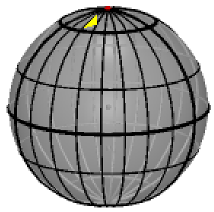
a)



b)



c)



A dupla (A) fez as seguintes observações:

a) sairia do lado oposto

b) também sairia do lado oposto

c) Não apareceria, porque imaginando houvesse tinta na esfera, de modo que ela passasse por um papel, não apareceria a ponta da esfera.

Observa-se que a dupla (A), mas uma vez, ao escrever que “sairia do lado oposto”, imaginou que a figura, ao ser projetada sobre a cartolina, seria simétrica à figura colocada sobre a esfera. Como na atividade anterior, percebe-se que a sugestão de partir de um ponto no centro da esfera foi desconsiderada.

A dupla (C) fez a seguinte observação:

“Nós observamos que, se desenharmos os triângulos nos paralelos, um acima do outro, os triângulos mudam de tamanho”

Pelos desenhos apresentados pela dupla (C), percebe-se que eles imaginavam que a projeção do triângulo iria diminuir (fig 4.54) e (Fig 4.55)

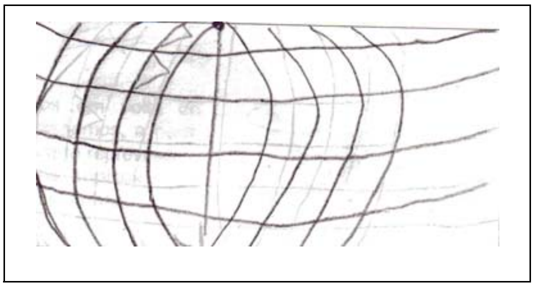


Figura 4.54

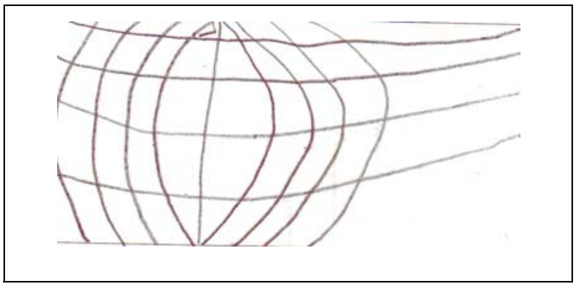


Figura 4.55

Registraram também: “Nós observamos que, se colocarmos a cartolina em volta do globo (esfera), o desenho das linhas paralelas e meridianos sairiam imperfeitos”. Pelo desenho apresentado, podemos observar que a dupla imaginou as linhas curvas.

As demais duplas também observaram a variação de tamanho dos triângulos. Pelos registros apresentados percebe-se que imaginaram que a projeção iria diminuir à medida que se aproximavam dos pólos.

ATIVIDADE 5

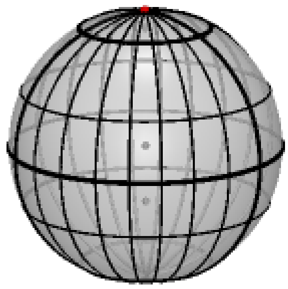
Para o desenvolvimento desta atividade foram utilizados os seguintes materiais: esfera de arame, vela, cartolina, figuras geométricas em EVA.

1) Utilizando a esfera de arame vamos projetar a esfera sobre um cilindro de cartolina utilizando uma vela no centro.

O que vocês observaram?

Como vocês planificariam agora a esfera?

Vocês haviam imaginado, na atividade anterior, as linhas como na projeção realizada na experiência?



Com exceção da dupla (D) todos ficaram surpresos com a projeção das linhas do globo sobre a cartolina. Concluíram que as linhas projetadas seriam feixes de retas paralelas, verticais e horizontais.

Todas as duplas apresentaram o desenho, no retângulo, como linhas paralelas, horizontais e verticais.

Para a última pergunta desta questão, “*Vocês haviam imaginado, na atividade anterior, as linhas como na projeção realizada na experiência?”,* a dupla (D), que havia imaginado a projeção corretamente fez o seguinte registro: “Sim, pensamos na geometria plana, em transformarmos as retas da geometria esférica em retas da geometria plana”.

Mais uma vez, é observada a mobilização de conhecimentos anteriores para a resolução de problemas novos.

Segundo Vergnaud:

.

> Os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que se depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (Vergnaud, 1991, p. 171)

As fotografias abaixo, mostram a utilização do material concreto para a realização do experimento. Uma dupla com a esfera sobre o suporte já com a vela colocada (Fig 4.56). Uma dupla acendendo a vela. fig (Fig 4.57) e a esfera iluminada e a projeção na cartolina. (Fig 4.58)

Figura 4.56

Figura 4.57

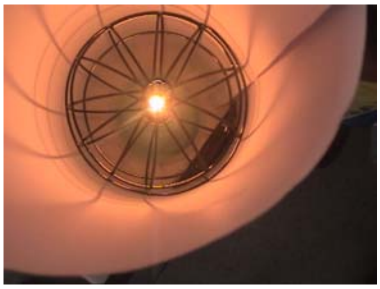


Figura 4.58

2. Coloque sobre a esfera de arame as figuras geométricas e observe a projeção sobre o cilindro.

Registrem as suas observações.

Todas as duplas registraram que, à medida que o triângulo se afasta da linha do equador, para baixo ou para cima, a projeção aumenta de tamanho.

Concluiu-se a partir desta resposta que o objetivo desta atividade foi atingido, tendo em vista que os alunos, antes do experimento, acreditavam que o tamanho iria diminuir. Lembrando Vergnaud:

> (...) o funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos em situação assenta sobre o repertório de esquemas disponíveis, anteriormente formados, de cada um dos sujeitos tomados individualmente. Simultaneamente, as crianças descobrem novos aspectos, e eventualmente novos esquemas em situação. (Vergnaud, 1991, p. 161)

A foto abaixo mostra a projeção de dois triângulos, de mesmo tamanho, sobre o cilindro de cartolina.(Fig 4.59)

Figura 4.59

Esta atividade permitiu discussões, reflexões e validações, com a utilização de material de fácil confecção, de modo que as duplas pudessem compreender como é feita a projeção cilíndrica do globo terrestre.

Em seguida as duplas foram convidadas a ler o texto (anexo VI) que trata das projeções cartográficas e apresenta, além da projeção cilíndrica, mais duas projeções, a cônica e a azimutal, o que permitiu um debate muito interessante em relação à confecção de mapas.

4.4. RESUMO DAS CONCLUSÕES DA PARTE II

O objetivo desta parte da seqüência era verificar se os conceitos trabalhados nas atividades da primeira parte iriam influenciar no desenvolvimento das atividades sobre o globo terrestre e discutir a planificação do globo, através da projeção cilíndrica.

Durante a realização da seqüência, foi possível detectar que os alunos faziam associação do estudo da Geometria Esférica, com o estudo do Globo.

Tivemos evidências desta associação em diversos momentos do desenvolvimento das atividades:

- Na atividade 1, quando os alunos imaginaram dois pontos diametralmente opostos, distantes 180º.
- Na atividade 2, quando as duplas se referiram à circunferências máximas e círculos menores, retas concorrentes, arcos.
- Durante a discussão das questões da atividade 2, no debate geral, os alunos associaram Meridianos e Equador, à retas perpendiculares, além de citarem mais uma vez as circunferências máximas e os círculos menores.
- Nas atividades 3 e 4, quando associaram as medidas das distâncias em graus sobre a esfera com as coordenadas geográficas, latitude e longitude.

A análise das respostas das duplas permitiu observar também uma falha na concepção da seqüência. Antes de iniciar a atividade 2, foi solicitado aos alunos que efetuassem a leitura do texto I, da parte II da seqüência, texto esse que trazia informações sobre o movimento de rotação da terra e sobre as coordenadas geográficas (latitude e longitude), que serviriam de base para responderem às questões das atividades 3. Os alunos se prenderam ao texto para responder às questões da atividade 2, e acabaram dando respostas incorretas. Concluiu-se desta forma, que o ideal teria sido apresentar o texto no início da atividade 3.

Como já foi exposto anteriormente, houve uma ampla discussão de cada questão apresentada após o término da atividade 2.

As atividades 4 e 5 tinham por objetivo mostrar um dos modelos de projeções cartográficas, a projeção, cilíndrica e as deformações que ocorrem à medida que nos afastamos do Equador.

Pôde-se perceber que os alunos, na maioria, achavam que, ao projetar as linhas do globo sobre um cilindro, essas ficariam curvas, acompanhando o formato da esfera, mas, ao utilizarem uma vela, no centro da esfera, para efetuar a projeção, puderam reformular o conceito que haviam formado.

O experimento trouxe muitas surpresas para os alunos, ao projetarem figuras que estavam sobre a esfera, para o cilindro, inicialmente imaginavam que o tamanho das figuras iria diminuir e puderam perceber, na esfera iluminada, que o tamanho aumenta. Concluindo desta forma, que quanto mais longe do equador, maior será a deformação que ocorrerá nesta projeção.

4.5. PARTE III – O MAPA

Para o desenvolvimento desta última etapa da seqüência, cada dupla recebeu um Atlas geográfico e régua.

ATIVIDADE 1

1. No Atlas (pág 38), observem o mapa-múndi, localizem o Equador, o Trópico de Capricórnio, o Trópico de Câncer, os círculos polares ártico e antártico.

Esta atividade era apenas de observação. Foi registrado pelos professores observadores que todos localizaram sem problema as linhas solicitadas.

2. Localize no Atlas um país cortado por cada linha de referência da tabela

Linha de Referência	País
Círculo Polar Ártico	
Trópico de Câncer	
Equador	
Trópico de Capricórnio	

No País escolhido na tabela acima, localize uma cidade próxima a linha de referencia e indique sua Latitude (N ou S) e longitude (L ou O) utilizando o mapa político por continente.

Linha de Referência	País	Cidade	Longitude	Latitude
Círculo Polar Ártico				
Trópico de Câncer				
Equador				
Trópico de Capricórnio				

A maioria dos alunos não apresentou dificuldade na resolução desta questão, as duplas (C) e (F) apresentaram dificuldade apenas para a localização da longitude, foi necessária a intervenção da pesquisadora.

Observa-se que as duplas registraram as mesmas latitudes para os dois trópicos, fato que não ocorreu na atividade 3, da parte II desta seqüência, o que foi discutido com os alunos. Acredita-se que este conceito foi apreendido.

Percebe-se que as duplas utilizaram os conceitos adquiridos no estudo do globo terrestre, tendo em vista que conseguiram localizar os países sobre as linhas de referência e suas latitudes e longitudes.

Para determinar a cidade do país escolhido, observou-se que os alunos deixaram de lado a informação da linha de referência, escolhendo inicialmente uma cidade qualquer. Foram instruídos pelos observadores e pela pesquisadora que voltassem a ler a questão, após escolherem as cidades, localizaram suas coordenadas, sobre o mapa, com tranqüilidade.

3. Indiquem três países localizados no Hemisfério Norte.
4. Indiquem três países localizados no Hemisfério Sul.
5. O Brasil está localizado em qual Hemisfério?

As três questões anteriores foram respondidas corretamente pelas duplas, o que indica que os conceitos de Hemisfério Norte e Hemisfério Sul, também foram apreendidos.

6. Observando o mapa político do Brasil, pág 97, localize o estado que possui as latitudes e longitudes indicadas abaixo:

2º N	e	60º O	______________________
0º	e	52º O	______________________
9º S	e	70º O	______________________
10º S	e	36º O	______________________
3º S	e	38º O	______________________
15º S	e	49º O	______________________
5º S	e	35º O	______________________
25º S	e	51º O	______________________
27º S	e	49º O	______________________
23º S	e	46º O	______________________

As duplas (A), (D) e (F) confundiram as coordenadas 2º N e 60º O, respondendo Amazonas ao invés de Roraima, observando as coordenadas, no mapa indicado, tal confusão parece ter surgido devido à escala do mapa e à proximidade da divisa dos dois estados.

As duplas (D) e (F) responderam Pará, ao invés de Amapá, para as coordenadas 0º e 52º .

Ainda a dupla (F) errou nas duas últimas, onde seria Santa Catarina, colocou São Paulo (27º S e 49º O) e onde seria São Paulo, colocou Rio de Janeiro (23º S e 46º O).

Com esta atividade, ao inverterem-se os dados, ao invés de buscar as coordenadas de um lugar, fornecer as coordenadas e solicitar que localizassem a cidade, pretendia-se verificar se os alunos haviam apreendido os conceitos de latitude e longitude. Pode-se verificar um certo domínio em relação a estes objetos, com exceção da dupla (F) que apresentou bastante dificuldade na leitura do mapa e na localização das coordenadas.

As fotos abaixo mostram alguns alunos, durante a resolução das atividades, utilizando o Atlas: (Fig 4.60), (Fig 4.61), (Fig 4.62) e (Fig 4.63)

Figura 4.60

Figura 4.61

Figura 4.62

Figura 4.63

2. ATIVIDADE 2

Esta atividade trata de questões referentes ao fuso horário. As duplas, antes de iniciarem a resolução, foram convidadas a ler o texto I do CD (anexo VII) onde encontraram informações para a resolução de problemas com fuso horário, além de alguns problemas resolvidos.

1. Que horas e dia serão no estado de Minas Gerais localizado a 45º O, quando no Vietnã localizado a 105º L forem 22 horas do dia 26/04?

Esperava-se que respondessem que em Minas Gerais serão 12 horas do mesmo dia. Todas as duplas resolveram corretamente.

No relatório dos observadores foi registrado que as duplas (A) e (B) tiveram dificuldade na compreensão do enunciado, mas conseguiram resolver apenas com a releitura do texto e que a dupla (C) retornou diversas vezes ao texto antes de conseguir concluir a atividade.

Percebe-se na resolução da atividade um certo domínio quanto às longitudes apresentadas. Os alunos lidam com as medidas em graus com segurança.

No texto disponibilizado no CD havia um problema análogo a este, de modo que os alunos puderam resolver à questão, baseados no exemplo dado.

2. Que horas e dia serão na cidade de Anadir localizada a 180º L, quando na Groelândia a 30º L forem 18 horas do dia 26/04 ?

A resposta esperada era: 4 horas do dia seguinte.

A Dupla B, ao encontrar 28 horas, optou em efetuar a subtração 18 – 10 e encontrou 8 horas como resposta.

A dupla F, também encontrou a resposta 28 horas e percebe-se que esta resposta não fez muito sentido para eles, que resolveram subtrair 18 de 28 encontrando 10 horas como resposta.

