

**ARLETE APARECIDA OLIVEIRA DE ALMEIDA**

**OS FRACTAIS NA FORMAÇÃO DOCENTE E SUA  
PRÁTICA EM SALA DE AULA**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO  
DE MATEMÁTICA**

**PUC/SP  
São Paulo  
2006**

**ARLETE APARECIDA OLIVEIRA DE ALMEIDA**

**OS FRACTAIS NA FORMAÇÃO DOCENTE E SUA  
PRÁTICA EM SALA DE AULA**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como  
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE  
EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do  
Prof°. Dr. Ubiratan D'Ambrósio.*

**PUC/SP  
São Paulo  
2006**

**Banca Examinadora**

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

### **Dedicatória**

Aos meus pais, meus irmãos, meus  
sobrinhos e ao meu marido.

À minha amiga Sandra Forster.

A todos os profissionais da educação.

Sonho que se sonha só  
É só um sonho que se sonha só  
Mas sonho que se sonha junto  
É realidade

Prelúdio  
**Raul Seixas**

## **AGRADECIMENTOS**

Para realização deste sonho, muitas pessoas contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

Todas tiveram um papel fundamental nas minhas decisões e foram importantes para que ao encontrar obstáculos não desistisse. Assim se faz um sonho tornar-se realidade.

Agradeço a Deus, por me permitir trilhar este caminho e me iluminar nos momentos que tive dúvidas e por todo este período ter me dado saúde e bom senso para as minhas decisões.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio que com sua serenidade me incentivou e me proporcionou grandes descobertas ao realizar este trabalho.

Aos professores do Programa, que contribuíram significativamente na minha formação.

Ao meu marido, que desde o primeiro momento me incentivou, cuidando para que eu cumprisse com os meus compromissos, estando sempre ao meu lado e me apoiando em tudo que precisei.

Aos meus pais, que souberam compreender minha ausência neste período de muitos compromissos, ficando ausente em muitos momentos.

Aos meus irmãos, que sempre acreditaram em mim e sei que têm admiração pelo meu trabalho.

À minha madrinha e amiga Sandra Forster e toda sua família, pelo apoio e pela dedicação de uma amizade a qual tanto prezo.

Um agradecimento ao Rafaelle Di Steffani, meu padrinho e amigo, que contribuiu com seu apoio.

Agradeço à Diretoria Sul 1 e ao Dirigente Hermany Souza Roberto por ter me dado a oportunidade para desenvolver a pesquisa e especialmente à assistente técnico pedagógica Valéria Alves Velho, que mais do que acreditou, apostou e me apoiou durante a realização da pesquisa, uma profissional que precisamos ter na educação.

Ao grupo de professores que participaram da pesquisa, me marcou com o carinho que me deram, o apoio e a gentileza de cada um deles, me deixando surpresa por tamanha receptividade. Guardo e guardarei cada um na lembrança, pois o último encontro foi muito emocionante e percebi que nós temos que acreditar e investir na educação, todos estamos no mesmo caminho.

Às professoras Priscilla e Silmara S., que com muito carinho e dedicação debruçaram na revisão deste trabalho, enriquecendo a minha pesquisa.

Ao professor Valdemar Alves, cuja admiração só aumentou, pois mesmo com tantos compromissos, sempre se disponibilizou para nos ouvir e apoiar.

Á todos que durante este período me acompanhou, incentivando e acreditando que poderia chegar até aqui.

Estes agradecimentos são sinceros e tenham certeza que todos ficarão na memória de uma das grandes conquistas de minha vida.

## RESUMO

---

Este trabalho teve como objetivo investigar uma abordagem para o ensino da geometria dos Fractais sob o olhar do professor e sua receptividade no desenvolvimento de uma seqüência didática para abordar o conceito de Fractais.

A pesquisa foi realizada junto a um grupo de professores da Rede Pública Estadual, desenvolvida em dois encontros. Tínhamos como hipótese do trabalho, se um mini-curso para professores poderia influenciar na prática docente sugerindo novas propostas de trabalho, passando por obstáculos da aceitação para chegar às salas de aula, proporcionando uma nova visão da aplicação da matemática.

Com o intuito de rever estes estudos, é que iremos proporcionar uma nova aventura para tornar mais próxima a geometria da realidade do nosso aluno, promovendo uma identificação real com a natureza e a geometria, por meio de uma seqüência didática que foi elaborada visando também sua aplicação posterior aos alunos.

É isto que tentaremos mostrar nesse trabalho, dando um panorama histórico e a necessidade do surgimento da geometria dos fractais para representar melhor as formas da natureza. Nesse primeiro momento, nos poupamos dos cálculos mais complexos, pois a idéia central foi fornecer informações sobre essa nova área da matemática que é tão envolvente e deslumbrante. Nossa análise aponta que o professor está receptivo às novas propostas, precisando apenas de oportunidade e espaço para reflexão sobre suas ações.

Palavras-chave: fractal; formação de professor; geometria.

## ABSTRACT

---

### Abstract

This work had as purpose to do research on the approach to the learning of geometry of the Fractals under the view of the teacher and your understanding to the development of a project didactic about the concept of Fractals.

The research was done with a group of public school teachers' and it was developed in two meeting.

These short meetings to the formation of teachers was to show if short meetings could influence on pedagogical practice and to introduce new subsidies to teaching-learning, overcoming obstacles and offering a new possibility of appropriation of knowledge in mathematic.

We have intention to make a review these works; we'll go to offer a new adventure to become the geometry more near the reality of our students and to create a real identification with the nature and the geometry, by the project didactic about the concept of Fractals that was created also to application subsequent at the students. Our work also showed that the teacher is open-minded to new suggestions, and he needs just opportunity and moments to reflect on your pedagogical practice.

It's this that will try show in this work, giving a historical prospect and the importance to put in evidence the value of the geometry of the fractals to represent better the nature forms. In this first moment, we leave the calculation more complex out of the work, because the central idea is give information about this new field of mathematic, which is so interesting and dazzling.

Keywords: fractal; formation of teachers; geometry.

# SUMÁRIO

---

Lista de figuras.....	xi
Lista de quadros.....	xii
<b>INTRODUÇÃO</b>	
<b>Origem do trabalho.....</b>	<b>13</b>
<b>Capítulo 1</b>	
<b>A pesquisa: um plano em perspectiva.....</b>	<b>19</b>
1.1 Área temática: formação de professores.....	19
1.2 Justificativa.....	22
1.2.1 Questões do trabalho.....	25
1.3 Pressupostos básicos.....	25
1.3.1 Geometria Euclidiana.....	26
1.4 Objetivo do trabalho.....	28
1.5 Método.....	29
1.6 Professores e professoras parceiros da pesquisa.....	31
1.7 Os questionários e os encontros de trabalho.....	32
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Fractais como conhecimento matemático escolar, uma abordagem didática.....</b>	<b>34</b>
2.1 Situação didática.....	34
2.2 Transposição didática.....	36
2.3 O meio computacional.....	37
<b>Capítulo 3</b>	
<b>Fractais natureza e significado.....</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução à geometria fractal.....	39
3.1.1 Sistema dinâmico.....	39
3.1.2 Caos.....	40
3.2 Onde estão os fractais?.....	43
3.2.1 Curva fractal.....	44
3.2.2 Características de um fractal.....	44
3.2.3 Dimensão fracionária .....	44

3.2.4 Dimensão fractal 1 .....	45
3.2.5 Dimensão fractal 2.....	45
3.2.6 Auto-similaridade.....	47
<b>Capítulo 4</b>	
<b>Personalidades fractais</b> .....	49
4.1 Georg Cantor.....	49
4.2 Henri Poincaré.....	51
4.3 Giuseppe Peano.....	53
4.3.1 Curva de Peano.....	54
4.4 David Hilbert.....	55
4.5 Niels Fabian Helge Van Koch.....	58
4.5.1 A curva de Koch.....	58
4.5.2 Flocos de neve e litorais.....	59
4.6 Waclaw Sierpinski.....	60
4.6.1 Triângulo de Sierpinski.....	61
4.6.2 Tapete de Sierpinski.....	62
4.6.3 Tetraedro de Sierpinski.....	62
4.7 Gaston Maurice Julia.....	63
4.8 A esponja de Menger.....	64
4.9 Benoit Mandelbrot.....	65
4.9.1 Conjunto de Mandelbrot – um fractal famoso.....	68
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Atrator</b> .....	71
5.1 Atrator estranho.....	71
5.2 Edward Lorenz.....	72
5.3 Atrator de Hénon.....	74
<b>Capítulo 6</b>	
<b>A pesquisa: o plano em ação</b> .....	76
6.1 A investigação – questionário diagnóstico.....	76
6.1.1 Análise do questionário diagnóstico.....	77
6.2 Fractais, um novo horizonte para a sala de aula – 1º encontro.....	78
6.3 Questionário 2 – os professores e o ensino de matemática.....	81
6.4 1º Encontro – realizando as atividades.....	95
6.4.1 Atividade 1 – classificação de objetos.....	95
6.4.2 Atividade 2 – Triângulo de Sierpinski.....	107

6.4.3	Análise do desenvolvimento da atividade.....	108
6.5	Fractais, um novo horizonte para a sala de aula- 2° encontro.....	116
6.5.1	Atividade 1 – ilha de Koch.....	117
6.5.2	Atividade 2 – cartão fractal.....	119
6.5.3	Teoria do caos.....	121
6.5.4	Atividade 3 – jogo do caos.....	122
6.6	Das atividades e questionário: uma análise.....	126
6.6.1	Análise do questionário final.....	126
6.6.2	Parecer do grupo.....	131
	Considerações preliminares.....	135
	<b>Bibliografia</b> .....	139

## **Anexos**

Anexo I – Revista Prandiano.....	II
Anexo II – Proposta de trabalho para a Diretoria de Ensino.....	V
Anexo III – Questionário 1 -diagnóstico.....	VII
Anexo IV – Autorização para filmagem.....	IX
Anexo V – Transparências do 1° encontro.....	XI
Anexo VI – Apostila 1° encontro.....	XVII
Anexo VII - Questionário 2 – os professores e o ensino de Matemática.....	XXI XXIII
Anexo VIII – Registro das respostas do questionário: o professor e o ensino de Matemática.....	XXI
Anexo IX – Seqüências das atividades aplicadas no 1° encontro.....	LIII
Anexo X – Transparências - 2° encontro.....	LIX
Anexo XI – Apostila - 2° encontro.....	LXV
Anexo XII – Registros das respostas do questionário – 2° momento: o professor e o ensino de Matemática.....	LXVII

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1	Dimensão topológica.....	45
Figura 2	Comprimento L de uma curva.....	46
Figura 3	Auto-similaridade.....	48
Figura 4	Poeira de Cantor.....	50
Figura 5	Curva de Peano – inicial.....	54
Figura 6	Curva de Peano.....	54
Figura 7	Curva de Peano-Hilbert.....	55
Figura 8	Fractal de Cesário.....	55
Figura 9	Curva de Hilbert-inicial.....	56
Figura 10	Curva de Hilbert.....	57
Figura 11	Curva de Koch.....	58
Figura 12	Floco de Neve.....	59
Figura 13	Floco de neve e os litorais.....	60
Figura 14	Fases do Triângulo de Sierpinski.....	61
Figura 15	Fases do Tapete de Sierpinski.....	62
Figura 16	Tetraedro de Sierpinski.....	62
Figura 17	A esponja de Menger.....	65
Figura 18	Conjunto de Mandelbrot.....	68
Figura 19	A beleza do Conjunto de Mandelbrot.....	69
Figura 20	Efeito borboleta.....	73
Figura 21	Aplicação do questionário.....	82
Figura 22	Slide montanha fractal.....	96
Figura 23	Distribuição dos kits.....	97
Figura 24	Classificação -couve-flor.....	98
Figura 25	Registro de P1.....	103
Figura 26	Atividade 2.....	108
Figura 27	Desenvolvendo a atividade 2.....	110
Figura 28	Atividade 2 – alguns resultados.....	110
Figura 29	Triângulo de Sierpinski – .....	111
Figura 30	Definição de auto-similaridade.....	112
Figura 31	Atividade 3.....	112

Figura 32	Ilha de Koch.....	117
Figura 33	Cartão fractal – construção.....	121
Figura 34	Jogo do caos.....	124
Figura 35	Jogo do caos – resultado.....	125

## LISTA DE QUADROS

---

Quadro 1	Conjunto de Julia.....	64
Quadro 2	Ampliações do Conjunto de Mandelbrot.....	70
Quadro 3	Material da Atividade 1.....	99
Quadro 4	Explorando as frações – alguns resultados.....	115

## INTRODUÇÃO

---

### ORIGEM DO TRABALHO

*“Em toda parte onde algo vive, há em algum lugar um registro em que o tempo se inscreve”.*

*Henri Bergson*

Quando ainda estava cursando a graduação na Faculdade UNISA - Universidade de Santo Amaro em São Paulo, fui convidada para assistir a uma palestra no auditório.

A palestra ministrada pelo Prof. Aguinaldo Prandini Ricieri, foi uma aula demonstrativa, exemplificando situações da vida que poderiam ser relacionadas ao ensino da matemática, tornando-o mais atraente e particularmente descontraído.

O que me chamou atenção, foi o fato da explicação se reportar à Matemática aplicada à vida. Durante toda exposição fiquei analisando os exemplos dados e comparando com a prática que eu tinha da vivência escolar anteriormente como aluna, e naquele instante, já iniciando minha atuação no magistério. Muito me interessaram as novidades que poderiam contribuir para um ensino diferenciado em sala de aula.

Ao final da palestra foi oferecido um curso, onde poderíamos aprender a trabalhar dentro dos moldes apresentados na palestra, tentando tornar as aulas mais interessantes para os alunos. Apesar de me sentir atraída pelo método, não teria como manter mais um curso.

Na saída recebemos um livreto onde que constavam algumas informações sobre a “Matemática Aplicada à Vida”. Ao ler o livreto, mais especificamente á página 14, me deparei com um artigo cujo título era “Dimensão Fracionária?”. Li com atenção, achei encantador e ao mesmo tempo muito distante das propostas apresentadas na faculdade. Prossegui a leitura e, na página 18, me deparei com o título de outro artigo “Fractais e Caos – A Matemática Hoje”. Li o texto e continuei intrigada, pois aquelas informações me pareciam bem mais próximas da realidade, abordando exemplos que eram realmente aplicáveis à realidade e se distinguiu das aulas com poucas demonstrações e aplicações, e com apresentações de exercícios repetitivos.

Isto tudo ocorreu em 1989, e a revista era do Prandiano, número 5/2. Guardo-a até hoje e sempre que a encontrava entre minhas coisas, me despertava a curiosidade e vontade de tentar fazer, ao menos um trabalho com aquelas informações. (Ver anexo I.)

Ao longo da graduação e da especialização não me deparei mais em nenhum momento com o assunto Fractais, mas de alguma forma, eu acreditava que este faria parte de minha vida acadêmica. Pelas atribuições da época eu aguardava uma oportunidade que me propiciasse um investimento em tal pesquisa.

Minha curiosidade sobre o assunto persistia, mas com os afazeres do cotidiano escolar, foi ficando em segundo plano uma investigação maior sobre os Fractais mesmo porque, este assunto não fazia parte dos programas das escolas por onde passei e, por isso, eu concentrava minhas investigações nos assuntos já estabelecidos nos programas das escolas.

Após algum tempo e novamente na faculdade, cursando Pós-Graduação na PUC, na disciplina de História e Filosofia da Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio, tive a oportunidade de em uma de suas aulas assistir a uma exposição da Prof. Elenice de Souza Lodron Zuin, sobre a Geometria Fractal, o que me despertou alguns questionamentos. Um deles era o fato de, após tantos anos desde a primeira vez que ouvi falar do assunto, este ainda não fazer parte das práticas escolares do ensino da matemática.

Então lembrei-me daquele título do artigo “Fractais e Caos – A Matemática de Hoje”, de 1989. E ainda hoje, no século XXI, não ser possível identificar claramente a abordagem dessa geometria em sala.

Aproveitando a oportunidade de pesquisar para conhecer melhor e investigar o assunto, usei o tema na minha monografia da disciplina. Li, pesquisei e terminei a minha monografia com o título de “Magia Fractal”, e foi com um grande incentivo do Prof. Ubiratan, que escolhi esse tema para minha dissertação.

A escolha do tema estava clara, mas muitas dúvidas começaram a surgir sobre a realização e o desenvolvimento da pesquisa, como por exemplo, se deveria trabalhar só com alunos, e coletar dados para analisar a receptividade dos mesmos em relação a um tema que habitualmente não é abordado em sala de aula, ou deveria fazer uma pesquisa junto aos professores, para verificar se, segundo suas experiências, já estava sendo abordado o assunto dos Fractais em sala de aula.

Inserida nesse dilema, passei a refletir sobre as minhas práticas de ensino e percebi, que a pesquisa envolvendo o aluno era possível sim, e traria muitas

contribuições para a checagem de seus comportamentos diante do tema e os resultados do desenvolvimento da aprendizagem.

Mas naquele momento acreditava ser preciso fazer algo além da sala de aula. Então, ao conversar com o meu orientador Prof. Ubiratan D'Ambrósio, surgiu a brilhante e desafiadora idéia de realizar um trabalho junto aos professores, e afinal, poder compartilhar experiências com quem é o mediador da aprendizagem.

Assim surgiu esta pesquisa, que me proporcionou momentos de ansiedade, pelos desafios encontrados no caminho; momentos de satisfação por estar junto aos professores e sentir a necessidade da troca de experiências em nosso dia-a-dia, e com certeza, muitas emoções antes, durante e depois do término da pesquisa, pois foram momentos em que eu nunca poderia imaginar, ao lidar com os professores que estão buscando a melhoria da qualidade de ensino.

Um mundo de descobertas, um momento de mistérios, um passo para começar, uma porta se abrindo. Foi dessa forma que me encontrei com os Fractais e a cada leitura, uma nova experiência, um achado. Muita informação ainda para ser assimilada porém, o primeiro passo foi dado e ao entrar nesse mundo novo, um encantamento foi surgindo e aumentando a cada consulta que fazia, de certo muitas ainda a serem desvendadas.

Outro ponto a se destacar, é o fato de que cada vez mais estamos caminhando para desenvolver uma matemática escolar que possa refletir junto aos alunos prazer e curiosidade em seu aprendizado. E a geometria Fractal é um assunto que está nesta perspectiva afinal, é a geometria que melhor representa a natureza. Podemos olhar ao nosso redor, e verificamos que muitos objetos não

são retas, linhas ou polígonos; são objetos que possuem formas particulares e são eles que fazem parte do nosso dia-a-dia. E por que não estudá-los?

Levar para a sala de aula a oportunidade de olhar a natureza e encontrar a matemática, discutir novos padrões que surgem, fazendo uso dos conteúdos já conhecidos e mostrando como podem ser aplicados.

É possível desenvolver a geometria Fractal para ilustrar tópicos como áreas e perímetros de polígonos, tornando seu estudo mais motivador; uma vez que as figuras obtidas com a geometria Euclidiana já não proporcionam mais estas descobertas. Os Fractais podem ser um encaminhamento da Matemática para uma situação nova de exploração e desenvolvimento da criatividade.

Este trabalho me trouxe muita satisfação, e o mais importante, ao realizá-lo continuei aprendendo, dentro de um ciclo infinito de aprendizagem.

Tudo isso me deixou convencida de que todos nós devemos procurar um caminho para aprender cada vez mais, acompanhando as necessidades que vão surgindo junto com as novas gerações.

Desta forma, esta obra apresenta-se em 6 Capítulos. Cada capítulo faz referência aos temas abordados durante o mini-curso, para melhor entendimento do leitor.

No Capítulo 1, apresenta-se a área temática, o assunto e qual a intenção da pesquisa, além da metodologia utilizada.

O Capítulo 2, trata da fundamentação para o trabalho; a inserção da Geometria Fractal como matéria escolar e as possibilidades de recursos para o desenvolvimento das atividades.

No Capítulo 3 há uma referência ao caos, pois a Geometria dos Fractais está intimamente ligada a ciência chamada Caos. Para tanto, temos diversas

explicações sobre a definição de Fractais e seus possíveis elementos e características. Dessa forma pode-se fazer uma leitura e compreender melhor a pesquisa e a nomenclatura que utilizaremos para a criação de um Fractal.

O Capítulo 4, denominado “Personalidades Fractais”, faz referência aos grandes nomes dos matemáticos que começaram a olhar a natureza por outro prisma. Uma divisão didática para a compreensão desse estudo e a discussão sobre os chamados Fractais primitivos, que são condições para se compreender como chegar a formas tão complexas e deslumbrantes mais adiante. A compreensão desses Fractais primitivos auxiliará na visão geral no decorrer da pesquisa. Dentre os Fractais uma atenção especial ao conjunto de Mandelbrot.

Conseqüentemente no Capítulo 5, um panorama sobre o que é um atrator, pois faz parte do contexto essa definição, de maneira a seguir a linha do trabalho.

Toda parte da pesquisa está concentrada no Capítulo 6, a elaboração do primeiro encontro e a análise dos primeiros resultados. Os acontecimentos do 2º Encontro, também estão registrados neste capítulo, contemplando as atividades e as discussões realizadas neste último encontro.

Ainda incluímos os depoimentos dos professores após estes dois encontros, com a análise do mesmo questionário que foi aplicado no primeiro encontro, respondido novamente ao final do curso. O parecer do grupo em relação aos encontros encerra este capítulo e em seguida nossas considerações preliminares sobre a pesquisa.

Toda descrição em cada Capítulo, tem como objetivo facilitar o andamento da pesquisa realizada junto aos professores. Um olhar mais profundo, uma descoberta, e o fascínio estão envolvidos neste trabalho, onde a beleza contempla a matemática.

## 1. A PESQUISA: UM PLANO EM PERSPECTIVA

---

*"Ninguém começa a ser professor numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanente na prática e na reflexão sobre a prática".*

*Paulo Freire, A educação na cidade, 1991, p.58.*

### 1.1 Área Temática - Formação de Professores

O desenvolvimento profissional de um professor não pára na sua graduação. Segundo Garcia (1999), a formação de professores não é um processo que acaba nos professores. Desta forma, é um processo contínuo de aprendizagem e de ações que complementam sua trajetória.

Ultimamente fala-se muito na formação continuada dos professores, e esta vem ocorrendo por meio de cursos e oportunidades que as Universidades e a Secretaria da Educação vêm oferecendo. Porém pode-se perceber que ainda não atinge a um número significativo de professores que possa desencadear uma transformação no ensino.

Segundo Garcia (1999), não existe modelo de formação com maior tradição e reconhecimento do que os cursos de formação. Durante muito tempo, os cursos foram sinônimos de formação de professores. Ainda hoje na Espanha, a porcentagem mais elevada de atividades de formação desenvolvidas pelas diferentes instituições, diz respeito aos cursos de formação: nos anos letivos de 1990-91, na Comunidade autônoma de Andaluzia, foram desenvolvidos 2250 cursos. Wood definia um curso como *"um grupo de pessoas que participam durante um certo período de tempo em atividades estruturadas para alcançar*

*determinados objetivos e realizar tarefas estabelecidas de antemão, as quais levam a uma nova compreensão e mudança de conduta profissional". (WOOD apud GARCIA, 1999, p. 177).*

Para encaminhar a pesquisa, adotaremos o conceito dado por Garcia (1999), para a formação de professores:

A formação de professores é a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da Didática e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores – em formação ou em exercício – se implicam individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem. (GARCIA, 1999, p.26).

Considerando esta afirmação, nosso foco foi ao encontro da formação do professor em exercício, tendo como objetivo encontrar um caminho, por meio do qual possamos de fato, possibilitar ao professor um meio para que se atualizem, sem necessariamente terem de voltar à Universidade, pois a convivência com os professores por meio de seus discursos aponta que muitos não têm condições para tal por motivos diversos, proporcionando assim, uma oportunidade para que possam ter contato com assuntos ainda não programados pelos currículos, oportunizando um momento de diversificação de conteúdo.

A formação continuada de professores reflete um quadro de deficiência estrutural que oportunamente, vem sendo desgastada por discursos ultrapassados, que focam a mudança pelo discurso e não pela prática efetiva de investimento e oportunidades para a formação continuada.

Essas transformações, segundo Lhotelier, surgem pela capacidade de transformação em experiências significativas, acontecimentos que geralmente

ocorrem no cotidiano, tendo como horizonte um projeto pessoal e coletivo. ( *apud* Garcia ,1999, p.20).

Ainda para Garcia (1999), para que uma ação de formação ocorra é preciso que se produzam mudanças por meio de uma intervenção na qual a participação consciente do formando, e uma vontade clara do formando e do formador em atingir objetivos explícitos.

Durante sua formação acadêmica, o professor vai mesmo que inconscientemente, criando seu estilo próprio de ensino, e somente o define quando inicia sua prática no cotidiano escolar, tentando produzir para os alunos uma aprendizagem mais significativa.

É claro que o foco do professor deverá ser o aluno. Para tanto é necessário que o professor esteja de fato envolvido com tudo o que está à sua volta, observando o que ocorre com os novos alunos que recebe e, na medida do possível, modificando ou, se adaptando à nova realidade que vai surgindo, cada vez mais rápido.

E ao se falar em mudanças no campo da Educação, nada é mais apropriado do que ouvir, falar e interagir com os professores, que apesar do afastamento do meio acadêmico e de muitas vezes ficarem vinculados aos conhecimentos advindos de sua formação, das dificuldades cotidianas como falta de tempo para freqüentar cursos ou falta de recursos para a execução de seu trabalho, são os interventores diretos dos processos de ensino e aprendizagem.

Estes indicativos nos levaram ao desafio de propiciar aos professores momentos de reflexão e, ao mesmo tempo, subsidiá-los em suas práticas em sala de aula, unindo os conhecimentos que já possuem a uma proposta de trabalho

que possa ser adaptada à realidade em que atuam, pois para Monteiro<sup>1</sup> considerando o professor como agente do processo educativo, uma vez que a atividade docente lida com conhecimentos tácitos além de depender e criá-los, pessoais e não sistemáticos que só podem ser adquiridos com a prática.

## 1.2 Justificativa

Século XXI, um século de transformações e muitas mudanças sociais, culturais, econômicas e comportamentais. O mundo está em um ritmo tão acelerado que é dificultada a assimilação de todas as informações que surgem. Mas e a escola? Qual o ritmo da mudança pela qual a escola está passando? Percebe-se que há cortes em alguns conteúdos, mas a espinha dorsal dos cursos continua a mesma, talvez dando ênfase maior para este ou aquele tópico.

Esse é o momento de refletir sobre qual pode ser nossa contribuição para acompanhar todas estas modificações que estão ocorrendo no ensino e que geralmente não conseguimos acompanhar. Daí a importância de cada pesquisador contribuir, dando um passo para continuar este caminho na Educação Matemática, por meio de suas experiências e análises.

Para tanto, abordamos o assunto “Geometria dos Fractais”, com o intuito de despertar interesse e motivação, e influenciar de maneira positiva as ações pedagógicas.

A sala de aula requer mudanças. Mas isso só irá acontecer por meio das ações do professor. Um olhar diferente, apropriando-se dos conhecimentos já

---

<sup>1</sup> Ana Maria Ferreira Da Costa Monteiro , professora de Didática e Prática de Ensino de História da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e doutoranda em Educação na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Puc-Rio).

adquiridos, aplicados a uma nova visão das relações em sala de aula, pode promover uma grande e positiva mudança sobre o ensino da matemática.

O conhecimento imutável que por muito tempo esteve presente na escola, hoje já não basta. As informações chegam e se modificam com muita rapidez e a sala de aula deve proporcionar momentos em que o aluno possa fazer descobertas.

Essas novas descobertas podem ser geradas a partir do novo; no caso desse trabalho: Geometria dos Fractais; uma vez que essa geometria está mais fielmente ligada às representações da natureza e acontecimentos observados ao nosso redor.

Atualmente, a aprendizagem ocorre em diversos níveis. Os adolescentes aprendem com os pais, com a televisão, com o computador e demais meios de comunicação. Logo, aprendem muito, ou talvez muito mais, fora da escola. Daí a importância de trabalhos que possam trazer novas metodologias, novas práticas educativas, na busca de alternativas, para o ensino e aprendizagem. Para D'Ambrósio:

...as crianças entram na escola sabendo muita coisa. As crianças aprendem não porque um professor ensinou. Elas aprendem porque estão assimilando todo esse novo paradigma que é: *a gente aprende não só porque foi ensinado*. E as crianças estão assumindo isso no primeiro grau. Os jovens estão assumindo isso no segundo grau... (D'Ambrósio, 1997, p. 10).

Assim se o professor estiver inserido nessas mudanças e se apropriar dessas alternativas adequando-as à realidade em que atuam, considerando D'Ambrósio (1997), é reservada algo *mais nobre*. *Ao professor é reservado o papel de dialogar, de entrar no novo junto com os alunos, e não de mero transmissor do velho*. E assim podemos dar um pequeno passo para que a

escola deixe de ser obsoleta, e seja um meio eficaz inserido no universo da aprendizagem. Segundo D'Ambrósio:

...a educação não só no Brasil, mas no mundo inteiro, passa por uma grande crise, em todos os níveis, uma crise de obsolescência, uma crise de não saber acompanhar a evolução deste mundo". (D'Ambrósio, 1997, p. 9).

E também,

Porque o jovem não quer ser mais enganado por uma escola, uma instituição obsoleta, por professores que não sabem mais como repetir o velho. Eles querem gente que junto com eles procure o *novo*. (D'Ambrósio, 1997, p. 11).

Este trabalho pretende contribuir com uma proposta de ações necessárias à formação continuada de professores para que reflitam sobre sua autonomia e possam inserir em suas aulas, mecanismos que contribuam para ampliar o significado dos conteúdos oferecidos aos alunos, uma vez que os PCN's – Parâmetros Curriculares Nacionais – 5ª a 8ª séries, já prevêem que devemos estar em busca de atualizações para a atividade docente, mesmo em se tratando de conteúdos não previstos no dia a dia da escola, mas que fazem parte das novas descobertas do mundo físico, que indicam abordagens, em sala de aula, de diversos assuntos. Na página 25 podemos observar, timidamente citado, o trabalho com Fractais:

O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos – teorias matemáticas - evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidianos e hiperbólicos na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso – a Estatística e a probabilidade – e daqueles relacionados com as noções matemáticas de **caos e de conjuntos fractais**<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Grifo nosso.

Partindo do pressuposto de que os alunos mudaram e que, é preciso por isso, debruçar um olhar diferente sobre o ensino da Matemática, desejamos provocar nos educadores a reflexão a respeito de alguns conceitos, a fim de realizarem novas práticas à luz desse novo tempo.

### **1.2.1 Questões do trabalho**

Nossas grandes indagações sobre o professor no que diz respeito a novas propostas de trabalho foram: Quais as possibilidades de mudança de atitude do professor de matemática de modo a encaminhar um trabalho inovador em sala de aula?

Será que por meio de um mini-curso, seria possível proporcionar ao professor condições para que ele pudesse encaminhar um trabalho inovador em sala de aula? Como produzir um encadeamento metodológico que proporcione ao professor visualizar um novo momento para o ensino, levando-o a transpor as resistências que possui pela própria formação acadêmica que teve? E mais: como desenvolver um encadeamento metodológico que possa ser aplicado na sala de aula?

Partindo dessas perguntas e de um grande desejo de criar novas perspectivas para o trabalho de sala de aula, iniciamos esta pesquisa e o desenvolvimento de um mini-curso a ser realizado em duas partes, em dias diferentes.

### **1.3 Pressupostos básicos**

Apesar de não constar dos currículos escolares, a Geometria dos Fractais deverá fazer parte do ensino de geometria, pois com a informatização, podemos

tornar útil essa ferramenta e levar ao conhecimento dos alunos um aspecto da geometria mais próximo de sua rotina.

O desenvolvimento dos Fractais vem ganhando espaço nos estudos e pesquisas; o que a princípio estava limitado a experiências científicas envolvendo cálculos complexos, aos poucos está se transformando em uma linguagem habitualmente utilizada no contexto escolar, como já ocorreu com outros assuntos que a princípio era de domínio dos intelectuais e cientistas e atualmente pode ser tratado no contexto escolar.

### **1.3.1 Geometria Euclidiana**

Não se pode tentar entender a Geometria Fractal sem abordar a geometria Euclidiana. Afinal esta existe e permanece há mais de 2000 anos, com um histórico de contribuições e descobertas, envolvendo grandes nomes da matemática que, ainda hoje, nos causam admiração e grandes questionamentos sobre o caminho que percorreram na organização e estruturação da geometria.

Euclides tem em seus postulados e teoremas como fazer matemática em sala de aula. Euclides sempre levou em consideração as formas, empenhando-se em provar que todas as formas da natureza poderiam ser representadas por meio de formas geométricas simples. Deixou escapar um elemento importantíssimo nesta análise: a dimensão. Euclides, em seu pensamento visualizava isoladamente três dimensões (comprimento, altura e profundidade). Mesmo com todas as suas contribuições, Euclides não se atentou para as dimensões que viriam a caracterizar um Fractal, fazendo nascer a Geometria dos Fractais, uma geometria contemporânea, que surgiu nos últimos trinta anos.

A geometria Euclidiana ainda é uma boa representação dos objetos criados pelo homem, mas não é adequada para se representar as formas da natureza.

Ainda é possível representar os objetos descritos pela Geometria Euclidiana por meio de fórmulas e equações, considerando-se ainda a dimensão inteira e baseada em tamanho ou escala pré-definida.

Por ser tradição nos currículos, não é possível simplesmente descartá-la quando iniciar o tratamento da geometria fractal, considerada ainda como uma nova geometria. A sua relação com a euclidiana é de diferença em vários aspectos, mas no contexto escolar cabe a ambas, acrescentar às aulas, e não a exclusão de uma pela outra.

Cabe ressaltar que, para o entendimento da geometria fractal, ainda nos apropriamos dos conceitos da geometria Euclidiana pois ela se faz presente em nossa formação e prática.

Mas afinal, será que isto poderá gerar um conflito? Não temos como responder neste momento, somente a prática poderá nos trazer uma resposta.

Já não é tão recente a procura de tentar dar um sentido ao aprendizado matemático escolar, proporcionando ao aluno uma visão de aplicação mais próxima da realidade. Essa busca vem de longa data mas ainda não se encontrou um caminho. Assim podemos trilhar vários e então, arriscar sempre, na procura de novos conhecimentos e novas práticas, o que contribui para novas investigações, ampliando as possibilidades para o ensino de matemática.

Aqui nos deparamos com o que temos na geometria Euclidiana e o que procuramos de novo. Enquanto a geometria euclidiana proporciona o trabalho com formas certinhas para a representação da natureza e seus fenômenos, a geometria Fractal tende a representar com maior fidelidade esta situação.

Vejam os que a geometria Euclidiana estabelece uma relação fria nos objetos que encontramos na natureza. Essa relação é desenvolvida por ângulos retos, círculo, figuras que mantêm regularidades e propriedades aplicadas nestas representações que a tornam estática. Em contrapartida, a geometria Fractal, estabelece a relação entre esses objetos sobre uma outra perspectiva baseada nas irregularidades, assimetrias e imperfeições, o que a aproxima de uma representação mais fiel da natureza.

Mas a grande proposta não é trabalhar uma em detrimento da outra, e sim, fazer uso das duas para melhor compreensão dos objetos e fenômenos que nos rodeiam, favorecendo um ensino mais próximo do real no contexto escolar, pois *“encarar a geometria do modo como geralmente é apresentada é uma boa maneira de transformar uma mente jovem em pedra”*, (MLODINOW, 2005).

Não se pode jogar fora tudo que foi conquistado, afinal conforme Mlodinow (2005), em *Os elementos*, Euclides abriu uma janela pela qual a natureza do nosso universo tem sido revelada.

Assim como a forma de ver o mundo e a interação com ele tem mudado constantemente, temos que seguir, trazendo outras possibilidades para inserir esta visão de mundo no contexto escolar, deixando-a ao alcance do jovem.

#### **1.4 Objetivo do trabalho**

Nossa problemática tem como foco a qualificação do professor. Vamos verificar se, um mini-curso realizado em duas etapas, pode promover a mudança de postura do professor. Um encontro que proporcione base para que possa sozinho, procurar novas informações para atingir as necessidades desta nova

geração, fazendo uso dos conhecimentos que já possui, mas transformando-os, recriando-os e gerando novos caminhos na sala de aula.

Propor aos professores a busca de novos rumos para a sala de aula, desenvolvendo o assunto Geometria dos Fractais, ainda não inserido no contexto do ensino da matemática, provocando mudanças das práticas pedagógicas, por meio de uma seqüência de atividades, visando a conceituação do tema abordado, estimulando os professores a pensar sobre propostas teóricas e práticas e então, experimentar para construir e elaborar algo que esteja associado a seus conhecimentos anteriores, de forma a lhe permitir uma ação pedagógica segura.

Observar de que forma os professores atuam à frente de uma nova proposta de trabalho para a sala de aula, contribuindo para uma formação reflexiva dos pesquisadores frente ao estudo das possibilidades de inovação do professor de matemática sobre a abordagem de um novo conteúdo: Geometria dos Fractais.

### **1.5 Método**

Para a realização dos encontros, os professores foram convocados por e-mail, encaminhado para as escolas. Nestes encontros foram convocados dois professores de cada unidade escolar, sendo um do período diurno e outro do noturno. Mesmo sendo uma convocação feita pela Diretoria de Ensino, alguns professores não compareceram para os encontros.

Tendo como objetivo o desenvolvimento de um trabalho com professores por meio de uma seqüência didática, que também venha a ser desenvolvida em sala de aula, e a receptividade do grupo ao trabalhar a Geometria dos Fractais,

optamos pela realização de uma pesquisa qualitativa, tendo em vista a geração de conhecimentos que venham se somar às práticas já realizadas no que se refere ao ensino de matemática.

Sendo nosso objeto de estudo um grupo de professores, o presente trabalho foi desenvolvido com a interação entre a pesquisadora e o grupo, desta forma, conforme Flick (2004), a pesquisa qualitativa estuda os conhecimentos e as práticas dos participantes. Assim, foi investigado previamente o conhecimento do grupo sobre o assunto. Neste rumo, considerando Flick (2004), *“apesar de todos os controles metodológicos, a pesquisa e suas descobertas são inevitavelmente influenciadas pelos interesses e pela formação social e cultural dos envolvidos”*.

A exploração do estudo não será descartada, pois este se limita a definir e buscar informações sobre a visão do professor de matemática a partir da familiarização com um determinado conteúdo ainda não previsto nos currículos.

Os instrumentos utilizados para a coleta das informações foram aplicados em momentos diferentes, compostos por questionários, divididos em questionário de investigação e questionário sobre os professores e o ensino da matemática.

No 1º Encontro, utilizamos a filmagem como registro, que segundo Flick (2004), *“o uso de equipamentos para gravação faz com que a documentação de dados torne-se independente das perspectivas do pesquisador e dos sujeitos em estudo. Defende-se a idéia de que, através desse sistema, obtém-se um registro naturalista dos eventos”*.

Não descartamos em alguns momentos, a pesquisa quantitativa, pois levantamos porcentagens de alguns dados coletados para análise sobre as opiniões dos professores em relação às práticas educativas. A síntese dessa

análise forneceu subsídios para o direcionamento e elaboração da seqüência didática.

Durante o processo de trabalho, a pesquisadora atuou com o grupo, dessa forma para melhor acompanhamento do grupo, utilizamos slides para ilustrar algumas falas pertinentes ao assunto.

Para definirmos essa nova postura, restringimos nosso foco ao âmbito das Escolas Públicas, onde as necessidades afloram. Por isso, nossa proposta prevê a indisponibilidade de recursos e a possibilidade de reflexão sobre as crenças naquilo que os professores julgam ser obstáculos.

### **1.6 Professores e professoras parceiros da Pesquisa**

Para que esse conhecimento chegue às salas de aula, focamos nossa pesquisa na peça mais importante do processo ensino aprendizagem: O Professor. Consideramos peça importante, pois sua conduta e seu conhecimento proporcionarão condições ideais para que a aprendizagem ocorra. Neste caso o grupo de professores da rede pública da região Sul da cidade de São Paulo, composta por 84 escolas do Ensino Fundamenta I, II e Ensino Médio, dos períodos diurno e noturno.

O professor é quem encaminha as condições para a ocorrência da aprendizagem, trazendo oportunidades para que se estabeleça uma relação de necessidade de se aprender o conteúdo a ser apresentado.

