ELISANGELA PARRA ZIGART PEREZ

ALUNOS DO ENSINO MÉDIO E A GENERALIZAÇÃO DE PADRÃO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
SÃO PAULO
2006

ELISANGELA PARRA ZIGART PEREZ

ALUNOS DO ENSINO MÉDIO E A GENERALIZAÇÃO DE PADRÃO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Silvia Dias A. Machado.

PUC/SP

SÃO PAULO

2006

Banca Examinadora

À memória de minha amada mãe, Mercedes Parra Zigart por estar presente em todos os momentos de minha vida para me apoiar e me ensinar o verdadeiro significado da palavra "mãe", dedico este trabalho com muito amor e carinho.

Ao meu marido Jaime Gon Perez, que sempre esteve ao meu lado e através do seu amor e compreensão, me apoiou e incentivou nesta caminhada que muito me fez crescer, permitindo a realização desse sonho.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS, que além da vida proporcionou-me, saúde, força, amor e perseverança para continuar essa caminhada, em busca da realização de um sonho.

À Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, mais do que orientadora, apontou caminhos transformando um sonho que parecia distante numa encantadora realidade, meu eterno agradecimento, pela sua amizade, competência, paciência e dedicação durante todos os nossos encontros, me ensinando aceitar e superar as adversidades da vida.

Às professoras Doutoras Adair Mendes Nacarato e Ana Lúcia Manrique, pelas valiosas contribuições na concretização desse estudo, como membros da banca examinadora.

Aos professores do Programa de estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pela competência, dedicação e amizade inquestionável durante as aulas, nos seminários, nas palestras e principalmente no grupo de pesquisa pelos conhecimentos compartilhados durante o curso.

Ao meu amor Jaime pelo companheirismo, confiança, apoio e compreensão, sem os quais jamais eu teria conseguido levar em frente.

À querida amiga irmã Maria Margarida companheira de estudos e de viagem, meu carinhoso agradecimento, pois foi com você que compartilhei minhas angústias. Sempre estando ao meu lado, mesmo quando a distância nós separava, você sempre estava lá, ou um telefonema, ou um telegrama para me confortar nos momentos difíceis. Obrigada por tudo.

Aos colegas do mestrado, pelo companheirismo, em especial à Raquel (Barsa) e o Ubiratan (Bira).

Aos meus pais, em especial minha mãe Mercedes (in memorian) e meu pai José, pela vida e pelo bom exemplo que fizeram de mim uma pessoa de bem.

Aos meus irmãos Anemércio, Rose e Sidimar, às cunhadas, cunhados, sobrinhos e sobrinhas, que estiveram ao meu lado compreendendo minhas aflições nesse tempo de luta respeitando minhas ausências, registro minha afeição e amor.

À Profa. Maria Aparecida Gon Perez, mais que sogra, minha segunda mãe, sempre disposta a me ajudar mesmo distante eu sabia que estava do meu lado me apoiando e incentivando nessa caminhada, obrigada pelas orações e por fazer parte de minha vida, minha eterna gratidão.

À amiga e companheira de trabalho Rosecleide Dias pelo profissional, pronto e carinhoso auxílio nos momentos solicitados para a revisão dos textos. Meu eterno carinho.

Às amigas e companheiras de trabalho Palmira Valéria, Elenir Márcia Briski e Regina Célia que sempre acreditou no meu potencial me incentivando com suas palavras carinhosas, quando voltava de São Paulo, e ia direto pro trabalho. (Ai que canseira!).

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pela concessão da bolsa.

À direção, funcionários e professores das escolas em que trabalho, em especial aos meus alunos que durante o ano de 2005 e 2006 sempre apoiaram e compreenderam minhas ausências por conta do Mestrado.

Aos alunos da E. E. Prof. Antônio Sproesser, que participaram da pesquisa, pela dedicação, carinho e seriedade com que conduziram as atividades propostas.

Aos funcionários da PUC/SP Campus Marquês de Paranaguá, por sempre nos atender com um sorriso no rosto e pela paciência durante todo o tempo utilizado nesse trabalho.

Enfim, a todos que de uma forma ou de outra, diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse trabalho se realizasse.

Muito Obrigada!

A autora

Resumo

Vários pesquisadores de Educação Matemática têm enfatizado a importância do trabalho com a observação e generalização de padrão no desenvolvimento do pensamento algébrico, opinião essa assumida também nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental de 1998. Esse fato me levou a realizar a pesquisa aqui descrita, onde investiguei se e como alunos do Ensino Médio resolvem situações problemas que envolvem generalização de padrões. Para a coleta de dados elaborei cinco atividades, uma delas baseada em pesquisa realizada por Lesley Lee e as demais foram criadas e analisadas tendo como referência trabalhos dos autores Jonh Mason, Vale & Pimentel e Fiorentini, Miorin e Miguel. Essas atividades foram aplicadas durante duas sessões a nove alunos pertencentes às três séries do ensino médio de uma Escola Estadual do interior de São Paulo, próxima a Campinas. Os resultados obtidos levaram a concluir que os alunos embora tenham alegado não ter trabalhado com aquele tipo de atividade antes, não só as resolveram como empregaram várias estratégias.

Palavras chave: Educação Algébrica, Alunos do Ensino Médio, Generalização de Padrão.

Abstract

Several Mathematics researchers have been emphasizing the importance of the work with the observation and standard generalization in the development of the algebraic thought. The same opinion was also accepted in the High School National Parameters in 1998. This fact took me to carry out a research here described in which I investigate if and how High School students solve problematic situations that involve standard of generalization. It was elaborated five activities to collect data and one of them was based on a research done by Lesley Lee. The other ones were created and analyzed based on authors such as John Mason, Vale & Pimentel and Fiorentini, Miorin and Miguel. Those activities were applied during two sessions to nine High School students of the first three grades of state school in the interior of São Paulo, near Campinas. The final results drew the conclusion that although the students alleged they have never worked with that kind of activity before, not only they solved them but also used a lot of strategies to solve them.

Key words: Algebraic Education, High School students, standard of generalization.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Trabalhando como professora de Matemática do Ensino Básico, EB, na rede pública e particular, pude observar a grande dificuldade que os alunos apresentavam ao tentarem resolver algebricamente situações-problema. Isso me incentivou a buscar maiores esclarecimentos sobre essas questões e ainda levou naturalmente a integrar ao grupo de pesquisa Educação Algébrica ou simplesmente G5, ao iniciar meu mestrado na PUC-SP.

A idéia de desenvolver uma pesquisa sobre o tema Generalização de padrão no Ensino Médio foi fortalecida após leituras direcionadas e sugeridas pelo grupo.

Com esse trabalho pretendo investigar se e como alunos do Ensino Médio resolvem situações-problema que envolvem generalização de padrões. As atividades foram norteadas nas pesquisas de Lee, Mason, Fiorentini et al Vale e Pimentel. Estando dividido em seis capítulos, descritos da seguinte forma:

No capítulo I, apresento a problemática do tema de pesquisa, destacando algumas pesquisas governamentais, institucionais e até mesmo internacionais, evidenciando a dificuldade dos alunos brasileiros em Matemática, especificamente em álgebra. Em seguida destaco as questões que nortearam o desenvolvimento e o objetivo pretendido.

No capitulo II, apresento a revisão bibliográfica: algumas leituras e escolhas de trabalhos em Educação Matemática, ou assuntos correlatos a respeito da generalização de padrão, que de alguma forma, serviram de aporte teórico que tem como tema a observação e generalização de padrões na educação algébrica.

No capitulo III, apresento a metodologia da pesquisa baseada nas leituras de conceituados pesquisadores como Bogdan e Biklen e Lüdke e André e da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa qualitativa descrita por Michele Artigue a qual utilizei algumas fases: 1) a análise a priori; 2) a análise a posteriori e 3) a validação interna que se dá pela confrontação das mesmas.

No capítulo IV, descrevo a experimentação, bem como a elaboração do instrumento de pesquisa, seguida da análise a priori: as possíveis estratégias de resolução, seleção, contato com os sujeitos da pesquisa, preparação e aplicação do instrumento de pesquisa.

No capítulo V apresento a descrição e análise dos resultados por grupos, posteriormente, uma análise horizontal por questão.

As considerações finais são destacadas no capítulo VI, os resultados foram obtidos a partir de análise feita por grupo, seguida da análise horizontal, com base nisso é que faço minhas recomendações e considerações.

Capítulo I

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Pesquisas governamentais, institucionais e, até mesmo internacionais, mostram o fracasso dos alunos brasileiros em Matemática.

Um resultado impactante foi o apresentado nas conclusões do Programa Internacional de Avaliação de Alunos, PISA de 2003. Esse programa mantido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico, OCDE, tem como finalidade fazer uma avaliação comparada sobre o desempenho de alunos de 15 anos de diferentes paises para produzir indicadores sobre a efetividade dos sistemas educacionais desses paises. Os alunos são avaliados quando se encontram com 15 anos, porque se pressupõe que é, nessa idade, que ocorre o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. A principal área avaliada, em 2003, foi a de Matemática, além de Ciências e Leitura e se analisou e comparou o desempenho de alunos de 40 países. O Brasil ficou em penúltimo lugar nos testes de Matemática.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB, desde 1990, tem aplicado testes de rendimento escolar brasileiro, com o objetivo de avaliar a qualidade do Ensino Fundamental e Médio. O SAEB é a primeira iniciativa brasileira no sentido de conhecer mais profundamente o nosso sistema educacional. Hoje, além de ser um dos mais amplos esforços no sentido de coletar dados sobre a qualidade da educação no País, é também um dos principais sistemas de avaliação em larga escala da América Latina. O SAEB é desenvolvido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, órgão do Ministério da Educação. Essa avaliação vem sendo aplicada desde 1990. O relatório sobre os resultados do SAEB de 2001 conclui que os alunos, ao final da 8ª série "[...] demonstram nível de dificuldade com o uso da linguagem simbólica ou algébrica na resolução de problemas". (INEP, 2001, p. 53)

Dessa forma, os resultados de Matemática, principalmente de Álgebra, não têm sido encorajadores. Até mesmo os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN[1], ao abordar esses resultados, comentam: "[...] os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto, em muitas regiões do país". (p. 116)

Outra pesquisa avaliatória de cunho estadual é o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, SARESP, que, desde sua criação, em meados da década de 90, vem avaliando, sistematicamente, o sistema de ensino paulista de modo a obter dados e/ou informações que revelem os pontos fortes e os pontos fracos do sistema, identificando, com isso, o rendimento escolar dos alunos de diferentes séries e períodos e os fatores que interferem nesse desempenho. Os resultados do SARESP, em relação ao ensino da Álgebra, segundo pesquisa de Alessandro Ribeiro (2001), também não são animadores.

O cenário atual do ensino da Álgebra, no Brasil, parece ser reflexo de sua evolução ao longo dos tempos. Conforme conclusões dos estudos realizados por Fiorentini, Miguel e Miorim (1995), antes do Movimento da Matemática Moderna, havia, no Brasil, um equilíbrio entre os ramos fundamentais da Matemática no ensino. Apesar desse equilíbrio, esses autores afirmam que, nesse período, o pêndulo oscilou mais para Geometria. Primeiro, porque esse equilíbrio só existia no plano legal. Na prática escolar, o ensino da Álgebra era menos favorecido, pois os professores, até o início do século 20, pouco a conheciam. Segundo, porque o pensamento pedagógico racionalista dominante, nessa época, no Brasil, supunha que o ensino de Geometria desempenhava um papel mais nobre do que o da

[1] PCN: Matemática: Ensino de quinta a oitava séries, Brasília: MEC, SEF, 1998.

Álgebra e o da Aritmética. Por razões históricas e ideológicas, esse fato causou um dualismo, fazendo com que a Álgebra e a Geometria fossem encaradas como dois campos distintos e independentes.

Ao tentar superar esse dualismo, o Movimento da Matemática Moderna, na década de 1960, acabou rompendo esse pretenso equilíbrio, contribuindo para que o ensino da Geometria sofresse um processo de descaracterização, levando-o ao quase abandono na sala de aula e fazendo com que o pêndulo pendesse para a Álgebra.

No entanto, o ensino da Álgebra proposto por esse movimento também foi prejudicado, uma vez que o projeto fundamentalista, ao tentar superar o algebrismo presente nesse ensino, acabou dando-lhe um caráter austero, formal e estéril aos olhos do aluno. Perdeu, inclusive, o que havia de positivo: o seu valor instrumental para a resolução de problemas. Na realidade, pode-se dizer que, durante o Movimento da Matemática Moderna, dava-se ênfase à Álgebra e não ao ensino de Álgebra.

Dessa forma, não é de se surpreender que várias pesquisas mostrem que, após o destaque dado à Álgebra, na década de 1960, ela perdeu paulatinamente espaço e é freqüentemente vista pelo aluno como um amontoado de símbolos de valor indiscernível (Maranhão et al, 2003).

No entanto, o clamor sobre os resultados que o ensino da Álgebra vinha provocando influenciou a elaboração dos PCN do Ensino Fundamental que afirmam que o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e **generalização**, além de ser uma poderosa ferramenta para **resolver problema**.

Embora estejamos focalizando o ensino brasileiro de Matemática, é importante ressaltar que pesquisas internacionais também indicam problemas semelhantes com o ensino da Álgebra em diversos países, inclusive países do "primeiro mundo". Dessa forma, era natural que surgissem estudos que procurassem explicitar a especificidade da Álgebra e o papel por ela desempenhado na história do pensamento humano, particularmente na história do pensamento científico e matemático, além de estudos que discutem os principais argumentos e justificativas que pesquisadores em Educação Matemática têm apresentado com relação ao ensino da Álgebra.

A álgebra faz parte dos currículos da maioria dos países sob a alegação de que ela é útil para o cidadão na sua vida cotidiana e para o estudante no prosseguimento de seus estudos, o que leva ao fato de que todos devem aprender Álgebra. Acreditando que a Álgebra é importante para propiciar a introdução de idéias matematicamente significativas, mas que ela tem-se revelado um obstáculo para a trajetória educacional de muitos, gerando assim, a necessidade de se encontrar caminhos para minorar as dificuldades dos estudantes com sua aprendizagem, constituiu-se, em 2003, o grupo de pesquisa, "Educação Algébrica"[2], no Programa de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP.

É importante salientar que pesquisas como, por exemplo, a de Lee (1996), tem comprovado que as dificuldades dos alunos com a Álgebra não se restringem ao processamento algébrico, mas, principalmente, à resolução de problemas. Além disso, elas mostram que erros e dificuldades apresentados por alunos na aprendizagem da Álgebra elementar no Ensino Fundamental persistem no Ensino Médio e, sucessivamente, no Ensino Superior.

Trabalhando como professora de Matemática do Ensino Básico, EB, na rede pública e particular, vinha observando a grande dificuldade que os alunos apresentavam ao tentarem resolver algebricamente situações-problema. Isso me incentivou a buscar maiores esclarecimentos sobre essas questões e me levou, naturalmente, a integrar o grupo de pesquisa Educação Algébrica, ou simplesmente G5, ao iniciar meu mestrado na PUC-SP.

Após leituras das pesquisas de Lesley Lee (1996), John Mason (1996), Olga Nakamura (2003), além de outras, me interessei, principalmente, pelo uso de observação e generalização de padrões no ensino. As leituras e discussões em grupo me incentivaram a isso, pois me pareceram convincentes os

[2] Esse grupo de pesquisa, denominado **Educação Algébrica** (G5), foi certificado pela PUC-SP junto ao CNPq.

argumentos e resultados de pesquisas que indicam o uso de padrões como assunto capaz de levar o aluno a conceber a Álgebra como uma linguagem adequada para expressar regularidades, e que dentre suas funções, a generalização de padrões assume um papel importante.

Em todos os aspectos da vida, o homem é levado a procurar as regularidades para interpretar situações. Dessa forma, o fato de que os objetos caem em direção ao solo levou à idéia da força da gravidade, o fato de que, a cada três meses, o clima parece mudar levou à determinação das quatro estações e assim por diante. Essas situações revelaram um padrão. Keith Devlin (2002) ressalta que podemos encontrar padrões não só no mundo físico, mas também no mundo das idéias e dos pensamentos. Segundo ele, esses padrões podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou mais do que recreativos.

Em Matemática, a procura de regularidades é tão importante que levou Devlin (2002) a colocar como título de seu livro: **Matemática:** a ciência dos padrões.

Em relação à Matemática, podemos descobrir e revelar padrões, por exemplo: a Geometria descreve alguns que são visuais, como:

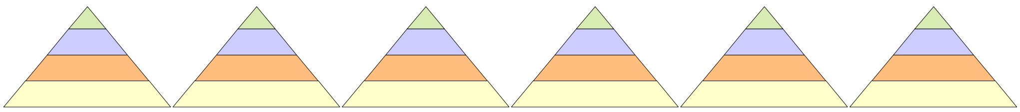


Figura 1 – seqüência de triângulos

Vários padrões podem ser percebidos, e descritos nesta seqüência.

Mas os nossos olhos são capazes de visualizar vários tipos de padrões de formas e de figuras. Uma flor, por exemplo, apresenta uma regularidade geométrica.

Figura 2 – flor

Assim como um cristal de neve:

Figura 3 – cristal de neve

Existem ainda padrões cujas características mais interessantes ao matemático referem-se ao fato de eles se repetirem de forma regular até preencherem completamente um polígono, por exemplo, como é o caso do desenho do famoso artista holandês M.C.Escher, mostrado abaixo:

Figura 4 - do artista, M. C. Escher

Já os padrões representados por números são, no entanto, mais “abstratos”, da mesma forma que os números utilizados para descrevê-los, como é o caso das seqüências de progressões aritméticas e geométricas. Do ponto de vista matemático, existem padrões de números mais complexos, como os que são analisados pelos especialistas: padrões de igualdade e desigualdade, padrões relacionados com o fato de serem primos ou compostos, de serem quadrados perfeitos, de satisfazerem várias equações etc. Esse tipo de estudo de padrões de números é abordado pela Teoria dos Números.

Além dos padrões puramente figurativos e puramente numéricos, existem também os padrões compostos, que denominamos de figurativo-numéricos, como no exemplo a seguir:

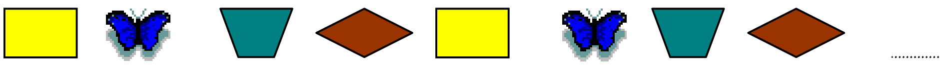


Figura 5 – Padrões figurativo - numéricos

Dentre os padrões figurativo-numéricos, há aqueles que são denominados de geométrico-numéricos, como por exemplo:

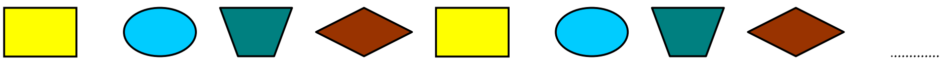


Figura 6 – Padrões geométrico - numéricos

Nesta pesquisa, tratarei, principalmente, de padrões numéricos e figurativo-numéricos, ligados à idéia de algum tipo de regularidade, por repetição ou recursiva, na qual se possa identificar uma lei, uma expressão matemática que permita continuar a seqüência e assim chegar à generalização requerida.

Como professora de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, só trabalhava com padrões e suas generalizações com meus alunos, quando tratava das progressões aritméticas e geométricas, normalmente no 1º ano do EM. Antes, não percebia a importância de fazer com que eles observassem aqueles tipos de padrões para depois generalizá-los e construírem as fórmulas. Fornecia-lhes as fórmulas prontas e acabadas.

Os PCN do Ensino Fundamental estão sendo divulgados desde 1998, isto é, há já 9 anos, e neles há incentivo ao trabalho com padrões desde a 6ª série do Ensino Fundamental. Embora se saiba que diretrizes educacionais demoram para ser aceitas, assimiladas e aplicadas, durante esses anos, houve vários cursos de formação continuada para professores da rede pública, como PEC, Teia do

Saber, Circuito Gestão, que favoreceram aos professores conhecer e discutir os parâmetros.

Todas as escolas públicas de São Paulo receberam, no ano de 2005, o livro *1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP 2005), Somando talentos para o Brasil.* Além de informações sobre as Olimpíadas de Matemática, o livro apresenta atividades de olimpíadas passadas e respectivas resoluções. Dentre as atividades, há situações-problema envolvendo generalização de padrões.

Dessa forma, além da importância dada pelos PCN ao tema, o livro sobre as Olimpíadas de Matemática veio confirmar que o assunto é relevante, pois apresenta situações-problemas envolvendo a generalização de padrões.

Refletindo sobre esses fatos, levantamos várias questões em nosso grupo de pesquisa, das quais transcrevo três:

1. Os professores do EF estão sensibilizados pela importância do trabalho com observação e generalização de padrões?
2. Se há professores do EF trabalhando com observação e generalização de padrões, quais as estratégias de resolução desse tipo de problemas eles estão desenvolvendo com os alunos?
3. Como os alunos do EM resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões?

Minha colega, Maria Margarida Massignan de Almeida (2006), encarregou-se de tentar responder às duas primeiras questões, e eu de buscar resposta à 3ª questão.

Dessa forma, decidi investigar se/como alunos do Ensino Médio resolvem problemas que envolvem a generalização de padrão.

Capítulo II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS: LEITURAS E ESCOLHAS

“O matemático, como o pintor ou o poeta é um mestre dos padrões” G. H. Hardy

Apresento, neste capítulo, a revisão bibliográfica dos trabalhos que, de alguma forma, serviram de aporte teórico para esta pesquisa que tem como tema a observação e a generalização de padrões na educação algébrica.

Dentre os trabalhos de pós-graduação estrito senso sobre esse tema, apresento, a seguir, três dissertações da PUC-SP; duas delas defendidas em 2003, Modanez e Nakamura e a terceira de Andrezzo, defendida em 2005.

Olga. Y. A. Nakamura (2003) elaborou e aplicou uma seqüência de ensino a alunos de uma 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de São Paulo. A seqüência elaborada trata do tema de padrões e foi construída com o objetivo declarado pela autora “de compreender os procedimentos utilizados pelos alunos durante o processo de generalização de padrões tomados como um meio para a construção de expressões algébricas significativas”. A autora se embasou na afirmação de Mason que é preciso que sejam propostas situações-problema envolvendo palavras, desenhos e símbolos para que aconteça o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nakamura destaca as situações-problema sobre generalização de padrões como uma das raízes da Álgebra e como um “caminho” para o pensamento algébrico.

Dentre as conclusões da autora, destaco a da diversidade de procedimentos que conduzem à generalização algébrica apresentada pelos alunos.

O trabalho de Nakamura, além de ter-me instigado a aprofundar o tema, por ter sido a primeira pesquisa lida sobre o assunto, veio reforçar o argumento de que há professores do EF sensibilizados por essa abordagem algébrica. A autora elaborou uma seqüência didática, havendo, nesse caso, uma intenção de ensino a alunos de oitava série, embora esse não fosse o único objetivo; meu objetivo, no entanto, é fazer um diagnóstico sobre o desempenho de alunos do Ensino Médio. Isto não impede que os alunos participantes de minha pesquisa tenham tido oportunidade de aprofundar seus conhecimentos algébricos, isto é, de aprender.