As duplas (A) e (D) não demonstraram dificuldade. Já para a dupla (C) o observador fez o seguinte comentário: “Neste exercício a dupla discutiu muito e apresentou dificuldades para responder, entretanto chegaram às 28 horas. Um dos alunos julgou que 28 horas, seria impossível, pois o dia só tem 24 horas, concluíram então que deveria ser 4 horas do dia 27/04”.

Tendo em vista o novo objeto a ser tratado, o fuso horário, acredita-se que os erros que surgiram ajudaram a enriquecer o debate na socialização das respostas. Um dos alunos da dupla (A) sugeriu que fosse utilizado o globo terrestre para a resolução destas atividades. Como não havia globos disponíveis para todas as duplas, a pesquisadora sugeriu que consultassem no Atlas o mapa dos fusos.

Também para esta questão, foi disponibilizado no texto um exemplo, onde as longitudes estavam no mesmo hemisfério, de modo que, acredita-se, os alunos seguiram o modelo para resolução. O fato de encontrarem 28 horas como resposta foi um obstáculo para algumas das duplas.

3. A cidade de São Paulo está situada no fuso horário 45º O. Quando em São Paulo forem 13 horas do dia 28/04 que horas e dia serão em Lisboa localizada a 8º O?

Esperava-se que encontrassem como resposta 37º, o que foi feito sem problema pelas duplas. Como 37º equivale a dois fusos e meio (aproximadamente) e como não há diferença no mesmo fuso, deveriam encontrar como diferença 3 horas e como resposta que em Lisboa seriam 16 horas do mesmo dia.

A dupla (A) respondeu corretamente, mas no comentário do observador foi registrado “Um dos alunos queria dividir o fuso em minutos, pois a diferença não foi um múltiplo de 15, o que gerou uma discussão muito interessante antes de chegarem à resposta”

A dupla (B) encontrou aproximadamente 2,46 como resposta, percebe-se que ficaram em dúvida quanto ao que fazer...os alunos optaram em subtrair 2 de 13 e encontraram como resposta 11 horas. O observador registrou que a dupla retornou ao texto buscando elementos para resolução.

A dupla (C) pensou corretamente, mas quando foi somar 2, 46 com o 13, não respeitou o valor posicional encontrando como resposta 2,59.

A dupla (D) respondeu corretamente e registrou que, ao observarem o mapa, ficou claro que seriam 3 horas de diferença... devido à marca de fuso horário.

A dupla (E) não soube resolver e não deixou nenhum registro.

Este problema exigia que os alunos, além de calcular a diferença entre as latitudes, percebessem que, ao dividirem o resultado e encontrarem um número quebrado para o fuso, verificassem o intervalo onde o ponto estaria localizado, para então determinarem as horas.

Pelo resultado apresentado pelas duplas, acredita-se que seriam necessárias mais situações envolvendo a idéia desta questão, para que, de fato, o conceito pudesse ser adquirido.

4. Um avião saiu de Tóquio 135º L às 20 horas do dia 29/04, com destino a Fernando de Noronha 30º O. A viagem durou 07 horas. Pergunta-se:

A que horas e dia o avião pousou em Fernando de Noronha?

Esperava-se como resposta 16 horas do mesmo dia.

As duplas (A), (B), (D) responderam corretamente mas, pelo relatório dos observadores, com dificuldade.

A dupla (C), ao invés de somar o tempo que durou a viagem, subtraiu.

(E) Encontraram a diferença de 11 horas, mas não pensaram em verificar o horário em Fernando de Noronha quando da saída do avião.

Mais uma vez os alunos não tiveram dificuldade em determinar a distância em graus de um lugar ao outro e a diferença horária, porém, o tempo da viagem, um elemento novo apresentado neste problema, surgiu como obstáculo para algumas duplas.

5. Um avião saiu de Honolulu, no Havaí 150º O às 22 horas do dia 28/04, com destino a Santiago do Chile 60º O. A viagem durou 11 horas. Pergunta-se:

A que horas e dia o avião pousou em Santiago ?

A resposta esperada era: 3 horas do dia seguinte.

A dupla (A) encontrou a diferença horária correta, mas, na hora de verificar que horas eram em Santiago somaram ao invés de subtrair o que gerou o erro.

A dupla (B) respondeu corretamente e, segundo comentário do observador, não apresentou dificuldade.

A dupla (C) também somou ao invés de subtrair a diferença horária. Encontrando 28 como resposta afirmaram que o dia só tem 24 horas, então partiram para uma subtração, buscando uma resposta lógica.

A dupla (D) pensou corretamente, só cometendo um erro de cálculo no final, encontram 2 horas ao invés de 3.

A dupla (F) encontrou a diferença horária apenas.

Algumas duplas não observaram que Santiago estava à esquerda de Honolulu, logo deveriam, após encontrar a diferença horária, 6 horas, subtrair do horário de saída do avião de Honolulu, 22 horas, para determinar o horário de saída do avião de Santiago, para então somar o tempo de viagem.

Percebe-se que existe, ainda, falta de domínio do conceito de fuso horário, o qual, para ser adquirido, vai exigir um trabalho maior, que não cabe nesta seqüência, mas, acredita-se, que as situações propostas nesta atividade apesar de não serem suficientes para a conceituação, contribuíram para sua transformação em objeto de pensamento.

6. Um dos meios de transporte mais rápidos de nossa época, o avião supersônico Concorde, é uma maravilha tecnológica que já começa a ultrapassar a compreensão humana. No interior do avião, os passageiros nem notam o estampido que se produz quando esse atinge a velocidade do som. Uma velocidade duas vezes superior à velocidade do som

confunde facilmente a própria noção do tempo. O horário local de chegada em Nova Iorque é o mesmo da partida de Londres.

Como você explica o fato de o horário de chegada em Nova Iorque ser o mesmo da partida de Londres? (LUCCI, E. A. Geografia – O homem no espaço global, Ed. Saraiva, 1999. p.305)

Todos concluíram que é devido ao fuso horário, mas nenhuma dupla procurou verificar as longitudes como se esperava que acontecesse.

Acredita-se que as atividades desenvolvidas anteriormente, onde as coordenadas geográficas foram trabalhadas no globo e no mapa, auxiliaram na resolução das questões apresentadas na atividade 2 desta parte da seqüência.

Percebe-se que os alunos, apesar de apresentarem dificuldade com o novo objeto, fuso horário, apresentaram um certo domínio em relação ao trabalho com as longitudes apresentadas.

3. ATIVIDADE 3

Para o desenvolvimento desta atividade, os alunos foram convidados a ler antes o texto do CD (anexo VIII), onde a idéia de escala foi apresentada.

1. Usando o mapa político da Região Sudeste (Pág 167 do Atlas), qual é a distância em linha reta entre as cidades A e B da tabela?

Cidade A	Cidade B	Distância em cm (no mapa)	Distancia em km (aprox.)
São Paulo	Belo Horizonte		
São Paulo	Jaú		
Pres. Venceslau	Sorocaba		
Rio de Janeiro	Vitória		

A resolução desta atividade foi tranqüila para todas as duplas, apenas com diferenças na aproximação das medidas. A idéia da escala ficou aparentemente clara. Todas as duplas observaram no mapa a escala de 70 km para cada cm, esperava-se que se prendessem à escala apresentada no texto, que era de 100 km para cada cm, o que não ocorreu.

Em um dos diálogos registrados (dupla A), pode-se concluir que o conceito de escala, para determinar distâncias entre dois pontos sobre um mapa, não representou um problema para os alunos:

Aluno 1: “São Paulo... Belo Horizonte... olha, o ponto amarelinho é a capital.”

Aluno 2: “Vamos medir a distância... deu...7,4 centímetros.”

Aluno 1: “Nossa, mas é sete milhões.”

Aluno 2: “Não pode ser... tem algo errado.”

Aluno 1: “Olha aqui... é sete milhões... mas sete milhões de que? De centímetro... ou será milímetro? Mas na escala do mapa... olha aqui... é setenta quilômetros para um centímetro”.

Aluno 2: “Então é só multiplicar...“

2. No Mapa político do Brasil (pág 97 do Atlas), escolham três capitais e determinem a distância, em linha reta, até a capital do Brasil.

Capital	Distância em cm (no mapa)	Distancia em km (aprox.)

Nesta atividade, esperava-se que os alunos observassem que a escala utilizada no mapa sugerido era diferente da escala do mapa anterior.

A dupla (F) utilizou a mesma escala do mapa anterior.

As demais duplas utilizaram a escala correta que era de 250 km por cm. O observador da dupla (C) registrou que os alunos iniciaram os cálculos com a escala do mapa anterior, mas um dos alunos da dupla percebeu o engano e corrigiram a tempo.

As respostas das duplas para a atividade 2 e 3 foram socializadas. Foi dada uma atenção especial à dupla (F) que, aparentemente, compreendeu a mudança de escalas de um mapa para o outro.

Foi dada por encerrada a seqüência de ensino.

4.6. RESUMO DAS CONCLUSÕES DA PARTE III

Esta última parte da seqüência de ensino tinha por objetivo a utilização dos conceitos de latitude e longitude, desenvolvidos no estudo do globo terrestre, e o desenvolvimento de conceitos ligados à idéia de fuso horário e de escalas.

Acredita-se que os objetivos desta parte da seqüência foram atingidos, tendo em vista que os alunos utilizaram os conceitos sobre coordenadas geográficas quando buscavam respostas aos problemas que envolviam latitude e longitude.

Para as questões que trabalhavam a idéia de fuso horário, os alunos apresentaram um nível de dificuldade maior. Apesar da dificuldade aparente, as duplas conseguiram concluir as atividades a contento, tendo já que os textos traziam exemplos e informações que auxiliaram na busca do conhecimento.

Acredita-se que existe um longo caminho até a aquisição do conceito de fuso horário, mas, os procedimentos utilizados pelos alunos durante a resolução dos problemas propostos sugerem uma estrutura de pensamento através de objetos matemáticos.

Houve uma grande utilização de conceitos matemáticos para a resolução dos problemas que envolviam fusos horários e escalas. Desta forma pode-se concluir mais uma vez que, uma situação envolve vários conceitos e um conceito só pode ser apreendido através de várias situações, como foi defendido por Vergnaud.

A criação de conceitos sobre a esfera, propiciou a criação de conceitos sobre o globo terrestre e a transição para o globo planificado: O Mapa.

Vergnaud afirma que:

> O funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende do estado os seus conhecimentos, implícitos ou explícitos. É necessário, pois, conceder uma grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, às suas continuidades, às suas rupturas, às suas passagens obrigatórias, à complexidade relativa das classes de problemas, dos procedimentos, das representações simbólicas, à análise dos principais erros e dos principais fracassos. (Vergnaud, 1991, p. 190)

Procurou-se neste estudo observar as rupturas dentro de um conjunto de situações, buscando analisar os procedimentos dos alunos durante a realização das atividades, suas formulações e representações.

Os esquemas que organizaram as condutas perante as situações apresentadas também foram observados em vários momentos deste estudo mediante as ações e observações que foram registradas.

Capítulo 5

Considerações Finais

O presente estudo foi desenvolvido a partir de uma seqüência de ensino que envolvia questões relacionando elementos da Geometria Esférica com conceitos utilizados para o estudo do Globo Terrestre.

Para a concepção da seqüência partiu-se de uma pesquisa com professores de geografia, análise de livros didáticos de geografia, propostas curriculares e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

A seqüência foi elaborada em três etapas. Na primeira etapa os alunos foram conduzidos a refletir sobre alguns aspectos da Geometria Esférica, buscando a criação de conceitos sobre um novo objeto, no caso a esfera. Na segunda etapa, buscou-se relacionar os conceitos trabalhados anteriormente de modo a criar significados para as linhas traçadas sobre o globo terrestre. Na terceira e última etapa procurou-se criar uma ponte entre o estudo do globo e sua forma planificada, o mapa, para trabalhar a idéia de fuso horário e de escala de mapas, onde a matemática está fortemente presente.

A metodologia de pesquisa foi a Engenharia Didática, de Michèle Artigue (1988). A construção da seqüência de ensino foi baseada nas Teorias de Vergnaud e de Vygotsky.

A questão de pesquisa escolhida para nortear este trabalho foi:

"Uma introdução à Geometria Esférica pode favorecer o estudo da Geografia do Globo Terrestre e em particular o estudo de mapas?".

Para responder à questão, o presente estudo buscou analisar as relações entre conceitos adquiridos com o estudo da Geometria Esférica e conteúdos específicos da Geografia, através de uma seqüência de ensino, tendo como sujeitos 14 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual localizada no município de Cotia, São Paulo.

Para o desenvolvimento da seqüência os alunos foram distribuídos em duplas, formadas aleatoriamente.

A formação de duplas possibilitou a interação verbal e social na sala de aula. Cada elemento da dupla teve a oportunidade de verbalizar seus pensamentos, formando hipóteses e validando, ou não, suas conjecturas. A comunicação entre os alunos da dupla foi fator indispensável para o desenvolvimento das atividades propostas e, conseqüentemente, para o processo de aprendizagem.

Na primeira etapa da seqüência, em posse de materiais concretos como bola de isopor, linha e alfinetes, os alunos deveriam responder questões ligadas ao estudo da Geometria Esférica, para os alunos uma “nova geometria”. Para resolução das atividades, os alunos criavam hipóteses, verificavam no material, discutiam, reformulavam hipóteses diante de situações em que precisavam manipular conceitos e realidades que já conheciam para chegar a saberes até então ignorados.

Durante o desenvolvimento da seqüência os alunos tiveram contato com um tipo diferente da geometria com que estavam acostumados a trabalhar: a Geometria Esférica. O trabalho com esse outro modelo de Geometria fez com que os alunos pudessem estabelecer relações com conceitos geográficos através da matemática.

Embora os conceitos de Geometria Esférica não sejam conteúdos abordados nas aulas de matemática, o presente estudo visou avançar na busca de novos conhecimentos. A proposta de incluir esta “nova geometria” em busca de formar conceitos relacionados ao estudo das linhas de referência do Globo Terrestre e as coordenadas geográficas gerou novos conhecimentos e relações, o que foi possível observar, por exemplo, quando as duplas relacionaram os meridianos e a linha do equador à medida de uma circunferência em graus, concluindo que mediam 180º.