### **1.7 Os questionários e os encontros de trabalho.**

A prática docente deve ser alimentada para que se mantenha a sala de aula como um lugar onde a aprendizagem ocorra em mão dupla, em que o docente é o condutor principal para que aconteça a grande transformação da educação. Para tanto precisamos encontrar uma forma de manter o docente sempre alerta. Geralmente desanimado frente a impossibilidade de fazer cursos com esse trabalho podemos criar um meio apropriado para estes encontros que foi a Diretoria de Ensino Sul 1.

Esta escolha ocorreu sobretudo pelo fato de que a Diretoria já tinha uma proposta de encontros mensais com professores. Essa visão de união, viabilizou nossos objetivos. Esse momento foi importante porque apenas introduzimos o mini-curso num ambiente em que já ocorriam as reuniões. Logo nossa ação foi de acrescentar possibilidades aos docentes. Se tivéssemos que abrir um novo espaço para esta pesquisa, provocando o encontro de professores, a validade da mesma seria outra, pois dessa forma não poderíamos verificar se é possível ou não, em encontros semanais ou mensais, provocar mudanças na prática docente, ou seja, estaríamos trabalhando com um fato isolado, dentro de um outro panorama.

Assim, aproveitamos um espaço já existente e que nos permitiu a utilização de condições favoráveis.

O encaminhamento burocrático do trabalho ocorreu com a solicitação, pelo Dirigente de Ensino, da proposta de trabalho a ser avaliada. Após a avaliação, foi autorizado o desenvolvimento do mini-curso. (Ver anexo II).

Para a elaboração do mini-curso, foi aplicado um questionário diagnóstico composto por nove questões objetivas para verificação do conhecimento dos

professores sobre o assunto Geometria dos Fractais e sua prática em sala de aula.

Por meio deste questionário foi possível fazer uma avaliação sobre a prática docente, bem como proporcionar situações que pudessem despertar nos professores e conseqüentemente nos alunos um olhar mais aguçado para o ensino e aprendizagem da matemática no tema abordado.

Em meados de outubro de 2005, o questionário foi aplicado pela Assistente Técnica Pedagógica (ATP) Valéria Alves Velho para os grupos de professores, diurno e noturno, que foram informados sobre a importância da colaboração de todos os presentes para a pesquisa a ser realizada.

Após a aplicação do questionário, teve início o planejamento do primeiro encontro, previsto para o final do mês seguinte.

O segundo questionário, teve como base o questionário adotado na dissertação de Mestrado de Berlane Silva Martins, "*Etnomatemática: possibilidades num contexto de formação de professores*", pois algumas questões que investigavam o conhecimento dos professores sobre o assunto vinham ao encontro com nossa investigação. Outras questões foram adaptadas para o trabalho com este grupo e com o tema a ser desenvolvido.

Ao final dos encontros, o segundo questionário foi aplicado novamente como comparativo em relação ao primeiro momento, permitindo-nos a análise do desenvolvimento do mini-curso e suas conseqüências para a prática docente naquele momento.

Foi a Assistente Técnica Pedagógica (ATP) Valéria Alves Velho, que organizou os horários e as convocações dos professores para a realização do encontro.

## 2. OS FRACTAIS COMO CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESCOLAR, UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

---

*...E também o mundo, com tudo aquilo que contém, com tudo aquilo que nele  
se desdobra. E afinal é a mesma coisa variada em cópias iguais.*

*Fernando Pessoa – Poesia de Álvaro de Campos*

Ao introduzir um novo assunto em sala de aula, devemos ter em mente as transformações pelas quais passamos que nos permitiram conhecer melhor o assunto, de forma a tornar viável seu conhecimento numa linguagem apropriada para quem vai receber estas informações. Ao se ter clareza do assunto, é necessário elaborar uma situação que permita a inserção do conteúdo, ou seja, elaborar uma seqüência didática, que colabore para um desenvolvimento a contento das atividades propostas.

Pensando nestas situações, também elaboramos uma seqüência didática para aplicar aos professores, já como um possível modelo para ser reutilizado em sala de aula.

### 2.1 Situação Didática

É o conjunto das diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático. É inspirada no modelo teórico desenvolvido na França por Brousseau (1986), que contempla a especificidade do saber matemático, envolvendo professor, aluno e conhecimento.

Uma situação didática, visa uma educação matemática mais significativa para o aluno, proporcionando a esse um conhecimento que realmente esteja

vinculado ao processo de sua promoção existencial, buscando a especificidade do saber matemático.

De acordo com José Luiz Magalhães de Freitas: *“Quando o conteúdo matemático é apresentado isoladamente do mundo do aluno, torna-se desprovido da verdadeira expressão educativa”*.

A relação do conteúdo matemático com a realidade, torna-se um processo que valida a transformação pela aprendizagem.

Para Brousseau:

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição...

Compõem a estrutura das situações didáticas o contrato didático, os obstáculos epistemológicos, dialética ferramenta-objeto, transposição didática.

As situações didáticas, podem ser: situação a-didática que são momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de forma independente, não sofrendo interferência por parte do professor; aprendizagem por adaptação: o aluno se defronta com a necessidade de adequar o seu conhecimento a um determinado problema que lhe foi colocado no quadro de uma situação didática e aprendizagem formal: procura sobrepor a memorização, a técnica e os processos de automatismo à compreensão verdadeira das idéias matemáticas.

Assim, para o desenvolvimento do mini-curso, foram planejadas atividades que efetivamente contribuam na elaboração do conhecimento do assunto a ser trabalhado.

## 2.2 Transposição didática

Perrenoud, (1993) define como transposição didática a essência do ensinar, ou seja, *"a ação de fabricar artesanalmente os saberes, tornando-os ensináveis, exercitáveis e passíveis de avaliação no quadro de uma turma, de um ano, de um horário, de um sistema de comunicação e trabalho"*. Conforme Grillo, na visão de Perrenoud, esta é uma prática dos saberes para as atividades e situações didáticas, que surge como resposta às situações reais de sala de aula.

A transposição didática sempre ocorre na sala de aula, independente do conteúdo. Para Grillo, a transposição didática tem início na fase pré-ativa, no planejamento da aula, quando o professor se organiza, com tempo e recursos, sem a presença dos alunos, formulando um plano de ação para o futuro. Pode prever uma prática inovadora ou repetitiva, mas mesmo neste caso, resulta de uma reflexão sobre reflexões anteriores, espécie de avaliação que implica uma tomada de decisão do professor com relação aquela forma de ensinar escolhida como a melhor opção para tais alunos num certo momento. Considerando também a posição de Chevallard (2001), a transposição didática é o conjunto das transformações adaptáveis que sofre a obra em questão para ser ensinada.

Neste caso, para o desenvolvimento deste trabalho levamos em consideração a transformação desse conhecimento científico para o conhecimento a ser ensinado em sala de aula, utilizando linguagens e atividades pertinentes ao ambiente escolar, pois conforme Chevallard :

...a matemática escolar se apresenta com algumas características próprias, que a diferencia em muitos aspectos das obras matemáticas originais. Essas características específicas derivam do fato de que muitas obras do currículo têm de ser reconstruídas para poder ser ensinadas na escola, isto é, "recriadas" sob certas condições que não

coincidem nem podem coincidir com as condições que tornaram possível sua construção inicial. (Chevallard 2001, p. 136).

Ainda considerando Grillo, a transposição didática é efetivada com base na experiência, nas intenções, nas interpretações, nas crenças e valores do professor, em cada momento e em cada turma. Pode assumir traços de inovação na eleição de novos conteúdos ou na abordagem de um velho conteúdo, de experiência absolutamente inovadora a partir de mudanças pessoais com relação às concepções epistemológicas, ou de adaptação metodológica, numa linha de interdisciplinaridade.

Ao desenvolver o tema “Geometria dos Fractais” juntamente com o grupo de professores, elaborando as atividades, passamos conseqüentemente por uma nova configuração na abordagem do assunto, com a intenção de romper a rotina da sala de aula e da prática docente, direcionando o trabalho para uma situação inovadora dentro do contexto proposto, realizando assim a transposição didática, ou seja, a passagem do saber sábio, de referência ou científico, ao saber ensinado, não sofrendo distorções, mas sim fazendo parte de um sistema didático que tem relação com o saber de referência que lhe deu a origem.

Fazendo uso de atividades conhecidas e transformadas para a aplicação do novo conteúdo, nossa prioridade foi focar o professor enquanto agente do processo do ensino de matemática.

### **2.3 O meio computacional**

O desenvolvimento da geometria Fractal está muito ligado ao uso do computador, pois como as imagens surgem a partir de um procedimento

recursivo, o recurso computacional permite uma visualização harmoniosa do que se pretende desenvolver.

A informática deve ser inserida como um recurso pedagógico durante as aulas, e neste caso em particular, é um recurso que pode auxiliar na compreensão da matemática.

Os Fractais gerados por meio computacional, permitem ao aluno uma interação da matemática e a técnica de se produzir Fractais, principalmente se o aluno for preparado para essa interação com o computador auxiliando o raciocínio da matemática envolvida.

Com o uso do computador é possível visualizar as iterações que são realizadas e observar a beleza e sutileza das formas intrincadas, o que manualmente não é possível devido o processo de criação de um fractal.

Os softwares que permitem o desenvolvimento dos Fractais, nem sempre estão disponíveis nas escolas públicas. Para o trabalho com Cabri, Logo, Geometricricks entre outros, há necessidade de conhecimento do professor, mas conforme informação dada pela ATP, uma vez que não foi feita em nenhum momento uma ação pedagógica voltada para o uso da informática, nosso trabalho não foi voltado para o uso da informática.

No desenvolvimento da pesquisa, não utilizaremos o ambiente computacional e sim, lápis e papel por ser no momento o recurso mais acessível aos professores. De qualquer forma, temos a consciência de que o trabalho realizado nesta pesquisa foi um início para o conhecimento da Geometria Fractal e posteriormente, os professores poderão desenvolver outras atividades com o uso do computador.

### 3. FRACTAIS NATUREZA E SIGNIFICADO

---

*"A matemática possui não apenas a verdade, mas uma beleza suprema – uma beleza fria e austera era como a de uma escultura" (Misticismo e Lógica, Bertrand, 1918).*

#### 3.1 Introdução à geometria fractal

Ao longo da década de 1970, o caos e os fractais pareciam não ter qualquer relação entre si. Ambos enfrentam a estrutura da irregularidade. Os fractais oferecem uma nova linguagem para descrever a forma do caos.

A Geometria fractal é uma nova linguagem criada pelo matemático Benoit Mandelbrot, no começo da década de cinquenta. Mas foi na publicação de seu livro *"Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão"*, em 1975, aconteceu o grande marco para esta teoria.

Mandelbrot introduziu esta geometria após observar padrões de surgimento em diversas áreas de estudo e de pesquisa, tais como a estrutura do ruído nas comunicações telefônicas, a flutuação dos preços nas operações de mercado e, o estudo empírico da geometria dos litorais, desenvolvido pelo meteorologista Lewis Richardson.

##### 3.1.1 Sistema Dinâmico

Um Sistema Dinâmico é uma coleção de partes que interagem umas com as outras e se modificam mutuamente com o passar do tempo. Alguns exemplos são o sistema do tempo, condições atmosféricas, os sistemas computacionais, e até mesmo o ecossistema do planeta. Alguns sistemas dinâmicos podem exibir comportamentos estáveis ou caóticos.

O objetivo principal dos Sistemas Dinâmicos é entender o comportamento, a longo tempo, dos estados de um sistema determinístico. Entre os fins dos anos 60 e princípios dos anos 80 tomou-se conhecimento de que os Sistemas Dinâmicos simples poderiam dar origem a comportamentos muito complexos, e este fato teve um grande impacto nas outras ciências. Os matemáticos rapidamente perceberam que a revolução que se dera nos Sistemas Dinâmicos tinha suas bases no trabalho de Henri Poincarè do século XIX.

Nos anos 60 houve um outro impulso nos Sistemas Dinâmicos, desta vez os grandes pioneiros foram Stephen Smale (Califórnia), Edward Lorenz (Boston).

Muitos fractais gerados por computador são criados, precisamente, operando-se as regiões que exibem comportamento caótico, em algoritmos usualmente comportado. O estudo dos fractais aumenta os nossos conhecimentos sobre o comportamento caótico dos sistemas dinâmicos. Dessa maneira, a teoria fractal pode nos ser útil não apenas para prever o tempo, como também para compreendermos os limites de nossa capacidade para fazê-lo.

### **3.1.2 Caos**

A palavra “caos” é formada a partir de um termo grafo, de origem indo-européia, cujo sentido poderia ser o de abismo, de precipício – estando a mesma raiz na origem da palavra “gás”, que parece fazer coexistirem duas idéias bastante diferentes, a de vazio, de ausência, e a de falta de organização, sentido moderno que ela já tinha na Antiguidade romana.

Na década de 70, com a criação do *Coletivo de Sistemas Dinâmicos*, surgiu a nomenclatura *teoria do caos*, ou *ciência do caos*. Da mesma forma que

Poincaré, os chamados *investigadores do caos* interessavam-se por encontrar explicações para o imponderável, procuravam, em essência, ordem no caos.

O principal postulado do Coletivo era a existência de padrões nos chamados fenômenos caóticos. Caos passou a ser definido pela sua complexidade e imprevisibilidade.

Dentro dos novos estudos desenvolvidos a partir de meados do século XX, caos é definido como:

*Um estado complexo caracterizado pela (aparente) imprevisibilidade de comportamento e por grande sensibilidade a pequenas mudanças nas variações do sistema ou nas condições iniciais. É observado tanto em sistemas muito simples quanto em sistemas complexos. A condição essencial para um sistema apresentar estado caótico é ser não linear, isto é, apresentar uma resposta não proporcional ao estímulo.*

Na verdade, o mundo segue a tendência de se tornar mais e mais caótico. A informação é mais do que nunca necessária. Um reflexo disso pode ser encontrado nas obras dos meios de comunicação de massa. Entre as características das obras caóticas podemos citar: padrões de construção formal complexo; quantidade elevada de informação transmitida; utilização de recursos multimídia; simultaneidade de ação e imprevisibilidade.

A teoria do caos abriu caminho para que se percebesse padrões em eventos aparentemente desprovidos de padrões - tais como o trânsito de uma grande cidade, as variações da bolsa de valores, ou os fenômenos meteorológicos. Esses eventos, são excessivamente dependentes das condições iniciais - o que é chamado de efeito borboleta.

Caos determinístico é o que vai permitir saber o que ocorre em cada instante. É um fenômeno que leva a um fractal.

O determinismo encara o universo como um relógio, expressão utilizada para representar a confiabilidade de um sistema mecânico, embora hoje predominem os relógios digitais.

É perfeitamente retratado nas palavras de Pierre Simon Laplace, um dos maiores matemáticos do século XVIII, em seu *Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades*:

*Um intelecto que, num momento dado qualquer, conhecesse todas as forças, que animam a natureza e as posições mútuas dos seres que a compõem, se esse intelecto fosse vasto o suficiente para submeter seus dados a análise, seria capaz de condensar numa única fórmula o movimento dos maiores corpos do universo e a do menor dos átomos: para tal intelecto nada poderia ser incerto; e tanto o futuro quanto o passado estariam presentes diante de seus olhos.*

É interessante apresentar o exemplo de Hipérion (uma lua de Saturno). Seu comportamento é fora do comum: sua órbita é regular, mas Hipérion dá cambalhotas num padrão complexo e irregular. Mesmo assim, as acrobacias de Hipérion obedecem às leis da gravidade e da dinâmica. Os astrônomos previram o comportamento futuro do Sistema Solar por 200 milhões de anos, mas não poderiam fazer uma previsão precisa para o movimento de Hipérion para daqui a alguns meses. O erro seria devido à capacidade das equações, mesmo simples, de gerar movimento tão complexo que parece aleatório. A isso chamamos caos.

Há uma forma interessante de se demonstrar como o caos pode surgir num sistema determinístico com o uso da calculadora.

Escolha um número entre 0 e 1. Aperte o botão “x²”. Repita a operação outras vezes. Depois de um determinado número de repetições do processo, você vai chegar a zero. A partir daí, não ocorrem mais mudanças. A isto se chama **iteração**, a repetição indefinida da mesma coisa.

### 3.2 Onde estão os Fractais ?

Fractais são belos e fascinantes padrões de infinita complexidade estrutural, formas intrincadas que capturam imediatamente a atenção, e evocam um sentimento de deslumbramento infantil. Os fractais são objetos matemáticos que possuem uma estrutura extremamente detalhada, não importando a proximidade que você vê.

Os fractais estão muito mais próximos de nós do que imaginamos, uma vez que a melhor representação da natureza é feita através dos fractais, temos de fato que os objetos não-fractais é que são irrealis, abstratos e distantes de nossa experiência cotidiana.

Os fractais envolvem olhar mais de perto, e enxergar mais detalhes. Os fractais têm tudo a ver com saliências que escondem outras saliências, curvas que conduzem a mais curvas, e átomos que se desdobram em universos. Eles estão relacionados com a rica estrutura do nosso universo, que comporta todas as escalas, desde as incontáveis galáxias a distâncias inimagináveis, até as misteriosas vibrações do reino sub-atômico.

Conforme Carvalho et al. [s.d.], seu desenvolvimento vem, dia a dia, abrangendo inúmeras áreas, tais como: meteorologia, previsão de tempo, mineralogia, fisiologia, problemas cardíacos, intestinais, pulmonares; geografia; estudo dos litorais, correção de fronteiras; nas artes; cinema, através dos efeitos especiais ou, na música como recurso para composição e análise de peças eruditas.

Um exemplo de fractal familiar é simplesmente uma árvore. A invariância de escala nele é notável. Muitos objetos naturais têm formas que se aproximam muito dos Fractais, como por exemplo os litorais muitos recortados, como a costa Grã-Bretanha ou a costa oeste da Inglaterra.

### 3.2.1 Curva Fractal

Se o tamanho estimado de uma curva aumenta, arbitrariamente, na medida em que as medidas diminuem, esta curva é chamada de *curva fractal*.

As curvas fractais são consideradas auto-semelhantes, pois as suas propriedades são as mesmas em qualquer nível de complexidade.

### 3.2.2 Características de um Fractal

Podemos caracterizar os fractais observando alguns detalhes como a irregularidade, a propriedade da auto-similaridade, sua complexidade infinita, o seu desenvolvimento por meio das iterações e das condições iniciais, pois sua formação depende desse fator, tudo isso pode ser observado de forma mais comum na natureza.

### 3.2.3 Dimensão Fracionária

Por vivermos num ambiente cuja descrição geométrica, é viável no máximo, em três dimensões, ficamos perplexos diante às limitações de encontrarmos referências para entender uma quarta ou quinta dimensão. Mais confusos, ainda, ficamos perante a idéia de dimensões que não precisam ser expressas através de um número inteiro, algo existente, por exemplo, entre as dimensões um e dois.

Um objeto unidimensional, como um segmento de reta, também possui a propriedade de se reproduzir similarmente. Ele pode ser dividido em N partes idênticas, como uma das quais reduzidas pela razão  $r$  do todo, ou seja,  $r = \frac{1}{N}$ ,

onde  $N$  é o comprimento do segmento e  $r$  é o número de partes obtidas na divisão.

*A dimensão fractal de um objeto mede o seu grau de irregularidade, a estrutura e o comportamento, quer se trate de uma figura ou de um fenômeno físico, biológico ou social. O conceito mais comum de dimensão em matemática é a dimensão topológica.*

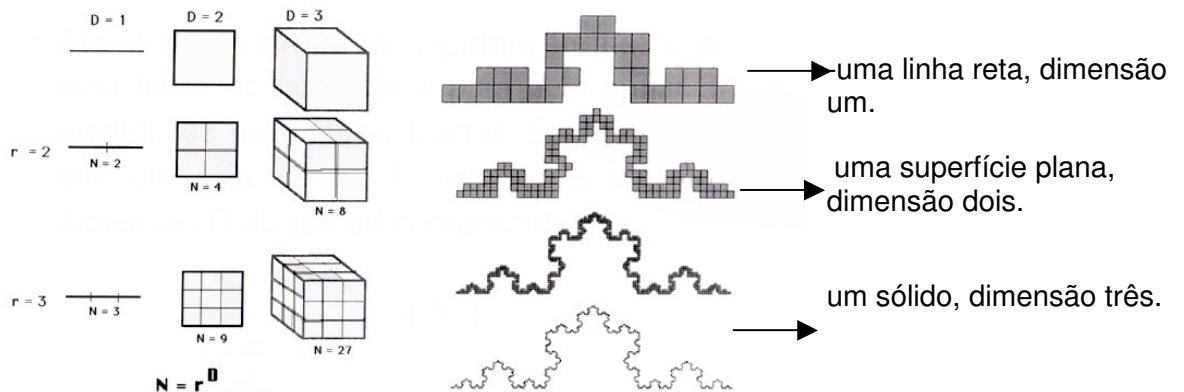


Figura 1 – Dimensão topológica

### 3.2.4 Dimensão Fracionária 1

Os fractais têm dimensões diferentes e próprias de cada imagem.

Uma curva irregular tem dimensão entre um e dois, enquanto uma superfície irregular tem dimensões entre dois e três.

Dimensão fractal mede a “quantidade de plano, ou espaço” que ocupa um fractal ou também podemos pensar como um quantificador da sua “rugosidade”. Assim, a dimensão de uma curva pode ser um valor qualquer do intervalo  $[1,2]$ .

### 3.2.5 Dimensão Fractal 2

Podemos pensar no litoral como uma curva. Quando medimos seu comprimento, ele torna-se cada vez mais longo, quanto mais minuciosa é a medida de seu serrilhado. Um passeio ao longo de uma praia é maior que aquele

na rodovia costeira. Se usamos uma régua de tamanho  $\epsilon$  para medir o comprimento do litoral ou de uma curva, ele será igual ao comprimento  $\epsilon$  multiplicado pelo número de vezes que a régua foi tomada ao contornar a costa.

$$\text{Comprimento} = \epsilon \cdot N(\epsilon)$$

Se o tamanho da régua, usado para medir a costa, diminui, seu comprimento aumenta. O esquema da figura, ilustra a idéia dessa medida e nos mostra como determinar o comprimento  $L$  de uma curva pela aproximação da mesma em  $N$  segmentos de reta, depois de se escolher uma medida padrão (escala  $\epsilon$ ).

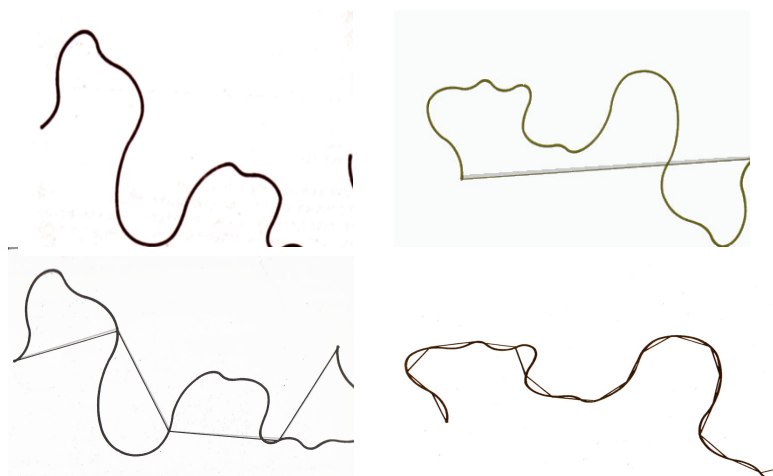


Figura 2 – Comprimento  $L$  de uma curva

O comprimento da curva  $L(\epsilon)$ , sob escala  $\epsilon$ , é então definido por:  $L(\epsilon) = \epsilon \cdot N(\epsilon)$ , onde  $N(\epsilon)$  é o número de segmentos de comprimento  $\epsilon$  que sobrepõe a curva. Caso  $N(\epsilon)$  não seja um número inteiro estritamente positivo, devemos adotar um novo valor para a escala.

O comprimento total  $L$  é definido por:  $L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(\epsilon)$

### 3.2.6 Auto-Similaridade

Uma forma que se repete dentro de si mesma de maneira semelhante e independente de proporção ou escala é denominada auto-similar.

K.J.Falconer, autor de duas obras importantes sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu o entendimento de fractal por caracterizações:

Um conjunto  $F$  é fractal se, por exemplo,  $F$  possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística; a dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica, o conjunto  $F$  pode ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou iterativo<sup>3</sup>.

Comparando-se as imagens que assimilamos de um litoral, por meio de uma visita à praia, e a partir de seu mapa, notamos que a visita ao litoral nos revela infinitas reentrâncias, terras rugosas com pedras que sobressaem do mar, dinamicamente onduladas, variando sob o tempo e o espaço. Todavia um litoral mostrado num Atlas dá a idéia de que a costa é uma superfície relativamente lisa e ordenada, de comprimento finito, facilmente determinado a partir da escala do mapa; porém, diminuindo-se esta escala, mais e mais detalhes são percebidos, ora vemos uma pequena baía, ora vemos, dentro dela, uma enseada ou uma cavidade dentro da enseada.

Na prática, não podemos continuar esta diminuição da escala indefinidamente, mas podemos observar que apesar de encontrarmos mapas diferentes, eles têm o mesmo caráter global, com exceção da escala, o mesmo mecanismo pode ter gerado tanto os pequenos como os grandes detalhes da costa.

---

<sup>3</sup> Barbosa, Ruy Madsen. Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte:Autêntica.

Mandelbrot diz que, podemos pensar neste mecanismo como uma espécie de cascata ou fogos de artifícios que, a cada etapa gera detalhes menores que o anterior. Assim, ele descobriu que qualquer segmento do litoral é estatisticamente auto-semelhante ao litoral inteiro.

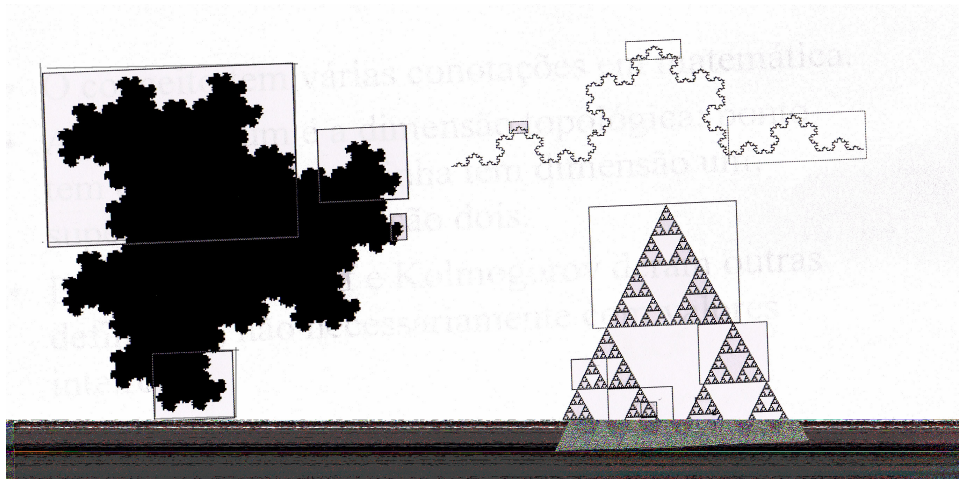


Figura 3– Auto-similaridade

A auto-similaridade resulta de usar-se a mesma regra repetidas vezes. Quando uma pequena parte de um fractal é similar ao todo, dizemos que ele é auto-semelhante. Um objeto auto-semelhante geralmente é um fractal, mas nem todos os fractais são auto-semelhantes.

Um fractal é definido pela irregularidade que precisa existir em todas as escalas, mas esta irregularidade não precisa manter sempre a mesma aparência.

As principais características de um fractal são a auto-semelhança e a complexidade infinita que permitem ampliá-lo infinitamente obtendo sempre uma cópia dele mesmo no seu interior.

## 4. PERSONALIDADES FRACTAIS

---

*“Mesmo que a fonte seja desconhecida, ainda assim o regato flui”.*

*Poincaré*



### 4.1 Georg Cantor (1845-1918)

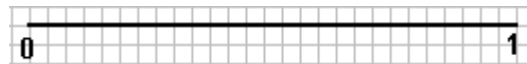
Responsável pelo avanço da matemática no século XX, uma vez que está fundamentada em seu trabalho: Teoria dos Conjuntos.

Um dos trabalhos de Cantor *Contribution to the founding of the Theory of Transfinite Numbers* (traduzido pela Dover em 1915), é o mais conhecido entre os Brasileiros. Podemos citar que é de sua autoria um famoso paradoxo conhecido como “*Conjunto de todos os conjuntos*”, que trouxe como consequência, por exemplo, o usual conjunto universo, localizando o conjunto onde se trabalha.

Em 1883, publicou um trabalho no qual é construído um conjunto que leva seu nome: “*Conjunto de Cantor*” (às vezes chamado de “*Poeira de Cantor*” ou “*Polvo de Cantor*”), obtido por meio da fragmentação do intervalo  $[0, 1]$  e reconhecido por Mandelbrot, muitas décadas mais tarde, como um fractal.

O Conjunto de Cantor é obtido da seguinte maneira:

1. Considerar um segmento de reta:



2. Dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central:



3. Repetir a construção 2 em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente.

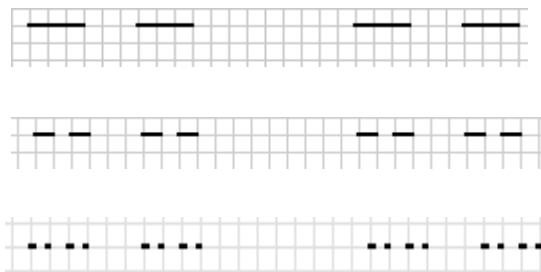


Figura 4 – Poeira de Cantor

Consideremos o segmento de reta inicial com extremos 0 e 1, isto é, o seu conjunto de pontos correspondente ao intervalo fechado  $[0, 1]$ .

Repetindo-se o processo indefinidamente, chegamos ao conjunto de Cantor, que é formado por todos os pontos que não foram retirados. Notemos que os pontos extremos  $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ , pertencem ao conjunto de Cantor, uma vez que em cada etapa da construção são retirados apenas pontos interiores dos intervalos anteriores. Como em cada etapa obtemos dois novos intervalos, temos que  $N=2$ . Por outro lado, vimos que cada intervalo é dividido em três partes auto-similares, logo a razão  $r$  é  $\frac{1}{3}$ .

Assim, a dimensão fractal do Conjunto de Cantor é  $D = \frac{\log 2}{\log 3}$ , isto é,  $D = 0,6309$ . Então temos que o Conjunto de Cantor é o conjunto de pontos (números) que permanecem após infinitas fases. Observando-se as fases, somos induzidos a aceitar que os pontos extremos pertencem ao conjunto final.

Verifica-se que todos esses pontos extremos permanecem e que são relacionados por denominadores de potências de 3. De certo modo, o “comprimento” do conjunto de Cantor é zero. Faz sentido: afinal, ele consiste sobretudo de buracos. Mais parece poeira do que intervalo.

Há outras construções que levam a algo topologicamente equivalente ao conjunto de Cantor. Uma das mais bonitas é feita a partir de um disco circular do qual se move tudo, exceto dois discos menores. Como se tivesse um botão com dois furos para a linha passar, só que você fica com os furos e joga fora o botão. Repita essa operação em cada disco menor indefinidamente, até passar ao limite, conhecido como *queijo de Cantor*.

Nota-se a propriedade de auto-semelhança (em qualquer escala, ou seja, em qualquer das iterações, a ampliação de uma parte é semelhante a uma das iterações anteriores).



#### 4.2 HENRI POINCARÉ (1854-1912)

O primeiro nome evocado é não raro o de Henri Poincaré, sobrinho de Raymond Poincaré, que foi presidente da República francesa de 1913 a 1920. Henri Poincaré é considerado um dos fundadores do estudo moderno dos sistemas dinâmicos e o inventor das propriedades essenciais do caos.

Sua obra é imensa, ela trata em particular, da integração das equações diferenciais e utiliza, muitas vezes, métodos geométricos que permitiram avanços espetaculares. Suas preocupações a respeito das equações diferenciais estavam ligadas, pelo menos em parte, aos problemas colocados pela mecânica celeste e, em particular, pela estabilidade do sistema solar. Ao estudar um modelo simplificado deste – três corpos maciços em interação newtoniana, mostrou que esse problema não tem solução analítica geral.

Ao estudar na vizinhança de soluções periódicas, a estabilidade das equações, com a ajuda de desenvolvimentos em série de perturbações (uma perturbação corresponde, por exemplo, ao pequeno efeito do Sol sobre a órbita kepleriana da Lua ao redor da Terra), ele descobriu que as séries divergem, tornando assim ilusória a aproximação feita das pequenas perturbações.

Se os primeiros termos dessas séries permitem uma predição conveniente da trajetória de tempos “curtos”, esta última é instável a longo prazo, quando correções supostamente pequenas no início se tornam consideráveis.

A possibilidade de movimentos erráticos num sistema com pequeno número de graus de liberdade era entrevista.

Além disso, Poincaré compreendera sua razão profunda, que hoje chamamos de sensibilidade às condições iniciais, ou SCI. Com efeito, ele escreve que *“uma causa muito pequena, que nos escapa, determina um efeito considerável, que não podemos deixar de ver, e então dizemos que esse efeito se deve ao acaso... pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais gerem diferenças enormes nos fenômenos finais... a predição torna-se possível”*.



### 4.3 Giuseppe Peano (1858-1932)

Giuseppe Peano, italiano, nasceu em Cuneo (1858) e faleceu em Turim (1932). Foi professor da Academia Militar de Turim, onde trabalhou Joseph Louis Lagrange por volta de 1755, com enorme contribuição à Matemática, principalmente relacionada às preocupações dos grandes matemáticos da época.

Em sua obra *Arithmetics Principia*, observa-se o alto nível de precisão e rigor lógico, quando não só utiliza símbolos lógicos, mas introduz vários, alguns ainda empregados.

Seus trabalhos, utilizando notações e rigor da lógica, surpreenderam os matemáticos contemporâneos.

Em 1890, tratando do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, publica a sua famosa curva, outro monstro matemático, proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular: - “*Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*”, *Mathematische Annalen* 36, 1890, p. 157-160.

O “monstro de Peano” tem recebido várias citações surpreendentes, por exemplo do russo Vilenkin: “*Ele faz aparentar que tudo estaria em ruína, que todo conceito matemático tenha perdido seu significado*”; ou do francês Dieudonné: “*Alguns objetos matemáticos como a curva de Peano são totalmente não intuitivas[...], extravagantes*”

### 4.3.1 Curva de Peano

Esta curva inventada em 1890 por Giuseppe Peano é um fractal, onde consideremos a dimensão fractal igual a 2, o que nos leva a duas afirmações. A primeira é que a curva cobre completamente o plano e a segunda diz que precisa haver uma infinidade de pontos nos quais ela se intercepta.

A auto-intercepção torna possível a determinação do caminho que a curva de Peano é traçada, mesmo que acrescentássemos setas ao diagrama com a intenção de mostrar seu fluxo.

Para construir a Curva de Peano, podemos começar com um segmento de reta unitário, por exemplo, e em seguida colocamos os nove segmentos de comprimento  $1/3$  como mostra a figura abaixo:

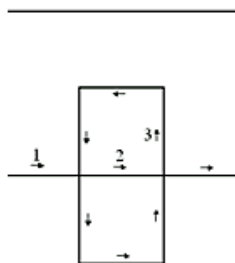


Figura 5 – Curva de Peano - inicial

O resultado que se obtém nas primeiras iterações é o seguinte:

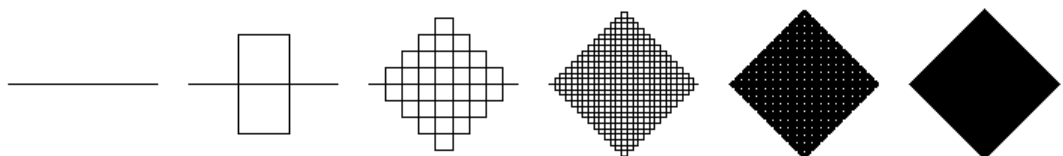


Figura 6 – curva de Peano

Logo este fractal é uma curva que cobre por completo um quadrado.

Outros fractais que partem de uma forma geométrica simples são os fractais de Cesário e as curvas de Peano-Hilbert.

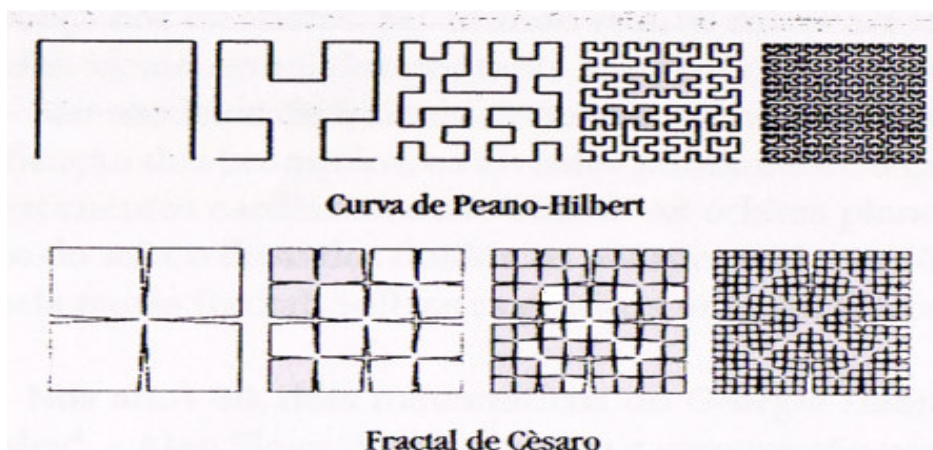


Figura 7 Curvas de Peano-Hilbert  
Figura 8 fractal de Cesário



#### 4.4 DAVID HILBERT (1862-1943)

Foi um matemático excepcionalmente abrangente e talentoso, como provam suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas. Era o dínamo da Universidade de Göttingen cuja cidade transformou, juntamente com uma plêiade de colegas brilhantes, na Meca da matemática. Em 1902 tornou-se editor da revista *Mathemastiche Annalen*. No Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris em 1900, propôs vinte e três problemas abertos importantes, o que resultou em grande enriquecimento para a matemática.

Uma noção intuitiva do que vem a ser uma curva, pode ser definida da seguinte maneira: “As curvas são figuras geométricas geradas pelo movimento de um ponto”.

É possível imaginar um ponto que se move de tal maneira que, num tempo finito, passe por todos os pontos de um quadrado, e não é nada intuitivo, considerar toda a área de um quadrado como uma curva.

Podemos gerar este movimento que preenche o plano com a ajuda de poucos diagramas.

Começamos com um quadrado unitário e vamos dividi-lo em quatro quadrados iguais, unimos os pontos centrais destes, mediante uma curva contínua composta de segmentos lineares AB, BC e CD.

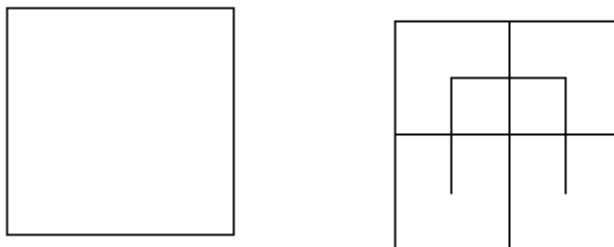


Figura 9 – Curva de Hilbert - inicial

Imaginemos um ponto que se move de forma a atravessar a curva com velocidade uniforme num tempo finito. O passo seguinte consiste em dividir cada um dos quatro quadrados pequenos em outros quatro também iguais e conectar os pontos centrais desses novos 16 quadrados como indicam os segmentos da figura a seguir:

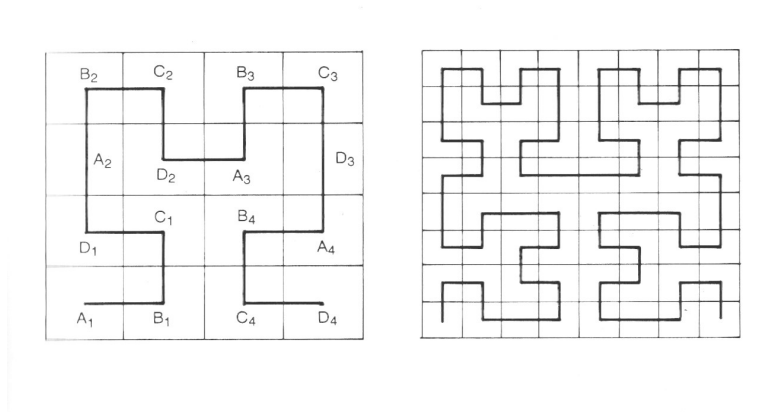


Figura 10 – Curva de Hilbert

Repetimos esse procedimento, dividindo cada um dos dezesseis quadrados da figura anterior em quatro quadrados e conectando os pontos centrais desses 64 quadrados mediante uma terceira curva. O ponto se move de modo que, na unidade de tempo, atravesse este novo sistema de linhas com velocidade constante.