A leitura dessa pesquisa me remeteu aos trabalhos de John Mason, autor que discorre sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e a importância da observação e generalização de padrões nesse desenvolvimento.

Além disso, a autora apresenta, nessa pesquisa, as várias estratégias utilizadas pelos alunos da oitava série, o que, além de me alertar para a diversidade, me possibilitou comparar com as estratégias utilizadas pelos sujeitos de minha pesquisa.

Leila Modanez (2003) elaborou uma seqüência didática para introduzir o pensamento algébrico, via generalização de padrões numéricos e geométricos. Utilizou, principalmente, a teoria de Regine Douady sobre Mudança de Quadros e a de Raymond Duval de Registros de Representação Semiótica como embasamento teórico. A seqüência foi elaborada com a intenção de: 1. engajar o aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da Álgebra, como resolução de problemas e encontrar a expressão algébrica, além de realizar atividades meramente mecânicas; 2. propor situações em que o aluno possa investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas para descrevê-las simbolicamente. A seqüência foi aplicada a alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola de São Paulo. Modanez concluiu que os alunos desenvolveram o pensamento algébrico, pois demonstraram atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.

Com essa pesquisa, a autora objetivou introduzir o pensamento algébrico a alunos de 6ª serie do EF. Assim, havia uma intenção de ensino da mesma forma que na pesquisa de Nakamura, enquanto meu objetivo é fazer um diagnóstico sobre o desempenho de alunos do EM. Esse trabalho, assim como o de Nakamura, veio a reforçar o argumento de que há professores do EF sensibilizados por essa abordagem algébrica, e que os alunos reagem com entusiasmo ao realizar as atividades de investigação de padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas para descrevê-las simbolicamente.

Karina Laguna Andrezzo (2005) teve a intenção de procurar identificar fatores que contribuem na apreensão de expressões algébricas por alunos sem acuidade visual. Para isso, a autora elaborou atividades que facilitassem a participação dos alunos em atividades de generalização de padrões. O estudo se desenvolveu com alunos do Ensino Médio, tendo como pressuposto a teoria de Vygotsky referente à integração social do aluno portador de alguma deficiência e seu potencial para um desenvolvimento normal.

A abordagem algébrica, através de generalização de padrões figurativos, teve suporte de vários pesquisadores em Educação Matemática, em particular, os estudos e considerações de Kucheman, Booth e Mason.

Dentre as considerações da autora, destaco a observação da grande diversidade de estratégias utilizadas pelos alunos do EM na execução das tarefas propostas.

A pesquisa realizada pela autora objetivou a aprendizagem de alunos sem acuidade visual, enquanto a minha visou um diagnóstico, no entanto ambas as pesquisas têm como sujeitos alunos do EM. A leitura dessa dissertação me remeteu, mais uma vez, a John Mason, percebendo a importância e abrangência das idéias desse autor. Foi interessante notar que, apesar da especificidade das atividades propostas aos alunos sem acuidade visual, a autora referiu-se à grande diversidade de estratégias.

A seguir, apresento o trabalho de pesquisadores já consagrados da Educação Matemática que contribuiram para a minha pesquisa.

Lesley Lee (1996), no artigo "*An initiation into algebraic culture through generalization activities*", discorre sobre a cultura da Álgebra através de generalização. Nesse artigo, a autora afirma que a generalização de padrões é uma forma de atividade extremamente eficaz para a introdução de algumas idéias da Álgebra. A investigação realizada por essa pesquisadora analisou o resultado de atividades de generalização propostas a alunos adultos de um curso de Álgebra Elementar oferecido pela Universidade de Concórdia e a estudantes da *high school*[3], com o objetivo de encontrar similaridades e diferenças entre as duas populações.

Esse artigo enfatiza o quanto o trabalho desenvolvido por generalização de padrões é estimulante, propiciando que cada aluno exercite seu modo de observar, pensar e agir, diante de um problema que envolva o tema. Lee alerta para o fato de que o professor, ao propor esse tipo de atividade, deve estar atento para compreender e avaliar as diversas maneiras que os alunos encontram para resolver o problema dado. A autora concluiu que tanto o estudante da *high school* como os adultos, sujeitos de sua pesquisa, mostraram um interesse crescente em resolver problemas desse tipo.

A pesquisa de Lee relatada no artigo objetivou um diagnóstico sobre as diferenças e similaridades no desempenho de alunos adultos e alunos da *High School*, quando defrontados com atividades de observação e generalização de padrões. Isso me auxiliou a definir como sujeitos de minha pesquisa alunos do EM, pois poderia utilizar alguns de seus resultados em minhas análises. Algumas das situações-problema envolvendo generalização de padrões me pareceram inusitadas e interessantes para serem trabalhadas no EM. Algumas delas serviram de inspiração na construção de meu instrumento de pesquisa. Além

[3] **High School** equivale ao período brasileiro do EF à 3ª série do EM. (14 a 18 anos)

disso, Lee argumenta, em seu artigo, que importantes atividades relacionadas à Álgebra, tais como resolução de problema, estudo de funções e outras, podem ser vistas como atividades de generalização de padrão, o que reforça a relevância do tema por mim escolhido.

John Mason é um dos principais defensores das atividades de generalização de padrões para alunos da *Secondary School*[4]. No capítulo V do livro de 1996, ***Approaches to Álgebra***[5], ele argumenta que a manipulação de expressões algébricas e, conseqüentemente, a resolução de equações, uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos, será beneficiada pelo trabalho com padrões, pois esse é um meio eficaz para que o aluno construa uma linguagem simbólica significativa. Nisto, esse autor é mais enfático do que Lee, que, por sua vez, o cita como apoio a suas idéias.

Nesse trabalho, Mason sustenta que a Aritmética foi e ainda é a fonte original da Álgebra como instrumento para expressar generalidades e controlar o desconhecido. Ele sustenta também que o futuro do ensino da Aritmética e da Álgebra depende da importância que o professor dá aos processos de pensamento matemático, em particular, da generalização. A essência desse pensamento está no reconhecimento, na apreciação, na expressão e na manipulação da generalidade, e implica, ao mesmo tempo, em particularizar e generalizar, assim como em conjecturar e justificar. Dessa perspectiva, o autor afirma que a Matemática evolui, na medida em que possibilita resolver determinados problemas através de uma sistematização de regras, criando assim uma rotina de procedimentos.

O autor refere-se à aprendizagem de, inclusive, alunos do EM; afirma que esta será beneficiada pelo trabalho com padrões, que possibilitará ao aluno a construção de uma linguagem simbólica significativa. Dessa forma, o diagnóstico por mim visado, em minha pesquisa, encontra respaldo e fortalecimento, pois seu resultado pode indicar a importância do trabalho com o tema também no EM. A argumentação de Mason de que a Aritmética foi e ainda é a fonte original da

[4] Secondary School (Inglaterra) equivale a alunos de 12 - 17 anos
[5] Abordagens para a Álgebra

Álgebra como instrumento para expressar generalidades e controlar o desconhecido, além de que o futuro do ensino da Aritmética e da Álgebra depende da importância que o professor dá aos processos de pensamento matemático, em particular, da generalização, vieram não só embasar minhas escolhas do instrumento construído, como fortalecer ainda mais a importância e relevância do tema.

O artigo de 1993, "Contribuições para um repensar... a Educação Algébrica Elementar" de Dario Fiorentini, Maria Angela Miorim e Antonio Miguel**,** gentilmente sugerido e enviado a mim por Adair Nacaratto, conduz à reflexão de que repensar a Educação Algébrica implica, de algum modo, repensar a relação que se estabelece entre pensamento e linguagem; e que, de certa forma, a tendência dos pesquisadores em Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e especifica da Álgebra.

Fiorentini *et al*. (1993) definem pensamento algébrico como sendo:

> "[...] 'um tipo especial de pensamento' que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, mas como também em outras áreas do conhecimento. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica, ou através de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica". (p. 88)

Além disso, esses autores observam que, tradicionalmente, o ensino da Álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da Álgebra**,** enfatizando o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas, reduzindo a álgebra a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas.

Os autores destacam que a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento, e essa relação deve ser de natureza dialética conforme a teoria de Vygotsky: pensamento e linguagem são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento da outra e vice-versa. Ou seja, no processo ensino-aprendizagem, a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O artigo ressalta que uma alternativa poderosa para o desenvolvimento inter-relacionado do pensamento e da linguagem algébrica do aluno é constituída por atividades exploratório-investigativas que visam levar os alunos a pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essas regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis,...

Em vista da importância dada às atividades exploratório-investigativas, os autores propõem uma concepção de Educação Algébrica, para a qual o ensino de Álgebra tem início mediante exploração de "situações-problema relativamente abertas *(*atividades exploratório-investigativas*)* ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis." (Fiorentini *et al*., 1993).

Por outro lado, é muito importante também o percurso inverso: partindo de uma expressão algébrica tida como pura ou simbólica, o aluno tentar atribuir múltiplos sentidos ou significações a ela.

Somente depois disso que o transformismo algébrico — ou "cálculo algébrico", usando a referência do currículo tradicional — ganharia certo destaque na prática pedagógica. Este seria o momento em que a atenção recairia sobre o modo como as expressões algébricas podem ser transformadas em expressões equivalentes e sobre os procedimentos que validam tais transformações. Essas etapas, entretanto, não acontecem, necessariamente, nessa ordem. Segundo esses autores:

> "[...] na exploração de padrões de seqüências geométricas ou numéricas, as generalizações construídas pelos alunos podem, muitas vezes, já envolver processos de transformação de expressões algébricas. Mas, cabe, contudo, lembrar que, nesse momento, o exercício do transformismo algébrico não é o principal objetivo didático do professor". (p. 85)

Fiorentini *et al*. alertam para o fato de que o pensamento algébrico se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Assim, se, de um lado, a introdução precoce e sem suporte empírico a uma linguagem simbólica e abstrata pode funcionar como obstáculo ao desenvolvimento do pensamento algébrico, de outro, o menosprezo ou recusa ao modo simbólico e formal de pensar algebricamente pode representar também um freio ao pleno desenvolvimento do pensamento algébrico. Até porque a Álgebra teve um grande desenvolvimento justamente pela introdução e evolução do seu simbolismo.

É interessante ressaltar, ainda, que os autores vêem a Álgebra também como uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo, mostrando, assim, sua importância como instrumento do conhecimento humano.

Sem dúvida alguma, os autores, Dario Fiorentini, Maria Angela Miorim e Antonio Miguel, me auxiliaram a rever minhas concepções**,** compreender a evolução do ensino de Álgebra e acatar as considerações expostas acima, além de ter acrescido e confirmado a importância do tema escolhido para a minha pesquisa.

Isabel Vale e Teresa Pimentel, no artigo "Padrões: um tema transversal do currículo", publicado na revista **Educação e Matemática,** de 2005, indicam que o termo "padrão" tem uma multiplicidade de sentidos, mesmo ao se restringir apenas ao campo da Matemática, e sugerem que ele não deve ser esvaziado através de definições restritivas, mas sim ser explorado na sua multiplicidade.

Dentre a multiplicidade de padrões, as autoras citam apenas os dois tipos de padrão de que vão tratar: o padrão puramente geométrico, que envolve somente observação das formas e o padrão numérico entendido como "ligado a algum tipo de regularidade, por repetição ou recursiva, na qual se possa identificar uma lei que permita continuar a seqüência numérica e chegar à generalização requerida." (Vale & Pimentel, 2005). A esse tipo de padrão o grupo de Educação Algébrica chama de figurativo-numérico ou puramente numérico.

As pesquisadoras assumem que a generalização surge com o reconhecimento de padrões e relações e da análise dessas relações. Além disso, consideram que os padrões são a base do pensamento algébrico e que o trabalho com padrões leva os estudantes a identificarem relações e a fazerem generalizações.

As autoras julgam que o interesse na abordagem da Álgebra, recorrendo aos padrões, é saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos que lhes são propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de atividade. Afirmam que este fato é importante, uma vez que encontrar termos numa sequência é, normalmente, o primeiro passo para chegar à Álgebra. A questão é saber se os alunos conseguem encontrar a regra que conduz ao termo geral e como o fazem.

Vale e Pimentel citam estudos de Orton, de1999, que indicam que:

(1) encontrar termos, numa seqüência, torna-se progressivamente mais difícil, para os alunos, à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados;

(2) muitos alunos têm mais dificuldade em explicar um padrão do que em continuá-lo;

(3) geralmente, há mais alunos a explicar as regras, detectadas nas sequências, oralmente do que por escrito

As pesquisadoras ressaltam que um outro aspecto importante ligado aos padrões é a resolução de problemas, uma vez que a descoberta de um padrão é uma poderosa estratégia de resolução de problemas. Sustentam que a resolução de problemas que recorra ao trabalho investigativo é um modo promissor de exploração da Álgebra, sobretudo se utilizarem problemas significativos para os alunos em que o uso da Álgebra seja relevante.

Vale e Pimentel citam Herbert e Brown, como autores que consideram que o processo investigativo sobre a generalização de padrões envolve três fases:

(1) procura de padrões — extrair a informação relevante;

(2) reconhecimento do padrão, descrevendo-o através de métodos diferentes — a análise dos aspectos matemáticos; e

(3) generalização do padrão – a interpretação e aplicação do que se aprendeu.

Essas autoras afirmam:

> "A procura e identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjectura e prova, desafiando os alunos recorrer às suas destrezas de pensamento de ordem superior: fazem parte da resolução de problemas. Por outro lado, quer os padrões quer a resolução de problemas são atividades que os estudantes acham interessantes e desafiadoras". (p. 15)

Argumentam, enfaticamente, que as atividades que envolvem a procura de padrões permitem:

- Contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática por parte dos alunos.
- Experienciar o poder e a utilidade da Matemática e desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos.
- Evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo.
- Promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstratos.
- Melhorar a compreensão do sentido do número, da Álgebra e de conceitos geométricos.

Essas pesquisadoras reforçam os argumentos acima, afirmando que atividades que envolvem padrões provocam no estudante uma sensação de entusiasmo na descoberta de uma ordem, de uma previsão, da relação funcional que antes estava escondida.

Os argumentos levantados pelas autoras reafirmaram a relevância desse tema mostrando que as atividades com padrões podem contribuir, motivando os alunos na aula de Matemática, pois, de uma forma ou de outra, fica a idéia de que os padrões, em Matemática, estão associados à descoberta, à procura de relações para explicar aquilo com que vamos nos deparando. Os estudos realizados pelas autoras se restringem a dois tipos de padrões: o geométrico e o numérico. Este último foi o que trabalhei em minha pesquisa. De acordo com o grupo de Educação Algébrica, é definido como figurativo-numérico ou puramente numérico.

O objetivo proposto na minha pesquisa tem muita relação com o que as autoras relatam, uma vez que elas citam que o intresse na abordagem da Álgebra, recorrendo aos padrões, é saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos e que o fato de encontrar termos numa seqüência é o primeiro passo para chegar à Álgebra, além do fato de saber se os alunos conseguem encontrar a regra que conduz ao termo geral e como chegam. Os tópicos levantados pelas autoras, quanto às atividades que envolvem a procura de padrões, serviram para reforçar ainda mais a importância do tema.

Keith Devlin, em seu livro **Matemática**: a ciência dos padrões, de 2002, ressalta que o significado de padrões, na Matemática, é amplo, e esclarece:

> "Foi só nos últimos vinte anos, mais ou menos, que surgiu a definição de matemática que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos: a matemática é a ciência dos padrões. O que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. Com o objetivo de transmitir o conceito moderno de Matemática, este livro aborda seis temas genéricos, abrangendo padrões de contagem, padrões de raciocínio e de comunicação, padrões de movimento e mudança, padrões de forma, padrões de simetria e regularidade e padrões de posição (topologia)". (p. 9)

Devlin comenta, em seu livro, que professores de Matemática estão conscientes do fato de que há, por um lado, menos interesse na Matemática e, por outro, um declínio na capacidade matemática dos alunos. Infelizmente, talvez, porque muitos alunos vêem a Matemática como uma mera coleção de procedimentos a aprender. Dessa forma, o autor esclarece:

> "(...) ao longo dos anos, a Matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões — padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza". (p. 206*)*

O autor ressalta que, para muitos, "Álgebra" significa, vagamente, um conjunto de letras, números e operações separados por um sinal de igual ou, para outros, a fórmula para resolver equação do 2.º grau, ou apenas resolver equações, sistemas de equações, descobrir o valor desconhecido, ou outro tipo de atividades onde se utilizem incógnitas e letras, e que a ligação dos padrões à Álgebra é um domínio privilegiado. Em primeiro lugar, porque irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na sua aprendizagem. Outra razão muito importante é que é esta ligação que permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar. Por último, a abordagem da Álgebra através dos padrões irá permitir uma maior motivação dos alunos, retirando o negativismo que tem estado associado ao estudo da Álgebra.

Por tudo isso, as palavras de Devlin vêm afirmar que o tema padrões, no nível do ensino, deverá ser perspectivado como atividade de resolução de problemas e, preferencialmente, até como tarefa de investigação, podendo ser um ótimo veículo para uma abordagem poderosa à Álgebra e que esta abordagem através dos padrões permite motivar os alunos, tirando o negativismo que tem estado associado ao estudo da Álgebra.

Capítulo III

METODOLOGIA E PROCEDIMENTO

Metodologia

Tendo em vista o objetivo de investigar se/como alunos de Ensino Médio resolvem situações problemas que envolvem generalização de padrões, o que determina o caráter diagnóstico desta pesquisa, optei pela visão qualitativa.

Dentre as leituras de conceituados pesquisadores como Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (1986) que falam sobre a pesquisa qualitativa, destaco os seguintes pontos que contribuíram e foram levados em conta na realização desta pesquisa qualitativa: a obtenção de dados através da inserção direta do investigador no meio pesquisado; o uso de descrições, que permitem a análise dos dados em profundidade preservando o seu caráter situacional; o interesse pelo processo mais do que simplesmente pelos resultados; a busca do significado, da compreensão da perspectiva dos participantes da pesquisa.

Da Engenharia didática, metodologia de pesquisa qualitativa descrita por Michele Artigue (1988) como sendo:

> [...] um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, a observação e a analise de seqüências de ensino (p. 285)[6]

[6] Tradução de Silvia Machado.

Utilizei algumas fases: a análise a priori; a análise a posteriori e a validação interna que se dá pela confrontação da análise a priori com a análise a posteriori.

Esta pesquisa não se destina ao ensino de generalização de padrões, mas conforme já citado, não se pode descartar a ocorrência de aprendizagem por parte dos alunos por ela atingidos.

Breve comentário sobre as fases da pesquisa

<u>Fases das análises.</u>

Em minha pesquisa, as análises preliminares e posteriores se deram por leituras sugeridas pela orientação, pelas bibliografias que referenciavam essas leituras, por colegas do grupo, por pesquisadores do Ebrapem e por membros da banca de qualificação. Não posso deixar de registrar a influencia das aulas do mestrado que possibilitaram o desenvolvimento de conhecimentos e subvencionaram algumas de minhas escolhas.

Na fase especifica da concepção e análise a priori do instrumento diagnóstico, utilizei o estudo das variáveis didáticas articulado com o das estratégias possíveis de resolução das atividades, que permitiram controlar o grau de dificuldade de cada uma.

Fase do contato e escolha dos sujeitos da pesquisa.

Fase da aplicação do instrumento elaborado.

Fase conjunta da análise a posteriori e validação. Esta fase se apóia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação pertencentes as observaçãoes realizadas durante cada sessão, bem como das produções dos alunos atingidos. É nesta fase que se dá o tratamento dos dados pertinentes.

Procedimentos metodológicos

Após as primeiras leituras sobre o tema de minha pesquisa, passei a elaborar o instrumento de coleta de dados de acordo com a metodologia adotada.

Primeiramente escolhi padrões que designarei como: figurativo-numéricos e numéricos simplesmente. Para tanto realizei uma análise a priori constituída de uma escolha das variáveis didáticas relacionadas com estudo das estratégias de resolução das atividades.

Decidi coletar os dados em escola pública, por esta ter maior concentração de alunos e também por que em geral ela é mais carente de subsídios, podendo usufruir de certa forma da realização da pesquisa, além de com os resultados da mesma, estar contribuindo para o trabalho dos professores.

Escolhi uma escola de Monte Mor, estado de São Paulo, cidade próxima de Campinas. A diretora dessa escola em exercício na época realizava seu mestrado e demonstrava boa vontade com a realização de pesquisas na escola que dirigia. Além disso, moro nessa cidade e um dos meus locais de trabalho é essa escola. Esses fatos justificam a escolha feita.

Após obter apoio e permissão da diretora para a realização de minha pesquisa na escola selecionada, conversei com professores de matemática do EM dessa escola para obter sua permissão em trabalhar com seus alunos fora do horário escolar.

Após obter o consentimento dos professores, decidi buscar alunos voluntários do EM.

Após seleção de 10 voluntários enviei carta a seus pais pedindo sua anuência na participação de seu filho em minha pesquisa.

Decidi que as atividades seriam feitas em dupla para facilitar a observação de como o aluno está pensando, pois para realizá-las terão que, necessariamente, conversar sobre o problema facilitando a gravação e a observação, além de praticar a expressão oral e escrita, o convívio em grupo, a troca de informação, a discussão sobre os procedimentos e estratégias para a resolução das atividades, levantamento de conjecturas e hipóteses, para que façam comentários e chegue a conclusões comuns, visando com isso, o enriquecimento de cada um deles.

A aplicação do instrumento foi prevista para ser feita em duas sessões de aproximadamente 60 minutos.

Na sala da aplicação foi prevista a presença do pesquisador e de um observador. Este foi preparado para não intervir, apenas anotar suas observações.

Os protocolos foram recolhidos e as fitas gravadas foram transcritas após o que, realizei as análises a posteriori.

Da comparação das análises a priori com as a posteriori obtive as considerações finais.

Capítulo IV

A EXPERIMENTAÇÃO

Elaboração do instrumento de pesquisa

No que segue, descrevo o objetivo, a questão conforme apresentada aos alunos e as estratégias previstas para a resolução de cada atividade[7], que aparecem em ordem crescente de dificuldade e probabilidade de uso para resolução. O instrumento foi elaborado para ser aplicado em duas sessões.

1ª sessão

Em todas as atividades da primeira sessão decidi solicitar ao aluno a indicação do termo seguinte aos apresentados explicitamente na seqüência, no padrão. Além desse termo solicitei também a indicação do 127º termo. A escolha deste se deu para dificultar que o aluno escrevesse ou desenhasse todos os termos anteriores ao solicitado para encontrar esse que escolhi. Imaginei que dessa foram estaria motivando-o a procurar outra estratégia de resolução.

