

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Rubens Vilhena Fonseca

NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA:

Uma Investigação Entre Estudantes de Licenciatura em Matemática

**São Paulo
2015**

Rubens Vilhena Fonseca

**NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARIMÉTICA:
Uma Investigação Entre Estudantes de Licenciatura em Matemática**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação, do **Professor Dr. Gerson Pastre de Oliveira**.*

**São Paulo
2015**

Banca Examinadora

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial desta dissertação por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Assinatura _____ local e Data _____

A DEUS: Toda Honra e Glória

À minha família: motivação para continuar sempre

A todos que de forma direta ou indireta me ajudaram a chegar até aqui

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo o que Ele significa na minha vida.

Ao meu orientador, professor doutor Gerson Pastre de Oliveira sem o qual grande parte desse desafio não seria cumprido.

Aos professores e todos os funcionários da PUC.

Aos professores doutores que atuam em nosso querido Estado do Pará José Messildo, Natanael Cabral que gentilmente aceitaram participar da Banca, e que muito contribuíram com seus valiosos conhecimentos, para o enriquecimento desse trabalho. Sem as suas contribuições, certamente este trabalho não teria sido concretizado.

A professora doutora Cileda de Queiroz Silva Coutinho

Ao Prof. Dr. Saddo, coordenador do programa, que a todo o momento criou condições para que eu pudesse concluir este grande desafio.

À minha família, que sempre me incentivou e me apoiou nesta árdua caminhada.

Aos colegas da UEPA, pelo incentivo e amizade verdadeiros.

A todas as pessoas que fizeram parte da minha trajetória acadêmica e que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	17
CAPÍTULO 1.....	24
PROBLEMATIZAÇÃO	24
CAPÍTULO 2.....	30
NÚMEROS PRIMOS: UM PANORAMA	30
2.1 Breve percurso histórico: a importância dos números primos para a Matemática.....	30
2.1.1 <i>Os pitagóricos</i>	30
2.1.2 <i>Euclides</i>	31
2.1.3 <i>Números Famosos e o Teorema Fundamental da Aritmética</i>	36
2.2 <i>O teorema dos números primos.</i>	42
2.3 <i>Diofanto</i>	45
2.4 <i>Um problema importante</i>	50
2.5 <i>As contribuições de Mersenne</i>	52
2.6 <i>Euler e a teoria dos números</i>	52
2.7 <i>Gauss</i>	53
2.8 <i>Mordell e a dedicação por uma equação</i>	54
2.9 <i>Crivo de primalidade de Eratóstenes</i>	56
CAPÍTULO 3.....	59
QUADRO TEÓRICO	59
3.1 Revisão da literatura.....	59
3.1.1 <i>Teses</i>	60
3.1.2 <i>Livros</i>	63
3.1.2.1 <i>Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction. S. R. Campbell e R. Zazkis (editores), Ablex Publishing, 2002.</i>	63
3.1.2.1.1 <i>Uma visão panorâmica do livro</i>	64
3.1.2.1.2 <i>A contribuição de cada capítulo</i>	65
3.1.2.2 <i>Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects. R. Zazkis, e S. R. Campbell, (Editores), Routledge Taylor & Francis Group, 2006.</i>	76
3.2 Representações numéricas, conceitos, significados e notações.....	82
CAPÍTULO 4.....	94
APORTES METODOLÓGICOS.....	94
4.1 Descrição dos sujeitos e do ambiente da pesquisa.....	96
4.2 Categorias de análise	98
4.3 Descrição da sequência didática	98
CAPÍTULO 5.....	102
ANÁLISES.....	102
5.1 Respostas dos estudantes e respectivas descrições	102
5.1.1 Questão 1.....	102
5.1.1.1 Resposta de Aluno 1.....	102
5.1.1.2 Resposta de Aluno 2.....	102
5.1.1.3 Resposta de Aluno 3.....	103
5.1.1.4 Resposta de Aluno 4.....	103
5.1.1.5 Resposta de Aluno 5.....	104
5.1.1.6 Resposta de Aluno 6.....	104
5.1.1.7 Resposta de Aluno 7.....	104
5.1.1.8 Resposta de Aluno 8.....	105

5.1.1.9	Resposta de Aluno 9	105
5.1.1.10	Resposta de Aluno 10.....	105
5.1.1.11	Análise das respostas da questão 1	106
5.1.2	Questão 2	107
5.1.2.1	Resposta de Aluno 1	107
5.1.2.2	Resposta de Aluno 2	108
5.1.2.3	Resposta de Aluno 3	108
5.1.2.4	Respostas de Aluno 4	109
5.1.2.5	Respostas de Aluno 5	109
5.1.2.6	Respostas de Aluno 6	110
5.1.2.7	Resposta de Aluno 7	110
5.1.2.8	Resposta de Aluno 8	110
5.1.2.9	Resposta de Aluno 9	111
5.1.2.10	Resposta de Aluno 10.....	111
5.1.2.11	Análise das respostas da questão 2	111
5.1.3	Questão 3	112
5.1.3.1	Resposta de Aluno 1	113
5.1.3.2	Resposta de Aluno 2	113
5.1.3.3	Resposta de Aluno 3	115
5.1.3.4	Resposta de Aluno 4	115
5.1.3.5	Respostas de Aluno 5	116
5.1.3.6	Resposta de Aluno 6	116
5.1.3.7	Resposta de Aluno 7	117
5.1.3.8	Resposta de Aluno 8	118
5.1.3.9	Resposta de Aluno 9	119
5.1.3.10	Resposta de Aluno 10.....	119
5.1.3.11	Análise das respostas da questão 3	120
5.1.4	Questão 4	121
5.1.4.1	Resposta de Aluno 1	121
5.1.4.2	Resposta de Aluno 2	122
5.1.4.3	Resposta de Aluno 3	122
5.1.4.4	Resposta de Aluno 4	123
5.1.4.5	Resposta de Aluno 5	123
5.1.4.6	Resposta de Aluno 6	123
5.1.4.7	Resposta de Aluno 7	124
5.1.4.8	Resposta de Aluno 8	124
5.1.4.9	Resposta de Aluno 9	124
5.1.4.10	Resposta de Aluno 10.....	125
5.1.4.11	Análise das respostas da questão 4	125
5.1.5	Questão 5	126
5.1.5.1	Resposta de Aluno 1	126
5.1.5.2	Resposta de Aluno 4	127
5.1.5.3	Resposta de Aluno 6	127
5.1.5.4	Resposta de Aluno 7	128
5.1.5.5	Resposta de Aluno 9	128
5.1.5.6	Resposta de Aluno 10.....	129
5.1.5.7	Análise das respostas da questão 5	130
5.1.6	Questão 6	132
5.1.6.1	Resposta de Aluno 1	132

5.1.6.2	<i>Resposta de Aluno 2</i>	132
5.1.6.3	<i>Resposta de Aluno 3</i>	132
5.1.6.4	<i>Resposta de Aluno 4</i>	132
5.1.6.5	<i>Resposta de Aluno 5</i>	133
5.1.6.6	<i>Resposta de Aluno 6</i>	133
5.1.6.7	<i>Resposta de Aluno 8</i>	133
5.1.6.8	<i>Resposta de Aluno 9</i>	134
5.1.6.9	<i>Resposta de Aluno 10</i>	134
5.1.6.10	<i>Análise das respostas da questão 6</i>	135
5.2	Sobre as análises do instrumento	135
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	142
	REFERÊNCIAS	149

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Números primos em uma abordagem curricular	27
Figura 2 – Representações sobre primos	34
Figura 3: Triângulo retângulo	48
Figura 4 - Configurações 2 x 2 e 3 x 5	73
Figura 5: Protocolo de resolução do problema 3 – Aluno 1	113
Figura 6: Protocolo de resolução do problema 4 – Aluno 1	122
Figura 7: Protocolo de resolução do problema 4 – Aluno 4	123
Figura 8: Protocolo de resolução do problema 5 – Aluno 1	127
Figura 9: Protocolo de resolução do problema 6 – Aluno 8	134

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Euclides e a teoria dos números (livro VII)	32
Quadro 2 – Euclides e a teoria dos números (livro IX).....	32
Quadro 3 – Divisores mencionados	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Primos menores que 100 identificados pelo Crivo de Eratosthenes.....	57
Tabela 2 – Participantes efetivos da pesquisa	96

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar uma sequência didática diretamente ligada à questão de pesquisa, que pretendeu proporcionar aos estudantes um percurso investigativo em busca de soluções para os problemas levantados, que estão no domínio da Teoria dos Números, e são relativos aos Números Primos e ao Teorema Fundamental da Aritmética, objetos desta pesquisa, desenvolvida com alunos do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Pará. Realizaram-se estudos preliminares, de ordem teórica, e uma revisão bibliográfica para a formulação da questão de pesquisa e identificação de ferramentas conceituais para a análise dos protocolos. Foram aplicadas seis questões envolvendo números primos e o teorema fundamental da aritmética a dez estudantes. Com base, principalmente, em estudos que consideravam as representações numéricas e suas características transparentes ou opacas, em uma abordagem qualitativa de pesquisa, analisaram-se as respostas dadas pelos alunos. Os estudos preliminares permitiram a elaboração de uma problematização em torno da seguinte questão de pesquisa: quais saberes e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética são evidenciados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará quando submetidos a uma sequência didática que pretendeu inserir os mesmos em percursos investigativos, formatados a partir de pressupostos teóricos ligados a representações numéricas e suas características transparentes/opacas? O trabalho justifica-se pela escassez de pesquisas relacionadas com a Teoria dos Números na área da Educação Matemática. Os resultados revelaram a necessidade de um domínio mais amplo dos licenciandos no que se refere às questões relacionadas à compreensão dos temas em tela; especificamente, ficaram evidenciadas dificuldades atinentes ao trabalho com certas representações numéricas, e, principalmente, em relação aos conceitos de números primos e do teorema fundamental da aritmética.

Palavras-chave: Números primos; Teoria dos Números; Educação Matemática; Formação de Professores de Matemática; Teorema Fundamental da Aritmética; Contrato Didático.

ABSTRACT

This work aims to analyze a didactic sequence directly linked to the research question, which sought to provide students an investigative route in order to find solutions to the problems raised, which are in the field of number theory, and are related to prime numbers and Fundamental Theorem of Arithmetic, objects of this research, developed with students of the degree course in mathematics of the Pará State University. There were theoretical studies and a literature review for the formulation of the research question and identification of conceptual tools for analyzing protocols. Six questions were applied to ten students, involving prime numbers and the fundamental theorem of arithmetic. Based primarily on studies that considered the number representations and their transparent or opaque characteristics, in a qualitative study, the answers given by the students were analyzed. Preliminary studies allowed the development of a problematic around the following research question: What knowledge and difficulties about the concepts / properties of prime numbers and the fundamental theorem of arithmetic are evidenced by undergraduate students in Mathematics of the Pará State University when subjected to a didactic sequence that intended to involve them in investigative routes formatted from theoretical assumptions related to numerical representations and their transparent / opaque features? The work is justified by the scarcity of research related to number theory in mathematics education in Brazil. The results revealed the need for mastery of undergraduates with regard to issues related to understanding research themes; specifically, difficulties relating to work with certain numerical representations were highlighted, especially in relation to the concepts of primes and the fundamental theorem of arithmetic.

Keywords: Prime numbers; Number theory; Mathematics Education; Mathematics Teachers Education; Fundamental Theorem of Arithmetic.

INTRODUÇÃO

A pesquisa aqui apresentada procurou fornecer elementos para a compreensão acerca dos saberes acerca dos números primos que podem ser evidenciados por estudantes de licenciatura em matemática. Evidentemente, dito desta forma, o tema delineado para este trabalho poderia parecer inabordável. Entretanto, um refinamento desta ideia mais geral pode ser fornecido quando se pensa na questão de pesquisa, apresentada mais adiante de maneira formal, e que se relaciona com a aprendizagem do conceito e propriedades dos números primos e do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) pelos futuros professores de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Os objetos de estudo, deste modo, são o número primo e o TFA em relação à compreensão sobre esses tópicos da teoria dos números pelos alunos no curso de licenciatura. De outro modo, pode-se dizer que esta investigação procura, em conexão com a teoria subjacente, identificar a aquisição de saberes relativos à aritmética, concentrando-se em dois de seus tópicos centrais.

Para dar conta da proposta supramencionada, leva-se em consideração um cenário formado por estudos realizados anteriormente em universidades canadenses, tendo como sujeitos os chamados *preservice teachers*, cujos relatos estão contidos nos artigos *Prime decomposition: understanding uniqueness* (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996) e *Understanding primes: the role of representation* (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2004). Nestes estudos, descritos mais adiante de forma pormenorizada, os pesquisadores dirigiram questões acerca da primalidade e de elementos teóricos fundamentais ao entendimento da divisibilidade de números inteiros que poderiam ser respondidas a partir de conhecimentos consolidados acerca do TFA e das propriedades essenciais dos números primos. Na investigação aqui descrita, as questões empregadas nos relatos supramencionados são repercutidas com estudantes de uma universidade pública do estado do Pará, com o intuito de comparar as respostas encontradas, as características peculiares dos dois estudos e eventuais contribuições adicionais aos aportes teóricos. Servem de base às análises, além dos trabalhos supramencionados, outros trabalhos de origem semelhante, como Zazkis e Gadowsky (2001) e Zazkis (2005), bem como o estudo de Lesh, Behr e Post (1987), entre outros, descritos mais adiante. Em termos institucionais, este estudo foi desenvolvido no âmbito do grupo PEA-MAT (Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como parte do trabalho com o conhecimento matemático relativo ao projeto “Tecnologias e

educação matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces”, apoiado pelo CNPq.

Em relação a esta pequena descrição inicial, seria justo a qualquer um perguntar a origem destas inquietações, ou seja, de onde viriam tais perplexidades, o que se tenta descrever agora¹.

Como professor há mais de uma década da disciplina Teoria dos Números, a sala de aula tem sido um ambiente que pude empregar para produzir empiricamente muitas questões sobre o abandono prematuro dos métodos aritméticos em prol dos métodos algébricos. Cogitava se tal fato não se devia a uma formação matemática básica que se caracterizava por apresentar de modo muito superficial certos tópicos que sempre foram centrais na história da matemática, como os números primos. Essa suposta abordagem superficial parecia se refletir em uma atitude de desinteresse pela aritmética no ensino superior, e sempre me causaram muitas inquietações sobre a futura prática do licenciando em Matemática na escola básica.

Muito embora tenha observado que, a rigor, o desinteresse por Teoria dos Números não tenha a ver necessariamente com o aluno, o que percebi em sala é a falta de uma aprendizagem conceitual e não apenas procedimental nesta disciplina, abordagem esta sobremaneira dificultada pela pouca experiência que a maioria dos estudantes apresenta com manipulações aritméticas. Percebi, também, da parte dos estudantes, uma falta de informações históricas sobre a influência da teoria dos números no desenvolvimento da matemática.

Esses questionamentos e inquietações motivaram leituras e estudos no âmbito do grupo de pesquisas PEA-MAT (Processos de Ensino e Aprendizagem em Matemática), os quais, por sua vez, conduziram à elaboração dos procedimentos que culminaram nesta pesquisa, realizada em meu local de trabalho, a Universidade do Estado do Pará (UEPA). De maneira mais precisa, permitiram elaborar a questão de pesquisa, que antecipo aqui, para mais tarde melhor explicá-la: *quais saberes e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética são evidenciados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará quando submetidos a uma sequência didática que pretendeu inserir os mesmos em percursos investigativos, formatados a partir de pressupostos teóricos ligados a representações numéricas e suas características transparentes/opacas?*

¹ Em função do caráter pessoal da descrição, troca-se, neste ponto, a narrativa para a primeira pessoa do singular

As reflexões provocadas por esta questão acabaram suscitando outras perguntas em relação aos (potenciais) futuros professores de Matemática da UEPA: o que aprendem quando se deparam com os conteúdos da disciplina Teoria dos Números? Que conhecimentos prévios são utilizados? Que tipo de contribuições este trabalho poderia trazer para área da Educação Matemática, sobretudo para a formação de professores que ensinam Matemática? Como os futuros professores de Matemática realizam suas ações de ensino, quanto aos conceitos mais profundos da Aritmética? Como organizam, argumentam e avaliam os tópicos dessa disciplina? Existem outras pesquisas que investigam o desenvolvimento da formação profissional a partir do envolvimento com conteúdos da Teoria dos Números? Que aproximações e distanciamentos podem ser estabelecidos entre essas pesquisas e a que se desenvolve aqui? O que os futuros professores acreditam poder aprender com essa disciplina e que poderia, de alguma forma, contribuir para uma visão crítica do ensino de Aritmética na educação básica?

Esta pesquisa não responde todos estes questionamentos, uma vez que procurou ser guiada pela questão central já mencionada. Entretanto, pareceu-me relevante indicar que veredas se abriram à busca por elementos que sinalizassem a importância da Teoria dos Números na formação dos licenciandos em Matemática. Da mesma forma, considero importante uma pequena descrição acerca dos caminhos que até aqui me trouxeram.

Fui formado em matemática em um contexto educacional onde predominava a ideia de que esta disciplina era para poucos. Durante muito tempo, o orgulho meio inocente em pensar que quem estudava matemática era melhor do que os outros era algo comum. Esse tipo de atitude se refletiu em minha prática profissional como docente. Não existia nenhum tipo de preocupação de minha parte com as dificuldades dos alunos. Tudo se resumia a entender que aquele indivíduo não “nasceu para a matemática”. Jamais imaginava que muitos daqueles fracassos se deviam aos meus erros. Sempre acreditei que ampliar meus conhecimentos em matemática seria suficiente para fazer meu trabalho, que julguei se resumir em apresentar e explicar o conteúdo em sala. Os resultados negativos, portanto, deveriam ser considerados como “culpa” dos alunos, sem “base” matemática.

De igual maneira, julguei que cumprir rigidamente meus horários, respeitando todos os alunos e as determinações acadêmicas da instituição de ensino fariam com que meu trabalho como professor de matemática estivesse absolutamente correto. Tudo se resumia a ministrar os conteúdos e aplicar as avaliações correspondentes. Qualquer reclamação de aluno

sobre seu fracasso era facilmente rechaçada, sob o argumento de que explicações detalhadas sobre o assunto tinham sido feitas em sala, no lapso temporal correto e absolutamente rígido. Nesta época, minha atitude e postura como professor nunca eram objetos de reflexão, de modo a avaliar o quanto contribuiriam como um dos fatores que poderiam levar o aluno ao fracasso.

Com uma formação que valorizava a matemática pela matemática, durante a graduação fui adquirindo um grande preconceito por tudo que terminasse em “ia”, isto é, pedagogia, filosofia, sociologia, por exemplo. Coisas de um jovem universitário sem uma capacidade crítica sobre alguns discursos. Não conseguia perceber a importância de outros saberes na qualificação de um futuro professor de matemática, ou seja, não tinha a compreensão necessária para perceber que no exercício da profissão de professor de matemática, conhecimentos transversais são extremamente relevantes e compõem de múltiplas formas, o complexo processo de aprendizagem.

Por volta do ano 2000, após ceder às indicações de bons colegas da área de educação matemática, comecei a ler os livros emprestados por eles e que me indicaram onde deveria buscar respostas para a minha prática profissional que, de alguma forma, já não me agradava mais. Com certeza, havia algo errado. Não sabia dizer o que era, mas não era mais tão ingênuo para creditar apenas no desinteresse dos alunos toda a culpa. Incomodava-me fazer tantos cursos, tentar me aperfeiçoar cada vez mais, matematicamente falando (por duas vezes ingressei no IMPA, mas devido a problemas financeiros de manter no Rio de Janeiro, tive que desistir), e perceber, ao mesmo tempo, meu desconforto na execução das aulas. Enquanto isso, meus colegas que discursavam sobre educação matemática pareciam sempre motivados e extremamente ativos. Resolvi entender o que eles tinham de fato a me dizer, deixando de lado anos de preconceitos.

Entre outras coisas, percebi que estava preso a estereótipos, como aquele que diz respeito a ideia de que só a nota de matemática seria importante e que bastaria repetir, como professor, algumas das mesmas práticas as quais eu havia sido submetido na escola básica e na universidade. Ou seja, para mim, reproduzir práticas que um dia achei boas, mesmo aquelas das quais não gostei, e forçar outras pessoas, muito diferentes de mim, a aceitá-las, era o que eu considerava ser tudo o que eu precisava fazer como professor. Não havia reflexão sobre o que eu fazia.

Desta maneira, foram os diálogos com os colegas da Educação Matemática que me levaram a considerar a necessidade de mudanças em minhas práticas. Essas conversas, além de alguns cursos, viabilizaram meus primeiros passos em uma prática educacional reflexiva. As referências da Educação Matemática vieram, então, a inspirar minha prática educativa. Ao começar a interagir com meus colegas da área de educação matemática percebi o quanto isso foi fundamental para as mudanças que começaram a ocorrer, tanto em relação à prática de sala de aula quanto em relação à motivação pessoal que eu sentia estar perdendo.

Claro que apenas tomar consciência que algo deveria ser feito em minha prática como professor da disciplina Teoria dos Números por si só não permitiria investigar de modo científico o que eu poderia fazer. Em 2009, por meio de uma colega que havia feito mestrado na PUC-SP, tomei o primeiro contato com as teorias francesas sobre a educação matemática. Ainda tenho muito a aprender sobre essas teorias. Percebi que precisava sair de um empirismo que não se mostrava suficiente na busca dos meus objetivos. Então, aceitei o desafio de fazer algo totalmente novo em minha vida acadêmica, mesmo sabendo que não tinha a menor ideia sobre os conteúdos que seriam cobrados no doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP em 2010.

Quanto ao interesse específico denotado nesta investigação, apesar da vasta literatura sobre muitos tópicos de matemática que encontrei nas pesquisas em português, infelizmente, com respeito à teoria dos números, os textos em educação matemática são quase inexistentes neste idioma. Mesmo assim, com toda a dificuldade de alguém que ainda estava dando os primeiros passos nessa área e com a pouca literatura disponível sobre o assunto, aceitei o desafio de fazer um trabalho no sentido de obter algum tipo de resposta para a minha questão de pesquisa, recorrendo, principalmente, a textos produzidos a partir de pesquisas realizadas no exterior.

Em todo este trabalho está um pouco da paixão e dedicação que tenho em relação aos números primos ao longo da minha carreira como professor de Teoria dos Números. Realmente, ainda fico sem saber a razão da abordagem superficial dada a um assunto tão importante na história da matemática, principalmente nos livros didáticos do ensino médio. Não acredito que números primos devam ser explorados de modo profundo neste contexto, pois, provavelmente, não haveria condições para isto; todavia, sua compreensão permitiria sempre um retorno importante ao pensamento aritmético, este também, ao que me parece, abandonado muito cedo.

De acordo com Nery e Possani (2001), é possível dar alguns exemplos sobre o emprego do conceito de números primos ao longo dos anos de escola básica. Em torno disto, elenco algumas situações simples:

- Que condições se poderia analisar com respeito às raízes de uma equação quadrática se os coeficientes dessa equação fossem todos primos?
- As medidas, em uma mesma unidade, dos lados um triângulo retângulo podem ser números primos?
- Para quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 461$, sendo que 461 é um número primo, as duas coordenadas são números inteiros?
- Quantos divisores positivos possui o número 2420?
- Os números a , b e $\log_b a$ podem ser todos primos?
- Existe algum número natural n menor do que 30 para o qual o valor numérico $p(n)$ do polinômio $p(n) = x^2 + x + 41$ não seja um número primo? Apresente algum número natural n para o qual o valor numérico de $p(n)$ não seja um número primo;
- Quantos polígonos regulares, com número par de lados, podem ter todas as diagonais expressas, em uma mesma unidade, por números primos?

Além disso, com algumas poucas informações adicionais, pode-se usar números primos no contexto de matrizes e cônicas para encobrir mensagens e verificar a primalidade de um número inteiro positivo.

Assim, de alguma forma, a pesquisa aqui apresentada reflete a busca por evidenciar como um grupo de licenciandos mobiliza saberes essenciais da teoria dos números. Assim, no texto que segue, procuro caracterizar os elementos que constituíram as inquietações iniciais como um problema de pesquisa, as bases históricas e matemáticas dos objetos “número primo” e “teorema fundamental da aritmética”, os elementos teóricos subjacentes, a organização didática adotada em razão das escolhas metodológicas, entre outros tópicos de relevo. De maneira mais organizada, então, o presente estudo apresenta a organização que segue:

O capítulo um discorre sobre a problematização construída como escopo justificador das questões e objetivos desta investigação, com foco na relevância didática e na formação de professores de Matemática relativa aos temas números primos e teorema fundamental da aritmética;

O capítulo dois discorre sobre um dos objetos matemáticos tomado como base para a pesquisa, os números primos, e, mais especificamente, sobre as questões educacionais e históricas referentes ao objeto em questão;

O capítulo três traz o quadro teórico da investigação, composto, essencialmente, pelos trabalhos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004), além de outros, tomados em caráter subsidiário. Também aqui são alinhados os trabalhos consultados e que de alguma forma colaboraram com as reflexões e procedimentos da investigação;

O capítulo quatro traz aportes sobre a metodologia empregada, incluindo a descrição dos sujeitos e do ambiente da pesquisa, bem como a abordagem adotada nas análises, o instrumento empregado na coleta de dados e a correlação enfocada com as teorias de base por meio das categorias eleitas;

O capítulo cinco contém as análises, realizada a partir da descrição do trabalho dos sujeitos ao longo da situação didática. Fechando este texto, vêm as considerações finais.

CAPÍTULO 1

PROBLEMATIZAÇÃO

De maneiras diversas, o percurso histórico², responsável pela consolidação de temas relativos à teoria dos números, aportou na escola, por meio de inserções curriculares. Em perspectiva, então, era de se esperar que a formação dos professores em cursos de Licenciatura em Matemática permitisse um amplo contato com elementos relativos à teoria dos números, mas não tem sido assim. Em sua investigação de temas correlatos àqueles aqui tratados, Resende (2007) menciona que as possibilidades de formação abertas por este ramo da Matemática têm sido negligenciadas nos mais diversos segmentos escolares. Na visão de Machado, Maranhão e Coelho (2005), trabalhar com a teoria dos números no âmbito escolar pode, entre outras possibilidades,

auxiliar a reconhecer e compensar limitações de estudantes em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros; criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas fecundos que desenvolvam a compreensão conceitual da Matemática; instigar as habilidades de estudantes para generalizar e fazer conjecturas e para encontrar maneiras de justificar estas conjecturas; promover o desenvolvimento de estratégias de provas indutivas e dedutivas (MACHADO,; MARANHÃO; COELHO, 2005, p.26).

A Teoria dos Números, que tem parte do seu conteúdo conhecido na escola básica como Aritmética, assim como as primeiras noções de Geometria, são as portas de entrada das pessoas para a matemática. Em que pese a pouca evidência dada ao tema, sua importância é inegável, uma vez que se pode identificar elementos da Aritmética básica por toda parte. Por isso, o trabalho inicial com os números está intimamente relacionado com as questões matemáticas mais práticas da vida diária, como aventa Resende (2007):

Tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica, sendo que os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de matemática nesse nível e o seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor; a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de ideias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar, como a recorrência, a indução matemática, a divisibilidade; a Teoria dos Números

² Neste trabalho, os elementos históricos (e matemáticos) considerados relevantes para a pesquisa estão consolidados no capítulo 2.

é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova, porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova tem diferentes funções e que, no ensino, não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática. (RESENDE, 2007, p. 7).

Apesar da sua relevância para a formação de futuros professores de matemática, Rezende (2007) observa que a Teoria dos Números não é muito considerada nas pesquisas em Educação Matemática, mesmo,

(...) a Teoria dos Números ser um campo propício para a investigação matemática, porque permite a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas. Essas potencialidades sustentam a concepção de uma disciplina, que está sendo denominada Teoria Elementar dos Números, que tem como fonte o saber científico, mas também os saberes escolares e as demandas que o seu ensino apresenta ao professor. (RESENDE, 2007, p. 7).

A justificativa desta pesquisa repousa, essencialmente, na relevância do tema no âmbito da aprendizagem dos números naturais e a necessidade de apropriação destes elementos, e de estratégias pertinentes de ensino, por parte de professores de Matemática em formação. Neste aspecto, em um primeiro momento, é preciso considerar que as crianças, ao chegarem à escola, não encaram os números e as operações elementares relativas a eles como fatos inéditos, o que permitiria que seu ensino considerasse esta premissa, em caráter progressivo. Justamente neste sentido, afirmam Friederich, Kruger e Nehring:

As crianças ao chegarem à escola, já possuem certa noção dos números e algumas operações básicas, portanto o estudo dos números, como objeto matemático, precisa envolver o reconhecimento da existência de diferentes tipos de números e de suas representações e classificações, exemplo os números primos, compostos, pares, ímpares, fracionários etc. É importante salientar que partir dos conhecimentos que as crianças possuem não significa restringir-se a eles, pois é papel da escola ampliar esse universo de conhecimento e dar condições a elas de estabelecerem vínculos entre o que conhecem e os novos conteúdos que vão construir, possibilitando uma aprendizagem significativa (FRIEDERICH,; KRUGER; NEHRING, 2009, p. 4).

Justamente, para trabalhar com os exemplos e problematizações elencadas na fala dos autores supramencionados, faz-se imprescindível apresentar domínio sobre os temas em questão. Desta forma, o trabalho com a Teoria dos Números, no âmbito desta investigação, pretende identificar, por meio de problematizações, os conhecimentos e dificuldades

evidenciados por um grupo de alunos de um curso de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética. Como potenciais futuros professores, esta investigação tem grande parte de sua importância ligada à atuação destes sujeitos nos ambientes escolares, e na sala de aula, em particular, no que se refere ao trabalho didático com os números primos. A compreensão sobre saberes e dificuldades neste ponto pode auxiliar, eventualmente, no que se refere a ações que interfiram positivamente na formação de professores de matemática para o trabalho com tópicos da teoria dos números.

Estes objetos matemáticos surgem bem cedo na vida escolar dos estudantes. Os sistemas escolares preveem a introdução do conhecimento relativo aos números primos, por exemplo, geralmente no sexto ano do ensino fundamental. De fato, os Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental (Brasil, 1998) recomendam, naquilo que chamam de terceiro ciclo (os atuais sexto e sétimo anos) um trabalho continuado com os números naturais “em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números ‘grandes’ e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza” (BRASIL, 1998, p.66).

Neste contexto, a introdução dos números primos não pode surgir de forma descolada em relação ao princípio multiplicativo, nem exposta sem a contextualização proposta por situações problema:

Conceitos como os de ‘múltiplo’ e ‘divisor’ de um número natural ou o conceito de ‘número primo’ podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (BRASIL, 1998, p.66).

Em atenção a esta proposição, observa-se que o que se apresenta nos livros usados nas escolas do Pará não difere dos PCNs e é muito semelhante ao Currículo do Estado de São Paulo³ (2010) que propõe a introdução do conceito de números primos no 6º ano do Ensino

³ Infelizmente não conseguimos junto a Secretaria de Educação do Pará informações ou documentos oficiais.

Fundamental. Como é possível observar na Figura 1, o conteúdo está relacionado não à mera identificação dos primos, mas ao seu significado.

Figura 1 - Números primos em uma abordagem curricular

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	Números	<ul style="list-style-type: none"> Compreender as principais características do sistema decimal: significado da base e do valor posicional
	Números naturais <ul style="list-style-type: none"> Múltiplos e divisores Números primos Operações básicas (+, -, ., ÷) Introdução às potências 	<ul style="list-style-type: none"> Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores Saber realizar operações com números naturais de modo significativo (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)
	Frações <ul style="list-style-type: none"> Representação Comparação e ordenação Operações 	<ul style="list-style-type: none"> Compreender o significado das frações na representação de medidas não inteiras e da equivalência de frações Saber realizar as operações de adição e subtração de frações de modo significativo

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (Matemática e suas Tecnologias – Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio), p.57

Em relação ao conceito de primalidade, as situações de aprendizagem devem fornecer condições didáticas para que os estudantes percebam que alguns números são o produto de outros, como $6 = 2 \times 3$, $30 = 5 \times 6$, etc., ou seja, que são números compostos. Neste contexto, devem os estudantes compreender que os demais números são aqueles que não têm outros fatores além deles mesmos e da unidade. Em outras palavras, é importante que os discentes registrem que primo é todo número, maior do que 1, que é divisível somente por si mesmo e pela unidade, compreendendo que os primeiros números primos são 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, etc. Outra compreensão valiosa neste sentido é aquela por meio da qual se pode afirmar que, quando um número não é primo, o mesmo pode ser decomposto em fatores primos, como $12 = 2 \times 2 \times 3$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $935 = 5 \times 11 \times 17$. Pelo seu caráter basilar no estudo dos números inteiros, essa propriedade é conhecida como o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Ela significa que os números primos são, por assim dizer, os “átomos” ou “tijolos” da construção numérica pela multiplicação.

Assim, é preciso pensar na maneira como podem ser construídos elementos didáticos que estimulem o trabalho com os números primos com os futuros professores, do ponto de vista da formação matemática dos mesmos. A construção da aprendizagem relacionada a estes

objetos representa um desafio para o professor, à medida que os processos relacionados ao significado deste tema precisam fornecer elementos para que o estudante não apenas compreenda as características intrínsecas destes números e a importância da apropriação do conhecimento relativo aos mesmos no âmbito da aritmética, como também desenvolvam competência para o emprego das propriedades dos primos em situações matemáticas contextuais, caracterizadas por argumentações, demonstrações, provas e usos específicos (compreensão de códigos criptográficos é um caso típico) e, também, fundamentalmente, em situações em que se solicite a resolução de problemas (COUTINHO, 2000).

Uma vez que a descrição sobre os números primos e sua inserção na aprendizagem de elementos da teoria dos números tenha sido exposta, uma questão importante a pensar é em como este conceito é mobilizado pelos licenciandos. Como poucas pesquisas no âmbito da teoria dos números foram conduzidas sob a égide da Educação Matemática há, portanto, espaço para discutir questões relativas aos objetos que lhe sejam associados, como os números primos e o teorema fundamental da aritmética. Neste aspecto, muitas construções conceituais sobre a primalidade, as propriedades referentes aos números primos e sobre o TFA têm se mostrado frágeis na formação dos professores de Matemática (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996).

Sobre este segundo ponto, Zazkis e Campbell (1996) efetuaram um estudo, essencial para a pesquisa aqui descrita, com professores em formação, no intuito de levantar e analisar dados sobre a compreensão dos mesmos acerca do teorema fundamental da aritmética. A investigação, realizada por meio de questionários e entrevistas contendo elementos objetivos, concluiu que os professores apresentam substancial dificuldade na compreensão da unicidade da decomposição de números inteiros em fatores primos. Quando confrontados com as questões objetivas, os professores em formação recorreram a diversos recursos, como aplicação de regras de divisibilidade, cálculo de raízes, verificação do fato de determinada divisão ser exata, entre outros. Entretanto, se compreendido e aplicado o teorema aqui mencionado, este esforço em aplicar operações sucessivas e por vezes demoradas poderia ser dispensado.

Em outro estudo, também crucial para esta investigação, Zazkis e Liljedahl (2004) trataram de tema que pode ser visto como ainda mais básico, buscando investigar a compreensão dos professores de escolas básicas em formação acerca dos números primos e de suas propriedades. Aqui, os autores identificaram uma série de dificuldades conceituais por

parte dos professores em formação, entre as quais a dificuldade de aplicação do próprio conceito de primalidade, que surgiu quando alguns sujeitos não conseguiram determinar (ou o fizeram de forma errônea) se $m(2k + 1)$ poderia ser um número primo, com m e k inteiros. Desta forma, considerando a escassez de estudos desta natureza, achou-se pertinente abordar este tema sob o enfoque da compreensão e uso do conceito de número primo e do teorema fundamental da aritmética.

Assim, esta pesquisa, de caráter qualitativo, procura investigar como os conceitos e propriedades dos números primos, elementos essenciais da teoria dos números, e os conceitos do Teorema Fundamental da Aritmética são apropriados por potenciais professores em formação, que são estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, e a maneira pela qual tais professores compreendem e resolvem problemas relativos a estes temas. O esforço desta investigação é norteado pela seguinte questão: *quais saberes e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética são evidenciados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará quando submetidos a uma sequência didática que pretendeu inserir os mesmos em percursos investigativos, formatados a partir de pressupostos teóricos ligados a representações numéricas e suas características transparentes/opacas?*

Com o intuito de responder a este questionamento, a sequência didática à qual os licenciandos foram submetidos pretendeu inserir os mesmos em percursos investigativos, formatados a partir de pressupostos ligados a representações numéricas e suas características opacas/transparentes. As análises são conduzidas com aportes ligados ao constructo teórico mencionado e direcionadas pelo uso de um instrumento, representado por uma sequência de questões problematizadas, tomadas entre aquelas utilizadas nos estudos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedhal (2004), de modo a aprofundar as questões relativas à primalidade, tendo por foco o teorema fundamental da aritmética. Desta forma, um objetivo secundário pode ser alinhado, consistindo na comparação entre os resultados obtidos nos estudos originais e aqueles obtidos neste trabalho.

Descrita a problematização, os próximos capítulos se encarregam de melhor esclarecer a organização aqui anunciada. Em particular, o capítulo dois indica os elementos históricos e matemáticos pertinentes, logo a seguir.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS PRIMOS: UM PANORAMA

Este capítulo, pretende-se constituir um estudo a respeito dos objetos matemáticos que representam o foco desta pesquisa, “números primos” e “teorema fundamental da aritmética”. Deste ponto de vista, apresentam-se alguns aportes históricos relativos à teoria dos números, ilustrando como problemas aparentemente simples neste âmbito desencadearam profundas pesquisas e descobertas. De igual forma, procura-se trazer elementos para uma discussão epistemológica da constituição destes objetos no âmbito da teoria dos números.