A curva se obtém, continuando o processo descrito indefinidamente, é chamada curva de Hilbert, uma família das curvas de Peano, que por possuir diferenças sutis a tornam única. Primeiramente, a cada subdivisão a curva preenche quadrados menores, mas nunca passa numa área onde ela já exista, ou seja, ela nunca se corta.

Outro fato interessante é que a curva passa por todos os pontos de uma malha, a qual torna-se duplamente mais refinada com cada sub-divisão, e como não há limites para as sub-divisões o comprimento da curva é infinito.

Para calcular a dimensão fractal da curva de Hilbert, basta observar que a cada etapa toma-se quatro curvas ( $N = 4$ ) de razão  $r = \frac{1}{2}$  para construir o objeto completo.

$$\text{Logo, } D = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} = 2$$

Assim, construiremos uma curva que, topologicamente equivale a uma linha, mas é tão contorcida e dobrada que ocupa exatamente um quadrado e então comporta-se como um objeto bi-dimensional.



#### 4.5 NIELS FABIAN HELGE Van KOCH (1870-

Além de ser um belo exemplo de curva sem tangente, ela pode ser modificada com outras construções análoga e possivelmente influenciou muito Mandelbrot, pois tem muito de uma linha costeira.

##### 4.5.1 A Curva de Koch

Para sua construção

1. Toma-se um segmento de reta
2. Divide-o em três segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes; intermediário, por um triângulo eqüilátero sem o segmento intermediário, que seria sua base.
3. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente e iterativamente.

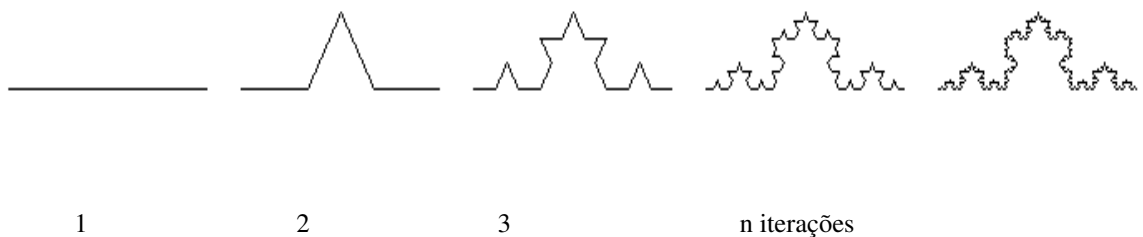


Figura 11 – Curva de Koch

Também conhecida como “Floco de Neve de von Koch”, pois se examinarmos os minúsculos flocos de gelo aderentes à embalagem de um sorvete, vemos que esses cristais mostram um contorno irregular, serrilhado, análogo a curva criada por Helge von Koch (1870-1924).

Segue que a curva de Koch é outra curva gerada fazendo cópias de cópias. Sua construção resulta a auto-semelhança, bastando escolher por exemplo uma determinada fase de um segmento a ser substituído e observar que ele gerará a seguir uma curva semelhante à curva completa de Koch.

Iniciando um polígono regular e construindo sobre cada lado a sua curva de Koch, teremos o que se chama Ilha de Koch.

A figura obtida a partir do triângulo equilátero aparenta um floco de neve, uma formação cristalina, daí ser denominada “Floco de Neve”.

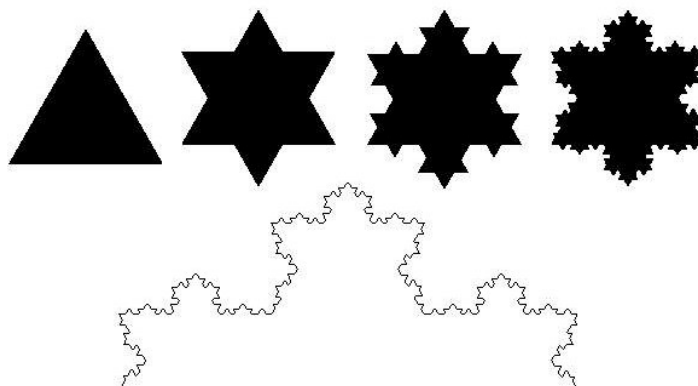


Figura 12 – Floco de Neve

#### 4.5.2 FLOCOS DE NEVE E LITORAIS

Um litoral é um exemplo de fractal que ocorre naturalmente. Mapas do contorno de costas, traçados em todas as escalas, mostram uma distribuição

similar e promontórios. Cada baía tem por sua vez baías e promontórios menores, estes têm os seus, e assim por diante.

Uma curva matemática com essas mesmas características gerais é a “curva do floco de neve”, de Helge von Koch, datada de 1904. Nela as baías e os promontórios são triângulos eqüiláteros progressivamente menores. Não se poderia modelar um litoral por meio do floco de neve de Koch, porque a natureza não esculpiu litorais com triângulos eqüiláteros. Mas a curva do floco de neve capta muito bem uma importante característica do contorno das costas: seu comportamento de escala. Os fractais, tanto matemáticos como naturais, não apenas têm estrutura em todas as escalas: têm, nos limites do razoável, a *mesma* estrutura em todas as escalas.

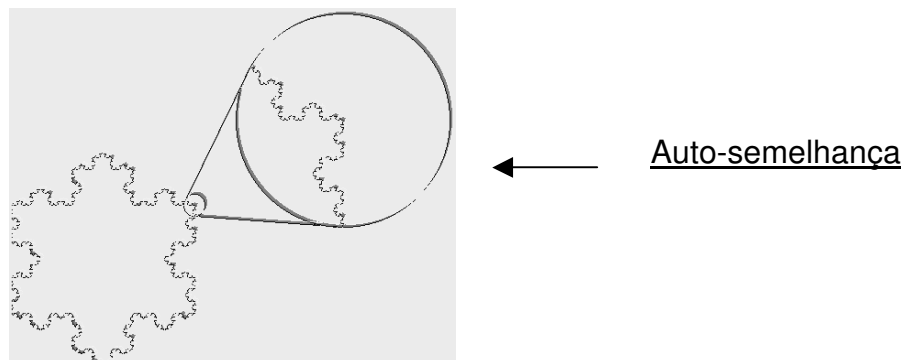


Figura 13 – Floco de Neve e os litorais



#### 4.6 Waclaw Sierpinski (1882-1969)

Matemático polonês, foi professor em Lvov e Wariaw.

Teve grande reputação, principalmente na década 1920-

1930, a ponto de uma das crateras lunares ter o seu nome.

Em 1916 Sierpinski, apresentou um dos famosos “monstros” em seu trabalho: “*Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue de toute courbe donnée*”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences de Paris*, 162 (1916) p. 629-632”, que complementava sua publicação anterior de 1915.

#### 4.6.1 Triângulo de Sierpinski

Iniciamos inscrevendo um triângulo eqüilátero dentro de outro triângulo também eqüilátero e eliminamos o interior do triângulo inscrito (parte branca da figura). Temos, então três triângulos eqüiláteros, e cada um deles, inscrevemos um triângulo eqüilátero e, eliminamos seu interior.

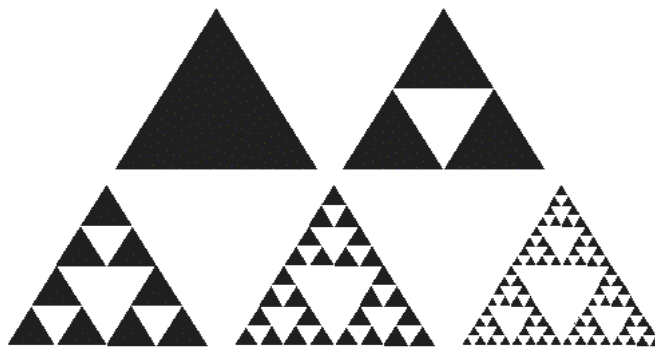


Figura 14 – Fases do Triângulo de Sierpinski

Continuando esse processo, obtemos uma curva formada pelos pontos do triângulo original, que sobram depois das eliminações infinitamente numerosas. Tal curva é chamada de curva de Sierpinski. Sua dimensão fractal é:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849, \text{ uma vez que } N= 3 \text{ e } r=\frac{1}{2}.$$

### 4.6.2 Tapete De Sierpinski

Trata-se de um quadrado em que se retira um quadrado do centro, cujo lado vale um terço do primeiro. As figuras sucessivas se obtêm sempre repetindo o mesmo processo, ou seja, em volta de cada quadrado que se retira, retiram-se quadrados com o lado cuja medida é a terça parte do anterior.

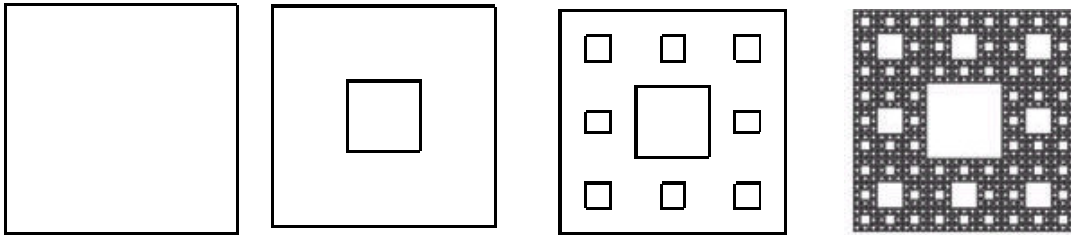


Figura 15 – Fases do Tapete de Sierpinski

### 4.6.3 Tetraedro De Sierpinski

Uma generalização no espaço do fractal anterior.

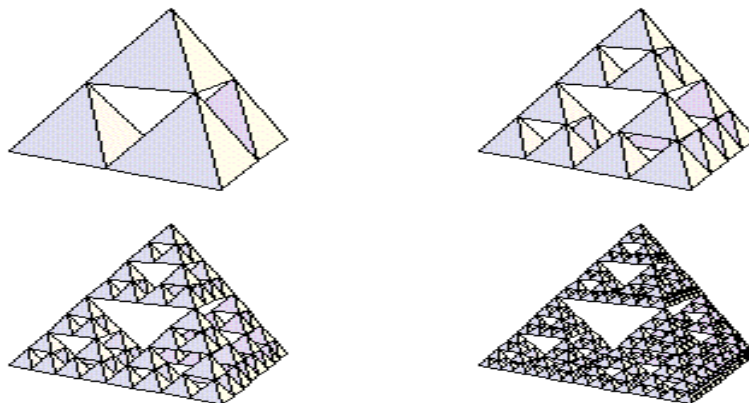
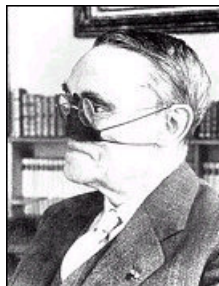


Figura 16 – Tetraedro de Sierpinski

Neste caso temos um objeto no espaço tridimensional, com dimensão 2.

Em cada iteração, a área se mantém constante à medida que o volume tende para zero.

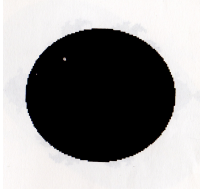
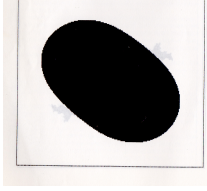


O infinito é uma das idéias mais fortes ligadas às formas fractais. Estas formas parecem estar sempre admitindo mais uma subdivisão, uma reprodução de uma de sua parte.



#### 4.7 GASTON MAURICE JULIA (1893-1978)

O matemático Gaston Julia nasceu em 1893 na Argélia e morreu em Paris, em 1978, aos 85 anos. Lutando na Primeira Guerra Mundial, Julia perdeu o nariz durante uma batalha, o que fez com que, até o final de sua vida, tivesse de utilizar uma tira de couro cobrindo o buraco que lhe restou no rosto.

Gaston Julia superou essa terrível infelicidade dedicando sua vida aos estudos da matemática e, num trabalho publicado em 1918, um volumoso artigo de 199 páginas em uma revista *Journal de Mathematic Pure et Appliqué*, intitulado "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles", esse artigo discutia a interação de uma função racional, quando tinha apenas 25 anos, pelo qual ganhou o Grande Prêmio da Academia de Ciências da França, traçou caminhos da Geometria de Fractais. Em função disto, Julia ganhou certa notoriedade, porém, seus estudos acabaram caindo no esquecimento até serem resgatados, muitas décadas depois, em 1970, pelo polonês Benoit B. Mandelbrot, professor da mesma Escola Politécnica de Paris, onde Gaston Julia havia sido mestre.

	<p>Conjunto de Julia <math>f(z) = z^2 + c</math>, com <math>c=0</math> e com 20 iterações</p>
	<p>Conjunto de Julia com <math>c = -0,1 + 0,8i</math> e com 2 iterações.</p>
	<p>Conjunto de Julia com <math>c = -1</math> e com 20 iterações.</p>
	<p>Conjunto de Julia com <math>c = 0,360284 + 0,100376i</math> e com 20 iterações</p>

Quadro 1 – Conjunto de Julia



#### 4.8 A ESPONJA DE MENGER (1902-1985)

A “Esponja de Menger” trata-se de um conceito matemático, oriundo da imaginação de Karl Menger, matemático americano de origem austríaca.

A esponja de Menger é um fractal obtido a partir de um cubo, onde são retirados sistematicamente outros cubos de modo semelhante ao que é feito na construção do triângulo de Sierpinski. O resultado desse procedimento é uma figura com muitos furos como podemos observar na figura abaixo:

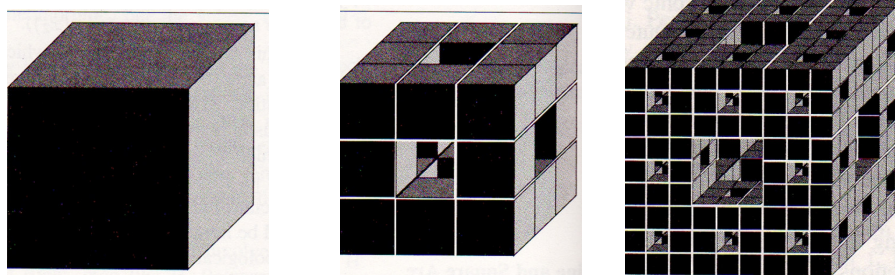


Figura 17 – Esponja de Menger

A dimensão fractal da esponja de Menger é 2,727 aproximadamente isso justifica porque a esponja de Menger tem sua área tendendo para o infinito e seu volume tendendo a zero.

Sua forma, um cubo aberto, transpassado por uma multidão de poros, todos conectados uns aos outros. Uma curiosidade nascida no início do século, que atualmente inspira pneumologistas, construtores de automóveis e ainda empresas de construção.



#### 4. 9 BENOIT MANDELBROT

Nasceu em Varsóvia (1924), de família judaica, da Lituânia. Em 1936 sua família mudou-se para Paris. Quando Paris foi libertada do jugo alemão, submeteu-se aos exames de admissão da Escola Normal e da Escola Politécnica, sendo aprovado a despeito da sua falta de preparo, ambas instituições de prestígio.

Iniciou pela Escola Normal, onde pouco tempo permaneceu, passando à Politécnica. Na época havia o movimento do grupo Bourbaki, do qual

participava um determinado número fixo de jovens matemáticos, que buscavam a reconstrução da matemática francesa, e entre eles encontrava-se o seu tio Szolem Mandelbrot.

As preocupações do grupo Bourbaki, talvez iniciadas como reação ao grande pensador Poincaré, que não tinham muitas exigências em relação ao rigor, visavam uma matemática formal e pura, sem influências possivelmente enganosas pelo visual geométrico. A matemática tornou-se mais rigorosa, pautando-se pelo método axiomático.

Mesmo diante das idéias de seu tio, Mandelbrot não suportou o predomínio da abstração imposta pelo Bourbaki. Deixou a França em 1948, indo estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos. Funcionário do centro de Pesquisas Thomas J. Watson, da IBM, é o autor dos trabalhos pioneiros sobre a teoria dos fractais.

Foi ele quem na década de 70 introduziu o termo “fractal”, a partir da palavra latina “fractus” que significa quebrado, irregular, apesar de alguns desses objetos geométricos já se conhecerem desde os finais do século XIX; e colocou uma questão simples para apresentar a noção dos fractais, em seu livro *“The Fractal Geometry of Nature: qual é o tamanho da costa da Grã-Bretanha?”*, esta indagação simples expôs um problema complexo.

Na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais, a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema empregando um trabalho antigo de Georg Cantor chamado

Poeira de Cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor.

Mandelbrot procurou, durante anos, situações, algumas vezes de cientistas de outras áreas, mesmo antigas, e modelos para aplicar suas idéias, que por volta de 1960 ainda constituíam uma pálida imagem da realidade, mas que as reconhecia toda vez que visualizadas.

A geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação.

Mandelbrot, pesquisou em Economia sem ter grandes conhecimentos do assunto, assim, estudou a distribuição de pequenas e grandes rendas. Ao ser convidado para proferir uma palestra, por Hendrick Houthaker, professor de economia em Harvard, deparou-se com esquematizações, conforme seus estudos, no quadro do colega, mas com dados relativos aos preços de algodão correspondentes a oito anos. De volta a IBM, levava os dados do colega, aos quais acrescentou dados do Departamento de Agricultura, desde o início de 1900, construindo uma enorme e invejável fonte para os computadores. Verificou-se então, que as aberrações estatísticas dos preços, imprevisíveis, apresentavam, analisados à maneira de Mandelbrot, uma ordem inesperada.

Mandelbrot chegou à fama e obteve honrarias, passando a ocupar vários cargos acadêmicos, desde professor em Harvard ou professor de Fisiologia na Faculdade Einstein de Medicina. Catalogou e estudou muitos exemplos de auto-similaridade na natureza.

Os fractais são em sua maioria gerados com auxílio da computação gráfica. Formas conhecidas há muito tempo, podem ser consideradas como

fractais e já eram desenhadas antes da era do computador; elas são associadas a nomes como: Cantor, Peano, Koch, Hilbert e Brown.

#### 4.9.1 Conjunto de Mandelbrot - Um Fractal Famoso

O conjunto de Mandelbrot é o fractal mais famoso, é constituído dos pontos do plano de Argand-Gauss (plano Complexo), que após, iterados  $k$  vezes, segundo a fórmula  $z_{n+1} = z_n^2 + C$ , onde  $z$  começa em zero, ou seja  $0+0i$  e  $c$  é o número complexo correspondente ao ponto que está sendo testado; cada ponto no plano complexo está dentro de um círculo com centro na origem e raio igual a 2, ou fora dele.

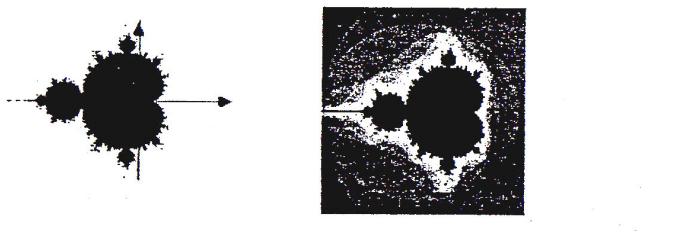


Figura 18 – Conjunto de Mandelbrot

No primeiro caso, a cada iteração, se a distância do ponto à origem é menor ou igual a 2, o ponto está dentro do círculo de raio 2, ele é colorido de preto; caso contrário, de branco. No segundo caso, são estabelecidas cores para os pontos que estão fora do círculo de raio 2, respeitando-se um intervalo, definido previamente, para as sucessivas iterações.

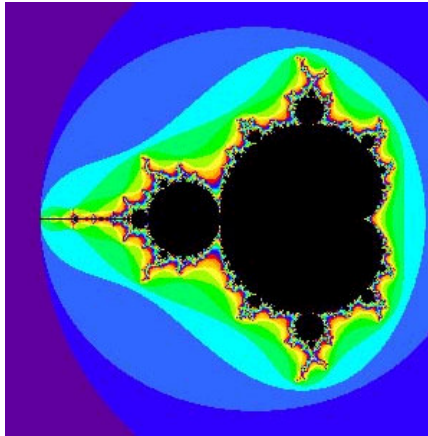
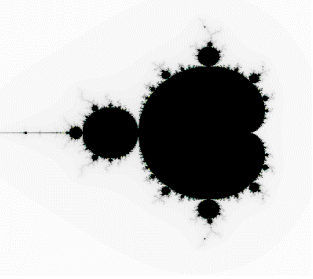
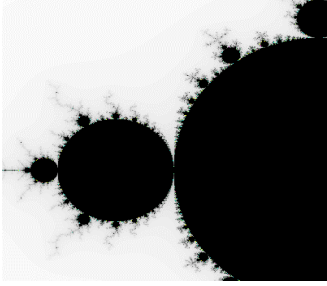
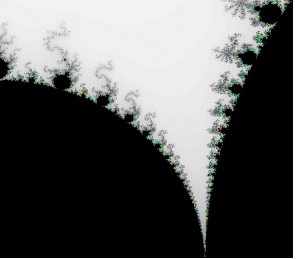
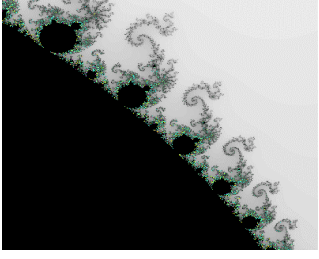
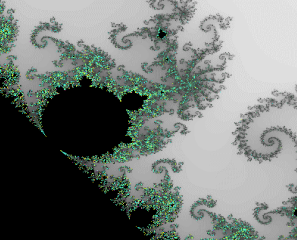
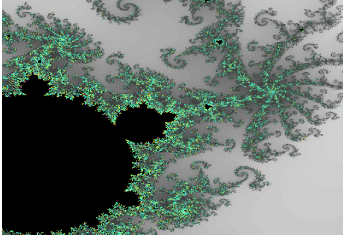
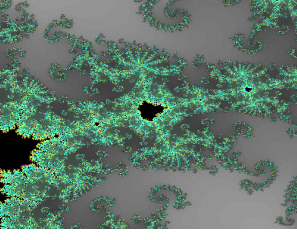
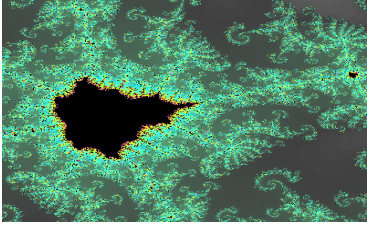
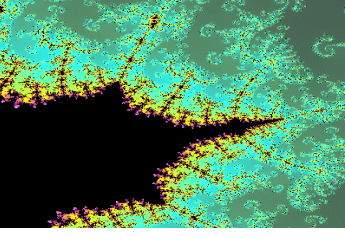
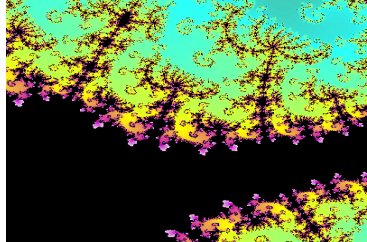
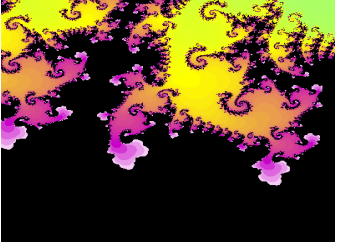


Figura 19 – A beleza do Conjunto de Mandelbrot

Conjunto de Mandelbrot, a beleza está nas cores utilizadas, formando uma imagem encantadora.

Abaixo a beleza do Conjunto de Mandelbrot, após dez ampliações. As cores nos conduzem a uma beleza deslumbrante.

	Conjunto de Mandelbrot		Ampliação 1
	Ampliação 2		Ampliação 3
	Ampliação 4		Ampliação 5
	Ampliação 6		Ampliação 7
	Ampliação 8		Ampliação 9
	Ampliação 10		

Quadro - Ampliações do Conjunto de Mandelbrot

## 5. ATRATOR

---

*“A estranheza é condimento necessário de toda beleza”.*

*Baudelaire*

### 5.1 Atrator Estranho

Um atrator é o conjunto sobre o qual se move o ponto  $P$  que representa o estado de um sistema dinâmico determinista quando aguardamos bastante tempo. Para que esta definição tenha sentido, é importante que as forças exteriores que ajam sobre o sistema sejam independentes do tempo.

Uma noção relevante que aparece na análise dos conjuntos de Julia e Mandelbrot é a de atrator. No caso presente, um atrator é um ponto ou um conjunto de pontos para os quais a iteração de outros pontos do plano complexo converge.

Os conjuntos de Julia delimitam bacias de atração. A noção de atrator já era conhecida por Henri Poincaré, tendo sido aplicada a sistemas dinâmicos dissipativos: verifica-se que a sua evolução temporal é condicionada pela existência de um atrator. A dissipação é o que faz desaparecer os fenômenos transitórios. É por causa da dissipação que, no espaço de dimensão infinita que representa um sistema, há apenas um pequeno conjunto (o atrator) realmente interessante.

Os atratores estranhos têm um ar estranho: não são curvas ou superfícies lisas, mas objetos de dimensão não inteira ou, como diz Benoit Mandelbrot, fractais. O mais importante é que o movimento sobre um atrator estranho apresenta o fenômeno de dependência hipersensível das condições iniciais.

Finalmente, embora os atratores estranhos sejam de dimensão infinita, a análise em termos de frequências temporais revela um contínuo de frequências.

Normalmente na mecânica clássica estudam-se sistemas cujos atratores são pontos, círculos e outras figuras simples. Porém, estes casos são exceções e o comportamento de muitos sistemas, (os sistemas dinâmicos não-lineares) é bem mais complicado: os seus atratores e repulsores; estes são regiões de equilíbrio instável; podem ser fractais.

Os atratores estranhos não são mais do que exemplos de fractais.



## 5.2 EDWARD LORENZ (1917-)

No ano de 1955, Edward Norton Lorenz, é chamado para preencher uma vaga no Departamento de Meteorologia do Boston Tech. Ele herda dessa forma, a direção de um projeto de pesquisa cujo estudo se concentrava na previsão estatística do tempo. Com isso também tem a possibilidade de participar daquilo que seria o início de “uma nova ciência”.

Início do século XIX – Edward Norton Lorenz – trabalhava como meteorologista, tinha um computador Royal McBee, que realizava 60 multiplicações por segundo.

Em 1960, conseguiu fazer simulações. Utilizava 12 equações.

1961, ele resolveu estudar uma determinada seqüência na simulação de tempo. Começou a partir de um número: a partir de 0,506, quando ele voltou, percebeu que havia resultados diferentes, o fato de não incluir casas decimais,

que parecia algo irrelevante, quando sobrepunha os gráficos, em um determinado momento havia muitas variações.

Começou a pensar no que havia feito. O fato de não digitar as três últimas casas decimais obteve um gráfico diferente.

A superposição de dois gráficos mostrava que algo especial aconteceu.

Constatou que pequenas variações nas condições iniciais podem gerar grande diferença nas condições finais (efeito borboleta), dependências sensíveis às condições iniciais.

Bater das asas: o gráfico obtido de bater as asas da borboleta parece borboletear.

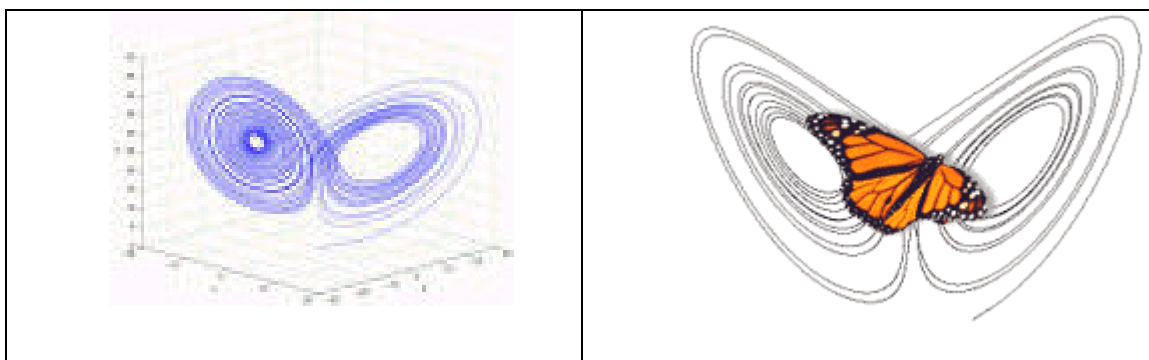


Figura 20 – Efeito Borboleta

Lorenz partiu de três equações diferenciais simples e deu valores para as constantes, obteve um gráfico como uma curva.

As curvas se assemelham às asas de uma borboleta. Curvas que nunca se interceptam, forma de loop circulares, forma desconhecida.

Quando Lorenz calculou inúmeros valores de suas equações num computador, ele descobriu o primeiro dos atratores estranhos e criou a fundamentação para a disciplina do “caos”, que está criando drásticas mudanças em todos os campos da ciência, onde as ferramentas essenciais são os fractais.

Lorenz argumenta que:

a) se um simples bater de asas de uma borboleta pode ocasionar um tornado, então todos os bateres anteriores e posteriores de suas asas, e ainda mais, as atividades de outras inúmeras criaturas também o poderão.

b) Se um simples bater de asas de uma borboleta pode ocasionar um tornado que, de outra forma, não teria acontecido, igualmente pode evitar um tornado que poderia se formado sem sua influência.

### **5.3 Atrator De Hénon**

Os estudos realizados pelo astrônomo francês Michel Hénon, em 1974, cuja idéia era a de procurar um sistema dinâmico, no plano, que apresentasse um comportamento análogo ao de Lorenz, no espaço, resultaram num sistema dinâmico com duas variáveis.

Hénon entrou em contato com a teoria dos sistemas dinâmicos e ouvira falar em atratores estranhos. Assistiu uma conferência sobre o atrator de Lorenz, que levantava questões sobre sua estrutura geométrica fina.

Hénon é um cientista que, embora não trabalhe diretamente com a matemática, tem instintos de matemáticos e disposição para se dedicar a modelos simples, despojados, não físicos, na esperança de obter uma compreensão antes matemática que física.

Para a realização desses cálculos, Hénon começou com uma HP-65 programável, do observatório de Nice, e depois passou para um computador IBM 704D, uma máquina mais poderosa. O computador acoplado a um ploter marcava numa folha de papel os pontos das coordenadas para  $n$  variando de 1 a 10000. Inexplicavelmente, os 10000 pontos situaram-se sobre um sistema de linhas com estrutura complexa.

Se processar no computador equações, sejam quais forem seus valores iniciais escolhidos, pontos sucessivos serão rapidamente conduzidos para essa estrutura delicada, sem jamais romper o padrão de múltiplas camadas. Por outro lado, não é possível saber com antecipação onde cairá o próximo ponto.

## 6. A PESQUISA: O PLANO EM AÇÃO

---

*“Nem toda nuvem gera tempestade”*

*William Shakespeare*

### 6.1 A Investigação - Questionário Diagnóstico

Neste primeiro momento, após a análise das respostas dadas pelos professores, elaborou-se um método didático que visava favorecer a compreensão sobre a Geometria dos Fractais e indicar atividades a serem experimentadas pelos professores propiciando uma reflexão diante das mesmas, de forma que se viabilizasse sua aplicação posterior para os alunos. Segundo Charlot (2000), é a prática que mobiliza os saberes, isto é, que os coloca em processo de movimento em relação a si mesmo e aos outros que dela participam. (apud Fiorentini, 2005, p. 33).

Ao vivenciarem as atividades propostas, os professores entram em contato com aspectos práticos do assunto, o que lhes permitirá fazer alterações necessárias de acordo com o seu público alvo, adaptando-as ou até mesmo complementando-as, com o aprofundamento no assunto ao se apresentarem as teorias existentes, por exemplo.

A prática apresentada pelos professores em sala de aula está muito ligada às práticas que tiveram como exemplo, pois muitos afirmam não saberem inovar, mesmo acreditando que mudanças devam ocorrer. A prática atual dos professores está muito defasada em relação às práticas educativas. Conforme D’Ambrósio (1997), *a educação ainda se mantém naquele estilo velho; ainda se mantém com aquele paradigma que se estabeleceu no tempo de Newton, segundo o qual para aprender é necessário que seja ensinado e que ensino tem*

*como consequência aprendizagem*, e para que se realizem algumas mudanças precisam, novamente, de exemplos de como é possível aplicar novas metodologias.

### **6.1.2 Análise do questionário diagnóstico**

83 professores do ensino público responderam a este questionário.

As seis primeiras questões permitiram a caracterização do grupo quanto a sua formação e nível de ensino que atuam: 15,66% trabalham também em escolas particulares e 10,84% no ensino superior.

Na questão que se tratava sobre o conhecimento do professor sobre o assunto Geometria dos Fractais, obteve-se 56,63% respostas positivas, não particularizando o tipo de informação obtida pelos entrevistados e as demais 43,37%, negativas.

Quando questionados sobre atividades desenvolvidas em relação ao assunto, apenas 2,41% respostas positivas e 97,59% negativas, caracterizando que o assunto não estava naquela época, sendo significativamente abordado em atividades de sala de aula.

Sobre a disponibilidade dos professores e professoras em participar da pesquisa 77,11% professores responderam que sim, deixando inclusive, o endereço residencial e telefones para serem encontrados para participarem da pesquisa, o que demonstrou a disponibilidade dos mesmos. Deve-se ressaltar aqui que o endereço residencial não foi solicitado no questionário.

Dos outros 22,89% que responderam negativamente à pesquisa ou que deixaram a questão em branco, apenas um justificou o motivo, informando que

possuía licenciatura curta em Matemática e plena em Biologia, e que o assunto não lhe interessaria, pois lecionava apenas para o Ensino Fundamental.

Tratando-se de professores e professoras graduados, que já passaram pela academia, nossa expectativa em relação a proporcionar caminhos de interagir atividades relacionadas com a prática, provocando a construção de saberes, também estava ligada ao aprender do adulto, desta forma, entendemos que:

Os adultos aprendem a partir de uma atividade interna aos sujeitos, gerindo um conjunto de apoios exteriores, vivendo situações educativas em que combinam atividades de informação, interação e de produção de saber. Trata-se, fundamentalmente de um percurso individual, autogerido, que se desenvolve segundo uma lógica de apropriação e não de acumulação de conhecimentos. Neste percurso têm lugar situações formais, que podem aproximar-se das ofertas clássicas de formação, ganhando, contudo, uma lógica diversa a partir do momento em que os adultos são sujeitos e agentes de formação e não meros objetos. (CANÁRIO, 1991; *apud* GUESTA, 2005; p.100).

Considerando-se as experiências vividas pelas professoras e professores, elaboramos um mini-curso intitulado “**Fractais, um novo horizonte para a sala de aula**”, apresentando uma visão geral do assunto, seguindo um método didático, o qual permitisse a esses professores o desenvolvimento das atividades propostas também para o aluno.

## **6.2 Fractais, um novo horizonte para a sala de aula – 1º Encontro.**

Estiveram presentes 78 professores que atuavam no Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Devido à simultaneidade de outro evento, a premiação para os alunos que participaram da OBMEP (Olimpíadas Brasileira da Matemática das Escolas Públicas), o encontro com a turma diurna iniciou-se com uma hora de atraso, de forma que foram possíveis somente três horas de atividades.

O encontro teve início com a apresentação da proposta e da pesquisadora, pois era necessário que os participantes estivessem cientes da proposta do trabalho e da importância da sua colaboração. Foi solicitada ainda uma autorização dos presentes para que se realizassem uma gravação das atividades durante o encontro, para que nenhum detalhe ou momento imprescindível se perdesse. Todos os presentes concordaram e assinaram o termo de autorização, conforme modelo no anexo IV.

Para este encontro, foi proposta uma série de atividades que tinham por objetivo permitir a participação interativa de todo o grupo com o tema abordado.

A proposta inicial fora elaborada após a aplicação do questionário diagnóstico, que permitiu o levantamento sobre o conhecimento dos professores em relação ao tema Fractal.

A seqüência escolhida para este primeiro encontro foi elaborada para a informação e integração dos professores durante a exposição, de forma que o foco em um trabalho que uniria a prática e a teoria seria mantido, seguindo o caminho da construção dos conceitos e favorecendo a participação ativa de cada um dos integrantes do grupo.

Os professores foram divididos em grupos para o acompanhamento das atividades propostas. Todo material que necessitariam foi disposto sobre as mesas, garantindo-se desta forma a participação de todos.

Como foi exposto na análise do Questionário Diagnóstico, observou-se que apesar de a maioria conhecer o tema, os que apontaram conhecê-lo não tinham muita segurança em relação ao mesmo. Portanto, foram usadas transparências para se apresentarem as figuras mencionadas, bem como os matemáticos envolvidos com os Fractais.

Para que não se distanciasse da realidade em que o professor estava inserido os conceitos a serem abordados foram adaptados a atividades que já haviam sido utilizadas pelos professores de alguma forma.

Portanto, trabalhou-se com os recursos que os professores supostamente dispunham na escola: lápis, papel, lápis de cor, transferidor, régua e borracha. Isso tranqüilizou os professores, porque alguns comentaram sobre o uso do computador na construção dos fractais, o que dificultaria o ensino, dada a insuficiência de computadores ou mesmo a precariedade dos poucos disponíveis. A experiência em outros cursos mostra ainda que não é muito proveitoso trabalhar com um grupo em condições ideais quando na realidade a aplicação dos conceitos torna-se inviável ao não serem apresentadas meios alternativos para o alcance dos objetivos propostos.

Além disso, ao trabalhar com os materiais acima citados foi possível focar no processo de construção de um novo conceito, ainda não familiarizado pelo grupo.

A preocupação foi a de evitar comentários do tipo **“isso não é possível”**, **“minha escola não tem esta tecnologia”**, e ainda evitar o desânimo durante os encontros, pois se as pessoas envolvidas não vêem sentido no que estão fazendo, perdem totalmente o interesse. Para que isto não acontecesse, as atividades foram centradas na ansiedade e desafios em que os professores encontrariam diante de uma nova possibilidade para a sala de aula.

Foi avisado aos professores que ao final do encontro receberiam uma apostila com todas as atividades programadas, de forma que não seria necessária uma anotação mais aprofundada, a menos que achassem necessário. A opção de entregar a apostila ao final objetivava permitir que os professores descobrissem

aos poucos as propostas. Se a entrega fosse feita no começo, tiraria o foco principal desse encontro: a descoberta.

Como já haviam respondido ao Questionário Diagnóstico, alguns professores comentaram que procuraram algumas informações pela Internet sobre os Fractais, e que de certa forma fez aumentar a curiosidade pelo assunto; outros ainda comentaram não terem procurado nada a respeito, alegando falta de tempo, mas que estavam bem ansiosos para saberem do que se tratava. Foi possível observar que nos dois grupos, todos estavam dispostos e com muita vontade de participar.

O discurso inicial foi o de que em nenhum momento seriam observados ou avaliados, pois em nossa proposta não haveria momento de avaliação sobre o conhecimento do assunto. Ao contrário, a avaliação seria feita no decorrer dos encontros para verificar se uma proposta nova para a sala de aula mudaria respectivamente as expectativas dos professores e dos alunos.

A opção também foi por um encontro que de alguma forma se remetesse ao clima de sala de aula e com os alunos trabalhando. Desta forma, iniciou-se com uma aula expositiva, mas com a interação do grupo.

### **6.3 Questionário 2 - Os professores e o ensino de Matemática**

Antes de iniciarmos as atividades, solicitamos aos professores que respondessem a este questionário, composto de 5 questões no qual analisaríamos o conceito que tinham em relação a sua prática educativa com a matemática.



Figura 21– Aplicação do Questionário 2

O objetivo deste questionário era o de comparar as possíveis mudanças na visão dos professores após terem participado do processo de construção de um novo conceito para trabalhar em sala de aula. Para tanto, o questionário seria aplicado novamente ao final do segundo encontro.

O questionário 2 foi também um instrumento para conhecermos melhor a posição dos professores em relação ao ensino de matemática, pois pela dinâmica das atividades adotadas, tornaria inviável um contato mais direto com o grupo para um diálogo mais aprofundado. O que aconteceu durante os encontros foram conversas rápidas entre uma atividade e outra, não sendo possível uma convivência mais próxima com os participantes. Deve-se observar que apesar de o P78 não ter estado presente para responder ao questionário por ter chegado atrasado, sua opinião foi considerada em outros momentos, pois se empenhou nas atividades deste encontro e do 2°. Assim, não será reproduzida aqui sua concepção específica sobre o ensino da Matemática.

No anexo VIII, reproduzimos as respostas dadas pelas professoras e professores, uma vez que:

A documentação de processos e a transcrição de enunciados conduzem no mínimo, a uma versão diferente dos eventos. Cada forma de documentação leva a uma organização específica daquilo que é documentado.