Durante o desenvolvimento das atividades, constatou-se que os alunos fizeram ligação entre os conceitos geométricos na esfera e no plano, por exemplo, quando afirmaram: “Os três ângulos medem 90º, mas isso não pode acontecer...a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º” e ainda, quando foram convidados a descobrir que figura aparecia sobre a esfera quando traçassem três segmentos unindo três pontos não colineares e responderam: “É um triângulo... mas não pode ser...as linhas não são retas”,

Observou-se nos alunos modificações em suas concepções anteriores, porque, à medida que eram feitas as institucionalizações, passaram a utilizar a terminologia adequada à geometria esférica, como triângulo esférico, ângulo esférico, entre outros.

Na segunda etapa da seqüência, em posse do globo terrestre para desenvolvimento das atividades, foi possível observar que os alunos faziam uso dos conceitos adquiridos no estudo da esfera para responder às perguntas. Eles associaram circunferências máximas aos meridianos e ao Equador, circunferências menores com os paralelos terrestres. Identificaram retas perpendiculares sobre o globo. Utilizaram a distância entre dois pontos, sobre a esfera para determinar a distância entre o equador e os pólos.

Ainda na segunda parte da seqüência, duas atividades propunham a planificação da esfera através da projeção cilíndrica. Foi possível, com estas atividades, traçar uma ponte entre o globo terrestre e o mapa. Discutiu-se a deformação que ocorre ao projetar as linhas que estão sobre o globo em um plano. Os alunos observaram que, à medida que se afastam do Equador, na projeção cilíndrica, há uma distorção bastante grande das linhas e regiões sobre a esfera.

Na última parte, com a utilização do Atlas geográfico, foi observado que os alunos adquiriram um certo domínio sobre os conceitos de latitude e longitude, tendo em vista que resolveram as atividades onde era proposto que fornecessem a latitude e a longitude de países e cidades sobre os mapas, com facilidade. O mesmo ocorreu quando, em posse das latitudes e longitudes, localizaram os estados correspondentes.

Ainda da última parte da seqüência, para resolver os problemas que envolviam a idéia de fuso horário e de escalas de mapas, os alunos utilizaram conceitos adquiridos em matemática, reforçados pela manipulação do Atlas geográfico.

Constatou-se que a seqüência de ensino elaborada, e conduzida neste trabalho, se diferiu do ensino tradicional, basicamente pelo fato dos alunos serem constantemente forçados a agir. Não de qualquer forma, mas intencionalmente em busca da aprendizagem. Diversas vezes foram convidados a efetuar a leitura dos textos para validar suas conjecturas ou para buscar informações que lhes permitiriam responder as questões.

Espera-se que os alunos que tiveram contato com a Geometria esférica, de maneira geral, tenham outra visão da geometria plana e que, ao analisarem pequenas distâncias sobre a Terra, o uso da Geometria Plana responda suas questões, no entanto, quando pensarem em distâncias maiores, lembrem que são necessárias outros tipos de Geometria.

Para finalizar, pode-se concluir que um trabalho com a Geometria Esférica, tal como foi proposto neste estudo, em face dos resultados verificados durante o desenvolvimento da seqüência de ensino, contribui para o processo de compreensão de conteúdos específicos da Geografia, em especial, o estudo do Globo Terrestre e dos mapas.

Referências

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2002.

ADAS, M. *Geografia*. V. 1, 2, 3 e 4, São Paulo: Moderna, 2001.

ALMEIDA, L.M.A. ; RIGOLIN, T. *Novo Ensino Médio: Geografia*. São Paulo: Ática, 2002.

ALVES, S. *A Geometria do Globo Terrestre*. II Bienal da SBM, Bahia, 2004.

ARTIGUE, M. *Ingénierie Didactique*. Recherches em Didactiques des Mathématiques, vol. 9, nº 3, Genoble, France, 1988.

ASSMANN, H. *Reencantar a educação: Rumo à sociedade aprendente*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

ÁVILA, G. *Euclides, Geometria e Fundamentos*. RPM, São Paulo, n. 45, p.1, 2001.

ÁVILA, G. *Legendre e o postulado das paralelas*. RPM, São Paulo n. 22, p. 16, 1993.

BOCZKO, R. *Conceitos de Astronomia*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1984.

BOLIGIAN, L. et al. *Geografia: Espaço e Vivência*. V. 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries, São Paulo: Atual, 2005.

BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Geografia*. Brasília, MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, MEC, 1999.

COLEÇÃO MEMÓRIA DA PEDAGOGIA. *Lev Semenovich Vygotsky: Uma Educação Dialética*. São Paulo: Ediouro, n. 2, 2005.

COUTINHO, L. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. Rio de Janeiro: Sindicato Nacional dos Editores de Livros, 1989.

DARÓS, V. *Vivendo a Geografia*. Vol.1, São Paulo: FTD, 1986.

DEVLIN, K. *Matemática: A ciência do padrões*. Tradução: DURÃES, A. M., Portugal:Porto, 2002.

FAZENDA, I. C. A. *Dicionário em construção: Interdisciplinaridade*, São Paulo: Cortez, 2001.

FAZENDA, I. C. A. *Didática e interdisciplinaridade*. Campinas, SP: Papirus, 1998.

FRANCHI, A. et al. *Educação Matemática: Uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999.

IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*, Rio de Janeiro, IBGE, 2002.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática*. IMPA – VITAE, Rio de Janeiro: Gráfica Vagner Ltda, 2001

LUCCI, E. A. *Geografia – O homem no espaço global*. São Paulo: Saraiva, 1999.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez, 1995.

MAGINA, S.; et al. *Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. São Paulo: PROEM, 2001

MAGNOLI, D.; ARAÚJO, R. *Geografia – Paisagem e território*, São Paulo: Moderna, 2001.

MARTOS, Z. G. Geometrias Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP – Rio Claro.

MILLER, Joe In: Jonathon Porrit. *Salve a Terra*. São Paulo: Globo, 1991

MONTANGERO, J.; NAVILLE, D. M. *Piaget ou a Inteligência em Evolução*. Porto Alegre, RS: Artmed, 1998.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E.F.S. *Aprendizagem Significativa: A Teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2001.

NAKATA, H.; COELHO, M. A, *Geografia Geral*. São Paulo: Moderna, 1985.

NOGUEIRA, N.R. *Pedagogia dos Projetos: Uma Jornada Interdisciplinar em Rumo ao Desenvolvimento das Múltiplas Inteligências*. São Paulo: Érica, 2001.

OLIVA, W. M. – artigo: “*A independência do axioma das paralelas e as Geometrias Não-Euclidianas*” – RPM nº 2, p. 28 – 1983

OLIVEIRA, M. K. “*Algumas contribuições da psicologia cognitiva*” Série Idéias, nº 6, São Paulo, SP, FDE, 1992. p. 47 – 51.

OLIVEIRA, P. R. *Currículo de Matemática: do programa ao projeto*. 2004. 174 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo.

PATAKI, I. *Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma proposta interdisciplinar*. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PESCUMA, D.; CASTILHO A. P. F., *Projeto de Pesquisa. O que é? Como fazer?: um guia para sua elaboração*. São Paulo: Olho D’Água, 2005.

PIFFER, O. *Geografia no Ensino Médio*, São Paulo: IBEP, 2000.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática: da Organização Linear à Idéia de Rede*. São Paulo: FTD, 2000.

PITTE, J. R. (coord.) *Geografia – A natureza humanizada*, São Paulo: FTD, 1998.

RANDLES, W. G. L. *Da terra plana ao globo terrestre*. Tradução: CASTILHO, M. C. F. Campinas, SP: Papirus, 1994.

REVISTA NOVA ESCOLA. *Vygotsky: O teórico social da inteligência*. São Paulo: Abril, Edição Nº139, jan./ fev. 2001. Edição especial.

ROHDEN, H. *Einstein – O Enigma do Universo*. São Paulo: Alvorada, 1987

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática, 1º grau.* 4ª ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SENE, E.; MOREIRA, J. C. *Trilhas da Geografia*, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries, São Paulo: Scipione, 2005.

TÓRTORA, O. D. *Cartões.* Disponível em: <http://osvaldotortora.com.br> Acesso em 15 maio 2006.

VERGNAUD, G. *La Théorie des champs conceptuels*. Recherches en didactiques des mathématiques. vol. 10, nº 23, Genoble, France 1991.

VESENTINI, J. W. *Sociedade e espaço – Geografia Geral e do Brasil*, São Paulo: Ática, 2000.

VITRAC, B. Euclide d'Alexandrie, "*Les Eléments. Traduits du texte de heiberg*." Vol. 1, Introduction générale de M. Caveing, lives I – IV: Géomètrie Plane. Paris: PUF, 1990.

VYGOTSKY, L.S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológico superiores*. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

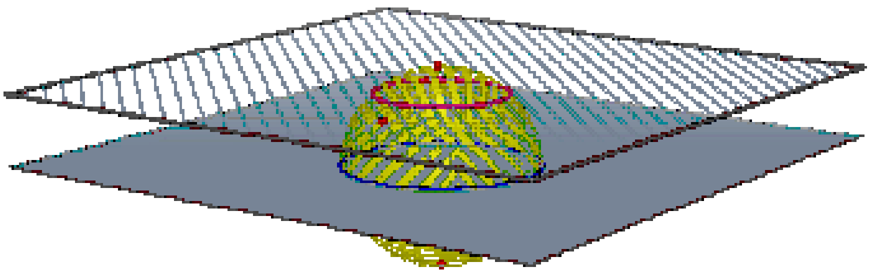
VYGOTSKY, L.S. *Pensamento e linguagem*. 3.ed. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 1991.

Anexo I

PARTE I – TEXTO 1

INTERSECÇÃO DE UM PLANO COM UMA ESFERA

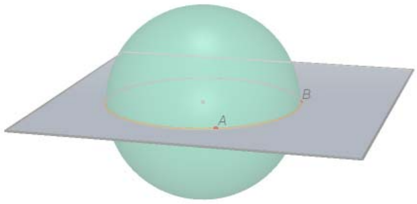
Se um plano corta uma esfera, a sua intersecção com essa esfera é um círculo máximo ou um círculo menor.

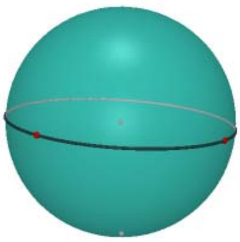


Círculo Máximo

Círculos Menores

<u>Círculo Máximo</u>: A intersecção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada um círculo máximo da superfície esférica. Há uma forte razão para esse nome: os círculos máximos são os círculos de maior raio contidos na superfície esférica.





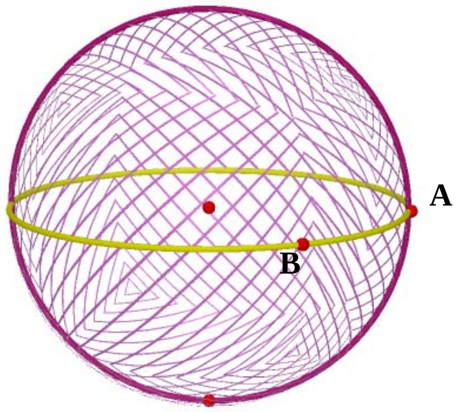
Se tomarmos apenas a linha que se forma sobre a esfera, ao traçarmos um plano passando pelo seu centro, a linha será denominada **Circunferência máxima**.

RETA SOBRE A ESFERA

Na geometria temos pontos e retas.

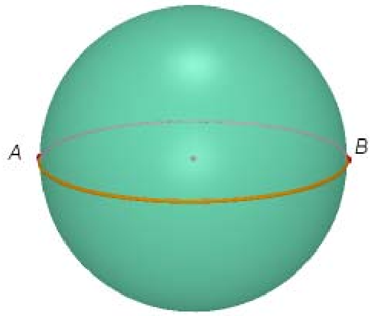
Considerando a superfície da esfera, como sendo o plano desta geometria, as retas são as circunferências máximas também chamadas de **geodésicas** da superfície esférica.

Dados dois pontos A e B sobre a superfície da esfera, chamaremos de **reta** a **circunferência máxima** que passa por esses dois pontos.

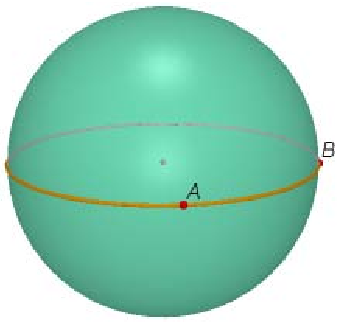


Os pontos A e B dividem a reta em dois arcos.

Esses dois arcos podem ser:



- iguais se A e B forem extremos de um mesmo diâmetro da esfera.



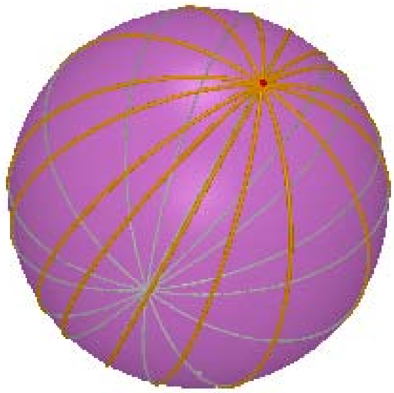
- Um maior e o outro menor.

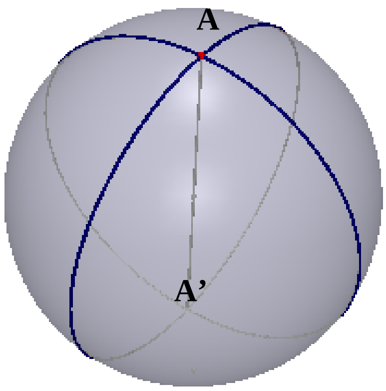
Cada um desses arcos recebe o nome de **Segmento de reta**.

PARTE I – TEXTO 2

RETAS

Dado um ponto sobre a esfera, podemos encontrar infinitas retas que passam por este ponto.





Observe na bola de isopor, que ao traçarmos estas retas, elas se encontram em dois pontos, diametralmente opostos (na figura A e A').

O que nos leva a concluir, que na esfera não existem retas paralelas, apenas retas concorrentes.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Euclides de Alexandria que viveu por volta do ano 300 a.C., em uma de suas obras, intitulada "Os Elementos" dá uma lista de cinco postulados e cinco noções comuns, os quais serviram como base para a construção de toda a geometria, denominada Euclidiana.