Além disto, este capítulo também tem a função de evidenciar os obstáculos que os conceitos de número primo e o TFA impuseram aos estudiosos da Matemática ao longo da história e as contribuições de cada um deles no desenvolvimento, refinamento e ramificações pelos quais os conceitos passaram, bem como os percursos cumpridos até se estabelecerem como parte do conhecimento matemático. As questões histórico-epistemológicas contribuíram para a seleção da sequência didática, de modo a diagnosticar a apropriação dos objetos desta pesquisa pelos licenciandos.

2.1 Breve percurso histórico: a importância dos números primos para a Matemática

2.1.1 Os pitagóricos

Eves (2011) afirma que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números foram dados por Pitágoras e seus seguidores. O autor relata que Jâmblico (320 d. C.), um filósofo neoplatônico, atribui a Pitágoras a descoberta dos números amigos, aqueles cujas somas dos divisores de um resulta exatamente no outro. Apesar de nem todos os historiadores concordarem, “se atribuem aos pitagóricos os números perfeitos, deficientes e abundantes” (EVES, p. 99, 2011). Quanto aos números figurados, que representam uma ligação entre a geometria e a aritmética, parece haver concordância quanto a sua origem se dever aos pitagóricos.

Uma grande descoberta numérica atribuída aos pitagóricos é da relação entre intervalos musicais e razões numéricas. São os primeiros registros que permitiram aos pitagóricos produzir estudos matemáticos das escalas musicais (EVES, 2011). Neste sentido,

o número tinha para os pitagóricos (...) um caráter metafísico. Não pretendiam explicar o universo por meio dos números usando uma álgebra universal utilizável em qualquer área do conhecimento, como Descartes

(1596-1650), mas acreditavam que a origem e o princípio das coisas eram o número em si, por sua vez criado por uma fusão do ilimitado com o limitante (CLÍMACO, p. 3, 2011).

Para além deste caráter inicial dos números, interessa compreender como alguns dos elementos da teoria dos números foram constituídos, o que é apresentado a seguir.

2.1.2 Euclides

A primeira apresentação sistematizada do que viria a ser a Teoria dos Números aparece nos Elementos de Euclides (360-295 a.C). Os livros VII-IX são dedicados a este tema, por meio de tópicos como a divisibilidade de inteiros, a adição de séries geométricas, algumas propriedades dos números primos e a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Aí se encontra tanto o “algoritmo de Euclides”, para achar o máximo divisor comum entre dois números, como o “teorema de Euclides”, segundo o qual existe uma infinidade de números primos (EUCLIDES, livro IX, proposição 20, 2009).

De fato, inicialmente, os conceitos de mdc e mmc devem estar bem estabelecidos para que o Crivo de Eratosthenes e o Algoritmo de Euclides possam ser compreendidos. Hefez (2006) lembra que esses conceitos se encontram no Livro VII dos *Elementos* e, apesar de mais de dois mil anos desde sua escrita, eles continuam atuais.

Dados dois números naturais a e b , não simultaneamente nulos, diremos que o número natural $d \in \mathbb{N}^*$ é um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Diremos que d é um máximo divisor comum (mdc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e de b , e

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b (HEFEZ, p. 53, 2006)

Aventa-se, neste ponto, por exemplo, que os futuros professores conheçam o Algoritmo de Euclides. Além da importância imediata para o cálculo do mdc, ele é o método mais usual para determinar uma solução inteira da equação diophantina linear $ax + by = c$, onde $\text{mdc}(a,b)$ divide c e a , com b e c inteiros.

O algoritmo de Euclides demonstra, de forma construtiva, a existência do mdc. Sobre esse algoritmo, Hefez observa que “o método, chamado de Algoritmo de Euclides, é um

primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios” (HEFEZ, p. 56, 2006).

As muitas definições, propriedades, teoremas e corolários presentes nesses assuntos se constituem um momento único na formação dos futuros professores com relação a conteúdos que estão muito presentes na educação básica. Em nenhuma outra disciplina o futuro professor terá a oportunidade de discutir matematicamente essas questões da Aritmética. Como Resende (2007) apontou, a Teoria dos Números deve ser vista como um saber a ensinar voltado para a formação inicial do professor da escola básica, procurando levantar possibilidades para ressignificar essa área nos currículos da licenciatura em matemática.

Cabe, entretanto, discutir outros conceitos importantes relacionados à teoria dos números e aos primos, e opta-se aqui por fazê-lo em um contexto histórico. Assim, como se disse, os livros VII a IX são dedicados a conceitos sobre teoria dos números. Destaca-se alguns resultados importantes nos quadros 1 e 2 (EUCLIDES, 2009).

Quadro 1 – Euclides e a teoria dos números (livro VII)

<p>Livro VII</p> <p>VII.1-2: Algoritmo de Euclides</p> <p>VII.30 : Se um primo p divide ab, então $p \mid a$ ou $p \mid b$</p> <p>VII.31 : Todo número composto é divisível por um número primo</p> <p>Livro VII – Teoria das Proporções</p>
--

Fonte: O autor

Quadro 2 – Euclides e a teoria dos números (livro IX)

<p>IX.14: Teorema fundamental da aritmética (todo número inteiro maior que 1, decompõem-se de forma única, exceto pela ordem dos fatores, em produto de fatores primos)</p> <p>IX. 20: (Teorema da infinidade dos Primos): Não existe o maior número primo</p> <p>IX.35: A soma dos termos de uma progressão geométrica</p> <p>IX.36: Teorema sobre os números perfeitos</p>
--

Fonte: O autor

Os quadros 1 e 2 destacam importantes proposições contidas nos Elementos (EUCLIDES, 2009). Sendo os números primos o objeto principal desta pesquisa, mostra-se a seguir quatro demonstrações sobre a infinidade dos números primos (IX 20) que ilustram muito bem os grandes avanços que esse conceito vem produzindo na matemática há milhares de anos.

A primeira demonstração, com atualizações na linguagem, é a mesma que se encontra em “Os Elementos”. Ela é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática. Euclides emprega o método conhecido como *redução ao absurdo* (EVES, 2011).

A segunda demonstração reescreve a primeira utilizando as notações e linguagem matemática atuais.

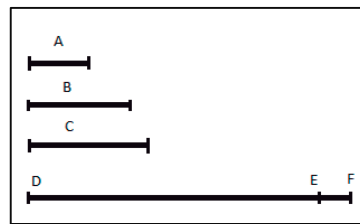
A terceira demonstração, trazida aqui em caráter ilustrativo, é devida a Leonhard Euler (1707-1783) e mostra uma transição importante pela qual passou a teoria dos números. Métodos da análise matemática começaram a ser usados para dar respostas aos seus problemas. Os métodos usados por Euler iniciaram um novo ramo na matemática chamado *Teoria Analítica dos Números*.

A quarta demonstração, também de caráter apenas ilustrativo, é devida a Hillel Fürstenberg e foi publicada pela primeira vez em 1955. É a quinta das seis demonstrações sobre a infinidade dos números primos que aparecem no livro *Proofs from THE BOOK* (AIGNER, ZIEGLER, 2010). Ficou famosa por ser chamada de “demonstração topológica”. Os conceitos subjacentes à demonstração podem ser vistos em Lipschutz (1971).

Demonstração 1. Teorema de Euclides (Proposição 20, livro IX), propõe que os números primos são mais numerosos do que qualquer quantidade que se tenha de números primos.

Sejam, então, A, B e C os números primos propostos. Diga-se que há mais números primos que A, B e C.

Figura 2 – Representações sobre primos



Fonte: Euclides, 2009 (adaptado)

Para tanto, tome-se o menor número medido por A, B, C, chamando-o de DE, e acrescentando-se a DE a unidade EF, como indica a figura 2. Então, DF é primo ou não. Supondo que seja primo, então terão sido encontrados os números primos A, B, C e EF, que são mais que A, B, e C.

Suponha-se, entretanto, que EF não seja primo; então, é medido por algum número primo: seja, assim, medido por um número primo G. Diga-se que G não é o mesmo que nenhum dos números A, B, C, pois, se fosse possível, seria. Mas A, B, C, medem o DE, então G medirá também o DE. E também mede o EF; e G, sendo um número, medirá também a unidade restante DF; o que é um absurdo. Logo, G não é o mesmo que nenhum dos números anteriores A, B, C. E foi suposto que era primo. Por conseguinte, não são achados mais números primos do que a quantidade proposta dos números A, B e C.

Demonstração 2. A segunda demonstração para o Teorema de Euclides, entendido como “existem infinitos números primos”, utiliza um raciocínio indutivo: considerando que a afirmação seja verdadeira, então, basta mostrar que, sendo p um primo qualquer dado, então sempre vai existir um primo maior que p . Seja 2, 3, 5, ..., p a lista completa de todos os primos até p . Forma-se o número $P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p + 1$. Fica claro que $p < P$ e também que P não é divisível por quaisquer dos primos 2, 3, 5, ..., p . Entretanto, P ou é primo ou é divisível por algum primo $q < P$. No último caso, a observação anterior implica que $q > p$. Assim, em qualquer caso, existe um primo maior que p (RIMBENBOIM, 2012).

Demonstração 3. A terceira demonstração, desenvolvida por Euler, considera a identidade (I), provada por ele mesmo, que liga a função zeta com os números primos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad (I)$$

Onde:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$, é a função zeta que converge para $s > 1$.
- $\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \dots$, produto com todos os números primos.

Se houvesse apenas um número finito de primos, então o produto do segundo membro de (I) seria um produto finito e teria um valor finito para $s > 0$, inclusive para $s = 1$.

Faça-se, em (I), $s = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-1}} \quad (\text{II})$$

O primeiro membro de (II) é a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge a infinito. Essa contradição mostra que existe um número infinito de primos (SIMMONS, 1988)

Demonstração 4. Considere-se a quarta demonstração devida a Fürstenberg: seja a seguinte *topologia* no conjunto \mathbf{Z} dos inteiros: para $a, b \in \mathbf{Z}$, $b > 0$, tem-se:

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbf{Z}\}$$

Cada conjunto $N_{a,b}$ é uma dupla progressão aritmética infinita, uma vez que, ordenando seus elementos $x \geq b$, obtém-se uma progressão aritmética de termo inicial b e razão $|a|$; a outra ordenação dos elementos $x \leq b$ nos dá uma progressão aritmética de termo inicial também b , mas de razão $-|a|$.

Seja o conjunto $\Omega \subseteq \mathbf{Z}$ aberto se cada Ω é vazio, ou se para todo $a \in \Omega$ existe algum $b > 0$ com $N_{a,b} \subseteq \Omega$. E a união de conjuntos aberto é aberta. Se Ω_1, Ω_2 são abertos, e $a \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ com $N_{a,b} \subseteq \Omega_1$ e $N_{a,b} \subseteq \Omega_2$, então $a \in N_{a,b_1,b_2} \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Assim, pode-se concluir que qualquer interseção finita de conjuntos abertos é novamente aberta. Logo, essa família de conjuntos abertos fornece uma interessante topologia em \mathbf{Z} .

Seguem, ainda, dois fatos:

(A) Qualquer conjunto aberto não vazio é infinito.

(B) Qualquer conjunto $N_{a,b}$ é fechado também.

Na verdade, o primeiro fato decorre da definição. Para o segundo, observa-se que

$$N_{a,b} = \mathbf{Z} / \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

o que prova que N é o complementar de um conjunto aberto e, portanto, fechado.

Uma vez que qualquer número $n \neq 1, -1$ tem um divisor primo p , e, portanto, está contido em $N_{0,p}$, concluímos

$$\mathbf{Z} / \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in P} N_{0,p}.$$

Agora, se P for finito, então $\bigcup_{p \in P} N_{0,p}$ seria uma união finita de conjuntos fechados (pela condição B), e, portanto fechado. Consequentemente, $\{-1, 1\}$ seria um conjunto aberto, uma violação da condição A (AIGNER; ZIEGLER, 2010).

Ribenboim (2012) apresenta outras provas além das apresentadas aqui, e comenta aspectos e curiosidades interessantes sobre determinadas demonstrações.

Igualmente importante no âmbito deste trabalho é o TFA. De fato, dentre todos os teoremas que devem fazer parte da bagagem matemática do futuro professor, este é indispensável. Por meio dele, deve-se compreender que todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos seus fatores) como um produto de números primos. A compreensão deste teorema, como já indicado no capítulo anterior, deveria permitir conexões envolvendo os conceitos de fatoração, divisibilidade, primalidade, entre outros.

2.1.3 Números Famosos e o Teorema Fundamental da Aritmética

Ao provar que todo número natural composto é igual a um produto de números primos, outra questão surge: de quantas maneiras pode um número natural composto ser

escrito como um produto de números primos? A experiência sugere que a resposta deva ser “de uma única maneira”. A prova de que esta é a resposta correta é muito mais interessante do que a prova de que cada número natural composto pode ser escrito como o produto de primos (STEIN, 1969)

Aqui está o que se quer provar: se for possível outra maneira para expressar um número natural como produto de n números primos – por exemplo, o produto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, – e se alguém conseguisse expressar o mesmo número como o produto de m números primos – por exemplo, como o produto $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$ – então, n deve ser igual a m e os B 's devem ser apenas um rearranjo dos A 's. Em outras palavras, o que se quer provar é este teorema, normalmente chamado de Teorema Fundamental da Aritmética (STEIN, 1969).

Se A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_m são primos, escritos em ordem crescente, e se $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$, então, $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots$, e $n = m$. Seria razoável provar primeiro que $A_1 = B_1$.

A partir do que está dito acima, pode-se dizer que A_1 é um divisor do produto de todos os A 's e, conseqüentemente, de todos os B 's. Se se soubesse como forçar A_1 a ser um divisor de, pelo menos, um dos B 's, haveria um bom caminho para uma prova. Se A_1 divide, por exemplo, B_1 , então, uma vez que B_1 é um primo, A_1 teria que ser igual a B_1 . Isso seria um bom começo. Infelizmente, não se tem certeza, neste momento, se um primo que divide o produto de vários outros números naturais tem de dividir pelo menos um deles. Afinal, a definição de um primo depende da maneira como os números naturais o dividem, não na forma como ele divide os outros números naturais (STEIN, 1969).

Para verificar se um número natural é primo, teoricamente, deve-se olhar para os números naturais menores que esse número e maiores que 1 e verificar se algum deles o divide. Agora, verificar a forma como um determinado número natural divide um produto de números parece ser uma tarefa bem mais complicada teoricamente. Justamente por isso, Zazkis e Campbell (1996) comentam que se deve elaborar alternativas pedagógicas com relação a prova do TFA. Em atenção a este fato, a seguir, apresenta-se o “número famoso” e sua relação com a definição de número primo e a prova do TFA.

Para tanto, considere-se que um número natural maior do que 1 é **famoso** se, sempre que ele divide o produto de dois números naturais, então, ele divide pelo menos um deles. Por exemplo, para provar que 2 é **famoso**, deve-se mostrar que, sempre que o número 2 divide $A \times B$, então 2 divide pelo menos um dos fatores, A ou B . Ou seja, quer-se provar que se $A \times B$

é par; então, pelo menos um dos fatores A ou B é par. Além disso, provar que o produto de dois números ímpares deve ser sempre ímpar.

Neste caso, se A é ímpar, pode-se escrever A como $2a + 1$, onde a é um número natural. Se B é ímpar, pode-se escrevê-lo como $2b + 1$, onde b é um número natural. Para o produto $A \times B$, tem-se:

$$A \times B = (2a + 1) \times (2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1,$$

onde $4ab + 2a + 2b$ é claramente um número par; assim, $A \times B$ é ímpar. Assim, 2 é **famoso**.

É claro que é bem mais difícil provar que um número é famoso do que provar que o mesmo é primo (apesar que determinar a primalidade de um inteiro também é bem difícil). Novas considerações teriam que ser feitas se se quiser provar, por exemplo, que 3 é famoso ou que 5 é famoso. Além disso, é menos trabalhoso mostrar que um número natural não é famoso do que mostrar que ele é. Por exemplo, 6 divide 3×4 , mas não divide nem três e nem quatro, logo 6 não é famoso. Na verdade, de maneira mais óbvia, 6 divide 2×3 e não divide nem 2 e nem 3. Este segundo argumento sugere que nenhum número natural composto pode ser famoso. Daí, segue o teorema 1.

Teorema 1. Todo número famoso é primo.

PROVA. Seja N famoso. Suponha-se, por um momento, que N também é composto. Então, N pode ser escrito como um produto $Q \times A$, onde Q e A são ambos menores do que N. Desde que N divide N, vê-se que N divide $Q \times A$; mas, como Q e A são menores do que N, N não pode dividir nem Q nem A . Assim, N não é famoso, o que leva à crer que N não deve ser composto. Como corolário, todo número famoso é primo.

Isso não permite concluir, de forma apressada que todo primo é famoso. Vale lembrar que foi feito algum esforço só para provar que 2 é famoso, e em nenhum lugar da prova se faz uso do fato de que 2 é primo. Além disso, 10 não é famoso, pois divide 4×25 e não divide nem 4 e nem 25. Como se vê, a prova de que todos os primos são famosos ganha maior importância.

Antes de encarar o problema de saber se todos os primos são famosos, deve-se recapitular o que levou a definir os números famosos. O interesse, neste sentido, repousa na questão *se um primo divide o produto de vários números naturais, então ele divide pelo menos um deles?*

Teorema 2. Se um número famoso divide um produto de vários números naturais, então ele divide pelo menos um deles.

PROVA. Argumente-se para o caso em que o número famoso ocorre numa divisão do produto de três números naturais. Seja S um número famoso que divide $A \times B \times C$. Quer-se provar que S divide pelo menos um dos fatores A , B e C .

É claro que a S divide o produto de dois números naturais A e $B \times C$. Uma vez que S é famoso, ele divide pelo menos um dos termos A e $B \times C$. Se S divide A , caso encerrado. Entretanto, se S divide $B \times C$, então, uma vez que S é famoso, S divide pelo menos um dos fatores B e C . Assim, vê-se que, sempre que um número famoso dividir o produto de três números naturais, então ele tem de dividir pelo menos um deles. O mesmo argumento pode ser aplicado ao produto de mais de três números naturais e o Teorema 2 pode ser generalizado.

Até aqui, a adição não foi usada. Nem as noções de primo e famoso, nem os Teoremas 1 e 2 e as suas demonstrações fizeram qualquer menção à adição. No entanto, a prova de que cada primo é famoso se baseia fortemente em adição. *Assim, o TFA é realmente um teorema sobre a multiplicação e a adição.*

A prova aqui apresentada é, basicamente, a mesma que aparece no Livro 7 de Euclides, publicado cerca de 300 A.C, e é, provavelmente, o trabalho de toda uma escola de matemáticos. Deve-se observar cuidadosamente onde exatamente a adição faz a sua aparição em cena e onde ela existe; ela não aparece em nenhum lugar da declaração do TFA, mas apenas na prova que antecedeu a ele (STEIN, 1969).

Para provar que cada primo é famoso, tem-se que quebrar a prova de Euclides em vários pedaços. Para perceber todo o argumento, é preciso ver como cada peça (Lema) se encaixa. Entendendo os detalhes das várias provas, pode-se ver como os lemas separados formam um grande resultado. Essa é uma atitude muito sensata para que não se deixe de ver a floresta por causa das árvores. Ver-se-á que os argumentos principais estão na seguinte sequência: Lema 3, Algoritmo de Euclides, Lema 4 e Teorema 3. A adição se apresenta nos Lemas 3 e 4 (KALUZHININ, 1979).

Lema 1. Para todo número inteiro A , diferente de zero, $\text{mdc}(A, 0) = 0$.

Lema 2. Se A é primo e A não divide B , então $\text{mdc}(A, B) = 1$.

Lema 3. Se A , B , Q e R são números naturais na relação $B = Q \times A + R$ (onde A e R não são iguais a zero), então $\text{mdc}(B, A) = \text{mdc}(A, R)$.

O Lema 3 é a base para o conhecido Algoritmo de Euclides para o cálculo do $\text{mdc}(A, B)$. O Algoritmo de Euclides envolve repetidas divisões pelos restos até se encontrar um resto igual a zero (KALUZHININ,1979). Cada passo produz um resto menor que o resto da etapa anterior. Esse processo levará a obter um resto igual a zero. O resto antes de zero é o máximo divisor comum. Esta é a técnica.

O próximo Lema será o principal instrumento para provar que cada primo é famoso. Sabe-se que o $\text{mdc}(2, 3) = 1$ e 1 pode ser expresso em termos dos números 2 e 3 como $(-1) \times 2 + 1 \times 3$. O $\text{mdc}(72, 20) = 4$ e 4 pode ser expresso em termos dos números 72 e 20 como $2 \times 72 + (-7) \times 20$. O Lema 4 afirma que o $\text{mdc}(A, B)$ para quaisquer números naturais A e B, em que ambos sejam diferentes de zero, pode ser expresso em termos de A e B.

Lema 4. Para qualquer número natural A e B (ambos diferentes de zero) existem inteiros M e N tal que

$$\text{mdc}(A, B) = M \times A + N \times B.$$

O Algoritmo de Euclides é um processo que auxilia a determinar os valores de M e N.

De posse do Lema 2 e do Lema 4 pode-se provar o

Teorema 3. Todo número primo é famoso.

PROVA. Seja P um primo que divide $A \times B$. Quer-se provar que P deve dividir pelo menos um dos termos A e B. Para fazer isso, vai-se provar que, se P não dividir A, então P deve dividir B.

Uma vez que P não divide A, tem-se, pelo Lema 2,

$$\text{mdc}(P, A) = 1.$$

O Lema 4 afirma que existem M e N tais que

$$1 = M \times P + N \times A.$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por B, obtém-se a nova equação

$$B = M \times P \times B + N \times A \times B.$$

Agora, P divide $M \times P \times B$, e uma vez que P divide $A \times B$, tem-se que P divide $N \times A \times B$. Então, P divide a soma

$$M \times P \times B + N \times A \times B = B (M \times P + N \times A) = B.$$

A soma é igual a B; portanto, P divide B e o Teorema 3 está provado (STEIN, 1969).

Observe-se onde precisamente a adição foi utilizada. Esta prova foi muito mais simples do que a recíproca "todo número famoso é primo". Com essa demonstração, é possível provar o

Teorema Fundamental da Aritmética. Se A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_m são primos, escritos em ordem crescente, e se

$$(I) \quad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m,$$

então, $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots$, e $n = m$.

Assim, vê-se, pela lógica apresentada, que o TFA é uma consequência imediata do fato de que cada primo ser famoso. Alguém pode não se conformar com esse fato e perguntar "- O fato de que cada primo é famoso é uma consequência imediata do TFA?" De fato, essa pessoa está perguntando: "- São as duas afirmações equivalentes? Devo esperar que qualquer prova do TFA envolverá algum novo passo engenhoso? Se eu pudesse de alguma forma provar o TFA sem usar o fato de que cada primo é famoso, poderia então ir para provar a partir disso que cada primo é famoso?" Se o que apresentamos não é o suficiente para saber o que é verdadeiro, vamos apresentar o Teorema 4 (STEIN, 1969)

Para provar o Teorema 4, desconsidera-se todo o trabalho feito aqui. E não há nenhum interesse neste momento se o TFA é verdadeiro ou se cada primo é famoso. Estuda-se, neste ponto, apenas a influência de uma especulação em cima de outra.

Teorema 4. Se o Teorema Fundamental da Aritmética é verdadeiro, então todo número primo é famoso.

PROVA. Esta prova pode ser obtida, em princípio, por meio do **Teorema do Cancelamento**. Se A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_m são todos famosos (com os A's e B's em ordem crescente) e, seus produtos são iguais,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m,$$

então $A_1 = B_1, A_2 = B_2$, e assim por diante.

O Teorema do Cancelamento, de modo semelhante ao TFA, é bastante simples de provar. Tão simples, que, na verdade, não é necessário usar adição. Em linhas gerais da prova,

deve-se lembrar que todos os primos são famosos (Teorema 3, cuja prova não envolve adição). Em seguida, com o auxílio de Teorema 2 (onde a prova não envolve adição), podem-se retirar os mesmos argumentos usados para o TFA.

Sem o uso de adição, pode-se provar os teoremas que indicam I. Que cada número famoso é primo; II. Que cada número natural composto pode ser escrito pelo menos de uma forma como um produto de números primos; III. Que cada número natural pode ser escrito como o produto de números famosos de uma única forma.

Com o auxílio de adição, pode-se, então, provar IV, que todo número primo é famoso.

Em Aritmética, então, vê-se que os números primos são os mesmos ditos famosos. Com esta informação, pode-se mesclar os Teoremas 2 e 3 em um resultado elegante: *todo número natural composto é igual a um produto único de números primos*. Em outras palavras, todo número natural composto pode ser decomposto em um produto de números primos, e esta decomposição é única, a não ser pela ordem.

Outra discussão que interessa a esta pesquisa diz respeito ao teorema dos números primos, trazida a seguir.

2.2 O teorema dos números primos.

Ainda que a questão da infinidade dos números primos tenha sido tratada de forma adequada ao longo do tempo, o comportamento da sua distribuição entre os inteiros positivos e como determinar se um inteiro qualquer é primo, principalmente a partir de certo tamanho, são problemas que permanecem até hoje.

Em teoria dos números, perguntas simples podem desencadear investigações profundas. Se escolhermos, ao acaso, um número de 10 algarismos, qual a probabilidade de que seja um primo? Quantos primos com exatamente 10 algarismos existem?

Questões como essas necessitam de investigações sobre como os primos se distribuem entre os inteiros positivos. Foram questões como essa que levaram Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833) a tentarem conseguir uma resposta.

Gauss procurou uma maneira de contar todos os primos até 10^n dígitos ou encontrar formas de fazer essa aproximação para dar respostas às perguntas supramencionadas. Essas

aproximações feitas por Gauss e muitos outros matemáticos, são conhecidas como *Teorema do Número Primo* (ÁVILA, 1991)

Evidentemente, um tratamento dessa questão do ponto de vista da demonstração implica em conhecimentos mais sofisticados em matemática e não constitui elemento de preocupação direta deste trabalho, mas julga-se importante discutir estes postulados, uma vez que se faz referência ao teorema do número primo em alguns momentos das análises.

Frequentemente, o teorema do número primo é confirmado em termos da função $\pi(x)$, que nos dá o número de primos menores que ou iguais ao número real x . Por exemplo, $\pi(\sqrt{28}) = 3$, uma vez que os primos menores que $\sqrt{28}$ são 2, 3 e 5. Assim, a quantidade de todos os primos com 10^{10} dígitos ou menos seria dada por $\pi(10^{10})$ e a resposta exata para a primeira questão seria $\frac{\pi(10^{10})}{10^{10}}$.

Outra função usada nesse contexto é a função $P(n)$, que representa o n -ésimo número primo. Assim, $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 5$, $P(4) = 7$ e assim por diante.

Se restringirmos as duas funções aos inteiros positivos e aos primos, respectivamente, uma função será o inverso da outra, isto é, $\pi(P(n)) = n$ e $P(\pi(p)) = p$, onde n é um inteiro positivo e p um primo.

Diz-se que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são assintóticas, isto é, $f(x) \approx g(x)$, quando $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Em uma linguagem informal, diz-se que duas funções são assintóticas, se, para valores muito grandes, elas apresentam quase o mesmo comportamento. Dessa forma, é possível estimar valores de uma usando a outra dentro de certas condições.

O teorema do número primo fornece expressões assintóticas para as funções $\pi(x)$ e $P(n)$. Coloca-se, a seguir, diferentes formas do teorema do número primo:

1. Modelo de Gauss: $\pi(x) \approx \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$

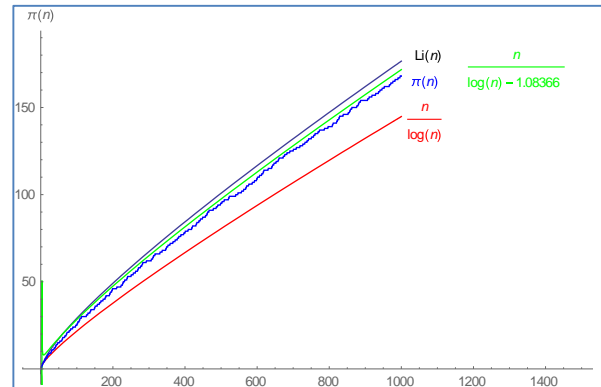
2. Modelo de Legendre: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1,08366}$

3. Modelo atual: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$

4. Modelo atual para $P(n)$: $P(n) \approx n \cdot \ln x$

O gráfico 1, feito no @Mathematica, dá uma ideia do comportamento das funções supramencionadas.

Gráfico 1 – Comportamento das funções



Fonte: Wolfram MathWorld

O mais impressionante é que, apesar dos nomes de Gauss e Legendre estarem conectados com o teorema, nenhum deles o provou. Ambos fizeram essas incríveis conjecturas, mesmo com os escassos recursos tecnológicos do século XVIII. Essas conjecturas provocaram um grande desenvolvimento da Análise Real e Complexa no século XIX. O teorema foi provado de forma independente por J. S. Hadamard (1865-1963) e Vallée Poussin (1866-1962), justamente no final do século XIX. Em 1949, Atle Selberg (1917-2007) e Paul Erdős (1913-1996) produziram uma nova prova que utiliza apenas os conhecimentos de Cálculo (Garbi, 2000).

Por outro lado, Euler deu sua demonstração sobre a infinidade dos números primos em 1737 e inaugurou um novo ramo da matemática chamado *teoria analítica dos números*. Em 1859, Bernhard Riemann (1826-1866) apresentou seu único trabalho em teoria dos números dedicado ao teorema dos números primos. O esforço empreendido nesse trabalho provocou um tremendo impacto em todos os ramos da matemática pura. Segundo Simmons (1987), a influência desse trabalho seria sentida por mais de mil anos.

O ponto de partida do trabalho de Riemann foi a notável identidade (I) descoberta por Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad s > 1 \quad (I)$$

A função zeta lado esquerdo de (I) é uma função da variável real $s > 1$: a identidade nos mostra uma relação entre o comportamento da função zeta e propriedade dos primos⁴.

Riemman ampliou essa conexão fazendo a variável s assumir valores complexos. Para s complexo, ele denotou a função resultante por $\zeta(s)$, ou seja, a função zeta de Riemman.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots, \quad s = a + bi$$

Riemman levava os números primos a um universo nunca antes imaginado. Os problemas propostos por ele a partir dos estudos feitos nessa função criaram importantes ramos da Análise. Além disso, Riemman deixou para a posteridade um problema famoso, até o momento não solucionado, que possui íntima relação com a distribuição dos números primos, a *hipótese de Riemman*. Sobre essa hipótese, Simmons (2004) escreve: “ela permanece como o problema em aberto mais importante da Matemática, e provavelmente é o problema mais difícil que a mente humana jamais concebeu” (SIMMONS, p. 749, 1987).

Todas essas questões, envolvendo esse ramo tão prolífico da Matemática, que são os números primos, indicam a importância deste elemento conceitual, inclusive para a formação do professor de Matemática da escola básica, condição potencial dos sujeitos desta pesquisa, licenciandos em Educação Matemática. Outros elementos, entretanto, são igualmente relevantes, agora em um ponto de vista mais próximo do público que se menciona aqui. Neste caso, retoma-se o fio condutor desta narrativa a partir de Diofanto.

2.3 Diofanto

De fato, a Aritmética de Diofanto (± 200 -2284 a.C) é outro trabalho que merece ser lembrado. É um tratado, originalmente escrito em treze livros, dos quais só foram preservados os seis primeiros. Essa obra não é uma exposição sobre as operações algébricas ou as funções algébricas, mas uma coleção de 130 problemas, dos quais não se sabe os que eram originais e os que eram emprestados de outras coleções (HEALTH, 1910). Diofanto é o pioneiro na solução das equações justamente chamadas de diofantinas. Esse tipo de equação, ao ser

⁴ Esta conexão diz respeito à prova que a soma dos recíprocos primos diverge.

aplicada pelos matemáticos modernos à análise dos números inteiros, produziu um grande desenvolvimento da teoria dos números. Em particular, Pierre de Fermat (1601-1665) foi levado a um teorema célebre quando procurou generalizar um problema que tinha lido na *Arithmetica* de Diofanto: dividir um quadrado dado em dois outros quadrados (SINGH, 2008).

Em função da conexão com as reflexões aqui trazidas, retoma-se, neste ponto, a obra de Euclides. A partir de uma perspectiva histórico-crítica, de acordo com Roque (2012), o tipo de organização dos *Elementos* de Euclides é objeto de extensas pesquisas, pois os resultados dos primeiros livros não são necessariamente os mais antigos, ou seja, a obra não é organizada de modo cronológico. Segundo a autora, acredita-se que os livros VII a IX – os livros aritméticos dos *Elementos*, atribuídos aos pitagóricos – sejam os mais antigos. Nesses livros, os números são tratados como segmentos de reta: uma linguagem ingênua de razões e proporções é empregada e estaria presente desde épocas muito remotas, antes da descoberta dos incomensuráveis (ROQUE, 2012). Assim, os livros VII a IX seriam os primeiros tratados organizados sobre Teoria dos Números.

É importante também destacar, como a autora indica, que, nos *Elementos*, o tratamento dos números (*arithmos*) é separado do tratamento das grandezas (*mégéthos*). Observa-se que tanto as grandezas quanto os números são simbolizados por segmentos de reta. Apesar disso, os números são agrupamentos de unidades que não são divisíveis; já as grandezas geométricas são divisíveis em partes da mesma natureza (uma linha é dividida em linhas; uma superfície, em superfícies, etc.). Em qualquer dos casos, a medida está presente, porém as proposições sobre medidas são demonstradas de modo diferente mesmo quando possuem enunciados semelhantes para números.

Roque (2012) continua descrevendo sobre o fato de um número menor ser uma parte de outro número maior quando pode medi-lo, ou seja, os números são considerados segmentos de reta com medida inteira. Isso significa dizer que um segmento de tamanho 2 não seria parte de um segmento de tamanho 3, mas sim de um segmento de tamanho 6. Apesar da função dos números ser relacionada à contagem, antes que sejam usados para tal, é preciso saber qual a unidade a ser considerada. No caso das grandezas, a unidade de medida deve ser também uma grandeza. Para os números, entretanto, a unidade não é número nem grandeza. Euclides define a “unidade” como aquilo que possibilita a medida, mas não é um

número. Então, segundo o exposto nos Elementos, é inconcebível que a unidade possa ser subdividida.

Aristóteles já havia exposto a mesma questão quando escreveu: “O Uno não tem outro caráter do que servir de medida a alguma multiplicidade, e o número não tem outro caráter do que o de ser uma multiplicidade medida e uma multiplicidade de medidas. É também com razão que o Uno não é considerado um número, pois a unidade de medida não é uma pluralidade de medidas” (ROQUE, 2012). Desta forma,

Vemos, assim, que o Um não é um número, pois o número pressupõe uma multiplicidade, ou seja, uma diversidade que o Um não possui, uma vez que é caracterizado por sua identidade em relação a si mesmo. As técnicas de medida que ocupam um lugar preponderante nas práticas euclidianas sobre os números eram realizadas pelo método da antifairese, razão pela qual esse procedimento, no caso dos números, é conhecido hoje como “algoritmo de Euclides” (ROQUE, 2012)

Por sua vez, Diofanto de Alexandria é considerado (não sem contestações), o pai da álgebra. Sem que se possa assegurar, ele pode ter trabalhado no Egito sob o império Romano, no terceiro século de nossa era. Também, não se pode garantir que ele fosse grego, pois muito pouco se sabe sobre sua vida. Alguns historiadores como H. Hankel conjecturam que ele fosse árabe (Roque, 2012). Sua coleção de livros chamada *Aritmética* é um trabalho marcante na história da Álgebra e da Teoria dos Números com a introdução das chamadas *equações diofantinas*. Struik (1997) afirma que a obra de Diofanto resgatou e melhorou as contribuições dadas na Babilônia e na Índia nas soluções de determinadas equações. Na obra de Diofanto se encontra pela primeira vez o uso sistemático de símbolos algébricos. Na realidade, os sinais são mais abreviações do que de fato símbolos algébricos como se considera hoje (STRUIK, 1997).

A contribuição mais conhecida de Diofanto é ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithmos, de onde vem o nome “aritmética”. Ele introduz símbolos, aos quais chama “designações abreviadas”, para representar os diversos tipos de quantidade que aparecem nos problemas. O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego (ROQUE, 2012).

Sob este ponto de vista, Roque (2012) considera Diofanto como um importante personagem do relato tradicional, ocupando um lugar intermediário entre Euclides e os renascentistas europeus.

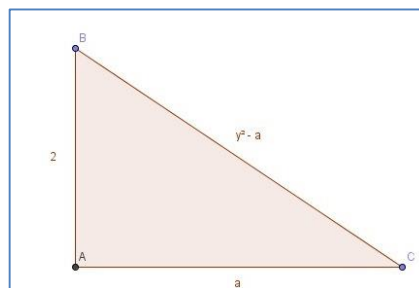
Considere-se, então, a partir daqui, duas equações diofantinas em particular, a equação $y^2 + 2 = x^3$, conhecida como equação de Bachet-Mordel, e a equação $x^n + y^n = z^n$, que ficou associada ao famoso problema conhecido como *último teorema de Fermat*, para discorrermos sobre alguns personagens que fazem parte da história da Teoria dos Números (SINGH, 2008). Ainda se permanece, neste aspecto, no intuito de mostrar um recorte de como se deu o desenvolvimento da teoria dos números ao longo dos séculos e como o conceito de número primo sempre foi fundamental nesse percurso.