Essa substancialização da realidade na forma de texto é válida sob dois aspectos: como um processo que abre acesso a um campo e, enquanto resultado de processo, com uma reconstrução da realidade que foi textualizada. (FLICK, 2004).

Algumas respostas já podem ser analisadas neste momento, para que se entenda o encaminhamento e a participação do grupo durante o encontro.

Ao tratarmos da questão sobre a representação que as professoras e professores tinham sobre a idéia de fractais, ou se o nome faria referência sobre o seu significado, verificou-se que algumas professoras e professores já tinham ouvido falar do assunto, mas que aparentemente não deram a devida importância no momento que tiveram a oportunidade de conhecer o assunto. Neste aspecto, formamos cinco categorias sobre a concepção da palavra “fractais”.

Na primeira categoria agrupamos as respostas que expressaram exatamente o significado da palavra, sem relação com outras definições ou aplicações, obtivemos 19,48% de respostas neste sentido.

*“Já ouvi falar, mas não me lembro. Pelo nome, creio que faça referência a formação.fragmentos”. (P36)*

*“Já ouvi falar, mas não sei o seu significado. O nome sugere fragmentação, eu acho”. (P77)*

A categoria seguinte, refere-se ao conceito de fração; 18,18% das professoras e professores relacionaram a idéia de fractais com este conteúdo específico matemático.

*“São frações, pedaços”.(P4)*

*“Fractais a parte da geometria que estuda os sólidos fracionados em muitas partes”. (P17)*

O grupo de professoras e professores que admitiram não conseguir identificar o significado da palavra ou ainda que responderam totalmente sem sentido, formaram a terceira categoria, totalizando 32,47% do grupo. Desta forma obtivemos do tipo:

*“Ouvi falar, mas nunca pude saber exatamente o que era. Imagino que seja algo relacionado a partículas subatômicas”.(P5)*

A quarta categoria, corresponde a 27,27% dos pesquisados. Nesta categoria estão as respostas que relacionaram a palavra fractais à geometria ou a alguma aplicação.

*“Não sei o que é isso. Apenas acho que está ligado à geometria”.(P10)*

*“Sim, já ouvi falar. São trabalhos feitos com figuras geométricas, formando desenhos maravilhosos e com muita lógica matemática”.(P27)*

*“Não conheço fractais. Pelo nome acredito que são partes, relacionadas a figuras geométricas”. (P44)*

*“Sim, já ouvi falar sobre fractais, suas aplicações tanto na formação de regiões geológicas como na utilização nas bolsas de valores”. (P68)*

E na quinta categoria, incluímos as respostas que foram muito pessoais, sem relação com a pergunta. 2,6% do grupo foram inseridos nesta última categoria.

*“Queira me desculpar, mas sinceramente não sei o significado da palavra fractais. Mas para falar a meu respeito, ou uma idéia, na educação ou como educador eu me sinto bem”.(P15).*

Observamos pela resposta dada que a professora não compreendeu a pergunta, pois na parte que se pede para falar a seu respeito, nos referíamos aos

fractais e a professora se referiu à própria pessoa, ocasionando uma resposta incoerente.

Observa-se também que a resposta de P69, se limitou a aulas anteriores, quando teria sido aplicado o Questionário Diagnóstico para o levantamento sobre as concepções dos professores sobre o assunto, e terminou por não opinar sobre alguma idéia que o nome fractal pudesse lhe suscitar.

*“Não ouvi falar, não participei das aulas anteriores” (P69).*

Prosseguindo a análise na parte em que o professor deveria fazer uma reflexão de como a matemática da escola se relaciona com a sua história de vida, obtivemos 19,48% dos professores relacionaram a aprendizagem da matemática da escola com o cotidiano, procurando formas de ensinar com o seu uso do dia-a-dia:

*“De modo geral no meu dia-a-dia. No orçamento de minha casa, na minha vida social (status) e principalmente na saúde”. (P28)*

*“Na minha ótica, não vivemos sem a matemática, mesmo sem perceber estamos praticando matemática. Nas compras, porcentagem, dinheiro, estamos fazendo cálculos”. (P44)*

Essa relação que os professores estabeleceram com o cotidiano está ligada às compras, porcentagens em geral e não especificaram como seria estabelecer esta relação em sala de aula que normalmente é composta de alunos em níveis de aprendizagem diferentes.

10,39% alegaram falta de conhecimento suficiente para tornar a Matemática mais atrativa. Neste caso, estes professores não têm a consciência de que também são responsáveis pela sua formação, a procura do conhecimento

e sua compreensão deve fazer parte das ações e das reflexões dos professores em exercício.

Conjuntamente com o conhecimento pedagógico, os professores têm de possuir conhecimentos sobre a matéria que ensinam. Buchmann refere que *'conhecer algo permite-nos ensiná-lo; e conhecer um conteúdo em profundidade significa estar mentalmente organizado e bem preparado para o ensinar de um modo geral'*. Quando o professor não possui conhecimentos adequados sobre a estrutura da disciplina que está a ensinar, o seu ensino pode apresentar erradamente o conteúdo aos alunos. O conhecimento que os professores possuem do conteúdo a ensinar também influencia o que e como ensinam.”(GARCIA, 1999).

57,14% estabeleceram uma relação pessoal com a Matemática, enfocando sua história com a matemática, desde seu uso diário ao fato de poderem organizar melhor suas vidas.

*“Diariamente, graças a ela tenho o raciocínio aguçado, o que permite sucesso na vida diária”. (P10)*

*“De modo geral no meu dia-a-dia. No orçamento de minha casa, na minha vida social (status) e principalmente na saúde”. (P28)*

10,39% estabeleceram uma relação profissional com a Matemática, informando que utilizam a matemática somente para suas aulas.

*“Amo o que faço e faço porque gosto. O que ensino é a disciplina que me fascina, mas é pesado saber que nem todos alcançam a mensagem que você quer passar. Procuo relacionar os conteúdos com o cotidiano dos alunos”. (P2)*

*“Sempre gostei de trabalhar com números. No ensino Médio fiz técnico em Contabilidade e na faculdade optei por fazer matemática por empatia”. (P16)*

2,60% não estabeleceram nenhuma relação com a Matemática e sua história de vida.

*“Não diretamente, mas obtive um papel significativo”. (P76)*

Na visão da matemática do dia a dia, a escola poderia se limitar aos usos do cotidiano.

Dizer que a matemática está presente em nosso dia a dia é não conseguir relacionar com especificidade sua importância, é algo P20 e P26 declararam em suas respostas:

*“Nos cálculos cotidianos, na resolução de problemas, no raciocínio, nas relações que estabeleço quando necessito”. (P20)*

*“A matemática está presente em nosso cotidiano e também em nossas vidas”. (P26)*

Esta é uma fala generalizada, mas que em muitos casos cai no vazio, pois há aqui uma grande dificuldade na realização da prática escolar e o cotidiano.

Observa-se também que os professores referem-se ao cotidiano o que é uma situação muito vaga, pois ao se considerar o cotidiano comum, a matemática se limitaria às quatro operações fundamentais e ao conhecimento de áreas de figuras planas? Ou não?

Para Giesta:

O professor é um profissional que lida no seu cotidiano com tudo aquilo que retrata as condições sociais, econômicas, políticas, psicológicas e físicas de nosso povo. Ver tais situações com criticidade junto a seus alunos poderia sensibilizá-lo a agir no sentido de promover o crescimento intelectual e afetivo destes, de maneira que, com o tempo, viessem a provocar mudanças estruturais na sociedade. É pois, profissional que melhor pode contribuir para a construção de uma escola pública de qualidade, comprometida com seus anseios, as necessidades e interesses dos cidadãos que contam, especialmente, com essa instituição para lhes fornecer conhecimentos sistematizados. (GIESTA, 2005, p. 132).

Nesta questão, o professor teria um momento para refletir sobre sua relação com a matemática escolar, para perceber o sentido no conteúdo e forma de seu ensino. Porém, isto se mostrou muito dificultoso para a elaboração das

respostas, pois muitos pararam durante o preenchimento da resposta e não compreenderam o que deveriam fazer, intervindo a pesquisadora, que os instruiu a responder de acordo com a própria interpretação da questão. Desta forma, foram obtidas respostas muito variadas, desde as mais pessoais e totalmente desvinculadas do contexto escolar até as específicas que se limitaram no ambiente da sala de aula.

Há depoimentos riquíssimos que traduzem as dificuldades, as esperanças e o desassossego que se tem quando se enfrenta uma sala de aula com adolescentes que possuem diversos gostos, e ainda numa fase em que as transformações físicas e psicológicas geram conflitos pertinentes a esta fase, e que acaba influenciando significativamente a rotina da sala de aula.

É pertinente o registro do sentimento do professor neste momento, pois esta questão traduz o que muitos estão procurando na melhoria do ensino da Matemática, e em alguns depoimentos ficam claras as frustrações, angústias e ansiedades nesta relação em sala de aula. A questão traça também o perfil de professores que estão buscando um caminho para o ensino da Matemática, o que se traduziu na efetiva participação de todos durante a realização das atividades.

Pode-se observar que aqueles sentimentos são comuns a quase todos, pois relacionar os conteúdos matemáticos com a realidade do aluno não é uma tarefa simples. Afinal de contas, a qual realidade pretende-se referir? Essa tradução em realidade do cotidiano ainda não é muito clara para o professor, e muitos ainda levam ao pé da letra o significado desta frase que se desgastou muito, tornando sua prática ainda mais complexa na prática de sala de aula.

Quando questionados sobre a necessidade de inserir novos rumos para o ensino da matemática, felizmente a grande maioria dos professores percebe esta necessidade.

Entre as necessidades apontadas, 55,84% dos professores afirmaram que os educandos precisam de motivação para aprender matemática, por meio de aulas que tenham o cotidiano como fio condutor sem perder o rigor exigido por esta ciência.

*“Sim. Os alunos de uma maneira geral não vêem muito significado no aprendizado de Matemática (principalmente os de nível médio). No curso noturno, o desinteresse é muito geral, ele vem despreparados e sem muito entusiasmo”.*(P22)

Outros 9,10% afirmaram que os professores precisam de motivação para ser o agente transformador desta mudança.

*“Novidade a fim de motivar mais os alunos e o corpo docente. Aprimorar os conhecimentos”.*(P1)

*“Sim. Acredito que poderíamos ter uma matemática, mais direcionada ao cotidiano do aluno e sermos orientados, como incentivar os alunos para um melhor aprendizado”.* (P64)

Enquanto que 11,69% acreditam que a contextualização da matemática seria um bom caminho para conduzir as transformações necessárias:

*“A matemática contextualizada: a idéia de conceito tem de partir do educando, não do educador”.* (P52)

*“Sim. Entendo que a matemática deve ser dada de forma contextualizada e não conteudista, como é feito em muitos temas que inserimos na sala de aula”.* (P3)

E 6,49% pensam que estes novos rumos dependem de recursos materiais como computador, recursos audiovisuais entre outros, pois os atrativos fora da escola influenciam mais a atenção do aluno do que tão somente o professor com giz, lousa e seu poder de oralidade.

*“Sim, não só novos rumos, mas novos métodos. Hoje é muito difícil fazer com que os alunos se motivem quando só temos o quadro, giz e nossa criatividade para motivá-los. Devemos pensar em meios novos que possam competir com a tv, games, etc.” (P13).*

*“Com o mundo globalizado, a Secretaria do Estado da Educação deveria investir mais nesta parte, para estarmos em sintonia com outros países. Há países que o professor já ministra aula de um determinado lugar para outro”. (P39)*

É interessante verificar que 15,58% relacionam estes novos rumos com a atualização do conhecimento do professor, seja por meio de novas metodologias, ou por se aprofundar em determinados conteúdos para melhor desenvolvimento em sala de aula.

*“Observo que precisamos aprimorar os nossos conceitos, com suas novas tecnologias e técnicas novas”. (P69)*

*“Sim. A globalização, o avanço das tecnologias e a facilidade de acesso às informações, modificaram o contexto e a maneira que o adolescente e o jovem dever ser ensinados. Há uma urgente necessidade de inovação e atualização”. (P70)*

Um indivíduo apenas (1,30%) acredita que não há necessidade de novos rumos, por afirmar que seu trabalho já está inserido na relação do cotidiano e isto já seria um bom caminho.

*“Eu sou uma professora que trabalha a matemática muito ligada ao cotidiano do aluno. Portanto não vejo novos rumos”. (P45)*

Com estas falas podemos observar que a grande maioria dos professores concorda na inserção de novos rumos para o ensino da Matemática, porém não têm clareza de como fazê-lo, aguardam uma mudança nas perspectivas do ensino, acreditam que as mudanças aconteceram e não conseguem acompanhá-las.

Nos depoimentos, observa-se a clareza de não fazer do ensino atual o mesmo que foi feito durante sua formação e para que isso ocorra há necessidade de se procurar novos caminhos e adaptá-los na realidade do universo que está inserido.

Nesta perspectiva de conhecer o trabalho dos professores, foram questionados também em relação à sua atuação como professor e os padrões propostos durante sua formação.

75,32% dos professores afirmam que não devem ser seguidos os padrões vigentes à época de sua formação; entre os motivos, citam que o mundo sofreu grandes alterações, e que a preocupação agora está centrada na formação de cidadãos que possam ser inseridos na sociedade, enquanto que em sua época de formação valia mais decorar conceitos do que entendê-los.

*“Acho que sim, mas é impossível, durante nossa formação vivemos uma realidade diferente, vamos à escola com muita energia, quando saímos da faculdade e isto nos é tirado, por n situações do sistema como um todo”. (P40)*

*“Acho que a formação de um professor além de estar associada à sala de aula, deve também estar relacionada ao lado acadêmico. Quando falo em sala de aula, sua formação deve conhecer a realidade das diversidades nas nossas escolas, como também, os conteúdos que por*

*hora estamos condicionados a aplicá-los. Pois minha formação foi simplesmente acadêmica, na hora que entrei em sala de aula descobri o outro lado da minha formação, tive que buscar em livros o material a 'ser dado' em aula". (P41)*

Aqueles que acreditam que os padrões devem ser seguidos perfazem um total de 14,29%; isto porque justificam que existe a necessidade da teoria que tanto é cobrada em avaliações externas.

*"Em grande parte sim, a matemática é igual em qualquer parte do planeta". (P11)*

*"Sim. Acredito fielmente nisso. Na minha formação foi proposto deixar o aluno pensar e incentivar o seu pensamento para que ele tente descobrir a matemática por si, é claro quer o professor é fundamental nesta caminhada do aluno atuando como um mentor". (P25)*

10,39% afirmam que sim, os padrões devem ser seguidos, mas que se devem acrescentar novos saberes.

*"Sim, com certeza, mas sem deixar de acrescentar novos saberes com cursos de capacitação, bem como em oficinas pedagógicas, e cursos de graduação". (P29)*

Essa questão foi inserida para que os professores refletissem sobre sua formação e como estão suas aulas hoje, ou seja, ao serem questionados sobre o assunto, pretendeu-se despertar a necessidade de fazer mudanças na contextualização do ensino, pois muitos não se dão conta que continuam repetindo a prática de ensino a que foram submetidos, por falta de outro modelo.

Os professores esquecem-se de que quem faz o ensino de matemática são eles, se deve haver mudanças, estas deverão partir da prática de cada um em sala de aula. Para Giesta, (2005):

...as mudanças esperadas na educação e na reeducação do professor, com efeitos na sala de aula, dependem de mudanças reais nas suas atitudes, nos seus hábitos e nas suas crenças...

e para tanto há necessidade de se quebrar paradigmas e colocar as ações em prática, e é esta proposta desta nossa pesquisa.

A partir das contradições entre as respostas dos professores, observamos ainda que existe uma dúvida sobre como realizar estas transformações, quando respondem sim e não sem, no entanto, esclarecer quando repetir os métodos utilizados em sua formação funcionam e quando não.

Em relação aos obstáculos encontrados no ensino da matemática para abordar adequadamente assuntos não inseridos no currículo, verificamos que 18,18% dos professores vêem obstáculos no que se refere ao despertar interesse do aluno; acreditam que abordar novos assuntos poderia ser um fato positivo para motivá-lo.

*“Sim, principalmente a falta de interesse dos alunos; geralmente eles criam uma 'barreira' quando o assunto é Matemática”.(P1)*

*“Sim. Falta de interesse, às vezes pelos alunos, às vezes pela direção e corpo discente e também docente” (P28).*

19,48% pensam que o ensino e o sistema educacional devem ser revistos, pelos depoimentos tal revisão poderia minimizar os obstáculos encontrados, porém não especificam quais os obstáculos e como essa minimização poderia ocorrer.

*“Veja bem, acho que todo o ensino inclusive da matemática dever ser reavaliado e reestruturado. No momento não tenho nenhum conteúdo a ser referência para o momento”. (P41)*

12,99% não vêem obstáculo, ressaltando que estes conteúdos novos venham ao encontro com os objetivos propostos.

35,06% consideram a falta de conhecimento do professor como um grande obstáculo que poderia ser minimizado com cursos que promovam a atualização do profissional, sobretudo no que concerne à inserção de novos conteúdos no currículo.

*“O primeiro obstáculo é meu domínio sobre esse conteúdo. Pois tenho que conhecer muito bem o assunto para poder propô-lo em sala de aula. Outro obstáculo é a aceitação por parte dos alunos e colegas, e também os recursos materiais e de tempo”. (P37)*

*“Sim. Dependendo do conteúdo, a falta de preparo e conhecimento”. (P59)*

*“O próprio profissional, como ser norteador desses novos assuntos, ainda não está preparado para este desafio, pois não encontra em seus companheiros a mesma vontade de ‘mudar’”. (P42).*

Outros 3,9% apontam a resistência de alguns professores como um maior obstáculo, ou seja, os resistentes às mudanças podem atrapalhar no repensar do ensino da matemática.

*“Existe uma certa oposição por parte dos próprios professores, que ao que parece não querem mudar sua dinâmica de aula”. (P9)*

*“Sim. Pois é difícil fugir da formalidade e encarar novos desafios. Existe muita resistência por parte dos mais antigos em acertar novos rumos”.(P33)*

Enquanto 10,39% questionam a falta de recursos didáticos, e alegam ser este um motivo gerador de dificuldade para melhorar a qualidade de ensino na sala de aula, afirmam que tais recursos seriam um caminho para inserir novos conteúdos não previstos nos currículos.

*“Sinto dificuldade na maioria das vezes na falta de recursos pedagógicos”. (P16)*

*“O espaço físico, equipamentos das escolas, no tocante a estrutura de pessoal designado, treinado e gerido pelo Estado para suporte nas escolas como por exemplo: professores para sala de informática” (P23).*

Esta questão nos deu uma perspectiva da receptividade sobre a abordagem do tema Fractais em sala de aula, uma vez que ainda não está inserido no currículo.

É urgente reverter o quadro e fazer com que os professores entendam que as mudanças estão nas nossas mãos e não do sistema, pois,

*a ação crítica do professor da escola fundamental frente aos programas de ensino e a realidade fora dos muros escolares, só ocorrerão se ele construir conceitos bem fundamentados de educação escolarizada e, acreditar que, com sua competência técnica e seu compromisso político como profissional especializado que exerce um serviço público à população, pode provocar mudanças.(GIESTA, 2005).*

estendemos esta posição também para a escola do ensino médio, uma vez que o compromisso do profissional da educação está vinculado a provocar transformações nas suas ações educativas.

## **6.4 1º Encontro– Realizando As Atividades**

### **6.4.1 Atividade 1 – Classificação de objetos**

Iniciamos com um grupo de professores cuja maioria já vivenciou em sala de aula a seguinte experiência: se pedirmos para o aluno desenhar uma paisagem, ele irá fazer uso dos conhecimentos que tem da geometria, por exemplo, desenhará o Sol, fazendo um círculo, as nuvens, desenhando linhas curvas fechadas, uma árvore dispendo dos mesmos recursos, ou seja, a

geometria Euclidiana, que cria uma representação muito fria da paisagem vista na realidade dos alunos. Sabemos que esta geometria já não dá mais conta de representar as formas da natureza ou outras situações, e a necessidade de representações mais próxima à realidade está se tornando evidente na atual realidade, em que os jovens questionam e tentam buscar significado e aplicações para o que aprendem.

Após esta breve introdução, apresentamos aos professores a imagem de uma paisagem fractal, ressaltamos que esta foi realizada com o auxílio de um computador e operações complexas, para que pudessem visualizar o que poderia ser feito com a geometria fractal.

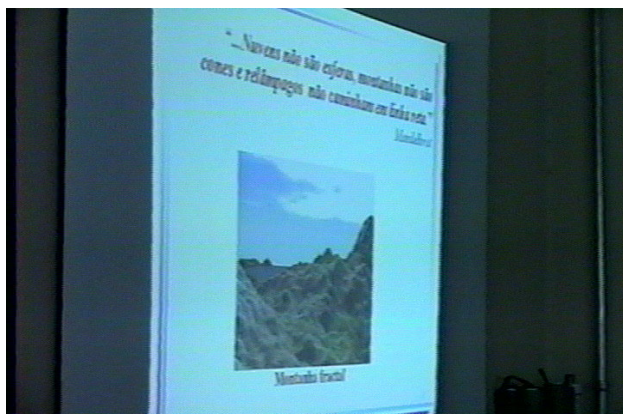


Figura 22 – Slide Montanha Fractal

Ao citarmos a famosa frase de Benoit Mandelbrot “*Nuvens não são esferas, montanhas não são cones e relâmpagos não caminham em linha reta*”, iniciamos a primeira atividade, até este momento não contamos aos professores o que seriam os fractais, durante a primeira fala, alguns professores se arriscaram a dar um conceito para os fractais: “*São fragmentos*”, diz um determinado professor, outro disse que teria alguma coisa com células, ainda alguns falaram em “*coisa quebrada*”, outros não se arriscaram.

Nossa proposta neste momento não era a de contar o que seriam os fractais e sim tentar, por meio de experiências desenvolvidas por meio das atividades, fazer com que os professores pudessem, no final, conceituá-los didaticamente, o que foi explicado a todos. Muitas vezes em sala de aula não proporcionamos momentos para que os alunos formem os conceitos sobre determinado conteúdo, e com isso pulamos etapas gerando, em muitos casos, conceitos equivocados.

Na primeira proposta tivemos como objetivo fazer com que os professores refletissem sobre as ações feitas em sala de aula, por meio de uma proposta similar a que geralmente é utilizada na geometria Euclidiana: entregamos aos grupos de professores kits contendo alguns objetos, e a tarefa consistia em classificá-los.

Foi solicitado aos professores que retirassem os objetos dos saquinhos e os colocassem sobre a mesa. Cada professor recebeu a folha da ATIVIDADE 1, e conforme fossem realizando a atividade, deveriam preenchê-la, identificando o kit pelo número do saquinho. A mesma seria recolhida ao final desta atividade.

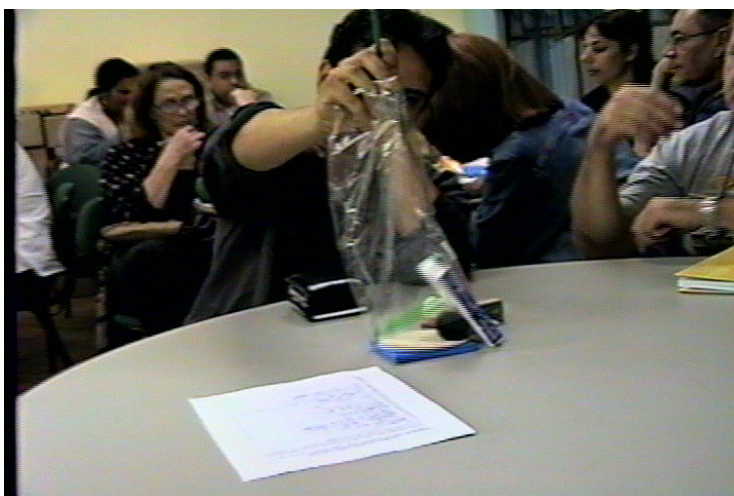


Figura 23 - Distribuição dos kits

Os kits continham objetos comuns e alguns diferenciados distribuídos em saquinhos plásticos e identificados por números. A utilização de materiais básicos, visou facilitar a posterior realização da mesma tarefa com os alunos, fator que também foi comentado com o grupo.

Num primeiro momento, os professores estavam preocupados com os critérios de classificação: se por objeto, se de acordo com a geometria euclidiana, ou pela identificação de detalhes próprios de cada item. Os grupos foram informados de que deveriam ler a atividade e então estabelecer critérios pessoais para a classificação, valendo inclusive a discussão e o convencimento entre os elementos do grupo. Inicialmente, todos os kits continham somente objetos conhecidos pelos professores, mas após os esclarecimentos, acrescentou-se uma couve-flor que também deveria fazer parte da classificação.

Tratou-se de um momento de surpresa e descontração, alguns integrantes sugeriram inclusive que o objeto inusitado era um fractal, embora não soubessem justificar sua desconfiança.



Figura 24– Classificação- Couve-flor

Ao longo desta atividade, foi possível observar que o que a princípio parecia uma simples tarefa de classificação, tornou-se uma discussão prolongada e cheia de entusiasmo. Imaginamos que por tratar-se de um grupo com formação acadêmica, tal tempo não seria muito extenso, por isso o tempo máximo para a realização da tarefa não foi estipulado.

Os kits eram compostos conforme os quadros abaixo:

<b>Kits 1 –2 –3 – 4</b>	
Apoio de copo	Triângulo (sólido de madeira)
Algodão	Paralelepípedo (sólido de
Elástico	Cubo (sólido de madeira)
Caixa pequena (meia)	Quadrado (material dourado)
Cotonete	Barrinha (material dourado)
Clips contorcido	Prisma (sólido de madeira)
Pedaço de barbante	Couve-flor
Bob	

<b>Kits 5 – 6 –7 –8 –9 –10</b>	
Apoio de copo	Triângulo (sólido de madeira)
Algodão	Paralelepípedo (sólido de
Elástico	Cubo (sólido de madeira)
Caixa pequena (meia)	Quadrado (material dourado)
Cotonete	Barrinha (material dourado)
Clips contorcido	Prisma (sólido de madeira)
Pedaço de barbante	Couve-flor
Bob	Copinho
Tampinhas	

Quadro 3 – Material da atividade 1

Observamos os mais diversos critérios adotados pelos professores, dessa forma, ao analisar as fichas, reagrupamos os professores de acordo com a classificação utilizada, pois mesmo estando no mesmo grupo, foi possível perceber que houve divergências quanto à classificação, proporcionando uma

discussão bem ampla e interessante. A proposta de trabalharem em grupo não garantiu uma homogeneidade nos critérios adotados, o que foi positivo, pois dessa forma foi possível observar que alguns professores não se deixaram influenciar, mesmo após a discussão.

Sob todos estes aspectos, decidimos reagrupar as classificações adotadas, permitindo uma melhor visualização em relação ao pensamento do professor neste momento.

Critérios adotados pelos grupos:

- formas geométricas: curvas, retângulos, cilindro
- sem formas definidas
- dimensão do objeto, possível de se calcular a área, volume e perímetro
- material que constitui o objeto
- objetos como exemplo para introduzir as formas geométricas
- de acordo com a sua função propriamente dita
- objetos estáticos e não estáticos
- material orgânico e não orgânico
- objetos manipuláveis e não manipuláveis
- flexíveis e não flexíveis
- formas regulares e irregulares
- formas definidas e indefinidas
- aplicação dos conteúdos matemáticos.

A classificação de cada objeto demonstrou que alguns professores se reportaram aos conhecimentos adotados em sala de aula de acordo com a geometria Euclidiana, ou seja, preocuparam-se em classificar os objetos quanto às suas formas, ângulos e figuras planas e não planas. Um outro grupo, limitou-se

a estabelecer uma relação do objeto com a possibilidade de aplicação para introduzir as formas geométricas, ou seja, eram utilizados como exemplos de retângulos, quadrados, cilindros, sólidos.

A diversificação dos critérios adotados, demonstra que, mesmo os grupos que trabalharam juntos, tiveram conclusões diferentes: em dois grupos foi possível observar que todos os integrantes entraram em acordo e seguiram a mesma classificação, isso demonstra que, de alguma forma, discutiram e chegaram a um consenso.

Vale ressaltar que o grupo que adotou como critério material manipulável ou não manipulável, não explicitou qual era sua intenção ao definir essa forma, pois todos os materiais são manipuláveis, independentemente de sua função.

Observamos também que alguns objetos foram classificados de acordo com a sua forma visual, ou seja, alguns professores se limitaram a descrever o que observavam sobre a mesa, sem se referir às propriedades ou funções dos objetos.

Raros foram os casos em que o critério de classificação foi restringido pela cor do objeto em questão.

O grupo, (formado por 7,71% dos professores) que definiu os objetos como estáticos e não estáticos, se referiu aos objetos não flexíveis e flexíveis, conforme a ficha analisada, ainda definiu os estáticos como formas definidas e os não estáticos como formas irregulares.

O critério do cálculo da área, volume e perímetro foram adotados por um grupo formado por 15,38% professores. Descreveram que todos objetos se encaixavam nesse critério, com exceção da couve-flor e do algodão, sem maiores justificativas.

Quanto às formas geométricas, temos um grupo de 34,61% professores que formaram este grupo, especificamente classificaram os objetos como paralelepípedos, figuras planas, prismas triangulares e alguns como objetos pessoais e alimento.

Formas regulares e irregulares; 10,25% professores fizeram uso desse critério, mas não especificaram o sentido que adotaram para as formas irregulares e regulares.

3,85% professores se restringiram a classificar os objetos como formas definidas ou indefinidas, num caso particular o P1 fez uma observação sobre o seu entendimento de forma indefinida, para ele “indefinido não se encaixa no padrão geométrico”, conforme sua descrição na figura abaixo.

### ATIVIDADE 1

Dados os objetos, classifique-os, descrevendo abaixo qual o critério utilizado, justificando.

Critérios: Formata (forma geométrica)  
 - madeira (maior) → paralelepípedos  
 - madeira (menor) → paralelepípedos  
 - bob de cabelo → cilindro  
 - porta copos → círculo  
 - triângulo verde → triângulo  
 - caixa de penicilina → forma de paralelepípedos  
 - bloco verde → paralelepípedos  
 - ceto, etc → indefinido  
 - barbante → linha  
 - elásticos → indefinido  
 - elip → indefinido  
 - algodão → indefinido  
 - couve-flor → indefinido  
 \* CBS: indefinido (não se encaixa nos padrões geométricos)

Figura 25 – Registro de P1

5,12% professores se reportaram aos objetos de acordo com a sua função propriamente dita, no uso diário.

Outros 5,12% professores usaram o critério de figuras planas, sólidos geométricos, linhas poligonais e figuras diferentes.

3,85% classificaram de acordo com o tipo de material que constituía os objetos.

3,85% usaram critério da manipulação dos objetos.

3,85% separaram os objetos em geometria Euclidiana e Geometria Fractal, sem pormenorizar o motivo.

1,28% professor se limitou a descrever os objetos que observava.

3,85% usaram o critério dos objetos serem utilizados como exemplos das formas geométricas conhecidas.

1,28% adotou o critério dos materiais orgânicos e não orgânicos.

Ainda assim, foi possível observar que, em muitos casos, não foi adotado somente um critério, ou seja, iniciaram com a classificação quanto às formas para alguns objetos e outros foram classificados quanto à flexibilidade sem comentar a respeito de sua forma.

Outro fato importante foi a classificação da couve-flor. Esse objeto foi colocado depois da distribuição dos kits, gerando num primeiro momento, muitos comentários e surpresa, afinal não haviam, até o momento pensado na classificação deste objeto, estes comentários foram sendo observados conforme a pesquisadora passava pelos grupos para inteirar-se das conversas.

Por se tratar de um objeto que não é característico do uso em sala de aula, sua classificação foi muito diversificada quanto aos critérios adotados. Dessa forma 10,25% o classificaram como alimento, ou seja este grupo não relacionou quanto às formas geométricas e sim fixaram na sua função; 16,66% registraram que não tinham uma forma definida, isso significa que não conseguiram verificar nenhuma relação do objeto com as formas geométricas conhecidas.

Outros 1,28% apontaram o critério de que o objeto era maleável, logo usaram o tato para sua classificação; 1,28% afirmaram que o objeto possuía diversas formas e não especificaram nenhuma forma em particular; 1,28%

usaram o termo sem padrão geométrico, aqui cabe uma interpretação de que o objeto não seguia um padrão geométrico conhecido pelo grupo.

19,24% classificaram o objeto como fractais, porém não deixaram registrado o que os levou a fazer tal classificação, (ao observar as conversas do grupo percebemos esta classificação foi adotada por se tratar de um objeto diferente daqueles que constituíam os kits, o que os levou a achar que este, sendo o diferente, seria um fractal); 19,24% simplesmente classificou como irregular; 1,28% descreveu que o objeto tinha linhas diversas; 1,28% o classificou como orgânico.

Interessante observar que 5,12% excluiu o objeto do grupo (pois nos outros materiais usaram o critério do cálculo das dimensões e a couve-flor deixaram fora deste grupo); 2,56% classificou como objeto em que é possível efetuar o cálculo do volume; 1,28% registraram que o objeto não tem dimensão; 1,28% o classificou como monstro (porém não definiu este significado); 2,56% usaram o critério da origem do objeto, classificando-o como vegetal.

Somente 1,28% registrou que as formas deste objeto divergem da geometria euclidiana, 7,71% fez uma comparação com os outros objetos que manipularam e 6,42% não registraram a classificação deste objeto.

O objetivo dessa atividade foi o de provocar uma reação ao manipularem objetos que não estavam inseridos no contexto do dia a dia da sala de aula, ou seja quebrar a rotina de atividades que, em algum momento já houvessem sido aplicadas pelo professor. Atividades que solicitam a classificação de objetos, em geral, são trabalhadas pelos professores, então, fazendo uso desta atividade para inserir objetos que não são comuns ao manuseio em sala, observamos que é

possível fazer uso de atividades já de domínio do professor para introduzir e provocar discussões novas.

Comprovadamente isso ocorreu, pois com essa atividade estimávamos um tempo de 15 minutos mas a discussão foi tão produtiva e os grupos interagiram de tal maneira, que a discussão se prolongou por quase 30 minutos, sendo interrompida para que ocorresse o fechamento e, ainda assim, alguns grupos ainda precisaram de alguns minutos a mais.

Desta forma, podemos entender que é possível a renovação de atividades já conhecidas e fazer uso delas para introduzir novas idéias, pois o que gera a discussão é o fato de novos debates e percepções tão distintas estarem inseridas em um contexto que o professor já conhecia.

Quebrar esses paradigmas foi o objetivo principal, gerando uma nova ansiedade e curiosidade para darmos continuidade ao assunto, pois, foi fato explícito, que, após a aplicação dessa atividade, conseguimos despertar nos professores um maior envolvimento e atenção durante o processo de construção desse novo conhecimento.

Fechamos a atividade debatendo como se organizaram nos critérios e como foi feita a discussão, ressaltamos que, até o momento, não iríamos falar em critérios certos ou errados, pois o objetivo era provocar discussão. Isso ocorre inclusive, quando elaboramos uma atividade e a entregamos aos nossos alunos. E nos centramos no objetivo maior que era o de manipular materiais até então não utilizados com freqüência em sala de aula, como o algodão, os clips retorcidos, a couve-flor.

Ao finalizar essa primeira atividade, perguntamos aos professores se já era possível definir um fractal ou se conseguiriam fazer uma relação entre o que

fizeram e o tema. Alguns professores responderam que achavam que a couve-flor e o algodão eram fractais, por serem materiais diferentes mas ainda não formalizaram o conceito. Então passamos para a atividade 2, mantendo a curiosidade dos professores.

#### **6.4.2 - Atividade 2 – Triângulo de Sierpinski**

Após a manipulação dos objetos, aplicamos uma atividade que poderia proporcionar um caminho que trouxesse mais elementos para a formalização do conceito que estávamos tentando construir.

Os professores receberam uma folha de atividade que continha instruções do trabalho que iam fazer, porém a pesquisadora também explicou os passos para que todos pudessem acompanhar. O material utilizado foi lápis, papel e lápis de cor, novamente utilizamos material de fácil acesso para o professor.

O objetivo dessa atividade era de, ao fazerem a construção seguindo os passos nas instruções, os professores pudessem entender o processo inicial da construção de um fractal, depois organizar as idéias, e atribuírem um conceito para tal. No anexo IX está o modelo da folha de atividade que foi dada aos professores.

Novamente, não delimitamos o tempo para que todos pudessem acompanhar o processo e participar com suas opiniões.

Ao realizar essa atividade, envolvemos a utilização de vários conteúdos já conhecidos pelos alunos e também uma possibilidade de introduzir estes assuntos para os que não conheciam.

Conteúdos abordados:

- Ponto médio

- Construção do triângulo eqüilátero, e aqui abordar suas propriedades e suas características. A construção poderia ser feita com a utilização da régua e compasso, no nosso caso fizemos uso apenas da régua e do transferidor. Durante a construção alguns professores mencionaram que o uso do compasso seria mais interessante para a construção do triângulo, o que entrou como sugestão para uma nova aplicação.

- Criatividade
- Progressão geométrica

#### **6.4.3 - Análise do desenvolvimento da atividade**

Ao iniciarmos a atividade os professores foram instruídos e, mesmo com o enunciado, houve alguma dificuldade por parte de alguns participantes, sinalizando que o enunciado da questão deveria ser reformulado para melhor compreensão. Em seguida, foi dado um exemplo na lousa para que se esclarecesse o procedimento que deveriam seguir.

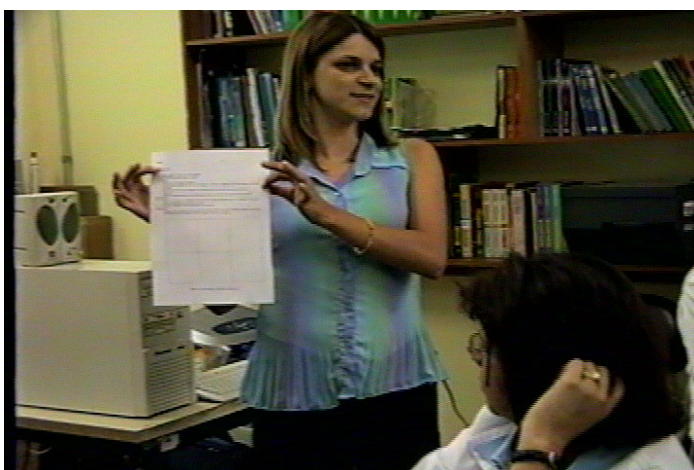


Figura 26 – Atividade 2

Neste ponto, a grande dificuldade foi a de construir um triângulo eqüilátero, encontrar os pontos médios dos lados, uni-los e repetir o procedimento para os

triângulos menores. Essa dificuldade foi sendo resolvida no decorrer da atividade, pois, ao passar pelos grupos, e observá-los a pesquisadora os orientou.

Durante o processo, percebemos que o envolvimento dos participantes foi muito interessante, pois à medida que a figura ia se formando alguns comentários ocorriam, pela beleza do desenho que surgia, pelo simples processo de encontrar os pontos médios e uni-los, cativando e deslumbrando os professores.

Foi sugerido que todos fizessem a construção até o terceiro passo, mas alguns mais entusiasmados continuaram, fazendo o desenho tão minucioso quanto se podia esperar. Conforme terminavam, iniciavam uma demonstração voluntária do que haviam feito, e foi um momento de descontração, pois como alguns professores fizeram um triângulo menor, a figura ficou detalhada e causava espantos nos outros colegas, pela paciência de continuar o processo até não conseguirem mais realizar os procedimentos.

Aproveitamos esse entusiasmo e solicitamos que alguns professores mostrassem o que foi feito, e a beleza surgiu ao compararem os resultados. Foi possível perceber que a grande maioria se empenhou para chegar ao resultado final e verificar o que aconteceria com a figura inicial. Não tivemos nenhum caso em que o participante tenha se negado a realizar a tarefa. A atividade não foi recolhida, pois os professores disseram que terminariam em casa e gostariam de tê-la como exemplo para futura aplicação.

Abaixo o desenvolvimento da atividade e alguns resultados obtidos.