Na tentativa de provar o 5º Postulado de Euclides, também chamado de Postulado das Paralelas, o qual acreditava-se poder ser demonstrado através dos quatro primeiros postulados, surgiram as Geometrias Não-Euclidianas.

O Quinto postulado hoje pode ser traduzido:

Por um ponto do plano fora de uma reta passa uma única reta paralela a essa reta.

(retas paralelas de um plano são aquelas que prolongadas indefinidamente não se encontram).

No início do século 19 ainda não estava claro se o Quinto Postulado tinha validade absoluta ou se podia ser desobedecido em geometrias alternativas.

(*)JANOS
BOLYAI
(1802-1860)

(*)NICOLAI
IVANOVITCH
LOBACHEWISKY
(1793-1856)

Bolyai e **Lobachevsky** criaram a Geometria Hiperbólica, onde, em uma plano existem infinitas retas paralelas.

Riemann criou a Geometria Elíptica, que tem como um de seus axiomas o que estabelece que **não existem retas paralelas a uma reta dada**, contrariando o 5º Postulado de Euclides.

(*)GEORGE
FRIEDERICH
BERNHARD RIEMANN
(1826-1866)

O grande matemático alemão Bernhard **Riemann** chamou a atenção para uma falha cometida por Euclides, Saccheri e os outros pioneiros. É que eles sempre admitiam, sem contestar, que uma reta tem de ser infinita e ilimitada. Isso é dito no 2º postulado de Euclides e significa que, se um cidadão começasse a viajar em linha reta, seguindo a trajetória de um raio de luz, nunca chegaria ao fim da linha, mesmo se fosse eterno. Talvez isso valha apenas para o espaço euclidiano e não seja necessário em outros espaços, sugeriu Riemann.

Deixando de lado essa restrição, Riemann mostrou que podia criar uma nova geometria, a que denominou de Geometria Elíptica.

(*) Figuras retiradas de www.educacaomatematica.vilabol.uol.com.br

Mais tarde, um outro matemático, chamado **Félix Klein**, denominou a geometria Riemanniana de:

Elíptica,

Admitindo que duas retas distintas possuem somente um ponto em comum.

(*)FÉLIX KLEIN
(1849-1925)

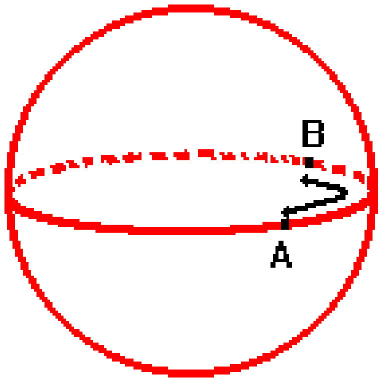
Esférica,

Admitindo que duas retas distintas se interceptam em dois pontos distintos diametralmente opostos.

(*) Figura retirada de www.educacaomatematica.vilabol.uol.com.br

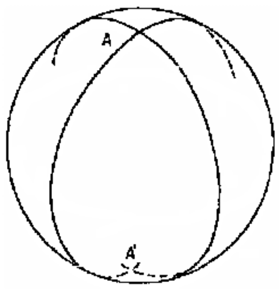
PARTE I – TEXTO 3

Distância na superfície esférica



Dados dois pontos sobre uma esfera a **distância** entre esses pontos é a **menor porção do círculo máximo** que contém esses pontos. Embora, por A e B outros círculos possam ser considerados, a distância entre eles é sempre medida sobre o único círculo máximo determinado por A e B, isto porque a menor distância, - característica das geodésicas - é obtida se medida ao longo do círculo máximo a que pertencem os pontos A e B.

Para medir distâncias sobre a superfície esférica podemos usar como unidade de medida o grau.



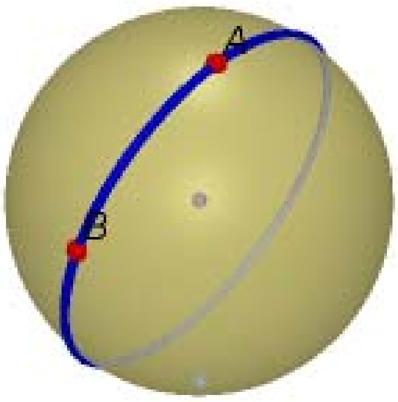
Uma volta completa sobre a esfera, corresponde a 360º.

Conhecendo o comprimento da circunferência máxima, podemos determinar a distância em graus de um ponto a outro com o auxilio da regra de três.

Se o comprimento de uma circunferência máxima for de 30 cm e a distância entre dois pontos A e B sobre a circunferência for de 10 cm, temos:

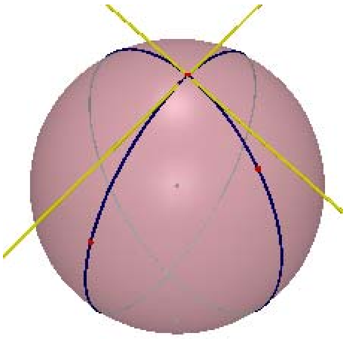
30 cm —— 360º
10 cm —— x
então, temos:

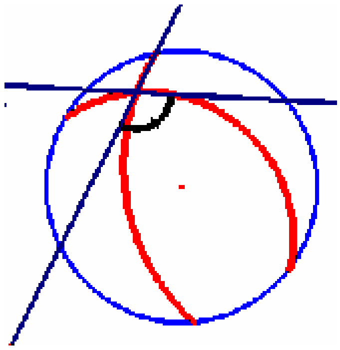
$30\ x = 360\ .\ 10$
$30\ x = 3600$
$x = \frac{3600}{30}$
$x = 120º$



Ângulo esférico

Sendo os círculos máximos as “retas” da superfície esférica, define-se o ângulo esférico como sendo a intersecção de dois círculos máximos e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção.

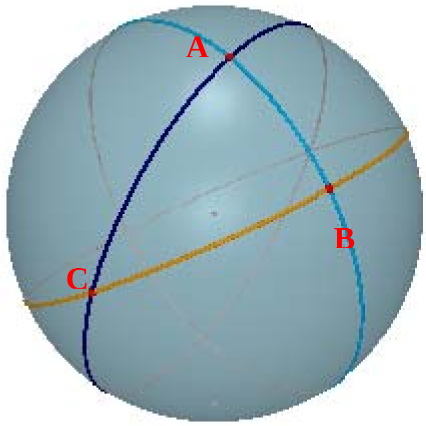


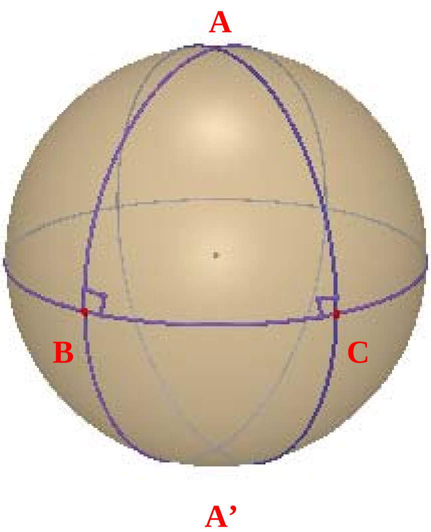


PARTE I - TEXTO 4

Triângulo esférico

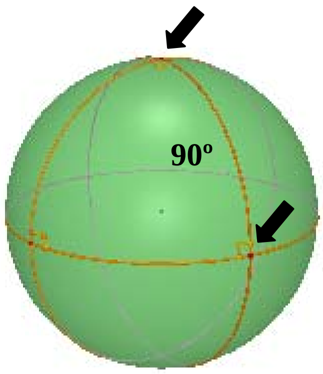
Sejam A, B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a um mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem esses pontos dois a dois, chama-se triangulo esférico ABC.





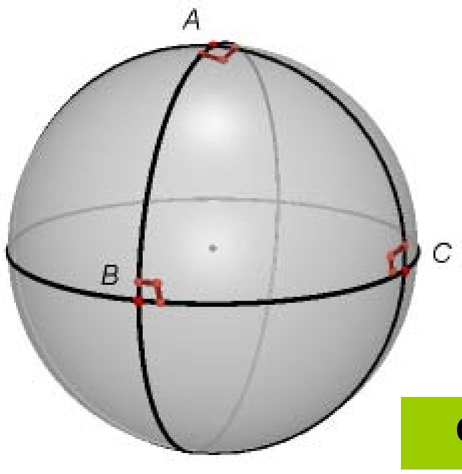
As retas ABA’ e ACA’ são perpendiculares à reta BC (formam ângulos de 90º com a reta BC) e interceptam-se nos pontos antípodas A e A’ (extremidades de um mesmo diâmetro da esfera).

A reta BC, perpendicular às retas ABA’ e ACA’ é a **polar** comum dos pontos A e A’
Então dizemos que a reta BC é a reta polar à reta ABA’ e que A e A’ são pólos da reta BC. Da mesma forma dizemos que a reta BC é a reta polar à reta ACA’ e que os pontos A e A’ são pólos da reta BC.



A e A’ são os pólos da reta BCDE

A distância de A ou A’ a qualquer ponto da reta BC é constante e mede 90º.



O Triângulo da figura ao lado, possui três ângulos retos (90º) e três lados medindo 90º, dizemos que ele é trirretângulo e trirretilátero

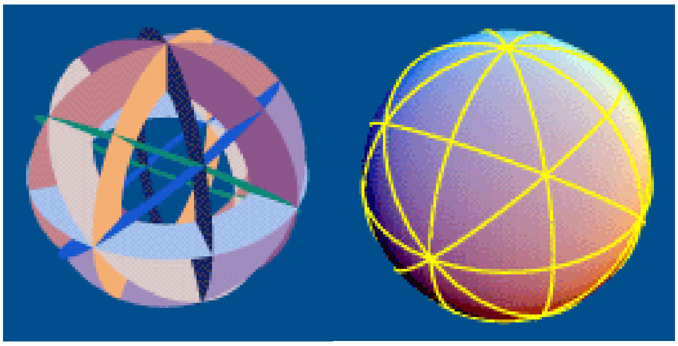
Os triângulos esféricos podem ser classificados:

Quanto aos ângulos:

Retângulo – possui um ângulo reto
Birretângulo – possui dois ângulos retos
Trirretângulo – possuios três ângulos retos

Quanto aos lados:

Retilátero – possui um lado medindo 90º
Birretilátero – possui dois lados medindo 90º
Trirretilátero – possui três lados medindo 90º



http://www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/triangulos3.htm

Observando as Figuras ao lado, a superfície da esfera é dividida em 48 “triângulos”, todos iguais entre si, e cujos ângulos são de 90, 60 e 45 graus:

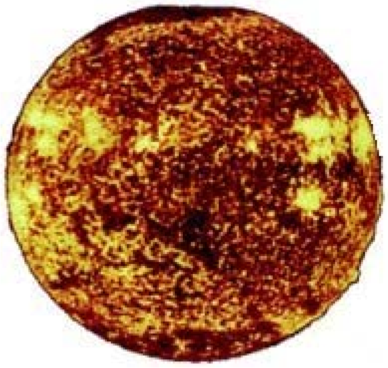
Observemos os vértices onde se juntam quatro triângulos (portanto, cada um dos quatro ângulos que aqui se encontram é de 90º=360º/4), os vértices onde se juntam seis cada um com 60º = 360/6 e outros onde se juntam oito triângulos, cada um com 45º = 360/8.

No entanto: 90 + 60 + 45 dá 195, e não 180: temos, portanto, um triângulo cuja soma dos ângulos não é 180 graus! Porém, tal não nos deve surpreender muito, porque, na verdade, não se trata propriamente de um triângulo: trata-se de um triângulo “gordo”, desenhado sobre uma esfera, e cujos lados não são segmentos, mas sim o que de mais parecido com segmentos pode ser desenhado numa esfera, ou seja, arcos de círculo máximo.

PARTE II – TEXTO 1

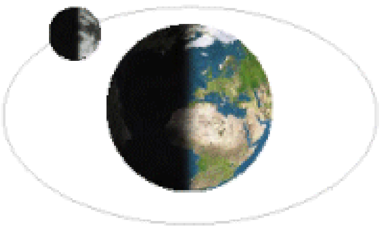
A Terra gira à volta do Sol!
(Adaptado do site: http://www.cienciaviva.pt)

Cedo, habituamo-nos a observar que o dia se sucede à noite e que a noite se sucede ao dia. Porquê?



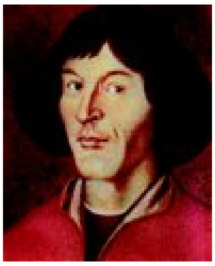
Porque vemos o Sol nascer, percorrer o céu e iluminar-nos. Mas ao fim do dia ele desaparece por detrás dos montes ou no mar. Então, surgem as estrelas e a Lua, nascendo e desaparecendo para de novo dar lugar ao Sol.

As pessoas que viveram há muitos, muitos anos, pensavam que o Sol se movia em torno da Terra. Mas, há cerca de 450 anos, Nicolau Copérnico mostrou que a Terra se move em torno do Sol, e os dias se sucedem às noites e as noites aos dias, porque a Terra gira sobre si própria.



A Terra, no seu movimento em volta do Sol, percorre uma trajetória aproximadamente circular. A Lua roda em volta da Terra e acompanha o seu movimento em torno do Sol.

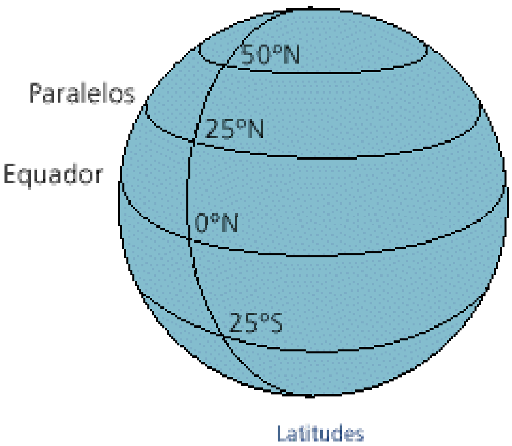
Nicolau Copérnico nasceu no ano de 1473 na Polônia.
Copérnico dedicou-se ao estudo da medicina, das leis e da astronomia.
Foi Copérnico quem pela primeira vez apresentou provas convincentes de que a Terra gira em torno do Sol. Escreveu as suas idéias no livro Sobre a Revolução dos Corpos Celestes, publicado no ano de 1543, em Nuremberga, na Alemanha.



www.educacaomatematica.vilabol.com.br

O Globo Terrestre

Foi a observação da regularidade do movimento da Terra em volta do Sol que permitiu aos astrônomos e geógrafos encontrar métodos práticos para determinar a nossa posição sobre a Terra.



http://paginas.terra.com.br

Para localizar um determinado ponto ou região da Terra podemos utilizar o globo terrestre. Para isso utilizamos as chamadas Coordenadas Geográficas: **latitude** e **longitude**.