Há um problema em particular na *Arithmetica* de Diofanto (HEALTH, 1910, p. 241) que produziu grandes avanços na aritmética ao longo dos séculos. O interesse de Fermat por esse problema indiretamente levou a Teoria dos Números até um dos seus momentos mais sublimes que viria a ocorrer no ano de 1995 com a demonstração do chamado último teorema de Fermat, por Andrew Wiles.

O problema ao qual se refere neste ponto tem o seguinte enunciado, adaptado para a linguagem atual: *Determine um triângulo retângulo cuja área adicionada à hipotenusa seja um quadrado e o perímetro seja igual a um cubo* (BROWN, 1995).

Diofanto considerou o triângulo retângulo mostrado na figura 3:

Figura 3: Triângulo retângulo



Fonte: Brown, 1995 (adaptado)

Sendo a área desse triângulo a , então adicionada à hipotenusa, tem-se y^2 , satisfazendo a primeira condição. Para satisfazer a segunda condição, o perímetro $y^2 + 2$ dever ser igual a um cubo, isto é, $y^2 + 2 = x^3$.

Para resolver a equação, Diofanto usa um artifício não explicado no seu texto – e não há como saber as razões que o levaram a isso.

Diofanto fez $y = m+1$ e $x = m-1$, obtendo

$$m^2 + 2m + 1 + 2 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 \Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + m - 4 = 0$$

Sem nenhuma justificativa, ele afirmou que $m = 4$. Desse modo, tem-se a solução inteira de Diofanto para o problema com $y = 5$, $x = 3$. Apenas no século XVII, Leonhard Euler (1707-1783) provaria definitivamente, usando números complexos, que esse par de números primos é a única solução inteira positiva da equação (HEATH, 1910).

Por outro lado, Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638) foi um escritor de livros sobre enigmas e truques que formaram a base para quase todos os livros posteriores sobre recreações matemáticas. Bachet também trabalhou em teoria dos números. Ele é mais famoso por sua tradução em 1621 para o latim do livro *Arithmetica* de Diofanto (BROWN, 1995).

Bachet se interessou pelo problema de Diofanto supramencionado. Por esse motivo, a equação passou a ser chamada de equação de Bachet. Uma vez que $5^2 + 2 = 3^3$, ele pensou em conseguir outras soluções a partir dessa. Considerou o caso mais geral $y^2 = x^3 + k$, onde $k \neq 0$ é um inteiro, e apresentou uma propriedade surpreendente desta equação que ficou conhecida como *Fórmula da Duplicação de Bachet*.

Se (x, y) é uma solução racional para a equação $y^2 = x^3 + k$, então

$$\left(\frac{x^4 - 8kx}{4y^2}, \frac{-x^6 - 20kx^3 + 8k^2}{8y^3} \right)$$

é uma outra solução (SOYDAN, DEMIRCI, IKIKARDES E CANGÜL, 2007).

Novamente, tem-se um fato não explicado relacionado a essa equação. Como Bachet descobriu essa fórmula? Em Randrianarisoa (2011), pode-se ver uma demonstração da fórmula da duplicação de Bachet.

Mencionou-se o trabalho de Bachet para falar de outro matemático célebre. Kleiner (2005) considera Pierre de Fermat o fundador da moderna Teoria dos Números. Fermat foi advogado, juiz e oficial do governo em Toulouse, França. Jurista e magistrado por profissão, dedicava à Matemática apenas as suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Blaise Pascal (1623-1662) o maior matemático de seu tempo. A influência de Fermat foi limitada pela falta de interesse na publicação das suas descobertas, conhecidas principalmente pelas cartas a amigos e anotações na sua cópia da *Arithmetica* de Diophanto. Fermat gostava

de trocar e resolver desafios. Dedicou grande parte de seus esforços matemáticos em analisar os problemas contidos na tradução latina, feita por Bachet, da Aritmética de Diofanto (SINGH,2008).

A aritmética exerceu um grande fascínio em Fermat. Na sua edição de Diofanto, escreveu notas e comentários sobre numerosos teoremas de elegância considerável. A maioria das suas provas não foram encontradas, e é possível que algumas delas não existissem. Quem sabe algum tipo de indução por analogia e sua intuição foram o bastante para levá-lo a resultados corretos (SINGH, 2008).

2.4 Um problema importante

O problema 8 do livro II Diofanto viria a dar origem ao problema mais famoso na história da Teoria dos Números. O enunciado é o seguinte: *decompor o quadrado 16 em dois quadrados*. Colocado de outra forma, pede a solução da equação $x^2 + y^2 = 16$ (KLEINE, 2005).

Singh (2008) comenta que, por volta de 1637, estudando esse problema, Fermat trocou a potência de 2 para 3, pensando em decompor um cubo em dois. Como aparentemente esta nova equação não tinha solução, ele a alterou mais ainda, trocando a potência da equação por números maiores que 3, e igualmente parecia não haver soluções para elas. Isso levou Fermat a intuir que não existia uma terna de inteiros positivos (x, y, z) que satisfizesse a equação para valores maiores que 2:

$$x^n + y^n = z^n, n > 2$$

Fermat, então, generalizou o problema 8 em um enunciado extremamente simples que ficou conhecido como *O Último Teorema de Fermat: Não existe nenhum conjunto de inteiros positivos (x, y, z) com n inteiro maior que 2, que satisfaça a equação $x^n + y^n = z^n$* .

O *teorema* foi escrito nas margens do seu livro Arithmetica, que era a tradução latina, feita por Bachet, seguido de uma frase que assombraria os matemáticos por mais de três séculos: “Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é demasiado estreita para a conter” (KLEINE, 2005). Essa *demonstração maravilhosa* nunca foi encontrada e levou mais de 350 anos para ser resolvida.

Uma importante contribuição na busca por uma solução desse problema que tinha se tornado o *santo graal* da teoria dos números foi dada pela matemática francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831). Ainda bem jovem, se interessou por Teoria dos Números, o que a levou a escrever cartas para Carl Friedrich Gauss. Com medo de não ser levada a sério pelo fato de ser mulher, assinava suas cartas como Monsieur Le Blanc.

O nome de Sophie Germain ficou ligado a um caso especial do Último Teorema de Fermat. Sophie provou, por volta de 1825, que, se p e $2p+1$ são primos ímpares, então não existem inteiros positivos x, y, z com $\text{MDC}(x, y, z) = 1$ e p não dividindo xyz , tais que $x^p + y^p + z^p = 0$ (MARTINEZ; MOREIRA; SALDANHA; TENGAN, 2013).

Andrew Wiles, matemático britânico, conseguiu demonstrá-lo definitivamente em 1995 (Singh, 2008). Essa equação é o problema mais famoso relacionado a Fermat e, por ter produzido grandes avanços na teoria dos números, acabou ofuscando para o público em geral seu interesse pela equação de Bachet.

Existem dezenas de livros e diversos artigos sobre o último teorema de Fermat. Por esse motivo, observa-se aqui nas contribuições dadas pela outra equação menos divulgada, mas sem menos importância.

Com variações da equação de Bachet, Fermat desafiava repetidamente os matemáticos europeus, em particular os ingleses, enviando-lhes problemas que ele alegava ter resolvido e pedindo provas. Esses problemas geraram uma grande controvérsia e cartas nada amistosas (TANNERY; HENRY; WAARD, 1891).

Em uma carta de 1659 à Pierre de Carcavi (1600 - 1684), Fermat afirmou que podia provar que a única solução inteira da equação $y^2 + 2 = x^3$ era (3, 5) e as únicas soluções inteiras da equação $y^2 + 4 = x^3$ eram (2, 2) e (5, 11) (TANNERY; HENRY; WAARD, 1891).

Assim como no caso do último teorema, pode ser que Fermat não tivesse de fato uma prova, ou que levou para o túmulo o segredo das suas descobertas. A ferramenta matemática que seria usada para responder essa questão só seria inventada no século seguinte: o computador.

Como se pode, as equações propostas na *Arithmetica* de Diofanto foram criando novos problemas e deixando, no decorrer dos séculos, desafios que permitiam à aritmética avançar e ampliar seu campo de estudo.

2.5 As contribuições de Mersenne

Entre os poucos amigos que Fermat teve, Singh (2008) destaca o padre Marin Mersenne (1588-1648), que era um admirador da matemática. Mersenne era filósofo, teólogo, matemático e teórico musical. Pertenceu a um dos mais importantes grupos de intelectuais franceses da sua época, e lutava contra a cultura de segredos que caracterizava os matemáticos daquela época. Por isso, agia como uma “central de informações” ao trocar correspondências com vários matemáticos, encorajando-os a publicar suas ideias. Estava sempre atento a novas descobertas, com o intuito de divulgá-las. Era sua forma de tentar acabar com a cultura do sigilo entre os matemáticos. Infelizmente, seus esforços para que Fermat publicasse seus trabalhos foram em vão.

O nome de Mersenne ficou associado aos números primos da forma $2^p - 1$, onde p é um primo. Em 1644, apresentou uma lista incorreta de valores de p menores ou iguais a 257 para os quais $2^p - 1$ é primo, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257 (Mersenne considerava primo o número 1). Desconsiderando o 1, a lista de Mersenne está incorreta para os valores 67 e 257. Não se sabe como Mersenne conseguiu essa lista. A verificação da exatidão dela só se deu 200 anos depois (RIBENBOIM, 2012).

2.6 Euler e a teoria dos números

Os problemas e afirmações de Fermat viajaram no tempo e chegaram até os dias de um grande matemático suíço nascido no século XVIII e que passou a maior parte da vida na Rússia e na Alemanha. Ele é o criador de uma ferramenta matemática chamada de *Números Algébricos*, que reúne números inteiros e números complexos. O matemático, que, segundo Pierre Simon Laplace (1749-1827), é o *mestre de todos nós*, Leonhard Euler (DUNHAM, 1999).

O interesse de Euler em Teoria dos Números se deu por meio de suas correspondências. Ele nunca escreveu um livro sobre o assunto. Euler foi o primeiro a dar uma demonstração para o chamado *pequeno teorema de Fermat*, que diz que se p é um primo e a um inteiro positivo, então $a^p - a$ é divisível por p . Boyer (2012) escreve:

A prova de Euler, que apareceu em *Commentarii* de Petersburgo em 1736, é tão surpreendentemente elementar que a descrevemos aqui, prova por indução sobre a . Se $a = 1$, o teorema vale, evidentemente. Agora mostramos que se o teorema vale para qualquer valor inteiro positivo de a , seja $a = k$,

então vale para $a = k+1$. Para isso, usamos o teorema binomial para escrever $(k+1)^p$ como $k^p + mp + 1$, onde m é um inteiro. Subtraindo $k + 1$ de ambos os lados, vemos que $(k + 1)^p - (k + 1) = mp + (k^p - k)$. Como o último termo do segundo membro por hipótese é divisível por p , resulta que o segundo membro é divisível por p , e portanto o primeiro membro da equação também, o teorema portanto vale, por indução matemática, para todos os valores de a . (BOYER, p. 216, 2012)

Os métodos da Análise Matemática passaram a desempenhar um papel fundamental na pesquisa em Teoria dos Números. Essa parceria entre Análise e Teoria dos Números tem suas origens no trabalho de Euler e teve um amplo desenvolvimento pelo matemático alemão Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Euler foi o primeiro matemático a aplicar as ideias da Análise a problemas de Teoria dos Números. Na verdade, como se observou posteriormente, ele estava utilizando técnicas da Teoria das Funções Complexas. Dessa forma, atacou dois problemas fundamentais da Teoria dos Números. O primeiro problema da Teoria dos Números em que Euler aplicou os métodos analíticos diz respeito a soluções inteiras de equações diofantinas. O outro problema se relacionava com o comportamento da sequência de números primos no conjunto dos números inteiros positivos (BOYER, 2012).

Fazendo uso da ferramenta criada por ele, Euler provou que Fermat estava correto em sua afirmação sobre a solução inteira positiva da equação $y^2 = x^3 - 2$.

2.7 Gauss

Outro aporte histórico relevante para esta descrição pode ser posicionado no século XIX, mais precisamente em 1801, ano em que Carl Friedrich Gauss publicou um dos livros mais importantes da história da matemática, *Disquisitiones Arithmeticae (Investigações em Aritmética)*; esse livro influenciou todas as áreas da matemática (Singh, 2008).

Wolfgang Waltershausen (1809-1876) publicou, em 1862, um livro com a biografia de Carl Friedrich Gauss. Esse é livro a fonte da citação mais famosa atribuída a ele: *A matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática* (MORITZ, 1958). Para Singh (2008), “Gauss é reconhecido como o mais brilhante

matemático que já viveu. Enquanto E. T. Bell se refere a Fermat como o ‘Príncipe dos Amadores’, ele chama Gauss de ‘Príncipe dos Matemáticos’ (SINGH, p. 120, 2008).

Disquisitiones apresenta seis seções dedicadas à teoria dos números, dando à mesma uma estrutura sistemática e definitiva. Este livro, escrito em latim, sintetiza e aperfeiçoa todos os trabalhos anteriores nesta área. Antes de sua publicação, o que hoje se conhece como teoria dos números se caracterizava por resultados isolados, desconexos e com notações que deixavam muito a desejar. Desta forma, *Disquisitiones Arithmeticae* unificou os conhecimentos nesta área e, por esse motivo, a obra pode ser vista como um marco na história da matemática e é considerada o ponto de partida da moderna Teoria dos Números.

Nessa obra Gauss demonstra, de maneira completa, a proposição 14 do livro IX dos Elementos de Euclides, conhecido como o *Teorema Fundamental da Aritmética*, que diz que todo número inteiro positivo composto é igual a um produto de fatores primos, e que esta multiplicação é única.

Assim, a publicação de Gauss, por ter sido um trabalho com um novo conceito e com outras notações – portanto, uma obra com um desenvolvimento inovador – foi, em sua época, compreendida por poucos matemáticos. Entre eles, um seguidor fervoroso: o matemático alemão Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

Conforme E. E. Kummer (1810-1893) observou, "Dirichlet não estava satisfeito em estudar as *Disquisitiones* de Gauss uma vez ou várias vezes, mas por toda a sua vida conservou um contato próximo com a riqueza de pensamentos matemáticos profundos que ele continha, estudando-o sempre". De fato, Dirichlet foi o primeiro que não somente entendeu completamente esta obra, mas que também a tornou acessível aos outros (BOYER, 2010, p. 345).

Sobre Dirichlet é importante registrar que ele apresentou, em 1837, a prova de um dos resultados mais importantes em teoria dos números, a existência de infinitos números primos da forma $an+b$, com n natural e a e b relativamente primos.

2.8 Mordell e a dedicação por uma equação

Finaliza-se esta descrição dos elementos históricos, que permitiram abordar importantes conceitos matemáticos relativos aos objetos da pesquisa aqui descrita, com a contribuição de Louis Joel Mordell (1888-1972), que nasceu na Philadelphia, USA. Ganhou

uma bolsa para estudar em Cambridge, na Inglaterra. Em 1929, recebeu a cidadania britânica e por isso é considerado um matemático britânico.

Depois de se formar, Mordell começou seu trabalho como pesquisador, com especial interesse sobre determinadas equações diofantinas. De fato, dedicou grande parte da sua vida de investigador matemático à equação $y^2 = x^3 + k$, a qual, devido às suas descobertas, é atualmente conhecida como equação de Bachet-Mordell.

Em Álgebra, uma curva de Mordell é uma curva elíptica da forma $y^2 = x^3 + k$, com k inteiro e diferente de zero. Mordell apresentou novas propriedades dessas equações a partir da determinação dos pontos inteiros das curvas. Para ele, a equação de Bachet desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria dos números.

Em 1922, Mordell apresentou um resultado surpreendente (EVEREST; HARD, 2011), provado em 1929 por Carl Ludwig Siegel (1896 –1981):

A equação $y^2 = x^3 + k$, com k inteiro e diferente de zero, se tiver solução, terá uma quantidade finita de soluções inteiras.

Mais de mil anos depois de Diofanto e séculos depois de Bachet, Fermat, Euler e Gauss, a questão sobre a finitude ou não do número de soluções inteiras dessa equação havia sido respondida.

A recuperação feita até aqui, envolvendo temas relativos à teoria dos números, cumpre dois papéis bastante relevantes nesta investigação. O primeiro deles diz respeito à construção de um relato que procura articular conteúdos indispensáveis para a formação do professor de Matemática, e que têm grande ligação com a ideia de primalidade, com seu contexto histórico. O segundo, ligado ao primeiro, refere-se à possibilidade de argumentar em favor da importância do conteúdo “números primos”, visto como desprovido de interesse, por meio da indicação da complexidade de certos problemas que o envolvem, bem como a atenção dada a tais desafios por matemáticos célebres.

A próxima seção fecha este capítulo, e refere-se ao crivo de Eratóstenes. Apesar de o mesmo não ser empregado nas atividades relativas a esta pesquisa, julgou-se pertinente falar sobre eles, uma vez que seu estudo é frequentemente realizado no Ensino Fundamental quando do trabalho didático com números primos. Em razão disto, mantém-se este conteúdo no fechamento do capítulo, com menor compromisso com a sequência cronológica.

2.9 Crivo de primalidade de Eratóstenes

Na apresentação dos números primos uma questão habitual é a de determinar todos os números primos até certo limite dado. Um procedimento simples, mostrado no ensino fundamental, é o chamado Crivo de Eratóstenes⁵. Há que se indicar, também, a relevância, no ensino superior, não apenas de se determinar certa quantidade de primos usando os crivos, como também a questão fundamental de se discutir a primalidade de um inteiro positivo ímpar como estratégia de trabalho didático e de resolução de problemas, no âmbito de situações didáticas.

O teorema que diz “se um inteiro positivo $a > 1$ é composto, então n possui um divisor primo $p \leq \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ ” e seu corolário: “se um número não possui nenhum fator primo p , tal que $2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{a} \rfloor$, então o número é primo” (FONSECA, 2011), fornecem um processo que permite reconhecer se um dado inteiro $a > 1$ é primo ou é composto, para o que basta dividir a sucessivamente pelos primos que não excedem o valor $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$. Tal resultado é a base do chamado Crivo de Eratóstenes. $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$ é denominado de piso do número real a e indica o menor inteiro maior ou igual a a .

Coutinho (2000), escreve que Nicômaco, em sua Aritmética, publicada por volta do ano 1000 d.C., introduz o crivo de Eratóstenes da seguinte forma:

O método para obter números primos é chamado por Eratóstenes uma peneira, porque tomamos números ímpares misturados de maneira indiscriminada e, por este método, como se fosse pelo uso de um instrumento ou peneira separamos os primos ou indecomponíveis dos secundários ou compostos. (COUTINHO, 2000, p. 62)

A construção de uma tabela de números primos que não excedam um dado inteiro ímpar n usando o Crivo de Eratóstenes consiste no seguinte: escrevem-se, na ordem natural, todos os inteiros ímpares a partir de 3 até n (só os ímpares são listados, pois 2 é o único primo par). O primeiro número da lista é o 3; risca-se o mesmo (o que equivale a eliminar) os múltiplos de 3 maiores que ele próprio. Em seguida, procura-se o menor elemento da lista, maior que 3, que não tenha sido riscado, que é o 5. Risca-se os múltiplos de 5 maiores que ele próprio. Em seguida, procura-se o menor elemento da lista, maior que 5, que não tenha sido

⁵ O crivo de Eratóstenes não é o único existente, no que se refere à identificação de números primos, mas é o mais conhecido na cultura escolar. Entre outros constructos bastante interessantes desta natureza, podem ser mencionados os crivos de Sundaram (HONSBERGER, 1970) e de Atkin (ATKIN; BERNSTEIN, 2004).

riscado, que é o 7. Risca-se os múltiplos de 7 maiores que ele próprio. Depois, localiza-se o menor elemento da lista, maior que 7, que não tenha sido riscado, que é o 11. E assim por diante, até chegar a n ; por fim, adiciona-se o 2 à lista.

Como exemplo no método supramencionado, indica-se como obter os números primos existentes entre 1 e 100: uma vez que $\lfloor \sqrt{100} \rfloor = 10$, basta eliminar sucessivamente todos os números que são múltiplos dos primos p menores que ou iguais a 10, ou seja, 3, 5 e 7 e restarão os seguintes primos: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. A tabela 1 destaca os primos nas quadrículas brancas após o processo de *peneira-los*.

Tabela 1 – Primos menores que 100 identificados pelo Crivo de Eratosthenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando o objetivo de usar os crivos como critério para testar a primalidade, o crivo de Eratosthenes pode ser usado da seguinte maneira: se n é um ímpar em relação ao qual se pretende verificar se é ou não primo, o crivo sugere o seguinte procedimento:

- Extraí-se o piso da raiz quadrada de n : $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$;
- Divide-se n por todos os primos p menores que ou iguais ao piso da raiz quadrada de n ;
- Se n não for divisível por nenhum dos primos p , então n é primo.

De outro modo, para responder se um número qualquer é primo (por exemplo, 1073), é preciso possuir acesso a uma determinada quantidade de primos, mais especificamente

aqueles anteriores ao piso da raiz quadrada do número em questão. Ou seja, ao se obter o piso da raiz quadrada de 1073, $\lfloor \sqrt{1073} \rfloor = 32$, deve-se conhecer todos os primos menores ou iguais a 32: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Caso 1073 não seja divisível por nenhum desses primos, então ele é primo. Como $1073 = 29 \times 37$, ou seja, é divisível por 29; logo, não é primo. Note-se que o outro fator, $37 > \lfloor \sqrt{1073} \rfloor$, não chega a ser testado.

Esta descrição do crivo encerra este capítulo, destinado à recuperação histórica e ao estudo dos elementos matemáticos envolvidos. O próximo capítulo traz outra importante parte deste estudo: o quadro teórico.

A relevância do panorama aqui feito se justifica, nesta pesquisa, pelos elementos de discussão das teorias correlatas aos objetos matemáticos considerados neste trabalho. De forma subjacente, alguns destes elementos foram úteis para a construção e análises feitas, tomando por base as respostas dadas à sequência didática. Além disso, pode-se considerar importante para localizar os objetos da pesquisa no seu contexto histórico.

CAPÍTULO 3

QUADRO TEÓRICO

Neste capítulo, apresenta-se um quadro que se configura como base teórica para as argumentações mais tarde destacadas, principalmente, nas análises. À revisão da literatura, seguem apontamentos ligados a um constructo teórico relativo às representações numéricas transparentes e opacas, bem como à substituição de conceitos (e seus significados) por notações, com destaque para os trabalhos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004).

3.1 Revisão da literatura

Segundo Gil (2009), é da revisão bibliográfica que emergem as ideias que influenciarão a definição do problema. Uma questão natural, depois de se pensar sobre o problema de pesquisa, foi procurar saber que pesquisas já tinham sido realizadas de modo a posicionar teoricamente este trabalho. Entretanto, o número de pesquisas que se aproximam dos interesses aqui tratados é bastante reduzido. Desta forma, considera-se, além de teses e dissertações, artigos científicos e capítulos de livros, tendo como critérios, nestes casos, a seleção de periódicos com rígida política editorial e de livros de autores com produção vasta e conhecida, o que lhes transforma em referências. Assim, seleciona-se e descreve-se a importância de cada um destes trabalhos para o este texto.

Conforme já se mencionou, uma dificuldade neste ponto ocorreu devido à pouca quantidade de trabalhos acadêmicos que lidam com temas relativos à teoria dos números na área da Educação Matemática no Brasil. A escassez é ainda maior quando se considera o trabalho didático com números primos, quer na aprendizagem dos estudantes da educação básica, quer na formação de professores de Matemática. Esta revisão procura, então, nos trabalhos encontrados e comentados, evidenciar a abordagem de seus autores em relação à teoria dos números e aos números primos, em especial, além de apontar as fragilidades nos saberes dos professores em formação sobre estes temas.

Zazkis e Campbell (2006) comentam que a Teoria dos Números, apesar de representar a essência da matemática, não tem recebido a devida atenção nas pesquisas educacionais. Segundo eles, a natureza formal da teoria dos números permite que ela seja analisada nas mais diferentes perspectivas. Esta teoria, nas palavras dos autores, possui mística e beleza, além de

praticidade; apesar disto, não é vislumbrada como importante, e nem recebe lugar de destaque do ponto de vista pedagógico no processo de ensino de Matemática. Para estes autores, na teoria dos números residem lado a lado as questões mais triviais da aritmética com os mistérios mais profundos e perenes.

De modo geral, as obras pesquisadas informam sobre as aplicações da teoria dos números em áreas mais avançadas, como criptografia e na ciência da computação, e essas aplicações podem não ser perceptíveis quando se estuda seu conteúdo. Os estudos da teoria dos números podem não ter aplicação imediata, ou seja, para ajudar no cálculo de impostos ou dos juros do cartão de crédito. Por outro lado, esta teoria oferece uma formalização algébrica consistente para a aritmética dos números inteiros. Significativamente, os futuros professores que mostram interesse pelo assunto percebem nela a essência da matemática. O interesse pode gerar fascínio em vez de aversão. Assim, pela literatura pesquisada, apreende-se a utilidade da teoria dos números a partir de uma perspectiva diferente - a sua importância para o ensino e aprendizagem da matemática.

Tópicos da teoria dos números, tais como fatoração, divisores, múltiplos, e congruências fornecem meios para desenvolver e solidificar o pensamento matemático, para o desenvolvimento de uma apreciação enriquecida da estrutura numérica, especialmente no que diz respeito à identificação e reconhecimento de padrões, bem como para formular e testar conjecturas, para fomentar o entendimento dos princípios e respectivas provas, permitindo justificar a verdade de teoremas de forma disciplinada e fundamentada. Considerando-se a importância deste ramo da matemática na história e filosofia da disciplina, a quantidade pouco ampla e coordenada de pesquisas em educação matemática nesta área é de causar surpresa - e considerando as ricas possibilidades para a investigação nesta área, causa mais ainda.

A "rainha da matemática", que, segundo Waltershausen, era como Gauss se referia a Teoria dos Números (MORITZ, 1958) ainda tem que estabelecer um lugar próprio nas pesquisas em educação matemática (Zazkis e Campbell, 2006). É o que se pode perceber no levantamento que resultou na revisão que agora se apresenta.

3.1.1 Teses

No Brasil, a Teoria dos Números, até o ano de 2014, quando foi feito o levantamento no repositório da CAPES em função da construção deste trabalho, recebeu atenção em apenas

uma tese de doutorado na área da educação matemática: a tese intitulada *Re-significando a disciplina de Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, concluída em 2007 sob a orientação da Profa. Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado.

Desde a pesquisa de Resende até o momento em que esta investigação foi feita (2014), não se encontrou qualquer outra tese na área de Educação Matemática em Teoria dos Números no Brasil. Em razão disso, da importância do trabalho e por ser uma tese de referência para qualquer nova pesquisa na área, passa-se a descrevê-la.

Em sua tese, Resende (2007) procura responder a seguinte questão de pesquisa: “Qual Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a prática docente na escola básica?” (RESENDE, 2007, p. 34).

Desta forma, o trabalho de Resende (2007) se insere na problemática que questiona qual álgebra deve ser ensinada na formação de professores de matemática que atuarão na básica. O objetivo foi demonstrar o que pensam os pesquisadores que trabalham com a Teoria dos Números, bem como os educadores matemáticos envolvidos com o campo de conhecimento, além dos professores da disciplina a respeito da problemática abordada.

Em se tratando de um saber a ensinar, a autora buscou em autores como Chevallard, Perrenoud, Chervel, Lopes e Macedo, entre outros, o referencial teórico para discutir a constituição das disciplinas científicas (saber sábio), das disciplinas acadêmicas e das disciplinas escolares (saberes a ensinar), abordando o processo de transposição didática do saber “sábio” para o saber a ensinar. Utilizou os trabalhos de Shulman para discutir os conhecimentos dos professores: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular.

Quanto aos procedimentos adotados, foram realizadas sete entrevistas semiestruturadas com profissionais da área, sendo três pesquisadores em Teoria dos Números, um doutor em Álgebra, além de professor da disciplina na licenciatura em matemática, um doutor em Educação, envolvido com educação algébrica; um doutor em Matemática, cujo trabalho de mestrado versou sobre Teoria dos Números, e um doutor em Matemática, professor da disciplina na licenciatura. Todos os entrevistados concordaram que a Teoria dos Números tem um papel central na matemática e na história da matemática, e que é pouco enfatizada nos currículos, especialmente no da licenciatura em matemática.

O trabalho discute a valorização da Aritmética pela utilização do discreto, o que segundo a autora, corrobora o que afirma Gimenez (1997), ao considerar que há hoje um interesse pela matemática discreta no âmbito curricular, pois, para a resolução de certos tipos de problemas aplicáveis à vida cotidiana, são necessárias estratégias que não se resumem a simples cálculos, mas incluem métodos importantes da matemática, como a indução e o tratamento recursivo, presentes na Teoria dos Números. O discreto é importante tecnologicamente, pois os aparelhos digitais trabalham neste domínio. Aparece em estruturas combinatórias, no uso de padrões iterativos ou recursivos, na análise de redes, em códigos e em elementos probabilísticos.

A autora indica que o uso de senhas e de códigos em geral levou à necessidade de desenvolvimento de sistemas de segurança de comunicação e, desse modo, à aplicação da Teoria dos Números na criptografia, ao considerar que o sistema mais conhecido de criptografia é chamado de RSA e está baseado na fatoração em primos, e que qualquer pessoa pode entender, se tiver um conhecimento básico de Teoria dos Números. Isto dá significado ao estudo dos números primos no ensino, já que esse conceito é também central na Teoria dos Números enquanto saber científico. Ainda que as atividades constantes dos procedimentos levados a efeito nesta investigação não envolvam o conceito de criptografia, este é um exemplo de aplicação em contexto complexo dos conhecimentos relativos à primalidade.

O que se pode concluir pelas entrevistas, de acordo com o trabalho, é que os entrevistados apresentaram elementos que podem justificar uma maior presença da Teoria dos Números no ensino de Matemática nos diferentes níveis da escolaridade, em especial no curso de licenciatura em matemática, embora o modo de ver alguns aspectos não seja consensual.

O trabalho considera que a educação aritmética realizada hoje precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades tendo em vista o desenvolvimento do sentido numérico, e a educação algébrica deve promover a produção de significados não apenas dentro da matemática e conduzir o aluno a pensar o mundo em números. Essa visão também é partilhada pelo Grupo de Educação Algébrica da PUC-SP, que entende que não há passagem da aritmética para a álgebra, pois o pensamento algébrico está imbricado no aritmético, o que os torna inseparáveis mas, “a maioria dos alunos de licenciatura não está transferindo seus conhecimentos de Álgebra Superior para a justificativa de resultados de Matemática Elementar que eles deverão ensinar.” (p. 29)

Considerando as avaliações realizadas na sua tese e as sugestões apresentadas, a autora elege alguns tópicos como essenciais, que constituiriam o núcleo dos conteúdos a serem abordados na disciplina Teoria dos Números:

- Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros;
- Representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências em \mathbb{N} , sequências, progressões aritméticas e geométricas) e princípio da indução finita;
- Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética;
- Introdução à congruência módulo m : definições, propriedades e algumas aplicações;
- Equações diofantinas lineares.

Percebe-se que o tema “números primos” tem lugar na proposta resultante do trabalho de Resende (2007), integrado em uma frente que tem como tema central a ideia de divisibilidade. Levando em consideração esta proposta, nas análises procurou-se destacar se os conhecimentos relativos aos conteúdos destacados pela pesquisadora no terceiro item por ela sugerido surgem como saberes correlacionados aos conceitos de primalidade necessários para o levantamento de conjecturas e as propostas de resolução das atividades apresentadas aos sujeitos.

A autora encerra sua pesquisa concluindo que, neste trabalho, procurou compreender a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, voltado para a formação inicial do professor da escola básica, de modo a levantar possibilidades para resignificar essa área nos currículos da licenciatura em matemática.

Além dos aspectos indicados nesta síntese, é interessante salientar que a questão da divisibilidade, um dos tópicos levantados pela autora, foi discutida nas análises.

3.1.2 Livros

3.1.2.1 Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction.

S. R. Campbell e R. Zazkis (editores), Ablex Publishing, 2002.

O livro é uma coletânea de artigos sobre trabalhos em teoria dos números na área de educação matemática. Os editores deixam claro que é uma primeira tentativa de preencher o

vazio existente de estudos nessa área. Essa característica torna o livro uma leitura obrigatória para os pesquisadores em educação que tem interesse sobre o assunto. Segundo os autores,

the main goal of this monograph is to identify and demonstrate some of the different kinds of problems and ways of thinking that can be investigated in a program of research into learning and teaching number theory and its implications for cognition and instruction. In so doing, we hope to begin charting out a few directions in which this work can progress (CAMPBELL; ZAZKIS, 2002, p. 2)⁶

Em uma tradução próxima da afirmação dos autores, nota-se que os mesmos têm como objetivo principal o de identificar e demonstrar alguns dos diferentes tipos de problemas e formas de pensar que podem ser investigados em programas de pesquisa sobre ensino/aprendizagem da teoria dos números e suas implicações para a cognição e instrução. Ao fazê-lo, esperam começar a apontar algumas direções em que o trabalho com este tema possa progredir. Selden e Selden indicam que as pesquisas nessa área podem mostrar questões e novos rumos para a investigação em educação, “alguns que vão bem além da própria teoria dos números” (CAMPBELL; ZAZKIS, p.214, 2002).

3.1.2.1.1 Uma visão panorâmica do livro

O livro possui onze capítulos, cuja tônica comenta-se a seguir. Os autores afirmam que vários tópicos da teoria dos números podem ser apropriados pela escola básica, e que os estudos apresentados visam, principalmente, a cognição e instrução de futuros professores, pois apresentam uma variedade de diferentes dimensões da aprendizagem e do ensino da teoria dos números (p. 9).

Pode-se dizer que o primeiro e o último capítulos têm como objetivos explicitar e discutir o papel que a teoria dos números pode e deve desempenhar no currículo de matemática da escola básica, enquanto os nove capítulos restantes discutem questões relacionadas à aprendizagem e ao ensino de teoria dos números, e podem ser agrupados da seguinte forma: quatro capítulos são dedicados principalmente às concepções dos alunos, imagens, dificuldades e imprecisões linguísticas quando lidam com questões elementares da teoria dos números (endereçados a futuros professores nos capítulos 2, 3, 4, e graduados em ciência da computação, no capítulo 5). Três capítulos enfocam considerações didáticas sobre

⁶ O principal objetivo deste texto é identificar e demonstrar alguns dos diferentes tipos de problemas e maneiras de pensar que podem ser investigadas em um programa de pesquisa sobre aprendizagem e ensino da teoria dos números e suas implicações para a cognição e a educação. Ao fazê-lo, esperamos começar a traçar alguns caminhos pelos quais este trabalho pode progredir (tradução nossa).

o projeto de instrução e ensino elementar e avançado dos problemas em teoria dos números para futuros professores (discutindo critérios gerais para a escolha de tarefas a serem apresentadas em classe no capítulo 6, vantagens didáticas da utilização de provas genéricas no capítulo 9 e analisando uma tarefa específica, no capítulo 7).

Os dois capítulos restantes estão preocupados principalmente com conexões entre o ensino e a aprendizagem da teoria dos números, tendo como referência o papel de conjecturas e provas de indução em classe (conjecturas no capítulo 8, e indução no capítulo 10).

Pode-se ver que o livro, por meio de seus artigos, fornece variadas informações nos aspectos cognitivos e educacionais sobre os futuros professores.

Faz-se, a seguir, uma síntese do que cada capítulo apresenta, considerando aqueles que podem contribuir com este estudo.

3.1.2.1.2 A contribuição de cada capítulo

Os autores apresentam, no Capítulo 1, “A respeito da teoria dos números como um campo conceitual”, ideias bastante semelhantes àquelas contidas na tese de Resende (2007). Vale salientar que os autores definem a teoria dos números como um campo conceitual e os artigos apresentados têm como finalidade contribuir para as pesquisas em educação matemática nessa área ainda em fase emergente.

Desta forma, os autores discutem, de forma concisa, os principais elementos da teoria dos números como uma área de estudo da matemática, caracterizando a teoria elementar dos números como distinta da sua versão avançada. A proposta dos autores consiste em rever o papel da teoria elementar dos números na educação básica, com referência às formas explícitas e implícitas com que o ensino e aprendizagem da teoria dos números são abordadas nos documentos oficiais do NCTM⁷, em suas versões de 1989 e 2000.

Além disso, Campbell e Zazkis, os autores, comentam sobre algumas questões relativas aos artigos contidos em obras de referência. Discutem sobre os estudos teóricos, como, por exemplo, os de Vergnaud e de Dubinsky, que são usados para analisar os dados. Em seguida, eles definem a teoria dos números como um campo conceitual e sugerem que os

⁷ *National Council of Teachers of Mathematics*, algo como “Conselho Nacional dos Professores de Matemática” (Estados Unidos).

artigos do livro podem contribuir para esta área emergente de pesquisa em educação matemática.

O capítulo encerra ressaltando as contribuições que tópicos da teoria dos números podem trazer para as pesquisas sobre os conhecimentos aritméticos de alunos e futuros professores.