Atividade I

Objetivo**:** O objetivo principal dessa primeira atividade é o de apresentar um padrão numérico facilmente perceptível, via observação da seqüência, para não

[7] Neste trabalho o termo atividade será utilizado como sendo a resolução de cada problema.

correr o risco de intimidar o aluno com um problema de difícil resolução. Uma seqüência numérica repetitiva que admite somente duas possibilidades facilita a percepção da correspondência entre a posição do elemento na seqüência e o número que representa essa posição.

Um aluno ao observar a seguinte seqüência: 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1,... diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia as seguintes questões: a) Qual é o próximo termo dessa seqüência? b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Possíveis estratégias de resolução:

<u>Questão a:</u>

E1. [8] O aluno observa a seqüência e verifica que como os termos 1 e 6 se alternam, o próximo termo da seqüência é 6.

<u>Questão b:</u>

E1. O aluno faz a relação entre as posições pares e impares, e observará que o número 1 se relaciona com as posições impares e o número 6 com as pares, logo o número que está na 127ª posição é impar, concluindo que será o número 1. O aluno faz essa relação de dependência implicitamente:

Posições impares $\rightarrow 1$

Posições pares $\rightarrow$ 6

[8] Para efeito de compreensão, chamarei de E1- Estratégia 1, E2 - Estratégia 2, assim sucessivamente.

E2. O aluno continua descrevendo a seqüência até o 127º termo. Concluindo que o 127º termo corresponde ao número 1.

E3. A seqüência pode ser escrita como uma função f: N$\rightarrow$A, dessa forma o aluno poderia escrever, de forma explicita a função.

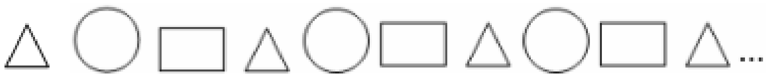
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for ímpar} \\ 6, & \text{se } x \text{ for par} \end{cases}$$

Concluindo que a 127ª posição é impar, correspondendo ao número 1.

Atividade II

Objetivo: Apresentar uma seqüência figurativa-numérica, diferenciando da primeira que é numérica, que apresente um grau de dificuldade maior que a atividade anterior. Tal seqüência deve exigir que o aluno perceba um padrão com a alternação de três elementos, e a visualização não seja imediata, pois os elementos apresentados devem se iniciar e terminar com a mesma forma geométrica, o que pode dificultar um pouco mais a percepção do padrão.

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:



diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia as seguintes questões:

a) Qual é o próximo termo dessa seqüência?

b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Possíveis estratégias de resolução:

Questão a:

E1. O aluno percebe que a seqüência tem uma ordem e desenha a próxima forma, um círculo.

E2. Monta uma tabela e faz a relação entre a posição e a figura que a corresponde:

Posição	Figura
P1	triângulo
P2	círculo
P3	retângulo
P4	Triângulo
P5	Círculo
P6	Retângulo
P7	Triângulo
P8	Círculo
P9	Retângulo
P10	Triângulo
P11	Círculo

Tabela 1 - Atividade II - Estratégia 2 - item a)

Questão b:

E1. O aluno continua desenhando até chegar na 127ª figura, e observa que a figura é um triângulo.

E2. Observa-se que o retângulo aparece na 3ª posição, 6ª posição e 9ª posição, conclui que nas posições de um número múltiplo de 3, a forma geométrica será sempre um retângulo. Para encontrar a 127ª posição verifica um múltiplo de três, próximo de 127, por exemplo, 120, conclui que essa posição é de um retângulo e daí calcula a forma do sétimo elemento, concluindo que na 127ª posição haverá um triângulo.

E3. O aluno poderá estabelecer uma relação montando grupos, por exemplo, um grupo de 9 elementos: ele percebe que cada grupo de 9 é formado pela seqüência **(t, c, r, t, c, r, t, c, r**[9]**; t, c, r, t, c, r, t, c, r; t, c, r, t, c, r, t, c, r; ....)** Dessa forma para achar a 127º posição, poderia relacionar quantos grupos de 9 resultam em 127, ou seja, montando a equação e chamando G =grupo, temos:

$$G \times 9 = 127$$

$$G = \frac{127}{9}$$

G=14 grupos e pararia na 1ª posição, logo, observaria qual a figura que se encontra na 1ª posição, que no caso seria o triângulo.

E4. O aluno analisa a tabela acima, observa que o triângulo aparece na 4ª posição, voltando a repetir na 7ª posição, e depois na 10ª, logo a 11ª posição é a figura que vem logo após o triângulo que no caso, é o círculo, pois $10 \div 3 = 3$ e sobra resto 1, esse resto quer dizer que será o triângulo, que é a figura que vem depois do retângulo. Então para achar a 127ª posição o aluno relacionará com os múltiplos de 3, então fará $127 \div 3 = 42$ e sobra resto 1, logo é o triângulo, figura que vem depois do retângulo.

E5. O aluno poderia relacionar as figuras com as posições e escrever a seguinte função:

$F: N \rightarrow A$

$N \rightarrow A$

$1 \rightarrow \triangle$

$2 \rightarrow \bigcirc$

$3 \rightarrow \square$

$4 \rightarrow \triangle$

$5 \rightarrow \bigcirc$

$$f(x) = \begin{cases} \triangle\text{, se } x = 3k+1 & (1, 4, 7,...) \\ \bigcirc\text{, se } x = 3k+2 & (2, 5, 8,...) \\ \square\text{, se } x = 3k+3 & (3, 6, 9,...) \text{ para } k \in N \end{cases}$$

Chamei de c= círculo; r= retângulo e t= triângulo.

E conclui que a 127ª posição é um número da forma 3k+1, pois 127÷3= 3x42+1, que representa o triângulo.

Atividade III

Objetivo: Apresentar uma seqüência que é uma progressão aritmética, portanto um padrão numérico, assunto tratado geralmente no Ensino Médio e observar se e como os alunos resolvem esse problema de generalização de padrão.

Os alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio podem utilizar seus conhecimentos sobre progressões aritméticas para resolvê-lo, pois já devem ter tratado do assunto.

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,...

diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia as seguintes questões:

a) Qual é o próximo termo dessa seqüência?
b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Possíveis estratégias de resolução:

Questão a:
E1. O aluno continua a seqüência, percebendo que basta adicionar 4.

E2. O aluno observa que cada termo é o anterior acrescido de quatro. Assim estabelece algumas relações. Do tipo:

1ª posição – corresponde 1 (1)
2ª posição – corresponde 5 (1+4)
3ª posição – corresponde 9 (1+4+4)

4ª posição – corresponde 13 (1+4+4+4)

5ª posição – corresponde 17 (1+4+4+4+4), dessa forma o aluno somará até a 10ª posição e chegará em 37 (1+4+4+4+4+4+4+4+4+4), nessa relação o aluno percebe que o número 1 é fixo.

E3. O aluno observa que:

Posição	Cálculo T=1+4x(p-1)	Resultado da posição(p) menos um (1). (p-1)
1ª posição	01= 1 + 4 x 0	(p-1) = 1-1=0
2ª posição	05=1 + 4 x 1	(p-1) =2-1=1
3ª posição	09=1 + 4 x 2	(p-1) =3-1=2
4ª posição	13= 1 + 4 x 3	(p-1) = 4-1=3
...	**...**	**...**
10ª posição	37= 1 + 4 x 9	(p-1) =10-1=9
nª posição	T=1+4 x (p-1)	(p-1)

Tabela 2 - Atividade III - Estratégia 3 - item a)

Logo a posição procurada (10ª) corresponde ao número 37.

E4. O aluno percebe que se trata de uma Progressão Aritmética. Usa a fórmula para *encontrar* o próximo termo que representa a 10ª posição que é 37, pois como já tem até a 9ª posição, facilmente consegue achar a 10ª, já que percebeu que a seqüência aumenta de 4 em 4. Utilizando a fórmula , temos:

$a_n = a_1 + (n-1).\ r$, do qual

$a_n = 10$

n= número de termos (10)

q= é a razão, que nesse caso é 4.

Aplicando a fórmula do termo geral da PA:

$a_{10} = 1+ (10-1).4$

$a_{10} = 1+9.4$

$a_{10} = 1+36$

$a_{10} = 37$

Observação: Esta estratégia para aqueles alunos que estão estudando as progressões ou já as estudaram pode não representar grande dificuldade e aparecer com a mais utilizada.

<u>Questão b:</u>

E1. O aluno continua somando de 4 em 4 até chegar no 127º termo que será o número 505.

E2. Para concluir qual número representa a 127ª posição o aluno monta grupos, por exemplo, estabelece uma relação com a 5ª posição e a 10ª, observando que número 17 representa a 5ª posição e o número 37 representa a 10ª. Dessa forma concluirá que a cada grupo de 5, aumenta 20. Logo para calcular a posição 127ª, deverá pensar quantos grupos de 5 cabem em 127, ou seja, $127 \div 5 = 25$ grupos e sobrou 2, que representa a 2ª posição = 5, assim 25.20 = 500 e como sobrou 2, devemos somar 500+5 (2ª posição) = 505.

E3. O aluno observa que:

Posição	Cálculo T=1+4x(p-1)	Resultado da posição(p) menos um (1). (p-1)
1ª posição	01= 1 + 4 x 0	(p-1) = 1-1=0
2ª posição	05=1 + 4 x 1	(p-1) =2-1=1
3ª posição	09=1 + 4 x 2	(p-1) =3-1=2
4ª posição	13= 1 + 4 x 3	(p-1) = 4-1=3
...	...	...
nª posição	T=1+4 x(p-1)	(p-1)
127ª posição	T=1+4x(127-1)= T=1+4x126=505	(127-1)=126

Tabela 3 - Atividade III - Estratégia 3 - item b

E4. Aplicando a fórmula da Progressão Aritmética, o aluno acharia a 127ª posição.

$a_n = a_1 + (n-1).\ r$, do qual

$a_n = 127$

n= número de termos (127)

r= é a razão, que nesse caso é 4.

Aplicando a fórmula temos:

$A_{127} = 1+ (127-1).\ 4$

$A_{127} = 1+(126\ ).\ 4$

$A_{127} = 1+504$

$A_{127} =505$

E5. O aluno poderia escrever uma função para expressar a posição e o número procurado, que implicitamente faria a descoberta da fórmula da PA.

p= posição procurada

f(p) = número que representa a posição procurada.

$f(p) = \{\ 1+ 4.\ (p - 1),\ p \in N$

f(127) = 1+4x(127-1)

f(127) = 1+4x126

f(127) = 1+504

f(127) = 505

Atividade IV

Objetivo: Levar o aluno a refletir sobre o que é um padrão, sensibilizando-o para que perceba que a existência não está relacionada a uma regra geral como o das progressões aritméticas e geométricas, neste caso a regra geral até hoje não foi descoberta, mas trata sim, de um padrão, pois a seqüência escolhida é a seqüência dos números primos.

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...

diz que encontrou o próximo termo. Como você responderia a seguinte questão:

- Qual é o próximo termo dessa seqüência? Justifique sua resposta.

Possível estratégia de resolução:

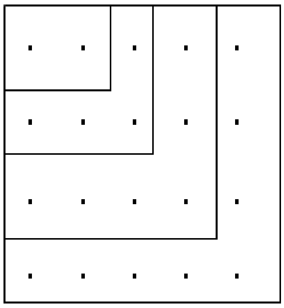
E1. O aluno observa e percebe que se trata da seqüência de números primos, concluindo que a próxima posição é ocupada pelo número primo 31.

2ª sessão

Para esta sessão escolhi apresentar apenas uma atividade baseada em atividade proposta por Lesley Lee (1996) a esta atividade designamos de atividade V.

<u>Objetivo:</u> Apresentar um padrão geométrico flexível, já trabalhado com alunos do Ensino Médio por Lesley Lee de uma forma fechada, não flexível. Isso possibilitará de alguma forma uma comparação dos resultados obtidos. Esse problema poderá levar o aluno a formular generalizações em situações diversas. Dependendo da maneira com que visualiza o padrão, poderá despertar aptidão para analisar através de um padrão figurativo-numérico as relações numéricas de uma situação, explicitar em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos, passando de uma forma de representação para outras. Diagnosticar se o aluno consegue usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas, podendo despertar aptidão para concretizar em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas para procurar soluções de equações simples.

Observando a figura abaixo, que tal descobrir as relações entre a forma como a seqüência é construída, a quantidade de pontos em determinada posição e a sua posição na seqüência? ***Desafio vocês a investigar e descobrir as próximas posições da seqüência!***



a) Qual a 5ª posição?
b) Qual a 100ª posição?
c) Existe uma posição com 200 pontos? Qual seria?
d) Existe uma posição que tem 420 pontos? Qual seria?
e) Existe uma posição que apresenta 1123 pontos? Se existe diga qual é.
f) Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de pontos ou a forma de uma posição qualquer da seqüência?

Algumas estratégias previstas para resolução da atividade:

<u>Questão a:</u>

E1. O aluno observa a figura em forma de retângulos sobrepostos, relacionando linhas e colunas, ou seja, 1ª posição (1 linha e 2 colunas, multiplicando linha por coluna terei 2x1=2 pontos), 2ª posição (2 linhas e 3 colunas, multiplicando linha por coluna obteria 2x3=6 pontos), perceberia então que a 3ª posição seria (3 linhas por 4 colunas, obteria 3x4=12 pontos) e a 4ª posição seria (4 linhas e 5 colunas, resultando em 4x5 = 20 pontos). Numericamente o aluno escreveria a seguinte seqüência (2, 6, 12, 20,...). Dessa forma na 5ª posição, o aluno faria 5 linhas x 6 colunas = 30 pontos.

E2. O aluno observa o padrão em forma de bordas, observa que na 1ª figura tem 2 pontos, 2ª figura 2+4=6, 3ª figura 2+4+6=12 e na 4ª 2+4+6+8=20. Logo a 5ª figura terá 2+4+6+8+10=30, o aluno perceberá que para calcular a 5ª posição, deverá somar (2+4+...+10), pois 10 é o dobro de 5. Essa análise o levará a fazer conjecturas de que essa soma, representa a soma de números pares.

E3. O aluno poderá descrever a seqüência em L, seria um outro olhar para a mesma figura e daí ficaria:

1ª figura – 2pontos
2ª figura – 4 pontos
3ª figura – 6 pontos
4ª figura – 8 pontos
... ... Percebendo que são múltiplos de 2.

Numericamente a seqüência seria (2, 4, 6, 8,...).

Para encontrar a 5ª figura, o aluno faria 2x5=10pontos (é sempre o dobro da posição).

Questão b:

E1. Já na 100ª posição, o aluno observou que o número de linhas é sempre a própria posição e o número de colunas aumenta uma unidade. Dessa forma faria 100 linhas x 101 colunas (número de linhas + 1) = 100x101= 10.100 pontos.

E2. Da mesma forma para calcular a 100ª posição o aluno fará (2+4+6+8+...+200), pois 200 é o dobro de 100, provavelmente farão essa soma, e chegarão em 10.100.

E3. Para calcular a 100ª posição o aluno faria 2 x 100=200 pontos.

Questão c:

E1. Para verificar se existe uma figura em que o número de pontos seja 200, o aluno testaria dois números consecutivos em que seu produto resultará em 200.

Logo concluirá que 13x14=182 e que 14x15=210, então não existe uma figura que tenha 200 pontos.

E2. O aluno monta a seqüência e calcula a soma de (2+4+... +26=182) e (2+4+...+...28 = 210). Logo a soma de 13 termos resultará em 182 - faltaria. Se a soma for de 14 termos resultará em 210 - ultrapassando o valor que seria 200 pontos. Concluindo que <u>não existe</u> uma figura que tenha 200 pontos.

E3. Como o aluno já encontrou que a 100ª posição que representa 200 pontos. Espera-se que perceba que 200 pontos representam a 100ª posição.

E4. O aluno poderia também não ter relacionado com a questão anterior e pensaria: ”*existe um número que multiplicado por 2 resultará em 200?”*.Dessa forma facilmente encontrará (2x100=200pontos), que representa a 100ª posição.

<u>Questão d:</u>

E1. Para verificar se existe uma figura que tenha 420 pontos o aluno partiria da mesma idéia da questão anterior, tentaria dois números consecutivos que resultará em 420, e através de tentativas descobriria que os números são 20 e 21, pois 20 x 21=420. Como ele já fez a relação que o número da posição, multiplicado pelo seu consecutivo resultará no número de pontos, descobrirá que a figura procurada é a 20ª.

E2. Para encontrar uma figura que tenha 420 pontos, acredito que tentarão estabelecer uma regra, pois os cálculos estão ficando cansativos. Se o aluno já observou que a soma das 13 figuras, resultará em 182, é porque já estabeleceu uma relação entre o número da última soma com a posição procurada, que é sempre o dobro. Assim para calcular essa soma percebe que basta somar o 1º + o último, multiplicar pela metade do último (que representa a posição procurada) e dividir por dois. Descobrindo assim que para existir uma figura que tenha 420 pontos, ele escreveria a seguinte equação:

Chamando de x = o número procurado (lembrando que esse número representa o último, e que a posição está relacionada com $\frac{x}{2}$)

420= $\frac{(2+x).\frac{x}{2}}{2}$, resolvendo essa equação temos:

840= x + $\frac{x^2}{2}$

1680= 2x+x ^{2}

x ^{2} +2 x – 1680=0 (equação do 2º grau completa)

x= $\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-1680)}}{2.1}$

x = $\frac{-2 \pm \sqrt{6724}}{2}$

x= $\frac{-2 \pm 82}{2}$

x= $\frac{80}{2}$

x = 40, logo a posição procurada é $\frac{x}{2}$ = $\frac{40}{2}$ = 20 (20ª posição).

E3. O aluno pensaria: "existe um número que multiplicado por 2, resultará em 420?". Logo esse número é 210, pois 2x210= 420, que representa a 210ª posição.

<u>Questão e:</u>

E1. Para verificar se existe uma figura que tenha 1123 pontos o aluno partiria da mesma idéia da questão anterior, tentaria dois números consecutivos que resultará em 1123, através de tentativas descobriria que os números 33 x 34=1122. Assim nem tentará o próximo, pois 1122 é o que antecede de 1123, concluindo que não existe um produto de dois números consecutivos que resultará em 1123.

E2. Imagino que o aluno possa usar a mesma idéia da alternativa **d** para essa questão, porém ao começar fazer os cálculos observará que os números são altos.

Chamando de x = o número procurado (lembrando que esse número representa o último, e que a posição está relacionada com $\frac{x}{2}$).

1123= $\frac{(2+x).\frac{x}{2}}{2}$, resolvendo essa equação temos:

2246= x + $\frac{x^2}{2}$

4492= 2x+x²

x^2 +2 x -4492=0 (equação do 2º grau completa)

x=$\frac{-2 \pm \sqrt{4-4.1.(-4492)}}{2}$

x = $\frac{-2 \pm \sqrt{17968}}{2}$ (Não possui raízes reais)

Logo a posição de número 1123 não existe.

E3. O aluno poderá pensar que todas as posições são números múltiplos de 2, logo 1123 é um número impar. Concluindo que não existe essa posição.

E4. O aluno poderia escrever uma equação (2x= 1123) e concluir que o resultado não é um número inteiro, percebendo que não existe uma posição para esse número.

Questão f:

E1. Para escrever uma regra, o aluno já descobriu que é o número da posição multiplicado pelo seu consecutivo (soma um), então poderá denominar a posição por letra, por exemplo, ***p,*** como já sabe que é só multiplicar a posição pela posição mais “um”, escreverá:

Número de pontos = p.(p+1)

E2. 2= primeiro número da seqüência

nº = número de pontos da seqüência

x= último número da seqüência

$\frac{x}{2}$= a posição procurada.

N= $\dfrac{(2+x).\frac{x}{2}}{2}$, simplificando temos:

N= $\dfrac{x+\frac{x^2}{2}}{2}$

N= $\dfrac{\frac{2x+x^2}{2}}{2}$

N= $\dfrac{2x+x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

N = $\dfrac{2x+x^2}{4}$

E3. Para chegar à regra geral, o aluno já estabeleceu a relação de que basta multiplicar a posição por 2. Então o número de pontos de qualquer figura é:

Número de pontos= 2. x (x representa a posição).

Finda a análise a priori das atividades, passei a preparar os instrumentos da pesquisa que seriam entregues aos alunos participantes.

O material a ser entregue aos sujeitos da pesquisa durante a 1ª sessão foi impresso em folha sulfite em branco, cada uma das 4 atividades em folhas separadas.

Já, para a 2ª sessão, cuja única atividade possuía 6 questões, foi preparada a impressão de cada questão em uma folha separada de sulfite em branco.

Seleção dos sujeitos da pesquisa

Contato com a escola

Para minha pesquisa, decidi selecionar alunos de uma escola pública, por ter maior concentração de alunos e também por esse tipo de ensino ser mais carente de subsídios, podendo de certa forma com os resultados obtidos na pesquisa, contribuir para o trabalho dos professores, visando assim melhoria do ensino.

A escola se localiza no estado de São Paulo em cidade próxima à Campinas. Essa opção se deu pelo fato de que moro nessa cidade e trabalho nessa escola escolhida. Esses fatos acrescido ao de que a diretora tem boa vontade com a realização de pesquisas que possam colaborar para a melhoria do ensino, justificam a escolha feita.

Em conversa com a diretora da escola selecionada, ela se disse muito honrada por ter escolhido sua escola para realização da pesquisa. Na mesma conversa, após a obtenção de sua permissão, expliquei como desenvolveria a parte empírica: em que nível, período, sala e também as providências que tomaria em relação a aquiescência dos pais dos alunos.

Conforme combinado anteriormente com a diretora, durante o horário de trabalho coletivo, conversei com os dois professores, que lecionam nas séries dos alunos com os quais pretendia trabalhar (1ª ano - professor A e no 2º e 3º ano - professor B), pedindo permissão para convidar alunos voluntários que pudessem contribuir para o desenvolvimento da pesquisa.

Escolhi três classes do ensino médio do período da manhã, uma de cada série, pela disponibilidade dos alunos, que em geral não trabalham, podendo comparecer à escola em outro período. Além disso, escolhi classes onde não estava lecionando naquele ano para evitar que o aluno participasse somente por obrigação.

Após análise da disponibilidade de horário dos 16 alunos voluntários, escolhi 10 alunos, sendo uma dupla do 1º ano, duas duplas do 2º ano e duas duplas do 3º ano. Um dos alunos do 3º ano faltou no dia da sessão, fazendo com que eu decidisse trabalhar com uma tríade do 3º ano. A escolha dos parceiros de dupla do 2º ano foi realizada pelos próprios alunos.

A dupla do 1º ano era constituída de duas meninas de 15 anos, as duplas do 2º ano por casais de uma menina e um menino todos de 16 anos. A tríade do 3º ano foi formada por duas meninas e um menino todos com 17 anos.