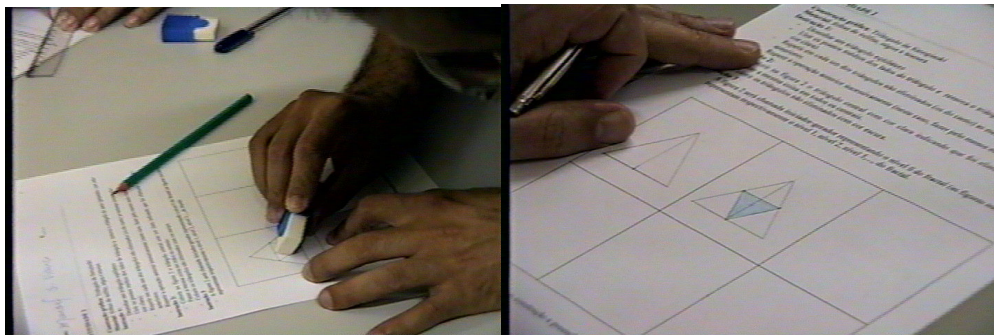


Figura 27 – Desenvolvendo a Atividade 2

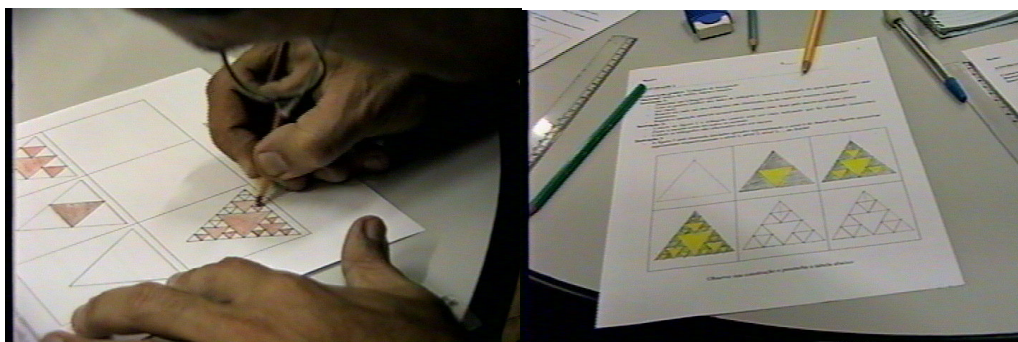


Figura 28 – Atividade 2 - alguns resultados

Após esse momento, em que foram exibidos os desenhos, fechamos com algumas perguntas e comentários.

Até o presente momento não fornecemos nenhuma definição ou nomes específicos e ao abrirmos a discussão, voltamos à apresentação dos slides e introduzimos o conceito de fractais.

Então, tínhamos, no princípio, um triângulo equilátero. Desse triângulo, encontramos o ponto médio dos respectivos lados e ligamos esses pontos. Esta foi a primeira ação executada, percebemos que três triângulos novos equiláteros foram construídos. Pintamos a parte central com uma cor clara, para indicar a área que estava sendo removida, ou seja estamos removendo os triângulos centrais.

Chamaremos esta primeira ação de nível 0 – iniciador-gerador.

Repetimos a mesma ação para os triângulos dos cantos, aqueles que não foram pintados; obtemos então, 9 triângulos eqüiláteros e mais 3 buracos novos, chamaremos esta segunda etapa de nível 1.

Repetindo mais uma vez as ações anteriores, surgiram mais 27 triângulos eqüiláteros e 9 buracos novos, poderíamos repetir estas ações em cada triângulo que não foi removido e após  $n$  iterações obtemos a figura abaixo:

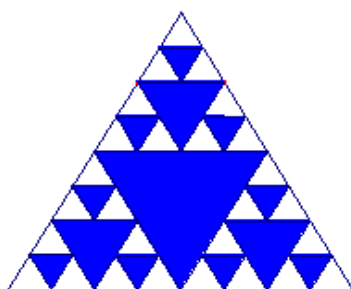


Figura 29 - Triângulo Sierpinski  
Construída com o auxílio do Cabri

A figura obtida nessa construção é chamada de Triângulo de Sierpinski. Nesse momento, apresentamos informações sobre Sierpinski, mostrando sua foto e um pouco de sua história.

Contamos para os professores que o que acabaram de fazer era o processo para se obter um fractal. Definimos da seguinte maneira: é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Foi o que fizeram com o triângulo eqüilátero. O todo, o triângulo eqüilátero, foi “quebrado” em vários outros triângulos com as mesmas características do primeiro que foi construído.

Essas características dos fractais definem a auto-similaridade.

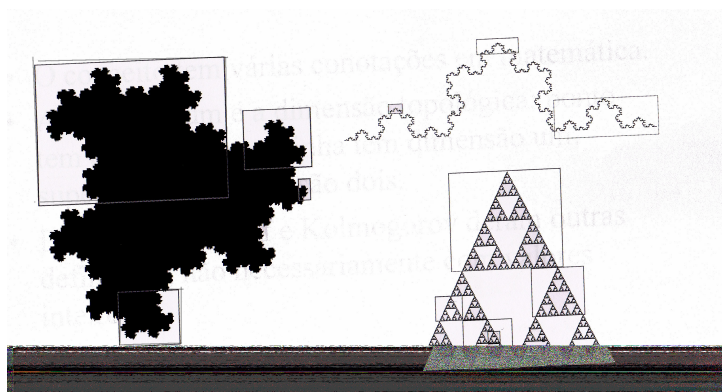


Figura 30 - Definição de auto-similaridade

As ações realizadas pelo mesmo processo inicial, são chamadas de iterações. Nesse caso, as iterações que fizemos, foram após termos desenhado o triângulo equilátero, nossa primeira ação foi a de encontrar os pontos médios dos lados, uni-los e pintar o central e o mesmo procedimento foi feito nas outras ações, para obter as novas figuras.

Uma variação da Atividade 2, seria a realização da Atividade 3, para que observassem que poderiam trabalhar outras figuras e não somente o triângulo, neste caso se obtém o “Tapete de Sierpinski”. Essa atividade 3 não foi realizada com os professores, por se tratar de uma variação da atividade anterior, apenas a comentamos e como ela apareceria com as instruções, na Apostila.

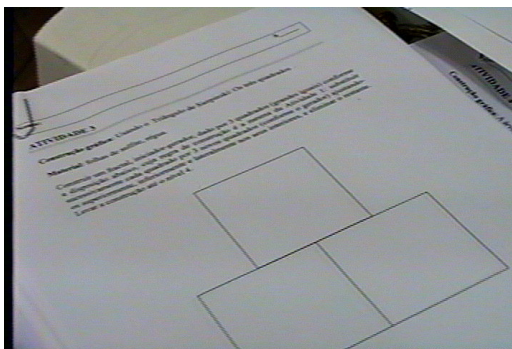


Figura 31 – Atividade 3

Ressaltamos também que, foi prevista a Atividade 4, mas sua realização durante o encontro não foi possível, porém comentamos sobre o seu desenvolvimento com os professores, ficando a critério de cada um, experimentar realizá-la em um outro momento.

As atividades intermediárias não realizadas, não influenciaram no desenvolvimento e participação dos professores durante a exposição, pois foram atividades que complementariam o trabalho em sala de aula, se viessem a ser aplicadas. Afirmamos isso, pois, uma vez que o professor vivenciou de forma intensa a realização das duas primeiras atividades, ele terá condições para o desenvolvimento ou adaptação daquelas fornecidas na apostila.

Iniciamos algumas definições sobre os elementos que compõem os fractais, como o significado da curva fractal, cujas propriedades são as mesmas em qualquer nível de complexidade. Exibimos para os professores os slides da curva fractal, onde se percebe que o tamanho de uma curva aumenta arbitrariamente à medida que suas medidas diminuem, esses passos foram acompanhados por meio dos slides.

Com o prosseguimento dos slides, continuamos a dar algumas características dos fractais, introduzindo este conceito, o fractal depende das condições iniciais, ou seja os procedimentos para o gerador-iniciador, devem ser os mesmos para obtermos os outros níveis.

Dessa forma, vamos didaticamente descrever algumas características dos fractais.

A irregularidade de alguns fenômenos da natureza não pode ser descrita por esta geometria tão certinha. É preciso falar em complicados cálculos que resultam nas dimensões fracionárias, como a dimensão 0,5; por exemplo; típica

de um objeto que é mais do que um simples ponto de “dimensão zero”, porém menos que uma reta com “dimensão 1”. Só a chamada geometria dos fractais consegue descrevê-la.

Ao exibirmos os slides sobre a dimensão fractal contamos que vivemos num ambiente cuja descrição geométrica, é viável no máximo, em três dimensões; ficamos perplexos diante da idéia da quarta ou da quinta dimensão. Mais confuso ainda diante da idéia de dimensões que não são expressas por um número inteiro; algo, por exemplo, entre as dimensões 1 e 2.

É interessante ressaltar que os professores estavam envolvidos, pois após terem desenvolvido as primeiras atividades, a formalização do conceito já causava alguma ansiedade, e nesse momento destacamos a necessidade da realização de tarefas que possam encaminhar a formação dos conceitos que objetivamos em sala de aula, de maneira a tentar obter melhores resultados no desenvolvimento da aprendizagem, despertando curiosidade, até o objetivo final de uma aula, pois todo conceito está sempre se formando a partir de novas experiências que vivenciamos.

Como nossa intenção era a de, neste primeiro encontro, dar um panorama geral do assunto, e, como as dificuldades de reunir o grupo eram freqüentes, optamos em realizar, na segunda parte desse encontro, um panorama da história dos fractais.

Por meio de slides, mostramos e abordamos os fractais primitivos, caracterizando cada um deles.

Poeira de Cantor, é um fractal que parte de uma reta, cuja dimensão é igual a 1, e por processos de iterações, obtemos os fractais, que vão se tornando uma poeira, num processo até onde se é possível realizar as iterações.

Ressaltamos que a apostila que foi dada aos professores, continha a Atividade 5, abordando a Poeira de Cantor. Essa atividade não foi realizada com o grupo, pois como o tempo que tínhamos não seria possível fazer o fechamento do encontro, mas foi comentada para que os professores interessados a realizassem em outro momento, e o processo de se obter a Poeira de Cantor, foi exibido na projeção do slide.

Ao comentarmos a atividade sobre a Poeira de Cantor, indicamos como poderiam abordar, por exemplo, as frações e suas potências.

A exploração das frações, combinada com a criatividade da realização da construção, é um caminho para que o aluno possa assimilar o conceito e entender claramente o processo da relação do todo com a parte; se for trabalhada com o Ensino Fundamental, e auxilia na compreensão da progressão geométrica, quando trabalhada com o Ensino Médio.

Para o aluno, é muito importante vivenciar uma aplicação e, a partir dela, poder construir os conceitos e introduzir as propriedades com o auxílio do professor.

Iteração	Comprimento de cada segmento	Número de segmentos	Comprimento total
0	1	1	1
1	$1/3$	2	$2/3$
2	$1/9$	8	$4/9$
3	$1/27$	16	$8/27$
4	$1/81$	32	$16/81$
5	$1/243$	64	$32/243$

Quadro 4 – Explorando as frações – alguns resultados

### **6.5 Fractais - Um Novo Horizonte Para A Sala De Aula 2° Encontro**

O 2° Encontro aconteceu na segunda semana de dezembro de 2005. A data foi escolhida pelos professores ao término do primeiro encontro, pois como se tratava do fechamento do ano letivo nas Unidades Escolares, alguns professores, comentaram que talvez não pudessem comparecer, por conta do Conselho de Classe que acontece no final do ano. Por isso, a ATP observou que eles poderiam escolher a melhor data e assim foi feito. Estiveram neste encontro 70 professores.

É interessante observar, que, no momento em que discutiam a data do 2° Encontro, todos expressaram a vontade de se encontrar a melhor data para que pudessem comparecer, causando-nos a sensação de que a receptividade do 1° Encontro foi positiva, e isso se confirmou quando, ao chegar o dia e o horário marcados, a grande maioria estava presente, a forma de convocação foi a mesma do 1° Encontro, via e-mail.

Não houve a possibilidade de filmar este segundo encontro, então nos dedicamos aos registros feitos no momento e às observações durante as conversas entre os grupos.

Esta segunda parte, foi uma complementação das informações dadas no 1° Encontro, assim, elaboramos esta segunda etapa de forma que completasse o ciclo de atividades previstas no 1° Encontro e continuamos na mesma linha, atividades que fossem possíveis de se desenvolver em sala de aula, com recursos simples, e definições para ampliar os conceitos que giram em torno dos Fractais.

Os professores também receberam uma apostila, contemplando todas as atividades previstas e folhas de atividade para realizarem com o grupo.

### 6.5.1 Atividade 1 – Ilha de Koch

Iniciamos com uma atividade que relembresse o conceito visto sobre Fractais, então distribuimos folhas de sulfite, régua, transferidor, lápis e borracha e solicitamos aos professores que desenhasssem um triângulo eqüilátero.

Solicitamos que dividissem cada lado do triângulo em três partes iguais, “retirando” a parte central, girando com um ângulo de  $60^\circ$  à direita e à esquerda, unindo depois os segmentos formando um novo triângulo eqüilátero.

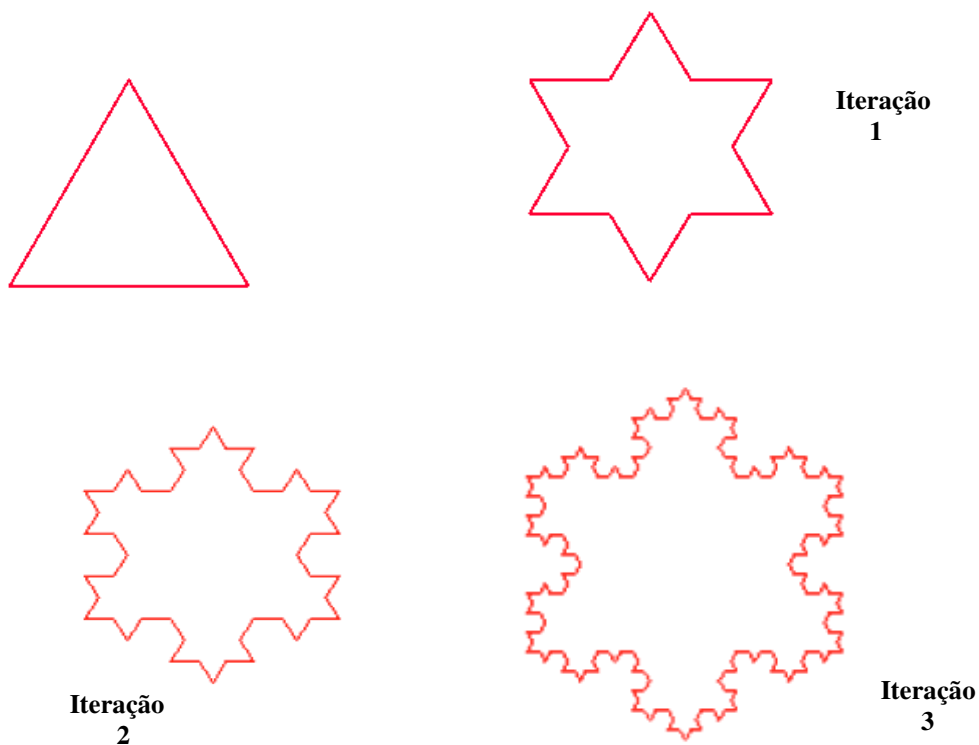


Figura 32 – Ilha de Koch

Nesta parte discutimos quais os conteúdos que poderiam ser abordados em sala de aula:

- Divisão de segmentos em partes iguais.
- Construção do triângulo eqüilátero por meio de régua e compasso
- Manuseio do transferidor, medindo os graus.

- Perímetro da figura e comparação entre os perímetros das figuras novas que surgiam.
- Área da figura e comparação entre as áreas das figuras novas que surgiam.
- Frações
- Potenciação
- Logaritmo

Estes tópicos foram levantados pelos professores, não sendo necessário abordar todos de uma só vez, o que foi sugerido é que se poderia dar ênfase a um ou dois deles, conforme o assunto previsto para trabalhar em aula. Uma solução possível foi a descrita abaixo:

*lado 1dm*

$$P = 3L$$

$$S = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} = 0,4330 \rightarrow \text{Nível } 0$$

$$P = 3L$$

$$L = \frac{1}{3} \cdot 4 \text{ (segmentos novos)} \rightarrow 3 \cdot 4^1 \text{ iteração } 1$$

$$P = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ dm}$$

$$A = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3}}{4} = 0,1441$$

$$\text{Cada segmento } \frac{1}{9} \quad \text{Iteração } 2$$

$$3 \cdot 4^2 = 48 \text{ lados}$$

Então podemos calcular a dimensão da Ilha de Koch. Dimensão fractal de um objeto é a medida de seu grau de irregularidade, considerado em todas as suas escalas, podendo assumir uma dimensão maior que a dimensão geométrica clássica do objeto.

O desenvolvimento dessa atividade, no início do encontro, teve como objetivo verificar se os assuntos discutidos no outro momento ainda estavam na memória e uma forma de fazer esta retomada foi desenvolvendo uma atividade em que resgatamos o conceito de iteração, auto-similaridade e de fractais. Uma nova construção, uma nova oportunidade para desenvolvimento em sala de aula.

Observamos que os professores participaram desta “revisão”, dando palpites e muito mais à vontade para falar do assunto.

Também para a realização desta atividade não estipulamos tempo, pois continuávamos com o objetivo da descoberta a cada atividade realizada.

### **6.5.2 Atividade 2 – Cartão Fractal**

Na segunda atividade do dia, saímos um pouco do trabalho com régua e compasso e passamos para a realização de uma atividade em que pudessem vislumbrar a habilidade manual.

A escolha dessa atividade deu-se porque, no encontro anterior, alguns professores solicitaram propostas para desenvolvimento de exposição de trabalho na escola, assim, atendemos às expectativas, passamos a construir o Cartão Fractal.

Primeiro mostramos dois modelos de cartões prontos, e os professores se mostraram muito interessados. A sugestão dada por nós foi a de confeccionar cartões para uma possível exposição, dar de lembranças e desta forma os alunos poderiam visualizar melhor o que haviam feito no papel até o momento.

Distribuímos aos professores folhas de sulfite, tesoura, régua e lápis e os professores foram sendo orientados quanto aos passos que deveriam seguir com

o apoio dos slides, no qual poderiam visualizar para melhor acompanhar as passagens.

No início, alguns professores sentiram dificuldade em acompanhar, então a pesquisadora foi atendendo individualmente cada caso.

Nos primeiros passos, não sentiram muita dificuldade, o grande obstáculo foi no final das dobras e recortes, em que se diminui gradativamente a área a ser recortada.

Após terem conseguido realizar todos os passos, as surpresas aconteceram ao desdobrarem e verificarem que ali surgia um fractal feito por dobradura.

Entregamos aos professores folhas coloridas para fazerem o acabamento no cartão e, neste momento, percebemos que houve uma integração com o grupo, não tivemos nenhum caso em que não foi concluída esta atividade.

Verificamos que uma atividade diferenciada também pode ocasionar um momento de descontração e aprendizagem de forma divertida, aplicando os conceitos trabalhados anteriormente.

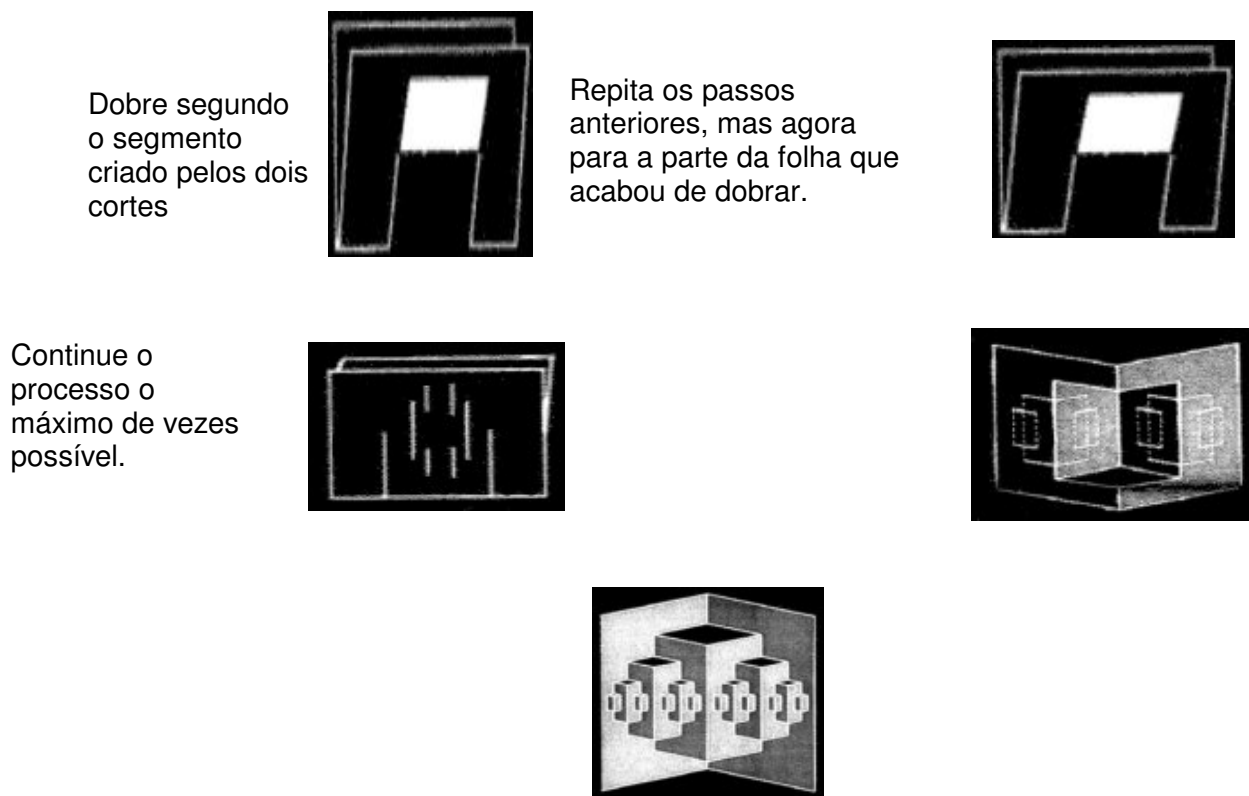


Figura 33 – Cartão Fractal - construção

Após essa atividade, introduzimos a Teoria do Caos, pois não poderíamos deixar de citá-la, uma vez que está intimamente ligada à Teoria dos Fractais.

### 6.5.3 – Teoria do Caos

A Teoria do Caos vem no seguimento da busca de um padrão em todo o comportamento irregular.

A palavra caos é formada a partir de um grafo, de origem indo-européia, cujo sentido poderia ser o de abismo, de precipício e falta de organização.

O Caos é um estado muito complexo, caracterizado pela aparente imprevisibilidade de comportamento e por grande sensibilidade a pequenas

mudanças nas variações do sistema ou nas condições iniciais. O mundo segue a tendência de se tornar mais e mais caótico.

A teoria do caos abriu caminho para que se percebessem padrões em eventos desprovidos de padrões, tais como o trânsito de uma grande cidade, as variações da bolsa de valores, ou fenômenos meteorológicos, pois são excessivamente dependentes das condições iniciais, gerando o chamado efeito borboleta.

Nessa parte, também fizemos uso das transparências para que os professores pudessem acompanhar a nossa explanação.

Citamos Edward Lorenz, que trabalhava como meteorologista. Ele tinha a seu dispor um computador, um Royal Mc Bee, que realizava 60 multiplicações por segundo, e foi com esta máquina, que em 1960, Lorenz conseguiu fazer simulações das condições climáticas: havia criado modelos computacionais dos padrões do tempo atmosférico. Ele utilizava doze equações. Os gráficos impressos mostraram oscilações do tempo e seu atrator.

#### **6.5.4 Atividade 3 - Jogo do Caos**

Para melhor entenderem o conceito de Caos, aplicamos o Jogo do Caos, mais uma atividade prevista, que poderia ser aplicada em sala de aula, para experimentar a teoria do Caos.

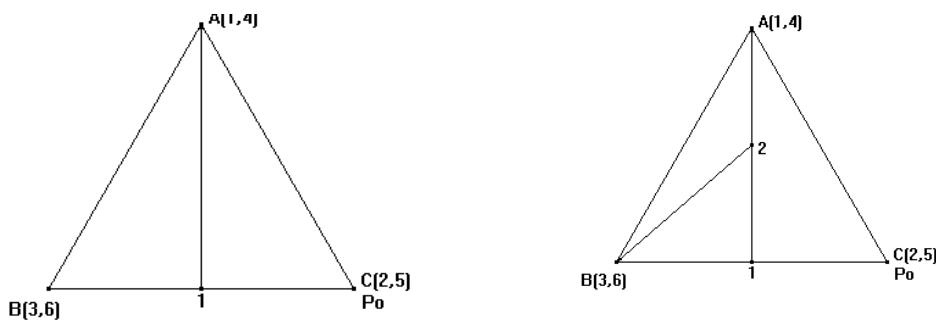
Entregamos aos professores uma folha de sulfite, régua, lápis e um dado. Solicitamos que desenhassem na folha de sulfite um triângulo equilátero grande ABC, nomeando os respectivos vértices. Para cada vértice, formar um par ordenado de 1 a 6 sem repetir os números.

Solicitamos que marcassem um ponto  $P_0$  em qualquer lugar, exceto no centro, por exemplo; poderiam marcar num dos vértices do triângulo.

Esta parte os professores foram acompanhando pelas transparências, informamos que estávamos apenas indicando como criar o ambiente do jogo. Ao verificarmos que todos já estavam nas condições acima, iniciamos o jogo, contando sobre as regras.

Solicitamos aos professores que jogassem o dado e, ao observarem o número obtido, levarem um vetor do ponto  $P_0$  até o vértice em que se encontrava o número observado. Marcar  $P_1$  no ponto médio do segmento de reta com extremidade em  $P_0$  e outro extremo no vértice do triângulo, correspondente ao número sorteado.

Nesse momento houve uma confusão, pois os professores não conseguiram acompanhar as instruções, e a pesquisadora informou que como todos falavam ao mesmo tempo, estava instalado naquele momento o caos! Para melhor compreensão, fomos à lousa e explicamos novamente exemplificando o primeiro passo. Após o entendimento, informamos que deveriam jogar o dado respectivamente (por exemplo 8,9 ou 10 vezes), marcando sucessivamente  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5, \dots$ ,  $P_{10}$ , conforme as figuras abaixo.



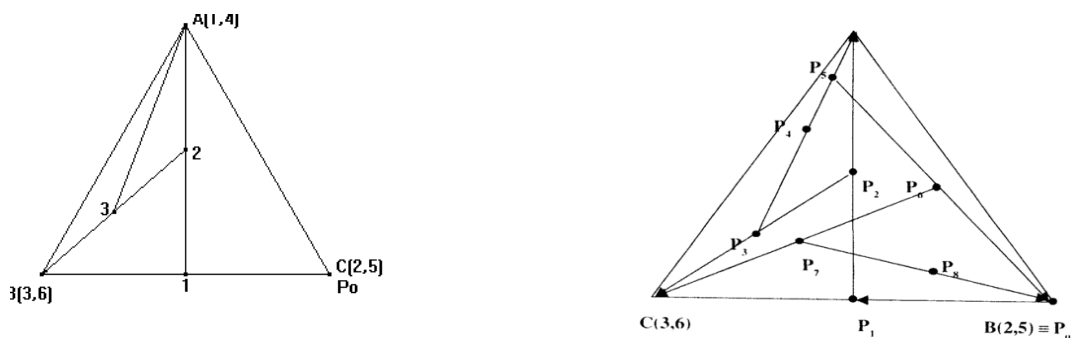


Figura 34 – Jogo do Caos

Os professores iniciaram o jogo entre eles, pois informamos que poderiam ser desenvolvidos em duplas, grupos ou ainda fazermos um triângulo maior para a sala toda.

Após um certo número de vezes que jogaram os dados, fazendo os passos acima citados, perguntamos aos professores o que observavam na figura. Não conseguiram fazer nenhuma observação sobre o que havia ocorrido, então começamos a fazer perguntas para tentarem identificar o que estava acontecendo.

O lançamento do dado é o que fundamentalmente sorteava o vértice e quando uníamos o ponto em que estávamos ao vértice sorteado, este era o atrator. Observaremos que os pontos foram dispostos internamente ao triângulo em uma grande desordem, e, diferentemente, nos desenhos de cada um deles. Estávamos frente a uma disposição aleatória, que gerou a desordem dos pontos.

Observando atentamente e se ligarmos os pontos médios dos lados do triângulo inicial, verificaremos que nenhum ponto fica dentro de nenhum triângulo obtido após a ligação dos pontos médios, este também pode ser um processo para a criação do Triângulo de Sierpinski.

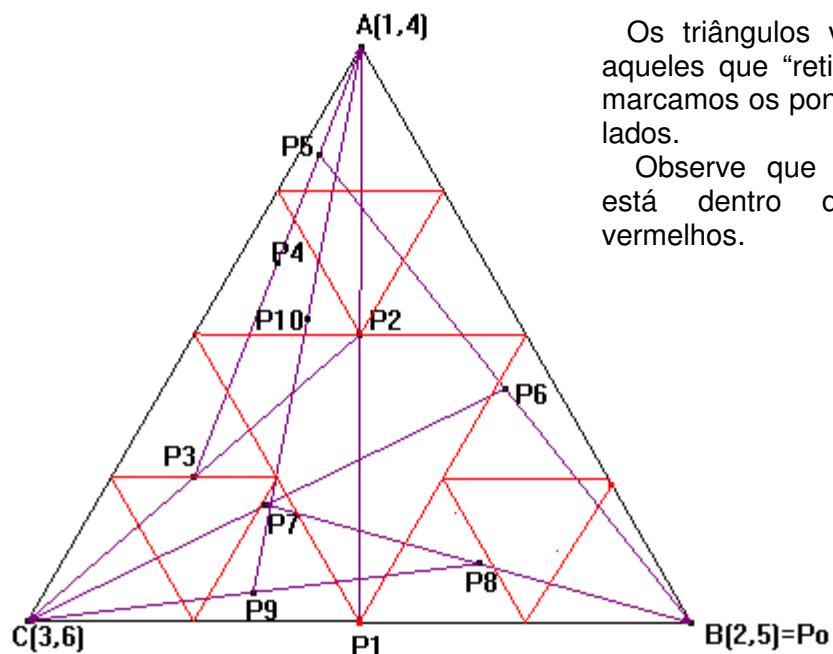


Figura 35 – Jogo do Caos - resultado

Os triângulos vermelhos, são aqueles que “retiramos” quando marcamos os pontos médios dos lados.

Observe que nenhum ponto está dentro dos triângulos vermelhos.

Após essa conclusão, os professores se mostraram admirados com o resultado, pois não esperavam esta descoberta, alguns ainda insistiram em jogar mais vezes o dado para se convencer sobre a região em que os pontos não caíam, e de fato comprovaram que toda região em que não havia pontos formam o triângulo central “retirado” na Atividade 2 do 1º Encontro.

Encerrando as atividades propostas, apenas mostramos alguns exemplos de aplicações sobre o uso dos fractais, mostramos, nas transparências, algumas figuras que poderiam ser obtidas, por meio do recurso de iteração e citamos exemplos, na ciência, na arte e no dia-a-dia.

## **6.6 Das atividades e questionário: uma análise**

Ao finalizar as atividades, aplicamos novamente o questionário do 1º Encontro, solicitando aos professores fizessem um comentário sobre o que foi exposto nesses dois encontros, como uma forma de avaliar o curso; dando sugestões para que futuramente possamos melhorar nosso trabalho.

### **6.6.1 Análise do questionário final**

Ao finalizar as atividades, aplicamos novamente o Questionário 2 no mesmo dia do término do curso, e, para que pudessem ter um tempo para reorganizar as idéias, fizemos um intervalo e a ATP Valéria fez um fechamento sobre o trabalho realizado durante o ano com este grupo, através de uma retrospectiva de todos os acontecimentos, uma vez que este seria o último encontro do ano letivo de 2005.

Após a avaliação do trabalho feito durante o ano, solicitamos aos professores o preenchimento do questionário. Abaixo, selecionamos alguns registros para comparar com o que foi feito no questionário anterior. Nossa expectativa era quanto à viabilidade de desenvolver este conteúdo em sala de aula após terem realizado todas as atividades propostas.

Após a realização das atividades, era de se esperar que os professores já fossem capazes de falar sobre o assunto com uma certa desenvoltura, e foi exatamente que percebemos na análise desta primeira questão, quanto a formulação da idéia sobre os fractais:

*“Uma figura plana pode ser fragmentada em outras figuras semelhantes a ela obedecendo-se uma certa ordem, até obtermos figuras (no total) completamente diferentes como um todo, mas idênticas em cada bifurcação e podemos fazer isto infinitamente”. (P49)*

*“Geometria onde se revela as figuras até antes tidas como monstros geométricos, onde encontramos figuras fragmentadas em várias dimensões”. (P51)*

*“Fractais são partes de um corpo que são semelhantes a estes.” (P67)*

Podemos notar que as definições são muito diversas, mas tem como foco central a questão da fragmentação através de um procedimento que se repete indefinidamente, o que caracteriza que conseguiram assimilar a questão principal do conceito de fractais, a fragmentação e a auto-semelhança.

Notamos ainda que algumas respostas poderiam ser melhoradas, com uma explicação mais detalhada, pois alguns professores não conseguiram se expressar adequadamente ao falar do assunto, mas podemos perceber um grande progresso ao desmistificar o assunto, dando oportunidade para que o professor possa fazer mais uma escolha na sua atividade docente.

*“Fractais é quebrar uma figura em várias outras iguais, mas de dimensões diferentes ou seja é a geometria diferente da geometria Euclidiana que conhecemos”. (P37)*

*“Fractais é a fragmentação parte de uma figura geométrica, seguindo uma regra pré-estabelecida. Ex.: divisão dos lados de um polígono em partes iguais e a formação de figuras semelhantes.” (P44)*

*“A idéia de fractais é sair de um padrão e ir realizando a sua iteração, levando em consideração uma geometria sem regularidade (perfeição)”. (P55)*

Na questão seguinte, analisamos como foram as respostas da relação da matemática da escola com a história de vida do professor.

Não achamos necessário registrar novamente todas as respostas desta questão, pois comparando com as respostas dadas no mesmo questionário anterior não divergiram muito, ou seja, 55,71% dos professores mantiveram suas respostas sem quase nenhuma alteração, mudando apenas o jeito de escrever, mas dando o mesmo sentido.

Por outro lado, tivemos outras respostas que se distinguiram muito das primeiras, e a reflexão sobre a aprendizagem e as representações que tinham sobre a matemática foram alteradas, movidas pela experiência que o indivíduo acumula. Estes registros foram descritos no anexo XII para melhor comparação com as respostas anteriores, encontramos respostas como:

*“A matemática tem tudo a ver com a minha história de vida, tento sempre que possível convencer que sem matemática não se vive, mesmo que determinados conceitos, num primeiro momento possam não ter sentido para o aluno “.(P3)*

*“Nos tempos escolares tudo era informado sem saber o que se pretendia, hoje tentamos informar para o que não foi informado em nosso tempo. Temos sim a responsabilidade de fazer o melhor e preparar nossos alunos”. (P39)*

Comparando-se estes depoimentos com os primeiros, é possível observar uma significativa mudança na postura do professor, que após ter experimentado outros caminhos para a sala de aula já consegue melhorar a relação de sua vida, como por exemplo P47 , ao responder que a relação da matemática com sua vida era de *“Sobrevivência e novos conhecimentos”*. Este professor ao responder a primeira vez informou que não tinha nenhuma relação com a sua história de vida e após estes encontros já possui uma nova visão dos rumos da matemática.

Nestes depoimentos caracterizaram uma agregação dos conhecimentos já apreendidos e os novos.

Na questão 3, sobre a necessidade de inserir novos rumos para o ensino da matemática, não houve muita mudança em relação às respostas anteriores, 58,57% dos professores permaneceram com a idéia de que inserir novos rumos para o ensino da matemática é necessário.

Outros professores também concordavam sobre a mudança de rumos para o ensino da matemática, mas ao responderem o seu parecer sobre o assunto mudou, como registramos abaixo:

*“Sim, oferecer oportunidade para o aluno conhecer novas idéias, não se prender a conteúdos do livros, perceber a beleza que há na matemática”. (P17)*

*“Sim, estas oficinas são a prova de como se pode fazer a matemática de forma agradável e criativa”. (P20)*

*“Sim. Temos que trazer vários assuntos que sejam esclarecedores e não somente conteúdos. Temos que ter a humildade de sempre estarmos dispostos ao aprendizado e ouvir nossos alunos para sanarmos dificuldades que ora passaram vários professores que às vezes nem se deram conta que são extremamente importantes para a formação do cidadão e não apenas conteudista”. (P39)*

Observamos que nesta terceira questão as opiniões basicamente continuaram as mesmas. Observamos que o P17, em relação ao primeiro questionário, mudou sua visão quanto aos novos rumos da matemática e outros professores já explicitaram a mudança na sala de aula, procurando novos caminhos ou adequações para o ensino da matemática. No anexo XII registramos

apenas as respostas que se diferenciaram em relação ao primeiro questionário.

Investigamos novamente, sobre a atuação do professor e os padrões adotados durante a sua formação, nesta questão cerca de 74,28% dos professores se mantiveram fiéis às respostas dadas no primeiro momento da aplicação do questionário, na qual todos concordam que os padrões da sua formação não devem ser seguidos. O P18 deixou esta questão em branco.

Outros professores mudaram radicalmente sua visão, como registramos abaixo:

*“Sim, mas podemos aprender outras experiências, porque quanto mais conhecimento melhor será nossa atuação como professor”. (P26)*

*“Devo seguir os padrões sim, e também fazer com que a matemática seja algo gostoso de se aprender”. (P58)*

*“Não, pois o que aprendemos é só uma base e desta base criar algo que faça a aula ficar mais legal e interessante”. (P73)*

Observamos que, nos depoimentos acima, se comparados aos primeiros, estes professores mudaram sua posição, talvez pela experiência pela qual passaram tenham feito uma reflexão sobre as possibilidades que se tem usando os padrões propostos durante sua formação com uma adequação para o momento da realidade escolar.

Sobre a questão dos obstáculos percebidos pelos professores, no ensino da matemática para abordar adequadamente assuntos ainda não inseridos nos currículos, 61,42% dos professores apontaram os mesmos obstáculos já citados no primeiro questionário. Os professores P18, P29, P51 e P72 deixaram esta questão em branco.

Os outros professores mudaram de opinião quanto aos obstáculos após estes dois encontros.

*“Sim, mas o obstáculo é nosso, falta de preparo para lidar com certos assuntos que fogem do currículo”. (P43)*

*“Não na rede pública, visto que ela permite interpretar e atuar de acordo com os PCN's. O tema fractais é um bom assunto para complementar o ensino de geometria, progressão geométrica, logaritmo probabilidade, etc.”. (P68)*

Nesses registros, verificamos que o P21, respondeu apenas não, enquanto que no primeiro questionário apontou a falta de interesse dos alunos.

Já o P28, quando respondeu *“Sim. Falta de interesse, às vezes pelos alunos, às vezes pela direção e corpo docente”*, no primeiro momento não apontou nenhum obstáculo, mudando de opinião após passar pelas atividades.

Comparando essas respostas, percebemos que a visão de alguns professores em relação aos obstáculos foi modificada, ora apontando obstáculos que até então não haviam percebido e ora deixando de apontar os problemas anteriormente mencionados.

### **6.6.2 Parecer Do Grupo**

Ao finalizar as atividades, solicitamos aos professores que deixassem no verso da folha do questionário, sugestões, críticas, um parecer sobre o mini-curso, enfatizando que as opiniões deles, naquele momento seriam muito importantes, para avaliarmos nosso trabalho e darmos um encaminhamento para a pesquisa.

Este foi o caminho que encontramos para analisarmos o impacto das atividades desenvolvidas pelo grupo.

Neste caso deixamos abaixo a transcrição do parecer de alguns professores sobre a proposta de trabalho, visto que alguns não deixaram nada registrado e uma outra minoria, apenas se limitou a deixar registrado um “Muito Obrigado(a)”; assim optamos por transcrever os registros que foram mais explícitos quanto à avaliação do mini-curso.