O capítulo 2, “Chegando a um acordo sobre a divisão: O entendimento dos futuros professores”, é bastante esclarecedor a respeito de situações nas quais chega-se a pensar que não há problemas em relação à compreensão sobre o tema, aparentemente muito simples, mas que podem causar grandes surpresas quando analisadas de forma mais profunda. Neste capítulo, indica-se como um grupo de vinte futuros professores sentem dificuldades em chegar a um acordo sobre a divisão de números inteiros e números racionais. Campbell (2002), seu autor, analisa as ideias corretas e incorretas na hora de se resolverem questões envolvendo os dois conjuntos mencionados.

Os erros cometidos no entendimento do algoritmo da divisão são descritos em termos peculiares neste capítulo. O autor comenta que os resultados indicavam que, geralmente, os acertos dos participantes em relação às questões de divisibilidade ocorrem com base em cálculos, ou seja, raramente com base em critérios de divisibilidade. Por exemplo, os futuros professores tiveram dificuldades quando se fez a exigência de que na divisão entre números inteiros o resto e o quociente fossem também números inteiros (quando perguntado sobre a divisão de 21 por 2, por exemplo, geralmente respondiam que o quociente seria 10,5). Eles também encontravam dificuldades com a exigência de que o resto fosse maior que o divisor (não conseguiam chegar a uma solução na qual o quociente fosse 9 e o resto 3, uma vez que $2 \times 9 = 18$ e $18 + 3 = 21$ (p. 20-21). Desta forma, este capítulo acionou a percepção sobre um problema análogo com respeito a divisão, quando as condições do algoritmo de Euclides para divisão eram impostas. O teorema da divisão, usado por Euclides no seu livro *Elementos*, estabelece uma divisão com resto. É um teorema que pode ser provado por meio de um algoritmo que explica como se processa a divisão – por esse motivo, então, ficou conhecido como Algoritmo de Euclides. O teorema afirma que se a e b são dois inteiros, com $b \neq 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições: $a = bq + r$; $0 < r < b$.

Nos exemplos dados em que a e b eram positivos, os futuros professores não tinham dificuldades em encontrar o quociente e o resto ($a = 59$; $b = 14$, então $59 = 14 \times 4 + 3$, q e r satisfazem as condições). Também, não havia grandes problemas quando b era negativo ($a = 59$; $b = -14$, então $59 = (-14) \times (-4) + 3$, q e r novamente obedecem as condições). Entretanto, quando a era negativo como, por exemplo, em $a = -79$ e $b = 11$, sempre havia sérias dificuldades em encontrar q e r que obedecessem às condições do algoritmo ($-79 = 11(-8) + 9$).

O capítulo contém, ainda, indicações para o que seriam as razões para os erros na divisão com restos. Um deles seria o fato de um conteúdo ser tão familiar, mas seus pressupostos estarem equivocados devido à dependência excessiva no formalismo aritmético, o que não permitiria resolver situações novas. Deixa aos leitores questões que podem levar a futuras pesquisas, quais sejam, o estudo identificou e descreveu, a partir de uma perspectiva empírica, uma variedade de fenômenos linguísticos, processuais e conceituais associados com entendimentos dos futuros professores da divisão aritmética dentro de contextos abstratos. Esses fenômenos todos parecem, de uma maneira ou de outra, estarem relacionados a (1) um desconhecimento das ligações entre números inteiros, fracionários e racionais e suas expressões simbólicas; (2) uma dependência excessiva das interpretações formais da divisão aritmética usando linguagem informal; (3) uma propensão para o excesso de generalizar e aplicar mal procedimentos familiares; e (4) a falta de discernimento entre número inteiro e número racional e uma subsequente vulnerabilidade quanto às diferenças conceituais e de procedimentos ocasionando ambiguidades nos termos formais envolvidos.

No capítulo 3, “Concepções sobre a divisibilidade: sucesso e entendimento”, os autores Anne Brown, Karen Thomas e Georgia Tolia também analisam a questão da compreensão de operações matemáticas e suas propriedades sobre a estrutura multiplicativa do conjunto dos números naturais, tendo por sujeitos dez professores do ensino básico. Os autores estavam interessados nas habilidades dos indivíduos em progredir a partir das respostas de ações orientadas para o raciocínio inferencial explícito, que pode refletir uma compreensão de operações matemáticas e propriedades sobre a estrutura multiplicativa do conjunto dos números naturais, usando a seguinte caracterização da estrutura multiplicativa fornecida por Freudenthal (1983): a estrutura multiplicativa de N é o conjunto das relações $a \times b = c$, podendo também expressa como $c \div b = a$, complementadas por $a \times b \times c = d$, $a \times b = d \div c$, e, sobretudo, o que se pode pensar neste contexto. Em um nível mais elevado, inclui

experiência, e, em um nível ainda mais elevado, inclui conhecimentos formulados sobre propriedades como a comutatividade, associatividade, distributividade, e equivalência de $a \times b = c$ e $c \div a = b$, além de outras propriedades deste tipo (Campbell e Zazkis, p.41, 2002).

As mudanças no raciocínio dos participantes são ilustradas e descritas como passando de fase 1, isto é, realização de ações com sucesso, com pouca consciência de mecanismos gerais (aprender fazendo), para a fase 2, onde as ações e a conceituação se influenciam mutuamente, mas o indivíduo ainda não pode fazer inferências sobre o sucesso ou o fracasso de ações sem realmente executá-las; e, finalmente, para a fase 3, quando as ações são conscientemente guiadas e o raciocínio ocorre por meio da aplicação de conceitos sobre as tarefas – o trabalho nesta fase inclui a capacidade de fazer previsões de sucesso das ações futuras sem experimentação direta. Ao concluir sobre os resultados dos seus estudos, os autores colocam a necessidade premente de mais pesquisas para ampliar o que já existe nessa área.

No capítulo 4, "A linguagem da Teoria dos Números: Metáfora e Rigor", novamente o assunto "divisibilidade" é discutido. Zazkis (2002), chama a atenção da comunidade de educadores matemáticos para que se conscientizem sobre os erros cometidos pelos professores devido ao uso de uma linguagem matemática sem rigor e o papel crucial que deve ter a precisão de semelhante linguagem para que os futuros professores possam expressar ideias matemáticas.

Em relação ao estudo conduzido por ela, as observações indicam que a maioria dos participantes utiliza uma mistura de terminologia matemática informal e formal. A linguagem utilizada pelos entrevistadores durante suas entrevistas era consideravelmente diferente da linguagem utilizada pelos entrevistados, embora eles estivessem familiarizados com as cinco declarações matematicamente equivalentes que expressam a noção de divisibilidade, a partir de seus livros didáticos e das discussões em classe.

Os futuros professores alegaram, por exemplo, que um número "não pode ser dividido" ou "não pode ser dividido igualmente por 2", o que significa que ele não era divisível por 2, e, ocasionalmente, chegavam ao ponto de inventar palavras dizendo "está 'dobrado' por 6", significando que era um múltiplo de 6.

Zazkis (2002) também mostra que a terminologia utilizada pelos participantes pode refletir a sua compreensão da divisão. Isto é, a fala dos futuros professores de que um número "pode ser dividido igualmente" reflete imagens e processos consistentes com um ponto de vista particular da divisão, e ao dizerem que um número "entra", "encaixa", ou "pode ser colocado em" um outro número demonstra um ponto de vista sobre a divisão como algo em pedaços ou como medida. Além disso, vários dos futuros professores mencionaram que resultado "sem deixar resto" apontava para o pensamento sobre a divisão de números inteiros, ao passo que outros futuros professores mencionaram que a divisão "sem decimais" se referia a números racionais.

Como o capítulo 5 não tinha relação direta com este trabalho, não será discutido nesta revisão. Já o capítulo 6, "Integração entre conteúdo e processo em uma aula de matemática" se diferencia dos anteriores pelo aspecto didático. Nele, a autora Anne R. Teppo descreve uma atividade em sala de aula com base em novas ideias sobre como apresentar a teoria dos números. A autora tem a proposta de superar, na sala de aula descrita, o mero domínio de procedimentos relacionados a conteúdos matemáticos desconexos, substituindo-o por um conjunto complexo e interligado de conceitos, processos e habilidades a ser realmente compreendido, de forma que todos os alunos tenham acesso a um ensino de matemática de alta qualidade.

A articulista comenta que "processos são aprendidos enquanto se foca no conteúdo e o conteúdo é aprendido dentro de uma ênfase no processo" (p. 117). A autora mostra como os futuros professores acreditam que a matemática é basicamente um roteiro de memorização de fórmulas e regras. Ela se serviu desses processos para discutir e formular noções pertencentes a teoria dos números, tais como fatoração, divisibilidade, números primos e compostos, bem como os processos de fazer e testar conjecturas e expressar generalizações.

A atividade descrita no capítulo faz uma introdução a tópicos da teoria dos números por meio de uma investigação de padrões em números naturais que têm exatamente dois, três, quatro ou cinco divisores. Essa investigação incluiu o trabalho com os conceitos de fatores, divisibilidade e números primos e compostos, bem como os processos de fazer e testar conjecturas e expressar generalizações. A atividade também se destinou a ajudar os alunos a fazer a transição do trabalho anterior com estruturas aditivas (adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros) para as estruturas multiplicativas subjacentes razão, proporção

e frações. A atividade foi projetada para ser concluída dentro de um período de aula de 50 minutos. Durante esse tempo, os alunos trabalharam individualmente, em pequenos grupos, e, finalmente juntos em uma discussão com toda a classe. O instrutor forneceu uma fala introdutória, coordenou o trabalho nos grupos de estudantes e orientou as discussões na classe.

No início da atividade, os procedimentos para a identificação de fatores de determinados números e os termos "fatores", "divisores", e "divide" são introduzidos ao se pedir aos alunos para encontrar os 4 divisores diferentes para o número 15 e 6 divisores para o 45. Em grupos de quatro, os alunos, em seguida, tentaram encontrar vários números que tivessem exatamente 2 divisores, 3 divisores, 4 divisores ou 5 divisores por meio do uso de padrões que os ajudassem a adicionar números às suas listas.

Um quadro vazio foi desenhado na lousa com títulos para 2, 3, 4 e 5 divisores. Estudantes de diferentes grupos foram convidados a preencher cada coluna com os números e listar os fatores que haviam encontrado (veja quadro 3). Os resultados foram compartilhados e formaram a base para uma discussão com toda a turma no sentido de focar em determinados fatos numéricos da teoria dos números por meio dos processos de generalizar, conjecturar e abstrair.

Quadro 3 – Divisores mencionados

2 divisores		3 divisores		4 divisores		5 divisores	
2	1,2	4	1, 2,4	6	1,2,3,6	16	1,2,4,8,16
3	1,3	9	1,3,9	8	1,2,4,8	81	1,3,8,9,27
5	1,5	25	1,5,25	10	1,2,5,10		
7	1,7			15	1,3,5,15		

Fonte: Campbell e Zazkis, 2002, p.117

Durante o trabalho em grupo, os alunos não tiveram dificuldades em identificar os números com exatamente 2, 3 ou 4 divisores, mas muitos foram incapazes de encontrar

qualquer outro número além de 16 e 81 com 5 divisores. O quadro 3 é um exemplo do tipo de informações fornecidas pelos grupos nessa fase da atividade. Outros números foram adicionados ao quadro durante as discussões com os alunos.

A autora finaliza ilustrando ferramentas didáticas e abordagens que podem ser úteis para os professores que visam motivar e criar uma atmosfera de debates em suas aulas.

O capítulo 7, “Padrões de pensamento e decomposição em fatores primos” apresenta um artigo de Anne Brown que mostra como tópicos da teoria dos números podem provocar situações bastante intrigantes a partir de problemas simples. A autora inicia com o que ela denomina de “um problema provocante”, envolvendo decomposições em fatores primos. A intenção era de examinar a decomposição para identificar, comparar e contrastar com as propriedades multiplicativas dos números naturais (p. 131).

O problema foi aplicado num simpósio sobre a teoria dos números e nas palavras da autora:

O que aconteceu me surpreendeu - a maioria dos futuros professores a quem solicitei para resolver teve um bloqueio em reconhecer que o problema representava um fragmento de números compostos consecutivos. Embora o problema fosse elementar e sua solução trivial, ninguém conseguiu resolver completamente. Apesar de trivial ou óbvia, a busca pela solução induziu a uma variedade de estratégias (p. 133).

O problema instigante mencionado foi o seguinte: *sabendo que há um padrão nos seis termos iniciais da sequência $2^2 \times 3^4$, $2^3 \times 3^4$, $2^2 \times 3^5$, $2^4 \times 3^4$, $2^2 \times 3^4 \times 5$, $2^3 \times 3^5$, ..., escrever os próximos seis termos dessa sequência decompostos em fatores primos. Tendo feito isso, escreva o 200º termo decomposto em fatores primos, e descreva um método que irá fornecer a fatoração em primos do enésimo termo da sequência.*

A expectativa era que se examinasse a fatoração em primos para identificar, comparar e contrastar as propriedades multiplicativas dos números naturais que deveriam ser desenvolvidas por meio das experiências e conhecimentos matemáticos adquiridos a respeito de assuntos como *mdc*, *mmc* e divisibilidade.

A autora relata que as pesquisas de Zazkis e Campbell (como em Zazkis e Campbell, 1996) indicam que alguns estudantes universitários, particularmente os futuros professores nos cursos de licenciatura, ainda têm dificuldades em reconhecer e explicar as relações de divisibilidade para números expressos na forma de decomposição em fatores primos. A

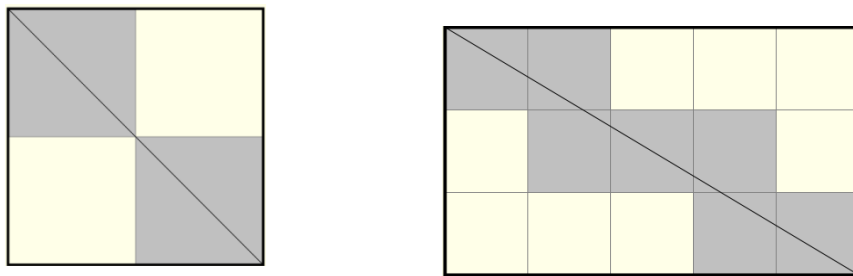
continuação de investigações sobre a aprendizagem destes tópicos é urgentemente necessária para a autora, com o objetivo de melhorar a capacidade dos professores em orientar seus alunos no atendimento das expectativas acima. A questão específica que foi discutida no artigo foi a de estudar como os professores da escola básica explicariam um problema envolvendo o uso da decomposição em fatores primos. Em seguida, ela explica, por meio deste problema e de outros similares, que é possível acionar o exame da fatoração em primos para identificar, comparar e contrastar as propriedades multiplicativas dos números naturais e questiona porque este problema parece enigmático, pelo menos inicialmente.

A autora aventava que o motivo de semelhante dificuldade poderia repousar no fato de os professores não estarem acostumados a considerar duas coisas simultaneamente: a decomposição em fatores primos e uma sequência aritmética de números naturais. Afinal de contas, a fatoração de n tem pouca relação com a fatoração em primos de $n + 1$, além do fato de que um contém pelo menos um fator 2 e o outro não. Uma vez que o domínio de uma sequência é o conjunto de números naturais, é possível que a sequência $1, 2, 3, 2^4, 5, 2 \times 3, 7, 2^3, 3^2, 2 \times 5, \dots$, pudesse desempenhar um papel sempre que uma sequência é apresentada na forma de decomposição em fatores primos. Mesmo quando é combinada com algo tão simples como a multiplicação por um fator comum, tal como em $2^5, 2^6, 2^5 \times 3, 2^7, 2^5 \times 5, 2^6 \times 3, \dots$, a tendência a mascarar padrões é evidente.

Brown (2002) ilustra como resolveu o problema didático sobre os participantes sentirem dificuldade em explicar a lógica por trás da regra do "maior expoente" para determinar o *mdc* e o *mmc*. Reconhecendo que a lógica por trás do método de criar sucessivos múltiplos de um número por meio da verificação de divisibilidade seria muito fácil, ela encorajou os estudantes a estender este método para números representados por meio de sua decomposição em fatores primos. Com um ligeiro refinamento, o algoritmo resultante é o seguinte: para encontrar o *mmc*(A,B), multiplica-se A apenas por aqueles fatores primos de B "desaparecidos" da decomposição em fatores primos de A (com suas multiplicidades apropriadas). Este processo cria, obviamente, um múltiplo de A, porque a comparação entre A e B resulta em uma ou mais multiplicações de A por números naturais. Uma vez que se tenha multiplicado A por todos os fatores ocultos de B, é evidente que o múltiplo final de A também é divisível por B. A autora conclui sua proposta, apresentando uma lista de problemas similares para aplicações sobre o assunto discutido no artigo.

No capítulo 8, “Como os alunos fazem conjecturas? Generalizações dos futuros professores em questões de teoria dos números”, Edwards e Zazkis (2002) apresentam um problema sobre diagonais em um retângulo e solicitam uma generalização. A solução requer tópicos de teoria dos números como o máximo divisor comum, por exemplo. O problema solicitou que se desenhasse, em um papel quadriculado, um retângulo e se traçasse uma diagonal. Em seguida, a seguinte pergunta deveria ser respondida: “quantos quadradinhos são cortados pela diagonal?”. A figura 4 ilustra os casos 2 x 2 e 3 x 5.

Figura 4 - Configurações 2 x 2 e 3 x 5



Fonte: Campbell e Zazkis, p. 144

Nos dois casos mencionados, basta contar os quadradinhos. Em continuação, os autores solicitaram que os participantes expliquem que decisões irão tomar para contar os quadradinhos nos retângulos 100 x 167 e 3600 x 208. E, por fim, pedem uma generalização para a quantidade de quadradinhos cortados pela diagonal de um retângulo $N \times K$.

O artigo chama a atenção para a natureza das soluções dos futuros professores, suas estratégias de resolução de problemas de teoria dos números e as conjecturas de cada um sobre possíveis regras ou fórmulas apesar de, como o artigo informa, eles não serem "fluentes" no uso de técnicas para gerar e testar conjecturas para problemas cujas respostas são padrões (expressos algebricamente), e não resultados numéricos.

Primeiramente, os autores discutiram sobre a natureza das soluções dos participantes, suas estratégias de resolução de problemas e as conjecturas específicas descritas como respostas ao problema em seus cadernos. Na busca de uma solução para o problema, os futuros professores geraram várias conjecturas, desenharam tabelas resumindo diferentes números de exemplos. O número de conjecturas usadas para a resolução dos problemas variou de 2 a 8, com média de 5 conjecturas diferentes. O número total de exemplos variou de 4 a 44, com média de 25 diferentes.

As respostas finais foram caracterizadas como "completas e corretas" ou "parciais". Completas eram as respostas corretas com soluções gerais que representavam todos os retângulos possíveis, enquanto que as soluções parciais foram conjecturas que poderiam ser aplicadas apenas em alguns casos (um fato que pode ou pode não ter sido observado pelo participante). Soluções completas e corretas foram de dois tipos: o aluno podia apresentar uma única fórmula ou regra ou poderia apresentar um conjunto de regras que, juntos, cobririam todos os casos

Examinando os trabalhos dos futuros professores sobre este problema desafiador, os autores obtiveram como soluções completas e corretas apenas oito das vinte e sete entregues. Por outro lado, quando os autores também perguntaram "o que fazem os futuros professores com provas que não se mostram verdadeiras?", a grande maioria (vinte e dois dos vinte e sete participantes) aceitaram adequadamente algumas evidências que encontraram, mas que não confirmavam a suas conjecturas. Ou seja, ou eles não rejeitaram suas conjecturas completamente, ou a restringiam, e procuravam uma nova conjectura para trabalhar em outros casos. Cinco estudantes fizeram declarações que sugeriam que eram muito relutantes em abandonar suas conjecturas, e na verdade ignoravam ou possivelmente analisavam os dados de maneira mais seletiva, a fim de dar mais apoio às suas fórmulas.

Uma das dificuldades em resolver este tipo de problema desafiador é saber quais características da situação são relevantes e quais não são. A maior parte dos futuros professores atacou o problema de uma forma impulsiva e numérica, em vez de empregar a análise das características visuais ou estruturais que poderiam ajudá-los. Muito poucos notaram os pequenos retângulos semelhantes inseridos dentro de um retângulo cujos lados tinham fatores comuns. De fato, alguns participantes puderam observar fatores ou múltiplos como um aspecto saliente em suas soluções. Poucos consideraram o fato dos lados serem números ímpares ou pares. Essa distinção "par / ímpar" seria muito importante, e os futuros professores tiveram dificuldades em generalizar a partir da questão da paridade, para examinar a divisibilidade por outros inteiros, uma observação que teria sido muito eficaz no problema.

Edwards e Zazkis (2002), observaram que existem poucos estudos sobre a investigação de provas e conjecturas entre futuros professores de matemática. Segundo esses autores, o que eles apresentam como pesquisa pode ser descrito como sendo o "território antes da prova" (p. 141). Nas palavras dos autores:

O "território antes da prova" é um rótulo metafórico para um “espaço” de potenciais precursores intelectuais para a prova: modos de pensar, falar e agir que suportam o objetivo de buscar e estabelecer uma certeza matemática. Este espaço inclui atividades como perceber e descrever padrões matemáticos ou generalizações, gerando conjecturas de que determinadas generalizações são sempre verdadeiras, verificar uma conjectura, e gerar tanto um argumento indutivo ou dedutivo para confirmar sua verdade. (p. 141)

O capítulo 9, "Provas genéricas em Teoria dos Números", escrito por Tim Rowland, chama a atenção para a relativa facilidade com que o domínio da teoria dos números presta-se ao argumento genérico. Ele afirma que o potencial do exemplo genérico como uma ferramenta didática é praticamente desconhecido e inexplorado no ensino da teoria dos números, e por esse motivo pede uma mudança neste estado de coisas.

O autor apresenta e analisa vários problemas interessantes que ilustram como exemplos genéricos podem apontar para argumentos gerais. Estes exemplos fazem referências a tópicos da teoria dos números, como o método que Gauss usou para encontrar a soma dos 100 primeiros números ímpares consecutivos, função de Euler e o teorema de Wilson. Finalizando, há uma seção de sugestões e propostas pedagógicas no intuito de incentivar novas pesquisas.

E, finalmente, o capítulo 11, “Reflexão sobre a pesquisa em educação matemática: Perguntas em teoria elementar dos números”, é uma espécie de conclusão sobre tudo o que foi apresentado no livro. Annie Selden e John Selden identificam, pelos trabalhos apresentados, o potencial da teoria dos números para as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de resolução de problemas; raciocínio e prova em questões com narrativas, representações de imagens e divisibilidade; posturas filosóficas assumidas; referenciais teóricos utilizados; e as implicações para o ensino.

Os autores também fazem algumas considerações particulares a respeito de provas e raciocínios. Eles descrevem sua própria experiência no ensino de álgebra abstrata para futuros professores do ensino médio e indicam que, embora provas sejam parte integrante dos cursos de álgebra abstrata, nestes cursos os alunos muitas vezes encontram-se lutando em duas frentes, envolvendo questões relacionadas com a abstração e com a construção das provas. Em contraste, na Teoria Elementar dos Números, os futuros professores lidam com objetos (os números inteiros) e operações (tipo multiplicação e adição) que lhes são familiares. Assim, “eles podem concentrar-se na descoberta e construção de provas sem se

distrair por ter que, simultaneamente, estender as suas concepções das operações e dos objetos que eles estão estudando” (p. 215).

Os autores sugerem que, a fim de promover o desempenho dos alunos com provas matemáticas, teoremas da teoria elementar dos números que não envolvam abstrações excessivas devem ser apresentados. Os autores indicam ter aplicado com sucesso esta proposta com seus estudantes universitários, e apontam as principais razões pelas quais a teoria dos números é ideal para introduzir os alunos ao raciocínio de prova: (1) os alunos lidam com objetos familiares, reduzindo assim o nível de abstração; (2) quando adequadamente selecionados, tais provas são acessíveis, ou seja, os alunos precisam apenas de motivação sobre os primeiros princípios, juntamente com uma certa dose de engenhosidade; e (3) muitas vezes o número de provas teóricas têm versões genéricas, permitindo aos alunos ver, ou até mesmo provar por conta própria um resultado geral, depois de ter considerado um caso particular adequado.

3.1.2.2 Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects. R. Zazkis, e S. R. Campbell, (Editores), Routledge Taylor & Francis Group, 2006.

Neste segundo livro, organizado novamente por Rina Zazkis e Stephen Campbell, os autores tentam mais uma vez demonstrar que a aritmética tem um grande potencial para atrair futuros professores e pesquisadores a experimentar as riquezas de uma descoberta matemática. Essa é a argumentação presente no capítulo 1, “A teoria dos números nas pesquisas em educação matemática: Perspectivas e panorama”.

Apesar da teoria dos números desempenhar um papel significativo no processo de ensino e aprendizagem da matemática, os autores afirmam que essa contribuição tem sido largamente ignorada nas pesquisas educacionais. Em função da sua estrutura, que fornece muitas oportunidades para novas conjecturas, prova e análises, muitas questões de pesquisa sobre ensino e aprendizagem podem ser buscadas na teoria dos números.

Como seus grandes resultados são construídos nos inteiros positivos, os cursos de licenciatura podem incentivar os futuros professores a iniciar suas análises, pesquisas e formulação de conjecturas com poucos conhecimentos prévios, uma vez que a teoria dos números é um contexto poderoso para a realização de pesquisas em diferentes áreas (p. 8).

O capítulo 2, “Compreendendo a teoria elementar dos números em relação a aritmética e a álgebra”, apresenta a delicada questão da transição da aritmética para a álgebra e o papel da teoria dos números na educação básica. Campbell (2006) critica o fato de que muitos

educadores vêm a teoria dos números como não sendo parte da continuidade aritmética-álgebra, talvez pelo fato da teoria dos números estudar os inteiros e a aritmética-álgebra considerar conjuntos como dos racionais positivos. Um dos problemas com este ponto é a dificuldade de uma clara distinção entre operações com os inteiros e com os racionais. Campbell coloca que a teoria dos números deveria desempenhar um papel mais central e não apenas de coadjuvante.

O autor coloca que se deve compreender a teoria elementar dos números como centrada nos números inteiros e que na escola básica existem duas aritméticas distintas sendo processadas, criando confusões pelo fato de não haver distinção entre a aritmética com os inteiros e a aritmética com os racionais positivos. Segundo o autor, a ligação conceitual entre número inteiro e a aritmética com número racional, com respeito à divisão, não é trivial.

No capítulo 3, “O que torna um exemplo exemplar: Questões pedagógicas e didáticas na apreciação de estruturas multiplicativas”, Mason (2006) começa com uma importante pergunta: “o que torna um exemplo exemplar?”. Essa questão provoca uma importante reflexão a respeito de exemplos eventualmente “fracos”, que deveriam dar lugar àqueles nos quais os alunos poderiam perceber o ato de “exemplificar algo”, de modo a indicar uma boa direção, produzir desdobramentos mais profundos e matematicamente interessantes. De todo o modo, os exemplos apresentados em sala não devem privar os alunos da oportunidade de deduzir propriedades e de encontrar o seu próprio caminho para o entendimento.

O autor indica que seu método consiste em identificar fenômenos que deseja estudar e procurar exemplos dentro de sua própria experiência. Em seguida, busca construir exercícios e tarefas para as quais se espera reconhecimento autônomo, ou que permitam um direcionamento para que se as reconheçam (p. 43). Alguns estudos de caso ilustram como se pode começar com uma pequena questão e envolver-se com o aumento da sofisticação para questões mais importantes.

Um exemplo no artigo de Mason (2006) ilustra a postura supramencionada. Em uma seção de um curso de aperfeiçoamento, ele ofereceu o seguinte conjunto de equações numéricas:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

Os participantes não acharam fácil chegar a qualquer generalização: muitos não conseguiram ver as três equações em conjunto como parte de um fenômeno maior. Neste caso, então, o autor dirigiu os sujeitos a ver os principais atributos que conduziriam a uma generalização. Este exemplo particular podia ainda ser mais explorado: podia-se pedir, inicialmente, para os participantes observarem em que situação um único termo do lado direito de uma equação numérica seria o quadrado do número de termos da adição do lado esquerdo, e de que modo isso revelaria a razão pela qual tais equações seriam, de fato, verdadeiras.

Uma maneira de adaptar esse raciocínio para a questão colocada por Mason (2006) era fazer a seguinte conjectura nas equações numéricas propostas, observando que o primeiro termo é um quadrado perfeito:

$$1^2 + 2 = 2 + 1 = 3 \text{ (adicionar à parcela 2 o valor da base)}$$

$$2^2 + 5 + 6 = (5 + 2) + (6 + 2) = 7 + 8 \text{ (adicionar às parcelas 5 e 6 o valor da base)}$$

$$3^2 + 10 + 11 + 12 = (10 + 3) + (11 + 3) + (12 + 3) = 13 + 14 + 15$$

Isso serviria para deduzir os termos de uma soma de números consecutivos que começam com um quadrado perfeito. De fato, este parece ser um bom exemplo do pensamento algébrico sem o uso de incógnitas e de apreciar, da estrutura de um exemplo, uma situação geral.

No capítulo 6, “Aprendendo pelo ensino: O caso do crivo de Eratosthenes e uma professora de escola primária”, Leikin (2006) demonstra que, no preparo do material de ensino, o professor pode aumentar o seu conhecimento e compreensão sobre determinado tema. Ela descreve o caso de uma professora de escola primária que tinha que preparar um material desconhecido por ela para ensinar números primos e compostos usando o crivo de Eratosthenes. Enquanto fazia consultas, a professora foi se familiarizando com o crivo e aumentando a sua compreensão. Mesmo assim, alguns pontos não ficaram muito claros para ela. O estudo deixa a entender que, para alguns professores, novos procedimentos e conhecimentos levam tempo para serem interiorizados e colocados em prática.

Em outras palavras, o artigo apresenta uma pesquisa que analisa o desenvolvimento do conhecimento dos professores evidenciado no estudo de caso de uma professora do ensino fundamental (Nurit) que foi convidada a ensinar uma lição sobre números primos usando o

Crivo de Eratosthenes. O estudo baseia-se no pressuposto de que os professores aprendem ao ensinar. Destina-se a divulgar os mecanismos dessa aprendizagem e das relações entre três dimensões do conhecimento dos professores: os tipos, as formas e suas fontes.

Leikin (2006) enumera várias fontes para sustentar o fato de que os professores aprendem com a experiência de ensino. Da mesma maneira, menciona estudos em torno da comparação entre professores experientes e novatos, bem como o desenvolvimento de conhecimentos de professores estagiários. Segundo a autora, estes trabalhos atestam o **fenômeno da aprendizagem por meio do ensino**. Leikin (2006) menciona que o raciocínio pedagógico dos professores começa com uma compreensão que consiste do entendimento crítico de um conjunto de ideias. Além disso, os professores estão envolvidos em um processo de transformação associada com planejamento e projeto, atividades de instrução, avaliação e reflexão. Como resultado, os professores alcançam nova compreensão, que é enriquecida por um novo entendimento e reforçada por uma maior conscientização sobre as finalidades da educação bem como sobre o papel de seus participantes (professores e alunos).

As principais características do processo de aprendizagem por meio do ensino, como apresentadas nas fontes de Leikin (2006), são a interação professor com os alunos e materiais didáticos, bem como a reflexão. Neste sentido, vários modelos enfatizam o fato de que conhecimento do professor se desenvolve por meio da prática de ensino como resultado das interações dos professores com seus alunos. Leikin (2006) sugere um modelo de interações instrucionais dos professores que permite uma análise detalhada das interações dos mesmos em um sistema de seis qualidades: (1) a finalidade pela qual um professor pode interagir com os alunos; (2) o início de interação pelo professor ou pelos alunos; (3) motivos para interagir, que podem ser externos, se são prescritos por um dado sistema educacional, ou internos, sendo, neste caso, a maioria de ordem psicológica, incluindo conflitos cognitivos, incertezas, desacordos ou curiosidades; (4) reflexão sobre professores e alunos e suas experiências anteriores; (5) medidas de apoio ao processo interativo; e (6) o foco da interação, que pode ser matemático ou pedagógico.

Embora amplamente contemplado, Leikin (2006) afirma que o fenômeno da aprendizagem por meio do ensino não foi examinado cuidadosamente no que diz respeito ao desenvolvimento de diferentes tipos de conhecimento dos professores. Assim, nas considerações da autora, a comunidade educativa tem compreensão relativamente limitada sobre as mudanças em diferentes tipos de conhecimentos dos professores, ou como essas

mudanças surgem, especialmente no campo do conhecimento matemático em uma situação real de sala de aula.

As tarefas matemáticas elaboradas por Leikin (2006) para os professores participantes estavam relacionadas ao currículo que os professores ensinaram naquele período; entretanto, os docentes não estavam familiarizados com o tipo das mesmas. Assim, com uso de tarefas matemáticas desconhecidas, foi possível intensificar a nebulosidade das situações em que os professores aprendiam matemática ao ensinar seus alunos.

Em geral, o estudo foi baseado em uma coleção de casos que focavam diferentes professores, em diferentes graus, e sobre diferentes temas matemáticos. O relato baseia-se, contudo, em um caso específico, focado no ensino números primos com o Crivo de Eratosthenes no ensino fundamental por uma professora, identificada pelo pseudônimo de Nurit. Segundo Leikin (2006) esse caso ilustrou várias regularidades na aprendizagem dos professores por meio do ensino, em especial no que se refere à aprendizagem do professor ao planejar a aula.

Nurit era uma professora de escola primária com sete anos de experiência, com especialização em Matemática. Ela ensinava a disciplina em todas as séries na escola primária, e participou do experimento de pesquisa com seus alunos da quarta série. Foi apresentado a ela um conjunto de instruções e materiais para ensinar o tópico “números primos e compostos”. A participante do estudo foi convidada a escolher os materiais que considerava mais adequados para suas aulas e que combinavam com suas preferências pessoais. Entre outros materiais, ela escolheu o Crivo de Eratosthenes para introduzir números primos para seus alunos. Este foi um dos temas do currículo da quarta série que Nurit ainda não havia ensinado. Para Leikin (2006), este tópico oferece oportunidades para enriquecer a linguagem matemática dos alunos, fazer conexões com outros temas relacionados, como a decomposição em fatores primos e divisibilidade, discutir o desenvolvimento histórico da Matemática, explorar conteúdos relacionados ao tema na Internet e ganhar ainda mais compreensão matemática de tópicos já apresentados (e de outros ainda a apresentar). A autora afirma que o Crivo de Eratosthenes é uma das formas de desenvolver a compreensão do conceito de primalidade dos números pelos alunos, que podem ser convidados a identificar números primos utilizando esta ferramenta. No texto, Nurit admitiu que apresentar números primos através do crivo era para ela uma ideia completamente nova. Embora tivesse estudado

números primos em seu programa de formação de professores e já tivesse trabalhado com o tema alguns anos antes, ela precisou fazer uma revisão.

Ao longo do artigo, Leikin (2006) vai mostrando que o conceito de primalidade dos números inteiros positivos não foi fácil para Nurit. De forma ampla, a participante indicou que precisava entender melhor o conceito em geral, e a estrutura do crivo em particular. A autora relata que a participante ficou surpresa ao descobrir que o conceito não era tão fácil quanto se poderia pensar no início.

A autora conclui reafirmando sua premissa de que os professores aprendem ao ensinar, justamente porque desenvolvem diferentes tipos de conhecimento e se tornam mais eficientes. Em seu trabalho, Leikin (2006) empreendeu uma análise de ensino de um tema matemático negligenciado ora pelos professores, ora pelo currículo: números primos.

A revisão da literatura realizada neste trabalho permitiu constatar alguns pontos em comum entre os diversos trabalhos analisados. Entre estes, os que mais pareceram ter relevância para a investigação aqui relatada são:

- Uma percepção errônea acerca de uma pretensa (e não real) irrelevância do tema, quer por sua aparente obviedade, quer por uma suposta falta de utilidade na continuidade dos estudos;
- Professores em formação – e seus alunos, por extensão – tendem a tratar o tema com falta de formalismo e rigor, o que pode ser constatado pela dificuldade em recuperar (ou constituir) conceitos como o de primalidade e do teorema fundamental da aritmética;
- As ações perpetradas pelos sujeitos em torno da resolução de eventuais problemas propostos seguem mais uma espécie de intuição que leva, por sua vez, ao recurso a algoritmos ou regras diversas, que seriam dispensáveis se existisse o domínio dos aspectos teóricos/conceituais envolvidos;
- Os sujeitos, professores em formação predominantemente, tendem a produzir acertos com base em cálculos, adotando, muitas vezes, percursos longos, cansativos, precários e constantemente com alto custo cognitivo;
- Algumas vezes, dificuldades em temas correlatos também surgiram, como, por exemplo, aquela que impede de reconhecer e explicar as relações de divisibilidade para números expressos na forma de decomposição em fatores primos.

Estes tópicos foram, desta forma, considerados nas análises, conforme se verá mais adiante.

3.2 Representações numéricas, conceitos, significados e notações

Em um âmbito mais amplo, diversos pesquisadores citados ao longo deste trabalho alertam para a questão do abandono da teoria dos números nas investigações educacionais ao mesmo tempo que demonstram a riqueza dos seus assuntos para análises nos processos de ensino ou de aprendizagem (Resende, 2007; Campbell e Zazkis, 2006).