Primeiros contatos com os alunos da escola

Com a autorização dos professores, estive nas classes explicando que precisaria de alunos voluntários para participar de minha pesquisa, cujos resultados visam contribuir para o ensino de Matemática, e que o estudo seria realizado na escola, fora do horário de suas aulas. Expliquei que a participação do aluno na pesquisa não interferiria em sua avaliação escolar e que as atividades de pesquisa se realizariam em duas tardes. Entreguei então, uma planilha[10] onde solicitei aos alunos que voluntariamente se dispuseram a participar da investigação, que colocassem nome, dia e o horário da tarde disponível.

Seleção propriamente dita

A planilha de voluntários das três séries do EM indicavam um total de 17 alunos. Analisando a disponibilidade de horário desses estudantes formei uma dupla de cada série, dado que possivelmente poderia ocorrer a falta de uma das duplas, o que acarretaria um desfalque na população desejada resolvi chamar mais duas duplas uma da 2ª e outra da 3ª série cujos membros tinham disponibilidade semelhante a das três duplas selecionadas anteriormente.

Contato com os responsáveis pelos estudantes

Conforme já citado, para garantir o empenho no comparecimento dos alunos voluntários, os pais foram notificados através de uma carta[11], das atividades de pesquisa que seus filhos haviam se comprometido a participar.

Aplicação do instrumento de pesquisa.

1ª sessão

Esta sessão ocorreu no dia 26 de outubro de 2005 e teve início as 13 horas com a presença de 7 dos 10 alunos previstos: duas duplas da 2ª série e 3 alunos da 3ª série. Um quarto aluno da 3ª série, selecionado, avisara que não poderia comparecer. Diante disso, resolvi formar uma tríade com os alunos da 3ª série. Após 10 minutos do inicio da sessão, chegaram os componentes da dupla da 1ª série.

Desta forma estávamos presentes a pesquisadora, o observador e nove alunos. A amplidão da sala de estudos, na qual nos encontrávamos, permitiu que cada um dos 4 grupos de alunos ficasse em uma mesa redonda longe uma das outras. Em cada uma das mesas foi colocado um gravador.

No inicio da sessão antes de entregar as atividades aos alunos agradeci-lhes pela colaboração, ressaltando a importância da participação de cada um. Lembrei que não utilizaria seus nomes verdadeiros no relatório da pesquisa. Após essa observação alguns se manifestaram dizendo que gostariam de ter seus nomes divulgados mesmo que não conseguissem desenvolver as atividades de forma correta.

[10] Planilha-consta o nome do aluno; série; disponibilidade de dias da semana e horário.
[11] Carta de autorização e declaração aos pais em anexo

Apresentei então o observador que chamei de colaborador, contando que estaria conosco durante as 2 sessões para auxiliar nas observações e gravação das conversas.

Falei que daria algumas atividades para resolverem, uma por vez, e que assim que terminassem uma atividade, a entregassem-na e solicitassem a próxima.

Expliquei que entregaria uma única caneta e folha de atividade para cada grupo os quais deveriam ficar a vontade para discutirem a resolução. Pedi que não apagassem o que fizessem e que se achassem que havia errado, simplesmente fizessem um risco em cima, pois suas dúvidas e possíveis erros eram importantes para a pesquisa.

A sessão correu tranqüilamente, sem interrupções ou barulho e terminou às 14 horas. O tempo de resolução variou entre 50 e 60 minutos conforme previsto.

2ª sessão

Esta sessão ocorreu no dia seguinte a primeira, dia 27 de outubro de 2005. No horário marcado, 13 horas, todos os nove alunos, o observador e o pesquisador se encontravam na mesma sala de estudos que ocuparam no dia anterior.

Alguns alunos mostraram curiosidade em saber se as atividades eram parecidas com as do dia anterior.

Os grupos e as disposições das salas permaneceram os mesmos da 1ª sessão.

Iniciei pedindo que falassem claramente um com o outro para a gravação de suas discussões ficassem mais nítidas. Expliquei que era apenas uma atividade, contendo seis questões, cada questão estaria em folhas separadas e deixaria todas sobre a mesa de cada grupo. Solicitei ainda que a cada questão respondida, dissessem em voz alta que estariam começando a próxima, para facilitar a compreensão da transcrição das fitas.

O tempo de resolução da atividade variou entre 40 e 60 minutos, sendo que o primeiro grupo a entregar foi o da 1ª série e o último a tríade da 3ª série. Assim, o tempo previsto foi respeitado.

Capítulo V

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Introdução

Para melhor compreender e analisar os dados obtidos, fiz, primeiramente, uma análise das respostas por duplas, seguida de uma analise por questão.

Ao todo analisarei 3 duplas e uma tríade com os seguintes componentes: a 1ª dupla, constituída pelas alunas do 1º ano, Deise e Luna, a 2ª dupla composta pelos alunos Ivo e Rose e a 3ª dupla pelos alunos Rafael e Carolina do 2º ano, e a tríade do 3º ano: Tânia, Jane e João.

A análise dos dados se baseou na transcrição das gravações, nas observações registradas por mim e minha colaboradora durante a execução das sessões e, principalmente, nos protocolos dos alunos. Coloquei em itálico as falas dos alunos.

Análise pelos grupos de dois e três alunos.

1ª dupla: Deise e Luna, do 1º ano do Ensino Médio, ambas com 15 anos.

1ª sessão:

A dupla lê a **atividade I**, em voz alta, e Luna, ao ler a questão b), comenta:

Mas 127 é grau?

mostrando a confusão inicial feita com o símbolo de ordem 127º e graus estudado, provavelmente, em Ciências. Isso não as impediu de iniciar a resolução do item a), rapidamente, quando Luna observa:

Ah! O próximo é 6. Por que 1 é impar e 6 é par.

É interessante notar aqui que Luna, antes mesmo de pensar no item “b”, aparentemente, já generalizou o problema, pois observa que, nas posições ímpares, está o 1 e, nas posições pares, está o 6. Conforme previmos, utilizou a estratégia prevista E_1.

Para responder ao item b), a dupla entabula longo diálogo no qual comentam que o item “a” foi fácil, mas o ”b” está em grau, e que não haviam aprendido aquilo em Matemática. Num certo momento, Deise observa:

Olha deve ser fácil, porque no enunciado diz que o aluno foi capaz, então nós somos capazes de encontrar.

Isso parece ter dado um novo alento, despertando em Luna a seguinte reflexão:

Oh! Qual número vai parar no 127º, oh. 1º, 2º, 3º...

Deise diz:

Então vai ter que fazer a conta para saber em qual posição ele vai parar,

ou no 1 ou no 6?

Continuando o diálogo, logo Luna volta a concluir que 1 é ímpar e 6 é par, o que leva Deise a afirmar que o termo seria o número 1, pois 127º é ímpar.

Assim, essa dupla utiliza a estratégia E_1 para resolver a questão b).

Após essa descoberta, há um longo período de discussão sobre a forma de justificar o resultado encontrado.

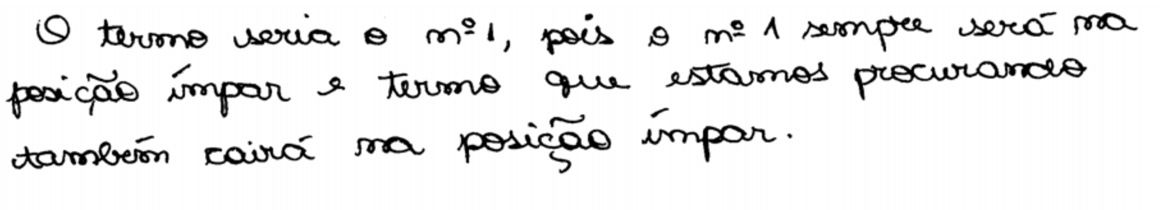

O termo seria o nº 1, pois o nº 1 sempre será na posição ímpar e termo que estamos procurando também cairá na posição ímpar.

Figura 7 - Protocolo extraído da atividade I, item b - 1ª Dupla.

É interessante notar a dificuldade na elaboração da resposta escrita que pode ter sua explicação no que Nacarato afirma, durante o exame de qualificação, sobre o fato de os professores de Matemática, em geral, não exigirem que o aluno justifique, verbalmente, sua resolução, contentando apenas com respostas diretas, sem justificar a resposta.

Após a escrita, Deise ainda questiona:

Será que não tem que fazer conta, mesmo?

Evidenciando, claramente, o problema do contrato didático[12], pois, segundo Silva (2002, p. 43):

> "A relação professor-aluno subordinada a muitas regras e convenções que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a transcrição das mesmas. O conjunto das cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber, constitui o chamado ***contrato didático***".

Luna lê a questão a) da **atividade II**, em voz alta, e, rapidamente, as duas comentam:

Ah! É o círculo. Olha! Só que agora já é com três, triângulo, círculo e retângulo, é diferente do primeiro que era 1, 6, 1, 6,... esse era só de dois!

Dessa forma, a dupla utilizou a estratégia E_1 descrita na análise a priori, passando, rapidamente, para a resolução do item "b". Ao ler o item "b", Luna não comenta a questão do grau, dizendo:

[12] Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor (...). Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (Brousseau, 1986).

Qual é o 127 termo da seqüência?

Deise, mostrando preocupação, diz:

Agora tem que explicar pôr que.

Deise, no final da atividade, afirma:

Até que não é muito difícil!

Luna confirma**:**

Não. Tem que ter raciocínio, não é? Não é feito conta.

No final do diálogo, Deise diz que não está entendendo que conteúdo é esse, mas que é mais gostoso do que as aulas de Matemática, aquele negócio de delta.

O diálogo da dupla deixa claro que as alunas perceberam que as posições múltiplas de três correspondem ao retângulo, mostrando assim, o uso da estratégia E_2. Abaixo o protocolo das alunas:

É o Δ, pois pensando nos múltiplos de 3, até chegar no número 120 (múltiplos de 3), depois contamos um por um até chegar no termo 127° que caiu no triângulo Δ.

Figura 8 - Protocolo extraído da atividade II, item b - 1ª Dupla.

O protocolo mostra que as alunas superaram a confusão feita entre graus e o símbolo do ordinal. Além disso, o diálogo final esclarece que as alunas já perceberam a mudança no contrato didático ao comentarem que, para resolver o problema, tem que ter raciocínio, não precisa fazer contas.

Aparentemente, sem mesmo ler o enunciado da **atividade III**, Luna observa a seqüência e diz:

É de 4 em 4

Logo em seguida, Deise afirma:

Todos os números da seqüência são impares

É interessante notar que as alunas se mostram mais à vontade, desafiadas a procurar as regularidades, mesmo que essas não influam na resolução, como é o caso da observação de Deise.

Luna conclui*:*

É de 4 em 4, é 37, não é? É só somar mais 4, então o próximo é 37.

Deise comenta:

É, só que com os números, é diferente, o outro era círculo, retângulo, triângulo,....

Ao que Luna retruca:

São múltiplos de 4.

Mas, rapidamente, percebe que está errada, e conclui:

Hi!! Tá errado, porque são números impares, e múltiplos de 4 é par, não vai ter jeito, vai ter que contar de 4 em 4, vai ter que fazer isso agora.

Mas será que não tem uma conta?

Deise continua a insistir:

Tem que ter uma conta é impossível.

A discussão da dupla se dá por um longo período. Luna não desiste em buscar uma maneira mais rápida para chegar ao resultado; tenta buscar uma fórmula, enquanto Deise diz:

Eu acho melhor fazer um por um

Luna observa:

Só que demora...

Luna, então, desiste e começa a escrever, 33, 37, 41,...

Segue abaixo a resolução das alunas:

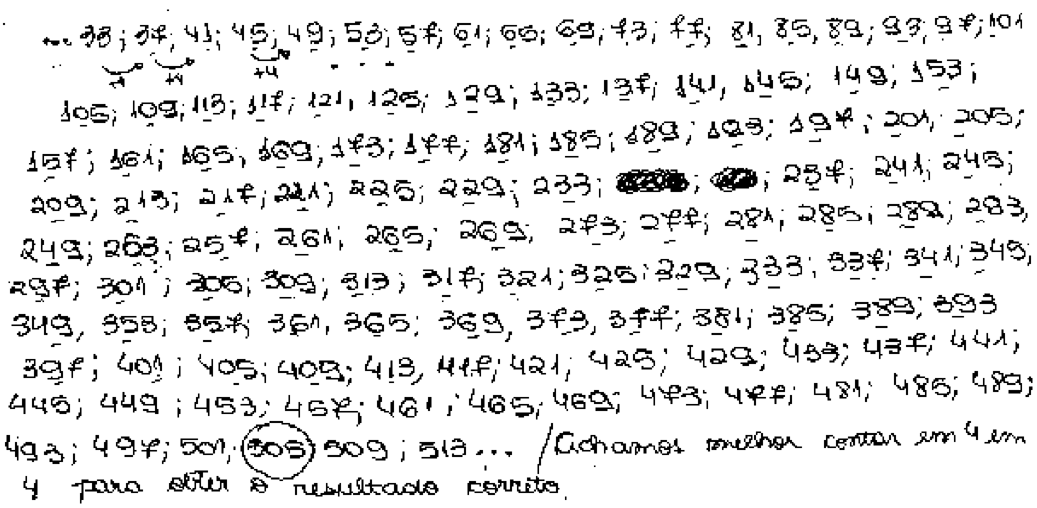

...33; 37; 41; 45; 49; 53; 57; 61; 65; 69; 73; 77; 81, 85, 89; 93; 97; 101
105; 109; 113; 117; 121, 125; 129; 133; 137; 141, 145; 149; 153;
157; 161; 165, 169; 173; 177; 181; 185; 189; 193; 197; 201, 205;
209; 213; 217; 221; 225; 229; 233; ; 237; 241; 245;
249; 253; 257; 261; 265; 269; 273; 277; 281; 285; 289; 293,
297; 301; 305; 309; 313; 317; 321; 325; 329; 333; 337; 341; 345;
349, 353; 357; 361, 365; 369, 373, 377; 381; 385; 389; 393
397; 401; 405; 409; 413, 417; 421; 425; 429; 433; 437; 441;
445; 449; 453; 457; 461; 465; 469; 473; 477; 481; 485; 489;
493; 497; 501; 505 509; 513... / Achamos melhor contar em 4 em 4 para obter o resultado correto.

Figura 9 - Protocolo extraído da atividade III, item b - 1ª Dupla.

A resolução acima mostra a utilização da estratégia E_1. No entanto, é interessante notar a persistência de Luna na busca de uma lei de formação que economizasse tempo. Isto, de acordo com Caraça (1989), corresponde a um princípio geral de <u>*economia do pensamento*</u>[13] que nos leva, seja nos atos elementares da labuta diária, seja nas construções mentais elevadas, a preferir sempre, de dois caminhos que levam ao mesmo fim, o mais simples e mais curto. Este princípio foi explicitado várias vezes, mas a dupla acabou preferindo ir pelo caminho mais longo, que, de acordo com o protocolo, sentiam mais segurança. Essas alunas não haviam ainda estudado progressões aritméticas.

Ao ser digitada a seqüência dos primos, constante da **atividade IV**, infelizmente, omitiu-se o número 19, o que notei apenas após o término das duas sessões. Dessa forma, a questão ficou prejudicada e somente será analisada para esta dupla porque, embora o termo tenha sido omitido, Luna explicitou a percepção de que se tratava da seqüência dos números primos.

[13] Este princípio é conhecido pelo nome de princípio da permanência das leis formais, ou princípio de Hankel, e não é mais, como vimos que a aplicação particular, na Matemática, do princípio geral de economia do pensamento. (p. 27)

Luna observa a seqüência e, rapidamente, diz que é a seqüência de números primos. Comenta:

Sempre tive inimizade com eles, nunca fui com a cara deles

Deise, mostrando não estar convencida de que a seqüência seja de números primos, tenta estabelecer uma relação:

2 para 3 é 1, 3 para 5 é 2, 5 para 7 é 2, 7 para 11 é 4,

Durante um longo diálogo Deise diz lembrar que o número 11 é primo e, no final, acabam concluindo que o próximo termo é o 33.

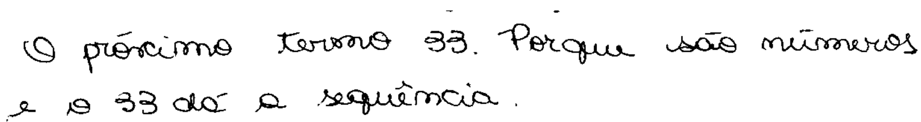

O próximo termo 33. Porque são números
e o 33 dá a seqüência.

Figura 10 - Protocolo extraído da atividade IV - 1ª Dupla.

Essa atividade possui apenas uma estratégia que, no caso, é a observação de que se trata da seqüência de números primos. Isso a dupla percebeu, no entanto não perceberam que 33 é divisível por 11; logo, não é um número primo. Assim, considero que a dupla resolveu o problema, pois o objetivo proposto era exatamente levar o aluno a refletir que um padrão nem sempre esta relacionado a uma regra geral. Nesse caso, admito que a dupla utilizou a estratégia E_1 descrita nas análises a priori dessa atividade.

Fica evidente, na discussão da dupla, o fato de não terem recorrido à definição de número primo, aliás, elas expressam falta de familiaridade e, até mesmo, indisposição com tais números.

<u>2ª sessão</u>

A dupla começa a ler o **item a)** da **atividade V** e, rapidamente, Deise afirma:

Ah! Seria... de dois em dois, não é? Seria 2, depois 4, depois 6 e 8.
E agora como é que a gente responde? Tem que desenhar até quanto?

Pelo diálogo, percebe-se que a dupla visualiza a figura como um padrão em "L"[14] . Em certo momento, Luna conclui:

É verdade foi contado de dois em dois. Acho que é só isso não é?

E a dupla conclui que a próxima posição terá 10 pontos:

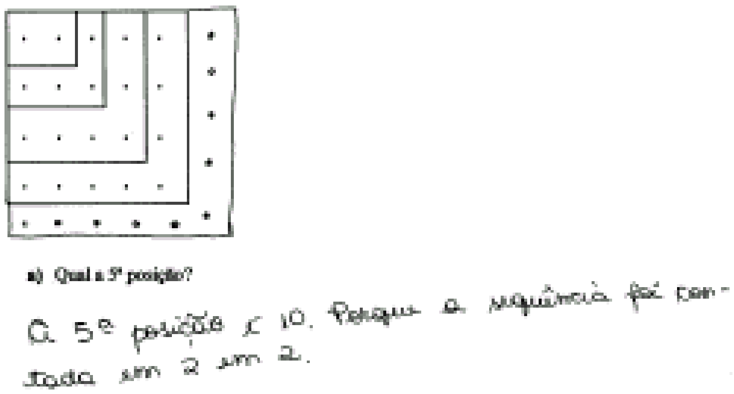


Figura 11 - Protocolo extraído da atividade V, item a - 1ª Dupla.

Dessa forma, percebe-se que as alunas utilizaram a estratégia de resolução indicada por E_3.

No **item b)**, a dupla, rapidamente, observa a regularidade e Luna fala:

Ah! Se a 5ª posição tem 10, a cada 5 tem 10, então a cada 10 tem 20.
Então 20 vezes 10 é 200 pontinhos. Deixa eu ver ...
Então a 100ª posição tem 200 pontinhos.

Abaixo o protocolo das alunas:

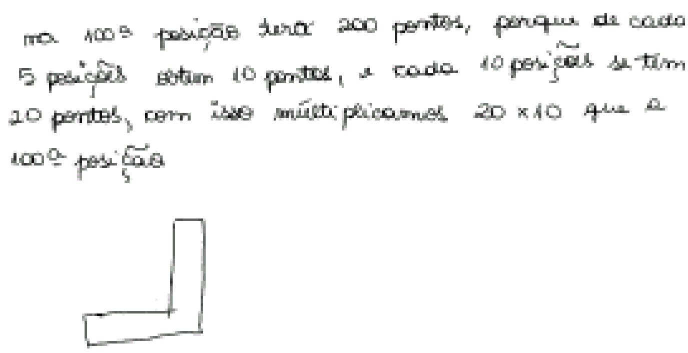


Figura 12 - Protocolo extraído da atividade V, item b - 1ª Dupla.

[14] De acordo com Lee essa percepção de padrão é chamada de "bordas" ou números crescentes de pontos na borda ao longo da faixa (2, 4, 6, 8,...).

Assim a dupla respondeu ao item “b” utilizando a estratégia E_3.

Deise lê o **item c)**, em voz alta, e Luna, nos seus comentários, relata sua primeira fala:

6 tem 12, 8 dá 16, 9 ...18 e 10...20.Tá certo?

Deise observa:

Tá certo, mas não é para fazer assim?
Você não achou que a 100ª posição é 200?

Luna concorda com Deise que conclui:

Então a 100ª posição tem 200 pontos, não precisa fazer conta,
já respondemos na questão anterior

Luna concorda com Deise e escrevem a resposta, usando a E_3:

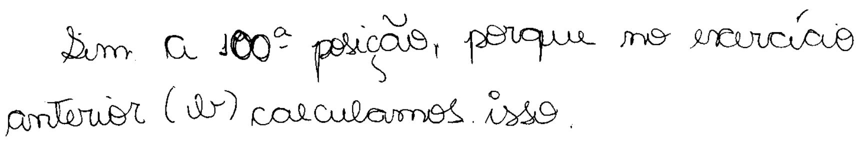


Figura 13 - Protocolo extraído da atividade V, item c - 1ª Dupla.

Ao examinar o **item d),** imediatamente, Luna conclui:

Se na 200ª posição tem 400, mais 20, e se cada 20 tem 10,
seria na 210ª posição

O que evidencia que relaciona esta com a questão anterior. No diálogo com a colega, Luna diz:

Ah! A gente também pode dividir por 2, 420 dividido por 2 é 210v

Deise complementa:

Ah! Porque quando dividimos 200 por 2 dá 100 e 20 por 2 deu 10,
assim por diante.

Sim. Seria a posição 210ª. Porque percebemos que no nº de pontos dividido por 2 daria a sua posição. e dividimos por 2 porque essa é a sequência

$$420 \div 2 = 210$$

Figura 14 - Protocolo extraído da atividade V, item d - 1ª Dupla.

O protocolo evidencia ainda mais a estratégia utilizada pela dupla, que foi a E_3.

Após leitura silenciosa do **item e)**, Luna questiona:

Será que pode mudar a seqüência?

Deise responde:

Sei lá, é complicado para gente calcular...

Do diálogo posterior, destaco algumas falas.

Luna:

Se dividirmos 1120 por 2, vai dar 560. E depois começamos uma nova seqüência de 3 em 3.

Luna:

Se contarmos até 1120 temos uma posição que é 560ª e somamos mais 3...

A dupla redige o seguinte resultado:

Sim. Se contarmos os pontos até 1.120 teremos a posição 560ª e somamos mais 3 dando 1123, à partir daí começamos outra sequência que será em 3 em 3.