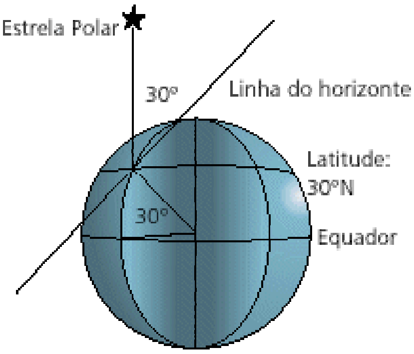
LATITUDE

Os pontos mais a norte e mais a sul do equador são referenciados ao longo de linhas circulares paralelas desenhadas sobre a Terra. Essas linhas são os paralelos e a sua posição é medida em graus: o equador é a linha de zero graus, o Pólo Norte está a 90º N em relação ao equador, e o Pólo Sul a 90º S em relação ao equador. A medida da posição norte-sul chama-se latitude.

A latitude do trópico de Câncer é de 23 graus e 30 minutos, precisamente igual à inclinação do eixo da Terra em relação ao plano da sua órbita em torno do Sol!

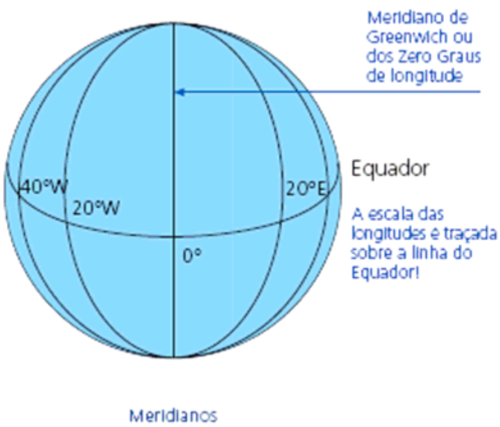
Para determinar a latitude de um lugar durante o dia, é necessário saber, para além do ângulo que o Sol ao meio do dia faz com o horizonte, a data e a nossa posição aproximada sobre a Terra: é preciso saber se estamos no hemisfério Norte ou no hemisfério Sul e qual a nossa posição em relação aos trópicos. No hemisfério Norte a inclinação da Estrela Polar é a latitude de um lugar.

A latitude de um lugar é a medida do ângulo que se percorre quando se vai do equador até ao paralelo que passa por esse lugar, perpendicularmente ao equador. Esse ângulo é igual ao ângulo que a Estrela Polar faz com o horizonte, a qualquer hora. Medir a latitude é simples, pois no céu noturno do hemisfério Norte da Terra, a Estrela Polar está sempre presente.



Fonte: http://paginas.terra.com.br

LONGITUDE



Fonte: http://paginas.terra.com.br

Já sabemos determinar posições mais a norte ou mais a sul sobre a Terra, isto é, sabemos determinar a latitude de um lugar. Para determinar completamente a nossa posição sobre a Terra é necessário saber se estamos mais a leste ou a oeste, isto é, precisamos saber a longitude. Agora, o Sol e as estrelas não nos podem ajudar.

A idéia de determinar a nossa posição leste-oeste veio do astrônomo grego Ptolomeu, que nasceu por volta do ano 100 d. C. Em seu livro a *Geografia* Ptolomeu introduzia o sistema de latitudes e longitudes tal como é usado hoje.

A longitude de um ponto A é a medida do arco de paralelo que passa por A, situado entre o meridiano que contém A e o **meridiano de Greenwich**. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0º a 180º E (leste, alguns autores substituem o E por L) ou de 0º a 180º W (oeste, alguns autores substituem o W por O).

Anexo VI

PARTE II – TEXTO 2

MAPA

É a representação do globo terrestre, ou de trechos da sua superfície, sobre um plano, indicando fronteiras políticas, características físicas, localização de cidades e outras informações geográficas, sócio-políticas ou econômicas.

Fonte: http://paginas.terra.com.br

Fonte: http://paginas.terra.com.br

A única forma rigorosa de representar a superfície da Terra é por meio de globos, nos quais se conservam exatamente as posições relativas de todos os pontos e as dimensões são apresentadas em uma escala única.

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

São métodos utilizados para representar a superfície de uma esfera (ou de um elipsóide), no todo ou em parte, sobre uma superfície plana.

São mais de 200 tipos de projeções.

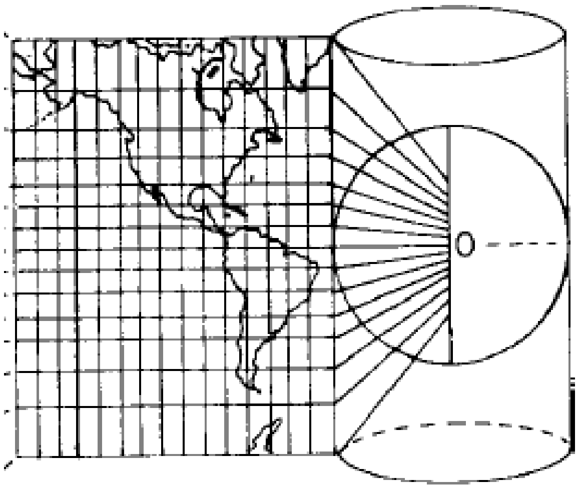
No quadro abaixo encontramos um resumo das classificações das projeções:

- Projeções
  - 1. Quanto ao método
    - geométricas
      - perspectivas
      - pseudo-perspectivas
    - analíticas
    - convencionais
  - 2. Quanto à situação do ponto de vista
    - gnomônica
    - estereográfica
    - ortográfica
  - 3. Quanto à superfície de projeção
    - planas ou azimutais
    - por desenvolvimento
      - cônicas e policônicas
      - cilíndricas
      - poliédricas
  - 4. Quanto à situação da superfície de projeção
    - planas ou azimutais
      - polares
      - equatoriais ou meridianas
      - horizontais ou oblíquas
    - cônicas e policônicas
      - normais
      - transversas
      - horizontais ou oblíquas
    - cilíndricas
      - equatoriais
      - transversas ou meridianas
      - horizontais ou oblíquas
  - 5. Quanto às propriedades
    - eqüidistantes
      - meridianas
      - transversais
      - azimutais ou ortodrômicas
    - equivalentes
    - conformes
    - afiláticas

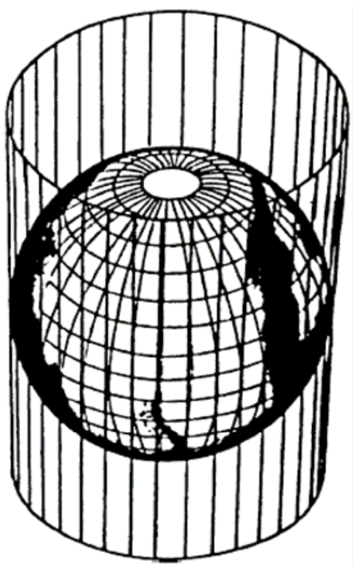
www.mar.mil.br/dbn/bhn/publicacao/download/cap2a.pdf

Neste trabalho optamos em trabalhar apenas uma das projeções. É importante ter em mente que cada tipo de projeção tem um objetivo específico, que no nosso estudo não serão discutidos, mas vocês podem buscar informações caso tenham interesse.

Com o globo de arame projetado sobre a cartolina vimos a **Projeção cilíndrica** que é geralmente usada para mapas de toda a superfície terrestre, uma vez que tendem a evitar a grande distorção que acontece em projeções cônicas e azimutais em áreas que estão distantes do ponto de contato.

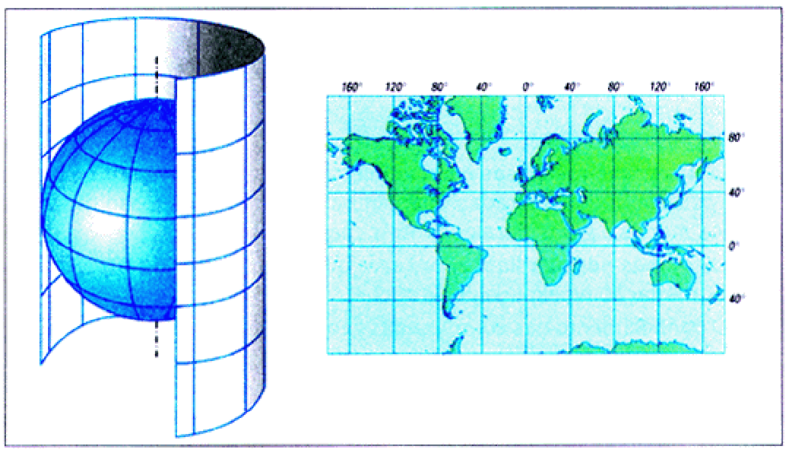


www.sispesca.io.usp.br



www.dpi.inpe.br

Neste tipo de projeção as deformações acontecem ao longo das médias e altas latitudes; é o tipo de projeção mais utilizada, principalmente no meio didático. As baixas latitudes apresentam-se respeitando as devidas formas.

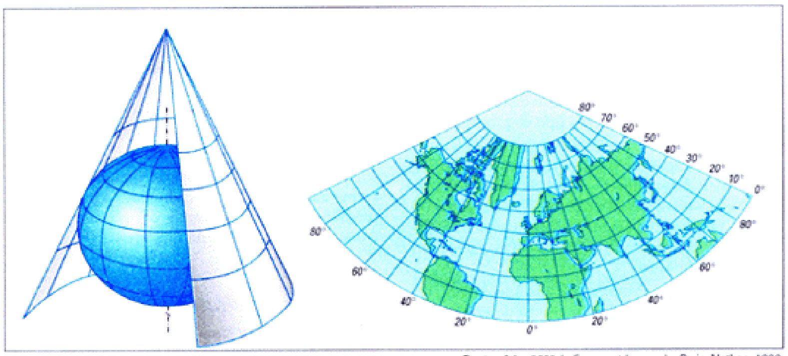


Fonte: *Atlas 2000*, la France et le monde. Paris, Nathan, 1998.

www.isba.com.br

PROJEÇÃO CÔNICA

Muito boa para cartografar as altas latitudes; apresenta distorções ao longo das baixas latitudes. Um aspecto negativo quanto a esta projeção é o fato de representar áreas pouco extensas e apenas um hemisfério por vez.

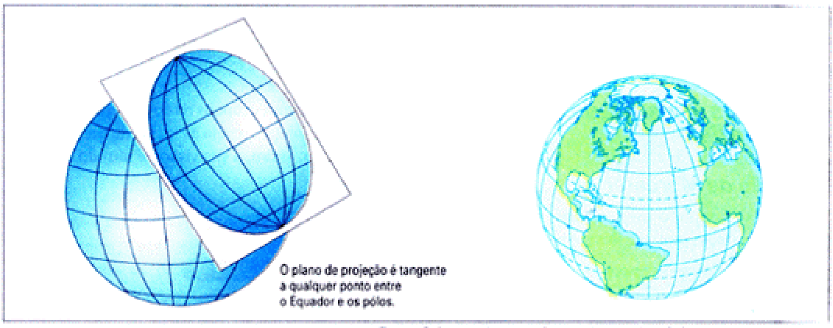


Fonte: *Atlas 2000*: la France et le monde. Paris, Nathan, 1998.

www.isba.com.br

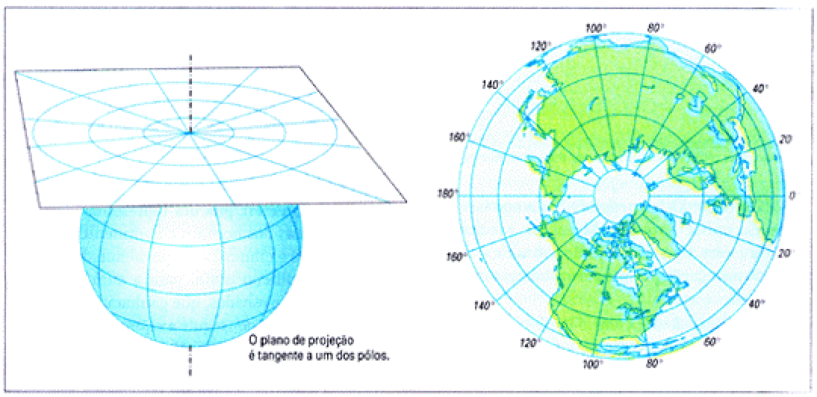
PROJEÇÃO AZIMUTAL

Muito boa para representar parte de um continente, pois apresenta poucas deformações. Os mapas são elaborados a partir de um plano tangente sobre a esfera terrestre.



Fonte: *Oxford concise atlas of the world*. New York, Oxford University Press, 1994

www.isba.com.br



Fonte: *Atlas 2000*: la France et le monde. Paris, Nathan, 1998

www.isba.com.br

Anexo VII

PARTE III – TEXTO 1

Fusos Horários

A ilustração deste texto foi extraída do site www.esaf.fazenda.com.br - Programa Nacional de Educação Fiscal

De acordo com a definição de tempo civil, lugares de longitudes diferentes têm horas diferentes porque têm meridianos diferentes. Inicialmente, cada nação tinha a sua hora, que era a hora do seu meridiano principal.

Aqui no Brasil, até 1913, quando na Capital Federal, atual cidade do Rio de Janeiro, era 12 horas, em Recife eram 12:33 e em Porto Alegre eram 11:28.

Como as diferença de longitudes entre os meridianos escolhidos não eram horas e minutos exatos, as mudanças de horas de um país para outro exigiam cálculos incômodos. Para evitar isso, adotou-se o convênio internacional dos fusos horários.