A questão de pesquisa aqui apresentada é *“quais saberes e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética são evidenciados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará quando submetidos a uma sequência didática que pretendeu inserir os mesmos em percursos investigativos, formatados a partir de pressupostos teóricos ligados a representações numéricas e suas características transparentes/opacas?”*. A digressão histórica/epistemológica e as reflexões sobre elementos dos objetos matemáticos tratados nesta pesquisa, realizada no capítulo dois, permitem negar o caráter simplista da questão de pesquisa, bem como afastar a pecha de assunto menos valioso, por assim dizer, dos temas relativos à teoria dos números. Aliás, sobre a “aparência simples” da aritmética, Ávila (2010) escreve:

Uma das coisas que primeiro aprendemos aí por volta dos 3, 4, 5 anos de idade é a contagem. Os números 1, 2, 3, 4, 5, ..., vão sendo aprendidos de maneira tão espontânea e natural que os matemáticos chamam esses números de números naturais. Seria de se esperar - e muita gente pensa assim, sejam eles leigos ou mesmo professores de matemática - que a ciência que estuda esses números fosse o ramo mais simples e mais fácil da matemática. Ledo engano! A Aritmética também conhecida como Teoria dos Números, é uma das mais difíceis de todas as disciplinas matemáticas. Isto porque, embora o enunciado dos problemas seja muito inteligível, as técnicas empregadas em seu tratamento, em geral, são bastante sofisticadas e envolvem muita matemática avançada. (ÁVILA, p.108, 2010)

Ainda assim, em que pesem as apresentações e provas indicadas ao longo deste texto, pode-se imaginar que o tema, em seu âmbito escolar, tem o domínio epistemológico e didático por parte de professores e futuros professores. Por isso, vale trazer aqui, como

elemento deste quadro teórico, observações sobre pesquisas que tiveram por base os números primos e/ou o teorema fundamental da aritmética. Entre estes apontamentos, o principal destaque, quer pela relevância dos autores, quer pela cobertura do trabalho, deve ser dado às investigações relatadas em Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004). A descrição sobre estas pesquisas é fundamental para destacar a relevância dos objetos matemáticos eleitos, até porque as questões empregadas nos instrumentos originais destes autores são reutilizadas no presente trabalho, como mais adiante se esclarecerá.

De fato, questões didáticas envolvendo conhecimentos acerca da Teoria dos Números representam importantes possibilidades de intervenção em Educação Matemática, sobretudo quando se considera a importância da construção destes conhecimentos por parte dos alunos, por um lado, e a relevância na formação dos professores para trabalharem com assuntos ligados a este conteúdo, por outro. Em sua investigação, Zazkis e Campbell (1996) conduziram um estudo envolvendo professores de Matemática em formação, futuros militantes da chamada “educação elementar” (equivalente ao ensino fundamental no Brasil), com foco na Teoria Fundamental da Aritmética (TFA). Para os autores, o público a partir do qual foram tomados os sujeitos da pesquisa conhece e compreende semelhante teorema, sendo capaz de articular seu significado e mesmo explica-lo (a decomposição de um número inteiro maior do que um existe e é única, exceto pela ordem escolhida para os fatores), mas falha em aplica-lo em situações diversas envolvendo resolução de problemas. A finalidade da investigação conduzida por Zazkis e Campbell (1996), então, consistia em contribuir para investigar este fenômeno e contribuir para melhorar a compreensão didática da construção do conhecimento relativo aos números naturais e à sua estrutura multiplicativa, com especial atenção acerca da compreensão, por parte dos professores em formação, acerca de tópicos elementares da Teoria dos Números, como é o caso do TFA. Como estrutura teórica, os autores elegeram questões relativas à natureza do desenvolvimento do conhecimento matemático, principalmente por meio de conceitos como *encapsulamento* (DUBINSKY, 1991) ou reificação (SFARD, 1992), os quais, segundo os mesmos, expressam teoricamente a transição desde o conhecimento procedural até a compreensão conceitual. Os autores asseveram, ainda, que investigações desta natureza devem procurar justificar como o tratamento de entidades matemáticas como objetos cognitivos contribui para a compreensão matemática dos estudantes e leva ao avanço no desenvolvimento de ideias matemáticas em geral.

Do ponto de vista metodológico, a pesquisa aqui referida recolheu dados a partir de questionários e entrevistas com 54 futuros professores de escolas públicas em nível fundamental (*preservice elementary school teachers*), no âmbito da disciplina “Fundamentos de Matemática para Professores”. Os instrumentos utilizados na pesquisa foram aplicados logo após os sujeitos terem trabalhado, na disciplina, com os conteúdos relativos à parte elementar da teoria dos números, inclusive o teorema fundamental da aritmética, regras de divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, entre outros. As questões empregadas pelos autores em três distintas sessões, no período de duas semanas, eram as seguintes:

1. Considere o número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ e decida se o mesmo é divisível por cada um dos números da lista formada por 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 e 63;
2. Considere o número $K = 16199 = 97 \times 167$ (onde 97 e 167 são reconhecidos como números primos) e decida se K pode ser divisível por 3, 5, 11, 13 e 17;
3. Examine uma lista de números, tais como 8^2 , 17^2 , 17^3 , 234^3 , 234^6 , $5^2 \times 17^2$, $5^3 \times 7^2$, $5^6 \times 17^2$, p^3 com p^3 primo, C^3 com C^3 composto, e decida quais números da lista são, ou poderiam ser, quadrados perfeitos.

As perguntas deviam ser respondidas pelos sujeitos sem o auxílio de quaisquer instrumentos, inclusive lápis e papel ou calculadora. Além disso, não havia, principalmente para as questões 1 e 3, instruções específicas sobre possíveis estratégias que levariam à solução.

Em relação às entrevistas, cujas respostas foram gravadas, os conjuntos de perguntas tinham as seguintes configurações:

1. Considere o número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. M é divisível por 7? Por favor, explique. M é divisível por 5, 2, 9, 63, 11, 15? Por favor, explique.
2. 391 é divisível por 23? Por favor, explique. 391 é divisível por 46? Por favor, explique.

Toda a análise foi posteriormente procedida, de acordo com os autores, “em termos das compreensões procedurais e conceituais dos estudantes acerca da decomposição em primos, de acordo com o teorema fundamental da aritmética” (ZAZKIS E CAMPBELL, 1996, p. 209-210).

Os resultados indicaram que os participantes, ainda que tenham sido capazes de decompor números relativamente grandes em fatores primos, exibiram poucos exemplos a partir dos quais se pode perceber aplicações consistentes do teorema fundamental da aritmética. Outras dificuldades específicas foram levantadas e destacadas nas análises realizadas. Por exemplo, em relação à primeira questão, 16 dos 54 professores em formação não conseguiram indicar que M não era divisível por 2 ou 11, mesmo sabendo que tais números não apareciam na decomposição de M em fatores primos. As respostas negativas surgiram apenas quando tais sujeitos realizaram a divisão de M pelos números indicados. Os autores indicaram, neste ponto, que as respostas poderiam indicar que os estudantes acreditavam haver alguma outra decomposição possível em primos que não estava relacionada, além de revelarem incompreensões acerca da relação entre os fatores primos e a divisibilidade.

O mesmo se viu em relação à segunda questão: vários participantes responderam com facilidade que 16199 não era divisível por 3 ou por 5 usando as regras de divisibilidade específicas, mas afirmaram que o mesmo número poderia ser divisível por 11, 13 ou 17, mesmo sabendo que sua decomposição em fatores primos era dada por 97×167 . Ainda aqui, então, ficou evidente que estes sujeitos acreditavam que poderia haver outra decomposição em primos não exposta na questão. Note-se, além de tudo, que apenas 13 estudantes justificaram a não divisibilidade de qualquer número da lista por meio da unicidade da decomposição em fatores primos. Uma resposta em especial chamou a atenção dos pesquisadores, por revelar outra incompreensão, ligada ao conceito de primalidade: “estes números não poderão dividir 16199, porque 16199 é o produto de dois números primos, formando, assim, ele mesmo um número primo” (ZAZKIS E CAMPBELL, 1996, p. 211). Outras respostas, ainda que corretas, como não é o caso desta última, evidenciaram a ausência de construções conceituais de nível mais alto, ao indicarem a impossibilidade da fatoração de 97 e 167 como estratégia. Também surgiram casos de estudantes que apresentaram a resposta correta, mas insistiram em realizar as divisões para confirmá-las.

Nas outras questões, dificuldades conceituais também surgiram. Uma das mais notáveis foi a de que apenas 5 estudantes afirmaram que p^3 não poderia ser um quadrado perfeito, uma vez que p era um número primo, mas que C^3 poderia ser, já que era um número composto. Entre os remanescentes, 47 estudantes afirmaram que tanto p^3 quanto C^3 não poderiam ser quadrados perfeitos; 2 outros disseram que precisariam de números específicos para responder. Além disso, alguns estudantes não foram capazes de reconhecer B^6 como quadrado

perfeito, nem, tampouco, A^2B^2 . Neste aspecto, os autores acreditam que a notação B^2 serve como uma substituta para a entidade conceitual “quadrado perfeito”, uma vez que apenas B^2 foi reconhecido por estes estudantes desta forma. Outra observação dos autores ocorre em torno dos conceitos de números primos e de números compostos, os quais necessitariam de maiores refinamentos. Tais observações levam os autores a indicar que, “se os conceitos de números primos e compostos não estiverem adequadamente construídos, isto irá certamente inibir qualquer conceituação significativa da decomposição em primos” (ZAZKIS E CAMPBELL, 1996, p. 217). Em relação à decomposição, os autores enfatizam, também, a possibilidade de existirem dificuldades em torno da compreensão da decomposição de fatores quaisquer e em fatores primos, o que mereceria, para os professores em formação, mais atenção didática, bem como o fato de os sujeitos demonstrarem uma tendência em acreditar que a decomposição em fatores primos deva envolver, obrigatoriamente, números primos pequenos (2, 3, 5, por exemplo), e não números como 167.

Entre as principais conclusões deste estudo seminal, pode-se arrolar que os autores inferiram, por meio da análise dos dados, que o conceito de decomposição em fatores primos é indispensável para a compreensão da estrutura dos números inteiros. Além disso, os dados

demonstram que o teorema fundamental da aritmética não tem sido adequadamente compreendido por um grande número de professores em formação do ensino fundamental. Considerando que a existência da decomposição em fatores primos pode ser tida como certa, a unicidade da decomposição em primos aparenta ser não intuitiva; assim, frequentemente, há a possibilidade de que diferentes decomposições em fatores primos seja assumida (ZAZKIS E CAMPBELL, 1996, p. 217).

Os autores ainda admitem que há a possibilidade de que os sujeitos não tenham entendido a importância ou mesmo o significado do conceito de teorema. Argumentam que, em função de a demonstração para o teorema fundamental da aritmética ser frequentemente omitido nos cursos de formação de professores, seria importante lançar mão de alternativas didáticas, e, entre elas, por exemplo, as questões utilizadas na pesquisa aqui apresentada, as quais podem oferecer meios para que os professores em formação venham a compreender as dimensões procedurais e conceituais da decomposição em fatores primos.

Conceitos relativos à primalidade (ou não) de um número inteiro são frequentemente vistos como triviais; da mesma forma, as questões eventualmente suscitadas a partir dos

mesmos não são consideradas importantes, por serem aparentemente desprovidas de complexidade. Não é o que se vê nos elementos indicados no trabalho de Zazkis e Campbell (1996). A importante investigação aqui relatada indica que professores em formação nem sempre compreendem temas centrais para a compreensão matemática esperada na escola básica, como, por exemplo, o teorema fundamental da aritmética e suas consequências didáticas. Esta compreensão nos sujeitos da pesquisa aqui relatada será apreciada nas análises, por meio de uma das categorias eleitas para este fim.

Em continuidade, o estudo de Zazkis e Liljedahl (2004) utiliza os resultados de Zazkis e Campbell (1996) para discutir o papel das representações no âmbito dos números naturais. Em seu trabalho, os autores discutiram os dados obtidos a partir de uma investigação também realizada com professores de ensino fundamental em formação, com foco na compreensão dos mesmos acerca dos números primos, de modo a detectar os fatores que influenciam este entendimento. A argumentação empregada nas análises dos dados coletados é que a falta de *transparência* da representação dos números primos representa um obstáculo para a compreensão dos estudantes sobre os mesmos.

Esta ideia é apropriada a partir do trabalho de Lesh, Behr e Post (1987) acerca de números racionais. Referindo-se à múltiplas representações dos números racionais, os autores indicam que as mesmas “incorporam” as estruturas matemáticas, no sentido de que as representam em termos materiais. Desta forma, os sistemas representacionais podem ser vistos como opacos ou transparentes. Neste sentido, para os autores, uma representação transparente teria nem mais, nem menos significado do que as ideias ou estruturas que representa, enquanto uma representação opaca enfatiza alguns aspectos das ideias ou estruturas e esconde outros. De posse de variadas possibilidades representacionais, caberia a uma estratégia didática, por exemplo, capitalizar os pontos fortes de um determinado sistema representacional e minimizar suas fraquezas – tais fatores seriam, segundo os autores, de extrema importância para a aquisição e o uso de ideias matemáticas.

A partir da proposta de Lesh, Behr e Post (1987), Zazkis e Gadowsky (2001), focando as representações numéricas, introduzem a noção de transparência e opacidade relativas. Os autores sugerem, em seu trabalho, que todas as representações relativas a números são opacas, justamente no sentido em que, de alguma forma, sempre escondem algumas características de um número, embora possa revelar outras, em relação às quais podem ser transparentes. Como exemplo, em seu trabalho, os autores indicam uma lista com os seguintes componentes: (a)

216^2 , (b) 36^2 , (c) 3×15552 , (d) $5 \times 7 \times 31 \times 43 + 1$, (e) $12 \times 3000 + 12 \times 888$. Os autores indicam que tais expressões não aparentam representar mesmo número, 46656, e citam Mason (1998 apud Zazkis e Gadowsky, 2001, p. 45) para indicar que “cada representação desloca a atenção para diferentes propriedades do número”. Quanto à transparência e opacidade representacionais, as autoras indicam que a representação (a) é transparente em relação ao fato de o número em questão ser um quadrado perfeito, enquanto a representação (b) é transparente no sentido de evidenciar que 46656 é um cubo perfeito. A representação (c), por sua vez, indica, de forma transparente, que o número é múltiplo de 3 e de 15552. De outro modo, ainda que (a) e (b) também permitam concluir que 46656 é múltiplo de 3, nada revelam a respeito de 15552 – ou seja, as representações (a) e (b) são opacas quanto ao fato de 46656 ser um múltiplo de 15552.

Outro exemplo significativo sobre a opacidade invariável das representações numéricas refere-se à extensão do conceito feita por Zazkis e Liljedahl (2004), partindo de números específicos para conjuntos de números que possuam a mesma propriedade verificável por meio de uma notação algébrica. Por exemplo, $17k$ é uma representação transparente para um múltiplo de 17, no sentido de que esta propriedade está embutida (ou “pode ser vista”) nesta forma de representação; todavia, não é possível determinar se $17k$ é múltiplo de 3 considerando tão-somente esta representação. Neste caso, aponta-se que tal representação é opaca no que se refere à divisibilidade por 3 (Zazkis, 2005).

Desta forma, pode-se considerar que o trabalho de Zazkis e Liljedahl (2004) representa um marco importante no conceito de representações transparentes e opacas utilizado nesta pesquisa. Como mencionado, no artigo em questão, os autores defendem que uma representação transparente não tem nem mais nem menos significado do que aquele fornecido pela ideia ou estrutura representada. Por outro lado, uma representação opaca enfatiza alguns aspectos das ideias ou estruturas apresentadas, em detrimento de outros. A partir da apropriação deste conceito na representação numérica, os autores argumentam que todas as representações desta natureza são opacas, mas que possuem características transparentes. Para exemplificar semelhante afirmação, os autores indicam que a representação do número 784 como 28^2 enfatiza que o mesmo é um quadrado perfeito, mas de certa forma oculta a divisibilidade deste número por 98. Ou seja, ao representar 784 como 28^2 , a propriedade de 784 como quadrado perfeito é transparente, enquanto que a propriedade da divisibilidade deste número por 98 é opaca. Para os autores, ainda, os números primos são

frequentemente representados por p , mas esta representação é sempre opaca, em qualquer contexto.

Para avaliar a influência da opacidade da representação mencionada, Zazkis e Liljedahl (2004) promoveram um estudo com 116 professores de ensino fundamental em formação, os quais cursavam a disciplina “Princípios de Matemática para Professores” em quatro horas-aula semanais. Os dados foram coletados após os estudantes terem superados as etapas de ensino referentes aos temas básicos da teoria dos números, incluindo regras de divisibilidade, decomposição em fatores primos (e o teorema fundamental da aritmética), máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, entre outros tópicos. Neste aspecto, os autores consideram que a compreensão acerca dos números primos que deve ser apresentada por um professor do ensino fundamental deve incluir pelo menos os seguintes aspectos (ZAZKIS; LILDEJAHN, 2004, p. 169):

- a) Consciência de que qualquer número natural maior do que 1 é primo ou composto, e a habilidade de citar e explicar a definição de números primos;
- b) Compreensão de que, se um número é representado como um produto, então ele é composto, a menos que os fatores sejam 1 e um número primo; e
- c) Consciência de que números compostos têm uma única decomposição em fatores primos, e que o número de primos é infinito (o que não inclui necessariamente, neste nível, a habilidade de prover uma prova matemática destas afirmações).

Desta forma, para os propósitos do estudo aqui trazido, os autores submeteram as seguintes questões, as quais foram, posteriormente, objetos de análise:

- 1) Como você descreve um número primo? E um número composto? Qual é a relação entre números primos e compostos?
- 2) Considere $F = 151 \times 157$. F é um número primo? Indique SIM ou NÃO e explique sua decisão;
- 3) Considere $m(2k + 1)$, onde m e k são números inteiros. Este número é primo? Ou, poderia, de alguma forma, ser primo?

A correlação entre os elementos fundamentais mencionados e as questões são tais que 1 diz respeito à (a) e 2 e 3 estão ligados a (b) e a alguns aspectos de (c). A primeira questão, dada sua aparente facilidade, foi usada como um “aquecimento”, na visão dos autores, e uma forma de estimular a conversação e uma atmosfera de cooperação. A segunda questão não

requeria qualquer trabalho, visto que F estava representado como um produto de dois números naturais, mas possibilitaria, para Zazkis e Liljedahl (2004) perceber “em que grau esta representação exerceria um papel nas respostas dos participantes” (p. 170). O mesmo pode ser dito acerca da questão 3.

Em relação à primeira questão, os autores indicaram que, como esperado, todos os 116 participantes conseguiram prover uma razoável descrição sobre números primos e compostos. Entretanto, em vários casos, observaram que as definições vinham acompanhadas do que chamaram de *referências negativas* acerca dos primos. Por exemplo, adicionam estes sujeitos que os primos “não podem ser divididos” ou “não podem ser fatorados”.

A segunda questão foi respondida incorretamente por 42 sujeitos, um número considerado bastante alto, dada a forma como a mesma foi apresentada, ou seja, evidenciando a decomposição em fatores primos. Entre as causas de erro, além da aplicação errônea do algoritmo da divisão ou das regras de divisibilidade, consta, também, predominantemente, a convicção infundada de que o produto de dois números primos é, também, um número primo. Além disso, mesmo entre os que responderam corretamente, vários sujeitos apresentaram dificuldades na compreensão do teorema fundamental da aritmética, pois o fizeram graças a aplicação de algoritmos e por meio de exemplos de divisibilidade, revelando um grande (e desnecessário) esforço, motivado por ausência de consolidação do conhecimento pertinente acerca de primalidade.

Entre os que erraram a segunda questão, aliás, algumas respostas chamam a atenção pela evidência de dificuldades típicas que os alunos do ensino fundamental tendem a apresentar. Por exemplo: “É primo [o número F , dado por 151×157] porque o último dígito (sic) do mesmo é 7 e a soma dos dígitos resulta 19. O número 19 é primo e é divisível somente por ele mesmo e 1. Assim, F é primo” e “O produto de dois números ímpares é sempre ímpar. Isto faz com que F também seja ímpar” (ZAZKIS E LILJEDAHL, 2004, p. 176). No segundo exemplo, preocupa a confusão evidente entre o conceito de primalidade e de imparidade de um número natural.

Na questão 3, os autores puderam observar que visões incompletas sobre os números primos conduziram a respostas incorretas. Segundo os mesmos, ficou evidenciado que a representação $m(2k + 1)$, ou seja, como um produto, representou, para alguns participantes, “uma distração, no lugar de uma pista” (idem, p. 177). Como restava uma visão de que

números primos não podiam ser fatorados, houve um descuido ao não considerar o que os autores chamaram de *fatoração trivial*, ou seja, $p \times 1$, com p primo. E, ainda uma vez, entre os que responderam corretamente (o número em questão *pode* ser primo), a maioria justificou a argumentação por meio de exemplos, ou seja, sem o emprego de elementos conceituais ligados ao domínio de teoremas, por exemplo.

Assim, em relação aos resultados obtidos na análise dos dados, os autores indicaram que, consoante com as teorias utilizadas, os professores em formação, apesar de serem capazes de prover definições razoáveis acerca de números primos e compostos, e mesmo da relação entre os mesmos via fatoração, não são, em sua maioria, capazes de empregar este conhecimento, que inclui o teorema fundamental da aritmética, em situações práticas (ou problematizadas, se quisermos ver assim). Desta forma, para os autores, a falta de representações que pudessem ser vistas pelos sujeitos como transparentes criou obstáculos importantes que, por sua vez, criaram dificuldades adicionais para o trabalho de construção do objeto em suas mentes, entendendo, como Dubinsky e Sfard, teóricos mencionados na investigação, que a aprendizagem pode depender da capacidade dos sujeitos em tratar os conceitos matemáticos como objetos conceituais, ou seja, representações formais dos objetos mentais estruturados pelos indivíduos (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2004, p. 180). Desta forma, para os autores, as estratégias empregadas pelos professores em formação incluíram, no âmbito da investigação relatada, três possibilidades:

- A primalidade como um resultado da fatoração: esta abordagem levou os sujeitos a buscarem afirmações em torno da inexistência de qualquer outra fatoração de um número em primos, além da trivial, para afirmar que o mesmo é primo. Esta estratégia, muitas vezes, levava os sujeitos a efetuar sucessivas divisões pelos primos menores que a raiz quadrada de um número dado, muitas vezes acreditando que um número primo é sempre “um número pequeno” (idem, p. 181), o que levou a algumas conclusões incorretas. Em outros casos, mesmo com a resposta correta em mãos, alguns estudantes, inseguros de suas opções, fizeram *todas* as divisões antes da raiz quadrada, depois da raiz quadrada, incluindo primos, compostos e até números maiores do que o número investigado quanto à primalidade, um trabalho extensivo e desnecessário;
- A conclusão pela primalidade de um número por meio de exemplos: para os autores, a falta de representações transparentes para um número específico dificulta a abstração e

a generalização em torno de uma propriedade, como é o caso do estudo em questão. Este fato levaria os estudantes a buscar generalizações a partir de exemplos. Ainda que tal estratégia não seja ruim, na visão dos autores, muito em função das representações disponíveis, ela pode conduzir a algumas imprecisões, como a crença de que todos os números primos são pequenos e outra, ainda mais grave, que revela uma confusão entre os conceitos de primalidade e imparidade, que pode levar a pensar que todos os ímpares são primos;

- Primalidade por exclusão: o que os números primos não são: esta categoria representa uma consequência do que os autores chamaram de *definições negativas*, do tipo “números primos são aqueles que *não* podem ser divididos por qualquer outro número, exceto 1 e ele mesmo” e “números primos *não* podem ser fatorados”. Deste ponto de vista, os primos são números que não são compostos. Uma imprecisão importante, deste ponto de vista, pode ser aquela que leva a ignorar, mediante uma representação opaca, como $m(2k + 1)$, a fatoração trivial, excluindo erroneamente a possibilidade de tal número ser primo.

O trabalho de Zazkis e Liljedahl (2004) aqui discutido tem fundamental importância nas análises efetuadas sobre os dados relativos à esta pesquisa, uma vez que confirma alguns dos resultados encontrados por Zazkis e Campbell (1996), assim como estende os conceitos de Lesh, Behr e Post (1987) e de Zazkis e Gadowsky (2001). Assim, o instrumento desta investigação, relativo às asserções já consolidadas em Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004), reproduziu algumas questões propostas naqueles estudos, vistas como adequadas como suportes para responder à questão de pesquisa aqui construída. Dada a natureza por assim dizer inusitada do conteúdo e a forma como as questões foram estruturadas (propostas pouco usuais no contexto da aprendizagem de tópicos da teoria dos números, mesmo entre licenciandos em Matemática), o caráter problematizador das mesmas pareceu garantido: permitia a elaboração de estratégias, não tinham caráter óbvio, não traziam todos os elementos de forma direta, de modo que a solução fosse garantida por mera recuperações algorítmicas, nem era difícil demais de modo a inviabilizar qualquer construção estratégica.

Os sujeitos em relação aos quais as situações foram propostas são alunos de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Pará, ou seja, futuros professores de Matemática, pelo menos potencialmente, que deverão, quando concluída a formação inicial, por sua vez, ter conhecimentos suficientes para trabalharem com os conteúdos relativos aos

números primos e o TFA no Ensino Básico. As interações e respostas obtidas são analisadas sob a abordagem qualitativa, por meio de uma proposta descritiva e interpretativa, que considera a importância do processo mais do que de resultados quantitativos, propriamente ditos, ainda que leve estes últimos em consideração (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Este foi o contexto no qual os futuros professores de Matemática, sujeitos desta pesquisa, trabalharam. Entretanto, seus conhecimentos não deveriam ser limitados àqueles compatíveis com os estudantes do Ensino Fundamental e Médio, mas serem mais amplos, permitindo a elaboração de atividades que venham a estimular a investigação que leve, por sua vez, à apropriação, por exemplo, dos conhecimentos relativos aos números primos, aos números compostos e ao TFA, por parte de seus futuros alunos.

É justamente neste sentido que a organização metodológica da pesquisa dará conta destas últimas observações, como se verá a seguir.

CAPÍTULO 4

APORTES METODOLÓGICOS

O trabalho aqui descrito tem caráter qualitativo, caracterizando-se, desta forma, por dados descritivos, por um planejamento aberto e pelo foco na realidade de maneira complexa e contextual (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Em sua pesquisa, ao descrever a abordagem qualitativa na pesquisa educacional, Oliveira (2007) assim se expressa:

A opção pela pesquisa qualitativa mostrou-se, desde os estágios iniciais do planejamento, aquela que me parecia mais adequada. As questões que surgiam e que causavam o impulso em direção da busca de sentidos e elucidações tinham caráter particular, não podiam ser generalizadas em torno de quantidades sempre aplicáveis e de percentuais infalíveis, pedindo, antes, descrições que apontassem na busca das respostas direcionadas pelo problema e pelas hipóteses substantivas (OLIVEIRA, 2007, p. 27).

No mesmo estudo, Oliveira (2007) indica que existe uma complementaridade entre dados qualitativos e quantitativos. Para o autor, em que pese o caráter descritivo desta abordagem, cuja finalidade é compreender o significado que as pessoas atribuem aos fenômenos em estudo, os dados quantitativos podem completar o quadro, considerando que o processo tem ampla importância. No caso desta pesquisa, será possível observar, nos protocolos produzidos pelos sujeitos e em suas falas, indicativos das compreensões e dificuldades acerca dos conceitos de primalidade e do TFA. Estas indicações, levantadas nas análises e destacadas a partir das categorias eleitas – e mais adiante apontadas – têm natureza qualitativa, em que pesem respostas e desenvolvimento de caráter aritmético, que podem ser vistas como quantitativas em certa medida.

De outro modo, Bogdan e Biklen (1994) apontam importantes características delimitadoras em relação à pesquisa qualitativa, que podem ser relacionadas aos propósitos desta investigação:

- O pesquisador é o principal instrumento relacionado à coleta de dados. Além disso, o ambiente natural representa a fonte preferencial de dados. No caso desta pesquisa, de fato, as descrições e resoluções providas pelos sujeitos consideram o ambiente natural dos mesmos, ou seja, a sala de aula;
- Existe uma predominância de descrições nos dados coletados – esta característica pode ser vista nos protocolos dos estudantes e na relevância atribuídas as interações de outra ordem, como os diálogos, por exemplo;

- Maior importância deve ser atribuída ao processo, em relação aos resultados – em que pese, nesta investigação, a verificação necessária dos resultados apresentados, o processo de obtenção dos mesmos, revelador do conhecimento acrisolado até aquele momento sobre primalidade e o TFA, tem peso decisivo nas análises e permite que as inferências daí resultantes sejam alinhadas.

Além disso, a opção pela abordagem qualitativa, neste estudo, segue a premissa indicada por Alves-Mazzotti e Gewandszajder (1999) de que não existe um modelo único que seja capaz de construir o que chamam de “conhecimentos confiáveis”, de forma que, segundo os autores, “não há modelos ‘bons’ ou ‘maus’ em si mesmos, e sim modelos adequados ou inadequados ao que se pretende investigar” (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER p. 109, 1999).

Do ponto de vista da modalidade – ou gênero investigativo, se se preferir – esta pesquisa se caracteriza como um estudo de caso, do ponto de vista indicado por Ponte (2006):

Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (PONTE, 2006, p.2)

O mesmo autor assevera que os estudos de caso têm sido usados para, entre outros tópicos, analisar as iniciativas de formação inicial ou contínua de professores, justamente o cenário que se tem nesta pesquisa. Do ponto de vista do paradigma metodológico, o estudo aqui evidenciado tem por base a proposta interpretativa em torno dos fenômenos estudados (Kilpatrick, 1988 apud Ponte, 2006).

Em uma pesquisa que trata sobre a compreensão de licenciandos em Matemática sobre os números primos, julgou-se essencial propor aos estudantes (participantes da investigação), que em seguida são descritos, a resolução de atividades contidas em uma sequência didática elaborada diretamente a partir dos trabalhos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004).

4.1 Descrição dos sujeitos e do ambiente da pesquisa

Em relação aos sujeitos, convidou-se 19 licenciandos em Matemática da Universidade Estadual do Pará (UEPA), com idades entre 20 e 25 anos, para participarem, de forma voluntária, das atividades propostas. Desses dezenove, dez participaram de todos os encontros, e foram relacionados, por meio de designações genéricas, na Tabela 2. Ainda em relação ao perfil acadêmico dos sujeitos da pesquisa, três alunos estavam cursando o terceiro ano e já estavam estudando a disciplina Teoria dos Números; dois alunos estavam cursando o segundo ano e já haviam estudado, anteriormente, Fundamentos da Matemática I e Geometria Analítica Vetorial, além de estudarem, no momento da pesquisa, Fundamentos da Matemática II e Cálculo I.

Tabela 2 – Participantes efetivos da pesquisa

PARTICIPANTE	TURMA	IDADE
Aluno 1	3º ANO	20
Aluno 2	2º ANO	19
Aluno 3	3º ANO	23
Aluno 4	3º ANO	20
Aluno 5	2º ANO	19
Aluno 6	3º ANO	21
Aluno 7	3º ANO	20
Aluno 8	3º ANO	22
Aluno 9	3º ANO	20
Aluno 10	3º ANO	20

Fonte: O autor

Nenhum dos dez participantes lecionava oficialmente no ensino fundamental e médio. A maioria declarou, em conversas na sala, que trabalhar com o conjunto dos inteiros positivos não parecia ser algo difícil e que um assunto dentro desse conjunto, como os números primos, não seria objeto de muita atenção e chegaria mesmo a ser negligenciado em circunstâncias comuns. Foram destinados dois sábados pela manhã para a aplicação das questões e três manhãs de sábados para a discussão das questões e suas soluções. Os participantes tiveram duas horas nos dois primeiros sábados para resolverem três questões, totalizando, desta maneira, seis questões. Nas outras três manhãs de sábado, foram feitos encontros de uma hora

para discussão das propostas apresentadas e soluções das questões pelo pesquisador. Essa fase não consta desta pesquisa, que se ateve aos procedimentos direcionados pela questão norteadora. Foram recolhidos os dados a partir da sequência didática aplicada e diálogos informais ocorridos durante as sessões com os 10 participantes. Os dados foram coletados, desta forma, por meio das resoluções providas pelos sujeitos aos problemas componentes da sequência, das anotações que produziram e por meio de alguns registros dos diálogos.

O instrumento utilizado na pesquisa foi aplicado no segundo semestre de 2014. Os alunos do terceiro ano já haviam visto, diretamente, os conteúdos de divisibilidade, máximo divisor comum, números primos, TFA, entre outros, na disciplina Teoria dos Números. Entretanto, conforme declararam, os temas matemáticos tratados nesta pesquisa eram conhecidos por todos. De fato, como se pode perceber, a maioria dos estudantes cursa o terceiro ano, sendo que apenas dois deles cursam o segundo ano. Como os temas da pesquisa, números primos e o TFA, foram trabalhados na trajetória escolar pregressa dos estudantes, esta distinção não foi considerada importante.

Ao escolher os alunos de licenciatura que iriam participar da pesquisa, pensou-se em um grupo que mesclasse alunos com e sem experiência na docência. Infelizmente, alunos que já atuavam de alguma forma em alguma atividade de ensino, devido ao tempo, não aceitaram participar. Outras desistências foram impostas pelo contexto social e pela grande dificuldade de mobilidade urbana.

Todos os dez alunos estudaram por um tempo em escolas públicas, mas segundo a opinião deles, para obterem um melhor ensino, foram transferidos para escolas privadas. Mesmo ao informar seu interesse em serem professores, não demonstraram muito entusiasmo pela prática da profissão, apesar de declararem seu amor pela matemática. Deixam bem claro que trocariam a profissão de professor ao serem aprovados em algum concurso público que pagasse melhor, por exemplo.

Todos os participantes residem em Belém, são solteiros e obtiveram sucesso entre a primeira e a segunda tentativas de ingresso na instituição por meio do vestibular. Não são participantes efetivos da vida econômica familiar, recebem ajuda financeira da família ou de outras pessoas, não sendo responsáveis pelo próprio sustento. Nenhum dos participantes achou que a sua formação prévia recebida foi suficiente, como base, para prepará-los para o ensino superior.

O local escolhido para os encontros foi o Laboratório de Ensino e Educação Matemática (LABEM), cedido pela coordenação curso. Há anos, o LABEM é um espaço que funciona como centro de discussão e desenvolvimento de novos conhecimentos dentro do curso de licenciatura em Matemática da UEPA. A intenção dos que trabalham no LABEM é que ele contribua para o desenvolvimento da formação profissional do futuro professor e a sua iniciação em atividades de pesquisa. De todo o modo, dada a relativa simplicidade dos instrumentos necessários à consecução das atividades, o espaço foi mais do que adequado.

Constituídas as descrições necessárias, indicam-se, a seguir, as categorias principais consideradas nas análises.

4.2 Categorias de análise

Podem-se alinhar, em relação às análises, as categorias principais que as direcionam. Considerando o quadro teórico consolidado no capítulo pertinente, e as características do instrumento de pesquisa, as categorias mencionadas seriam as seguintes:

- A natureza das características representacionais numéricas que surgem do trabalho dos alunos ao longo da sequência didática – transparentes ou opacas (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2004);
- A relação conceito/notação, ligada à representação numérica adotada, no sentido de perceber se os alunos preservam o significado conceitual ou se ficam restritos às formas de representação por eles conhecidas;
- As estratégias adotadas na resolução dos problemas componentes – de que forma se conectam com o conceito de números primos, compostos e o TFA – e se são adotados outros procedimentos operatórios/algoritmos.

4.3 Descrição da sequência didática

A sequência didática utilizada nesta pesquisa, conforme já apontado, foi constituída a partir de problemas empregados nos trabalhos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004), e é composta por seis questões problematizadas, ou seja, pensadas para que os estudantes se responsabilizassem pela resolução das mesmas sem a intervenção do professor/pesquisador. A ideia é que se engajassem em um processo investigativo que os conduzisse a evidenciar saberes e/ou dificuldades, cuja descrição fornecesse subsídios para o encaminhamento de respostas à questão de pesquisa.

Conseqüentemente, esta seqüência está diretamente ligada à questão de pesquisa, já que pretende submeter os estudantes a um percurso investigativo em busca de soluções para os problemas levantados, que estão no domínio da Teoria dos Números, e são relativos aos números primos e ao TFA.

As questões componentes da seqüência didática utilizada na pesquisa podem ser vistas em seguida.

1. Como você descreve um número primo? E um número composto? Qual é a relação entre números primos e compostos? (ZAZKIS;LILJEDAHN, 2004).

Nesta questão, esperava-se que os estudantes indicassem especificamente uma definição para números primos no âmbito dos números naturais como sendo aqueles números que são divisíveis apenas por si mesmos e por um – ou, ainda, aqueles números cuja única decomposição em fatores admitida é a trivial, contendo, como fatores, o próprio número e o um. Definições parciais e/ou incompletas poderiam surgir, como a indicação de que os primos têm apenas dois divisores (sem especificar quais), ou que têm apenas a si mesmos como divisores (ignorando o 1).

Os números compostos possuem, além deles mesmos e do 1, como divisores, outros números menores do que ele mesmo e pertencentes ao conjunto dos números naturais. De forma mais completa, diz-se que os números compostos são aqueles que podem ser decompostos em fatores primos de forma única, a não ser pela ordem.

2. Considere $F = 151 \times 157$. F é um número primo? Indique SIM ou NÃO e explique sua decisão (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2004).

Para esta questão, os estudantes deveriam anotar, como resposta, a alternativa “Não”, uma vez que a representação indicada, pretensamente transparente, indica que F é composto, relacionando, inclusive, os fatores primos componentes. Os estudantes deveriam recorrer ao TFA para concluir que a referida decomposição é única, a não ser pela ordem.