Figura 15 - Protocolo extraído da atividade V, item e - 1ª Dupla.

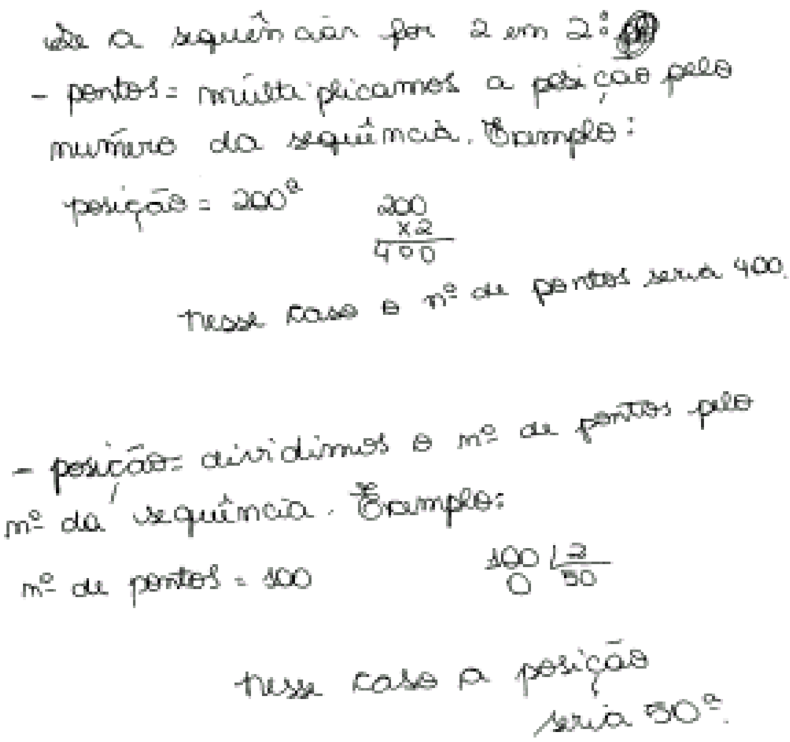
Fica claro aqui mais um efeito do contrato didático. Se o professor pergunta é porque existe uma resposta positiva. Dessa forma, resolveram a questão sem levar em conta a figura; a dupla se fixou na seqüência numérica: 2, 4, 6,...

Deise lê o **item f)**, em voz alta, e logo em seguida, responde que, para achar a posição, é só dividir por 2 e, para achar os pontos, é só multiplicar por 2.

Luna retruca:

Se a seqüência for de 2 em 2 (pontos). Para achar o número de pontos basta multiplicarmos a posição por 2. Exemplo: 200ª (200 x 2=400).

E concluem com o seguinte protocolo:


Se a sequência for 2 em 2:
- pontos = multiplicamos a posição pelo número da sequência. Exemplo:

posição = 200ª

200
x2
400

nesse caso o nº de pontos seria 400.

- posição = dividimos o nº de pontos pelo nº da sequência. Exemplo:

nº de pontos = 100

100 | 2
0 | 50

nesse caso a posição seria 50ª.

Figura 16 - Protocolo extraído da atividade V, item f - 1ª Dupla.

Dessa forma, a dupla expressa em linguagem literal, natural, a lei geral. Mostrando que as duas meninas pensam algebricamente, porém, neste caso, não foram capazes de formular simbolicamente a regra.

2ª dupla: Ivo e Rose do 2º ano do Ensino Médio, ambos com 16 anos.

1ª sessão

A dupla lê silenciosamente o **item a) da atividade I** e já percebe a regularidade na seqüência dizendo:

1, 6, 1, 6...

Ivo diz:

AH! É um par e um impar.

Rose argumenta:

Ah 1 é impar e 6 é par.

Ivo reafirma:

Não! O número 1 está na posição impar e o 6 na posição par.

Rose responde:

Ah! Agora entendi, não tem nada a ver que o número é par ou impar, é por causa da posição!

Em seguida a dupla coloca o resultado encontrado, utilizando como estratégia a E_1.

Após terem lido o **item b)**, Ivo rapidamente diz que o termo solicitado é o 1, Rose diz não compreender porque, então Ivo explica:

Porque 10, vai ser 6, então 100 vai ser 6, porque ele é par.

Rose concorda com Ivo e diz:

Ah! Porque isso vai continuar não é?

Ivo complementa:

Vamos ver quanto é 27?

enquanto Rose diz:

Eu acho que vai ser um, porque 27 está na posição ímpar.

Ivo concorda, mas Rose parece não estar confiando nesse resultado pois fala:

Espera! Vamos dar uma conferida. Ah! Acho que tem lógica, por que...
Se tivesse outros números aí seria complicado.

Ivo argumenta:

Se tivesse outros números daria para fazer PA (Progressão Aritmética)
ou PG (Progressão Geométrica), só que nesse caso
é tudo igual não usa nem PA e nem PG.

A dupla não relata por escrito a relação entre as posições pares e as posições impares, mas analisando a diálogo fica explicita essa relação, levando a conjecturar que a dupla utilizou a estratégia E_1 de acordo com a análise a priori para chegar ao resultado.

É interessante notar que a dupla após observar a seqüência não demora a associar posição na seqüência com um dos dois números, chegando a generalização com facilidade conforme previsto. A relação feita por Ivo com o conteúdo de PA e PG parece indicar que esse conteúdo está sendo ou já foi trabalhado nessa escola.

A aluna Rose lê silenciosamente a **questão a) da atividade II**, e mostrou perceber a regularidade do padrão quando diz:

Triângulo, bola, quadrado,... é tudo igual é uma seqüência repetida.

E Ivo complementa:

Então sempre depois do triângulo é o círculo, então é o círculo.

Dessa forma a dupla respondeu o item a) utilizando a estratégia E_1. Ao lerem **item b)**, Rose diz que agora complicou e Ivo tenta explicar:

Olha é só pensar de 10 em 10 (10, 20, 30, 40,... 120) e depois contar até 7,
então só vai ser... triângulo.

Assim a dupla justificou o resultado encontrado conforme o protocolo abaixo:

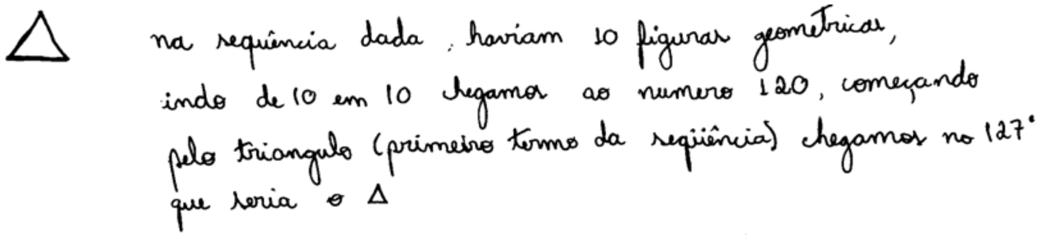

na sequência dada, haviam 10 figuras geométricas,
indo de 10 em 10 chegamos ao numero 120, começando
pelo triangulo (primeiro termo da seqüência) chegamos no 127°
que seria o Δ

Figura 17 - Protocolo extraído da atividade II, item b - 2ª Dupla.

Ivo esclareceu sua estratégia considerando que a seqüência se repetia de 10 em 10 elementos, o que na realidade poderia acontecer se a seqüência apresentasse mais elementos do que os dez apresentados repetindo-os de dez em dez. Dessa forma considero que foi uma estratégia de generalização que levou em consideração que os elementos apresentados constituíam um bloco de dez elementos a ser repetido desconsiderando o simbolismo algébrico utilizado para apresentar as seqüências. Foi uma estratégia interessante e embora “incorreta” que levou a resposta correta.

A dupla ao dar por terminada essa questão explicitou estar gostando muito das atividades.

Rose lê em voz alta a **questão a) da atividade III**, e conjuntamente a dupla chega a seguinte conclusão:

1+4 dá 5, 5+4 dá 9, ..., então 33+4 dá 37, então é 37!

Quando Rose a guisa de confirmação diz:

É sempre acrescentando 4 ao último número.

Ivo concorda imediatamente e escreve a resposta.

Dessa forma considero que a dupla utilizou a estratégia E_1 da análise a priori.

Passando ao **item b)**, Rose diz:

Nossa agora é fogo!

Ivo rapidamente retruca:

É uma Progressão Aritmética (PA).

Rose depois de demonstrar espanto lembra uma das fórmulas de PA:

Ah! É uma PA $a_n = a_1 + (n-1)x\ r.$

Ivo pergunta:

O que nós temos que achar é o a_n *ou o n?*

Após o que Rose chega à conclusão que o termo procurado é o a_n . Em seguida a dupla elabora as seguintes resoluções:

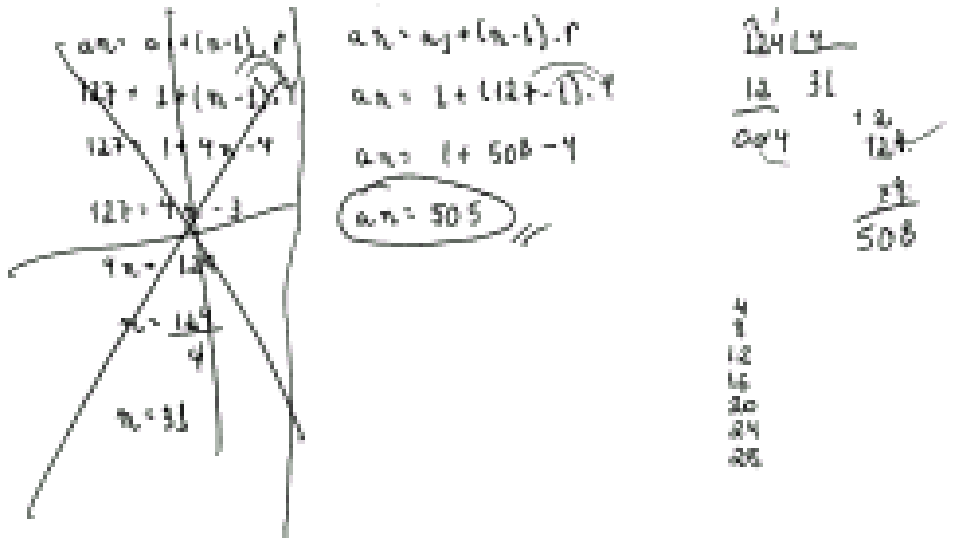


Figura 18 - Protocolo extraído da atividade III, item b – 2ª Dupla.

A primeira resolução mostra a confusão entre o enésimo termo e o número da posição do enésimo termo. Após essa primeira resolução onde o termo solicitado seria 31, Rose se espanta com a solução percebendo que algo estava errado, ao que Ivo diz:

Se até aqui tem 33, é impossível ser 31. Já sei, não é o n, é o a_n *que tem que achar, pois é 127º termo que queremos achar.*

Daí após riscarem a 1ª resolução, aplicam novamente a fórmula, agora de forma correta, chegando ao resultado correto pela utilização da E_3 prevista na análise a priori.

Um fato interessante a ser destacado é o do estranhamento da dupla com a primeira resposta obtida, chegando a conclusão de que aquela resposta era absurda. Isso evidencia a necessidade da validação do resultado, ou do retrospecto do problema sugerido por Polya em seu livro “A arte de resolver problemas”, como uma das quatro fases[15] que o aluno deve passar durante a resolução de um problema.

2ª sessão

Rose lê o **item a)** da **atividade V** em voz alta e diz:

Qual é a quinta posição? Tem que fazer um quadradinho aqui não é?

Ivo complementa*:*

Começa com dois, quatro, seis, oito...

em seguida Rose diz:

Ah! Agora que eu vi! Duas, quatro, seis, oito e dez.

A dupla discute como justificar a resposta, até decidirem como argumentar o resultado final, conforme o protocolo abaixo.

[15] Primeira fase: É preciso compreender o problema; Segunda fase: É preciso estabelecer um plano para resolução; Terceira fase: Execução do plano; Quarta fase: examinar a resolução obtida (retrospecto)

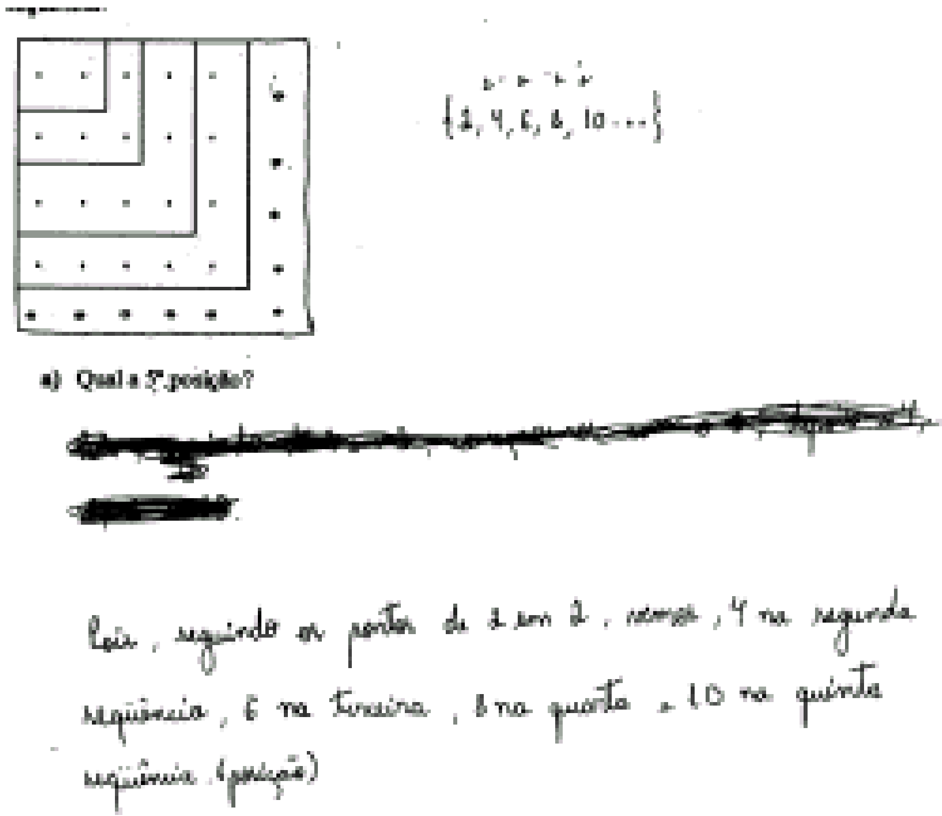


Figura 19 - Protocolo extraído da atividade V, item a – 2ª Dupla.

Percebe-se pelo protocolo que a dupla montou a seqüência numérica que representa o número de pontos de cada borda a partir da figura apresentada, e a partir daí eles justificam o resultado encontrado. Dessa forma, a dupla conclui a questão usando a E_3 conforme a análise a priori.

A dupla passa a leitura do **item b)** apos ler essa questão várias vezes, Ivo pergunta:

Oh! A 5ª posição tem 10, a 10ª posição vai ter quanto? O dobro?

Rose responde:

Olha então é assim, a 7ª tem 14, a 8ª tem 16, 18, e a 10ª tem 20.

Ivo diz:

Oh! É só pensar assim 2x5=10, então a 100ª é 2x 100=200.

Rose retruca:

Mas de onde saiu isso?

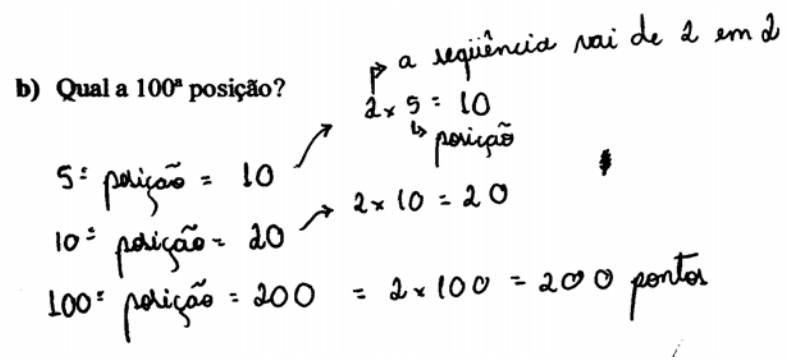
Ivo explica:

Porque ela vai de dois em dois

Rosangela sugere:

Ah! Então já ta explicado não é?

Após um tempo, a dupla escreve:


b) Qual a 100ª posição?

p a seqüência vai de 2 em 2
2x5 = 10
5ª posição

5ª posição = 10
2x10 = 20
10ª posição = 20
100ª posição = 200 = 2x100 = 200 pontos

Figura 20 - Protocolo extraído da atividade V, item b – 2ª Dupla.

Dessa forma o protocolo mostra que a justificativa se inspirou na seqüência numérica percebida pela dupla anteriormente. O que indica o uso da estratégia E_3, conforme a análise a priori. Interessante notar que neste caso a dupla não observou explicitamente que se tratava de uma PA.

Rose lê a **item c)** em voz alta e ficam dialogando por um tempo, até que ela diz entusiasmada:

Nós não achamos a 100ª? Está perguntando se existe uma posição com 200 pontos. Existe! Nós acabamos de achar, é a 100ª posição.

Rapidamente a dupla faz relação com a questão anterior, e Ivo diz:

Ah! É mesmo!

Ivo concorda com Rose e escrevem a resposta usando a estratégia E_3.

Sim, a 100° posição

Figura 21 - Protocolo extraído da atividade V, item c – 2ª Dupla.

Ao ler o **item d)** em voz baixa, Rose observa:

Existe sim, porque a seqüência vai de dois em dois e todos são pares, como 420 é par então vai existir.

Enquanto Ivo diz:

Então é (2, 4, 6, 8, 10,...). A razão é de 2 em 2. Então acho que dá para a gente usar a fórmula da PA.

A dupla entabulou um longo diálogo, surgindo algumas dúvidas quanto ao que se pretendia calcular, e o que representava a resposta n= 210, do diálogo destaco algumas falas:

Ivo: Acho que n é a posição.

Rose argumenta*:*

Não! A posição é 420, não e?

Ivo retruca ao ler novamente a questão:

Quer dizer que na posição 210 vai haver 420 pontos! Então 210 é o n.

Rose concorda com Ivo.

Dessa forma a dupla redige o seguinte resultado*:*

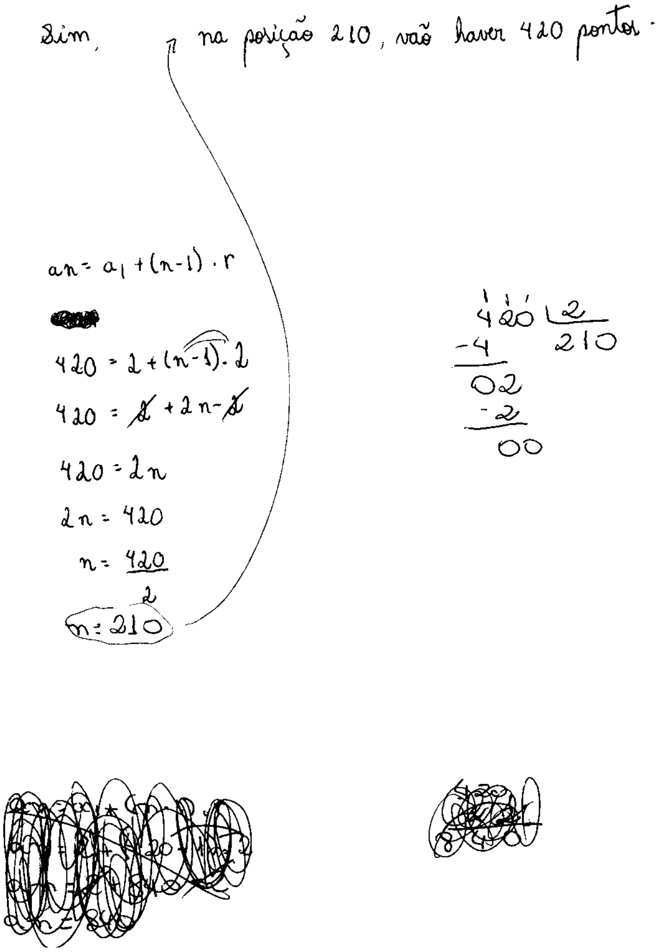


Figura 22 - Protocolo extraído da atividade V, item d - 2ª Dupla.

O protocolo mostra que Ivo nessa questão fez relação entre o problema proposto e uma PA. Embora no início das discussões tenha havido dúvida sobre posição do termo e o termo da PA percebida, os alunos justificaram corretamente sua estratégia, estratégia essa não prevista na análise a priori, mostrando a diversidade de estratégias possíveis de resolução desse problema.

Rose lê o **item e)** em voz alta, e rapidamente faz o seguinte comentário.

Não existe, porque termina com número impar. Entendeu? Eu acho que é por isso, é minha opinião e você?

Rose insiste:

E aí Ivo? O que acha? Vamos responde.

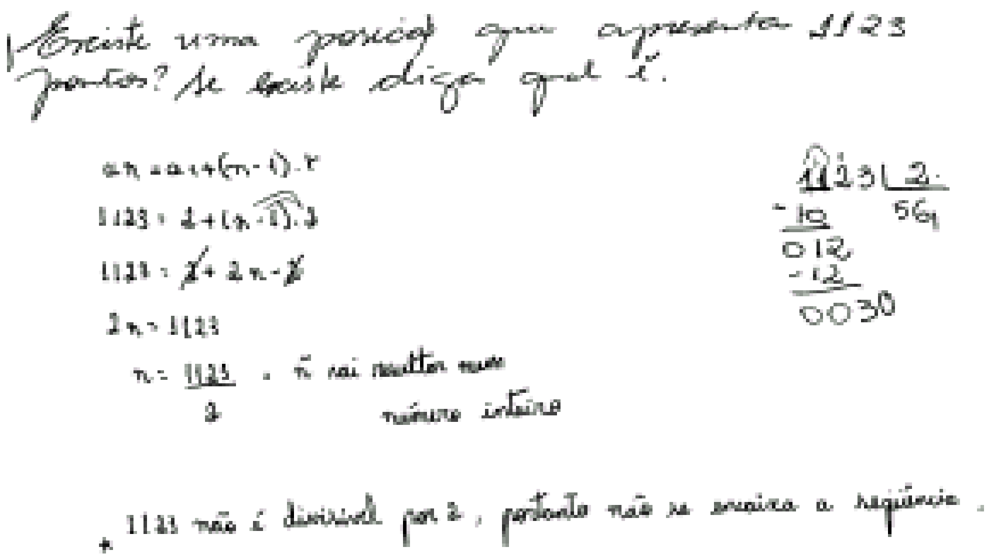
Ivo novamente fala em Progressão Aritmética, e diz:

Tem que achar o n aqui!

enquanto Rose diz:

E o a_n é o que?