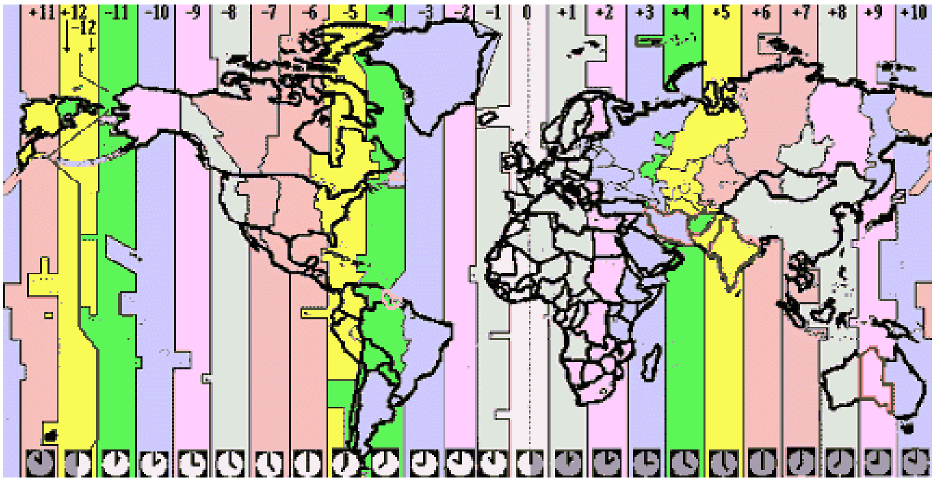
Cada fuso compreende 15 graus e corresponde a 1 hora. Fuso zero é aquele cujo meridiano central passa por **Greenwich**.

Os fusos variam de **0h a +12h para leste** de Greenwich e de **0h a -12h para oeste** de Greenwich.

Todos os lugares de um determinado fuso, apesar de não estarem exatamente sobre o meridiano do fuso, têm a hora do meridiano central do fuso.

Pelo Brasil passam quatro fusos, que determinam horários distintos, dependendo da localidade. Observe o mapa:

Hora Legal: é a hora civil do meridiano central do fuso



www.astral-online.com/amostra/fuso/shtm

- – 2 h: arquipélago de Fernando de Noronha.
- – 3 h: estados do litoral, Minas Gerais, Goiás, Tocantins e parte oriental do Pará.
- – 4 h: parte ocidental do Pará, parte oriental do Amazonas, Mato Grosso e Mato Grosso do Sul.
- – 5 h: parte ocidental do Amazonas e Acre.

Na tabela a seguir vocês descobrem qual a correção necessária em relação ao Tempo Universal e a hora de Brasília para diversas localidades do Brasil.

Localidade	Correção ao Tempo Universal	Correção à hora de Brasília
Acre, **Amazonas** (Região de Atalaia do Norte, Boca do Maoco, Benjamin Constant, Eirunepé, Envira, Ipixuna).	-5 h	-2 h
Amazonas (Região de Boca do Acre, Jutaí, Manaus, Floriano Peixoto), **Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Pará** (Região de Altamira, Oribidos, Prainha, Oriximina, Santarém), **Rondônia, Roraima.**	-4 h	-1 h
Rio Grande do Sul, Paraná, Santa Catarina, **Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo, Alagoas, Bahia, Ceará, Maranhão, Paraíba, Pernambuco, Piauí, Rio Grande do Norte, Sergipe, Goiás, Amapá, Pará** (Região de Belém, Marabá, Serra Norte, São Félix do Xingu).	-3 h	0 h
Ilhas de Fernando de Noronha, Trindade, Martin Vaz, Atol das Rocas, Penedos de São Pedro e São Paulo .	-2 h	+1 h

obs.: As correções não consideram o horário de verão.

Para resolver problemas relativos a fusos horários podemos:

Determinar a longitude da cidade que se conhece a hora e daquela que se quer conhecer.

Para hemisférios diferentes (L e O), somar as longitudes.

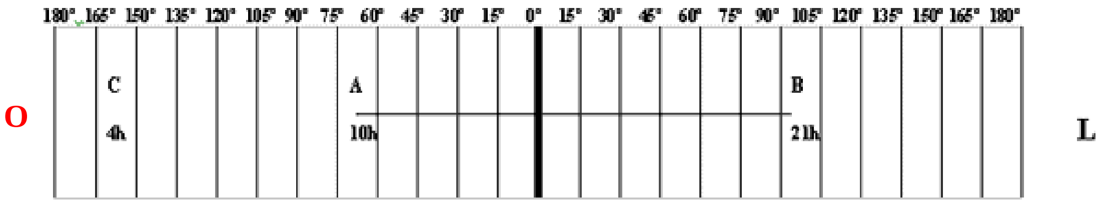
Para hemisférios iguais (L e L) ou (O e O), subtrair as longitudes.

O resultado da soma ou subtração deverá ser dividido por 15 (15º = 01 hora). Caso a divisão não seja exata verifica-se o intervalo onde está localizado o ponto e verificam-se as horas.

O resultado da divisão será a diferença horária que deverá ser somada se o local que quisermos saber a hora estiver a leste ou subtraído, se estiver a oeste.

Vamos ver alguns exemplos:

1) Observe a figura



www.astral-online.com/amostra/fuso/shtm

Se na cidade B localizada a 105º L são 21 horas do dia 10/03. Que horas e dia será na cidade A localizada a 60º O ?

Resolução:

Como as cidades A e B estão em hemisférios diferentes devemos somar as longitudes: 105º + 60º = 165º

Dividindo 165 por 15 temos 11, ou seja, são onze horas de diferença. Como queremos saber o horário em uma cidade que está a oeste da que conhecemos, subtraímos 11 de 21, obtendo o resultado: Em A será 10 horas do mesmo dia.

2) Se na Cidade C, localizada a 150º W, são 4 horas, que horas e dia será na cidade A localizada a 60º W?

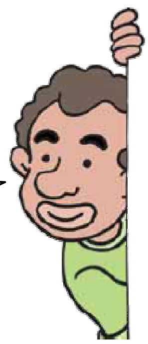
Resolução:

Como as cidades A e C estão no mesmo hemisfério devemos subtrair as longitudes: 150º – 60º = 90º

Dividindo 90 por 15 temos 6, ou seja são seis horas de diferença, como queremos saber o horário em uma cidade que está à leste da que conhecemos, somamos 4 e 6 e obtemos como resultado 10, ou seja será em A 10 horas do dia 10/03.

Duas cidades localizadas a leste de Greenwich: a que tem longitude maior, possui a hora mais adiantada.

Duas cidades localizadas a oeste de Greenwich: a que tem a longitude maior, possui a hora mais atrasada.

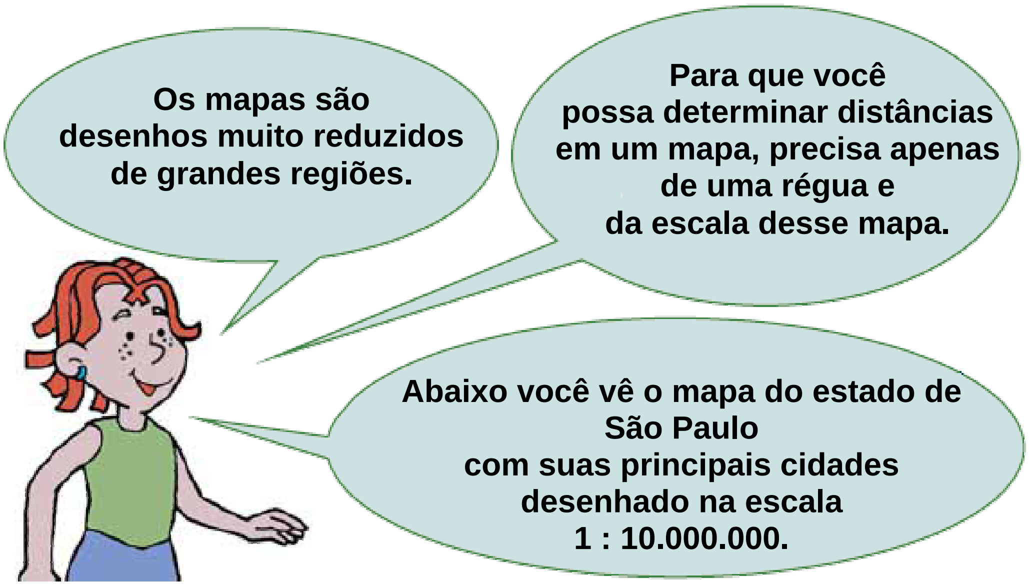


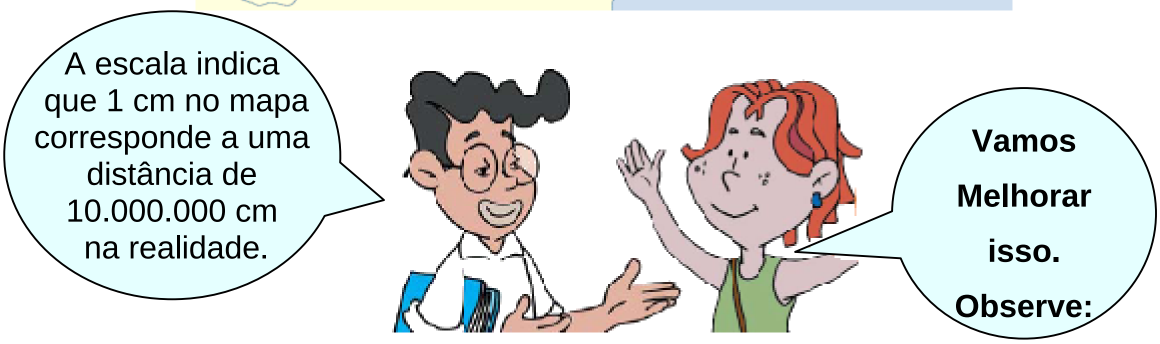
Sites pesquisados em 03/01/06 http://www.numaboa.com.br/relogios/astronomia/medTempo.php e http://www.formosaonline.com.br/geonline/textos/geografia/cartografia05.htm

Parte III - Texto 2

A ilustração deste texto foi extraída do site www.esaf.fazenda.com.br - Programa Nacional de Educação Fiscal

OS MAPAS

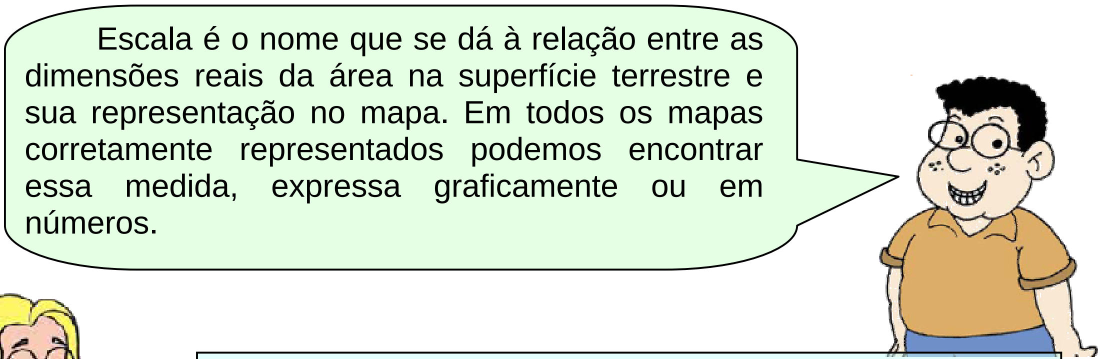




10.000.000 cm = 100.000 m = 100 km

Com uma régua medimos no mapa a distância entre essas duas cidades.
Encontramos 3,62 cm.
Como cada centímetro nesse mapa representa 100 km, a distância real será:
3,62 · 100 = 362 km, aproximadamente.

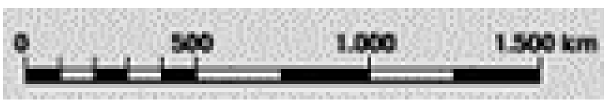
ESCALAS



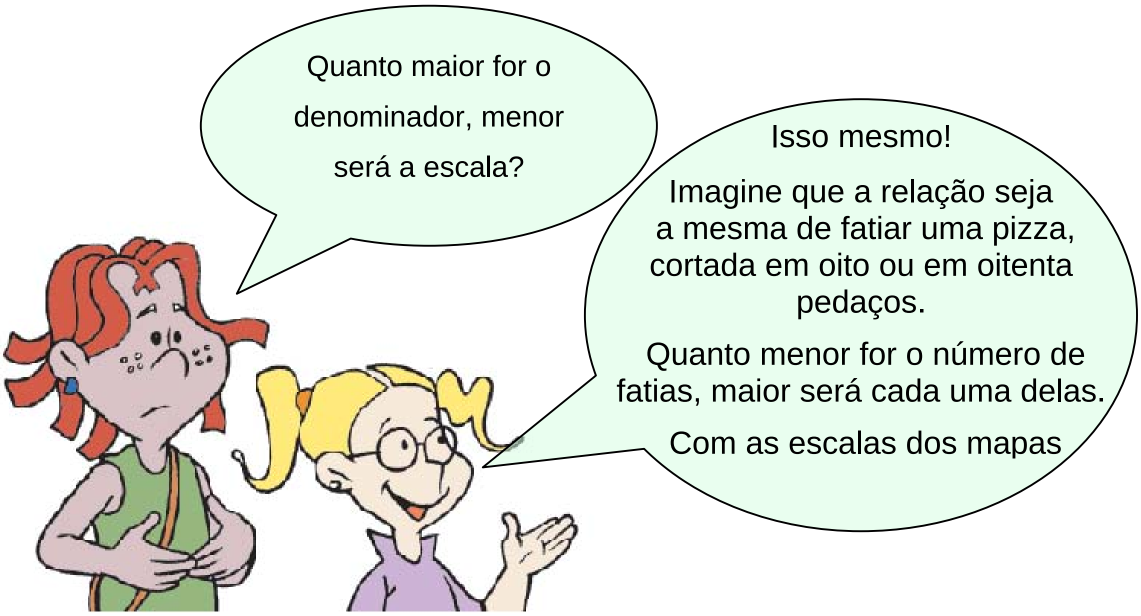
A escala numérica pode ser representada por uma razão, como 1:500.000 ou por uma fração ordinária, por exemplo, $\frac{1}{500.000}$.