*“Gostei muito do curso, oferecido, pois apesar de pouco tempo, foi muito bem especificado e colocado de maneira clara. Além disso o assunto abordado foi muito interessante. Muito obrigada!” (P1)*

*“Estes dois últimos encontros, foram os mais proveitosos para mim. Uma vez que posso aplicar diretamente o assunto na sala de aula. Tive conhecimento sobre fractais e posso falar com mais segurança do assunto, pois havia ouvido falar de forma bastante superficial” (P3)*

*“O curso foi interessante, pois não conhecia sobre fractais e adquiri novos conhecimentos sempre nos faz crescer. Pretendo aplicar as atividades em sala de aula e despertar o interesse dos alunos.” (P7)*

*“Gostei muito de saber sobre fractais, foi muito proveitoso e interessante. As aulas forma dinâmicas e é assim deveriam ser com nossos alunos.Boa sorte em seu Mestrado.”(P12)*

*“Gostei muito do seu trabalho, de sua pesquisa, pois como mencionei na frente, não tinha idéia de que poderia aplicar esta teoria para E.F. Acredito ser uma parte muito interessante da matemática e bom que uma maior parte de nossos estudantes possa conhecer. Bom trabalho e boa sorte na conclusão da sua tese.” (P25)*

*“Foi muito bom o curso, pois aprendemos várias maneiras de ensinar matemática, assunto que até então nunca ouvi falar e sai aprendendo alguma coisa dos fractais. O desempenho da professora foi excelente, pois espero que continue este trabalho, pois apesar do pouco tempo nos ajudou bastante.” (P26)*

*“Gostei muito desta oportunidade de participar deste breve ensino sobre os fractais, pois, apesar de ser um assunto que já vem sendo estudado por muitos já algum tempo, para mim ainda é uma novidade. Gostei de como nos foi passado, abordado o assunto e principalmente da postura da facilitadora. Fico grata à Diretoria de Ensino Sul 1 e à você Arlete.” (P31)*

*“Para mim foi importante entrar em contato com novas formas e ações de trabalho, mas acredito que teremos certa dificuldade nas aplicações em determinadas salas de aula.” (P41)*

*“Gostei muito dos nossos encontros, como disse anteriormente não tinha idéia do que se tratava os fractais, e hoje além de conhecer tenho capacidade de usar em sala de aula com meus alunos, gostaria de me aprofundar no assunto.” (P43)*

*“Gostei muito do seu curso, acrescentou muito no que eu já sabia. Espero ter novas oportunidades. Você fez algo despertar em mim. (P45)*

*“Ache muito bom, as duas capacitações, porque foi mostrado um assunto que eu não conhecia, que posso trabalhar com os alunos, uma vez que não será necessário material especial.” (P48)*

*“Obrigado pelo carinho e pela aprendizagem, pois não tinha muito conhecimento sobre fractais, agora já tenho incentivo para buscar mais conhecimento a respeito dessa nova geometria”. (P51)*

*“No começo fiquei assustada com a oficina, pois não tinha conhecimento do assunto e como sempre o novo causa angústia. Mas no decorrer das atividades fui percebendo que não era nada assustador e que o assunto não era tão novo assim, alguma coisa eu já tinha ouvido falar. Desta forma participei ativamente das atividades e posso garantir que o curso foi muito produtivo. As atividades de construção são essenciais pois os alunos constroem o conhecimento de forma prazerosa. Espero que tenhamos a oportunidade de realizarmos mais vezes estas trocas de conhecimentos”. (P55)*

*“Adorei os encontros, aprendi muito e pretendo levar isso adiante com os alunos e colegas professores.” (P60)*

*“Sugestão: Teoria do Caos no começo da aula, por ser “menos” interessante e “mais” cansativo” (sendo exagerada). Muito Obrigada, pelo carinho e atenção”. (P62)*

*“Pena que acabou, pois sinto que ficou ainda muita coisa para nos ensinar, mas mesmo assim agradeço, pois é desse tipo de capacitação que precisamos, aulas diferentes. Agradeço também à Valéria por ter atendido os nossos pedidos”. (P74)*

*“Parabéns pela sua iniciativa em estar buscando novos conhecimentos, e obrigada por nos dar a oportunidade em poder participar um pouco desse processo com você!!”. (P76)*

Pelos depoimentos acima, podemos perceber que a busca de novos conhecimentos ainda é uma prática do professor, por vezes adormecida, mas que precisa ser despertada para tornar o ensino de matemática mais vivo e cativante para o aluno.

## CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

---

*"O alimento essencial não vem das coisas, e sim dos nós*

*que atá as coisas".*

*Antoine de Saint -Exupéry*

De forma geral percebemos que após estes dois encontros algumas mudanças aconteceram quanto ao repensar o ensino da matemática, estes encontros proporcionaram aos professores uma alternativa tanto para aplicação em sala de aula quanto para encaminharem um estudo das possibilidades que ele pode levar para ela.

As atividades propostas tiveram um desenvolvimento positivo, pois a nossa convicção de trabalhar com materiais disponíveis nas escolas deu uma oportunidade para o professor refletir sobre se, de fato, ele tem tantos obstáculos na escola. Cabe aqui a adaptação, a criação e o empenho para que a aplicação de novos caminhos possa ser inserida no contexto escolar.

Com certeza, essa discussão não encontra neste trabalho seu ponto final, mas é apenas um início de oportunizar momentos para que os professores possam se habituar a refletir no processo de ensino da matemática. Foi importante perceberem que sua formação, se deu por meio de aplicação de fórmulas sem clareza a respeito da finalidade daquele estudo, para que possam estar sempre em busca de caminhos para a melhoria da qualidade do ensino, ou seja por meio de encontros que venham a interagir com a sua reflexão e sua prática, por meio de metodologias que possam ser modelos de experiências e posteriormente serem transformadas para a aplicação em sala de aula; seja pela busca pessoal ou coletiva de soluções.

Ao finalizar esta pesquisa, foi possível perceber que encontros de curta duração atingem as expectativas dos professores, por ser momentos em que a troca de experiência tem seu início e fim com o mesmo grupo, assim o caminho para realizar a formação de professores é proporcionar-lhes momentos que possam experimentar, refletir e opinar sobre os trabalhos que estão sendo executados, pois devemos levar em consideração o trabalho realizado em sala de aula, mas também devemos estar atentos ao que acontece ao nosso redor, principalmente ao redor do aluno, que é o nosso foco na aprendizagem.

Ainda percebemos que o procedimento que utilizamos para dar encaminhamento ao curso foi adequado para a formalização do conceito, mesmo que, em alguns casos, isso não tenha se dado de maneira formal, mas o objetivo de conceituação foi atingido.

Ainda assim, não podemos esquecer de que o estudo dos fractais está ligado à informática, ou seja, o uso do computador é necessário para se desenvolver conceitos e introduzir os fractais. Mesmo tendo consciência de que nem todos têm acesso ao computador, é válido lembrar que isso é uma realidade próxima, pois de qualquer forma estamos vivendo em um mundo onde as informações acontecem em frações de segundo e as pessoas deverão estar em sintonia com essa realidade que muda a cada instante. Portanto, este momento pode ficar para um próximo encontro.

A Geometria Fractal ainda tem um longo caminho para que esteja entre a prática dos docentes. Inclui-se neste longo caminho, a ruptura de paradigmas, a maturidade para se aplicar novas atividades que contemplem os fractais, e, ainda, as aceitações dos docentes, afinal, são anos trabalhados, tomando como

referência a geometria euclidiana e não é nada simples mudar os conceitos prática do ensino de matemática.

Percebemos que sua aplicação adequada para cada faixa etária, só poderá trazer benefícios ao ensino da geometria, pois as duas podem se complementar, ampliando a visão dos matemáticos e dos que dela se utilizam.

Ao examinar cada fragmento dessa nova ciência, é possível verificar que é de tal complexidade, que se torna até desafiador e encantador, pois nela, a matemática está presente numa harmonia com várias áreas, auxiliando novas descobertas e até uma compreensão de alguns fenômenos da natureza.

Assim como as outras ciências, a matemática também está passando por um processo de evolução e, cada vez, mais se baseia em informações concretas que podem ser analisadas e confirmadas.

Cabe ressaltar a receptividade dos professores em relação ao curso. A participação foi totalmente satisfatória, desmistificando a questão do professor ser resistente às novas práticas. O que foi possível perceber, que eles também estão em busca de novos rumos para a sala de aula, mas os cursos de que têm participado nestas oficinas, não oferecem a prática para que o professor possa analisar, refletir e aplicar.

Confirmamos a hipótese de que encontros como esses, podem iniciar a conscientização e o encorajamento para arriscar, na sala de aula, uma atividade ou outra. A necessidade de se ter exemplo de como se faz está cada vez mais acentuada, pois como os nossos jovens já não são mais os mesmos, devemos buscar alternativas para envolvê-los nesse processo, que, cada vez, mais está prolongando o processo de via dupla: ensino aprendizagem.

Ainda, nestas considerações não poderíamos deixar de citar que o clima que se instalou durante a pesquisa foi muito calmo e descontraído, proporcionando momentos de grande satisfação para a pesquisadora. A atenção e o carinho são sentimentos que estiveram presentes neste processo de ensinar e aprender, trocando conhecimentos com outras pessoas, relembramo-nos da postura que devemos ter ao abordar qualquer assunto: carinho, paciência e dedicação.

## BIBLIOGRAFIA

---

ALARCÃO, Isabel (org). **Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1996.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal - Para a Sala de Aula**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2002.

BERGÉ, Pierre et al. **Dos Ritmos ao Caos**. Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1996 (1ª ed., 1994).

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRUNO, Eliane Bambini Gorgueira et al. **O coordenador pedagógico e a formação docente**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

BUNDE, Armin et al. **Fractals in Science**. 2ª ed., Germany: Springer-Verlag, 1995.

CARVALHO, Maria Cecília Costa e Silva et al. **Fractais, Uma Breve Introdução**, [sl:se:sd].

CHEVALLARD, Yves et al. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática**. 4ª ed. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. Universidade Estadual de Campinas, 1998 (1ª ed.1986).

\_\_\_\_\_. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 4ª ed., Campinas, SP: Papyrus, 1998. (1ª ed. 1996)

\_\_\_\_\_. **A era da consciência: aula inaugural do primeiro curso de pós-graduação em ciências e valores humanos no Brasil**. 3ª ed., São Paulo: Editora Fundação Peirópolis, 1997.

DEVLIN, Keith J. **O Gene da Matemática**. Trad. Sérgio Moraes Rego. 2ª ed., Rio de Janeiro, Record, 2004.

ECO, Umberto. **Como se faz uma tese**. 18ª ed., São Paulo, 2003.

EVES, Howard – **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 6ª ed., Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. (1ª ed.1964).

FERRAÇO, Carlos Eduardo (org). **Cotidiano escolar, formação de professores(as) e currículo**. São Paulo: Editora Cortez, 2005.

FIORENTINI, Dario (org). **Formação de Professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes (orgs). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**. Campinas, SP : Musa Editora, 2005.

FIORENTINI, Dario, LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**. Campinas, SP: autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).

FLICK, Uwe. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. Trad. Sandra Netz. 2ª ed., Porto Alegre: Bookman, 2005.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Situações Didáticas, Educação Matemática - Uma introdução**, Série Trilhas, Editora da PUC-SP.

GARCIA, Carlos Marcelo Garcia. **Formação de Professores-Para uma mudança educativa**. Porto Editora; Portugal, 1999.

GIESTA, Nágila Caporlândia. **Cotidiano Escolar e Formação Reflexiva do Professor: moda ou valorização do saber docente?** 2ª ed., Araraquara: Junqueira & Marin Editores, 2005, 224p.

MANDELBROT, Benoît. **Objectos Fractais, forma, acaso e dimensão**. Trad. Carlos Fiolhais e José Luis Malaquias Lima. 2ª ed., Lisboa: Gradiva, 1998. ( 1ª ed. 1975, tradução a partir da 3ª ed. Francesa, 1989).

MARTINS, Berlane Silva. **Etnomatemática: possibilidades num contexto de formação de professores**. 2003. 254f. Tese (mestrado em Educação) – Univesidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo.

MEC - MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (199). *Parâmetros Curriculares Nacionais: 5ª a 8ª séries - Matemática*. Brasília, SC.

MEC - Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (199). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Matemática*. Brasília – SC.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço**. Trad. Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2005.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito**. Trad. Maria Luiza X. A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. (1ª ed. 1997).

NETO, Alexandre Shigunov; MACIEL, Lizete Shizue Bomura (orgs). **Desatando os nós da formação docente**. Porto Alegre: Mediação, 2002.

PERRENOUD, Philippe. **Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: perspectivas sociológicas**. Lisboa: Dom Quixote, 1993.

PRIGOGINE, Ilya. **As Leis do Caos**. Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora UNESP, 2002. (1ª ed. 1993).

REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. São Paulo: Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003. 79p.

RUELLE, David. **Acaso e Caos**. Trad. Roberto Leal Ferreira. 2ª ed., São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993. ( 1ª ed.1991).

STEWART, Ian. **Será que Deus Joga Dados? A Nova Matemática do Caos**. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.,1991.

WEGNER, Tim et al. **Fractais Para Windows – Exploração Prática do Mundo dos Fractais**. Trad: Claudio José da Costa. Rio de Janeiro: Berkeley,1993.

## **ARTIGOS**

DEBNATH, Lokenath. “A brief historical introduction to fractals and fractal geometry”. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, vol. 37, nº 1, 2006, 29-50.

GRILLO, Marlene. **Transposição Didática: uma prática reflexiva**. PUC.[s.d]

MONTEIRO, Ana Maria Ferreira Da Costa. Professores: Entre Saberes E Práticas. **Educação & Sociedade**, ano XXII, nº 74, Abril, 2001.

OLIVEIRA, Lúcia Helena de. Fractais- A matemática do delírio. **Superinteressante**, 1994, pp. 23-27.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Caos Nas Asas de uma Borboleta. **Extensão**, 2000, pp.37-44.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Fractais: Matemática e Magia. **Extensão**, 2000, pp.27-36.

ZUIN, Romanelli Lodron. O Que é Dimensão Fractal. **Extensão**, 2000, pp.63-70.

**INTERNET**

<http://www.ib.unicamp.br/profs/vidal/>

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/galeria.htm>

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/>

<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/imagfrac.html>

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/principal.htm>

<http://www.math.ist.utl.pt/%7Eesramos/apm98b.html>

## **ANEXOS**

---

## **ANEXO I**

### **Revista Prandiano**

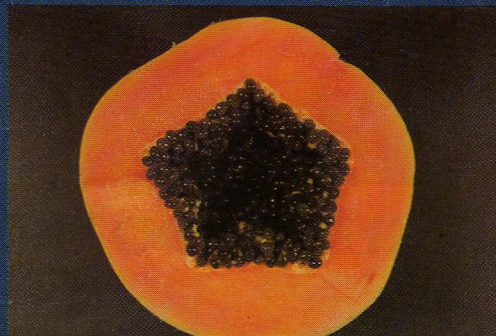
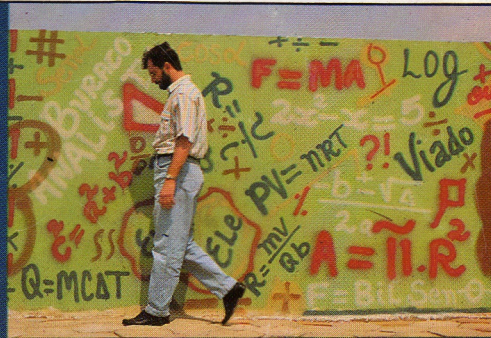
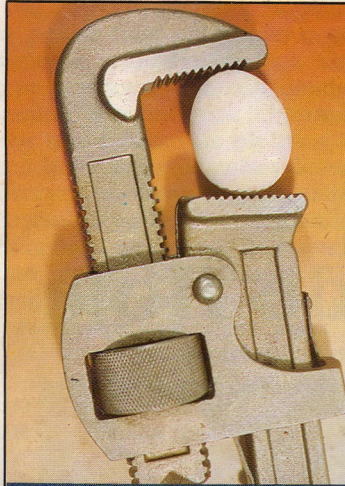
---

---

PRANDIANO

# MATEMÁTICA APLICADA À VIDA

Número 5/2



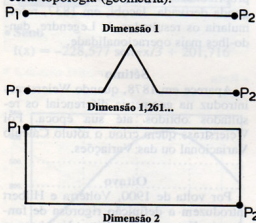
## Dimensão Fracionária?

### 1. Introdução

Quando estudamos os fractais é comum aparecer dimensões 0,6309..., 1,2618..., 2,7268... etc. Aparentemente estes números não significam nada aos acostumados à dimensão 1 (unidimensional), 2 (bidimensional) ou 3 (tridimensional). Pois bem, é exatamente este conceito - dimensão fracionária - que devemos entender para dominar a geometria fractal.

### 2. Dimensão Fracionária

A noção de dimensão está grosseiramente associada à de grau de liberdade: possibilidade de deslocamento entre dois pontos fixos  $P_1$  e  $P_2$  pertencentes a uma certa topologia (geometria).



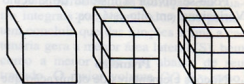
Para entender estes números considere:

$D$  = Dimensão  
 $N$  = Número de elementos (fractais) que formam a geometria em estudo.  
 $E$  = Escala: Representa o comprimento do segmento de reta que formará a nova geometria.  
 A expressão matemática da dimensão fracionária é deduzida como se segue:

$D = 1$ $N = 1$ $E = 1$ $1(1)^1 = 1$	$D = 1$ $N = 2$ $E = 1/2$ $2(1/2)^1 = 1$	$D = 1$ $N = 3$ $E = 1/3$ $3(1/3)^1 = 1$
-----------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------



$D = 2$ $N = 1$ $E = 1$ $1(1)^2 = 1$	$D = 2$ $N = 4$ $E = 1/2$ $4(1/2)^2 = 1$	$D = 2$ $N = 9$ $E = 1/3$ $9(1/3)^2 = 1$
-----------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------



$D = 3$ $N = 1$ $E = 1$ $1(1)^3 = 1$	$D = 3$ $N = 8$ $E = 1/2$ $8(1/2)^3 = 1$	$D = 3$ $N = 27$ $E = 1/3$ $27(1/3)^3 = 1$
-----------------------------------------------	---------------------------------------------------	-----------------------------------------------------

Portanto, tem-se:

$$N(E)^D = 1$$

Para isolar a dimensão  $D$ , aplicamos logaritmo aos dois lados da identidade acima.

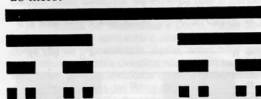
$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{E}}$$

### 3. Exemplos

Em um segmento de reta pode-se aplicar algumas propriedades que conduzem aos fractais.

#### • Poeira de Cantor ( $N = 2, E = 1/3$ )

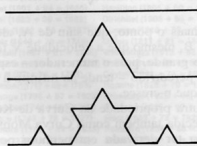
Dividir sucessivamente os segmentos de reta em três partes e não considerar o do meio.



$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309...$$

#### • Curva de Koch ( $N = 4, E = 1/3$ )

Dividir sucessivamente os segmentos de reta em três partes. Gire o do meio de  $60^\circ$  e ligue-o ao da direita com um outro segmento de reta de mesmo comprimento.



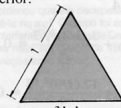
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618...$$

Note que tanto a Poeira de Cantor como a Curva de Koch não estão terminadas: continuam a ser construídas indefinidamente.

#### 4. Curiosidade

Podemos ter um perímetro finito e área finita?

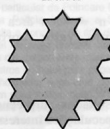
Analisemos o Tapete de Koch que é gerado a partir do triângulo equilátero no qual, em cada um dos lados, se constrói um outro triângulo (equilátero) de lado  $1/3$  do anterior.



3 lados



12 lados



48 lados

O perímetro desta estrutura fractal é dado por:

$$P_0 = 3(1) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^0$$

$$P_1 = 12\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^1$$

$$P_2 = 48\left(\frac{1}{9}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$P_3 = 192\left(\frac{1}{27}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Quando  $n \rightarrow \infty$  o perímetro  $P_n$  também tende a infinito, pois  $4/3 > 1$ .

## **ANEXO II**

### **Proposta de Trabalho para a Diretoria de Ensino Sul 1**

---

## **Proposta de trabalho**

**Tema: A abordagem dos Fractais na formação docente e sua prática em sala de aula**

### **Justificativa:**

No processo de construção e difusão do conhecimento temos como principais atores, os professores. Neste âmbito acreditamos que são os mais indicados para promoverem uma discussão sob o enfoque do ensino dos Fractais, produzindo realmente alguma modificação no contexto da educação matemática.

Dessa forma, para produzirmos os diferentes saberes em sala de aula, nada mais apropriado do que estabelecer uma ponte de ligação entre o professor e a aplicação de novos caminhos, ampliando assim, o ensino da matemática em diferentes contextos que muitas vezes ainda não estão inseridos no cotidiano escolar.

Neste entendimento, acreditamos que o professor deve estar em contato com outros conhecimentos, que não seja somente o que esteve em contato na sua formação. Entendemos ainda que a não apropriação de outros caminhos para o ensino da matemática ainda não faz parte da preocupação do professor, que ainda traz os conceitos de sua formação, que muitas vezes é deficitária, neste contexto, iremos promover uma discussão sobre esse novo olhar para a educação matemática.

### **Objetivo:**

Proporcionar ao professor um momento de reflexão sobre sua prática educativa e a produção dos novos conhecimentos.

Investigar o objeto de estudo na visão de quem está em sala de aula e lançar uma discussão sobre outros enfoques que podemos inserir em nosso cotidiano escolar.

### **Metodologia:**

Dois encontros.

Primeiro momento, a abordagem será de uma apresentação geral, quanto ao enfoque a relevância desse assunto. Contemplaremos, ainda, atividades práticas, para que se possa encaminhar uma visão dos procedimentos possíveis em sala de aula, e melhor aquisição dos conceitos que iremos trabalhar.

Durante toda a exposição, proporcionaremos uma ambiente para que se possa trocar experiências e questionamentos, que na medida do possível tentaremos solucionar.

Segundo momento, será elaborado de acordo com a evolução do primeiro momento, visto que numa pesquisa anterior, foi constatado que a maioria desconhece o assunto. Os rumos serão direcionados pelas necessidades que surgiram no primeiro momento. Porém, com certeza daremos continuidade ao trabalho, visando a prática e a construção dos conceitos.

### **Avaliação:**

Por se tratar de um curso de caráter investigativo, a avaliação não será feita individualmente, mas analisaremos de que maneira os professores podem contribuir para avançarmos na produção de novos conhecimentos em sala de aula.

Cumpridas as etapas do curso, iremos propor a elaboração de um projeto para ser aplicado em sala de aula, este seria o produto que temos a intenção de obter ao final dos encontros.

## **ANEXO III**

### **Questionário 1: Diagnóstico**

---

## QUESTIONÁRIO – PESQUISA

Visando as novas perspectivas para o Ensino da Matemática; contamos com sua colaboração para responder o questionário abaixo, que faz parte de uma pesquisa de Mestrado, desenvolvida pela Prof<sup>a</sup> Arlete ap. Oliveira de Almeida, PUC – SP.

O questionário é instrumento investigativo sobre as atividades relacionadas ao assunto “**Geometria dos fractais**”.

Agradecemos sua atenção.

1. Identificação da Escola: \_\_\_\_\_
2. Identificação do Professor: \_\_\_\_\_
3. E-Mail: \_\_\_\_\_

4. Sexo:

Masculino       Feminino

5. Trabalha:     Escola Pública     Particular

6. Nível:

Ensino fundamental     Ensino Médio     Superior     outros

7. Já ouviu alguma informação sobre o assunto: **Geometria dos fractais**?

Sim       Não

8. Em algum momento já desenvolveu atividades relacionadas a este assunto em sala de aula?

Sim       Não

9. Você gostaria de participar desta pesquisa, contribuindo sobre o seu trabalho ao desenvolver a Geometria dos Fractais?

Sim       Não

Caso sua resposta seja positiva na questão 9, indique a melhor forma para entrarmos em contato:

\_\_\_\_\_

---

Obrigada

*Arlete*

## **ANEXO IV**

### **Autorização para filmagem**

---

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo  
**Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática**  
**Responsável: Arlete Ap. Oliveira de Almeida**  
**Orientador.: Prof.Dr. Ubiratan D'Ambrósio**

Autorizo a filmagem desta reunião para fins de pesquisa, sendo as imagens utilizadas exclusivamente para melhor coletar dados pertinentes à pesquisa que visa a melhoria do ensino da Matemática. Somente terão acesso à imagens, o aplicador e seu orientador ou caso necessite comprovar que a mesma foi realizada.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.

## **ANEXO V**

### **Transparências do 1º Encontro**

---

# FRACTAIS: UM NOVO HORIZONTE PARA A PRÁTICA NA SALA DE AULA

Arlete Aparecida Oliveira de Almeida  
Mestranda PUC – SP

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio  
2005

*“...Nuvens não são esferas, montanhas não são cones e relâmpagos não caminham em linha reta.”*  
Mandelbrot



Montanha fractal

arletemolere@ig.com.br

## Benoit de Mandelbrot

Nasceu em Varsóvia (1924), de família judaica, da Lituânia.

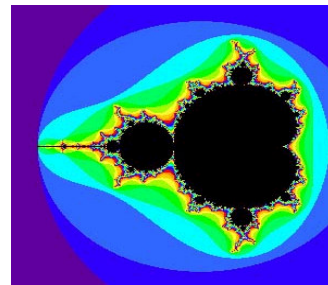


Na década de 70 introduziu o termo “fractal”.

Palavra latina “fractus” que significa quebrado, irregular, apesar de alguns desses objetos geométricos já se conhecerem desde os finais do século XIX.

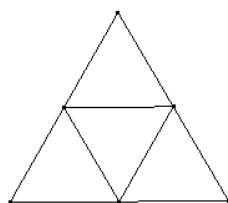
arletemolere@ig.com.br

## Mandelbrot



arletemolere@ig.com.br

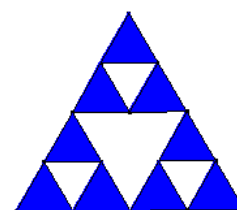
## Atividade 2



Nível 0

Iniciador-gerador  
arletemolere@ig.com.br

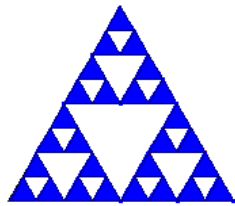
## Atividade 2



Nível 1

arletemolere@ig.com.br

## Atividade 2



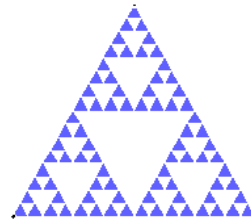
Nível 2

arletemolere@ig.com.br

7

## Atividade 2

Triângulo de Sierpinsky



n iterações

arletemolere@ig.com.br

8

## Sierpinsky



1882-1969

arletemolere@ig.com.br

9

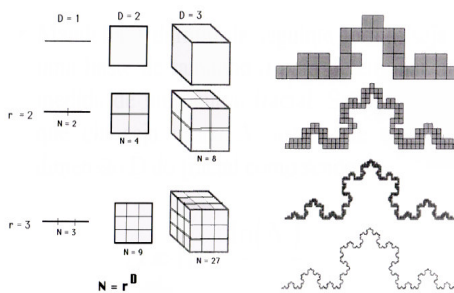
## O que são fractais?

- ❖ Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo.
- ❖ São caracterizados pela **auto-similaridade**, dimensões diferentes e próprias de cada imagem sendo obtido por um processo de iteração.
- ❖ **Iteração**: repetição indefinida da mesma coisa.
- ❖ **Curva fractal**: auto-semelhantes, pois suas propriedades são as mesmas em qualquer nível de complexidade.
- ❖ **O fractal depende das condições iniciais.**

arletemolere@ig.com.br

10

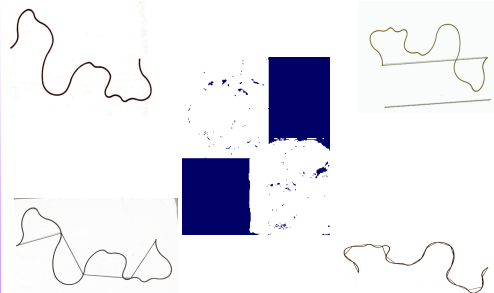
## Dimensão Fractal



arletemolere@ig.com.br

11

## Dimensão Fractal



arletemolere@ig.com.br

12

## Fractais Primitivos



## Georg Cantor



1845-1918

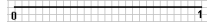
arlemoliere@ig.com.br

14

## Poeira de Cantor

O Conjunto de Cantor é obtido da seguinte maneira:

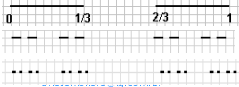
1. Considerar um segmento de reta:



2. Dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central:



3. Repetir a construção 2 em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente.



15

## Poeira de Cantor Atividade 5

Iteração	Comp. de cada segmento	Número de segmentos	Comprimento total
0	1	1	1
1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	4	$\frac{4}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	8	$\frac{8}{27}$
4	$\frac{1}{81}$	16	$\frac{16}{81}$
5	$\frac{1}{243}$	32	$\frac{32}{243}$

arlemoliere@ig.com.br

16

## Atividade 5

Identifique qual a lei de formação de cada valor em cada coluna:

Iteração	Comprimento/segmento	Número de segmentos	Comp. total
n	$\frac{1}{3^n}$	$2^n$	$\frac{2^n}{3^n}$

Quais as implicações desta lei?

*“Quando n cresce: o crescimento cai, o número de segmentos sobe e o comprimento tende ao infinito, quando n tende a infinito”.*

arlemoliere@ig.com.br

17

## David Hilbert

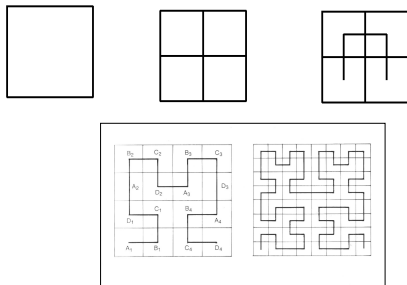


1862-1943

arlemoliere@ig.com.br

18

## Curvas de Hilbert



arlemolliere@ig.com.br

19

## Giuseppe Peano



Nascido em 1858 e faleceu em 1932. Italiano, contribuiu enormemente com a matemática.

Inventou em 1890 esta curva denominada Curva de Peano, que é um fractal, de dimensão igual a 2.

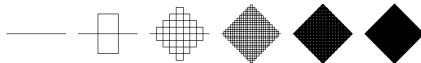
arlemolliere@ig.com.br

20

## Curva de Peano



O resultado que se obtém nas primeiras iterações é o seguinte:



Logo este fractal é uma curva que cobre por completo um quadrado.

arlemolliere@ig.com.br

21

## Niels Fabian van Koch

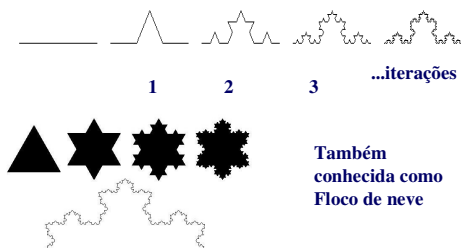


1870-1924

arlemolliere@ig.com.br

22

## A Curva de Koch



arlemolliere@ig.com.br

23

## Karl Menger

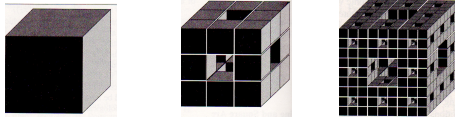


1902-1985

arlemolliere@ig.com.br

24

## A Esponja de Menger



Sua forma, um cubo aberto, transpassado por uma multidão de poros, todos conectados uns aos outros.

Uma curiosidade nascida no início do século, que atualmente inspira pneumologistas, construtores de automóveis e ainda empresas de construção.

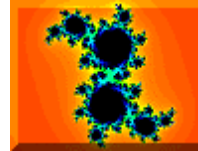
arletemolere@ig.com.br

25

## Gaston Maurice Julia



1893-1978

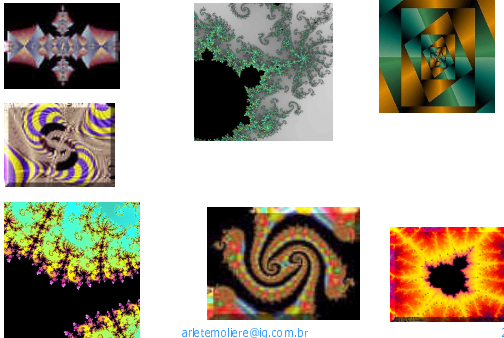


Conjunto de Julia

arletemolere@ig.com.br

26

## Galeria - Fractais



arletemolere@ig.com.br

27

## **ANEXO VI**

### **Apostila – 1º Encontro**

---

## FRACTAIS: UM NOVO HORIZONTE PARA A PRÁTICA NA SALA DE AULA

### O que são fractais?

- Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo.
- São caracterizados pela auto-similaridade, dimensões diferentes e próprias de cada imagem sendo obtido por um processo de iteração.
- Iteração: repetição indefinida da mesma coisa.
- Curva fractal: auto-semelhantes, pois suas propriedades são as mesmas em qualquer nível de complexidade.
- O fractal depende das condições iniciais.

### Benoit Mandelbrot

Foi ele quem na década de 70 introduziu o termo “fractal”, a partir da palavra latina “fractus” que significa quebrado, irregular, apesar de alguns desses objetos geométricos já se conhecerem desde os finais do século XIX; e colocou uma questão simples para apresentar a noção dos fractais, em seu livro “*The Fractal Geometry of Nature: qual é o tamanho da costa da Grã-Bretanha?*”, esta indagação simples expôs um problema complexo.

A geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação.

### ATIVIDADE 1

Dados os objetos, classifique-os, descrevendo abaixo qual o critério utilizado, justificando.

### ATIVIDADE 2

**Construção gráfica:** Triângulo de Sierpinski

**Material:** folhas de sulfite, régua.

#### Instrução 1:

- Desenhar um triângulo equilátero
- Unir os pontos médios dos lados do triângulo e remova o triângulo do meio (pintando-o com uma cor clara).
- Repetir em cada um dos triângulos não eliminados (os do canto) as mesmas construções anteriores.
- Repetir a operação anterior sucessivamente (neste caso, fazer pelo menos mais duas vezes).
- 

#### Instrução 2:

- Colorir os triângulos não eliminados com cor escura.

#### Instrução 3

- A figura 2 será chamada iniciador-gerador representando o nível 0 do fractal (as figuras sucessivas representam respectivamente o nível 1, nível 2, nível 3,..., do fractal).

Observando sua construção, preencha a tabela abaixo:

Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado do triângulo	Altura do triângulo	Perímetro do triângulo	Área do triângulo
0					
1					
2					
3					

Responda:

- O que acontece com o perímetro do triângulo construído em cada nível?
- E com a área desses triângulos?
- Comparando os dados preenchidos em cada nível na tabela anterior, imagine como ficaria o nível 5 sem passar pelo nível 4 e preencha o quadro abaixo.

Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado do triângulo	Altura do triângulo	Perímetro do triângulo	Área do triângulo
5					

- imagine os dados dessa figura numa fase  $n$  e preencha a tabela abaixo.

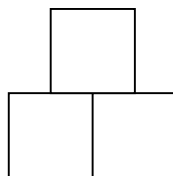
Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado do triângulo	Altura do triângulo	Perímetro do triângulo	Área do triângulo
$n$					

### ATIVIDADE 3

**Construção gráfica:** Usando o Triângulo de Sierpinski: Os três quadrados

**Material:** folhas de sulfite, régua.

Construir um fractal, iniciador-gerador, dado por 3 quadrados (grandes iguais) conforme a disposição abaixo, cuja regra de construção é a mesma da Atividade 1: substituir sucessivamente cada quadrado por 3 novos quadrados (conforme o gerador) ajustando-os superiormente, inferiormente e lateralmente nos seus interiores, e eliminar o restante. Levar a construção até o nível 4.



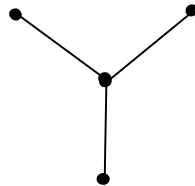
Modelo

#### ATIVIDADE 4

**Construção gráfica:** A árvore trifurcada igualmente com redução 1/2

**Material:** folhas de sulfite, régua.

Construir o fractal com iniciador-gerador, dado pela figura abaixo, onde os três ramos iniciais formam ângulos iguais entre si ( $120^\circ$ ); e a partir de cada nó repetir a construção trifurcada mas reduzindo à metade sucessivamente os três novos ramos.

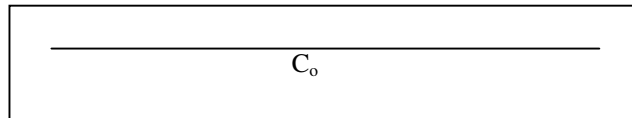


Modelo

#### ATIVIDADE 5

**Construção gráfica:** Poeira de Cantor

- Desenhar na folha fornecida, uma linha de 20 cm, posicionada conforme indicação no exemplo abaixo, considerando-a como uma unidade de medida.



- Remover o terço do meio de  $C_0$  e desenhar o resultado, chamando-o de  $C_1$
- Repetir o processo acima chamando de  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ .
- Complete a tabela abaixo:

Iteração	Comprimento de cada segmento	Número de segmentos	Comprimento total
0			
1			
2			
3			
4			
5			

- Identifique qual a lei de formação de cada valor em cada coluna:

---

- Quais as implicações desta lei?

---

**Anotações:**


## **ANEXO VII**

### **Questionário: Os professores e o ensino de Matemática**

---

Questionário

Professor, gostaria que nesse momento, você refletisse a respeito das seguintes questões abaixo e registrasse sua opinião. Não se preocupe em ter fundamentação teórica, pode ser uma escrita simples, mas que retratasse o que realmente pensa sobre o assunto.

Nome: \_\_\_\_\_  
Escola \_\_\_\_\_

1. Se você já ouviu falar sobre fractais, tem formulado uma idéia a seu respeito. Se não, o próprio nome deve leva-lo a fazer referência sobre o seu significado. Por favor, diga qual sua idéia.

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. Professor, como a matemática da escola se relaciona com a sua história de vida?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3. Professor, você percebe a necessidade de inserir novos rumos para o ensino da matemática? Cite essas necessidades e suas justificativas.

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4. Você acha que a sua área de atuação como professor de Matemática, deve seguir os padrões propostos durante sua formação? Comente.

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5. Você percebe algum obstáculo, no ensino da matemática para abordar adequadamente assuntos que ainda não foram inseridos no nosso currículo? Quais?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## **ANEXO VIII**

### **Registro das respostas dos professores o ensino de matemática.**

---

---

**Questão 1:** Se você já ouviu falar sobre fractais, tem formulado uma idéia a seu respeito. Se não, o próprio nome deve levá-lo a fazer referência sobre seu significado. Por favor, diga qual sua idéia.