De outro modo, os sujeitos poderiam efetuar o produto indicado, obtendo 23707, uma representação opaca quanto à detecção do caráter composto do número. A partir desta outra representação, apesar de isto não ser necessário, o aluno poderia efetuar testes com os fatores para cogitar se este número seria primo ou não. Pode ocorrer, inclusive, de o sujeito tentar efetuar divisões pelos primos a partir de 3, desistindo quando perceber que os fatores menores

que 151 não são divisores do número, podendo, inclusive, declarar erroneamente que o número é primo.

3. Considere o número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ e decida se o mesmo é divisível por cada um dos números da lista formada por 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 e 63 (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996);

Espera-se que o sujeito, ao observar a decomposição de M em fatores primos, e considerando que a mesma é única, pela simples observação dos fatores primos componentes consiga decidir corretamente quais seriam os divisores (todos da lista, com exceção do 2 e do 11, que não fazem parte da decomposição de M em primos). Uma estratégia alternativa – e desnecessária – pode ser a de multiplicar os fatores componentes, obtendo 4725, e tentar dividir por cada um dos números candidatos da lista, constatando individualmente quais deles seriam divisores.

4. Considere o número $K = 16199 = 97 \times 167$ (onde 97 e 167 são reconhecidos como números primos) e decida se K pode ser divisível por 3, 5, 11, 13 e 17 (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996);

Da mesma forma que a questão anterior, considerando a representação pretensamente transparente disponível, era de se esperar que o sujeito constatasse que 97 e 167 são os fatores primos únicos nos quais o número se decompõe, descartando, desta maneira, quaisquer outros números candidatos a divisores. Da mesma forma que na questão anterior, pode ser que o estudante tente efetuar todas as divisões, o que seria desnecessário e teria um maior custo operatório.

5. Examine uma lista de números, tais como 8^2 , 17^2 , 17^3 , 234^3 , 234^6 , $5^2 \times 17^2$, $5^3 \times 7^2$, $5^6 \times 17^2$, p^3 com p primo, C^3 com C composto, e decida quais números da lista são, ou poderiam ser, quadrados perfeitos (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996);

Aqui, espera-se que o sujeito reconheça como quadrados perfeitos todas as representações que possam ser escritas em função da forma n^2 . Para isto, espera-se, também, que o estudante perceba os conceitos de primos e compostos, e as possíveis decomposições em primos dos candidatos. Pode ocorrer a substituição, por parte dos estudantes, do conceito de quadrado perfeito pela notação n^2 , o que levaria os sujeitos a não reconhecerem representações numéricas em outras formas.

6. Considere $m(2k + 1)$, onde m e k são números inteiros. Este número é primo? Ou, poderia, de alguma forma, ser primo? (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2004).

Aqui, espera-se que o sujeito primeiramente reconheça que o número dado possui dois fatores, m e $(2k+1)$. A partir daí, que recorra ao fato que, se um número p é primo, seus únicos fatores são p e 1 . A partir dessas informações, espera-se, também, que ele estabeleça m como um inteiro positivo e k como um inteiro não-negativo e faça as seguintes conjecturas:

- a) Se $k = 0$, restaria $m \times 1$, o que lhe permitiria admitir qualquer valor primo para m para que o número dado fosse primo;
- b) Se $k > 0$, o número ímpar $(2k+1)$ seria sempre maior que 1 , o que obrigaria, para que o candidato fosse primo, fixar $m = 1$ e admitir $2k+1$ primo;
- c) Se $k > 0$ e $m > 1$, restaria um número cujos fatores seriam maiores que 1 ; logo, não seria um número primo.

Esclarecidos os aportes metodológicos desta investigação, o próximo capítulo, a seguir, trata das análises.

CAPÍTULO 5

ANÁLISES

Neste capítulo, são realizadas as análises relativas as produções dos sujeitos, que responderam às questões alinhadas no instrumento de pesquisa, anteriormente explicado.

5.1 Respostas dos estudantes e respectivas descrições

5.1.1 Questão 1

O enunciado da questão 1, conforme se encontrava no instrumento que materializava a sequência didática, era o seguinte: “como você descreve um número primo? E um número composto? Qual é a relação entre números primos e compostos?”. As respostas dos estudantes e suas análises locais aparecem a seguir.

5.1.1.1 Resposta de Aluno 1

Aluno 1 indicou, em seu protocolo, a seguinte resposta à questão 1:

Números primos são aqueles que só podem ser divididos por 1 e por eles mesmos. Números compostos são aqueles que possuem mais de dois divisores diferentes no campo dos números naturais. A relação existente é que os números primos podem ser encontrados na decomposição de números compostos.

Ainda que não registre a ideia de decomposição dos compostos em **fatores** primos, Aluno 1 responde corretamente, evidenciando compreender os conceitos de números primos e compostos, bem como a relação entre os mesmos. Também não chega a enunciar o TFA diretamente, mas, ao menos em parte, seus elementos se encontram presentes na resposta provida.

5.1.1.2 Resposta de Aluno 2

Por sua vez, Aluno 2 deu, como resposta à questão: “*número primo é o número divisível por ele mesmo e números compostos são números amplos (sic) que podem ser divididos por qualquer outro número*”.

Aluno 2 fornece uma descrição conceitualmente incompleta dos números primos, não indicando que os mesmos são divisíveis, também, por 1. Da mesma forma, sua definição sobre números compostos enuncia uma classificação particular para os mesmos (“números

amplos”), talvez se referindo ao fato de que os mesmos têm mais divisores do que os primos; entretanto, ao fazê-lo, indicam que os números desta natureza podem ser divididos por “qualquer outro número”, o que não corresponde ao conceito em tela, já que, para números compostos específicos, há uma decomposição em fatores primos que é única (muito longe de qualquer). Além disso, mesmo quando se tratar de uma decomposição em fatores quaisquer (não em primos), a mesma não admitirá números indistintos, mas números específicos.

5.1.1.3 Resposta de Aluno 3

A resposta de Aluno 3 para a questão 1 foi:

Número primo é aquele que possui apenas dois divisores, o próprio número e a unidade. Número composto possui mais de dois divisores. A relação é de oposição, enquanto os primos possuem dois, os compostos possuem mais.

Aluno 3 dá uma definição correta para os números primos, mas a que provê para os compostos é incompleta, limitando-se a dizer que possuem mais de dois divisores. Usa seu postulado acerca do número de divisores de primos e compostos para assinalar que a relação entre os mesmos se limita a opor a quantidade de divisores de um e de outro.

5.1.1.4 Resposta de Aluno 4

Em relação à questão 1, Aluno 4 anotou:

Número primo é dado por várias formas de obtenção, porém a mais frequente em sala de aula, é aquela que diz que um número primo só possui dois divisores, no caso, 1 e ele mesmo. Número composto já é um número natural que possui mais de dois divisores, de maneira que todo número composto pode ser decomposto em um produto de dois ou mais números primos;

Ainda que as definições de Aluno 4 estejam corretas em relação aos conceitos de números primos e compostos, o estudante procura assegurar outras eventuais “formas de obtenção”, indicando que sua propositura é típica de sala de aula – eventualmente, então, deixa o aluno aberta a possibilidade de outras definições de primalidade, ou, ainda, de outras formas de “obter” números primos. Em relação aos números compostos e o TFA, o sujeito

indica ter ciência da decomposição em fatores primos, ainda que não mencione a unicidade da mesma.

Chama a atenção o fato de o estudante não compreender o significado embestado na ideia de teorema, o que se percebe quando indica que a “obtenção” de números primos pode ser feita de maneira diversa.

5.1.1.5 Resposta de Aluno 5

A resposta de Aluno 5 para a questão 1 trazia a seguinte argumentação: “*número primo é aquele que pode ser divisível por 1 e por ele mesmo. Em relação aos números compostos, nunca ouvi falar, portanto, não tenho como relacionar os dois*”.

Aluno 5 indica, peremptoriamente, desconhecer a definição de números compostos. Sua definição acerca dos primos está apresentada corretamente. É razoável pensar, neste ponto, que o estudante desconhece o TFA.

5.1.1.6 Resposta de Aluno 6

O participante da pesquisa Aluno 6 anotou sua resposta da seguinte maneira: “*número primo: admite apenas a si mesmo como divisor; Número composto: é o produto entre dois ou mais números, ou seja, admite, além de si mesmo, outros números como divisores*”.

Assim como Aluno 2, Aluno 6 não relaciona o 1 como um dos divisores dos números primos, ignorando, assim, a fatoração trivial. Na sua definição de números compostos, além de não evidenciar de forma clara a referência ao TFA, o estudante cria uma definição que admite alguma confusão com o próprio conceito de primalidade, ao indicar que tais números são produtos de dois ou mais números (na categoria, por assim dizer, “dois números”, um número primo p qualquer estaria incluído, pois $p \times 1 = p$, que é primo). Não indica qual seria a relação entre números primos e compostos.

5.1.1.7 Resposta de Aluno 7

Aluno 7 indicou, em seu protocolo, a seguinte resposta à questão 1:

Número primo é todo número natural que possui como divisores apenas o 1 e ele mesmo. Logo, o 1 não é número primo, pois ele possui apenas um divisor, que é ele próprio; o número 2 é o único número primo par. Os números compostos também são números naturais, que possuem mais de dois divisores, ou seja, podem ser divididos por outros números além

de um e eles mesmos. A relação entre eles é que qualquer número natural que não seja primo, é um número composto, com exceção do número 1;

Aluno 7 mantém, como critério de identificação de um número composto, o fato de o mesmo poder ser dividido por outros números além do 1 e o próprio número. Não há referências à decomposição de tais números em fatores primos, muito menos à unicidade de tal decomposição. A relação indicada entre os números primos e compostos, para o aluno, é de exclusão mútua, o que permitiria que se pense que esta definição não se conecta com os pressupostos do TFA.

5.1.1.8 Resposta de Aluno 8

Como resposta à esta questão, Aluno 8 anota simplesmente “*acho que não tem relação entre os dois números*”.

Aluno 8 não traz as definições solicitadas, e indica não ver qualquer relação entre os números primos e os compostos.

5.1.1.9 Resposta de Aluno 9

Em relação à questão 1, Aluno 9 escreveu:

Número primo é um número que apenas pode ser divisível por 1 e por ele mesmo. Por exemplo, 3, 5, 7. Um número composto é um número que possui dois ou mais divisores naturais. A relação entre eles é que qualquer número que seja primo não é composto;

O conceito de primalidade é enunciado corretamente por Aluno 9. O conceito de número composto indicado pelo estudante se limita ao número de divisores (dois ou mais), sem assinalar maior compreensão acerca do TFA. Além disso, da forma como se encontra, a definição de compostos incluiria os números primos, que têm dois divisores. Aluno 9, também, limita-se a mostrar uma oposição entre os dois tipos como relação entre os mesmos.

5.1.1.10 Resposta de Aluno 10

Para esta questão, Aluno 10 trouxe a seguinte resposta:

Um número primo é aquele divisível apenas por si mesmo, além do número 1. Um número composto é aquele divisível por mais de dois

números distintos. A relação entre eles é que os números compostos podem ser decompostos em um produto de dois ou mais fatores primos, não necessariamente distintos.

Aluno 10 traz definições corretas acerca de números primos e compostos, além de expor de forma coerente o fato de os números compostos poderem ser decompostos em fatores primos. Entretanto, não indica a unicidade de tal decomposição.

5.1.1.11 Análise das respostas da questão 1

Na maioria das respostas indicadas pelos dez sujeitos, o conceito de números primos parece claro – apenas dois deles não mencionaram o fato de que os números primos podem ser divididos por 1. De outro modo, entretanto, apenas três estudantes (Aluno 1, Aluno 4 e Aluno 10) indicam, quando se referem aos números compostos, que os números primos estão presentes na decomposição dos mesmos em fatores. Nenhum dos estudantes indica que a decomposição dos compostos em fatores primos é única, exceto pela ordem dos fatores. A dificuldade em relacionar o conceito de número composto com sua única decomposição em fatores primos indica o caráter opaco deste conceito e de sua representação, como mencionado por Zazkis e Liljedahl (2004), do ponto de vista do TFA. Trata-se, na verdade, de uma extensão do argumento dos autores, que indicam não haver representação transparente para os números em geral, e os primos, em particular – ainda que possam haver características transparentes em algumas representações, características estas ligadas a determinadas propriedades. Deste ponto de vista, uma vez que a relação entre os números primos e compostos, e a própria representação dos compostos, depende daquela relativa aos primos, por extensão, entende-se que existem representações para os números compostos que não são vistas como transparentes do ponto de vista do TFA. Assim, em relação a eventuais problemas envolvendo tais conceitos, a resolução dos mesmos pode depender de outros instrumentos, como a divisibilidade, o que pode concorrer por aumentar o custo cognitivo das resoluções ou torna-las menos acessíveis.

Por outro lado, considerando que o TFA já foi tema de estudo para os sujeitos em suas trajetórias de aprendizagem, a incapacidade relacionar este conhecimento em um contexto de aplicação pode sugerir a adoção daquilo que Molina e Oktaç (2007) chamam de *modelos intuitivos*. Tais modelos tendem a reduzir a complexidade de um conceito por meio da redução da abstração envolvida. Originalmente, esta argumentação é usada no âmbito da álgebra linear, mas podem ser percebidas ideias correlacionadas, à medida que os estudantes

indicam outra característica típica de tais modelos: a substituição dos conceitos por criações particulares, utilizadas para dar respostas locais a certa categoria de problemas.

5.1.2 Questão 2

A segunda questão do instrumento de pesquisa estava disponível para o trabalho dos sujeitos da seguinte forma: “considere $F = 151 \times 157$. F é um número primo? Indique SIM ou NÃO e explique sua decisão”.

5.1.2.1 Resposta de Aluno 1

A resposta anotada para a segunda questão por Aluno 2 foi:

A multiplicação destes dois valores dá 23707. Utilizando alguns critérios de divisibilidade, percebi que nenhum se adequará e para ser mais preciso seria necessário continuar fazendo testes, logo acredito que este resultado é primo.

A resposta de Aluno 1 está, evidentemente, errada, já que F não é um número primo. Ainda que na resposta anterior o estudante tenha enunciado o conceito de números compostos relacionado à decomposição em números primos, tal ideia não é levada em consideração para a resposta. Desta forma, pode-se inferir que o conceito não possui significado para o aluno em questão ou que o mesmo acredita que pode haver outra fatoração em números primos que decomponha o número, resultado este também obtido por Zazkis e Campbell (1996). Além disso, destaca-se o método empregado: o sujeito recorre aos critérios de divisibilidade que conhece, que não são suficientes, e para, provavelmente, algoritmos de divisão, os quais representam um custo cognitivo bastante alto, já que o primeiro divisor de F é 151, um dos fatores primos de sua decomposição.

Outra suposição autorizada pelos comentários do estudante é a prevalência de uma crença, segundo a qual, “a decomposição em fatores primos significa, na verdade, a decomposição em fatores primos pequenos” (ZAZKIS E CAMPBELL, 1996, p. 215). Os números envolvidos na decomposição de F em fatores primos são 151 e 157, e não são vistos como primos por não serem suficientemente “pequenos” – ou, ao menor, por não constarem entre os primeiros primos habitualmente empregados em testes de divisibilidade (2, 3, 5, 7, 11 e 13, geralmente).

5.1.2.2 Resposta de Aluno 2

Como resposta à questão de número dois, Aluno 2 anota, simplesmente, “*sim, pois F só é divisível por ele mesmo*”.

A resposta provida por Aluno 2 dá poucas pistas sobre o método utilizado para sua conclusão, errada. Apesar da representação utilizada buscar alguma transparência no que se refere à decomposição de um número em fatores primos, do ponto de vista de Zazkis e Liljedahal (2004), ao mostrar tais fatores primos, o aluno ignora solenemente esta característica para afirmar que o número é primo, indicando ainda, em conformidade com sua definição incompleta para a resposta à questão 1, que o número seria divisível apenas por si mesmo. Em outras palavras, o fato de o número poder ser escrito como uma multiplicação de outros números não o convenceu a considerar os fatores em questão como divisores do número candidato F.

Outra possibilidade que parece bem consistente neste caso é a de o estudante ter, por um critério qualquer, decidido que F seria um número primo e recorrido à sua definição de primalidade para justificar a resposta, ignorando a representação fornecida com a questão. Neste caso, o conceito incompleto ou errôneo funciona como um substituto para o significado, que seria, por sua vez, portador de validade matemática.

5.1.2.3 Resposta de Aluno 3

Aluno 3 anota, como resposta à esta questão, “*sim, pois ele possui apenas dois divisores para ter um número inteiro como resultado*”.

Da mesma forma que o seu colega anterior, Aluno 3 indica a resposta incorretamente. Não é possível entender se o aluno considera que 151 e 157 são os únicos divisores do número F, descartando o próprio número e o 1, ou se, apesar de ter disponível a única fatoração de F em primos, não relaciona os fatores como divisores do número candidato, a exemplo de Aluno 2. De todo modo, o conceito de números compostos apresentado pelo sujeito na resposta à primeira questão o induz a procurar por divisores de F, e não por considerar sua decomposição única em fatores primos. Assim, ao não construir a correlação conceitual, a resolução do problema fica prejudicada.

Outra hipótese que pode ser levantada aqui pode ocorrer em torno de uma possível generalização indevida: uma vez que a fatoração trivial está disponível para todos os números, mas é a única existente para os primos, o estudante pode ter estendido esta propriedade para quaisquer números cuja fatoração em primos resulte em dois fatores além de 1 e o próprio número.

5.1.2.4 Respostas de Aluno 4

Em relação a esta questão, o estudante responde: “*sim, posto que entre os números 0 e 9, tal valor não possui divisão exata. Sendo assim, só existem dois valores possíveis de divisão exata, 1 e 23707*”.

A resposta errada de Aluno 4 assemelha-se, de certo modo, àquela provida por Aluno 1, deixando, entretanto, mais pistas sobre as dificuldades conceituais existentes. O aluno evidentemente aplicou testes de divisibilidade, tendo o número 9 como limite para os mesmos. Desta forma, parece acreditar que este seria o limite à descoberta de um número primo. Mais uma vez, ao ignorar o conceito advindo do TFA, o aluno erra em sua resposta. Outro detalhe um tanto aflitivo é a inclusão do zero na lista de possíveis divisores de F .

Zazkis e Liljedahl (2004) indicam que alguns estudantes podem julgar que números vistos por eles como “grandes” devem possuir fatores primos “pequenos”, ou seja, números até um certo – e reduzido – limite. Ao encontrarem um número composto cuja fatoração resulta em componentes maiores do que 100, por exemplo, os alunos tendem a considerar o número como primo.

5.1.2.5 Respostas de Aluno 5

A resposta trazida por Aluno 5 foi a seguinte:

$F = 151 \times 157F$, não, pois estamos diante de uma equação não somente de um número, e mesmo que resolvendo a multiplicação, ainda restaria uma incógnita F , a qual não temos como saber o resultado.

No caso de Aluno 5, a representação supostamente transparente provida para F pareceu concorrer para que o estudante confundisse o número representado por uma multiplicação com uma equação. O mais espantoso é que a representação da multiplicação surge como opaca para o estudante, na definição de Zazkis e Liljedahl (2004), pois, enquanto

os fatores 151 e 157 aparecem mediados pelo símbolo “x”, significando multiplicação, o símbolo F do lado direito da “equação” parece multiplicar apenas o 157, o que, aparentemente, impediu o aluno de “simplificar” a “equação” usando o valor F como critério. Assim, o aluno em questão não chega sequer a alinhar qualquer ferramenta conceitual para, efetivamente, prover uma resposta à questão.

5.1.2.6 Respostas de Aluno 6

A resposta de Aluno 6 para esta questão foi anotada por ele assim: “*F não é primo, pois o produto entre 2 números não gera um primo, pois $a, b \neq 0$ e $\neq 1$* ”.

A resposta de Aluno 6 utiliza indiretamente seu conceito sobre números compostos, anunciado na questão 1, ou seja, o número deve ter divisores além dele próprio e do 1. Ainda que a resposta sobre F esteja correta, Aluno 6 parece acreditar que o número zero poderia estar entre os fatores que comporiam um número – ou que um dos fatores poderia ser F e o outro, zero ou 1.

5.1.2.7 Resposta de Aluno 7

Nesta questão, Aluno 7 escreve “*não, porém não sei explicar o motivo*”.

Aluno 7 “arrisca” uma resposta, coincidentemente correta, a respeito da primalidade de F, alegando não saber o motivo de tal escolha. Tal dificuldade permite aventar a hipótese de que os conceitos indicados na questão 1 (corretos, apesar de não se referirem diretamente ao TFA) não têm significado para o sujeito, que não consegue utilizá-los como conhecimentos de base para a eles recorrer na resposta ao problema.

5.1.2.8 Resposta de Aluno 8

A resposta trazida por Aluno 8 continha o seguinte arrazoado: “*sim, eu considerarei apenas o último número, “7”, por ele ser um primo, então considerarei 23707 um número primo*”.

A resposta de Aluno 8 traz um típico modelo intuitivo, como indicado por Molina e Oktaç (2007), o qual, neste caso, apresenta-se completamente desligado de conceitos coerentes e de formalismo matemático. Este tipo de erro foi considerado no trabalho de Zazkis e Liljedahl (2004), ocorrendo sob a classificação *misapplication of an algorithm*. Além

disso, o aluno chama o algarismo 7, componente de F , de “número”. Recorre a um critério pessoal, por assim dizer, ao relacionar o fato de o último algarismo do número ser primo como base para afirmar, erroneamente, que o número é primo. Aqui, também, a representação que pretendia ser transparente do número por meio de seus fatores primos não foi utilizada.

5.1.2.9 Resposta de Aluno 9

Para a segunda questão, Aluno 9 anota: “*não, porque como F é uma multiplicação de 2 números sendo eles primos ou não, ele se tornará um número composto*”.

Ao contrário do que poderia sugerir a justificativa de Aluno 9, o mesmo não emprega, pelo menos diretamente, o TFA. O estudante alude ao fato de F ser o produto de dois outros números, mas sua resposta não indica a compreensão de que a decomposição em fatores primos seria única. Por outro lado, poder-se-ia pensar que o estudante parece não ter certeza de que 151 e 157 são números primos, mas entende que o fato de F ser composto independe disto, uma vez que, provavelmente, neste caso, compreenderia que, se os fatores não fossem primos, poderiam, eles mesmos, sofrer decomposições. A justificativa, então, ocorre por conta da possibilidade de fatoração qualquer, e não àquela prevista no TFA. Assim, a resposta está correta, ainda que sua justificativa careça de maior precisão e rigor matemáticos.

5.1.2.10 Resposta de Aluno 10

Aluno 10 anota, como resposta à questão, “*não, pois F pode ser dividido por 151 ou 157*”.

A resposta de Aluno 10 não emprega diretamente o conceito enunciado por ele mesmo na questão anterior, quando deixa de indicar que os fatores mencionados são os únicos da decomposição em primos de F – ou de indicar que os fatores são primos, ao menos. Entretanto, ao afirmar que 151 e 157 são divisores de F sem considerar outros fatores, pode-se entrever certa coerência com sua definição anterior. Trata-se, portanto, de uma resposta correta, ainda que despreocupada com os aspectos formais.

5.1.2.11 Análise das respostas da questão 2

Apenas quatro dos sujeitos cujas respostas foram analisadas acertaram a questão 2. Dentre estes alunos, apenas Aluno 10 recorreu, ainda que de forma indireta, ao TFA, por meio da definição de números compostos; um estudante (Aluno 9) recorreu à decomposição do

número em fatores, não necessariamente primos; um estudante (Aluno 7) recorreu à definição de números primos, sem se referir ao TFA; e outro (Aluno 8) indicou a resposta correta sem qualquer explicação. Também para estes sujeitos, com exceção, talvez, de Aluno 8, a representação pretensamente transparente de F , dada por 151×157 , concorreu efetivamente para a mobilização do conhecimento necessário. Justamente neste sentido, funciona a afirmação de Zazkis e Liljedahl (2004), segundo a qual “um importante papel da representação em Matemática consiste em ser uma ferramenta para pensar e obter *insights*” (p. 167). Resultados como estes também foram encontrados pelos autores supramencionados em seu estudo. Em contrapartida, também nele, assim como na pesquisa aqui descrita, existiram sujeitos que afirmaram erroneamente que F seria um número primo. Outro fato que chama a atenção nesta resposta é a estreita correlação com o significado que os alunos atribuem aos conceitos que deram sobre números primos e compostos (e a relação entre eles) e a resposta provida pelos mesmos.

No caso da pesquisa que aqui se descreve, do mesmo modo, as causas de erros foram semelhantes aos estudos de referência: enquanto Aluno 1 e Aluno 4 aplicam incorretamente testes de divisibilidade, que têm, no caso, caráter algorítmico – tipicamente, segundo Zazkis e Liljedahl (2004), esta categoria de erros pode ser vista como *misapplication of an algorithm*. Aluno 2 e Aluno 3 incorrem em erros conceituais, indicando desconhecerem, ou tratarem de forma incorreta, o significado dos conceitos de números primos e compostos. Aluno 5 é um caso à parte, em relação às análises até aqui constituídas: a confusão conceitual deste participante da pesquisa é tal que o mesmo atribui o *status* de equação à representação de F , como se seu valor fosse desconhecido. Neste caso, o estudante sequer empregou a multiplicação de forma simples, para obter o produto de 151×157 , pois considerava que não poderia fazê-lo. Percebe-se, assim, por meio destes resultados, uma relação muito estreita entre a compreensão das representações como ferramentas para subsidiar o raciocínio e o uso de conceitos necessários à resolução dos problemas – no caso, de números primos, de números compostos e do TFA.

5.1.3 Questão 3

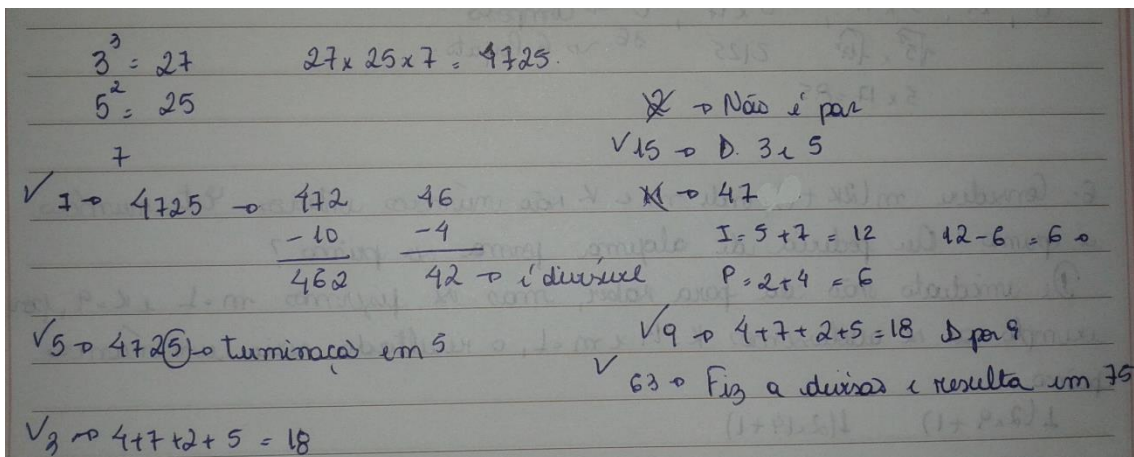
A terceira questão do instrumento utilizado para a coleta de dados junto aos sujeitos da pesquisa tinha o seguinte enunciado: “considere o número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ e decida se o mesmo é divisível por cada um dos números da lista formada por 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 e 63”.

5.1.3.1 Resposta de Aluno 1

Resolve as potenciações e as multiplicações para obter o número 4725. Em relação a cada número da lista, aplica os critérios de divisibilidade conhecidos, menos em relação ao 63, para o qual efetua a divisão e a verifica como exata. Os critérios aplicados em relação aos números 15 e 9 dão a entender que o aluno compreende que, como estes números são múltiplos dos fatores originais ($9 = 3 \times 3$; $15 = 3 \times 5$), aplica-se a divisibilidade. Entretanto, o mesmo raciocínio não avança no sentido do uso do TFA. Este resultado foi encontrado por Zazkis e Lildejahl (2004), que indicam que os estudantes, apesar de conhecerem o TFA, como é o caso de Aluno 1 (ver resposta à questão 1), não têm segurança a respeito de sua aplicabilidade e efetividade, já que se põem a testar o número por meio de critérios de divisibilidade e/ou operações (ver Figura 5).

Ao ser questionado a este respeito pelo pesquisador, verbalmente, o aluno esclarece que calculou valor de M, cujo produto é 4725. Indica usar critérios de divisibilidade para obter as respostas procuradas. Em relação ao fato de M ser divisível por 7, alega que usa o critério específico e, como o último resultado é 42, que é divisível por 7, conclui que M também o é. Usando os mesmos critérios, indica que 5, 9, 63 e 15 também são divisores de M. Indica que 2 e 11 não são divisores de M.

Figura 5: Protocolo de resolução do problema 3 – Aluno 1



Fonte: dados da pesquisa

5.1.3.2 Resposta de Aluno 2

Para Aluno 2, em relação à questão três, “M é divisível por 5, 15 e ele mesmo”.

Neste caso, Aluno 2 recorre a critérios de divisibilidade e provê uma resposta incompleta. Tal qual a representação provida na questão anterior, a representação referente a este problema também pretendia ter um caráter transparente, ao evidenciar os fatores primos componentes de M . Claramente, Aluno 2 não se valeu desta informação para subsidiar seu processo de resolução.

Em diálogo informal com o pesquisador, Aluno 2 reafirma suas conclusões, e reforça a inferência acerca de incompreensões conceituais que apresentou anteriormente, ao declarar que “– Sim, é divisível por 7, pois M é um número primo que só pode ser dividido por ele mesmo ou por uma de suas unidades. O número M é divisível por 5 também”. Claramente, o conceito de primalidade, afirmado de maneira correta por este participante da pesquisa na questão 1, não agrega significado aos constructos cognitivos do sujeito. Pode-se perguntar como alguém que supostamente detém o conceito a ponto de anuncia-lo pode fazer afirmações tão frontalmente contrárias. Se M é primo, e, evidentemente, não é igual a 5, como poderia ser divisível por 5? A respeito disto, é preciso destacar que Zazkis e Liljedahl (2004) e Zazkis e Campbell (1996), nos estudos que realizaram, também encontraram respostas corretas totais e/ou parciais que traziam justificativas matematicamente insustentáveis. O caso de Aluno 2 é mais emblemático: escreve uma resposta parcialmente correta, ao menos quanto aos números que seriam divisíveis por M , para depois, verbalmente, dar uma resposta diferente.

A identificação de M como número primo reforça a percepção acerca das dificuldades conceituais deste aluno, além das inconsistências em relação à compreensão do significado de suas próprias definições. Vale lembrar que Aluno 2 havia indicado, como resposta à questão 1, que os números compostos seriam divisíveis por quaisquer números. Apesar da imprecisão de tal definição, ela, ao menos, deveria indicar que o fato de o número possuir fatores componentes diferentes dele mesmo e de 1 o desqualificava como primo.

Vale ressaltar, por fim, que a dissonância entre a conceituação de números compostos e sua aplicação em um problema típico levam considerar o que Sierpinska (2000) chamou, em um contexto algébrico, de falta de percepção do caráter sistêmico do conhecimento científico, ao indicar que estudantes de licenciatura em Matemática frequentemente davam respostas e faziam observações que contrariavam asserções anteriores corretas que eles mesmos teriam feito, indicando a não percepção acerca do caráter estável da validade de teoremas, por exemplo.

5.1.3.3 Resposta de Aluno 3

A resposta de Aluno 3 a esta questão assinalava que “*só não é divisível por 2 e 11*”.

Não é possível indicar com precisão, por meio desta afirmação, o método pelo qual Aluno 3 chegou à resposta correta. Um maior esclarecimento, no entanto, pode ser obtido pela resposta à questão ao questionamento verbal feito pelo pesquisador: “– *Sim, é divisível por 7, pois obtém-se um valor inteiro. Não é divisível por 2 e por 11, pois o resultado são valores fracionários*”. Estas afirmações indicam que o estudante realizou as divisões pelos números candidatos após, provavelmente, obter o produto 4725 como valor de M, sem aplicar os critérios provenientes do TFA. Para este aluno, então, não surtiu efeito a representação que pretendia ser transparente no que se refere à primalidade, ao evidenciar a constituição do número a partir de seus fatores primos – a característica original de opacidade das representações numéricas prevaleceu. Questões representacionais parecem mesmo ser uma dificuldade recorrente entre os estudantes. No caso de Aluno 3, na entrevista, o mesmo caracteriza o quociente da divisão por 2 e 11 como “valores fracionários”, revelando um paradoxo em relação ao domínio do conhecimento matemático, baseado, neste caso, nos números naturais, e também um equívoco em relação à representação *per se*, uma vez que dificilmente o resultado, mesmo que no âmbito dos racionais, seria obtido e utilizado como fração.

5.1.3.4 Resposta de Aluno 4

Como resposta à questão ora analisada, Aluno 4 anotou: “ $M = 27 \times 25 \times 7$; $M = 4725$. *Ele é divisível, porém alguns valores não possuem divisão exata, como o 11*”.

Aluno 4 realiza a operação relativa à multiplicação por meio da qual o número M aparece representado. Provavelmente, realiza algumas operações de divisão para concluir que alguns números da lista não são divisores de M, como o 11. Mais tarde, conversando com o pesquisador, o estudante afirma que “– *Podemos simplificar o 7 da expressão por 7, logo teremos $M = 3^3 \times 5^2 \times 7 / 7$, sendo M divisível por 7. Ao desenvolver a questão em M, obteremos um número ímpar e na lista temos o valor 2, que é par, logo não é passível de divisão exata*”.

Evidentemente, o número é divisível por 7 – e isto foi perguntado, inclusive. Entretanto, o estudante chama este processo de “simplificação” quando se trata, na verdade,

de uma verificação de carácter operatório sobre a divisibilidade de M por 7 por meio da própria operação de divisão. Além disso, o estudante não menciona os números 3, 5, 9, 15 e 63. Ao eliminar os números 2 e 11, no entanto, o aluno acerta a resposta, com maior esforço do que se empregasse o TFA, e com justificativas matematicamente inconsistentes.

5.1.3.5 Respostas de Aluno 5

Resolve as potenciações e as multiplicações para obter o número 4725. Usa cada número da lista como divisor de 4725, testando quais divisões apresentariam resto zero. Conclui que o número “*é divisível por todos, exceto por 2 e por 9*”.

A resposta de Aluno 5 indica o uso da operação de divisão em relação a cada um dos números candidatos, o que leva o estudante a eliminar o 2 e, erroneamente, o 9. A representação pretensamente transparente empregada no enunciado do problema não encaminha o estudante ao uso do TFA como recurso de resolução. Quando, entretanto, o aluno é questionado pelo pesquisador, afirma: “– O número não pode ser divisível por nenhum, pois trata-se de uma incógnita”, repetindo a confusão conceitual apresentada na questão anterior, ao tomar a representação de M como uma equação, e o próprio M como incógnita. Em sua pesquisa, Zazkis e Liljedahl (2004) identificaram diversas respostas erradas dos estudantes que tinham como sujeitos, por motivos diversos, indicando dificuldade com conceitos matemáticos diversos (aplicação errada de algoritmos de divisibilidade ou de divisão, consideração da primalidade de um produto de primos, entre outras concepções errôneas).

Ainda sobre estas respostas, percebe-se que o estudante não identifica que está diante da questão que acabou de responder. Pode-se aventar que esta percepção difusa, por assim dizer, do carácter sistêmico do conhecimento matemático concorre para o provimento de respostas diversas em situações semelhantes (ou até iguais, como é o caso), da forma como indicou Sierpinska (2000), revelando fragilidade conceitual em relação aos conteúdos abordados.

5.1.3.6 Resposta de Aluno 6

Na concepção de Aluno 6, em relação a esta questão, o número M “*é divisível por 3, 5, 7, 9, 15 e 63, pois o produto $3^3 \times 5^2 \times 7$ é múltiplo destes números*”.

Aluno 6 acerta a resposta ao reconhecer que M é múltiplo dos números candidatos que indica, excluindo, provavelmente pelo mesmo motivo, 2 e 11. Em seu protocolo, o estudante não registra qualquer operação, o que leva a crer que o mesmo utilizou o fato de que alguns números aparecem em diferentes fatorações de M .

5.1.3.7 Resposta de Aluno 7

Aluno 7 traz as seguintes proposições à guisa de respostas:

*Como M possui um produto pelo algarismo 7, logo M é divisível por 7;
Como M possui um produto pelo algarismo 5, logo M é divisível por 5;
Como M possui um produto pelo algarismo 3, logo M é divisível por 3;
Como M não possui um produto pelo algarismo 2, ou por qualquer número par, logo M não é divisível por 2; Como M possui um produto por 3 e 5, e 15 é múltiplo de 3 e 5, logo M é divisível por 15; Como M não possui um produto pelo algarismo 11, ou por qualquer outro múltiplo de 11, então M não é divisível por 11; Como M possui um produto pelo algarismo 3, e o 9 é múltiplo de 3, logo M é divisível por 9;
Como M possui um produto por 7 e 9, e 63 é múltiplo de 7 e 9, logo M é divisível por 63.*

Aluno 7 responde de maneira detalhada – e correta – valendo-se da representação exposta no problema, do ponto de vista da evidência dos fatores que compõem M . Em outras palavras, pode-se perceber o uso de fatorações de M , quando o estudante indica que “ M possui um produto ...”. Na verdade, deveria dizer que determinado número integra a decomposição de M em fatores primos – ou pode, por sua vez, ser decomposto, também, em fatores primos (é o caso do 63, por exemplo). Outra observação que precisa ser feita é o uso errôneo do termo “algarismo”, que não pode deixar de ser vista como uma questão conceitual que deveria receber maior atenção nos processos de formação.