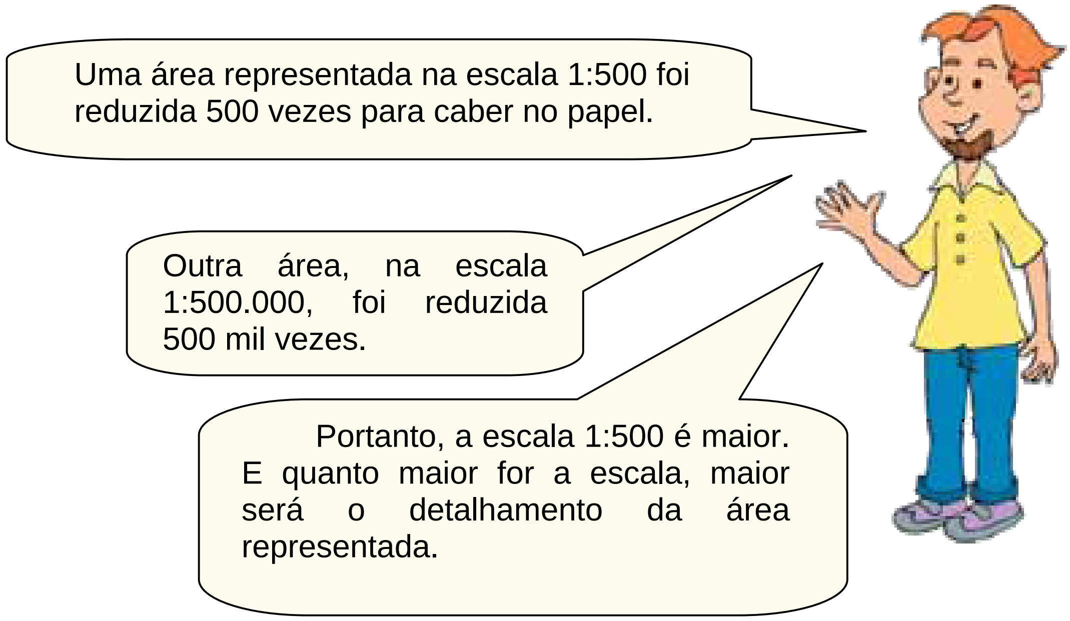
Essa escala significa que cada centímetro no mapa representa 500.000 centímetros, ou seja, 5 km no terreno.

A escala gráfica aparece nos mapas como uma linha reta dividida em partes iguais, por exemplo:



ESCALAS GRANDES E PEQUENAS





Sites pesquisados em 03/01/06
http://www.numaboa.com.br/relogios/astronomia/medTempo.php e
http://www.formosaonline.com.br/geonline/textos/geografia/cartografia05.htm

Anexo IX

Roteiro para o observador – Parte I – A Esfera
Dupla: ______________________
Data ___/___/ 2006

ATIVIDADE 1

1) Se resolvêssemos "fatiar" a esfera, que figuras encontraríamos? 2) O que seria uma reta na superfície da esfera? (coloque 2 pontos representados por alfinetes e trace a "reta" com a linha)

Quanto a atividade 1:

No item a os alunos conseguiram visualizar os cortes?

( ) sim, sem dificuldade.
( ) sim, com um pouco de dificuldade.
( ) sim, mas precisaram se utilizar da laranja.
( ) não, mesmo com o material concreto apresentaram dificuldade e não conseguiram responder, foi necessário a intervenção do pesquisador.
( ) outra ____
____

Comentários:

No item b os alunos responderam:

( ) reta é a circunferência máxima ou o maior círculo (tranqüilamente).
( ) reta é alinha que divide a esfera ao meio.
( ) conseguiram concluir que reta é a circunferência máxima, mas com muita dificuldade.
( ) concluíram que não existem retas sobre a esfera.
( ) outra ____
____
Comentários:

Os alunos fizeram referência ao postulado da Geometria Euclidiana : "Por dois pontos passa uma e somente uma reta"?
Comentários:

ATIVIDADE 2

1) Marque um ponto sobre a esfera.
  a) Quantas “retas” vocês podem traçar passando por esse ponto?
  b) Na bola de isopor trace uma dessas retas.

Na questão 1
Em a, a resposta correta é: “por um ponto passam infinitas retas”

( ) os alunos responderam corretamente, sem dificuldade.
( ) se utilizaram do conhecimento da geometria euclidiana e fizeram referência ao postulado: Por um ponto passam infinitas retas.
( ) não conseguiram enxergar os círculos máximos passando por um ponto nem com o manuseio do material concreto.
( ) outra ____

____

Em b,
( ) conseguiram traçar a reta (circulo máximo) sem dificuldade.
( ) traçaram círculos menores.
( ) outra ____

____

Comentários:

2) Duas retas são chamadas concorrentes quando estão num mesmo plano e possuem um ponto em comum.
  a) Na superfície esférica existem retas concorrentes?
  b) Se existirem, na bola de isopor, trace duas retas concorrentes.

Em a, a resposta correta é que sim, todas as retas se cruzam.

( ) responderam com facilidade que todas as retas se cruzam.
( ) tiveram um pouco de dificuldade para perceber que duas retas sempre se encontram.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____

____

Em b,
( ) conseguiram traçar a reta (circulo máximo) sem dificuldade.
( ) traçaram círculos menores.
( ) outra ____

____

Comentários:

3) Duas retas são paralelas se estão num mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum.

a) Na superfície esférica existem retas paralelas?

b) Se existirem, na bola de isopor, trace duas retas paralelas.

Em a, a resposta correta é que não, todas as retas se cruzam.

( ) responderam com facilidade.
( ) tiveram um pouco de dificuldade para perceber que duas retas sempre se encontram.
( ) pensaram nos círculos menores.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____
____

Em b,
( ) nem tentaram encontrar retas paralelas.
( ) traçaram círculos menores, “paralelos” entre si.
( ) outra ____
____

Comentários:

ATIVIDADE 3

1) Tomando dois pontos sobre a superfície esférica, como você determinaria a distância entre eles? Qual a unidade de medida que você usaria para medir essa distância?

Em um os alunos poderão responder que para determinar a distância entre dois pontos se utilizariam de uma fita métrica, ou de uma régua, (aqui o ideal seria que tivéssemos uma régua esférica). A unidade de medida é o grau.

Quanto ao determinar a distância entre os pontos, os alunos responderam:

( ) conseguiram perceber que a distância é uma porção do círculo máximo, mas não teceram nenhum comentário.
( ) conseguiram perceber que a distância é uma porção do círculo máximo e discutiram qual seria o “arco” possível, o menor ou o maior.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____
____

Comentários:

Quanto a unidade de medida utilizada, responderam:

( ) com certeza é o centímetro.
( ) responderam centímetro mas com dúvida.
( ) responderam prontamente o grau.
( ) após discutirem responderam ser o grau.
( ) outra ____

____

Comentários:

2) Na superfície esférica que você possui, faça o esboço de duas retas (circunferências máximas). a) Quantos são os pontos de intersecção entre duas retas? Quantos são os arcos determinados por esses pontos? b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na superfície esférica? Quantos? c) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura de um ângulo esférico? Você conhece algum instrumento que poderia auxiliar para obter a medida do ângulo esférico?

( ) os alunos conseguiram esboçar as duas retas.
( ) os alunos precisaram do auxilio da pesquisadora para traçar as duas retas.

No item a, a resposta correta é: os pontos são dois e os arcos são quatro.

Quanto aos pontos, responderam:
( ) dois pontos, sem dificuldade.
( ) dois pontos, mas tiveram que discutir um pouco até chegar à conclusão.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____

____

Quanto aos arcos, responderam:
( ) quatro, sem dificuldade.
( ) quatro, mas tiveram que discutir um pouco até chegar à conclusão.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____

____

No item b, a resposta correta: são oito ângulos.
( ) sim, oito, sem dificuldade
( ) sim, oito, mas tiveram que discutir um pouco para chegar à conclusão.
( ) sim, quatro (só observaram uma das intersecções) .
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____

____

No item c, deveriam responder o grau e o transferidor
( ) responderam corretamente, sem dificuldade.
( ) responderam corretamente, mas tiveram que discutir m pouco para chegar à conclusão.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____
____

Comentários

3) Marque, sobre a bola de isopor, 2 pontos que pertençam a um mesmo diâmetro. Qual a distância entre estes dois pontos em graus? (lembre-se, uma circunferência inteira mede 360º).

Espera-se que os alunos saibam o que é diâmetro, caso tenham dificuldade para encontrar os pontos, percebendo-se que não vão conseguir, o observador, ou o pesquisador, poderão auxiliá-los, sem deixar de anotar o fato. A resposta correta aqui é que a distância entre estes dois pontos é de 180 graus.

( ) responderam corretamente, com facilidade.
( ) tiveram um pouco de dificuldade, mas após discussão chegaram à resposta.
( ) responderam 90 graus.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____
____

Comentários:

4) Na bola de isopor, coloque dois alfinetes de modo que a distância entre eles seja de 60º. Justifique.

( ) pensaram em dividir o arco de 180º em três partes "iguais".
( ) dividiram a circunferência máxima em 6 partes.
( ) mediram a circunferência da bola e se utilizaram da regra de três para chegar à resposta.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____
____

Comentários:

ATIVIDADE 4

1) Na superfície esférica, marque três pontos, distintos e não alinhados, A, B e C e trace os segmentos menores AB, AC e BC, a) Descrevam a figura encontrada. b) Que nome vocês dariam a essa figura?

Para resolver esta atividade
( ) colocaram os três pontos e uniram.
( ) traçaram os três círculos máximos.

Em a
( ) disseram ser uma figura de três lados e três ângulos.
( ) disseram ser uma figura de três lados.
( ) não souberam como descrever.
( ) outra ____

____

Em b
( ) responderam triângulo.
( ) responderam triângulo esférico (ou fizeram alusão à esfera).
( ) disseram se tratar de algo parecido com um triângulo.
( ) não souberam responder.
( ) outra ____

____

Comentários

2) Na superfície esférica marque três pontos distintos e não alinhados A, B e C. Trace as retas que passam por AB, por AC e por BC. Quantos triângulos ficaram determinados pelas três circunferências máximas?

Espera-se que os alunos consigam traçar as três retas, caso tenham dificuldade para traçar as retas, percebendo-se que não vão conseguir, o observador, ou o pesquisador, poderão auxiliá-los, sem deixar de anotar o fato.

Espera-se que “enxerguem” os oito triângulos. Os alunos:

( ) responderam corretamente, com facilidade.
( ) tiveram um pouco de dificuldade, mas após discussão chegaram à resposta.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____

____

Comentários:

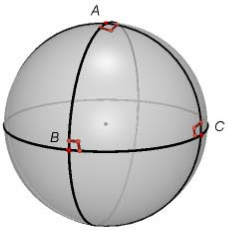
4) Marque dois pontos diametralmente opostos sobre a superfície da esfera. Trace duas retas, que passam por estes pontos, de tal forma que a esfera fique dividida em quatro “partes iguais”. Encontre uma reta que seja perpendicular às retas anteriores.

a) Em quantas partes a esfera ficou dividida? Que figuras representam estas “partes”?

b) O que podemos observar em relação aos ângulos da figura?

c) Qual o comprimento (em graus) dos segmentos que formam o lado do triângulo?

Espera-se que os alunos tracem as retas pelos dois pólos e encontrem a reta perpendicular a elas sem dificuldade, inclusive que relacionem a atividade anterior ao início desta.



( ) conseguiram traçar as retas e a perpendicular com facilidade.
( ) tiveram um pouco de dificuldade, mas após discussão conseguiram traçar as retas e a perpendicular.

Em a, observaram que:
( ) a esfera ficou dividia em 8 triângulos “iguais” sem dificuldade.
( ) outra ____
____

Em b, concluíram que:
( ) todos os ângulos que apareceram medem 90º.
( ) outra ____
____

Em c, responderam que:
( ) os segmentos medem 90º.
( ) outra ____
____

Anexo X

Roteiro para o observador – Parte II – O Globo Terrestre
Dupla: ____________________
Data ___/___/ 2006

ATIVIDADE 1

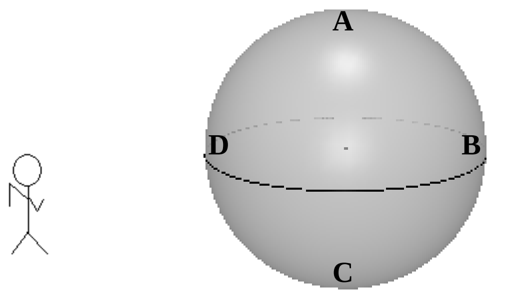
O Objetivo desta atividade é verificar o conhecimento dos alunos em relação ao globo terrestre e o movimento de rotação da terra.

1) "Podemos observar que o dia se sucede a noite e que a noite se sucede ao dia. Vemos o Sol nascer, percorrer o céu e iluminar-nos. Mas ao fim do dia ele desaparece no horizonte. Então, surgem as estrelas e a Lua, nascendo e desaparecendo para de novo dar lugar ao Sol."

Esperamos que os alunos respondam que é devido ao movimento de rotação da Terra.
( ) os alunos responderam corretamente, sem dificuldade.
( ) os alunos responderam corretamente, com um pouco de dificuldade, precisaram discutir a questão.
( ) não souberam responder.
( ) outra ____
____

2) Um Astronauta, em uma missão, olhou para o céu da Lua e viu a Terra. Ele viu que a Terra era azulada, redonda, enorme (umas 4 vezes maior do que vemos a Lua aqui da Terra) e que flutuava no espaço, tal qual vemos a Lua flutuando no espaço. Imagine que o Astronauta tivesse levado um telescópio com ele. Para quem não sabe, telescópio é um aparelho usado pelos astrônomos para ver as coisas que estão muito longe. Imagine que o astronauta tivesse olhado para a Terra com o telescópio e que ele tivesse visto 4 pessoas. Uma estava no pólo norte (ponto A na figura abaixo). Outra estava no pólo sul (ponto C na figura abaixo). Outra era um brasileiro (ponto D na figura abaixo). Outra era um japonês (ponto B na figura abaixo, pois o Japão fica do outro lado da Terra, em relação ao Brasil).

Imagine que a figura abaixo é um esboço do globo Terrestre. Desenhe o boneco abaixo sobre cada um dos pontos A, B, C e D, tal como o astronauta teria visto as quatro pessoas. (O boneco está muito magrinho e está fora de escala em relação à Terra)



Questão adaptada da V Olimpíada Brasileira de Astronomia – V OBA – 2002

Espera-se que os alunos coloquem os bonecos sobre cada ponto de modo que os "pés" dos bonecos toquem os pontos.
( ) os alunos responderam corretamente, sem dificuldade.
( ) os alunos responderam corretamente, com um pouco de dificuldade, precisaram discutir a questão.
( ) não souberam responder.
( ) outra ____

ATIVIDADE 2

O Objetivo desta atividade é relacionar os conhecimentos adquiridos na parte I, no estudo da esfera, com o globo terrestre.