*“Estudo da geometria de forma mais fragmentada (mais aprofundada)”. (P1)*

*“Quando fazia faculdade, durante a semana da matemática, o prof<sup>o</sup> Ernesto Rosa nos fez uma demonstração do uso dos fractais. Então, o que eu sei foi visto naquele dia. A idéia que tenho é que se usa para o cálculo de operações com frações”.(P2)*

*“Fractais é uma parte da geometria que estuda os sólidos. Relaciona-se com frações (pedaços)”. (P3)*

*“São frações, pedaços”.(P4)*

*“Ouvi falar, mas nunca pude saber exatamente o que era. Imagino que seja algo relacionado a partículas subatômicas”.(P5)*

*“Não”(P6)*

*“Não conheço sobre fractais, mas acredito que deve tratar de fragmentos. Sobre algo”. (P7)*

*“Não ouvi falar nada a respeito. A idéia que faço é que seja como fragmentos, frações de alguma coisa”.(P8)*

*“Não ouvi propriamente o nome, mas sugere fração”.(P9)*

*“Não sei o que é isso. Apenas acho que está ligado à geometria”.(P10)*

*“Já ouvi falar mas não recordo no momento”. (P11)*

*“Ainda não ouvi falar, mas fractais me lembra fragmentos”. (P12)*

*“Já ouvi algo a respeito, mas não dei a devida atenção ao assunto naquele momento. Quanto ao significado creio que se trata de abranger o máximo do conteúdo sobre um mesmo tema”. (P13)*

*“Não ouvi falar sobre fractais (posso ter ouvido mas não me lembro no momento)”.(P14)*

*“Queira me desculpar, mas sinceramente não sei o significado da palavra fractais. Mas para falar a meu respeito, ou uma idéia, na educação ou como educador eu me sinto bem.” (P15)*

*“Não tenho a menor idéia do significa a palavra fractal.” (P16)*

*“Fractais a parte da geometria que estuda os sólidos fracionados em muitas partes”. (P17)*

*“Não sei e gostaria de saber mais”.(P18).*

*“Referente a fração e proporcionalidade, observado em figuras geométricas irregulares”. (P19)*

*“Sim, já consultei um pouco sobre o assunto e pensei em me aprofundar para desenvolver um projeto”. (P20)*

*“ Não sei sobre fractais”. (P21)*

*“Fractais são “pedaços” iguais formando um todo, a mesma imagem repetida diversas vezes formando uma imagem maior”. (P22)*

*“Já ouvi falar, porém não tenho idéia do que seja seu conteúdo/sua utilidade. Com relação à idéia do significado, diria ser relacionado com sólidos geométricos”.(P23)*

*“Fractais são figuras geométricas irregulares tais como as folhas de uma árvore, os formatos irregulares da casca de abacaxi, etc.”. (P24)*

*“Sim, eu conheço fractais. Não sei se é isto que você estava pensando, mas fractais é uma parte da teoria dos sistemas dinâmicos. De uma forma bem superficial, fractais são retratos de figuras que quanto mais nos aproximamos, pegamos pedaços delas, esses pedaços formam a figura por um todo infinitamente”.(P25)*

*“Não tenho conhecimento sobre fractais, mas gostaria de saber a respeito”.(P26)*

*“Sim, já ouvi falar. São trabalhos feitos com figuras geométricas, formando desenhos maravilhosos e com muita lógica matemática”.(P27)*

*“Já ouvi falar, porém não tenho uma idéia formada”. (P28)*

*“É um assunto que desconheço. Acho que tem haver com figuras geométricas (geometria)”. (P29)*

*“Já ouvi falar, mas não tenho nenhuma noção”. (P30)*

*“Já ouvi falar, mas acredito não ter uma idéia concreta sobre o assunto, no entanto penso que fractais refere-se ao funcionamento da Matemática em tudo que pertence ao mundo físico. Ex.: o funcionamento de uma colméia”. (P31)*

*“Não conheço e gostaria de aprender a trabalhar com os meus alunos. Penso que isso possa facilitar todo o trabalho”. (P32)*

*“Geometria dos fractais representa a fragmentação dos objetos”. (P33)*

*“Não ouvi falar, portanto não tenho nenhuma idéia”.(P34)*

*“Sim, muito superficialmente. Fragmentação infinita ao máximo possível, de determinado assunto”. (P35)*

*“Já ouvi falar, mas não me lembro. Pelo nome, creio que faça referência a formação.fragmentos”. (P36)*

*“Figuras geométricas criadas a partir de funções matemáticas, que podem ou não se complexas, criando um padrão de imagens”. (P37)*

*”Conheço pouco sobre este assunto, mas sei que para chegar a ensinar este tipo de coisa deveria ter um ensino melhor de geometria”.(P38)*

*“Não. Mas sobre fractais – fragmentos/fração?”. (P39)*

*“Fractais, já discuti em Física e gostaria de saber mais”.(P40)*

*“Sim, já tive oportunidade de fazer alguma leitura sobre o assunto, tenho noções bem primitivas acredito. São como fragmentação de figuras”. (P41)*

*“Não sei”. (P42)*

*“Não conheço, mas o nome me lembra fragmentos, partes”. (P43)*

*“Não conheço fractais. Pelo nome acredito que são partes, relacionadas a figuras geométricas”. (P44)*

*“Eu já conheço, fiz um curso sobre no CAEM”. (P45)*

*“Pelo nome são fragmentações, ou figuras geométricas irregulares”. (P46)*

*“Não tenho idéia sobre sua utilização e o que significa”.(P47)*

*“Formas ou sólidos geométricos”.(P48)*

*“Li há muito tempo atrás sobre o assunto. Se não me engano teve algo a ver com curvas no espaço”. (P49)*

*“Não sei ao certo o que é, mas o nome lembra frações”. (P50)*

*“São desenhos geométricos criados em computador através de inúmeras equações”. (P51)*

*“São junções de figuras geométricas onde caracterizam figuras com dimensões e formas infinitas”. (P52)*

*“Não tenho nem idéia” (P53)*

*“Não sei o seu significado”. (P54)*

*“Não ouvi falar e não faço nem idéia do que seja”. (P55)*

*“Não ouvi falar, mas diria que se refere a fragmentos”. (P56)*

*“Não. A minha idéia é a de fragmentos”. (P57)*

*“Fractais não ouvi nada a respeito, e no momento não tenho nenhuma idéia”. (P58)*

*“Fração, divisão”. (P59)*

*“Eu já tive um breve contato, mas foi muito superficial e não sei falar sobre o assunto”. (P60)*

*“Não ouvi falar. O que me leva a pensar é sobre figuras geométricas fracionadas, partes”. (P61)*

*“Não. A minha idéia estaria relacionada com frações, partes e todo”. (P62)*

*“Não. Partes”. (P63)*

*“São formas geométricas que encontramos na natureza, como o favo de mel, a casca do abacaxi, etc.”. (P64)*

*“Idéia – várias figuras geométricas unidas”. (P65)*

*“A minha idéia a respeito de fractais, imagino que deve estar ligado a figuras geométricas”. (P66)*

*“Não! Idéia de fragmentos, partes”. (P67)*

*“Sim, já ouvi falar sobre fractais, suas aplicações tanto na formação de regiões geológicas como na utilização nas bolsas de valores”. (P68)*

*“Não ouvi falar, não participei das aulas anteriores” (P69)*

*“Já tive conhecimento, porém estou esquecido”. (P70)*

*“Imagino vitrais”. (P71)*

*“Nunca ouvi falar sobre fractais. O nome sugere algo em relação a fração”. P72)*

*“Eu já assisti uma palestra na faculdade. Primeiro, o palestrante mostrou um vídeo sobre a geometria, ou seja, mostrou que a geometria está em todos os lugares, por exemplo na natureza, na construção de embalagens, etc”. (P73)*

*“Creio que seja algo muito fragmentado”. (P74)*

*“São fragmentações de um dado elemento”. (P75)*

*“Não. Algo fragmentado?”. (P76)*

*“Já ouvi falar, mas não sei o seu significado. O nome sugere fragmentação, eu acho”. (P77)*

**Questão 2:** Professor, como a matemática da escola se relaciona com a sua história de vida?

*“Através dela transmito conhecimentos a outras pessoas e quando isso realmente acontece é muito gratificante”. (P1)*

*“Amo o que faço e faço porque gosto. O que ensino é a disciplina que me fascina, mas é pesado saber que nem todos alcançam a mensagem que você quer passar. Procuo relacionar os conteúdos com o cotidiano dos alunos”. (P2)*

*“Temos ainda muito a melhorar no ensino de matemática. Infelizmente ainda não trouxemos totalmente a matemática para a realidade do aluno. Isto me causa um certo incomôdo, não quero passar para meus alunos o que vivi na minha formação”.(P3)*

*“Procura deixar minha vida mais fácil”. (P4)*

*“Minha vida é composta de milhares de passos, um de cada vez e sempre com um objetivo”. (P5)*

*“Em todos os momentos procuro trabalhar a matemática com a necessidade do aluno”.(P6)*

*“A matemática está em tudo, desde o momento em que nascemos”.(P7)*

*“- Progresso*

*- Valores*

*- Evolução*

*- Solução dos problemas do cotidiano”. (P8)*

*“Minha formação é também Engenharia, então relaciono bastante o cálculo com a vida”. (P9)*

*“Diariamente, graças a ela tenho o raciocínio aguçado, o que permite sucesso na vida diária”. (P10)*

*“No meio profissional”. (P11)*

*“Na realidade, comecei lecionando Ciências, depois acabei lecionando Matemática, gostei, mas sinto que ainda me falta algo para passar a matéria e torna-la atrativa para os alunos”. (P12)*

*“Sempre fui uma pessoa com pouca paciência, e a matemática em seus desafios, apresenta os resultados exatos, por isto optei por esta área em minha formação”. (P13)*

*“Eu tenho procurado dentro do possível, formas que me torne a ensinar a matemática de forma que os alunos a achasse agradável, interpondo as outras disciplinas, como a arte por exemplo”. (P14)*

*“A matemática se relaciona em minha vida ou com os alunos na medida do possível mais ou menos, digo isto em virtude da maioria deles não se interessar e não dar muito tempo para fazer o que gostaria de fazer”. (P15)*

*“Sempre gostei de trabalhar com números. No ensino Médio fiz técnico em Contabilidade e na faculdade optei por fazer matemática por empatia”. (P16)*

*“De todas as maneiras, mas se tornou tão natural, que quase não percebo isso. Percebi outro dia a dificuldade que uma pessoa teve para identificar uma mesa retangular, simples, mas ela não sabia”. (P17)*

*“Tem tudo a haver com a minha vida tudo que aprendi tento aplicar em sala, de uma forma mais atualizada, aplicando-a mais ao dia-a-dia. Quando aprendi era mais conteudista, tento aplicar os conteúdos dando exemplos do dia-a-dia.”(P18)*

*“Ela está presente no meu cotidiano”. (P19)*

*“Nos cálculos cotidianos, na resolução de problemas, no raciocínio, nas relações que estabeleço quando necessito”. (P20)*

*“Relaciona em tudo, porque eu falo muito sobre a matemática”. (P21)*

*“A matemática sempre esteve presente, mesmo quando eu não gostava dela (5ª e 6ª séries)”. (P22)*

*“É para mim, a oportunidade, a responsabilidade, o prazer e o carinho com que tenho, ao conviver com os alunos em meu local de trabalho e fora dele, na comunidade em que estou inserido”. (P23)*

*“A matemática está presente em nosso dia-a-dia, em tudo que fazemos ela está presente”. (P24)*

*“Ela me tocou desde o primeiro momento. Sempre tive facilidade, e assim surgiu o interesse em aprender mais. Isso me levou a procurar a faculdade”. (P25)*

*“A matemática está presente em nosso cotidiano e também em nossas vidas”. (P26)*

*“A matemática inclusa na minha história”. (P27)*

*“De modo geral no meu dia-a-dia. No orçamento de minha casa, na minha vida social (status) e principalmente na saúde”. (P28)*

*“A matemática tem muito haver com a minha vida, pois muito daquilo que ensino tem aplicações práticas no dia-a-dia”. (P29)*

*“Relaciona na maneira de pensar, agir”. (P30)*

*“Desde que me levanto até o momento de pegar no sono novamente, preciso ter tempo para resolver muitas situações problema...o tempo é pouco para resolver tantos problemas”. (P31)*

*“Se relaciona através do dia-a-dia, aprendemos juntos e temos muito mais o que aprender”. (P32)*

*“A matemática na escola se relaciona com a minha história de vida no sentido de ver na teoria as práticas do dia-a-dia. (P33)*

*“Na prática do dia-a-dia” (P34)*

*“Muito pouco, levando em conta que as aplicações práticas são infinitas e tão pouco aprendemos e ensinamos sobre estas aplicações. Tornou-se uma torturante transmissão de conhecimentos “estanques””.(P35)*

*“A matemática aparece em meu di-a-dia”. (P36)*

*“Matemática sempre foi o meu maior obstáculo. Talvez por isso eu tenha direcionado os meus caminhos para essa finalidade. Vencer este desafio! Consegui hoje ver onde estavam as minhas dificuldades (algumas), e isso facilita o trabalho em sala de aula”.(P37)*

*“É o que se relaciona com o aprendizado, pois ser professor não é só ensinar e aprender cada vez mais”. (P38)*

*“Organização, métodos, uso de computadores, feiras, supermercados, parques, viagens”. (P39)*

*“Determinação, vencer obstáculos, descobrir novos caminhos. Discernimento, poder de decisão, visão global. Tudo isso pode ser conseguido, acredito, por ter me dedicado ao estudo de matemática, da qual não sei ainda nem metade do que gostaria”. (P40)*

*“Atualmente venho buscando relacionar a matemática não na história de minha vida mas sim nas nossas vidas (alunos, comunidade, cidade, estado, etc.)”. (P41)*

*“Embasamento lógico necessário para que eu pudesse ter um melhor discernimento no meu dia-a-dia e foi a ferramenta que encontrei para ter ascensão profissional”. (P42)*

*“Se relaciona com tudo”. (P43)*

*“Na minha ótica, não vivemos sem a matemática, mesmo sem perceber estamos praticando matemática. Nas compras, porcentagem, dinheiro, estamos fazendo cálculos”.*  
(P44)

*“A matemática está relacionada na nossa vivencia do dia-a-dia”.* (P45)

*“A matemática está sempre presente. Tempo, vida financeira, fórmula de composição de alguns produtos que utilizamos, figuras. Etc.”.* (P46)

*“A matemática não tem nenhum relacionamento”.* (P47)

*“está relacionada em quase tudo, desde o horário de se levantar até uma receita de bolo”.* (P48)

*“Sempre adorei matemática, desde a 1 série. Na 8ª série já sabia que faria este curso. Não o fiz para ser professora, mas sim porque amava essa matéria. Dar aulas foi uma consequência que eu também adoro”.* (P49)

*“Quando eu estudei no Ensino Fundamental, tive grandes dificuldades, mas tive uma professora no Ensino Médio que me fez gostar”.* (P50)

*“É minha profissão, e matemática está presente em tudo ou quase tudo que fazmos”.* (P51)

*“Cada educando, professor tem uma história de vida relacionada com a matemática, pois na nossa mudança de fase, quando brincamos, construímos jogos, administramos nossas mesadas, nossas casas está implícita a matemática”.* (P52)

*“Matemática na minha vida sempre foi uma satisfação, tanto no estudar quanto no aprender e ensinar”.* (P53)

*“Se relaciona com o dia-a-dia, desde a época de estudante até os dias de hoje”.*  
(P54).

*“A relação é buscar mostrar uma ligação plena com a vida, levando em contato os objetivos próprios”.* (P55)

*“Na forma de pensar, na administração do salário, nas provisões financeiras”.*  
(P56)

*“A matemática sempre esteve presente durante toda a minha vida, desde a juventude até hoje; principalmente nos 34 anos em que trabalhei como administrador em uma instituição financeira, além da escola”. (P57)*

*“Sempre gostei de ficar horas fazendo cálculos, tanto que pra mim os cálculos funcionam como uma terapia”. (P58)*

*“Através de poupança (economia); o que quero adquirir, quanto devo poupar. Cálculos de juros e porcentagens. Controlar gastos e despesas”. (P59)*

*“Sempre gostei de matemática desde as minhas séries iniciais e levei isso para minha vida profissional”. (P60)*

*“Muitas vezes só para a área escolar, e só serve para a escola”. (P61)*

*“Sempre adorei matemática e a matemática me serve de apoio em tudo que faço e defendo”. (P62)*

*“A matemática do dia-a-dia. A matemática presente em tudo o que realizo”. (P63)*

*“A matemática se relaciona no dia-a-dia, no trabalho desenvolvido, nas atividades elaboradas em casa e no cotidiano. Sou formada em ciências contábeis o que me direcionou para a área de matemática”. (P64)*

*“Vivência e a troca de experiência com os alunos”. (P65)*

*“Observando os graus de facilidade e dificuldade, compara como desafio em minha vida. Até o Ensino Médio, tive dificuldades, na faculdade aprendi a gostar e gosto cada vez mais”. (P66)*

*“A matemática se relaciona com a minha antiga profissão: Engenharia e com a minha vida cotidiana. A matemática de certa forma está em quase todas as coisas.”(P67)*

*“Apliquei muito do conhecimento matemático quando trabalhava na indústria. Como professor, é claro, todos os dias em sala de aula”. (P68)*

*“A matemática é tudo na vida, principalmente na escola, aprendemos as técnicas e o conceito”. (P69)*

*“Utilizei conhecimentos da escola em compras, feira, fila de espera. Também pude ajudar meu chefe em um trabalho da faculdade sobre logaritmos. Cálculos de*

*porcentagens, transformações de unidades e medidas, também coloquei em prática”.*  
(P70)

*“Em uma cirurgia que fiz e perdi parte da memória, consegui o retorno de 90% com cálculos matemáticos (Kumon)”.* (P71)

*“Sempre gostei de matemática, tinha facilidade com os números, mas percebi que queria me dedicar a essa área no Ensino Médio. Eu tinha uma professora que me fazia viajar...”.* (P72)

*“Na época, quando eu era aluna, tudo era mais fácil, pois tinha muita facilidade em aprender, porque eu já gostava de matemática e a classe, ou seja, a disciplina era diferente dos dias de hoje”.* (P73)

*“Se relaciona da maneira que eu vou mudar o que eles pensam da matemática (bicho de sete cabeças)”.* (P74)

*“Em toda vida somos monitoradas pela matemática, em todos os momentos: em casa, no mercado, etc.”.*(P75)

*“Não diretamente, mas obtive um papel significativo”.* (P76)

*“Sou uma pessoa nascida no campo e a parte da matemática que mais de aproxima da minha história é a geometria. Usamos muito para os cálculos das áreas que deveriam ser plantadas”.* (P77)

**Questão 3:** *Professor você percebe a necessidade de inserir novos rumos para o ensino da matemática? Cite essas necessidades e suas justificativas.*

*“Novidade a fim de motivar mais os alunos e o corpo docente. Aprimorar os conhecimentos”.*(P1)

*“Sim. Está muito difícil ensinar hoje em dia. É difícil concorrer com os “atrativos” que existem fora da sala de aula. Se inseríssemos rumos diferentes que atraíssem mais a atenção dos alunos, melhoraria nosso trabalho enquanto professor”.* (P2)

*“Sim. Entendo que a matemática deve ser dada de forma contextualizada e não conteudista, como é feito em muitos temas que inserimos na sala de aula”.* (P3)

*“Sinto necessidade de vários materiais que não tenho, como: sala de computadores, condições para construção e espaço para exposição de sólidos, figuras planas.” (P4)*

*“Sim, pois acredito que a matemática básica deveria ser ensinada em casa e deveríamos estudar coisas relacionadas com a prática”. (P5)*

*“Sim, uma atualização do conteúdo em relação à nova necessidade”. (P6)*

*“Sim. A matemática deve estar voltada para situações do dia-a-dia, onde nossos alunos terão mais interesse e facilidade para aprender”. (P7)*

*“Aplicação do dia-a-dia, porque assim iria de encontro com as necessidades, teria mais interesse do aluno” (P8)*

*“Acredito que já está sendo feito. Os livros já abordam os temas diferentes. Já existe um relacionamento dos assuntos com o dia-a-dia.” (P9)*

*“Sim, pois os conteúdos são obsoletos e o desinteresse dos alunos é muito grande”. (P10)*

*“As metodologias atuais são ótimas para mudá-las demos primeiro conhecer para análise; acredito que para melhorar o caminho é outro”. (P11)*

*“Sim, a matemática deveria ser aplicada aos alunos com mais dinâmicas e atrativos para não se tornarem maçantes” (P12)*

*“Sim, não só novos rumos, mas novos métodos. Hoje é muito difícil fazer com que os alunos se motivem quando só temos o quadro, giz e nossa criatividade para motivá-los. Devemos pensar em meios novos que possam competir com a tv, games, etc.” (P13)*

*“Sim, meios que tornem a matemática mais fácil o aprendizado”. (P14)*

*“Sim, sinto a necessidade de poder fazer trabalhos, jogos, principalmente para mim que dou aula para a suplência e uma classe com muitos alunos problemáticos”. (P15)*

*“Sinto a necessidade de fazer com que o ensino de matemática seja mais atraente para que os alunos se libertem do estigma cultuado por tantos anos de que é uma área incompreensível ...”. (P16)*

*“Gostaria que o raciocínio lógico, os problemas de lógica, a demonstração, a argumentação fossem mais explorados e valorizados”. (P17)*

*“Sim, alguns alunos vêem a matemática como um bicho papão e nós temos que mostrar a eles que não é assim, temos que mostrar sua necessidade e tentar entendê-la um pouco, é um mal necessário, pelo menos de acordo com eles (alunos)”. (P18)*

*“Sim, despertar a curiosidade e a atenção dos alunos”. (P19)*

*“Sim. O tempo em que vivemos necessita de novos conhecimentos, tecnologias e a matemática também, ela faz parte do cotidiano, calculadoras, computadores e outros”. (P20)*

*“Necessidade de abrir a mente do aluno no cotidiano”. (P21)*

*“Sim. Os alunos de uma maneira geral não vêem muito significado no aprendizado de Matemática (principalmente os de nível médio). No curso noturno, o desinteresse é muito geral, ele vem despreparados e sem muito entusiasmo”. (P22)*

*“Sim. Não sei se seria novos rumos, mas aproximar a matemática ao que realmente é necessário na vida dos educandos. Por exemplo: a economia familiar com auxílio da matemática financeira”. (P23)*

*“Sim, o ensino da matemática tem que ser interativo, isto é, tem que estar voltado para o dia-a-dia do aluno.” (P24)*

*“Sim, acredito que a matemática deve tomar novos rumos. Ela deve ser tratada com uma seriedade maior no Ciclo I, as idéias dos alunos mais incentivadas, uma maior motivação e tentar tirar os medos dos alunos com respeito à matemática”. (P25)*

*“Temos que aprender a trabalhar com outras formas de ensinar a matemática para estimular aos alunos de uma maneira, mais fácil”. (P26)*

*“Sim. É preciso inserir novos rumos para o ensino da matemática. O aluno tem que perceber que a matemática está no nosso cotidiano e que pode ser alguma coisa gostosa, não somente assustadora”. (P27)*

*“Sem dúvida! A gente, digo professores, educadores no geral, quando encontramos uma série de obstáculos, já ficamos quase que no estado de inércia e sabemos que a criança e o jovem de hoje necessita que investimos neles”. (P28)*

*“Sim, pois necessitamos inserir novas maneiras de mostrar o quanto é útil o aprender matemático e um maior apoio pedagógico dos nossos dirigentes”. (P29)*

*“Sim, precisa ter algo mais avançado como multimídia, internet, pois só giz, lousa, desestimula”. (P30)*

*“Sim. A necessidade de fazer com que nos alunos gostem de matemática. A necessidade de fazer com que a Matemática não seja apenas exercícios mecânicos”. (P31)*

*“Sim, é necessário que os alunos tenham novos conhecimentos, para que possam facilitar o dia a dia e terem interesse maior por isso a necessidade de mudanças” (P32)*

*“Sim. Existe a necessidade de mudar a visão de uma matemática teórica e abstrata para uma matemática mais prática pois o aluno deve relacionar o que aprende com as suas situações cotidianas”. (P33)*

*“Sim. Na área de tecnologia, mas falta orientação e material”. (P34)*

*“Sim. Conforme já citei no item anterior, pois nossos alunos cobram constantemente uma matemática que tenha a ver com suas vidas e necessidade” (P35)*

*“Sim. Devido a falta de interesse da maioria da população”. (P36)*

*“Sim. Percebo desde a época em que era aluno, minha grande dificuldade era o contexto. Matemática pela matemática não desperta interesse em ninguém, virou “castigo”. Sempre existirá a necessidade de uma matemática contextualizada” (P37)*

*“Sim. É preciso inserir uma matemática voltada ao dia a dia, ou seja uma matemática em que o aluno perceba que usará em qualquer lugar assim fazendo com que eles tenham mais interesse, mesmo sem gostar de matemática”. (P38)*

*“Com o mundo globalizado, a Secretaria do Estado da Educação deveria investir mais nesta parte, para estarmos em sintonia com outros países. Há países que o professor já ministra aula de um determinado lugar para outro”. (P39)*

*“Relacionar os devidos cálculos com o cotidiano do aluno e o nosso, de forma compreensível, reforçar a base da Educação escolar e não ficar “agradando” os níveis superiores da Educação, ter uma visão maior”. (P40)*

*“Sim. Dar ao aluno um significado da matemática do dia-a-dia. Desenvolver atividades relacionadas ao dia-a-dia. Fazer uso de ferramentas que sejam significativas aos nossos alunos e sua realidade”. (P41)*

*“Sim. O Desenvolvimento tecnológico na atualidade nos força a provermos o ensino da matemática de novas idéias”. (P42)*

*“Sim, principalmente trazer o aluno a se interessar e entender matemática”. (P43)*

*“Na sala de aula, temos sempre que criar novas estratégias, pois nossos alunos são impacientes, agitados, têm dificuldades de concentração. Despertar o aluno para a aprendizagem é um novo grande desafio”. (P44)*

*“Eu sou uma professora que trabalha a matemática muito ligada ao cotidiano do aluno. Portanto não vejo novos rumos”. (P45)*

*“Sim, ela é necessária em nosso dia-a-dia”. (P46)*

*“Deve-se inserir novos rumos para que desperte o interesse dos alunos”. (P47)*

*“Sim, os alunos precisam entender a ligação da matemática no cotidiano deles, não achando que é uma matéria abstrata sem ligação do seu dia-a-dia”. (P48)*

*“Sim. Acho que a matemática está muito voltada para a mecanização. Prefiro a leitura, a interpretação de situações problemas, levar o aluno a pensar, raciocinar e saber elaborar meios para encontrar soluções”. (P49)*

*“Sim, dos alunos começarem a perceber que ela não é tão absurda como eles acham. Passá-la de forma concreta para que eles possam entender melhor (unir geometria e álgebra)”. (P50)*

*“Temos que nos adequar às mudanças e as novas gerações e tecnologias”. (P51)*

*“A matemática contextualizada: a idéia de conceito tem de partir do educando, não do educador”. (P52)*

*“Sim. A necessidade de novos métodos de aprendizagem para fazer com que os alunos se interessem mais pela matéria”. (P53)*

*“Sim. Os nossos jovens não são os mesmos de antes, eles mudaram, e hoje não dá para ensinar usando os mesmos métodos de antigamente. Temos que formar jovens autônomos, pois o mercado de trabalho exige isso”. (P54)*

*“Sim. Nossos alunos estão perdendo o raciocínio lógico, tudo está muito mecanizado e precisamos resgatar isso o mais rápido possível”. (P55)*

*“Sim, percebo. Fazer o aluno pensar, relacionar conteúdos; relacionar situações teóricas com práticas, fazendo cada vez mais e sempre que possível estas relações e tirando um pouco o simples cálculo ou regras”. (P56)*

*“Sim, deve ser menos conteudista e preparar o aluno para resolver situações do cotidiano, como por exemplo: porcentagem, medidas, etc.”. (P57)*

*“Sim. Abordar com os alunos a matemática financeira, pois é o nosso uso no dia-a-dia”. (P58)*

*“Já está acontecendo através da interdisciplinaridade. A matemática hoje está mais relacionada com o nosso dia-a-dia do que alguns anos atrás”. (P59)*

*“Sim deve-se tomar novos rumos, pois a cada dia tudo muda e o ensino da matemática também deve mudar. Devemos sempre contextualizar o que ensinamos”. (P60)*

*“Sim. A matemática precisa de novos rumos, ser mais cativante, e estar clara onde ela está em nosso dia-a-dia”. (P61)*

*“Sim, o aluno vive em um mundo novo, embora temos as mesmas dúvidas e questionamentos que os antigos, o nosso aluno é mais exigente”. (P62)*

*“Sim. Não ficar só no conteúdo. Uma junção de conteúdo com a prática. Realização dessa prática. Para uma melhor assimilação”. (P63)*

*“Sim. Acredito que poderíamos ter uma matemática, mais direcionada ao cotidiano do aluno e sermos orientados, como incentivar os alunos para um melhor aprendizado”. (P64)*

*“A matemática tem a necessidade de inserir novos rumos adaptar o conteúdo a realidade e o cotidiano do aluno”. (P65)*

*“Sim. Principalmente nos primeiros anos de ensino, onde o aprendizado está se estruturando para que ele possa prosseguir nos estudos com mais base e segurança”. (P66)*

*“Sim. As transformações pelas quais passamos faz com que tenhamos de mudar os rumos continuamente”. (P67)*

*“Sim. Com a ampliação do conhecimento nos dias atuais e futuros, novos ramos do conhecimento irão se inserir na aprendizagem, por exemplo a informática no século passado e neste século”. (P68)*

*“Observo que precisamos aprimorar os nossos conceitos, com suas novas tecnologias e técnicas novas”. (P69)*

*“Sim. A globalização, o avanço das tecnologias e a facilidade de acesso às informações, modificaram o contexto e a maneira que o adolescente e o jovem dever ser ensinados. Há uma urgente necessidade de inovação e atualização”. (P70)*

*“Sim. Um modo para fazer os nossos alunos a pensar”. (P71)*

*“Sim. Os alunos sempre perguntam: Onde vou usar “isso”? Para que serve tal coisa? A necessidade maior é transformar toda essa abstração em algo concreto. Aplicar a matemática no cotidiano do aluno” (P72)*

*“Sim. Introduzir métodos para que possamos ensinar a matemática aplicada, ou seja, no dia-a-dia”. (P73)*

*“Sim. Precisamos de uma matemática mais sólida, de fácil compreensão (mais o dia-a-dia de cada um)”. (P74)*

*“Sair um pouco da teoria e ir para a prática do dia-a-dia. Mas aí fora se cobra muita teoria”. (P75)*

*“Sim. Uma matemática que conduza meu aluno ao entendimento do por que se aprender isso ou aquilo”. (P76)*

*“Sim. Embora já se perceba uma mudança muito grande; acho que esse ensino devia ser mais contextualizado. Proponho um estudo mais aprofundado da matemática financeira, por exemplo”. (P77)*

**Questão 4:** Você acha que a sua área de atuação como professor de Matemática deve seguir os padrões propostos durante sua formação? Comente.

*“Em certo ponto sim, mas isso dependerá muito da realidade do local onde trabalhamos”.(P1)*

*“Não. Temos uma formação muito tradicional: professor fala, aluno copia e aprende. Sabemos que assim não funciona”. (P2)*

*“Não. Tive a matemática de forma muito “decorada” e não é essa minha proposta para meus alunos. Ela deve ser dada de forma natural, partindo da realidade dos alunos”. (P3)*

*“Não, porque estamos em constantes mudanças”. (P4)*

*“Não. Nada do que aprendi na faculdade me serve agora, mas o gostoso da matemática é o desafio constante gradual aonde nunca se chega ao fim. Isso me lembra o livro Contato de Carl Segan”. (P5)*

*“Não. Na minha formação as prioridades eram outras”. (P6)*

*“Devemos sempre nos atualizar e aplicarmos as novas “maneiras” em sala de aula”. (P7)*

*“Não. Os padrões propostos antigamente não são os mesmos, que devemos seguir hoje”. (P8)*

*“Em alguns momentos sim, outros não. Depende da dinâmica da sala de aula, dos alunos como um todo”. (P9)*

*“Não, pois a minha formação foi quase a mesma de um professor de décadas atrás”. (P10)*

*“Em grande parte sim, a matemática é igual em qualquer parte do planeta”. (P11)*

*“Não. A matemática antiga não levava ao raciocínio, tudo tinha que ser decorado”.*

*(P12)*

*“Como expus acima, estou aberto a novos métodos que sejam compatíveis com os meios atuais de propagação da informação, como as mídias, aulas com meios áudio visuais, etc.”. (P13)*

*“Não, ela tem que mudar assim para nossos tempos, ela tem que acompanhar as inovações atuais”. (P14)*

*“Vamos dizer que sim e não, quando planejo uma aula, nem sempre atende o esperado e na minha formação não foi falado sobre esta defasagem”. (P15)*

*“Tive uma formação boa, onde foram feitas experiências de trabalhos com bastante dinâmica. Entretanto, acho que posso crescer com os cursos de capacitação e acrescentar em minha metodologia”. (P16)*

*“Não, muito embora tenha tido professores que já pensaram em formas diferentes do aprender e ensinar matemática, procuravam contá-la através de sua história, reconhecê-la no presente e relacionar os três eixos: números, medidas e geometria”. (P17)*

*“Nem tudo, tentamos aplicar uma parte”. (P18)*

*“Não, pois tivemos em nossa formação aulas técnicas, apenas, as quais não são suficientes para suprir a carência de nossa clientela”. (P19)*

*“Analisando o conteúdo, não. Mas a metodologia para construir o conhecimento, sim. Não é possível continuar a trabalhar com situações distantes, sem significado e sem tecnologias”. (P20)*

*“Os padrões devem ser diversificados”. (P21)*

*“Não. Acho que precisamos de uma reformulação. A Matemática que é proposta para o ensino médio é chata para quem não tem interesse por ela”. (P22)*

*“Em partes, no tocante a formação do conhecimento algébrico (conteúdo), porém, da minha formação, pouco acrescentou os ensinamentos da matemática que devemos praticar atualmente (a matemática voltada para a utilidade diária dos educandos)”. (P23)*

*“Não, na faculdade é ensinado muita coisa que não tem nada a ver com profissão em sala de aula”. (P24)*

*“Sim. Acredito fielmente nisso. Na minha formação foi proposto deixar o aluno pensar e incentivar o seu pensamento para que ele tente descobrir a matemática por si, é claro quer o professor é fundamental nesta caminhada do aluno atuando como um mentor”. (P25)*

*“Não, porque na realidade da escola vivenciamos outra realidade, ou será várias dificuldades a serem trabalhadas em nossa escola”. (P26)*

*“Devemos seguir padrões propostos como ponto de partida e procurar novos horizontes, novos caminhos para acrescentar e enriquecer o nosso trabalho”. (P27)*

*“Não. Mesmo que resistimos a mudanças estamos formando cidadãos de gerações diferentes, portanto devemos adentrar no mundo deles”. (P28)*

*“Sim, com certeza, mas sem deixar de acrescentar novos saberes com cursos de capacitação, bem como em oficinas pedagógicas, e cursos de graduação”. (P29)*

*“Não. Pois quando me formei os professores estavam nos ensinando a pesquisar”. (P30)*

*“Não. Minha formação foi muito sem sal, sem sabor, sem significado, tudo muito mecânico, sem se saber o porque dói aprender determinados conteúdos”. (P31)*

*“Sim. A minha proposta como professor é sempre renovar”. (P32)*

*“Não. Pois durante a minha formação eu aprendi a matemática muito teórica e pouco prática”. (P33)*

*“Não, podemos criar novas situações”. (P34)*

*“Não, pois matemática é vida e a vida não é composta de situações independentes e sem correlação. É preciso relacionar o conhecimento transmitido e ou compartilhado em sala de aula com o cotidiano dos alunos”. (P35)*

*“Não. Porque minha formação foi totalmente tradicional”. (P36)*

*“Não. Não quero simplesmente “reproduzir” o que aprendi. Quero “criar” algo, quero “dar o meu toque” pessoal, quero deixar minha marca”. (P37)*

*“Não, eu acho que a matemática deveria ser construída baseada no dia a dia com situações trazidas pelos alunos e não seguir um padrão”. (P38)*

*“Esses padrões podem e devem ser incorporados como nosso cotidiano, precisamos de teorias, mas a prática é que torna-se muito prazerosa”. (P39)*

*“Acho que sim, mas é impossível, durante nossa formação vivemos uma realidade diferente, vamos à escola com muita energia, quando saímos da faculdade e isto nos é tirado, por n situações do sistema como um todo”. (P40)*

*“Acho que a formação de um professor além de estar associada à sala de aula, deve também estar relacionada ao lado acadêmico. Quando falo em sala de aula, sua formação deve conhecer a realidade das diversidades nas nossas escolas, como também, os conteúdos que por hora estamos condicionados a aplica-los. Pois minha formação foi simplesmente acadêmica, na hora que entrei em sala de aula descobri o outro lado da minha formação, tive que buscar em livros o material a “ser dado” em aula”. (P41)*

*“Não. Porque o ensino como o que me foi oferecido não atende a todas as necessidades da vida cotidiana” (P42)*

*“Nem sempre, na nossa formação se trabalha conteúdos que praticamente nunca usamos”. (P43)*

*“Não, temos sempre que renovar, pesquisar”. (P44)*

*“Durante a minha formação passei por muitos apuros, decorar fórmulas para reproduzi-las nas provas. Com minhas crianças eu ensino a usa-las”. (P45)*

*“Não. Às vezes precisamos utilizar linguagens simples ou exemplos cotidianos”. (P46)*

*“O professor deve seguir a proposta de formação, devendo acrescentar conhecimentos do dia-a-dia”. (P47)*

*“Não. Na minha formação tinha que me preocupar com o conteúdo puro da matemática, hoje o ensino da matemática não é mais assim, preciso criar cidadãos antes de me preocupar em formar universitários”. (P48)*

*“Não. O ano da minha formatura foi 1978. O mundo mudou muito desde então. As pessoas são outras. Os interesses mudaram. A reciclagem é uma necessidade constante”. (P49)*

*“Não, porque o mundo mudou a visão hoje é outra, o aluno não pode ser só um depósito de conteúdo”. (P50)*

*“Não, pois tudo está em mudanças até mesmo o Universo e devemos estar sempre abertos a novas idéias e conhecimentos”. (P51)*

*“A formação da graduação em matemática: A linha do começo, meio e fim; está fora da estrutura escolar, pois a minha formação, só tive contato com aluno no último ano (através do estágio supervisionado), pois a minha área de atuação mudou, através do contato com o educando”. (P52)*

*“Não, pois hoje o aluno tem raciocínio mas rápido, mais lógico, devido aos computadores, jogos; então eles devem ser apenas trabalhados adequadamente, com novas maneiras e métodos, para nós podermos reconhecer e explorar esse lado do aluno, o que hoje em dia está difícil em sala de aula”. (P53)*

*“Não, pois o professor deve reciclar-se sempre, buscar o novo sem ter medo”. (P54)*

*“Não, acredito que temos que acompanhar as evoluções e que a cada ano novos horizontes sejam alcançados”. (P55)*

*“Não, a formação acadêmica só tem conteúdo, e às vezes precisamos das vivências e experiências com nossos alunos”. (P56)*

*“Não totalmente, hoje a matemática deve preparar o aluno não somente para o vestibular mas prepará-lo para o desafio do dia-a-dia”. (P57)*

*“Não, eu pessoalmente gostaria de ter a habilidade de ensinar matemática brincando, exemplos nas medidas, já ouvi dizer que a equação do 2º grau pode sair da teoria e trazê-la para outros meios, só que eu não sei qual”. (P58)*

*“Não. Devemos sempre atualizar”. (P59)*

*“Não, pois fui formada em outra época, onde as famílias eram mais estruturadas e cobravam de seus filhos os estudos. Hoje a preocupação é só se o filho vai passar de ano e não se ele tem conhecimentos para tal”. (P60)*

*“Não, pois como foi na formação, a matemática era muito prática, tradicional e fria”. (P61)*

*“Devo conhecer o novo e selecionar momentos e oportunidades para aplica-los”. (P62)*

*“A seguir padrões propostos, criar novos padrões, atuando com a realidade existente”. (P63)*

*“Não. Na minha formação tive só conteúdo sem relacionar com o cotidiano, fui fazer licenciatura plena em matemática para aprender a relacionar e não fui plenamente satisfeita”. (P64)*

*“Alguns princípios sim, os padrões devem ser adequados a cada ano letivo e a cada turma; depois da formação vem a experiência”. (P65)*

*“Durante a minha formação eu presenciei mais a forma tradicional de ensinar e sinceramente eu me identifico com esse padrão tradicional, mas os alunos necessitam formas mais atraentes”. (P66)*

*“Não! Não minha época os padrões eram um, hoje os padrões são outros e amanhã será diferente”. (P67)*

*“Não, depende da política do país e da necessidade de enfatizar o ensino da matemática nas escolas de ensino fundamental e médio, mas desde os princípios não devemos nos afastar”. (P68)*

*“Não devemos utilizar os mesmo métodos que tivemos no passado mas sim aprimorarmos cada vez mais”. (P69)*

*“Não. Como já disse o mundo sofreu uma enorme transformação nas últimas décadas e a educação não tem acompanhado essa mudança. Fomos formados em um sistema e nos é apresentada uma nova clientela, bem como proposta de trabalho. Isto é um tremendo choque”. (P70)*

*“Não, quando me formei era tudo possível, com materiais e recursos diversos, a realidade é outra”. (P71)*

*“Não. O que mais se ensinava era trabalhar de forma tradicional, conteudista...e hoje percebemos que ensinar matemática requer muito mais do que simplesmente “passar a matemática”, precisa criar estratégias”. (P72)*

*“Sim, pois não, não podemos parar de estudar para podermos estar sempre nos reciclando”. (P73)*

*“Não, pois os tempos mudaram e agora não se necessita tanta rigidez”. (P74)*

*“Não a faculdade nos prepara para a teoria da matemática, mas na sala de aula tudo é muito diferente”. (P75)*

*“Não, pois o mundo está em constantes mudanças, e o tradicional já não se enquadra nessa nova realidade que vivemos hoje”. (P76)*

*“A minha formação acadêmica não foi muito focada na contextualização dos temas matemáticos estudados. Muita coisa precisa ser mudada”. (P77)*

**Questão 5:** Você percebe algum obstáculo no ensino da matemática para abordar adequadamente assuntos que ainda não foram inseridos no nosso currículo?