A dupla pensa mais um pouco, escreve:


Existe uma posição que apresenta 1123 pontos? Se existe diga qual é.

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$1123 = 2 + (n-1).2$

$1123 = \cancel{2} + 2n - \cancel{2}$

$2n = 1123$

$n = \frac{1123}{2}$. n vai resultar num número inteiro

1123 | 2
-10 561
012
-12
0030

* 1123 não é divisível por 2, portanto não se encaixa a sequência.

Figura 23 - Protocolo extraído da atividade V, item e – 2ª Dupla.

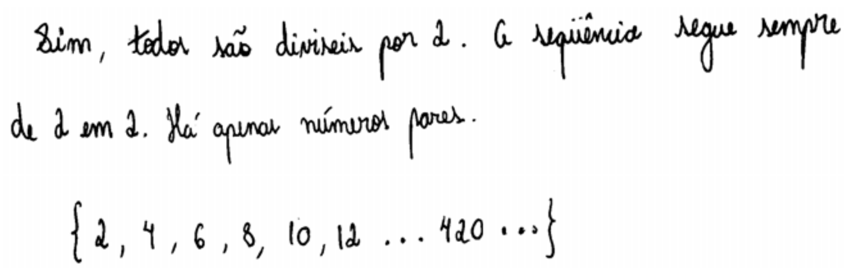
Embora Rose tenha percebido imediatamente a resposta ao problema pela estratégia E_3 Ivo, não levou em consideração sua explicação. Ele então propõe uma resolução que leve em conta a PA percebida no item anterior. O que denota que a dupla sugeriu duas estratégias de resolução e justificação.

Ao lerem o **item f)** a dupla mostra estranheza e chama a pesquisadora:

Como assim escrever uma regra?

Respondo que está se pedindo para achar uma regra que valha para todas as posições, como se fosse uma fórmula.

A dupla discute por mais um tempo, e escreve:


Sim, todos são divisíveis por 2. A seqüência segue sempre de 2 em 2. Há apenas números pares.

{2, 4, 6, 8, 10, 12 ... 420 ...}

Figura 24 - Protocolo extraído da atividade V, item f – 2ª Dupla.

Assim percebe-se que embora essa dupla tenha percebido que o número de pontos de cada borda descrevia uma seqüência de razão 2 e conhecessem o primeiro termo da seqüência, além de já terem utilizado a fórmula geral que associava o termo com sua posição, não chegaram a fórmula solicitada. Este fato sugere que eles tenham aprendido a aplicar a fórmula para encontrar um termo, mas não participaram do processo de construção da fórmula da PA.

3ª dupla: Rafa e Carol do 2º ano do Ensino Médio, ambos com 16 anos.

<u>1ª sessão</u>

A dupla lê silenciosamente a **questão a**) da **atividade I** quando repetem:

1, 6, 1, 6, 1,...

Rafa observa:

É o número seis! Que coisa fácil! É só seguir a seqüência.

Carol concorda com Rafa e respondem a questão utilizando aparentemente estratégia E_1, passando logo em seguida para a leitura do **item b)**.

Rafa fala:

Automaticamente o termo 127 seria 6 também.

Carol fica em silencio e escreve:

O termo 127° seria o 6

nós descobrimos, pq pela informação do enunciado

Figura 25 - Protocolo extraído da atividade I, item b - 3ª Dupla.

Dado que a gravação foi dificultada pelo fato de que ambos os elementos da dupla falavam pouco e muito baixo, e que Carol não discutiu a solução dada por Rafa, a análise dessa questão ficou prejudicada.

Carol lê a **questão a) da atividade II** em voz alta.

Triângulo, círculo, quadrado, triângulo, círculo e quadrado,... Então o próximo é o circulo e o quadrado.

Logo em seguida, sem nenhuma discussão, a dupla passa para o **item b)**. Dessa forma a dupla aparenta ter resolvido a questão conforme a estratégia E_1.

Ao comentar o item b) Carol observa:

É só contar 12 vezes, vai cair sempre no triângulo, daí conta mais sete (círculo, quadrado, triângulo, círculo, quadrado, triângulo, círculo). Então é o círculo.

Rafael concorda e faz o seguinte comentário:

Ah! Acho que é. Mas para escrever, é melhor explicar.
Porque existe uma seqüência de 10 formas geométricas, daí multiplicamos por 12 deu 120, e daí contamos até chegar no 7.

Veja a o resultado final da dupla.

Seria o circulo.

nós contamos 12 vezes a sequência de figuras, como sobrou um triângulo eliminamos ele e contamos mais 7 formas geometrica a seguir

Figura 26 - Protocolo extraído da atividade II, item b - 3ª Dupla.

É interessante notar que nesta dupla houve sugestão de duas estratégias diferentes, embora Carol não tenha percebido que Rafa mudou sua justificativa. Carol havia percebido que era possível fazer grupos de 12 figuras que se repetiam, e sugerir que 10 vezes grupo de 12 daria 120, seu engano foi não perceber que o 120º termo era o retângulo, e que o 121 seria o triângulo, não levando em consideração esse engano de Carol sua estratégia coincide com uma variação da estratégia E_3. No entanto Carol acabou aceitando a estratégia enganosa utilizada por Rafa, que no caso foi a mesma imaginada pela dupla Ivo e Rose.

A dupla lê a **questão a) da atividade III** silenciosamente, e logo em seguida Carol observa:

1, 5, 9, 13,... Oh! Tá indo de 4 em 4.

Rafa concordando com Carol, diz:

É mesmo tá indo de 4 em 4, 1+4 dá 5, 5+4 dá 9, 9+4 dá 13,...

Carol argumenta:

Então é só fazer 33+4, que é 37.

No que Rafa concorda.

Assim a dupla utilizou a estratégia a E_1.

Carol faz a leitura do **item b** em voz alta, ao que Rafa pergunta:

Será que não seria o 370, não?

Após um momento sem resposta Rafa de repente diz:

Não seria 380, porque daria muito na cara 370!

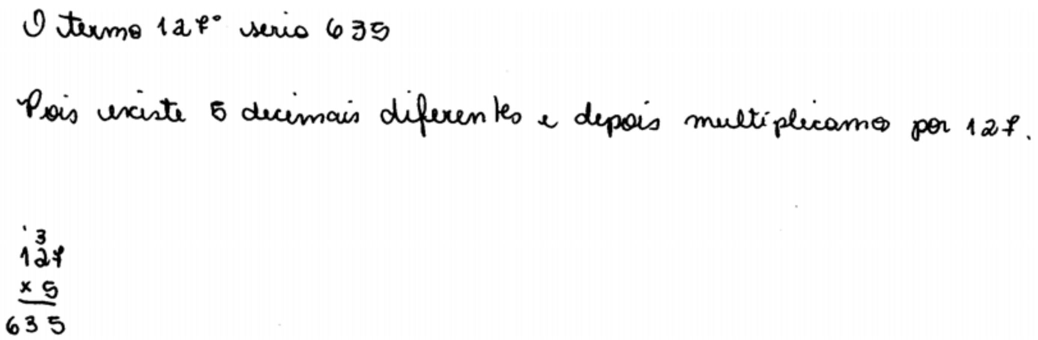
Carol diz não saber nem por onde começar, e fica em silêncio por um tempo.

Logo em seguida, Carol faz uma observação:

Olha! 1, 5, 9, 13, 17, 21, olha o 21 já repete aqui, apontando o número 1 complementa:

Veja são 5 números que se repetem 1,5,9,3,7,... começa de novo 1,5,...

A dupla conclui a atividade da seguinte maneira:


O termo 127° seria 635

Pois existe 5 decimais diferentes e depois multiplicamos por 127.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3 \\ 127 \\ \times 5 \\ \hline 635 \end{array}$$

Figura 27- Protocolo extraído da atividade III, item b - 3ª Dupla.

Carol observou uma regularidade na seqüência dada: os últimos algarismos dos números da seqüência formam grupos de 5: *1, 5, 9, 3, 7*,... porém essa observação não redundou no encontro do resultado. Neste caso lembro as palavras de Lee: Não basta apenas enxergar um padrão, ele tem que ser útil algebricamente...

<u>2ª sessão</u>

A dupla lê o **item a)** da **atividade V** em voz alta, e rapidamente Carol relata:

Então ela vai de dois em dois.

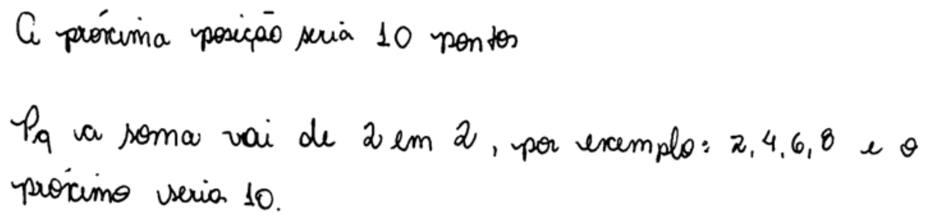
Rafa concordando conclui:

Então como ela vai de dois em dois, o próximo será dez.

Carol mostra não estar convencida:

Será que é dez mesmo?
E agora? Porque a seqüência vai de dois em dois?

Em seguida Carol escreve:


a próxima posição seria 10 pontos

Pq a soma vai de 2 em 2, por exemplo: 2,4,6,8 e o próximo seria 10.

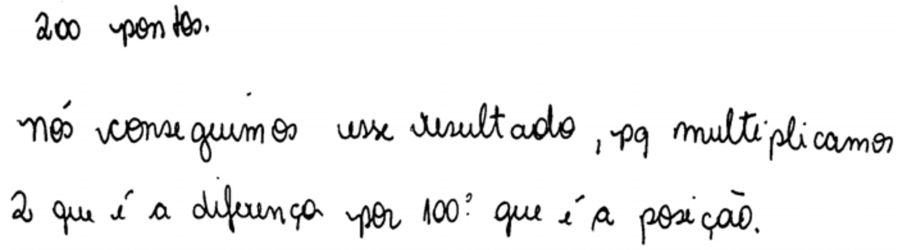
Figura 28 - Protocolo extraído da atividade V, item a - 3ª Dupla.

Embora por um lapso Carol tenha escrito que se tratava de uma soma, parece ter pensado em uma seqüência numérica descrita no protocolo, dessa forma considero que a dupla utilizou a estratégia E_3.

Após ler o **item b)** Carol diz:

100 x 2=200. Será que é isso?

E escreve:


200 pontos.

nós conseguimos esse resultado, pq multiplicamos 2 que é a diferença por 100? que é a posição.

Figura 29 - Protocolo extraído da atividade V, item b - 3ª Dupla.

Dessa forma Carol justifica o resultado encontrado, utilizando a E_3.

Carol lê a **questão c** em voz alta e Rafa diz:

Existe sim.

Ao que Carol pergunta.

Então qual seria?

e Carol faz o seguinte comentário.

Ah! Olha é o resultado da anterior

Rafael comenta:

Vai ter que explicar essa daqui também?

Carol explica:

É só falar que é o resultado da anterior.

Logo dessa forma a dupla conclui o resultado final, conforme protocolo abaixo

Sim, a posição 100°.

Nós encontiamos esse resultado, pq na atividade anterior o resultado foi 200 pontos

Figura 30 - Protocolo extraído da atividade V, item c - 3ª Dupla.

A dupla relacionou a questão com a anterior e mostrou utilizar a E_3.

Carol lê a **item d)** em voz alta, e Rafa comenta:

Olha! Se a posição 100 deu 200, então a 300 seria 600...

Carol observa:

Deixa eu ver, espera aí. A 100 deu 200. A 200 deu 400, então a 420 dá...

Rafa afirma:

A posição seria 240.

Carol retruca:

Não! É 210, seria 210 vezes 2 que dá 420. É isso mesmo não é?

Em seguida redigem o resultado conforme o protocolo abaixo:

Sim, a posição 210

Pois multiplicamos 210 vezes a diferença que é 2.

Figura 31 - Protocolo extraído da atividade V, item d - 3ª Dupla.

No caso Carol se refere a razão 2 como sendo a diferença entre um termo e o termo anterior da seqüência 2, 4 ,6 ,8 , dessa forma utilizando a estratégia E_3.

Rafa lê a **item e)** em voz alta, e logo em seguida diz:

É só dividir por dois.

Carol mostra sua dúvida:

Será que vai dar? Eu acho que não, pois todos os números que nós trabalhamos são pares e 1123 é impar, por isso que não vai dar.

Das observações gravadas destaco:

[...] então vai dar quebrado, não tem posição quebrada, deu 562,5.

Rafa pergunta:

Ah! Então não existe, porque deu quebrado?

Carol complementa:

É porque 1223 é impar! Todos os números que nós fizemos, deu par, esse foi o único que deu impar.

Carol redige a seguinte resposta:

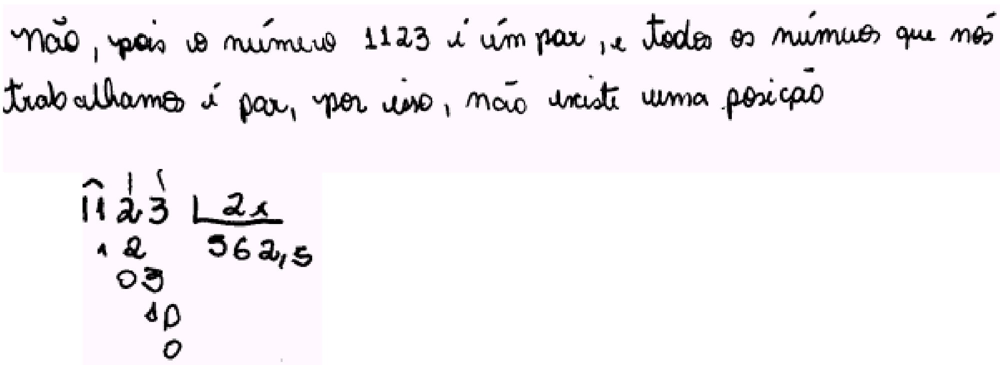


Figura 32 - Protocolo extraído da atividade V, item e - 3ª Dupla.

Carol não só responde quanto valida sua resposta sugerindo a utilização de uma mistura da estratégia E_3 e E_4.

Rafa lê a **item f)** em voz alta, Carol comenta:

Vixe!!! E agora, escrever uma regra para qualquer uma? Como assim? Que negócio é esse?

A dupla solicita a presença da pesquisadora dizendo que não entendeu a pergunta, dou a mesma explicação que dei para a última dupla.

Rafa diz:

Eu acho que a regra seria multiplicar as posições pela diferença que é 2.

enquanto Carol diz:

Ah! Eu também acho que é isso, não é?

A dupla escreve a conclusão final:

Então a regra seria que nós multiplicamos a diferença que é 2 pelas posições que foram dadas a cada atividade.

Figura 33 - Protocolo extraído da atividade V, item f - 3ª Dupla.

Dessa forma a dupla não chega a expressar algebricamente a lei da seqüência, no entanto implicitamente eles tenham os dados para chegar á lei. Durante o desenvolvimento da atividade V, a dupla resolveu uma grande parte das questões, e visualizou a seqüência da figura por bordas.

<u>4ª Dupla (Tríade)</u>: Tânia, Jane e João do 3º ano do Ensino Médio, todos com 17 anos.

<u>1ª sessão:</u>

A tríade lê a **questão a)** da **atividade I**, silenciosamente, e discutem que precisam achar o próximo termo.

Tânia relê a questão em voz alta.

Qual é o próximo termo dessa seqüência?

João diz:

É o número 6.

As meninas concordam; João diz:

É que nem uma dízima periódica, não é?

Em seguida, o trio coloca o resultado encontrado, utilizando como estratégia a E_1.

Em seguida, Tânia faz a leitura do item b), em voz alta, e Jane faz o seguinte comentário:

É o número 1.

Rapidamente, João e Tânia perguntam:

Por quê?

Jane explica aos colegas:

Temos até aqui 9 números, com o 10º que achamos vai dar 10, então a cada 10 números , temos 5 números 1. Então 127º vai dar 1, pois até o 120 vai cair no 6 mais sete, olha é só contar (1,6,1,6,1,6).

Tânia e João entendem a explicação dada por Jane e escrevem o resultado final sem nenhuma explicação.

A tríade não relata, nem oralmente e nem por escrito, a relação entre as posições ímpares e as posições pares, indicando que Jane utilizou uma estratégia não prevista na análise a priori. Esse fato mostra as diferentes estratégias que um aluno pode apresentar para resolver um mesmo problema, pois, de acordo com Lee, o professor pesquisador assume um papel importante, pois é evidente que ele tenha sua própria percepção de padrão em cada questão proposta, e isso não deve ser um problema em si. Além disso, muitas vezes, o pesquisador parece ser incapaz de ver o padrão que foi encontrado pelos estudantes, levando-o a pensar, às vezes, que estão falando de problemas diferentes.

Lee comenta, em sua pesquisa, que, na maioria dos casos, quando o entrevistador interrompeu o aluno para entender o padrão que ele estava observando, isso causou ainda mais confusão e, em alguns casos, levou ao abandono do problema por parte do aluno.

Concordo com Lee ao citar que é muito difícil analisar o protocolo do aluno, quando a sua percepção é estranha ao leitor.

Tânia, em voz alta, lê a **questão a)** da **atividade II.** João, rapidamente, relaciona com a anterior e, assustado, comenta:

Nossa agora tem mais um, o retângulo.

Em seguida, Jane comenta com os colegas.

Gente não tem o que pensar! Depois do triângulo vem o círculo.

Dessa forma, Jane escreve, na folha de resposta, o resultado encontrado, de acordo com a estratégia E_1, da análise a priori.

Em seguida, iniciam a leitura do item b).

O trio conversa por alguns minutos, até que João faz a primeira observação:

Olha! O que achamos é o 11º termo, então até o triângulo, tem 10.

Tânia questiona:

João você já está contando com o que achamos?

João responde:

Não! Pára no triângulo.

Jane faz o seguinte comentário:

Até aqui são 10, então contando de 10 em 10, vamos formar 12 grupos, para dar 120. Como parou no triângulo, começamos de novo.

É interessante notar que há uma longa discussão, pois João acha que deve começar a contar pelo triângulo, enquanto Tânia e Jane acham que devem começar pelo círculo. Segue a fala das duas:

Tânia e Jane:

Não Joâo! Não terminou no triângulo, então começa no círculo.

A discussão continua por mais um tempo, até que João acaba concordando com as meninas, escrevendo o resultado encontrado, conforme protocolo abaixo.

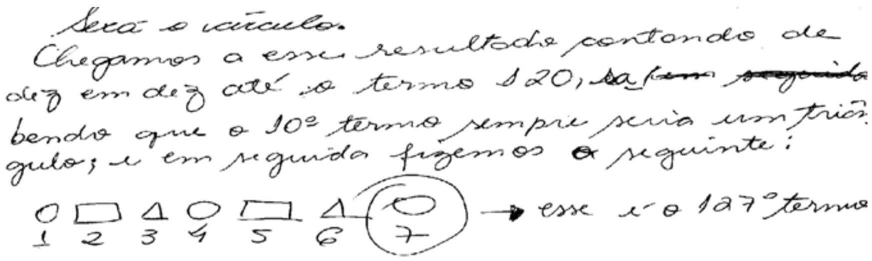

Será o círculo.
Chegamos a esse resultado contando de dez em dez até o termo 120, sa ~~termo seguida~~ bendo que o 10º termo sempre seria um triângulo; e em seguida fizemos o seguinte:
O □ △ O □ △ O → esse é o 127º termo
1 2 3 4 5 6 7

Figura 34 - Protocolo extraído da atividade II, item b - Tríade.

O trio esclareceu sua estratégia considerando que a seqüência se repetia de 10 em 10 elementos, o que, na realidade, poderia acontecer se a seqüência apresentasse mais elementos do que os dez apresentados, repetindo-os de dez em dez. Dessa forma, considero que foi uma estratégia de generalização que levou em consideração que os elementos apresentados constituíam um bloco de dez elementos a ser repetido desconsiderando o simbolismo algébrico utilizado para apresentar as seqüências. É interessante relembrar que esse mesmo erro também foi cometido pela segunda dupla (Ivo e Rose), mas que não deixa de ser uma estratégia interessante.

Notei que o trabalho com três pessoas, ou seja, trabalhar com trio, é mais difícil, pois, muitas vezes, as idéias se divergem, dificultando ainda mais aceitar ou entender a estratégia do colega.

O trio lê a **questão a)** da **atividade III**, silenciosamente, e nos seus comentários, é interessante destacar a fala de João.

Está somando de 4 em 4.

Jane lê novamente a questão, agora em voz alta, e logo em seguida, conclui o que João falou.

É de 4 em 4, então é 33 + 4= 37.

A dupla entabulou um longo diálogo, para escrever a resposta final, que, de acordo com a análise a priori, trata da $E_{1.}$

Passando para o item b), Jane faz o seguinte comentário:

"Olha até 10 é 37, o vinte seria o quê?"

Tânia insiste em fazer um por um, dizendo:

Vamos contar - 41, 45, 49, 53, 57,... 77 (20ºtermo).

Tânia e João começam a escrever um por um, enquanto eles escrevem, Jane não desiste. Ela continua buscando uma relação, tenta formar grupos de 10 em 10, depois de 20 em 20, mas não chega a lugar nenhum, até porque, no meio do caminho, acabaram se perdendo nas contas.

Após obterem o resultado, a preocupação do trio é quanto à escrita.

João comenta:

Escreve que somamos de 4 em 4, não foi isso que fizemos?

Tânia começa a falar em voz alta o que está escrevendo:

Chegamos a essa conclusão, pelo raciocínio acima que é bem complicado! Mas deve ter outro jeito mais fácil. Se você quiser colocar Jane, que é complicado, mas que foi a única maneira que achamos.

Jane diz:

Ah não! Não consegui descobrir nada mesmo, mas que deve ter outro jeito tem, é muito complicado fazer um por um.

O trio justifica o resultado, conforme protocolo abaixo.