De outro ponto de vista, a estratégia empregada para prover uma resposta é longa e desnecessária, além de incluir verificações exaustivas. Em um primeiro momento, a representação de M poderia ser classificada como transparente para Aluno 7 – e o é, mas somente quanto à decomposição em fatores, mas não com relação à decomposição única em fatores primos, porque, se assim fosse, as verificações não teriam sido feitas. Neste sentido, concordam Zazkis e Campbell (1996), quando afirmam:

O número 96, por exemplo, pode ser escrito como 16×6 ou como 8×12 . Obviamente, a decomposição não é única. A unicidade, independentemente da ordem, surge apenas quando o número estiver completamente decomposto em fatores que são, cada um deles, primos. Esta parece ser a maior diferença, a que existe entre fatores e fatores primos, e que precisa de uma maior atenção didática. O conceito de decomposição em primos é o esquema unificador entre os números primos e compostos, ou seja, depende destes conceitos e da inter-relação entre eles (ZAZKIS E CAMPBELL, 1996, p. 217).

Uma interpretação correta, do ponto de vista representacional, dependeria, segundo os autores mencionados, da compreensão da relação entre primos e compostos, justamente dada pelo fato destes poderem ser expressos pela decomposição em fatores primos, única a não ser pela ordem.

5.1.3.8 Resposta de Aluno 8

A resposta de Aluno 8, longa como a de seu colega anterior, tem o seguinte conteúdo:

$$M = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$

Se no número M tem o valor 7, logo o valor de M é divisível por 7;

Se no número M tem o valor 5, logo o valor de M é divisível por 5;

Se no número M tem o valor 3, logo o valor de M é divisível por 3;

Se no número M não tem 2 nem um número par, logo o valor de M não é divisível por 2;

Se no número M tem os valores 3 e 5, logo o valor de M é divisível por 15;

O valor de M não é divisível por 11;

Se no número M tem o valor 3, logo o valor de M é divisível por 9;

Se no número M tem os valores 3 e 7, logo o valor de M é divisível por 63;

Da mesma forma que o colega anterior, Aluno 8 emprega fatorações, ao se referir aos primos presentes na decomposição de M como referências para a determinação da divisibilidade. As dificuldades conceituais que aparecem na resposta deste estudante referem-se à incapacidade de usar o significado do TFA, a partir de uma representação transparente de M quanto a decomposição em fatores, para indicar que os “valores” referidos na resposta (por exemplo, “ M tem o valor 3”) são os fatores primos presentes na decomposição de M .

5.1.3.9 Resposta de Aluno 9

As observações providas como respostas por Aluno 9 também são semelhantes às aquelas feitas pelos dois colegas anteriores:

$$M = 3^3 \times 5^2 \times 7$$

Por 7, sim, pois M também pode ser escrito como $7 \times 25 \times 27$, que é múltiplo de 7;

Por 5, sim, pois M também pode ser escrito como $5^2 \times 7 \times 27$, que é múltiplo de 5;

Por 3, sim, pois M também pode ser escrito como $3^3 \times 25 \times 7$, que é múltiplo de 3;

Por 2, $M = 2^n \times 25 \times 7 \rightarrow M = 4725$, não é divisível por 2;

Por 11, não é divisível por 11;

Por 15, é divisível por 15 por que M também pode ser escrito por $3.3.3.5.5.7$, $15.9.5.7$, então é múltiplo de 15;

Por 9, é divisível porque o número também é múltiplo de 9;

Por 63, $4725 / 63 = 75$; $M = 7 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$$M = 63 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Aluno 9 emprega raciocínio semelhante ao utilizado pelos dois estudantes anteriores, ou seja, utiliza fatorações, ainda que mostre certa insegurança em relação ao 63, ao ponto de efetuar a divisão para confirmar sua conjectura. Como já se havia assinalado antes, Zazkis e Liljedahl (2004) e Zazkis e Campbell (1996) haviam identificado, entre os participantes de suas pesquisas, sujeitos que, apesar de assinalar respostas corretas, insistiam em confirmá-las utilizando operações aritméticas ou outros procedimentos algorítmicos semelhantes.

5.1.3.10 Resposta de Aluno 10

O último estudante, Aluno 10, também adota uma estratégia que evidencia longos procedimentos de verificação:

$$M = 33 \times 52 \times 7 = 4725$$

Por 7, sim, sua divisão dá 675;

Por 5, sim, sua divisão dá 945. Todo número terminado em 0 ou 5 é divisível por 5;

Por 3, sim, sua divisão dá 1575;

Por 2, não, não é número par;

Por 15, sim, seu resultado dá 315. Para ser divisível por 15, tem que ser divisível pelos fatores que o compõem, 5 e 3. Como já verificado que M é divisível pelos dois números;

Por 11, não;

Por 9, sim, sua divisão dá 525.

Aluno 10 prefere empregar uma resolução de maior trabalho cognitivo e operacional, assim como o fizeram seus três colegas anteriores, efetuando todas as divisões pelos números candidatos, excluindo o 2, para o qual usa um critério de divisibilidade, e o 63, que foi omitido. Nota-se que o estudante em questão não consegue estender o raciocínio empregado nas questões 1 e 2, ainda que indique, no âmbito do próprio problema, que 15 é um divisor de M , pois é composto pelos fatores 3 e 5, os quais, por sua vez, são divisores de M , revelando alguma dificuldade em consolidar, em seu entendimento, o caráter sistêmico do conhecimento matemático. Ao mencionar a relação com os fatores que compõem um divisor, o estudante recorre à decomposição em fatores, sem que seja capaz de estendê-la para as demais verificações, o que pode indicar uma dificuldade em empregar o significado de tal conceito e de partir dele para compreender, por sua vez, o TFA a partir de uma representação que pudesse considerar transparente.

5.1.3.11 Análise das respostas da questão 3

Alguns elementos já identificados nas análises das questões anteriores voltaram a aparecer nos procedimentos desta ordem levados a efeito em relação à questão 3. Por um lado, registraram respostas incorretas apenas os estudantes Aluno 2 e Aluno 5. Dentre os estudantes que acertaram a resposta, os participantes da pesquisa Aluno 1, Aluno 3, Aluno 4 e Aluno 10 não utilizaram o TFA para indicarem suas respostas, recorrendo, de outro modo, a critérios de divisibilidade e/ou aplicação de algoritmos de divisão. Os estudantes Aluno 6, Aluno 7, Aluno 8 e Aluno 9 também não utilizaram o TFA em suas respostas, limitando-se a mencionar a decomposição em fatores dos números candidatos, sem enunciar que a decomposição de M , um número composto, em fatores primos era única e não incluiria os números candidatos 2 e 11. De acordo com os argumentos indicados por Zazkis e Liljedahl (2004) e Zazkis e Campbell (1996), apenas estes quatro últimos estudantes se valeram da representação transparente de M como número composto para o provimento de uma solução, trabalhosa, já que a representação do ponto de vista do TFA permanecia opaca. De forma semelhante aos

sujeitos das pesquisas realizada pelos autores mencionados, estes alunos procuraram confirmar suas respostas por meio de testes, ora efetuando uma divisão, ora examinando uma regra de divisibilidade.

Algumas respostas que poderiam ser consideradas ao menos parcialmente corretas acabaram por revelar fragilidades conceituais arraigadas, como é o caso de Aluno 5, que insistia em atribuir o status de incógnita ao número M como fez com o número F , enxergando, desta forma, uma impossibilidade de resolução. Deste ponto de vista, deve-se ressaltar que a dificuldade em consolidar aprendizagens de temas da teoria dos números prejudica o desenvolvimento, também, de conceitos posteriores, que passam a ser vistos pela ótica da imprecisão conceitual consolidada.

Outro ponto que merece comentário é a aparente incoerência entre definições corretas de números primos e compostos, calcadas em elementos do TFA e o abandono deste instrumento, de forma total ou parcial, na resolução dos problemas seguintes. Além de indicarem pouca capacidade de usar os significados dos conceitos enunciados, podem revelar dificuldade em assimilar o caráter sistêmico do conhecimento matemático, questão levantada nos estudos de Sierpinska (2000). Enunciar um teorema deveria equivaler a entendê-lo como estável, justamente o caráter basilar deste tipo de constructo matemático, mas parece não ser assim entre estes estudantes. Quando buscam outras validações ou não empregam o TFA, os estudantes revelam um descolamento teórico, por assim dizer, desde a presunção de que, dadas as condições de sua aplicação, o mesmo é sempre válido.

5.1.4 Questão 4

A questão 4 do instrumento de pesquisa exibiu, como enunciado, o seguinte: “considere o número $K = 16199 = 97 \times 167$ (onde 97 e 167 são reconhecidos como números primos) e decida se K pode ser divisível por 3, 5, 11, 13 e 17”.

5.1.4.1 Resposta de Aluno 1

Utiliza critérios de divisibilidade para testar os números (cada um deles – figura 6). Decide que 3 é um divisor de k , já que soma os algarismos de 16199 e obtém, erroneamente, 24. Mais uma vez, a representação de K pretendia ser transparente do ponto de vista do TFA, exibindo os fatores nos quais o mesmo pode ser decomposto, evidenciando, inclusive, que tais fatores são primos. Ainda que enuncie corretamente a ideia que serve para definir um número

composto na questão 1, conforme já exposto, o estudante não consegue apreender o significado envolvido nesta definição para estendê-lo à resolução de um problema típico.

Figura 6: Protocolo de resolução do problema 4 – Aluno 1

$K = 16199$
 $\checkmark 3 \rightarrow 1+6+1+9+9 = 24$
 $\times 5 \rightarrow 0 \text{ ou } 5$
 $\times 11 \rightarrow 9+1+1 = 11$
 $p, 9+6 = 15 \quad 11-15 = -4$
 $\times 3 \rightarrow 16199$
 $\begin{array}{r} 9 \\ \times 4 \\ \hline 36 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 1619 \\ +36 \\ \hline 1655 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 165 \\ +20 \\ \hline 185 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 18 \\ +20 \\ \hline 38 \end{array}$
 $\times 11 \rightarrow 16199$
 $\begin{array}{r} 9 \\ \times 5 \\ \hline 45 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 1619 \\ -45 \\ \hline 1574 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 157 \\ -20 \\ \hline 137 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 13 \\ -35 \\ \hline 22 \end{array}$

Fonte: dados da pesquisa

5.1.4.2 Resposta de Aluno 2

Aluno 2 respondeu à questão com uma observação sucinta: “ K é divisível por 3 e 11”.

Não é possível determinar por qual razão Aluno 2 indica que K seria divisível por 3 e 11, ainda que a representação pretensamente transparente do mesmo tenha estado disponível para sua verificação. É provável que o mesmo tenha utilizado erroneamente alguns critérios de divisibilidade que julgava dominar – para Zazkis e Liljedahl (2004), esta categoria de erro é indicada como *misapplication of divisibility rules*. De todo o modo, esta dificuldade já apareceu na questão 2 e evidencia, em relação a este sujeito, inconsistências de caráter conceitual.

5.1.4.3 Resposta de Aluno 3

Para Aluno 3, a única anotação no protocolo apareceu da seguinte forma: “Não é divisível”.

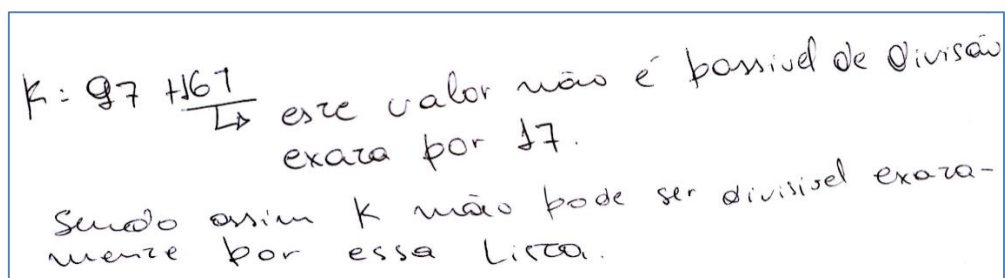
Da mesma maneira como feito na questão anterior, Aluno 3 não deixa claro que meios usou para chegar à conclusão apresentada. Pode ter observado os fatores nos quais o número

foi decomposto para concluir, diretamente, que não seria possível efetuar qualquer divisão entre os números candidatos, mas é apenas uma suposição.

5.1.4.4 Resposta de Aluno 4

Escreve “ $F = 97 + \underline{167}$ ” e, referindo-se a 167, indica que “*este valor não é passível de divisão por 17, sendo assim, k não pode ser divisível exatamente por esta lista*” (figura 7).

Figura 7: Protocolo de resolução do problema 4 – Aluno 4



Fonte: dados da pesquisa

As conclusões de Aluno 4 indicam que a resposta foi procurada sem considerar que a representação de K (que chama de F) poderia remeter ao uso direto do TFA. Para o estudante, teria sido necessário dividir os fatores de K por cada um dos números candidatos. Zazkis e Liljedahl (2004) e Zazkis e Campbell (1996) indicam, de forma geral, que estratégias deste tipo (*reasoning by examples*) nem sempre conduzem a respostas corretas, além de concorrerem por estabelecer um conceito errôneo de que generalizar (ou até validar) consiste em achar casos específicos nos quais certas condições se aplicam, ignorando os contraexemplos. Além disso, deve-se considerar que a estratégia em questão causa um dispêndio cognitivo operacional desnecessário, chegando a ser quase impraticável quando o enunciado eventualmente trazer um número maior de fatores ou de candidatos.

5.1.4.5 Resposta de Aluno 5

A resposta de Aluno 5 indica que “*o número não pode ser divisível por nenhum número da lista*”.

Assim como Aluno 3, as conclusões de Aluno 5 não trazem qualquer explicação.

5.1.4.6 Resposta de Aluno 6

Aluno 6, na resposta a esta questão, apresentou as seguintes anotações:

K não é divisível por 3, pois 3 não divide 97 e 167;

K não é divisível por 5, pois 5 não divide 97 e 167;

K não é divisível por 11, pois 11 não divide 97 e 167;

K não é divisível por 13, pois 13 não divide 97 e 167;

Por fim, K não é divisível por 17, pois 17 não divide 97 e 167.

Aluno 6 emprega algoritmos de divisão em relação a cada um dos fatores de K para indicar a impossibilidade de divisão por qualquer dos números candidatos. Como já se indicou nesta análise, a estratégia representa o que Zazkis e Liljedahl (2004) chamam de “considerações que não são essenciais para responder” questões deste tipo (p. 173), uma vez que a aplicação direta do TFA bastaria, em função da representação pretensamente transparente de K, para refutar a possibilidade de divisão pelos números candidatos. Isto equivale a dizer que, de fato, a representação mostrou-se opaca para o estudante em relação à característica “decomposição em fatores primos, de forma única, a não ser pela ordem”.

5.1.4.7 Resposta de Aluno 7

Para Aluno 7, a resposta fornecida indicou: *“Não, pois ao fatorarmos o número 16199, vai resultar em 97×167 , que são primos, mas nenhum dos números citados na questão é divisor de 16199”*.

Trata-se de um caso de uso indireto do TFA. Aluno 7 vale-se da representação do número, que percebe como transparente, dada por sua decomposição em fatores primos, para indicar que tais fatores não podem ser decompostos, por sua vez, por meio dos números candidatos. Ao proceder desta forma, o estudante evita o emprego de algoritmos ou de regras de divisibilidade, além de outros recursos de maior gasto cognitivo.

5.1.4.8 Resposta de Aluno 8

Aluno 8 fornece a seguinte resposta à questão: *“ $K = 16199 = 97 \times 167$ ”*.

Em sua única anotação sobre a questão, Aluno 8 apenas reproduz a representação a partir da qual o número é indicado no enunciado do problema. Desta forma, considera-se que o mesmo não respondeu à questão.

5.1.4.9 Resposta de Aluno 9

Os números 97 e 167 não são múltiplos de 3, 5, 11, 13 e 17, então k não pode ser divisível por eles.

A resposta de Aluno 9 tem as mesmas características daquela dada por Aluno 7, ou seja, a representação do número, dada por sua decomposição em fatores primos, foi utilizada para concluir que os números candidatos não poderiam ser divisores de K . No sentido da decomposição do número K em fatores, a representação parece ser transparente. Não há, porém, indicação de que a decomposição única em fatores primos de K tenha sido empregada.

5.1.4.10 Resposta de Aluno 10

A resposta de Aluno 10 apontou: “ *K não é divisível por 3, 5, 11, 13 e 17. K só é divisível por 97 e 167, uma vez que são os fatores que o compõem. E sendo primos, não possuem outros divisores*”.

Aluno 10 traz uma resposta em relação à qual é possível evidenciar o uso direto do TFA. Interessante que, na questão anterior, cuja representação também era equivalente, o estudante preferiu outra estratégia. Aventa-se, então, que o fato de o enunciado dizer, claramente, que os fatores seriam primos tenha inclinado o estudante a lançar mão deste conhecimento.

5.1.4.11 Análise das respostas da questão 4

De forma geral, Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 8 responderam incorretamente ao problema. Os dois primeiros erraram na aplicação de regras de divisibilidade, o que acabou por provocar erros que foram classificados por Zazkis e Liljedahl (2004) em uma categoria chamada genericamente de *misapplication of divisibility rules*, ou seja, ‘aplicação errônea de regras de divisibilidade’. Ainda que o erro possa revelar descuido ou distração, deve-se reconhecer que o uso do TFA seria capaz de evita-lo, à medida que não solicitaria que quaisquer regras fossem aplicadas individualmente aos números candidatos. Ainda uma vez, cabe destacar, principalmente no caso de Aluno 1 e Aluno 9, a incapacidade de conferir significado à definição que os mesmos proveram em relação aos números compostos, enunciada na questão 1, fato que não foi, no caso destes estudantes, minimizado pela representação do número K . Retorna-se, aqui, às cogitações acerca da incapacidade de perceber o caráter sistêmico do conhecimento matemático, como indicado por Sierpinska (2000), o que dificulta a aplicação consistente de regras e de saberes, em geral,

aprendidos/usados em certos contextos em outros, no âmbito de problemas distintos. Aventa-se, também, pela concordância às conclusões de Zazkis e Liljedahl (2004), quando afirmam que “não há representações transparentes para os números primos” (p. 166), o que pareceu dificultar sobremaneira as reflexões de alguns estudantes.

A resposta de Aluno 4, por sua vez, pode ser classificada como incompleta (só tratou sobre um dos números candidatos da lista, o 17) e reveladora de uma estratégia exaustiva, do ponto de vista cognitivo: usar todos os candidatos como potenciais divisores de K , conferindo o resto da divisão inteira. A esta estratégia, Zazkis e Liljedahl (2004) chama *reasoning by examples* (raciocínio baseado em exemplos). Usada como meio para chegar a respostas no problema em questão, esta estratégia é muito pouco compensadora e pode chegar a ser impraticável, dependendo da quantidade de verificações necessárias, as quais seriam evitadas pelo emprego do conhecimento advindo da compreensão do TFA.

Aluno 3 e Aluno 5 apresentaram respostas corretas que não puderam ser analisadas com maior profundidade, uma vez que, apesar das recomendações, os mesmos não apresentaram justificativas.

Os estudantes Aluno 6, Aluno 7, Aluno 9 e Aluno 10 apresentaram respostas corretas com as respectivas justificativas. Aluno 6 opta por uma estratégia exaustiva (e desnecessária, dado que o conceito de números compostos lhe era familiar), procedendo as operações de divisão que julgou necessárias em relação a cada número candidato. Aluno 7 e Aluno 9 aplicaram o TFA indiretamente, abolindo o uso de algoritmos e regras desnecessárias. Aluno 10 aplica o TFA diretamente, referindo-se à decomposição de K em fatores primos de forma única. No caso destes últimos três alunos, as respostas foram concisas e diretas, uma vez que seus criadores compreenderam a relação entre o significado do conceito e sua aplicação.

5.1.5 Questão 5

A quinta questão examinada e trabalhada pelos estudantes trazia, como enunciado, a seguinte sentença: “examine uma lista de números, tais como 8^2 , 17^2 , 17^3 , 234^3 , 234^6 , $5^2 \times 17^2$, $5^3 \times 7^2$, $5^6 \times 17^2$, p^3 com p primo, c^3 com c composto, e decida quais números da lista são, ou poderiam ser, quadrados perfeitos”

5.1.5.1 Resposta de Aluno 1

Não há resposta identificável no protocolo apresentado pelo estudante. Ao que parece, o aluno tenta realizar alguns cálculos, inclusive em relação à raiz quadrada dos números da lista, tentando uma estratégia do tipo *reasoning by examples* (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2000). Pouco se pode inferir disto, a não ser a dificuldade que o aluno tem na aplicação da ideia de decomposição dos números em fatores primos, conforme se pode ver na figura 8.

Figura 8: Protocolo de resolução do problema 5 – Aluno 1

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. The work is organized into three horizontal sections. The top section contains the expressions 8^2 , 17^2 , $5^2 \times 17^2$, $5^6 \times 17^2$, and 6^3 . The middle section contains $\sqrt{5^2} \times \sqrt{17^2}$, the number 2125, and $36 \rightarrow$ a. Puroto. The bottom section contains the calculation $5 \times 17 = 85$.

Fonte: dados da pesquisa

Em relação a esta questão, nenhuma resposta foi provida por Aluno 2 e Aluno 3.

5.1.5.2 Resposta de Aluno 4

Anota como possíveis números quadrados perfeitos 8^2 , 17^2 , 5^6 , 5^2 e 7^2 , sendo que os três últimos não compõem a lista dada. Tem a ideia de que números elevados a potências pares são quadrados perfeitos, mas não consegue avançar no sentido de assinalar nesta categoria também os produtos de quadrados perfeitos, como $5^2 \times 17^2$. Zazkis e Liljedahl (2004) e Zazkis e Campbell (1996) discutem que a representação dos números de forma transparente ou opaca depende daquilo que se pretende em relação aos mesmos. Especificamente, a representação na forma $5^2 \times 17^2$, que poderia ser transparente com relação à categoria “decomposição em fatores” surge como opaca quando se pretende avaliar se o número é quadrado perfeito. Além disso, o não reconhecimento de outros números que poderiam ser representados na forma n^2 conduz à conclusão de que, em alguns casos, as notações podem agir como substitutas para as entidades conceituais, chegando mesmo a “suplantar” a necessidade das mesmas (HAREL; KAPUT 1991 apud ZAZKIS; CAMPBELL, 1996). Adicionalmente, deve-se indicar que a decomposição do número em fatores primos não foi considerada pelo estudante.

Aluno 5, que deveria ter sua resposta analisada em seguida, nada anotou nesta questão.

5.1.5.3 Resposta de Aluno 6

A resposta dada por Aluno 6 foi a seguinte:

Todo número elevado a expoente par gera um quadrado perfeito, então:

$$8^2, 17^2, 243^3 = (18^2)^3 = (18^3)^2, 243^6 = (18^3)^2$$

$$5^2 \times 17^2, \text{ pois pode ser escrito como } (5 \times 17)^2$$

$$5^6 \times 17^2 \Rightarrow (5^3 \times 17)^2$$

Portanto, somente os números acima são quadrados perfeitos.

Aluno 6 parte de uma premissa que parece desconsiderar a decomposição de um número em fatores primos. No caso, passa a tentar escrever os números candidatos como potências de expoentes pares e inclui, indevidamente, 243^3 na lista. Se tivesse recorrido ao TFA, poderia anotar $243^2 \times 243$, ou, ainda, $243 \times 243 \times 243$. Em seguida, poderia escrever alguma forma do número 3^5 , o que indicaria ser esta a única decomposição em fatores primos admitida para 243. Além disso, o estudante aplica erroneamente algumas propriedades de potências ao escrever $243^3 = (18^2)^3 = (18^3)^2$. O mesmo ocorre com 243^6 , que, apesar de ser quadrado perfeito, deveria ser escrito como $243^2 \times 243^2 \times 243^2$, ou seja, $(3^5)^2 \times (3^5)^2 \times (3^5)^2$, e não como $(18^3)^2$. Tais erros podem ser incluídos na categoria chamada por Zazkis e Liljedahl (2004) de *misapplication of algorithms*. A mesma tentativa é efetuada, com sucesso, em relação a $5^2 \times 17^2$ e $5^6 \times 17^2$. Todavia, a estratégia em questão é desnecessária, já que bastaria constatar a decomposição em fatores primos para concluir corretamente em todos os casos.

5.1.5.4 Resposta de Aluno 7

Para Aluno 7, “ 8^2 e 17^2 são quadrados perfeitos, porém não entendi o resto do enunciado da questão”.

Ainda aqui, Aluno 7 substitui o conceito de números quadrados perfeitos pela notação n^2 , como Aluno 4, parecendo não ser capaz de avançar em relação a correlações com números sob outros expoentes ou de usar o TFA para efetuar suas verificações. A substituição do conceito pela notação denota sua gravidade: o aluno simplesmente nada faz além dos números que, pela representação com características transparentes, lhe parecem explicitamente, por assim dizer, quadrados perfeitos.

O próximo estudante desta análise seria Aluno 8, mas o mesmo nada anotou como resposta.

5.1.5.5 Resposta de Aluno 9

Para esta questão, Aluno 9 preferiu listar sua resposta na forma de itens, como segue:

$8^2 = \text{é um quadrado perfeito};$

$17^2 = \text{é um quadrado perfeito};$

$17^3 = \text{não é um quadrado perfeito};$

$234^3 = \text{não é um quadrado perfeito};$

$234^6 = \text{é um quadrado perfeito};$

$5^2 \times 17^2 = \text{é um quadrado perfeito};$

$5^3 \times 7^2 = \text{não é um quadrado perfeito};$

$5^6 \times 17^2 = \text{é um quadrado perfeito}.$

Não consegui entender 100% o enunciado

As anotações de Aluno 9 dão a entender que o mesmo preferiu dispender um maior esforço operatório ao verificar se os números eram quadrados perfeitos, provavelmente por meio de algoritmos ligados às operações de potenciação e multiplicação. Percebe-se que o estudante não está seguro acerca de sua resposta, anotando que seu entendimento a respeito da questão não seria “100%”. Mais especificamente, as representações opacas p^3 e c^3 não recebem qualquer tratamento.

5.1.5.6 Resposta de Aluno 10

A resposta de Aluno 10, à semelhança de seu colega anterior, proveu uma lista com suas propostas:

$8^2 = 64 \text{ quadrado perfeito};$

$17^2 = 289 \text{ quadrado perfeito};$

$17^3 = 4913 \text{ não é quadrado perfeito};$

$234^3 = 12812904 \text{ não é quadrado perfeito};$

$234^6 = 164170508913216 \text{ quadrado perfeito};$

$5^2 \times 17^2 = 7225 \text{ quadrado perfeito};$

$5^3 \times 7^2 = 6125 \text{ não é quadrado perfeito};$

$5^6 \times 17^2 = 4515625 \text{ é quadrado perfeito}.$

Aluno 10 indicou, por suas respostas anteriores, ter certa compreensão acerca da decomposição de números compostos em fatores e até sobre o TFA, bem como enunciou de forma coerente os conceitos de números primos e de números compostos. Ainda assim, o

estudante prefere efetuar uma série de operações para confirmar se cada um dos números candidatos poderia ser classificado como quadrado perfeito. Este resultado do afastamento, por assim dizer, dos conceitos relacionados ao TFA também foi encontrado nos trabalhos de Zazkis e Liljedahl (2004) e Zazkis e Campbell (1996). Da mesma forma, a possibilidade de que algumas das representações disponíveis tenham caráter opaco para os estudantes ganha força.

5.1.5.7 Análise das respostas da questão 5

De maneira geral, cinco sujeitos não deram quaisquer respostas à questão, denotando, em um primeiro momento, dificuldades conceituais em relação aos tópicos envolvidos. Deve-se referir, em relação a isto, que alguns dos números candidatos apresentados por meio de representações vistas como opacas concorreram para que esta questão apresentasse o maior número de ausência de respostas entre todas: para parte dos sujeitos, $5^6 \times 17^2$, por exemplo, não se parece com o conceito de quadrado perfeito que detêm, baseado na notação n^2 , a qual, segundo Zazkis e Liljedahl (2004) atua como substituta para o conceito. Aluno 4, Aluno 6 e Aluno 7 indicam respostas incompletas, algumas delas com erros conceituais em outros tópicos, como propriedades da potenciação, por exemplo. Além disso, estes alunos também revelam dificuldades em perceber a representação de boa parte dos números candidatos como promissora no sentido de identificar quadrados perfeitos com o uso do TFA.

De outro modo, Aluno 9 e Aluno 10 testam, por meio de operações, a condição de quadrados perfeitos de cada um dos números candidatos, revelando um dispêndio operacional e cognitivo desnecessário. Assim como os colegas, nesta questão, tais estudantes não empregaram, ao menos de forma identificável, o TFA: a decomposição dos números candidatos em fatores primos ajudaria imensamente na visualização da possibilidade de os mesmos serem ou não quadrados perfeitos.

Outra observação de caráter geral se refere ao fato de nenhum dos sujeitos ter respondido à parte que questionava se p^3 , com p primo, e c^3 , com c composto, poderiam ser quadrados perfeitos. Nitidamente, a opacidade da representação envolvida pareceu desempenhar um papel fundamental na ausência de propostas. Evidentemente, o uso do TFA em outros números candidatos poderia levar os estudantes a perceberem uma resposta com certa facilidade: $p^3 = p^2 \times p$; como p é primo, não pode ser decomposto em outros fatores que não sejam 1 e p , logo, como corolário do TFA, p^3 não pode ser quadrado perfeito; $c^3 = c^2 \times$

c; como *c* é composto, pode ser decomposto em fatores primos, de forma única; sabe-se que c^2 é um quadrado perfeito, logo, para que c^3 seja quadrado perfeito, *c* deve sê-lo, igualmente. Logo, c^3 será quadrado perfeito, se e somente se, o número *c* for quadrado perfeito

Justamente aqui, então, cabe compreender em que medida as representações do quadrado perfeito assumem características opacas ou transparentes. Quando Zazkis e Gadowsky (2001) ampliaram em relação aos números a noção de estruturas opacas/transparentes introduzida por Lesh, Behr e Post (1987) originalmente para sistemas representacionais de ordem mais ampla, indicaram, como já se esclareceu, que todas as representações numéricas são opacas, no sentido de que enfatizam certas propriedades, características e relações em detrimento de outras, que ficam menos evidentes (OLIVEIRA, 2015). Entretanto, ainda que opacas, as representações numéricas têm características transparentes, justamente em relação às características que enfatizam – é o caso da representação $G = 2k$, transparente em relação à paridade de *G*, mas opaca no que tange à divisibilidade de *G* por 5.

Outra expansão deste conceito vem de Oliveira (2015), quando indica que uma representação numérica com características transparentes depende da apropriação conceitual dos sujeitos que a manipulam, o que equivale dizer que podem se tornar opacas quando isto não ocorre (a apropriação). Uma razão para tal fato, segundo o autor, pode ser encontrada em casos nos quais as notações agem, para os sujeitos, como substitutas das entidades conceituais, na forma apontada por Zazkis e Campbell (1996, apud HAREL; KAPUT, 1991). De fato, estes autores comentam, ao analisar a mesma questão trazida aqui, que “a notação B^2 servia como substituta para a entidade conceitual relativa ao quadrado perfeito” (p. 211).

Consequentemente, como em alguma medida também ocorreu na pesquisa aqui relatada, parte dos sujeitos reconheceu apenas números na forma B^2 como quadrados perfeitos, descartando representações como B^2A^2 e B^6 . Para Oliveira (2015), só tem sentido classificar a características da representação como transparentes se o conceito que as mesmas representam não foi substituído por uma notação pelos sujeitos envolvidos, ou se os mesmos compreendem e sabem empregar os conceitos subjacentes a um problema, tarefa ou atividade. Se ocorreu a substituição ou se as pessoas não construíram efetivamente o significado dos conceitos, a representação, via de regra, é opaca. Isto explica o motivo pelo qual alguns sujeitos reconhecem, por exemplo $5^6 \times 17^2$ como quadrado perfeito sem procederem algoritmos operatórios, enquanto outros não.

5.1.6 Questão 6

O enunciado da questão 6, última do instrumento, continha a seguinte proposta: “Considere $m(2k + 1)$, onde m e k são números inteiros. Este número é primo? Ou, poderia, de alguma forma, ser primo?”.

5.1.6.1 Resposta de Aluno 1

Para Aluno 1, “*de imediato, não dá para saber, mas se fizermos $m = 1$ e $k = 9$, por exemplo, ou se adotássemos $k = 14$ e $m = 1$, o resultado seria um número primo*”.

Para Aluno 1, a representação de $m(2k + 1)$ não favorece a generalização, no sentido de perceber em que casos o número em questão poderia ser primo. Assim, o estudante toma dois exemplos e os alinha como casos nos quais o número candidato poderia ser primo (*reasoning by examples*). Ainda uma vez, Aluno 1 não estende um conceito (de número primo, especificamente) de modo a deixar claro que compreendeu seu significado, pois *sempre* que $2k + 1$ for primo e $m = 1$, $m(2k + 1)$ será primo, pois 1 e o próprio número são os únicos fatores componentes de um número primo. Há, ainda, evidentemente, o caso m primo e $2k + 1 = 1$, se se admite $k = 0$.

5.1.6.2 Resposta de Aluno 2

Este número poderia ser um número primo.

Aluno 2 não esclarece como chegou a tal conclusão.

5.1.6.3 Resposta de Aluno 3

Aluno 3 anota, como resposta, “*Sim, se $m = 2$ e $k = 1$, então seria um número primo*”.

Assim como Aluno 1, Aluno 3 tenta usar um exemplo para chegar a uma resposta (caso particular), sem estender sua conclusão de forma genérica. Em todo o caso, a proposta do aluno contém um erro, pois, no caso mencionado, ter-se-ia $2.(2.1 + 1) = 6$, que não é primo. O estudante pode ter querido escrever $1.(2.2 + 1) = 5$, que é primo. Ainda assim, levando-se em conta um eventual engano ou descuido, o estudante não recorre ao quadro conceitual típico do TFA, procurando um caso particular que apresenta à conta de justificativa.

5.1.6.4 Resposta de Aluno 4

Para Aluno 4, em sua resposta: “dentro desta expressão, podemos obter vários números, até mesmo o número 1, o qual não é necessariamente primo”.

A resposta de Aluno 4 pode dar a entender que o número 1 pode, eventualmente, ser primo – esta afirmação seria o complemento lógico de “não necessariamente primo” e é evidentemente incorreta. O descarte da abordagem conceitual, ou seja, do uso do conceito de números primos – ou do emprego do TFA – parece não permitir uma resposta mais objetiva e teoricamente consolidada. Na verdade, a argumentação do estudante carece mesmo de sentido e não pode ser encarada como uma resposta válida para a proposição levantada na questão.

5.1.6.5 Resposta de Aluno 5

O número poderia ser primo.

Aluno 5 não esclarece como chegou a tal conclusão.

5.1.6.6 Resposta de Aluno 6

A resposta de Aluno 6 foi a seguinte:

Seja $m(2k + 1)$, onde m e k são números inteiros. Escrevendo $2km + 1$, $2km$ resultaria em um número par, pois todo número multiplicado por 2 resulta em um número par, se m for ímpar, há a possibilidade de resultar em um número primo. Por exemplo, seja $m = 1$ e $k = 5$; então $1(2 \cdot 5 + 1) = 11$, que é primo.

A estratégia eleita por Aluno 6 é confusa e eivada de erros. Não usa o TFA ou o conceito de números primos para perceber a única fatoração possível que daria ao número a condição de primo (a trivial), e que, neste caso, lhe permitiria responder corretamente e em pouco tempo. Percebe-se, de todo modo, a aplicação errônea da propriedade distributiva, quando o estudante escreve $2km + 1$ no lugar de $2km + m$. A estratégia de usar um exemplo como meio de validação (ou de generalização) leva a severas limitações do conhecimento, como se pode perceber pela resposta do sujeito.

O próximo que teria sua resposta analisada, o estudante Aluno 7, alegou não ter entendido a questão e não anotou qualquer resposta.

5.1.6.7 Resposta de Aluno 8

Testa três casos, nos quais, respectivamente, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 15$, com m sempre igual a 1. Conclui que o número é primo. Tipicamente, neste caso, o aluno parece achar que poderia prover um resultado geral acerca de um problema tomando alguns de seus casos, em uso típico da estratégia denominado por Zazkis e Liljedahl (2004) de *reasoning by examples*. Ao contrário dos demais colegas que procuraram responder à questão, não procura contraexemplos, mas exemplos que tipifiquem sua escolha. A representação do número em epígrafe se apresenta ao sujeito como opaca (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2004); assim, todo o esforço em desenvolver a expressão em termos numéricos (Figura 9) se configura como uma tentativa de superar a opacidade representacional em favor de uma representação transparente.

Figura 9: Protocolo de resolução do problema 6 – Aluno 8

6) $m(2k+1) \Rightarrow 1(2 \cdot 2 + 1) ; 1(2 \cdot 3 + 1) ; 1(2 \cdot 15 + 1)$
 $m=1$
 $k=2$
 $k=3$
 $k=4$
 $k=15$

$1(5)$	$1(7)$	$1(31)$
5	7	31

$\text{é um número primo.}$

Fonte: dados da pesquisa

5.1.6.8 Resposta de Aluno 9

Para esta questão, Aluno 9 responde “*Ele pode ou não ser primo, dependendo do valor de m e k , por exemplo; $m = 2$, $k = 2$, não é primo; o número será primo quando $m = 1$ e $k = \{1, 2, 3, 5, 6, \dots\}$ ”.*

Apesar da tentativa de dar um ar de generalidade à sua resposta, o estudante também adota uma estratégia do tipo *reasoning by examples*, mostrando um caso em que $m(2k + 1)$ não é primo e os casos nos quais seria. Quando anota as reticências ao final da sequência numérica, dá a entender que fez ver alguma regularidade nos números componentes de seu conjunto, o que não é verdade.