*“Sim, principalmente a falta de interesse dos alunos; geralmente eles criam uma “barreira” quando o assunto é Matemática”.(P1)*

*“Acontece o seguinte: devido à dificuldade que encontramos de ensinar, estamos tendo problemas em trabalhar o nosso conteúdo Precisariamos rever os conteúdos em geral antes de inserirmos algo mais. Não que eu não sonhe em acrescentar alguns assuntos, mas é necessário revermos algumas situações”. (P2)*

*“Sim, nos falta muita base para trazer os assuntos para a realidade dos nossos alunos, principalmente em temas complexos”. (P3)*

*“Não”. (P4)*

*“Infelizmente o maior obstáculo é não conhecer a matemática, pois se você conhece, dá para tratá-la com intimidade. O melhor ainda é não conhecer tudo, é sempre uma nova aventura descobrir” (P5)*

*“Sim, os conteúdos são necessário porém de forma diferenciada”. (P6)*

*“Não, desde que estudado anteriormente para repassar aos alunos”. (P7)*

*“Obstáculo pode até aparecer, mas temos que enfrentar”. (P8)*

*“Existe uma certa oposição por parte dos próprios professores, que ao que parece não querem mudar sua dinâmica de aula”. (P9)*

*“Sim. A falta de conhecimento de minha parte, a falta de livros didáticos, e a jornada de aulas muito grande, devido aos baixos salários, o que impede que eu possa fazer pesquisas”. (P10)*

*“O único obstáculo que vejo é o atual modelo de ensino”. (P11)*

*“Capacitação”. (P12)*

*“Atualmente, os alunos na maioria chegam muito despreparados no ensino médio”. (P13)*

*“Existe sim obstáculo, mas se até mesmo os livros didáticos nos fornecer fonte de apoio isso será possível”. (P14)*

*“Gostaria muito de poder dar toda matéria planejada, mas a classe não ajuda. O tempo é curto. Não sei se respondi a pergunta, mas...” (P15)*

*“Sinto dificuldade na maioria das vezes na falta de recursos pedagógicos”. (P16)*

*“Obstáculo não, desde de que essa abordagem seja bem justificada e não sacrifique outros conteúdos necessários”. (P17)*

*“Sim, tem conteúdos que só ficamos sabendo em alguma capacitação como por exemplo os fractais, que não são aplicados no dia-a-dia da sala de aula”. (P18)*

*“Sim, a sexualidade”. (P19)*

*“Não sei quais assuntos seria, só conheço estes com que trabalho e estudei. Os fractais, não conheço. Li alguma coisa. Não fiz uma análise para responder se dever ser inserido no currículo”. (P20)*

*“Falta de interesse”. (P21)*

*“Na escola, a coordenação pede para que o planejamento de todos os professores das mesmas séries sejam semelhantes, o que inviabiliza grandes mudanças”. (P22)*

*“O espaço físico, equipamentos das escolas, no tocante a estrutura de pessoal designado, treinado e gerido pelo Estado para suporte nas escolas como por exemplo: professores para sala de informática” (P23)*

*“Sim, o despreparo do aluno”. (P24)*

*“Sim, principalmente no trato da geometria, uma parte deixada de lado do nosso currículo. A geometria faz com que o aluno pense e isto não parece muito interessante, não é?” (P25)*

*“Sim, outros métodos matemáticos para uma melhor adaptação no ensino da matemática, como usar mais o dia-a-dia de cada um como referência”. (P26)*

*“Sim, existe alguns assuntos que são difíceis de serem abordados, devido aos pré-requisitos do aluno. Conhecimento que ele deveria saber para a partir daí dar continuidade”. (P27)*

*“Sim. Falta de interesse, às vezes pelos alunos, às vezes pela direção e corpo discente e também docente” (P28)*

*“Em muitas situações sim. Precisamos adquirir esses conhecimentos para poder aplicá-los” (P29)*

*“Sim, pois nem todos têm a mesma idéia”. (P30)*

*“Não percebo! Na verdade não tenho o entendimento para dizer o que deve ou não deve ser inserido no nosso currículo”. (P31)*

*“Sim. A falta de tempo ou espaço, para serem discutidos novos assuntos”. (P32)*

*“Sim. Pois é difícil fugir da formalidade e encarar novos desafios. Existe muita resistência por parte dos mais antigos em acertar novos rumos”.(P33)*

*“Muitos, dependendo da clientela da U.E. (unidade escolar), o professor tem que fazer com que o aluno venha a ter interesse”. (P34)*

*“Sim. Discurso no sentido de flexibilização dos conteúdos e avaliações externas, muitas vezes em sentido contrário; extremamente tradicionais”. (P35)*

*“Sim”. (P36)*

*“O primeiro obstáculo é meu domínio sobre esse conteúdo. Pois tenho que conhecer muito bem o assunto para poder propô-lo em sala de aula. Outro obstáculo é a aceitação por parte dos alunos e colegas, e também os recursos materiais e de tempo”. (P37)*

*“Não sei dizer exatamente quais, mas há vários obstáculos para se ensinar matemática” (P38)*

*“A questão do material dourado, acho extremamente pertinente para o desenvolvimento de ações relacionadas ao cotidiano de nossos alunos”. (P39)*

*“Percebo a falta de base e de interesse dos alunos nos assuntos tradicionais, dificultando novas abordagens”. (P40)*

*“Veja bem, acho que todo o ensino inclusive da matemática dever ser reavaliado e reestruturado. No momento não tenho nenhum conteúdo a ser referência para o momento”. (P41)*

*“O próprio profissional, como ser norteador desses novos assuntos, ainda não está preparado para este desafio, pois não encontra em seus companheiros a mesma vontade de “mudar”. (P42)*

*“Não, desde que eu domine plenamente o assunto. Mas seria importante maior incentivo para capacitações”. (P43)*

*“Não vejo obstáculos, desde que esteja relacionado com os objetivos propostos para o meu trabalho”. (P44)*

*“Não percebo nenhum obstáculo”. (P45)*

*“Sim, às vezes não temos habilidades necessárias para mediar alguns assuntos”. (P46)*

*“Não existe obstáculo algum, porque já se trabalha com a interdisciplinaridade”. (P47)*

*“Sim, resistência dos alunos”. (P48)*

*“Os obstáculos já existem no que diz respeito ao currículo existente. Serão bem vindo assuntos que despertem o interesse do aluno”. (P49)*

*“Sim, a falta de conhecimento (nosso) e a falta de material até por parte dos alunos”. (P50)*

*“Fractais, a matemática do cotidiano, são alguns exemplos”. (P51)*

*“Sim, matemática com ênfase na cidadania, pois além do aluno interagir com o componente curricular na alteração de comportamento do educando na sociedade”. (P52)*

*“Não”. (P53)*

*“O nosso atual sistema de ensino”. (P54)*

*“Sim, tanto da parte dos professores como dos alunos. O velho é mais fácil e dá menos trabalho. Enquanto o novo assunto e nem todos querem novos desafios”. (P55)*

*“Tenho dificuldades na parte de geometria, construções, definições e conceitos (não sei se entendi a questão)” (P56)*

*“Depende do assunto a ser inserido. Mas adianto que quando envolve geometria tenho dificuldade em ensinar”. (P57)*

*“Os obstáculos que cria é o próprio professor, e também o aluno já vem com o estigma da matemática desde a 1ª série, então para mim fica difícil relacionar os obstáculos”. (P58)*

*“Sim. Dependendo do conteúdo, a falta de preparo e conhecimento”. (P59)*

*“Há muitos obstáculos, tempo, recursos materiais para uma aula diferenciada”. (P60)*

*“Não tentei”. (P61)*

*“Não, sinto meu aluno receptivo ao novo, ele é muito curioso e aberto”. (P62)*

*“Não. Mas tudo que é novo e não faz parte do conhecido, pode assustar um pouco. Mas o novo gera desafios e estes levam ao conhecimento”. (P63)*

*“Sim, falta material pedagógico, uma melhor orientação para o professor de como trabalhar diversos conteúdos”. (P64)*

*“Nenhum obstáculo, sempre é enriquecedor novos desafios”. (P65)*

*“Não”. (P66)*

*“Sim! A falta de conteúdos anterior por parte dos alunos, impedem a inserção de assuntos que poderiam ser interessantes para os alunos”.(P67)*

*“Sim, por exemplo, jogos educativos de matemática, alguns alunos acham que o professor está enrolando a aula”. (P68)*

*“Na matemática quando não é inserida no currículo é difícil, portanto precisamos de cursos para aprimorarmos nossos conhecimentos.”(P69)*

*Sim. Ensino da estatística e análise/construção de gráficos. Falta de material apropriado. Aplicação prática dos conteúdos trabalhados. Sugestões e treinamento para este tipo de trabalho que hoje é exigido”. (P70)*

*“Sim, hoje falo em nome do EJA (Educação de Jovens e Adultos), não tem um currículo adequado”. (P71)*

*“Sim. Trigonometria, geometria, função logarítmica”. (P72)*

*“Gostaria de ter domínio sobre esse assunto, sobre os fractais”. (P73)*

*“Sim, a falta de hábito de estudar, questionar”. (P74)*

*“Sim. A geometria em geral é uma matéria deixada de lado e é muito cobrada”.  
(P75)*

*“Sim, o não saber inseri-los”. (P76)*

*“Sim, precisamos de muito mais preparo para abordar assuntos como os fractais, por exemplo; por total desconhecimento”. (P77)*

## **ANEXO IX**

### **Seqüências das atividades aplicadas no 1º Encontro**

---

Nome: \_\_\_\_\_

## **ATIVIDADE 1 –CLASSIFICAÇÃO DOS OBJETOS**

Dados os objetos, classifique-os, descrevendo abaixo qual o critério utilizado, justificando.

Critérios:

Nome:

S\_\_\_\_\_

## ATIVIDADE 2 - Triângulo de Sierpinski

**Construção gráfica:** Triângulo de Sierpinski

**Material:** folhas de sulfite, régua e tesoura.

**Instrução 1:**

- Desenhar um triângulo equilátero
- Unir os pontos médios dos lados do triângulo e remova o triângulo do meio (pintando- com uma cor clara).
- Repetir em cada um dos triângulos não eliminados (os do canto) as mesmas construções anteriores.
- Repetir a operação anterior sucessivamente (neste caso, fazer pelo menos mais duas vezes).

**Instrução 2:**

- Colorir na figura 2 o triângulo central com cor clara indicando que foi eliminado (removido). Fazer a mesma coisa em todos os centrais.
- Colorir os triângulos não eliminados com cor escura.

**Instrução 3**

- A figura 2 será chamada iniciador-gerador representando o nível 0 do fractal (as figuras sucessivas representam respectivamente o nível 1, nível 2, nível 3,..., do fractal.


Observe sua construção e preencha a tabela abaixo:

Nível	Nó de triângulos	Comprimento do lado do triângulo	Altura do triângulo	Perímetro do triângulo	Área do triângulo
0					
1					
2					
3					

Responda:

- e) O que acontece com o perímetro do triângulo construído em cada nível?
- f) E com a área desses triângulos?
- g) O que acontece com o perímetro da figura (Sierpinsky) no final de cada nível?
- h) E o que acontece com a área da figura (Sierpinsky)?
- i) Comparando os dados preenchidos em cada nível na tabela anterior, imagine como ficaria o nível 5 sem passar pelo nível 4 e preencha o quadro abaixo.

Nível	Comprimento do lado do triângulo	Altura do triângulo	Perímetro do triângulo	Área do triângulo	Número de lados da figura Sierpinsky	Perímetro da figura Sierpinsky	Área total da figura Sierpinsky
5							A <sub>5</sub>

- j) imagine os dados dessa figura numa fase n e preencha a tabela abaixo.

Nível	Comprimento do lado do triângulo	Altura do triângulo	Perímetro do triângulo	Área do triângulo	Número de lados da figura Sierpinsky	Perímetro da figura Sierpinsky	Área total da figura Sierpinsky
n							A <sub>n</sub>

Nome: \_\_\_\_\_

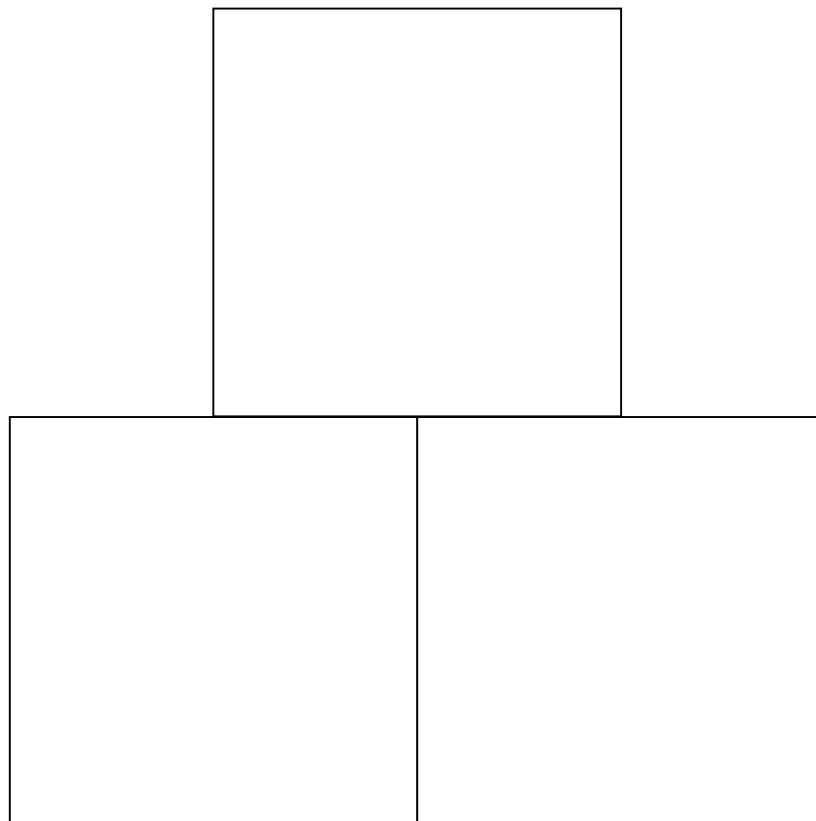
### ATIVIDADE 3 - Tapete de Sierpinski

---

**Construção gráfica:** Usando o Triângulo de Sierpinski: Os três quadrados

**Material:** folhas de sulfite, régua.

Construir um fractal, iniciador-gerador, dado por 3 quadrados (grandes iguais) conforme a disposição abaixo, cuja regra de construção é a mesma da Atividade 1: substituir sucessivamente cada quadrado por 3 novos quadrados (conforme o gerador) ajustando-os superiormente, inferiormente e lateralmente nos seus interiores, e eliminar o restante. Levar a construção até o nível 4.



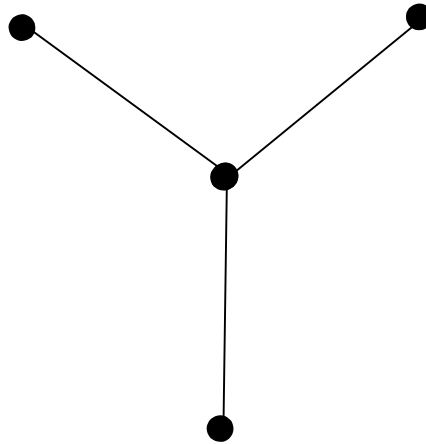
Nome: \_\_\_\_\_

#### ATIVIDADE 4 - Árvore

**Construção gráfica:** A árvore trifurcada igualmente com redução 1/2

**Material:** folhas de sulfite, régua.

Construir o fractal com iniciador-gerador, dado pela figura abaixo, onde os três ramos iniciais formam ângulos iguais entre si ( $120^\circ$ ); e a partir de cada nó repetir a construção trifurcada mas reduzindo à metade sucessivamente os três novos ramos.



## **ANEXO X**

### **Transparências – 2º Encontro**

---

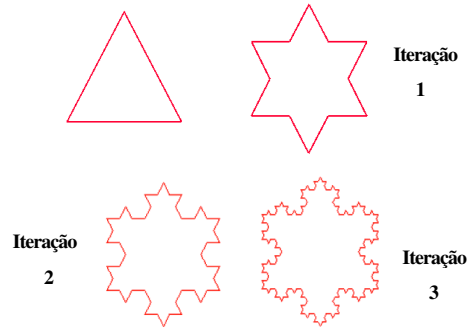
---

# FRACTAIS: UM NOVO HORIZONTE PARA A PRÁTICA NA SALA DE AULA

## 2º ENCONTRO

Arlete Aparecida Oliveira de Almeida  
 Mestranda PUC – SP  
 Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio  
 2005

### Ilha de Von Koch



### Ilha de Von Koch

Lado unitário:  $L = 1 \text{ dm}$   
 $P = 3L$   
 $S = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \quad S = \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} = 0,4330 \text{ dm}^2$

A figura obtida é uma estrela de 6 pontas.  
 $L = 4 \times \frac{1}{3} \quad P = 3 \times L \quad P = 3 \times \left(4 \times \frac{1}{3}\right) = 4 \text{ dm}$

**Iteração 1**

### Ilha de Von Koch

**Iteração 2**

Cada segmento mede  $\frac{1}{9}$ . Temos 48 segmentos

$P = 48 \times \frac{1}{9} = 5,33 \text{ dm}$

$S = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \rightarrow \text{área de cada figura}$

$S_i = S_{\text{anterior}} + 12 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0,6415 \text{ dm}^2$

### Ilha de Von Koch

**Iteração 3**

Figuras	Medida de cada lado
Figura de partida	1
Primeira iteração	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$
Segunda iteração	$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$
Terceira iteração	$\frac{1}{27} = \frac{1}{27} = 3^{-3}$
Quarta iteração	$\frac{1}{81} = \frac{1}{81} = 3^{-4}$
...	...

### Dimensão da Ilha de Von Koch

$$D = \frac{\log N}{\log r} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26$$

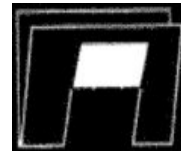
$N = n^\circ$  de elementos fractais obtidos  
 $r =$  escala

## Número de lados – Ilha de Koch

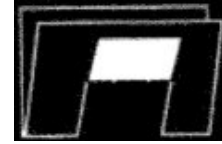
Figuras	Número de lados
Fig. de partida	$3 = 3 \times 4^0$
Primeira Iteração	$3 \times 4 = 12 = 3 \times 4^1$
Segunda Iteração	$12 \times 4 = 48 = 3 \times 4^2$
Terceira Iteração	$48 \times 4 = 192 = 3 \times 4^3$
Quarta Iteração	$192 \times 4 = 768 = 3 \times 4^4$
...	...

## CONFECÇÃO DOS CARTÕES FRACTAIS

Dobre segundo o segmento criado pelos dois cortes

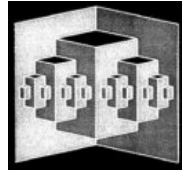
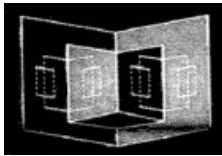


Repita os passos anteriores, mas agora para a parte da folha que acabou de dobrar

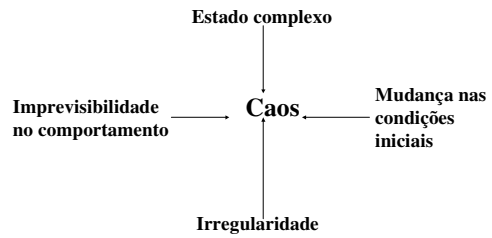


## CONFECÇÃO DOS CARTÕES FRACTAIS

Continue o processo o máximo de vezes possível.



## TEORIA DO CAOS

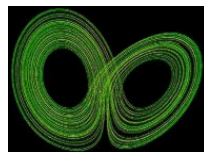


## TEORIA DO CAOS



Edward Lorenz

Atrator de Lorenz

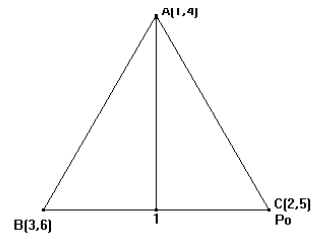


### TEORIA DO CAOS



Efeito borboleta

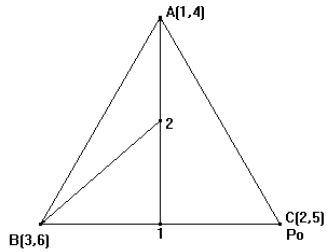
### JOGO DO CAOS



Marcar P0. Nomear os vértices com os n° dos dados.

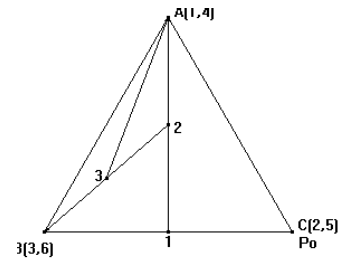
Unir P0 a metade do segmento (1) e com vetor ligar o vértice do n° do dado.

### JOGO DO CAOS



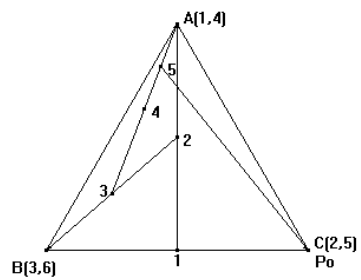
Marcar a metade do segmento anterior com o ponto 2 e unir ao vértice do n° do dado.

### JOGO DO CAOS

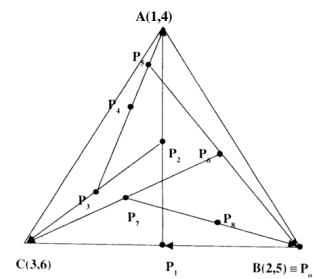


Repetir os passos anteriores

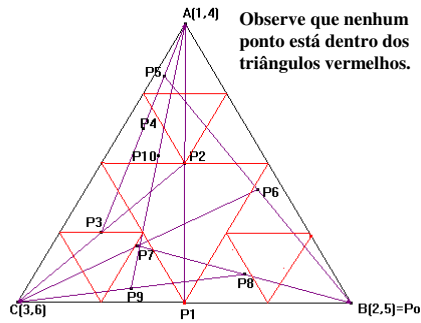
### JOGO DO CAOS



### JOGO DO CAOS



### JOGO DO CAOS



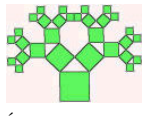
### JOGO DO CAOS

Os pontos estão localizados em três regiões triangulares, justamente nos cantos; e não existe pontos no triângulo central (exceto eventualmente P0)!!

Vocês conseguiram: **ORDEM NA DESORDEM E REGULARIDADE NA IRREGULARIDADE!!!**

Continuando os pontos, será gerado o triângulo de Sierpinsky!!!

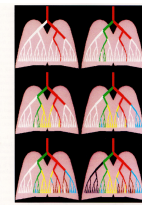
### FRACTAIS E SUAS APLICAÇÕES



Árvore Pitagórica



### FRACTAIS E SUAS APLICAÇÕES

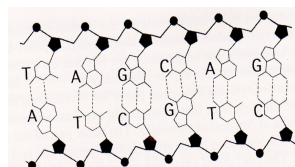


O dinâmico mecanismo responsável pelo enchimento dos pulmões envolve avalanche ou rompimento de ar que ocorrem dentro da área, em lugar de uma distribuição exponencial, um encontro de poder regular distribuição.

### FRACTAIS E SUAS APLICAÇÕES



Fotografia de uma ramificação de neurônios



Cadeia de DNA

Feliz  
Natal



Obrigada!!!

*Arlete*

## **ANEXO XI**

### **Apostila 2° - Encontro**

---

## FRACTAIS: UM NOVO HORIZONTE PARA A PRÁTICA NA SALA DE AULA

### Atividade: Analisando a Ilha de Von Koch

Figuras	Medida de cada lado
Figura de partida	1
Primeira iteração	
Segunda iteração	
Terceira iteração	
Quarta iteração	
...	...

**Calcular a dimensão da Ilha de Von Koch:**

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

Calculando o número de lados

Figuras	Número de lados
Fig. de partida	$3 = 3 \times 4^0$
Primeira iteração	$3 \times 4 = 12 = 3 \times 4^1$
Segunda iteração	
Terceira iteração	
Quarta iteração	
...	...

### Jogo do Caos:

Regra:

- 1) Desenhe um triângulo eqüilátero grande.
- 2) Associar os vértices os pares dos números que estão nos dados.
- 3) Marcar  $P_0$  em qualquer lugar, exceto no seu centro, pó exemplo, num dos vértices.
- 4) Jogar o dado. Marcar  $P_1$  no ponto médio do segmento de reta com um extremo em  $P_0$  e outro extremo no vértice do triângulo, correspondente ao número sorteado.
- 5) Jogar o dado sucessivamente ( por exemplo 10 vezes ou mais). Marcar consecutivamente os pontos  $P_2, P_3, \dots, P_{10}$  (ou mais), respectivamente nos pontos médios dos segmentos de reta com extremo no ponto  $P$  marcado na vez anterior e outro no vértice do triângulo correspondente ao número sorteado pelo dado.

## **ANEXO XII**

**Registro das respostas do questionário - 2º momento:  
O Professor e o Ensino de Matemática**

---

**Questão 1:** Se você já ouviu falar sobre fractais, tem formulado uma idéia a seu respeito. Se não, o próprio nome deve levá-lo a fazer referência sobre seu significado. Por favor, diga qual sua idéia.

*“Geometria dos fractais é uma geometria “nova”, surgida na década de 70, em que foge dos conceitos da Geometria Euclidiana, por tratar de figuras que não são “perfeitas” como o quadrado, por exemplo. Pra se construir uma figura fractal é necessário que se vá dividindo-a em partes iguais de modo a se obter uma figura semelhante à inicial, independente de quantas iterações forem feitas”.* (P2)

*“Fractais são figuras fragmentadas, através de sucessivas iterações que reproduzem o todo”.* (P3)

*“Algo fantástico, a idéia de fractais mesmo que não seja exatamente a anterior, permanece no sentido de fragmentos organizados”.* (P5)

*“Fractais são figuras que podem ser quebradas em pequenos pedaços, onde cada pedaço representa a própria figura de partida”.* (P7)

*“Sim”* (P10)

*“Sim, é a repartição infinita de uma mesma coisa obedecendo uma ordem”.* (P11)

*“Agora, depois destes encontros sim”.* (P12)

*“Fractais passa a idéia de alguma coisa fracionada e que segue um padrão nesse fracionamento, qualquer parte representa o todo”.* (P17)

*“Através desta oficina, tive conhecimento sobre fractais”.* (P18)

*“Fractais, fragmentos, dividir em partes proporcionais um todo”.* (P19)

*“Já havia ouvido falar, mas não tinha o conhecimento que você proporcionou”.*  
(P20)

*“Ouvi falar nos dois encontros. Fiquei satisfeito com o que foi passado, pretendo colocar em prática”.* (P21)

*“A idéia que tenho na teoria continua a mesma, no entanto, o modo de vê-los como algo mais simples torna-se possível a explicação dada, pois tinha ele somente*

*como algo de pesquisa avançada e não tinha idéia que poderia aplica-lo no ensino fundamental ou médio.”(P25)*

*“Sim, foi interessante o assunto sobre os fractais e despertou vários conceitos que podemos trabalhar em cima dos fractais, além disso saber fazer várias figuras geométricas”. (P26)*

*“Sim, já tinha ouvido falar, mas agora tive a oportunidade de conhecer um pouco mais. Fractais: alguma figura que é fracionada, dividida em figuras semelhantes, sempre lembrando a figura inicial” (P27)*

*“Tinha uma vaga idéia, portanto após as capacitações com a Prof. Arlete, tenho uma opinião formada a respeito dos mesmos”. (P28)*

*“A geometria vista sob novos ângulos e formulada de uma maneira diferente da tradicional”. (P29)*

*“Minha idéia hoje, é que eu tenho um modelo de uma figura e eu posso reproduzi-la quantas vezes eu quiser cada vez menor ou maior”. (P31)*

*“Ouvi falar apenas nesta capacitação e a idéia é que seja seguida sempre em cursos para que possa ser levado para as salas de aula como motivação”. (P32)*

*“A minha idéia de fractais é que são fragmentos de figuras que são semelhantes às originais e as novas figuras formadas tem dimensão fracionária”. (P33)*

*“A idéia de fragmentação: divisão” (P34)*

*“Sim, nestes dois encontros tive contato. Fractais é uma dimensão fracionária, ou seja, é uma figura quebrada em pequenos pedaços, cada pedaço representa o todo”. (P36)*

*“Agora posso afirmar que tenho conhecimento de uma “fração” do assunto...O que vou levar como referência principal, é que os fractais são frações de algo, que carrega todas as características do objeto principal. São miniaturas ou ampliações do objeto estudado inicialmente”. (P37)*

*“Fractais é quebrar uma figura em várias outras iguais, mas de dimensões diferentes ou seja é a geometria diferente da geometria Euclidiana que conhecemos”.*  
(P37)

*“Agora entendo o porque consta no PCN, com a sua explanação, podemos entender um pouco mais desse assunto que é muito abrangente”.* (P39)

*“Já tinha usado a teoria dos fractais em Física fissão nuclear, mas sem o entendimento que adquiri nestes encontros, foi interessante pois pude me aprofundar na teoria sobre o que são e como interpretá-los.”* (P40)

*“Sim, já tinha ouvido falar, mas hoje estou mais bem informado quanto ao que é fractais, sobre a fragmentação”.* (P41)

*“Processo de iterações, onde você fragmenta objeto/figuras”.* (P42)

*“Hoje, após esta capacitação conheço fractais”.* (P43)

*“Fractais é a fragmentação parte de uma figura geométrica, seguindo uma regra pré-estabelecida. Ex.: divisão dos lados de um polígono em partes iguais e a formação de figuras semelhantes.”* (P44)

*“Já ouvi falar sobre fractais, fiz um curso no Caem”.* (P45)

*“Sim, é a reprodução de um todo em pedaços que formam figuras similares com dimensões diferentes”* (P46)

*“Pode relacionar com a dança”.* (P47)

*“Conheci nestes encontros, nunca tinha ouvido falar ou lido a respeito”.* (P48)

*“Uma figura plana pode ser fragmentada em outras figuras semelhantes a ela obedecendo-se uma certa ordem, até obtermos figuras (no total) completamente diferentes como um todo, mas idênticas em cada bifurcação e podemos fazer isto infinitamente”.* (P49)

*“Depois dos encontros já tenho uma noção do que seja fractais, que são valores (calcular a área) que pensei jamais conseguir calcular por até não ter forma”.* (P50)

*“Geometria onde se revela as figuras até antes tidas como monstros geométricos, onde encontramos figuras fragmentadas em várias dimensões”.* (P51)

*“A idéia sobre “fractais” foi esclarecida nos dois encontros, construir figuras a partir de um modelo com medidas fracionadas foi importante para quebrar a noção do aluno, para trabalhar com medidas incomensuráveis”. (P52)*

*“Já ouvi falar, são fragmentos encontrados em objetos e figuras. Esses fragmentos seguem um padrão e qualquer parte é semelhante ao todo”. (P54)*

*“A idéia de fractais é sair de um padrão e ir realizando a sua iteração, levando em consideração uma geometria sem regularidade (perfeição)”. (P55)*

*“Agora já ouvi falar em fractais, e com facilidade podemos trabalhar alguns pontos com os alunos”. (P56)*

*“Já ouvi falar através de você e gostei muito, também gostaria muito de aperfeiçoar, e realmente observei que são como a própria palavra diz: fragmentos, onde se trabalha de diversos ângulos”. (P58)*

*“Sim, fragmentos, dividir em partes”. (P59)*

*“Fractais são figuras que não obedecem ordens como as euclidianas que anteriormente eram chamados de monstros”. (P60)*

*“Fractais para mim, agora tem um significado mais exato, mas não fugiu da parte, ou melhor das partes até chegar ao todo”. (P62)*

*“Partes fragmentadas a partir de um inicial, mas conservando esse inicial (suas propriedades)”. (P63)*

*“Fractais são figuras surgidas através de processos de divisões de uma figura original em uma área limitada”. (P66)*

*“Fractais são partes de um corpo que são semelhantes a estes.” (P67)*

*“Tinha uma vaga idéia sobre fractais, após esses dois encontros posso dizer a importância de estudá-los”. (P68)*

*“Sim, para mim foi muito interessante aprender a respeito dos fractais”. (P69)*

*“Fractais são figuras formadas a partir de um modelo, onde são repetidos determinados procedimentos, onde se originaram figuras semelhantes ao modelo.” (P70)*

*“Agora aprendi, o quanto é importante, diferente e gostoso de utilizá-lo na sala de aula”. (P71)*

*“Depois desses dois encontros consegui conceituar o que venha a ser fractais. A idéia é partir de uma figura (exemplo) e através de segmentos obter outras figuras que sejam iguais a original (primeira)”. (P72)*

*“Sim, já ouvi falar na faculdade e no curso em que fiz na D.E., e o nome fractais se referem a figuras que são quebradas em pequenos pedaços e esses pedaços formam uma outra figura em um todo”. (P73)*

*“No começo pensei que não era nada, agora descobri que fractais faz parte da nossa vida, é muito fácil de se trabalhar com ele”. (P74)*

*“Sim, fractais algo fragmentado em pedacinhos iguais’. (P76)*

*“Fractais é a fragmentação de um todo mantendo suas características”. (P77)*

*“Sim, conheci mais profundamente neste encontro”. (P78)*

**Questão 2:** Professor, como a matemática da escola se relaciona com a sua história de vida?

*“Gostaria de tornar as aulas mais a prática, a fim de levar o aluno a traçar uma comparação entre a sala de aula e o dia-a-dia”. (P2)*

*“A matemática tem tudo a ver com a minha história de vida, tento sempre que possível convencer que sem matemática não se vive, mesmo que determinados conceitos, num primeiro momento possam não ter sentido para o aluno “. (P3)*

*“A própria matemática, eu a vejo como um tremendo fractal em que os pedaços formam o todo e o todo pode ser fragmentado”. (P5)*

*“Sempre procurei relacionar a matemática com a minha história de vida; em tudo há matemática; é preciso saber reconhecer e valorizar isto”. (P17)*

*“Através do cotidiano. Podemos passar para o aluno o conteúdo envolvendo nos problemas do dia-a-dia”. (P32)*

*“Nos tempos escolares tudo era informado sem saber o que se pretendia, hoje tentamos informar para o que não foi informado em nosso tempo. Temos sim a responsabilidade de fazer o melhor e preparar nossos alunos”. (P39)*

*“Foi através dela e pelo gosto por ela que desenvolvi e desenvolvo meu trabalho fora da sala de aula”. (P40)*

*“Entendo essa questão como trabalhar, e com isso tento encaminhar o conteúdo dentro de maneira significativa e estabelecer relação com o dia-a-dia”. (P41)*

*“Sobrevivência e novos conhecimentos”. (P47)*

*“A matemática sempre fez parte de minha vida, a partir da 1ª série do Ensino Médio, a matemática da escola se relaciona como uma história de amor, onde a coluna mestra, e fazer e ensinar com amor”. (P52)*

*“Na minha vida o raciocínio lógico até me atrapalha, e cobro do meu aluno coerência de raciocínio”. (P62)*

*“Com certeza após esses encontros, posso dizer que mudou”. (P68)*

*“A escola é a base onde são aperfeiçoados e inovados conceitos são aprendidos, desde a infância; local que nos induz a aprender e conviver”. (P70)*

*“Ao aplicar no dia-a-dia”. (P71)*

*“Gosto da área de exatas...na verdade eu admiro a matemática e sempre que conhecemos algo novo, como por exemplo os fractais, é muito gratificante”. (P72)*

*“Antigamente a matemática era vista de um modo tradicional, ou seja, lousa e giz. Hoje posso afirmar que a matemática não precisa ser só lousa e giz, podemos criar outros métodos legais e diferentes para uma ótima aula”. (P73)*

*“Se relaciona da seguinte maneira, todos os dias que vou trabalhar, sinto que vou para a guerra e quando vejo que alcancei o objetivo, sinto que ganhei essa guerra”. (P74)*

*“É o viver do meu dia-a-dia faz parte do meu ensinar diário”. (P76)*

**Questão 3:** Professor, você percebe a necessidade de inserir novos rumos para o ensino da matemática? Cite essas necessidades e suas justificativas.

*“Sim, os conteúdos nunca são revistos, mas pra falar a verdade, também não sei por onde começar”.*(P10)

*“Acredito em novas técnicas, mas nunca esquecendo ou ignorando o básico e o elementar”.* (P11)

*“Sim, oferecer oportunidade para o aluno conhecer novas idéias, não se prender a conteúdos do livros, perceber a beleza que há na matemática”.* (P17)

*“Sim, em relação à geometria observamos que podemos utilizar os fractais para abordar conteúdos como as frações, semelhanças, logaritmos entre outros”.* (P19)

*“Sim, estas oficinas são a prova de como se pode fazer a matemática de forma agradável e criativa”.* (P20)

*“Mais capacitação sobre vários temas”.* (P21)

*“Sim, percebo. Devemos colocar no aprendizado dos nossos alunos coisas do cotidiano, coisas materiais para eles, assim podemos incentivá-los a aprender e a pesquisar”.* (P25)

*“Sim devemos inserir novos rumos como por exemplo os fractais que aprendemos no decorrer das aulas e outras experiências que ainda podemos conhecer”.* (P26)

*“Claro que sim. Eu mesmo não estou plenamente satisfeito com a minha “performance” de professor. Tento minimizar os efeitos que o “tradicionalismo” causou em mim durante minha formação, mas nem sempre tenho sucesso...Mas eu chego lá”.* (P37)

*“Sim. Temos que trazer vários assuntos que sejam esclarecedores e não somente conteúdos. Temos que ter a humildade de sempre estarmos dispostos ao aprendizado e ouvir nossos alunos para sanarmos dificuldades que ora passaram vários professores que às vezes nem se deram conta que são extremamente importantes para a formação do cidadão e não apenas conteudista”.* (P39)

*“Sim, com certeza, principalmente levar todos os conteúdos matemáticos, as coisas úteis e práticas”.* (P43)

*“Percebo que a matemática já está seguindo um novo rumo, pois eu fiz vários cursos no Caem durante 4 anos, e com isso consigo trabalhar diferente”. (P45)*

*“Sim, é preciso voltar mais a matemática para o dia-a-dia de nossas crianças, para o cotidiano delas”. (P51)*

*“Trabalho com projetos interdisciplinares e transdisciplinares; temas sociais e ambientais; conscientizando a comunidade escolar para cuidar do local onde moram”. (P52)*

*“Sim. Essa matemática mais ligada ao concreto, como transformar uma folha de papel sulfite num cartão trabalhando a matemática”. (P59)*

*“Relacionar a matemática com o dia-a-dia do aluno é muito importante mas nem sempre a temos ou conseguimos coloca-las em prática”. (P66)*

*“Sim, para que o aluno seja atraído por esta disciplina e possa tomar gosto, não só pelo fato de ser importante na sua vida”. (P68)*

*“Sim, o trabalho com projeto para melhor compreensão do aluno”. (P71)*

**Questão 4:** Você acha que a sua área de atuação como professor de Matemática, deve seguir os padrões propostos durante sua formação? Comente.

*“Sim, mas podemos aprender outras experiências, porque quanto mais conhecimento melhor será nossa atuação como professor”. (P26)*

*“Eu acho que em alguns aspectos sim, mas na maioria das vezes os conceitos propostos na Faculdade são muito distantes da real situação da escola”. (P33)*

*“Sim, mas com ressalvas. Tenho como exemplo o conceito de fractais, que só conheci agora depois de alguns anos de profissão”. (P54)*

*“Devo seguir os padrões sim, e também fazer com que a matemática seja algo gostoso de se aprender”. (P58)*

*“Não, pois o que aprendemos é só uma base e desta base criar algo que faça a aula ficar mais legal e interessante”. (P73)*

**Questão 5:** Você percebe algum obstáculo, no ensino da matemática para abordar adequadamente assuntos que ainda não foram inseridos no nosso currículo?

*“Não”. (P21),*

*“Sim. Falta de interesse, às vezes pelos alunos, às vezes pela direção e corpo docente”. (P28)*

*“Sim, mas por exemplo, Fractais, não tenho mais esta barreira, pois estes encontros foram esclarecedores”. (P36)*

*“Sim, pois os alunos não possuem conhecimento básico necessário para poder inserir assuntos novos”. (P38)*

*“Sim, mas o obstáculo é nosso, falta de preparo para lidar com certos assuntos que fogem do currículo”. (P43)*

*“Os obstáculos são os programas a serem cumpridos, e o novo assunto deve ter relação com a proposta de trabalho. Ocorrendo a relação, não vejo nenhum obstáculo”. (P44)*

*“Não; acho que o educador deve estar ocupado em cursos de capacitação e procurando aplicar aquilo que é viável em escola pública”. (P52)*

*“Geralmente a falta de material para trabalhar com figuras em geral”. (P66)*

*“Não na rede pública, visto que ela permite interpretar e atuar de acordo com os PCN's. O tema fractais é um bom assunto para complementar o ensino de geometria, progressão geométrica, logaritmo probabilidade, etc.”. (P68)*

*“Não, pois temos que usar a criatividade para conseguir alcançar qualquer objetivo”. (P73)*