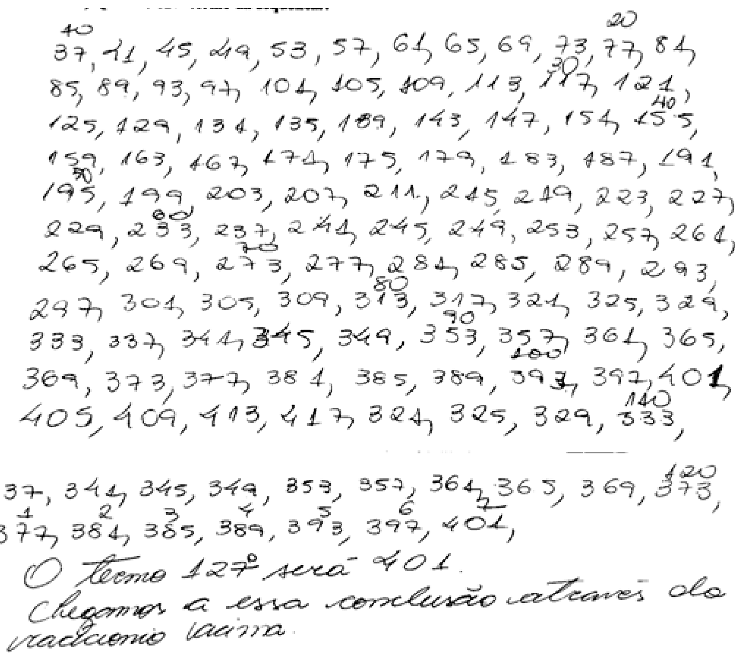

37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81,
85, 89, 93, 97, 101, 105, 109, 113, 117, 121,
125, 129, 131, 135, 139, 143, 147, 151, 155,
159, 163, 167, 171, 175, 179, 183, 187, 191,
195, 199, 203, 207, 211, 215, 219, 223, 227,
229, 233, 237, 241, 245, 249, 253, 257, 261,
265, 269, 273, 277, 281, 285, 289, 293,
297, 301, 305, 309, 313, 317, 321, 325, 329,
333, 337, 341, 345, 349, 353, 357, 361, 365,
369, 373, 377, 381, 385, 389, 393, 397, 401,
405, 409, 413, 417, 321, 325, 329, 333,
337, 341, 345, 349, 353, 357, 361, 365, 369, 373,
377, 381, 385, 389, 393, 397, 401,
O termo 127º será 401.
Chegamos a essa conclusão através do raciocínio lógico.

Figura 35 - Protocolo extraído da atividade III, item b – Tríade

É interessante destacar que Jane tenta estabelecer uma relação, mas acaba desistindo, pois não recebeu apoio. O trio acredita que existe uma maneira mais fácil de resolver, mas não conseguiram outra estratégia a não ser fazer um por um, conforme a E_1 da análise a priori. Outra observação é que, mesmo sendo alunos do 3º ano do Ensino Médio, não relacionaram o padrão geométrico com o conteúdo que, provavelmente, já aprenderam que são as progressões aritméticas (PA).

<u>2ª sessão:</u>

A aluna Tânia lê em voz alta o **item a)** da **atividade V**; João e Tânia fazem a primeira observação.

> *Oh! Vai aumentar um para cá, vai aumentar aqui! Aqui tem dois, aqui tem três, aqui tem quatro, aqui tem cinco, o próximo vai ter 6.*
>
> *João diz:*
>
> *Vai igualando aqui, outro aqui, sobe dois , sobe três.*

Ao analisar a transcrição e o protocolo, fica claro que João está falando do desenho, mas parece que o padrão que ele está enxergando não é o mesmo que as meninas enxergam.

A discussão fica em torno de João e Tânia, até que, depois de um tempo, acabam se entendendo. Tânia conclui:

A 5ª posição vai ser 6.

O trio entabula um longo diálogo para redigir a resposta, do qual destaco algumas falas.

João diz:

À medida que aumenta na horizontal, aumenta na vertical, cada fachada vai aumentar um.

Enquanto Tânia diz:

Não, à medida que aumenta a seqüência, um pontinho aumenta na horizontal.

O trio fica um longo período discutindo se escreve "posição", "seqüência" ou "fachada". João retruca:

Coloca cada fachada mesmo, fica melhor!

Veja como ficou o resultado final.

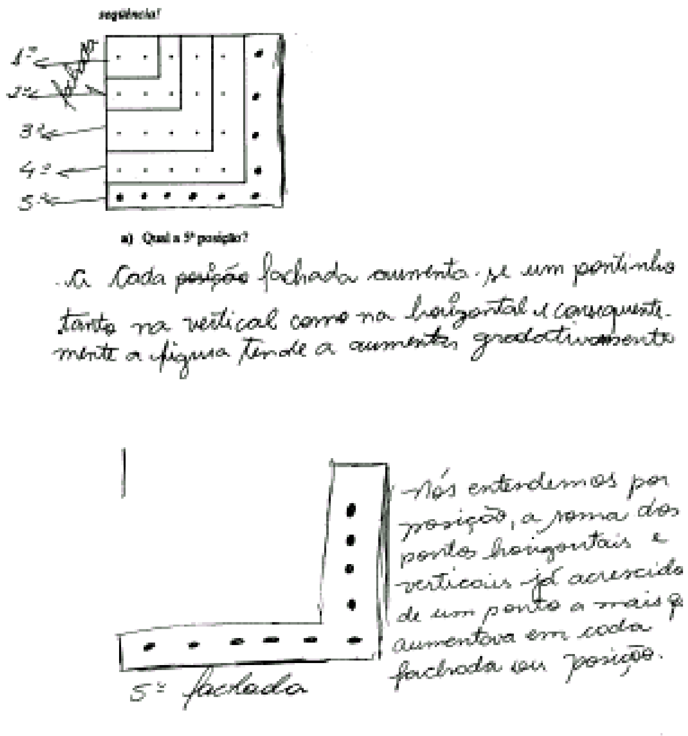


Figura 36 - Protocolo extraído da atividade V, item a - Tríade.

Por fim, concluem a questão conforme a estratégia E_3 da análise a priori.

Um fato interessante, que só foi evidenciado pelo trio, foi a maneira com que o grupo enxergou o padrão, pois, enquanto as duplas enxergaram o padrão puramente numérico, esse grupo enxergou o padrão apenas figurativo, pois relacionam se os pontos aumentam na horizontal ou na vertical, falam de fachadas, o que mostra uma visão diferente dos outros grupos.

Além dessa visualização, percebe-se que o trio enxergava a figura de maneira diferente; pareciam confusos ao escreverem se aumenta um ponto na posição vertical e outro na horizontal. João diz que aumenta um ponto na vertical e na horizontal. Na realidade, quando João diz contar um ponto na vertical e outro na horizontal, ele acaba contando duas vezes o mesmo ponto, mas isso não interfere no resultado final, porém é uma maneira diferente de enxergar o mesmo padrão.

Lee destaca, em seu artigo, que é muito mais difícil analisar o protocolo, quando a percepção do aluno é estranha ao leitor. (Lee & Wheeler, 1987, pp. 109-110).

Uma outra observação interessante é que Lee chama de bordas “L”, enquanto João chama de “fachada”.

O trio faz a leitura individual do **item b)**, Tânia faz o primeiro comentário:

Se a 5ª posição tem 10, a 20ª vai ter 20, rapidamente se corrige. Se a 5ª vai ter 10, a 10ª vai ter 20.

Jane conclui:

A cada 5 aumenta 10.

Enquanto Tânia diz:

Se a cada 5 posições aumenta 10. A 10ª vai ser 20. Então a 20ª, vai ter 30, e a 30ª vai ter 40.

Tânia está escrevendo o que disse acima.

João, rapidamente, corrige Tânia, dizendo:

Está errado!

As meninas concordam.

Jane fala para Tânia:

Risca tudo isso daí, e começa de novo. Gente espera aí!!

Não precisa fazer isso, a 100ª posição vai ter 200 pontos.

Embora Jane já tenha concluído, João faz o seguinte pedido para Tânia:

Vamos continuar, vai Tânia, faz tudo para ficar bem organizadinho!

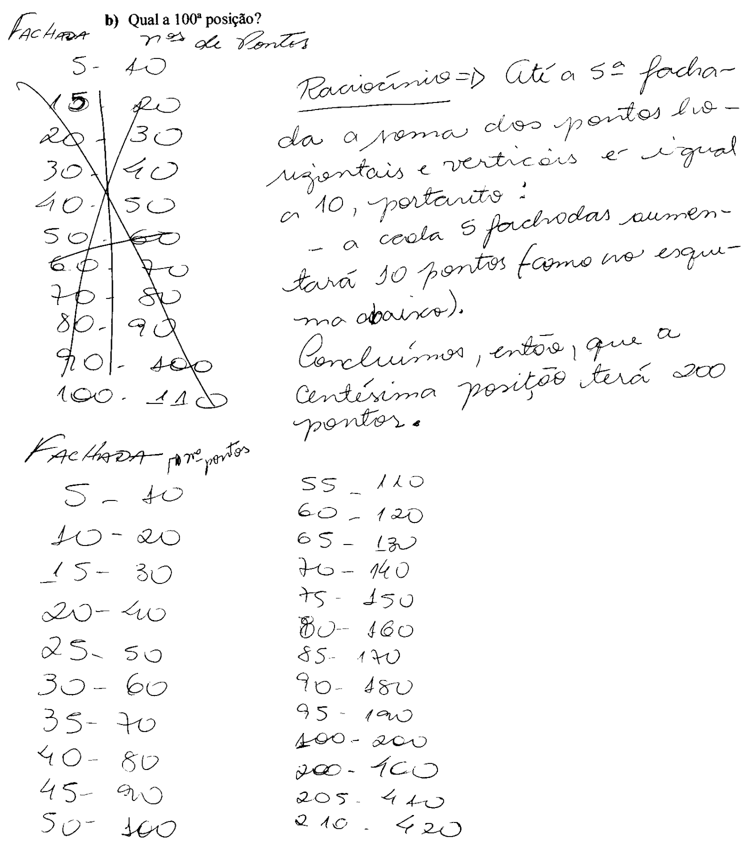
Tânia pergunta para Jane:

Mas será que tem que desenhar?

Jane responde:

Acha! Está louca.

Abaixo o protocolo da tríade:



b) Qual a 100ª posição?

FACHADA nºs de Pontos
5 - 10
~~15 - 20~~
~~20 - 30~~
~~30 - 40~~
~~40 - 50~~
~~50 - 60~~
~~60 - 70~~
~~70 - 80~~
~~80 - 90~~
~~90 - 100~~
~~100 - 110~~

Raciocínio => Até a 5ª fachada a soma dos pontos horizontais e verticais é igual a 10, portanto:
- a cada 5 fachadas aumentará 10 pontos (como no esquema abaixo).
Concluímos, então, que a centésima posição terá 200 pontos.

FACHADA nº pontos
5 - 10
10 - 20
15 - 30
20 - 40
25 - 50
30 - 60
35 - 70
40 - 80
45 - 90
50 - 100
55 - 110
60 - 120
65 - 130
70 - 140
75 - 150
80 - 160
85 - 170
90 - 180
95 - 190
100 - 200
200 - 400
205 - 410
210 - 420

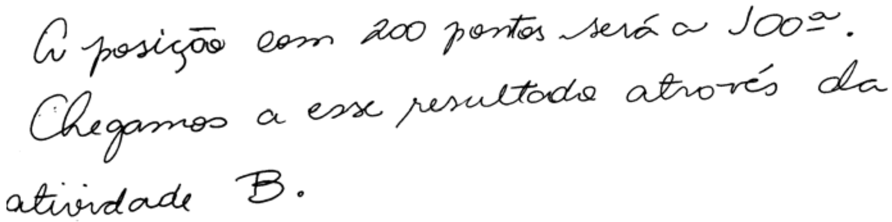
Figura 37 - Protocolo extraído da atividade V, item b - Tríade.

É interessante destacar a estratégia que Tânia usa, pois, ao montar a tabela, rapidamente, João percebe o erro, riscando e iniciando uma outra relação com a grandeza fachada e o número de pontos de cada fachada, percebe-se que estão usando implicitamente como estratégia de resolução a regra de três, que no caso não foi uma estratégia prevista na análise a priori, mas também percebo indícios da estratégia E_3.

O trio lê o **item c)**, em voz baixa, quando Tânia diz:

A 100ª posição.

Jane e João concordam, passando a escrever, em seguida, o resultado final.



A posição com 200 pontos será a 100ª.
Chegamos a esse resultado através da
atividade B.

Figura 38 - Protocolo extraído da atividade V, item c - Tríade.

O trio chega ao resultado usando, aparentemente, a E3, mas é importante salientar que a estratégia utilizada por eles não ficou explícita verbalmente, mas, analisando o protocolo, percebe-se mais clareza na estratégia usada.

A aluna Jane faz a leitura do **item d)**, em voz alta, e nos comentários, Tânia diz:

Oh! Dá para fazer regrinha de três.

Os alunos ficam discutindo, e fazendo os cálculos, após resolverem o exercício utilizando regra de três. É interessante destacar que eles encadearam um longo diálogo a respeito da parte escrita. Não sabiam se podiam falar “jogamos na fórmula”.

João comenta:

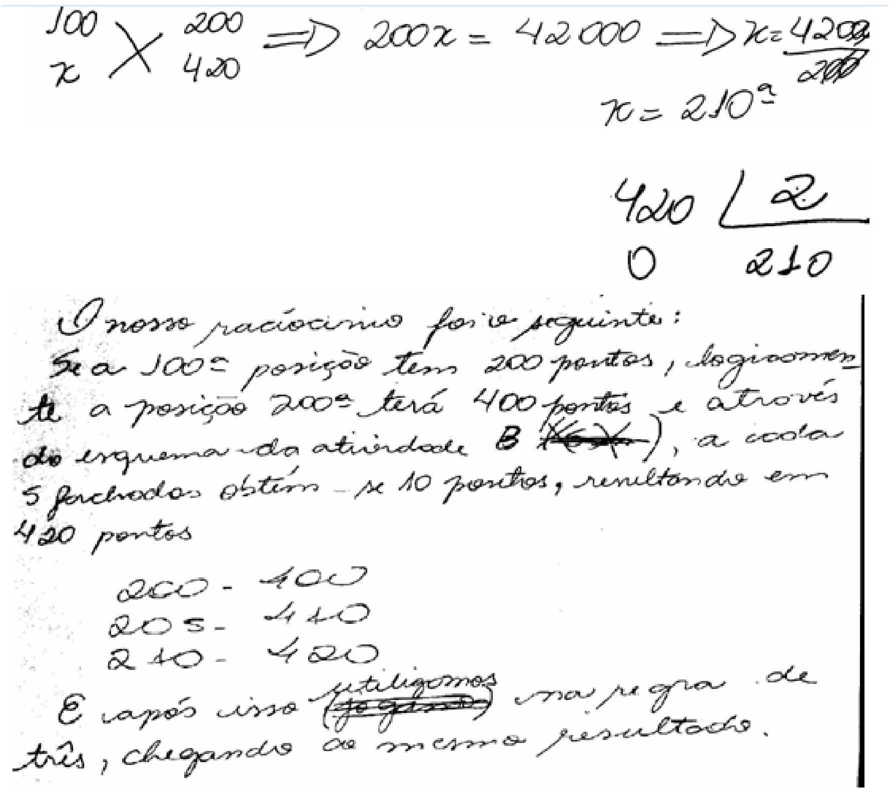
Jogamos fica muito feio! Coloca utilizamos,... sei lá

Tânia, por sua vez, faz uma comparação com o que a grande parte dos professores de Matemática falam:

Todo professor de Matemática fala que é para a gente jogar, joga nessa fórmula, joga nessa fórmula não sei do quê....

De acordo com a análise a priori, a estratégia utilizada pelo grupo não foi prevista, ou seja, em nenhum momento, pensei que iriam utilizar regra de três.

Eis o protocolo do trio:



$$\begin{matrix}100 & 200\\ x & 420\end{matrix} \Rightarrow 200x = 42000 \Rightarrow x = \frac{42000}{200}$$

$$x = 210^{a}$$

$$420 \;\underline{|\,2\;}$$
$$0 \quad 210$$

O nosso raciocínio foi o seguinte:
Se a 100ª posição tem 200 pontos, logicamente a posição 200ª terá 400 pontos e através do esquema da atividade B (~~...~~), a cada 5 fechados obtém-se 10 pontos, resultando em 420 pontos

200 - 400
205 - 410
210 - 420

E após isso utilizamos (~~jogamos~~) na regra de três, chegando ao mesmo resultado.

Figura 39 - Protocolo extraído da atividade V, item d - Tríade.

Novamente, evidencio que as atividades desse tipo podem ser resolvidas de diversas maneiras, ou seja, o aluno não fica engessado, não existe uma única maneira de resolver o mesmo problema.

A dupla passa a ler a **item e)**, e logo em seguida, o trio diz que vai resolver por regra de três, e nos seus comentários Tânia diz:

Se na 100ª posição tem 200 pontos, então X tem 1123.

Eles discutem a resolução do problema, em voz alta; falam que estão usando a 100ª posição como referência.

O trio está discutindo a divisão de 1123 por 2.

Apresento o diálogo abaixo:

Jane:

Coloca um zero e depois a vírgula.

Tânia diz:

É, mas não pode vírgula.

João retruca:

Lógico que pode.

Jane argumenta:

Está no meio.

Tânia diz:

Não pode ficar no meio, porque nós só estamos usando números inteiros.

João concorda e Tânia e conclui:

Se fosse 1120 daria, mas 1123 não dá.

João complementa:

Oh! 2, 4, 6, 8, 10...

As meninas dizem que já entenderam e que não existe uma posição com 1123 pontos.

Após terem resolvido o problema, entabulam um longo diálogo, em relação à escrita: se devem usar "fachada" ou "posição".

Veja o protocolo abaixo:

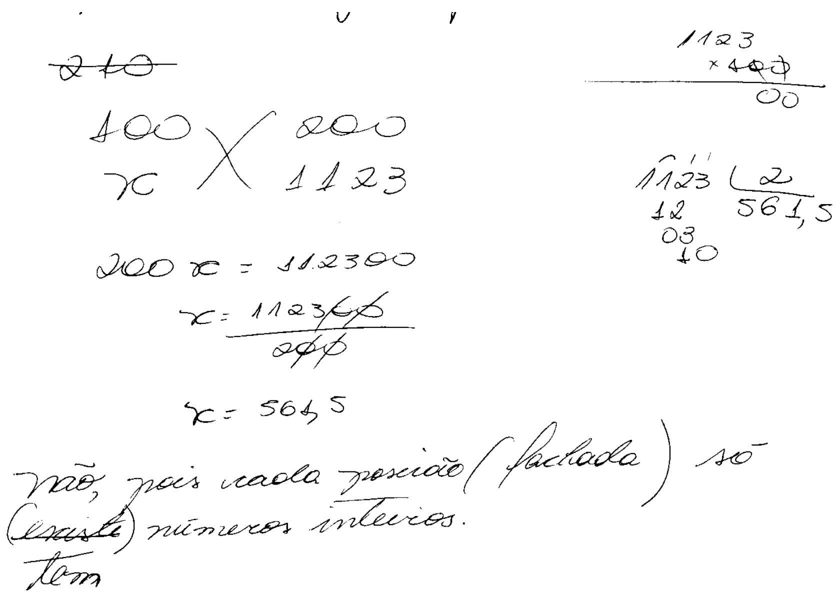


Figura 40 - Protocolo extraído da atividade V, item e - Tríade.

Dessa forma, a estratégia utilizada pelo grupo não consta na análise a priori.

Ao lerem o **item f)**, a aluna Tânia faz o seguinte comentário:

É só usar regra de três.

João e Jane discordam, dizendo:

Não é isso não!

Os alunos solicitam minha presença e fazem a seguinte pergunta:

Como assim uma regra de três?

Falo o que já havia dito para as outras duplas, e Tânia faz a seguinte colocação:

É tipo uma fórmula?

Tento não induzir os alunos, mas digo que é esse o caminho.

João começa a fazer algumas relações:

A 5ª posição não são 10 pontos? Então é o resultado de pontinhos.

Jane argumenta:

Mas você não pode por em número, tem que ter uma fórmula, tem que ter letra.

Jean diz para escrever assim:

Número de fachada mais o número de pontos.

Posição — nºs de pontos

Posição que quer obter-se — nºs de pontos que essa posição tem.

Após colocar os dados obtidos na regra, multiplica-se em cruz, fazendo o esquema da regra de 3, chegando ao resultado.

Ex:

$$\begin{matrix} 210 & 420 \\ 100 & x \end{matrix} \Rightarrow 210x = 42000$$

$$x = \frac{420\cancel{0}0}{21\cancel{0}} \Rightarrow x = 200$$

Figura 41 - Protocolo extraído da atividade V, item f - Tríade.

Há uma longa discussão quanto à palavra “posição” ou “fachada”. João acha melhor usar “fachada” já que até agora falaram de “fachada”.

É interessante notar que, no decorrer do diálogo, há uma preocupação deles em usar letras para conseguirem achar a regra geral, mas não conseguem chegar a ela. Parecem nunca ter resolvido nenhuma situação semelhante a essa.

Conforme já citei, as transcrições mostram a divergência, no começo dessa atividade, pois João enxergava o padrão, com a mesma seqüência, mas de uma forma diferente. Isso dificultou um pouco até que chegassem a falar a mesma linguagem, pois as meninas viam de um jeito diferente de João. Essa diversidade de ver e enxergar um padrão levou certo tempo para chegar a um consenso, mostrando, dessa forma, a diversidade das estratégias durante a resolução do mesmo problema.

Quanto à generalização, percebo que possuem dificuldades em relação ao termo “fórmula geral”, verificando que não são capazes de formular, simbolicamente, a regra geral. Um outro ponto interessante foi o uso de estratégias diversificadas, como o caso da utilização da regra de três.

Análise “horizontal” da resolução de cada questão

No que segue, como indicado anteriormente nas análises a priori, indico cada estratégia prevista pela sigla E_i descrita nessas análises. Lembro que essas estratégias quando descritas foram elencadas por ordem crescente da mais provável a menos provável.

Atividade I

Esta atividade teve o intuito de apresentar uma seqüência facilmente perceptível, via observação, para não correr o risco de intimidar o aluno com um problema de difícil resolução e assim motivá-lo a responder as seguintes.

Item a

Todos os grupos chegaram rapidamente à resposta da questão, utilizando a estratégia indicada na análise a priori. Isso indica que a regularidade da seqüência foi facilmente percebida pelos alunos. Três grupos explicitaram, já nesse item, a percepção de que, nas posições ímpares, aparecia o número 1 e, nas pares, o número 6, mostrando sensibilização para a generalização.

Item b

A tabela, a seguir, resume as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na resolução deste item:

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e João
E_1	x	x		
Correta, sem justif.			x	
Não prevista				x

Tabela 04 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade I – item b

Três grupos chegaram ao resultado correto, dois pela estratégia E_1, e o terceiro por estratégia não prevista, explicada por um de seus membros da seguinte maneira:

> *Temos até aqui nove números, com o 10º que achamos, vai dar 10, então a cada 10 números , temos 5 números 1. Então 127º vai dar 1, pois até o 120 vai cair no 6 mais sete, olha é só contar (1,6,1,6,1,6).*

O quarto grupo, dupla da 2ª série, colocou o resultado correto, justificando que estava no enunciado...

Esta questão levantou problemas de contrato didático a dupla do 1º ano no sentido de como justificar sem apresentar "contas", além de ter exposto a confusão de uma das alunas com a notação do número ordinal, 127º, com 127 graus.

Assim concluo que o objetivo da questão foi atingido, pois todos os grupos a resolveram, três deles sugerindo a generalização possível sem, contudo chegar a expressar a generalização formalmente pelo simbolismo algébrico. Na maioria das vezes, a linguagem oral prevaleceu, porém, ao tentarem escrever o que haviam feito, mostraram dificuldade.