1) Observando o Globo Terrestre, identifiquem que tipos de circunferências vocês vêem na superfície do globo terrestre.

Os alunos:
(   ) identificaram as circunferências como círculos máximos e círculos menores, fazendo uma relação com o encontro anterior.
(   ) disseram ser círculos máximos e menores, mas não se referiram ao encontro anterior.
(   ) não souberam responder.
(   ) outra ____

Comentários:

2) O globo terrestre possui um eixo de rotação. Como se chamam os pontos onde o eixo de rotação corta o globo terrestre?

Os alunos responderam:
(   ) pólos.
(   ) pólos terrestres.
(   ) não souberam responder.
(   ) outra ____

Comentários:

3) Observem que pelos pólos do globo passam várias circunferências máximas. Qual o nome dessas circunferências?

Os alunos:
(   ) identificaram as circunferências e sabiam que eram os meridianos.
(   ) identificaram as circunferências mas não sabiam o nome correto.
(   ) não conseguiram identificar as circunferências.
(   ) outra ____

Comentários:

4) Se duas circunferências máximas passam pelos pólos, que circunferência máxima é perpendicular a ambas? Qual o nome dado a essa circunferência?

Os alunos:
( ) identificaram as circunferências e a perpendicular, sabiam que é o equador.
( ) identificaram as circunferências e a perpendicular mas não sabiam o nome correto.
( ) não conseguiram identificar as circunferências e a perpendicular.
( ) outra ____
____

Comentários:

5) Quais das circunferências são denominadas Paralelos Terrestres?

Os alunos:
( ) identificaram as circunferências sem dificuldade.
( ) identificaram as circunferências mas precisaram discutir.
( ) não conseguiram identificar as circunferências.
( ) outra ____
____

Comentários:

ATIVIDADE 3

O objetivo desta atividade é desenvolver o conceito de latitude e longitude, tendo como base as medidas em graus.

1) Localizem no Globo Terrestre os hemisférios Norte e Sul e as marcas da latitude e da longitude em graus.

Os alunos, quanto aos hemisférios Norte e Sul:
( ) localizaram sem problemas .
( ) tiveram dificuldades para localizá-los e nomeá-los
( ) não souberam localizar.
( ) outra ____
____

Os alunos, quanto a marca de latitude:
( ) localizaram sem problemas.
( ) tiveram dificuldades mas conseguiram localiza-las.
( ) não conseguiram localizá-las.
( ) outra ____
____

Comentários:

Comentários:

5) Se você estiver exatamente na metade da distância entre o Equador e o pólo Norte e a leste do meridiano de Greenwich, na sexta parte do comprimento em graus da linha do equador, a que latitude e longitude você se encontrará?
(LUCCI, E. A. Geografia – O homem no espaço global, Ed. Saraiva, 1999. p.305)

Para resolver a questão, os alunos:
( ) recorreram ao globo terrestre.
( ) utilizaram desenhos e esquemas.
( ) se utilizaram apenas da abstração.

Quanto a resposta
( ) responderam sem dificuldade.
( ) tiveram dificuldade com a idéia de metade e sexta parte.
( ) tiveram dificuldade com as direções Norte e Leste.
( ) não conseguiram responder.
( ) outra ____

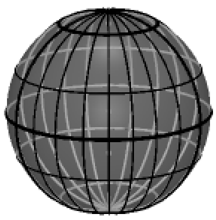
____

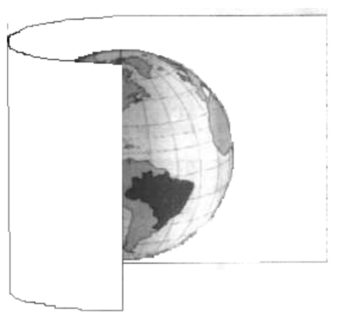
Comentários

ATIVIDADE 4

O observador poderá se utilizar de desenho para acompanhar os seus registros

1) Imagine se colocássemos em volta da esfera uma cartolina e projetássemos, a partir do centro da esfera, as linhas que representam o equador, os meridianos, os trópicos e os círculos polares. Como essas linhas seriam projetadas sobre a cartolina?





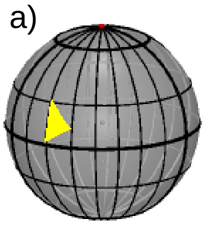
Os alunos ao projetarem as linhas:
( ) imaginaram linhas retas.
( ) imaginaram as linhas curvas sobre o retângulo.
( ) discutiram a idéia de sair de um ponto do centro da esfera.
( ) não se preocuparam com a projeção a partir do centro.
( ) outra ____

____

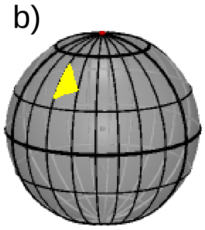
Comentários

2) Como ficaria a projeção dos triângulos, que estão sobre as esferas abaixo, no plano, ao projetarmos a partir do centro da esfera sobre a cartolina?

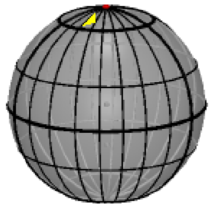
a)



b)



c)



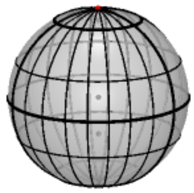
Os alunos ao projetarem os triângulos:
( ) perceberam que quanto mais afastados do equador maior a deformação.
( ) imaginaram a figura tal como está no desenho.
( ) discutiram a idéia de sair de um ponto do centro da esfera.
( ) não se preocuparam com a projeção a partir do centro.
( ) outra ____

____

Comentários

ATIVIDADE 5

1) Utilizando a esfera de arame vamos projetar a esfera sobre um cilindro de cartolina utilizando uma vela no centro.



O que vocês observaram?

Como vocês planificariam agora a esfera?

Vocês haviam imaginado, na atividade anterior, as linhas como na projeção realizada na experiência?

Comentários do observador:

2) Coloque sobre a esfera de arame as figuras geométricas e observe a projeção sobre o cilindro.

Registrem as suas observações.

Comentários do observador:

3) Indiquem três países localizados no Hemisfério Norte.

____

( ) localizaram sem problemas .
( ) tiveram dificuldades para localizá-los e nomeá-los.
( ) não souberam localizar.
( ) outra ____

____

4) Indiquem três países localizados no Hemisfério Sul.

( ) localizaram sem problemas .
( ) tiveram dificuldades para localizá-los e nomeá-los.
( ) não souberam localizar.
( ) outra ____

____

5) O Brasil está localizado em qual Hemisfério?

Espera-se que respondam Hemisfério Sul.
( ) responderam sem problemas .
( ) tiveram dificuldades para responder.
( ) não souberam responder.
( ) outra ____

____

6) Observando o mapa político do Brasil, pág 97, localize o estado que possui as latitudes e longitudes indicadas abaixo:

2º N e 60º O	________________	15º S e 49º O	________________
0º e 52º O	________________	5º S e 35º O	________________
9º S e 70º O	________________	25º S e 51º O	________________
10º S e 36º O	________________	27º S e 49º O	________________
3º S e 38º O	________________	23º S e 46º O	________________

( ) localizaram sem problemas .
( ) tiveram dificuldades para localizá-los e nomeá-los.
( ) não souberam localizar.
( ) outra ____

____

Comentários:

Anexo XII
Avaliação do 1º Encontro

Data __/__/06
Dupla: __________________________

1) Na primeira coluna encontramos algumas frases relacionadas ao estudo da esfera, associe na segunda coluna o complemento correto.

(A) Uma circunferência máxima da superfície esférica, também chamada de geodésica é o que denominados de:	( ) segmento de reta ou arco.
(B) Por dois pontos A e B sobre uma superfície esférica fica determinada uma reta. Ao ligarmos A e B determinamos:	( ) infinitas circunferências máximas.
(C) Ao fatiarmos a esfera encontramos:	( ) reta.
(D) por um ponto sobre a superfície esférica podemos traçar:	( ) círculos menores ou círculos máximos.

2) Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações abaixo. Se a afirmação for falsa, reescreva de modo a torná-la verdadeira.

(   ) Por um ponto sobre uma esfera podemos traçar infinitas retas.
_ _

(   ) É possível traçar retas paralelas sobre a esfera.
_ _

(   ) Reta na geometria esférica é uma circunferência máxima.
_ _

(   ) Na Geometria esférica sempre que traçarmos duas retas elas serão concorrentes.
_ _

(   ) Para determinar a distância entre dois pontos sobre uma esfera tomamos a menor porção sobre uma circunferência máxima.
_ _

(   ) Duas retas da superfície esférica possuem um, e somente um, ponto em comum.
_ _

(   ) Dados dois pontos A e B sobre uma circunferência máxima, diametralmente opostos, a distância entre eles é de 90 graus.
_ _

(   ) Na Geometria esférica existem triângulos que possuem os três ângulos retos (90º).
_ _

Anexo XIII

Roteiro para o observador – Atividade Diagnóstica
Data ___/___/06
Dupla: ___________________________

O objetivo desta atividade é verificar se alguns conceitos trabalhados no encontro anterior foram assimilados.

1) Na primeira coluna encontramos algumas frases relacionadas ao estudo da esfera, associe na segunda coluna o complemento correto.

(A) Uma circunferência máxima da superfície esférica, também chamada de geodésica é o que denominados de	( ) segmentos de reta ou arcos.
(B) Por dois pontos A e B sobre uma superfície esférica fica determinada uma reta. Ao ligarmos A e B determinamos	( ) infinitas circunferências máximas.
(C) Ao fatiarmos a esfera encontramos	( ) reta.
(D) por um ponto sobre a superfície esférica podemos traçar	( ) círculos menores ou círculos máximos.

Os alunos deverão encontrar a seqüência B, D, A, C
(   ) responderam a atividade com facilidade, discutindo cada item.
(   ) responderam a atividade corretamente, mas tiveram dificuldade.
(   ) relacionaram corretamente apenas os itens: __________________
(   ) não conseguiram relacionar as colunas.
(   ) outra ____
____

2) Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações abaixo. Se a afirmação for falsa, reescreva de modo a torná-la verdadeira.

( )	Por um ponto sobre uma esfera podemos traçar infinitas retas.

Os alunos deverão responder que a afirmação é verdadeira .
(   ) responderam corretamente.
(   ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade.
(   ) responderam errado, mas ao tentar corrigir a frase perceberam que estava correta.
(   ) responderam errado e não perceberam.
(   ) outra ____
____

( )	É possível traçar retas paralelas sobre a esfera.

Os alunos deverão responder que a afirmação é falsa, a frase correta seria: Não é possível traçar retas paralelas sobre a esfera.
( ) responderam corretamente e souberam corrigir a frase.
( ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade ao corrigir a frase.
( ) responderam errado.
( ) outra ____
____

( )	Reta na geometria esférica é uma circunferência máxima.

Os alunos deverão responder que a afirmação é verdadeira.
( ) responderam corretamente.
( ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade.
( ) responderam errado, mas ao tentar corrigir a frase perceberam que estava correta.
( ) responderam errado e não perceberam.
( ) outra ____
____

( )	Na Geometria esférica sempre que traçarmos duas retas elas serão concorrentes.

Os alunos deverão responder que a afirmação é verdadeira.
( ) responderam corretamente.
( ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade.
( ) responderam errado, mas ao tentar corrigir a frase perceberam que estava correta.
( ) responderam errado e não perceberam.
( ) outra ____
____

( )	Para determinar a distância entre dois pontos sobre uma esfera tomamos a menor porção sobre uma circunferência máxima.

Os alunos deverão responder que a afirmação é verdadeira.
( ) responderam corretamente.
( ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade.
( ) responderam errado, mas ao tentar corrigir a frase perceberam que estava correta.
( ) responderam errado e não perceberam.
( ) outra ____
____

( )	Duas retas da superfície esférica possuem um, e somente um, ponto em comum.

Os alunos deverão responder que a afirmação é falsa, a frase correta seria: Duas retas na superfície esférica possuem dois pontos em comum

(   ) responderam corretamente e souberam corrigir a frase.
(   ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade ao corrigir a frase.
(   ) responderam errado.
(   ) outra ____
____

( )	Dados dois pontos A e B sobre uma circunferência máxima, diametralmente opostos, a distância entre eles é de 90 graus.

Os alunos deverão responder que a afirmação é falsa, a frase correta seria: Dados dois pontos A e B sobre uma circunferência máxima, diametralmente opostos, a distância entre eles é de 180º.

(   ) responderam corretamente e souberam corrigir a frase.
(   ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade ao corrigir a frase.
(   ) responderam errado.
(   ) outra ____
____

( )	Na Geometria esférica existem triângulos que possuem os três ângulos retos (90º).

Os alunos deverão responder que a afirmação é verdadeira

(   ) responderam corretamente.
(   ) responderam corretamente, mas tiveram dificuldade.
(   ) responderam errado, mas ao tentar corrigir a frase perceberam que estava correta.
(   ) responderam errado e não perceberam.
(   ) outra ____
____

Anexo XIV

Folha de Concessão de Imagens

Pesquisa para Dissertação do Curso de Mestrado Profissional PUC – SP

Título do Projeto: Geometria Esférica: Uma Conexão com a Geografia

Pesquisadora: Irene C. R. Prestes

Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.

O propósito deste projeto de pesquisa científica é elaborar uma proposta metodológica para o desenvolvimento de conteúdos de geometria relacionados com a geografia. Para tanto, serão conduzidas sessões de aulas com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, da EE Sidrônia Nunes Pires, fora do horário normal de aulas. Durante essas sessões os alunos serão acompanhados na compreensão dos conceitos matemáticos e geográficos. Os registros serão feitos durante as aulas através de filmagens, fotografias e gravações, que poderão ser divulgadas. Poderá haver benefícios diretos para você enquanto participante neste estudo, uma vez que estaremos desenvolvendo o ensino – aprendizagem da Matemática. Após a comunidade em Educação Matemática tomar conhecimento de nossas conclusões, poderão ocorrer mudanças nas práticas de ensino de Matemática.

Este TERMO é para certificar que eu, ____________________________________, concordo em participar como voluntário do projeto científico acima mencionado.

Por meio deste, dou permissão para ser filmado e fotografado e que todas as informações possam ser gravadas em fita cassete. Estou ciente de que, ao término da pesquisa, essas informações e os resultados poderão ser divulgados.

Cotia, ___ de ________ de 2006.

____

Aluno

____

Responsável pelo aluno.

RG:........................

____

Pesquisadora