Estudos de Orton, citado por Vale e Pimentel, confirmam a dificuldade dos alunos com a expressão escrita. Esse fato foi percebido, claramente nesta pesquisa, sendo que muitos alunos tiveram mais dificuldade em explicar um padrão do que em continuá-lo e, geralmente, houve mais alunos a explicarem oralmente as regras detectadas nas seqüências, do que por escrito.

Atividade II

Essa atividade na análise a priori feita mostrou um grau maior de dificuldade do que a anterior. A seqüência apresentada exige que o aluno perceba um padrão com alternância de três elementos, além disso, os elementos apresentados começam e terminam com a mesma forma geométrica o que poderia dificultar um pouco mais a visualização do padrão.

Item a

Como o item "a" exigia que os grupos identificassem apenas o próximo termo, todos os grupos chegaram, rapidamente, à resposta da questão, utilizando a estratégia indicada na análise a priori. Alguns desenharam ou escreveram, enquanto outros apenas falaram, mas todos descobriram o próximo termo. Dois grupos explicitaram relação com a atividade I, ou seja, comparando que a atividade I era com dois elementos e que essa já era com três elementos. Essa observação dos alunos mostra que estavam envolvidos com as atividades propostas.

É interessante relatar a fala da aluna Deise do 1ª ano do EM, no final do item "a", quando diz:

Não estou entendendo que conteúdo é esse, mas é mais gostoso do que as aulas de Matemática, aquele negócio de delta.

Isso mostra o entusiasmo, o prazer da dupla ao resolver esse tipo de atividade.

Item b

	Deise/ Luna	Ivo/ Rose	Rafa/ Carol	Jane/Tânia e João
E_2	x			
Resultado correto para visualisação não prevista		x	x	
Sugestão de duas visualizações: 1ª sequencia que se repete de 10 em 10 2ª E_3 com resultado incorreto (prevaleceu)				x

Tabela 05 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade II – item b

Conforme era de se esperar, os alunos sentiram mais dificuldade ao responderem à questão b), até porque o objetivo da atividade II era apresentar uma seqüência figurativa-numérica, que apresentasse um grau de dificuldade maior que a atividade anterior, que era somente numérica. É interessante notar que em três grupos surgiu uma visualização possível do padrão como sendo repetição de grupos de 10 elementos. Isto não era previsto, até porque na resposta ao item “a” todos os grupos acertaram observando a seqüência como grupos de três! Isto nos leva a concluir que a visualização da seqüência para se obter a “generalização” exigida para a resolução do item a) que é descobrir o próximo elemento da seqüência, é de um tipo diferente da que exige o item b).

Esta atividade mostrou propiciar a visualização de dois tipos de padrões além de uma diversidade de estratégias por parte dos alunos.

Na análise desta atividade, pude perceber a dificuldade dos alunos ao se depararem com termos de posição elevada, 127º, e a facilidade em determinar um termo seguinte em um padrão. Esses fatos já haviam sido assinalados por Orton, citado por Vale e Pimentel, que afirmou que encontrar termos numa seqüência torna-se progressivamente mais difícil, para os alunos, à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados, e que muitos alunos têm mais dificuldade em explicitar um padrão do que continuá-lo. Além disso, os alunos explicitaram/explicaram as regras, detectadas nas seqüências, muito mais oralmente do que por escrito. Esse fato ficou muito transparente, pois, ao analisar as transcrições das fitas, percebe-se que os alunos identificam, facilmente, a regularidade, porém sentem dificuldade ao elaborarem a escrita.

<u>Atividade III</u>

O objetivo dessa atividade era apresentar uma seqüência que é uma progressão aritmética, assunto tratado geralmente no Ensino Médio e observar se e como os alunos resolvem esse problema de generalização de padrão.

Já com os alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio, além da percepção da correspondência, observar também se usam a Progressão Aritmética e se fazem essa relação com o padrão geométrico dado.

Item a

Os grupos resolveram a questão corretamente, utilizaram com estratégia a E_1 da análise a priori; eles perceberam a regularidade na seqüência apresentada, que, no caso, é o termo anterior somado a 4.

Item b

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e João
E_1	x			x (resultado errado)
E_3		x		
Visualização de grupos de 5 e resultado incorreto			x	

Tabela 06 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade III - item b

Dos quatro grupos, dois utilizaram a estratégia E_1**,** embora em ambos os casos houvesse elementos dos grupos que insistissem que devia haver um caminho mais econômico, denunciando a idéia de que não estavam satisfeitos com aquela forma de se chegar ao resultado. Talvez, por ter sido uma atividade feita já mais no final da sessão, os outros elementos dos grupos julgassem que era melhor a estratégia de contagem do que tentar generalizar por meio de outra estratégia. Aliás, os elementos do grupo que errou o resultado final, teriam condições de resolver por meio das fórmulas de PA se percebessem que se tratava de uma.

As duplas do 2º ano usaram estratégias diferentes uma da outra, evidenciando que uma delas percebeu se tratar de uma PA e a outra não. A que aparentemente não percebeu será que teve sua atenção desviada pelo tipo de visualização que um dos membros teve do problema? O fato é que uma dupla mostrou reconhecer rapidamente a PA e outra não.

Atividade IV

Conforme, já expliquei anteriormente, o fato de ter entregue a atividade faltando um elemento primo na seqüência, prejudicou a análise. Dessa forma não a analisarei.

Atividade V

É interessante relembrar que essa atividade foi extraída do artigo de Lee, porém sua proposta era que o aluno observasse o padrão como retângulos sobrepostos, ou seja, de uma forma fechada, não flexível, enquanto meu objetivo foi deixar o padrão flexível, visando a que o aluno pudesse visualizá-lo de diversas formas, ou seja, não existe o certo e nem o errado nesse tipo de problema, até porque a regra geral solicitada, no item "f", dependeu do padrão que os alunos visualizaram.

Item a

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e Joao
E3	x	X	x	x
Estratégia de contagem não prevista				x

Tabela 07 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade V - item a

No item a), todos utilizaram a estratégia $E_{3,}$ baseados na visualização do padrão "por bordas", representaram o padrão por meio de uma seqüência numérica, chegando imediatamente ao termo seguinte. A notar somente a forma de contar os pontos adotada pela visualização particular do grupo da 3ª série.

É interessante notar que a visualização do padrão "por bordas" conforme o fizeram todos os sujeitos de minha pesquisa parece ser mais imediata, pois, mesmo Lee[16] que exigiu que se visualizasse o problema como retângulos

[16] Ver anexo (pág. 127)

sobrepostos, obteve respostas que provavelmente indicavam que seus sujeitos de pesquisas estavam visualizando como bordas.

Item b

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e Joao
E_3	x	x	x	x

Tabela 08 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade V - item b

Todos os grupos pensaram na seqüência {2, 4, 6, 8, 10,...} para resolver esse item, utilizando a estratégia prevista E3. Nenhum deles associou a seqüência com uma PA, nem mesmo aquele que já havia utilizado conhecimentos de PA para resolver uma atividade na sessão anterior. Todos associaram a posição do elemento ao dobro do número de pontos. Assim generalizaram, embora não tenham explicitado de modo formal do ponto de vista do simbolismo algébrico.

Item c

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e Joao
E_3	x	x	x	x

Tabela 09 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade V - item c

Todas as duplas relacionaram esse item com o anterior utilizando a E_3. Fato que indica estarem atentos a questão como um todo, coisa que nem sempre acontece em outras situações, como posso comprovar em algumas aulas que ministro.

Item d

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e João
E_3	x		x	
estratégia não prevista: PA		x		
estratégia não prevista: regra de três				x

Tabela 10 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade V - item d

Duas duplas utilizaram a E3 e os outros dois grupos utilizaram estratégias não previstas. É importante notar que os grupos analisaram o item pela representação numérica da seqüência e não pela representação figurativa. Além disso, as observações de cada aluno são as mais variadas, por exemplo: todos são pares, ou tanto podemos dividir o número de pontos por 2 para encontrar a posição, quanto podemos multiplicar a posição por 2 para encontrar o número de pontos, etc.

Item e

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e João
E_3		x	x	
E_4			x	
Mudaram a sequência p. responder	x			
Estratégia não prevista: PA		x		
Estratégia não prevista: regra de três				x

Tabela 11 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade V - item e

Neste item, os alunos mostraram a riqueza de argumentos que as discussões de grupo propiciam. As várias estratégias explicitadas são prova disso. É interessante notar que somente a dupla do 1º ano se viu impelida pelo contrato didático a modificar a seqüência para dar uma resposta. Os outros não estranharam a resposta negativa. Talvez, isso indique que os alunos do EF não tenham o hábito de se confrontar com problemas cuja resposta seja negativa.

Item f

	Deise e Luna	Ivo e Rose	Rafa e Carol	Jane,Tania e João
Não expressam		x		x
Expressa literalmente a E3	x		x	

Tabela 12 - Estratégia de resolução utilizada pelos alunos na atividade V - item f

Verbalmente, todos os grupos parecem ter percebido que para encontrar o número de pontos de uma dada posição bastava multiplicar por dois essa posição, no entanto dois grupos não conseguiram expressar isso e dois só o conseguiram literalmente. Dessa forma, mesmo o grupo que percebeu tratar-se de uma PA não conseguiu reproduzir a fórmula do enésimo termo da PA, utilizada anteriormente.

No entanto concluo que todos os alunos mostraram um pensamento algébrico em desenvolvimento de acordo com Fiorentini, que afirma que não é necessário que o aluno se expresse em linguagem simbólica para que o pensamento algébrico se manifeste. Ele pode ser expresso através da linguagem natural, aritmética, geométrica ou uma outra linguagem criada para esse fim.

Ao encerrar as sessões dois grupos solicitaram um encontro para discutirem as questões propostas, como esse encontro não fez parte da pesquisa, gostaria apenas de relatar que nas discussões um dos alunos pediu para que eu passasse as atividades para os professores aplicarem em sala, pois segundo ele essas atividades são desafiadoras. Segundo Ivo*: Não dá vontade de parar!*

Capítulo VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A seguir apresento as conclusões finais, muitas das quais foram reveladas ao longo do texto, de forma dispersa.

De acordo com a metodologia utilizada e considerando o pequeno número de alunos que participou da minha pesquisa, devo enfatizar que este trabalho não teve caráter generalizador, mas como um estudo qualitativo pode sugerir que seus resultados sejam avaliados em outras escolas, em outras regiões brasileiras.

Durante a aplicação do instrumento de pesquisa, pude perceber um grande envolvimento dos alunos nas atividades propostas, fazendo com que todos que participaram da primeira sessão tenham vindo para a segunda sessão mesmo considerando que o experimento se deu fora do horário escolar. Desta forma os alunos voluntários cumpriram integralmente o combinado e estiveram presentes no dia, local e horário combinado, sempre com muita disposição. Fato esse que vem confirmar as palavras de Mason, ao ressaltar que atividades que envolvem padrões provocam no estudante uma sensação de entusiasmo na descoberta de uma ordem, de uma previsão, da relação funcional que antes estava escondida.

Constatei que as análises a priori contribuíram na elaboração do instrumento de pesquisa, mas assim mesmo, não pude prever todas as possibilidades que apresentavam as questões. No entanto tais análises facilitaram a colocação das atividades em ordem crescente de dificuldade.

Analisando os resultados do trabalho dos grupos percebi que os elementos de todos os grupos se relacionaram muito bem, apenas gostaria de fazer uma ressalva sobre o numero de elementos em cada grupo, pois, observei que esse tipo de atividade é mais produtiva quando trabalhada em dupla, pois o trabalho em trio acaba sendo mais conturbado, pois muitas vezes um deles não ouvia o que o outro dizia pois falavam ao mesmo tempo.

No transcorrer das sessões notei o desenvolvimento da autonomia de cada um do grupo, procurando discutir e escrever os resultados encontrados o que causou a apresentação em um mesmo grupo de mais de uma estratégia de resolução. Talvez, esse progresso tenha ocorrido pelo fato de ao não esperarem que o pesquisador desse a resposta no final se sentirem responsáveis pela resolução do problema.

As três atividades válidas da primeira sessão deixaram claro que os alunos resolveram questões de generalização de padrões e apresentaram diferentes estratégias.

Por meio das análises dos protocolos e descrição da segunda sessão, constatei que dada a visualização que adotaram da seqüência figurativa-numérica todos os alunos a transformaram em uma seqüência numérica que facilitou sobremaneira suas respostas aos itens. A única questão que criou problema para a dupla de 1ª série foi aquela que exigia que negassem uma pergunta, o que aparentemente contrariou o contrato didático provavelmente estabelecido com eles no EF. A resolução do último item da 2ª sessão explicitou a pouca experiência dos alunos com o equacionamento de problemas, pois mesmo tendo conhecimento de que se tratava de uma PA a dupla da 2ª série não reconheceu que conhecia a “lei geral”, pois já a tinham utilizado na resolução de uma questão anterior.

Dessa forma, considero que o objetivo de minha pesquisa foi atingido pois os dados permitiram concluir que os alunos do ensino médio resolveram questões de generalização de padrões utilizando estratégias diversificadas.

Mesmo sabendo que a intenção desse trabalho não era a de ensinar como resolver questão de generalização de padrões, tenho convicção de que pela devolução do problema os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como em suas atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.

Por meio da análise dos resultados, constatei que os alunos pesquisados tiveram uma imagem mais positiva da matemática, tendo oportunidade de desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos. Experenciaram o poder e a utilidade dela para desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos; evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e muitas vezes até em outras materias e tiveram oportunidade de melhorar a compreensão do sentido da álgebra.

Segundo Lee, um dos maiores problemas não era “enxergar um padrão”, mas “encontrar um padrão algebricamente útil”. Pude constatar esse fato durante a aplicação da atividade II, item b) e a última questão da atividade V, pois ao solicitar que escrevessem uma regra que pudessem representar o número de pontos ou a forma de uma posição qualquer da seqüência, eles não conseguiam expressar na linguagem matemática, mesmo já tendo expressado diversas vezes na linguagem natural.

Em relação às dificuldades que os alunos enfrentaram ao solicitar que escrevessem a regra geral, não poderia deixar de ressaltar que o pensamento algébrico já estava sendo desenvolvido, pois segundo Fiorentini *et al*, ele pode ser expressado através da linguagem natural, aritmética, geométrica, ou através de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Retomando a questão de pesquisa, considero que eles resolveram as questões mesmo apresentando dificuldades em escrever algebricamente/ simbolicamente a regra geral.

A partir dos resultados obtidos, pude encaminhar outras questões, tais como:

- Como e quando trabalhar o tema no EM?
- Como os professores trabalham o tema no EM?
- Se e como o livro didático do EM aborda o tema?
- Como adaptar a abordagem de PA e PG de forma a que os alunos cheguem às fórmulas?
- Tendo notado que os alunos mudam a visualização do problema quando passam da designação do próximo termo para a designação de um termo mais distante dos apresentados na seqüência, seria importante entender o porquê de tal mudança.

Enfim, espero que a elaboração deste trabalho tenha contribuído para os conhecimentos sobre o tema e que, além disso, possa contribuir para a sensibilização dos professores do ensino básico da necessidade de se trabalhar com situações problemas que envolvem observação e generalização de padrões.

Referências Bibliográficas

ANDREZZO, K. L. *Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra por alunos sem acuidade visual*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ALMEIDA, M. M. M de. *Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. (no prelo) a ser apresentada em 2006.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora,1994.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasil: SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, 2002, pp. 11-144.

CARAÇA, B de J. *Conceitos fundamentais da Matemática.* 9 ed. Lisboa: Sá da Costa, 1989.

DEVLIN, K. *Matemática*: a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar, In: Pro-Posições, *Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação* – Unicamp, Campinas, SP: Cortez, 1993, V. 4, nº 01 (10): 78-91, mar.1993.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: NADINE, Bednarz, KIERAN, Carolyn, LEE, Lesley (eds.). *Approaches to algebra – perpectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer, 1996, pp. 87-106.

LUDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2003. (Coleção Temas Básicos e Ensino)

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. *et al*. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 2002, pp. 197212.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. Projeto: *O que se entende por álgebra?* VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, jul.2004. Disponível em CD-ROM.

MASON, J. El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidade. UNO – *Revista de Didática de las Matemáticas*. Barcelona, nº 9, p. 15-22, 1996.

___________. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: NADINE, Bednarz, KIERAN, Carolyn, LEE, Lesley (eds.). *Approaches to algebra – perpectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer, 1996a, pp. 65-86.

MASON, J.; GRAHAM, A.; PIMM, D.; GOWAR, N. *Routs to/Roots of Álgebra*. Greaet Britain:Ed. Thomson. Ltd, East. Kilbridre, Scotland, 1985.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIN. M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? In: Pro-Posições. *Revista da Faculdade de Educação* – Unicamp, Campinas, S P: Cortez, 1992, V. 3, nº 01 (7): 39-57, mar. 1992.

MODANEZ, L. *Das seqüências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico.* Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

NAKAMURA, O. Y. A. *Generalização de padrões geométricos: Caminho para construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental.* Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

PISA-Programa Internacional de Avaliação de Alunos. Disponível em <http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/>. [28 ago. 2005]

RIBEIRO, A. J. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP*, Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Relatório Saeb 2001– Matemática, INEP – Brasília, Brasil, 2002. Disponível em <http://www.inep.gov.br/download/saeb/2001/relatorioSAEB_matematica.pdf>. [11 out. 2005]

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Relatório Saeb 2003 – Matemática, INEP – Brasília, Brasil, 2004. Disponível em http://www.inep.gov.br/basica/saeb/estados_2004.htm> [11 e 12 out. 2005]

SARESP – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do ESTADO DE SÃO PAULO – SARESP 2004. Disponível em <http://www.educacao.sp.gov.br/> [11 out. e 24 nov. 2005]

SILVA, B. A. da. Contrato didático. In: MACHADO, S. D. A. *et al*. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 2002, pp. 43-64.

SOUZA, E. R. & DINIZ, M. I. S. *Álgebra:* das variáveis às equações e funções. 2. ed. IME – Universidade de São Paulo, 1996.

VALE, I; PIMENTEL,T. Padrões: um tema transversal do currículo. *Revista da Associação de Professores de Matemática.* nº 85, novembro/dezembro, 2005.

VALE, I.; PALHARES, P; CABRITA, I e BORRALHO, A. (no prelo). Os padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Vale-Palhares-Cabrita-Borralho.doc. [04 abr. 2006]

Anexos

<u>Solicitação de Autorização</u>

Senhores **Pais** ou **Responsáveis** pelo (a) aluno (a) ______________________________ __________ matriculado(a) na _______série do Ensino Médio, da E.E.Professor Antonio Sproesser.

Peço autorização para que seu filho(a) participe de uma atividade de pesquisa, que visa contribuir para a melhoria do ensino de matemática do Ensino Médio.

Deixo claro que seu filho se apresentou como voluntário para tal pesquisa, e que o nome dos alunos participantes será preservado, aparecendo nos resultados da pesquisa com um nome fictício.

As atividades serão desenvolvidas no período da tarde, em duas sessões de 50 minutos cada, nos dias ___ e ___, das ____as ____.

Contando com sua compreensão, agradeço antecipadamente a atenção.

_____________________________ ____________________

Profa. Elisangela Parra Zigart Perez *Diretora de escola*

Monte Mor, ___de setembro de 2005

....

<u>Autorização</u>

Autorizo o aluno (a)_______________________________________, pelo qual sou responsável a participar das atividades de pesquisa propostas pela professora Elisangela Parra Zigart Perez nos termos da solicitação feita .

____

Assinatura de um dos responsáveis pelo aluno

Monte Mor, ___de setembro de 2005

Ficha - Disponibilidade dos alunos voluntários								
Nome do aluno	**série**			**Horários disponíveis**				
	1º ano	2º ano	3º ano	2ª feira	3ªfeira	4ª feira	5ª feira	6ª feira

Nome:____Série:______Idade:_____

Nome:____Série ______Idade:_____

Atividade I

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1,...

diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia as seguintes questões:

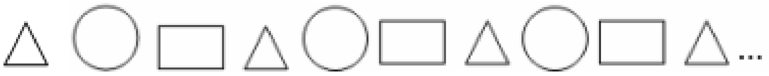
a) Qual o próximo termo da seqüência?
b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Nome:____Série:______Idade:_____

Nome:____Série ______Idade:_____

Atividade II

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:



diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia as seguintes questões:

a) Qual o próximo termo da seqüência?
b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Nome:____Série_______Idade:_____

Nome:____Série ______Idade:_____

Atividade III

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,...

diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia as seguintes questões:

a) Qual é o próximo termo dessa seqüência?
b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Nome:_____________________________________Série:________Idade______

Nome:_____________________________________Série:________Idade______

Atividade IV

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29,...

diz que encontrou o próximo termo. Como você responderia a seguinte questão:

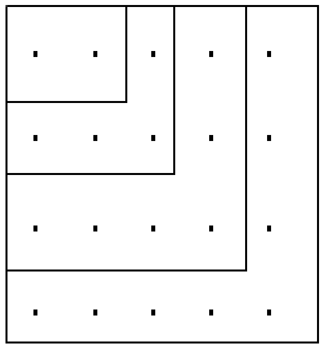
Qual é o próximo termo dessa seqüência? Justifique sua resposta.

Nome:____Série:______Idade:_____

Nome:____Série ______Idade:_____

Atividade V

Observando a figura abaixo, que tal descobrir as relações entre a forma como a seqüência é construída, a quantidade de pontos em determinada posição e a sua posição na seqüência? *Desafio vocês a investigar e descobrir as próximas posições da seqüência!*



a) Qual a 5ª posição?

b) Qual a 100ª posição?

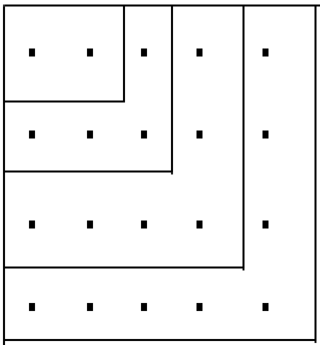
c) Existe uma posição com 200 pontos? Qual seria?

d) Existe uma posição que tem 420 pontos? Qual seria?

e) Existe uma posição que apresenta 1123 pontos? Se existe diga qual é.

f) Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de pontos ou a forma de uma posição qualquer da seqüência?

Atividade extraída do *Approaches to algebra – perpectives for research and teaching*. (Lee. 1996)



O desenho a esquerda representa um esquema com retângulos sobrepostos.

O primeiro tem 2 pontos.
O segundo tem 6 pontos.
O terceiro tem 12 pontos.
O quarto tem 20 pontos.

Quantos pontos há no quinto retângulo?
Quantos pontos há no centésimo retângulo? Como você sabe?
Quantos pontos há no n retângulo? Como você sabe?