5.1.6.9 Resposta de Aluno 10

As únicas anotações de Aluno 10 à guisa de resposta para esta questão trazem as expressões “ $m(2k + 1)$; não”.

Não há uma justificativa para a resposta dada, errada, e não é possível compreender que raciocínios Aluno 10 empregou para chegar à conclusão apresentada.

5.1.6.10 Análise das respostas da questão 6

A evidência da opacidade de uma representação numérica assumiu proporções bastante evidentes nas descrições relativas às respostas providas pelos sujeitos ao questionamento feito no item seis. De fato, a maior parte dos estudantes recorreu a uma estratégia que não prevê validação ou generalidade, ainda que tais características não tenham sido solicitadas diretamente. Este procedimento foi denominado *reasoning by examples* por Zazkis e Liljedahl (2004), e consiste em procurar casos nos quais se possa comprovar localmente um dado resultado, entendendo que tal procedimento já garante uma resposta válida em certo sentido. Esta questão pedia uma reflexão fundamental, a de que aos números primos resta uma fatoração, conhecida como *fatoração trivial*, da qual participam o número em si e o um.

5.2 Sobre as análises do instrumento

Além das correlações teóricas e observações já indicadas ao longo do processo de análise aqui conduzido, julgou-se importante construir uma síntese, no intuito de clarificar o que se pode ver como resultados, ao menos em relação aos experimentos realizados.

Entretanto, antes de uma discussão mais direta acerca dos resultados mencionados, é importante destacar a relevância da organização didática relativa ao trabalho realizado com os sujeitos. O caráter problematizador das questões foi fundamental para que os sujeitos evidenciassem suas estratégias de resolução de modo a proporcionar evidências levantadas nas análises aqui trazidas. Ao descreverem, na maior parte dos casos, suas propostas, foi possível criar correlações com o quadro teórico empregado na pesquisa. É provável que os exercícios tradicionais não levassem ao mesmo efeito. Esta diferenciação, nem sempre clara, é vista aqui a partir da convicção de que, quando propõe um problema, o professor/pesquisador deseja que o aluno busque, investigue, utilize a intuição, aprofunde o conjunto de conhecimentos e experiências anteriores e elabore uma estratégia de resolução; em contrapartida, via de regra, exercícios pedem a aplicação mecânica de informações e algoritmos já adquiridos e fáceis de identificar (VILA; CALLEJO, 2007). Na maior parte das vezes, também, um problema não fornece todos os meios imediatos à sua resolução, prestando-se, portanto, à investigação; de outro modo, o exercício já costuma trazer consigo os meios de resolução. Nesta investigação, os problemas foram apresentados em

representações desafiadoras, fazendo com que os estudantes lançassem mão não de recursos que indicassem respostas prontas e fáceis, mas de exames profundos sobre as questões em foco. Ainda que as estratégias definidas tenham dado conta de dificuldades e de limitações em relação ao conhecimento sobre os números primos e o TFA, representaram uma produção autônoma, realizada não para dar uma satisfação sobre o conhecimento ao professor, mas para evidenciar um saber – ou a falta dele.

Em relação ao “não saber”, as dificuldades conceituais ligadas à teoria dos números surgiram de forma intensiva a partir das respostas dos sujeitos. Boa parte delas, segundo se apontou, pode ser atribuída à incompreensão relativa ao TFA. Em apenas poucas respostas o teorema fundamental da aritmética foi empregado de forma identificável, mesmo quando os estudantes mencionavam a decomposição em fatores, que é, conforme já apontado, diferente da decomposição singular em fatores primos. A maior parte das estratégias adotadas priorizou constatações por meio de algoritmos operacionais, aplicação de regras de divisibilidade, busca por exemplos, substituição de conceitos por notações e outras estratégias menos eficientes. Também surgiram alegações em torno da paridade/imparidade de certos números, além de “regras” não convencionais, instituídas em ocasiões em que erros ocorreram, como foi o caso daquela segundo a qual todo número terminado em algarismo primo seria primo e que uma representação do tipo $F = 151 \times 157$ teria F como incógnita. Ainda assim, considera-se que semelhantes respostas representam momentos importantes do processo, pois fazem parte da construção do conhecimento. A abundância deste tipo de dificuldade, aliás, não representou uma exclusividade: como já se apontou, Edwards e Zazkis (2002) identificaram erros e dificuldades na maior parte dos protocolos dos sujeitos de sua pesquisa – 19 em 27.

Para Oliveira (2015), a dificuldade conceitual se manifesta de maneira mais perceptível quando a evidência de incompreensão acerca do significado de uma noção surge explícita ou implicitamente. Isto pode explicar a dicotomia entre enunciar o conceito de forma correta, como ocorreu em grande parte nas respostas dos sujeitos desta pesquisa, e a incapacidade de aplica-lo em situações problematizadoras – o que também ocorreu aqui em grande medida. Com resultados bastante semelhantes, Zazkis e Liljedhal (2004) comentam que “a compreensão acerca dos números primos apareceu de forma incompleta, inconsistente, frágil, dirigida por algoritmos e significativamente influenciada por exemplos particulares” (p. 180).

Estas ocorrências permitem aventar como ocorreu a constituição destes enunciados, incapazes de se estabelecerem pelo significado. Para aqueles sujeitos que os repercutiram sem compreendê-los, levanta-se a questão da representação transparente/opaca que supostamente permeou o processo de aprendizagem destes temas para estes sujeitos. Este conceito foi trazido no quadro teórico desta investigação na expectativa de prover elementos desta discussão. Como foi discutido, Zazkis e Liljedahl (2004) e Oliveira (2015) indicam não existirem representações transparentes para os números primos, dada a natureza mesma do conceito, mas que certas características tendem a ser transparentes – a possibilidade de decompor o número em fatores primos de forma única e evidenciar tal representação é um exemplo. Ainda assim, o domínio conceitual surge como imprescindível: sem dominar os conceitos em evidência, mesmo a mais transparente das características pode carecer de sentido.

Pode-se perguntar legitimamente se a trajetória escolar dos sujeitos não interferiu em eventuais dificuldades, no que se refere ao tratamento didático ao qual foram submetidos quando o tema lhes foi apresentado. Chama a atenção o recurso intensivo à aplicação de algoritmos, uso de exemplos limitadores e de regras de divisibilidade. Um fato que poderia ser investigado em ulteriores pesquisas poderia ser a influência do contrato didático⁸ ao qual os sujeitos foram submetidos e a influência disto na formação inicial dos licenciandos em Matemática. Por exemplo, a insistência na ideia de divisibilidade por outros números naturais em um longo processo de verificação de primalidade, nem sempre eficaz, pode indicar consequências do *deslize metacognitivo*⁹, um efeito deletério do contrato didático, pois, para determinar se um número é primo ou não, eventualmente pode-se submetê-lo a divisões sucessivas por seus antecessores e, no caso de se encontrar um divisor, a conclusão é a de que o número é composto. Ao adotar esta técnica como forma de identificação dos compostos, o conceito relativo aos mesmos é ignorado.

Além disso, não é possível determinar com exatidão que efeitos de ordem deletéria do contrato didático ocorreram a partir dos dados que emergiram da aplicação destas atividades,

⁸ O conceito de contrato didático pode ser definido como “uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro” (BROUSSEAU, 1986, p. 51).

⁹ Para Brousseau (2008), o *deslize metacognitivo* é um efeito do contrato didático pelo qual o professor engendra e/ou utiliza determinada técnica considerado útil para solucionar uma categoria de tarefas e passa a considerá-la como o objeto de estudo em si, afastando-se do conhecimento que se queria consolidar. O que se quer dizer aqui é que os elementos de estudo considerados passam a ser as explicações e heurísticas desenvolvidas pelo docente.

mas foi possível perceber que a natureza dos questionamentos presentes neste instrumento (assim como no anterior) soava *estranha* para os participantes da pesquisa. Pode-se aventar, ainda que outras pesquisas devam disto se ocupar, que os contratos didáticos predominantes no caso dos sujeitos não previam investigação para resolução de problemas. Nesta investigação, o papel do pesquisador foi apenas de mediador/orientador em relação a eventuais dúvidas sobre os enunciados – o que praticamente não ocorreu. O caráter investigativo da proposta causou alguma perplexidade nos sujeitos, que não se sentiram como em uma aula tradicional, com as prescrições de papéis relativos ao que o professor deve fazer (expor e indicar respostas, positivamente) e o que cabe ao aluno (absorver o conteúdo por reprodução). Pode-se dizer que as sessões transcorreram com tranquilidade, no sentido de que os estudantes não reclamaram, por exemplo, de não terem acesso a um conteúdo prescritivo antes das aplicações, ou a exemplos que lhes guiassem ou instruissem a imitar.

Outra questão, ainda pertinente ao contrato didático, pode ser destacada a partir da natureza das atividades. Como se viu, diversas dificuldades vieram à tona, muitos erros foram cometidos, além de procedimentos que, ainda que não tenham redundado em erro, diretamente, representaram grande dispêndio cognitivo e operatório. Esta situação não é comum no dia-a-dia da sala de aula, ou seja, a evidenciação e o trabalho com o erro, quer em um sentido cognitivo, quer do ponto de vista diagnóstico. Isto porque é comum que os trabalhos e atividades no ambiente escolar sejam controladas pelo professor, no sentido de impedir o surgimento do erro e controlar a incerteza no processo de aprendizagem. Neste sentido é que se poderia enxergar a ocorrência do efeito Topaze¹⁰, de maneira regular, na trajetória de aprendizagem dos estudantes. Esta percepção, contudo, é uma pista, algo que parece ocorrer como um “pano de fundo” das situações trabalhadas ao longo das sessões desta pesquisa. Ainda uma vez, ressalta-se que semelhantes impressões devem ser aprofundadas em estudo vindouro.

Especificamente, pode-se pensar na questão da ruptura do contrato didático ligada ao trabalho com os números primos, os quais, em grande parte, representaram o interesse desta investigação. A definição intuitiva de números primos (intuitiva em todos os sentidos, pois até

¹⁰ O *Efeito Topaze* (controle da incerteza) ocorre quando o estudante, ao encontrar determinada dificuldade, recebe do professor “dicas” e intervenções de tal modo que surjam as condições para que supere o percalço em questão e prossiga, sem, contudo, obter efetiva compreensão e engajamento em relação à situação de aprendizagem. Para Almouloud (2007, p. 94), “a resposta que o aluno deveria dar é determinada de antemão e o professor escolhe as questões para as quais essa resposta pode ser dada ou que podem provocar respostas esperadas, facilitando as estratégias dos alunos e maximizando a significação dessas respostas”.

a palavra “primo” pode não ser objeto de análise e ficar associada à noção de parentesco, e não à de primalidade) é apresentada bem cedo no ensino fundamental. Por ser um conceito matematicamente profundo, sua apresentação em um momento inicial do nível de escolaridade pode relegá-la ao esquecimento com o passar do tempo, sem que se atinja um nível de formalização matemática de acordo com a importância desse assunto. Junte-se a isso o fato que a aritmética também perde seu espaço no ensino fundamental com o a introdução da álgebra. Nos sétimos, oitavos e nonos anos, os conceitos importantes ligados ao número primo não são associados ao estudo de frações, nem ao estudo de gráficos, ou, tampouco, a questões geométricas. Durante o ensino médio, o importante conceito da existência de infinitos primos em progressões aritméticas geralmente não faz parte dos conteúdos associados a este tema. Números primos não são vistos, via de regra, associados a matrizes, a equações lineares, etc. Até mesmo no nível superior, o importante teorema dos números primos não está contido nos estudos de limites. Logo, a Teoria dos Números, quando proposta a partir de problematizações e do consequente estudo de seus pressupostos, acaba sendo identificada como geradora de temas e problemas cujas representações trazem caráter opaco, o que gera dificuldades. Desta maneira, muitos licenciandos têm dificuldades em adaptar-se a essa abordagem, o que se verificou aqui.

Uma das características apresentadas pelos estudantes e evidenciadas nas análises, e da qual já se tratou aqui, é o recurso que os alunos fazem, com grande frequência, a técnicas de resolução baseadas em divisibilidade e na verificação simples por meio de operações aritméticas (divisão e multiplicação, predominantemente). Na maioria dos casos, os estudantes pareciam não perceber qualquer teorema, recorrendo logo aos procedimentos algorítmicos típicos. O que se quer dizer como isto é que as estratégias exaustivas de verificação foram um procedimento muito empregado pelos licenciandos em Matemática, sujeitos desta pesquisa. De fato, várias vezes os estudantes recorreram a algoritmos e regras para suprir a dificuldade em empregar o teorema fundamental da aritmética. As listas de números foram exaustivamente checadas, de modo a refutar ou confirmar certa conjectura por meio de grande dispêndio cognitivo operatório. Notadamente, de formas distintas, as questões podiam ter propostas de resolução a partir do pressuposto de que se poderia decompor os números candidatos em fatores primos de maneira única, a não ser pela ordem.

Entretanto, as atividades e seu planejamento, em atenção à característica problematizadora adotada, nem sempre ofereciam, pelo menos a boa parte dos sujeitos, representações

numéricas às quais os mesmos poderiam considerar detentoras de características transparentes. Ao substituírem as entidades conceituais por notações (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996; OLIVEIRA, 2015), as representações de números compostos fatorados e de números que poderiam ou não ser classificados como quadrados perfeitos surgiam como opacas. Neste sentido, as principais notações substitutas de conceitos aqui encontradas foram:

- a) N^2 , em relação aos quadrados perfeitos;
- b) *Fatoração*, em relação ao TFA – em relação aos números compostos, quando os estudantes se referiam aos fatores de um dado número, sem mencionar sua decomposição única em primos. Este procedimento acabou por provocar efeitos que ocorreram também nos trabalhos que serviram de referência a esta pesquisa: a ideia de que números primos devem ser pequenos (menores do que 100, seguramente; às vezes, menores que 20), e a convicção de que todo número composto grande (maior do que 10000) é divisível por um número primo pequeno (ZAZKIS; LILJEDAHN, 2004).

Assim, a falta de transparência representacional surgiu neste estudo como uma dificuldade que, interiorizada pelos estudantes da forma indicada anteriormente, mostrou ser um entrave significativo para a construção do conhecimento acerca dos números primos e do teorema fundamental da aritmética.

Ainda com relação aos estudos que subsidiaram de forma direta a realização deste trabalho, outras ocorrências coincidentes surgiram:

- Primalidade por exclusão: aqui, tem-se uma classificação dos primos que se baseia em características impeditivas da primalidade (ou para que o número fosse composto). Nas definições dadas à questão 1 desta sequência, muitos sujeitos indicaram ter como conceito o fato de que os primos *não* podem ser divididos por nenhum outro número, a não ser o próprio e um. Isso levou os estudantes da nossa pesquisa, assim como em Zazkis e Liljedahl (2004), a ignorar a fatoração trivial de um dado primo p , dada por $p \times 1$. Isto colaborou para a dificuldade da maioria dos sujeitos em generalizar a possibilidade de $m(2k + 1)$ ser primo sempre que $m = 1$ e $2k + 1$ primo. Na mesma questão, alguns sujeitos indicaram, também, que a relação existente entre primos e compostos era de oposição, ou seja, um número composto simplesmente o era pelo fato de *não* ser primo, e vice-versa;

- Primalidade por meio de exemplos: a tentativa de generalização de números cuja representação surgia com opaca foram frequentemente tentadas por meio de exemplos. Foi o caso de Aluno 1, ele afirmou que $F = 151 \times 157$ seria, provavelmente, primo, em função de já o ter “testado” em relação a todos os critérios de divisibilidade conhecidos dele, e de Aluno 7, que tomou apenas “casos ideais” para afirmar que $m(2k + 1)$ seria sempre primo, uma vez que os números pelos quais substituiu k fizeram resultar $m(2k + 1)$ primo;
- Primalidade como uma consequência da fatoração: nos casos de referência e/ou uso da fatoração, frequentemente não existiram elementos suficientes para construção do significado do TFA, mesmo em aplicações corretas – além do mais, como em Zazkis e Liljedahl (2004), os algoritmos empregados pelos estudantes, bem como todo o esforço operatório envidado como consequência, seriam desnecessários caso estivessem consolidados os conceitos relativos ao TFA.

Concluída as análises pertinentes a esta investigação, encerram-se os procedimentos da pesquisa em si, restando, como seguem, as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A trajetória realizada nesta pesquisa trouxe inúmeras oportunidades de revisita aos conceitos da Teoria dos Números, por vezes vistos como óbvios, muito simples, fáceis, a tal ponto que a necessidade de os estudar em profundidade tem sido praticamente ignorada nos programas de formação dos professores de Matemática nos cursos de Licenciatura no Brasil – e, como se viu pelas referências deste estudo, em outros países também.

Assim, os primeiros destaques deste momento final do texto devem ir para duas constatações importantes, percebidas em função das análises efetuadas por meio do instrumento de pesquisa utilizado: os números primos não apresentam, de fato, como já levantado por Zazkis e Liljedahl (2004), qualquer representação que seja transparente; e as dificuldades conceituais levam os aprendizes a substituírem os saberes organizados na forma de conceitos e seus significados por notações, estas últimas limitantes em relação à resolução de problemas.

Entretanto, mesmo sendo opacas, as representações dos números primos podem oportunizar características transparentes, quando os aprendizes se engajam em um processo de construção do conhecimento que considere a valorização dos significados e dos conceitos. Quando isto não ocorre, percebe-se, como no caso do teorema fundamental da aritmética, que há o apelo a soluções extensas e caras, cognitivamente falando. Boa parte dos erros constatados tiveram origem na dificuldade em estender os conceitos de números primos e compostos – e do TFA – desde seus significados, de certa forma enunciados formalmente em questões específicas, para os problemas que solicitavam o uso deste aporte cognitivo.

As dificuldades levantadas ao longo desta pesquisa também forneceram outras pistas: a insistência em técnicas prescritivas, o uso de algoritmos desnecessários e a checagem das respostas, mesmo as corretas, como se, por exemplo, pudesse existir qualquer outra decomposição em fatores primos que não a única evidenciada no problema em exame, indicam a possibilidade de que os sujeitos da pesquisa tenham passado, em suas formações pretéritas, por contratos didáticos prescritivos, nos quais a ocorrência de efeitos como o deslize metacognitivo e o efeito Topaze pareceu evidente. Neste sentido, será preciso que estudos posteriores venham a confirmar a relação entre, por exemplo, as dificuldades conceituais e certas abordagens didáticas.

Além disso, a pesquisa trouxe à tona a centralidade de duas questões em aberto, discutidas na Educação Matemática de forma ampla. A primeira é que as pesquisas procuram revelar “o que” um professor de Matemática precisa saber e a outra, “como” essa aprendizagem pode ser efetuada em termos de programas de formação.

Nos protocolos analisados, os resultados foram determinantes tanto no sentido de consolidar a pertinência da investigação desenvolvida, quanto para refinar os elementos que possibilitaram responder à questão de pesquisa. Diante dos resultados das análises, então, parece importante destacar que outras investigações sobre saberes dos licenciandos em Matemática são urgentes.

Outra conclusão pode ser vista na proposta de Sfard (1992) e seu modelo de desenvolvimento dos objetos matemáticos, o qual, segundo o autor, passa por três fases: interiorização, condensação e reificação. Um conceito é formado a partir da realização de determinados processos sobre um conjunto de objetos, processos esses que vão sendo interiorizados, condensados e posteriormente reificados, resultando em um novo objeto matemático. O processo desenvolvido nesta pesquisa apontou a dificuldade de reificação, em geral, e sugeriu que algum ponto ou nível particular esteja "fora do alcance" para alguns alunos, pelo menos no momento da formação que vivenciam.

Esta dificuldade foi ilustrada no caso de decomposição de um número composto em seus fatores primos. O número 30, por exemplo, pode ser decomposto como 6×5 , 3×10 ou 2×15 . Como pode se ver, a decomposição não é única. A unicidade dessa decomposição se dará apenas se o número for completamente decomposto em fatores primos. É esta diferença da decomposição entre fatores e fatores primos que precisa de um trabalho mais amplo do ponto de vista didático e de outras pesquisas. O conceito de decomposição em fatores primos – e a unicidade deste procedimento – é o conceito chave para que o aluno diferencie números primos de compostos. Se os conceitos de primos e compostos não foram adequadamente construídos, essa ocorrência provavelmente inibirá uma conceituação significativa de decomposição em primos, bem como o reconhecimento de representações que dependam de conhecimentos assim constituídos.

Outro elemento que pode ser levantado se refere à constatação de que os estudantes não estão habituados a pensar e manipular números primos grandes. Com base nas experiências em classe e no fato desse assunto ter apenas breves apresentações na escola

básica e seu uso posterior se limitar a exemplos não muito complexos, não se vê nenhuma preocupação com primos vistos como grandes (maiores que 1000, por exemplo). Os problemas propostos nos livros didáticos deixam a entender que uma pequena quantidade de primos basta para esgotar este tema – e estes números são, geralmente, os primeiros naturais primos. A pesquisa demonstrou ser necessária uma compreensão adequada do conceito de decomposição em fatores primos para avançar no sentido de que se entenda a estrutura dos números inteiros.

Assim, julga-se que seria importante para os futuros professores a compreensão sobre a importância do significado do TFA. Neste trabalho, fez-se uma discussão dos aspectos matemáticos envolvidos neste teorema. Zazkis e Campbell (1996) admitem que a prova do TFA pode ser omitida em cursos para professores de Matemática do ensino básico, mas argumenta que alguma alternativa pedagógica é necessária como compensação. Levanta-se aqui, como possibilidade de continuidade desta investigação, outros estudos que procurem investigar se uma abordagem de validações (provas e/ou demonstrações) pode ser eficiente no sentido de trabalhar aspectos conceituais da teoria dos números, uma das questões essenciais vistas ao longo deste texto.

Na apresentação do TFA para os alunos de licenciatura em matemática da UEPA, utiliza-se, como alternativa pedagógica, para exemplificar a importância do TFA no conjunto dos inteiros, além de caracterizar bem o que é um número primo neste conjunto, a seguinte *história*:

A Aritmética no Reino da Rainha de Copas

Vamos contar uma história, adaptando para a nossa linguagem matemática.

Certo dia a Rainha de Copas, chamou novamente os matemáticos do seu reino e queria informar que apenas os números pares seriam usados no reino. Ela já havia abolido do reino os números negativos e o zero. Caso não obedecessem, ela mandaria lhes cortar as cabeças.

Os matemáticos ficaram horrorizados com essa decisão, mas por amarem mais suas cabeças do que suas equações, solicitaram um tempo para reescreverem todos os livros de Aritmética.

Os sábios da academia estabeleceram que no currículo só seriam usados números pares:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Agora, vamos entender essa “realidade” onde só existam esses números. Observe que em P podemos adicionar, subtrair e multiplicar da forma usual e a soma, a diferença e o produto de números pares são novamente números pares. Vamos estabelecer uma divisibilidade em P . Mas, não se deve esquecer que nesta realidade” a palavra “número” significa sempre um número par.

Podemos definir números primos nessa “realidade”. Dizemos que um número p em P é um primo se não é divisível por nenhum dos números em P a não ser ele mesmo. Por exemplo, aqui estão alguns primos.

$$2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \dots$$

Consideremos agora dois fatos no conjunto dos inteiros que parecem óbvios aos licenciandos quando são apresentados:

i) No conjunto dos inteiros, se um primo p divide um produto ab então ou p divide a ou p divide b . Agora vamos trazer esta afirmação para a “realidade” em P e considerar o primo 6 e os números $a = 10$ e $b = 18$. O número 6 divide $ab = 180$, uma vez que $180 = 6 \cdot 30$; mas 6 não divide 10 e nem divide 18. Portanto, a afirmação “óbvia” não é verdade aqui na “realidade” em P .

ii) Consideremos o fato de que todo número inteiro pode escrito como um produto de números primos de maneira única (a menos da ordem dos seus fatores).

Em P , todo número pode ser escrito como um produto dos primos de P . Mas considere a seguinte fatoração:

$$180 = 6 \times 30 = 10 \times 18.$$

Observe que todos os números 6, 30, 10 e 18 são primos em P . Isto significa que 180 pode ser escrito como um produto de primos em P de duas maneiras diferentes. De fato há ainda uma terceira forma de escrevê-lo como um produto de primos em P ,

$$180 = 2 \times 90.$$

Ao apresentar essa “realidade”, os futuros professores são levados a perceber que afirmações que parecem óbvias em matemática requerem uma discussão mais crítica. Especialmente, qualquer “fato” que deve ser verdade, porque é muito familiar ou é frequentemente citado como verdade, precisa de um escrutínio matemático mais cuidadoso. Algumas das respostas dadas às questões utilizadas neste trabalho confirmam essa observação.

As respostas, na sua maioria corretas, sobre a definição de números primos não resultaram na implementação desse conhecimento para resolver ou conjecturar sobre outras questões. Saber definir o que é um número primo, de forma mecânica, ou saber citar alguns primos, em nada auxilia nas respostas sobre se os números 949643, $11111111+2$ e $6622^{2266} - 26$ são primos.

Como foi visto, a falta de uma representação transparente sobre números primos e o TFA criam obstáculos na construção desses conceitos. Em algum aspecto, também, a substituição de conceitos por notações também foi sinalizada como dificuldade. Isto não quer dizer que não se deva priorizar a discussão sobre o uso de notações relativas aos temas aqui discutidos. Como afirmam Lesh, Behj e Post (1987), uma boa notação é importante para entender ideias matemáticas. Skemp (2002) escreve:

O poder da matemática que nos permite entender, prever, e às vezes controlar eventos no mundo físico está em suas estruturas conceituais - na sua presença em nossa linguagem do dia a dia, nas suas redes organizadas de ideias. Essas ideias são objetos puramente mentais: invisíveis, inaudíveis, e não é facilmente acessível mesmo aos seus possuidores. Antes que possamos comunicá-las, as ideias devem se apegar aos símbolos. Estes têm um duplo estatuto. Os símbolos são objetos mentais, sobre qual e com o qual podemos pensar. Mas eles podem também ser objetos físicos - marcas em papel, sons - o que pode ser visto ou ouvido. Estes servem tanto como rótulos e como alças para comunicar os conceitos com os quais eles estão associados. Símbolos atuam como uma interface, de duas maneiras: entre o nosso próprio pensamentos e os de outras pessoas; e entre aqueles níveis da nossa mente, que são de difícil acesso, e aqueles facilmente acessível. Embora o poder da matemática encontra-se em suas estruturas de conhecimento, o

acesso a este poder é dependente de seus símbolos. Daí a importância de se compreender o simbolismo da matemática. (SKEMP, p. 90, 2002, tradução nossa).

Isso indica que se deve ajudar os alunos a reconhecer padrões em diferentes representações e propor situações em que prestar atenção a esses padrões facilite a compreensão dos conceitos cuja a simbologia não seja considerada transparente para o estudante.

Uma sugestão didática de Zazkis e Campbell (1996) é fazer com que os estudantes trabalhem com representações diferentes das usuais para números grandes, de tal forma que as mesmas não possam ser resolvidas com uma calculadora manual, como alguns que foram propostos na sequência. Os autores sugerem que, para muitos estudantes, a incapacidade de verificar a sua inferência com uma calculadora apresenta inconveniência e desafio. Outro elemento importante surgiu quando se indicou a relevância de um *milieu* antagonista como parte de um contrato didático não prescritivo. Os autores supramencionados indicam que a prática diante de problemas desafiadores pode ajudar os sujeitos a perceberem características transparentes nas representações numéricas.

As análises levam a considerar uma tomada de posição diante dos desafios. A afirmação de Lamon (2001) deve ser levada muito a sério para os que pesquisam em Educação Matemática: “a pesquisa em Educação Matemática tem sido mais lenta em sugerir alternativas do que em diagnosticar as deficiências dos estudantes” (LAMMON, 2001, p. 149). É importante, então, que as próximas pesquisas busquem prosseguir a partir do diagnóstico que esta exibiu, de forma a propor alternativas que venham efetivamente a colaborar para as lacunas na formação de professores de Matemática que aqui ficaram evidenciadas.

Dadas as considerações aqui feitas e, principalmente, de acordo com o que se levantou nas análises, em confronto com o quadro teórico, considera-se que a presente investigação apresentou algumas alternativas como possíveis respostas à questão relativa aos *conhecimentos e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética que seriam mobilizados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará*. Desta forma, esta pesquisa se insere como uma contribuição nas discussões sobre a relação entre a transparência do conceito de número

primo e do TFA e as representações em que esses conceitos são codificados. Pesquisas em Teoria dos Números quase não existem no Brasil. Assim, acredita-se que esta pesquisa possa estimular investigações sobre as representações, com foco naquelas pertinentes aos números primos, de modo a apresentar uma visão teórica para a consideração dos efeitos que a representação tem sobre a aprendizagem matemática.

Outro prosseguimento possível que esta pesquisa levanta remete a investigações sobre o entendimento dos números primos e do TFA e, em particular, sobre o entendimento estrutural do conjunto dos números inteiros, bem que papel as representações desempenham na aprendizagem de conceitos específicos em teoria dos números, e na Matemática em geral.

Nessa perspectiva, espera-se que a presente investigação tenha se aproximado das pesquisas na área e contribuído no sentido de proporcionar reflexões em um campo ainda pouco explorado em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

- AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter. **Proofs from THE BOOK**. Berlin, New York: Springer-Verlag. 2010
- ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007
- ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999
- ANDRADE, Celana Cardoso. HOLANDA, Adriano Furtado. **Apontamentos sobre pesquisa qualitativa e pesquisa empírico-fenomenológica**. *Estud. psicol. (Campinas)* [online]. 2010, vol.27, n.2, pp. 259-268. ISSN 0103-166X. <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-166X2010000200013>. Acesso em 02/11/14
- ATKIN, A.; BERNSTEIN, D. **Prime Sieves using Binary Quadratic Forms**. *Mathematics of Computation*, Providence - Rhode Island - USA, v. 73, p. 1023-1030, 2004.
- ÁVILA, G. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral**. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- ÁVILA, G., **A distribuição dos números primos**. *RPM* 19, 1991
- BALL, D.. **Teacher learning and the mathematics reforms**. *Phi Delta Kappan*, 77, 500–509. 1996
- BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais- Matemática 5ª a 8ª série**. Brasília: SEF, 1998.
- BROUSSEAU, G.: **Theory of Didactic Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990**, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, (trans, and eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1997.
- BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.
- BROUSSEAU, G. **Fundamentos e métodos da didática da matemática**. In: BRUN, Jean (Org.). *Didática das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da Teoria das Situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino** [tradução Camila Bogéa]- São Paulo: Ática, 2008.
- BROWN, Anne. **Patterns of thought and prime factorization**. In *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*, edited by Stephen Campbell and Rina Zazkis. Westport: Ablex publishing, pp. 131-137, 2002.

BROWN, A.; THOMAS K.; TOLIAS, G. **Conceptions of divisibility: Success and understanding**. In Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction, edited by Stephen Campbell and Rina Zazkis, Westport: Ablex Publishing, pp. 41-82, 2002.

BROWN, P. G.. **The Bachet Equation**. Parabola Volume 31, Issue 2 (1995). Disponível em <http://www.parabola.unsw.edu.au/1990-1999/volume-31-1995/issue-2/article/bachet-equation> Acesso em 26/10/2014.

CAMPBELL, S. R. **Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding**. In S. R. Campbell and R. Zazkis (Orgs.), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction. Westport, CT: Ablex Publishing, pp. 15-40, 2002.

CAMPBELL, S. R. **Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra**. In R. Zazkis & S. R. Campbell (Orgs.) Number theory and mathematics education: Perspectives and prospects. Lawrence Erlbaum Associates, pp. 19-40, 2006

CAMPBELL, S. R.; ZAZKIS, R.. **Toward number theory as a conceptual field**. In Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Orgs.) Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction. Westport, CT: Ablex Publishing, pp. 1-14, 2002.

CLÍMACO, Humberto de Assis Clímaco. **Geometria e Aritmetização da Grécia Antiga à Matemática Moderna; contribuições desta história para a Educação Matemática atual**. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011.

COUTINHO, S. C., **Números inteiros e criptografia RSA**. IMPA-SBM, 2000.

DUNHAM, W. Euler: **The Master of Us All**. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

DUBINSKY, Ed. **Reflective abstraction in advanced mathematical thinking**. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95-126). Boston: Kluwer Academic, 1991.

EDWARDS, L.; ZAZKIS, R. **What do students do with conjectures? Preservice teachers' generalizations on a number theory task**. In S. R. Campbell; R. Zazkis (Orgs.), Learning and teaching number theory. Westport, CT: Alex, pp.139-155, 2002.

ERATOSHENES. **Encyclopaedia Britannica**. Disponível em <http://global.britannica.com/EBchecked/topic/191064/Eratosthenes-of-Cyrene>. Acesso em 14/10/2013

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil**. Revista Zetetiké. n.1, mar (1995). Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

FONSECA, R. V. **Teoria dos Números**. CCSE/UEPA. 2011

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Boston: D. Reidel, 1983.

FRIEDERICH, D. M. J.; KRUGER, J.; NEHRING, C. M. **Compreendendo os Parâmetros Curriculares Nacionais como articulador da prática do professor dos Anos Iniciais em relação à Matemática**. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. Anais, 2009

GARBI, G., **A surpreendente série harmônica**, RPM 42, 2000.

GARCÍA, M. G. **Análisis de situaciones didácticas en Matemáticas**. Universidad Autónoma de Madrid, 2004. Disponível em http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/megome/cursos/Matemat/Infantil.htm, acesso em 27/10/14

GIL, A. C. **Estudo de caso**. São Paulo: Atlas, 2009.

GROENWALD, C. L. O.; SAUER, L. O., FRANKE, R. F. Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números. **Acta Scientiae**, v.7, n.1, p.93-101, 2005.

HEALTH, T. **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**. Cambridge: Cambridge University Press, 1885, 1910.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006

HONSBERGER, R. **Ingenuity in Mathematics**. New Mathematical Library, Random House / Singer 1970.

JAPIASSU, H. F. **O mito da neutralidade científica**. Rio, Imago, 1975 (Série Logoteca).

KALUZHININ, L. A. **The fundamental theorem of arithmetic**. Mir Publisher, 1979

KIRK, A. **Catching primes**. Disponível em <http://plus.maths.org/content/catching-primes>, 2008. Acesso em 14/10/2013.

KLEINER, I. **Fermat: The Founder of Modern Number Theory**. Mathematics Magazine v. 78, n. 1, 2005.

LAMON, S. J. Presenting and representing: from fractions to rational numbers. In A. Cuoco (Ed.). **The roles of representation in school mathematics**. 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 41–52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

LEIKIN, R. Learning by teaching: the case of the Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. In R. Zazkis and S. Campbell (Orgs.). **Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects** (pp. 115–140). Mahwah: Erlbaum, pp. 115-140, 2006.

LEITE, M. S. **Recontextualização e Transposição Didática** - Introdução À Leitura de Basil Bernstein e Yves Chevallard. São Paulo: Junqueira & Marin Editores, 2007

LESH, R., BEHR, M., POST, T. (1987). Rational Number Relations and Proportions. In C. Janiver (Ed.). **Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics** (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum (1987). Disponível em http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/87_3.html. Acesso em 02/11/2014.

LIPSCHUTZ, S. **Topologia Geral**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1971.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C.; COELHO, S. P. Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental. In: Actas del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática 2005. Porto: Editora da Associação de Professores de Matemática, 2005. v. 1, p. 1-12. CD-ROM.

MASON, J. What makes an example exemplary: pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. In: Zaskis, Rina and Campbell, Stephen R. (Orgs.), **Number theory in mathematics education: perspectives and prospects**. Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 41–68, 2006.

MARTINEZ, F.E.B.; MOREIRA, C.G.T.A.; SALDANHA, N.C.; TENGAN, E. **Teoria dos Números. um passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro**. Coleção Projeto Euclides, IMPA, 2013.

MOLINA, J. G.; OKTAÇ, A. **Concepciones de la Transformación Linear en contexto Geométrico**. RELIME, Mexico, v. 10, n. 2, pp. 241-273, 2007.

MORITZ, R. E. **On Mathematics and Mathematicians**. Dover Publications Inc. New York, 1958.

NERY, C.; POSSANI, C. **Os primos esquecidos**. RPM 47, 2001. SBM, SP.

OLIVEIRA, Gerson P. **Avaliação da aprendizagem em cursos on-line: colaboração e multidimensionalidade**. Tese de Doutorado (Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2007.

OLIVEIRA, G. P. **Representações e notações no trabalho didático com números inteiros**. No prelo. 2015.

OLIVEIRA, G. P.; SILVA, E. S. Transformação linear em um curso de licenciatura em matemática: uma proposta didática em estudo. In: XI Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática 2013. Curitiba: SBEM, 2013, v. 1. p. 1-14.

OLIVEIRA, G. P.; MASTROIANNI, M. T. M. R. Resolução de problemas nas aulas de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: a influência das concepções na prática observada. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v.2, n.2, 2013.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, 25, 105-132, 2006.

RANDRIANARISOA, T. H. **The Mordell Theorem**. Essay supervised by Prof. Florian Breuer to finalize study at the African Institute for Mathematical Sciences, 2001. Disponível em

<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=YWlscy5hYy56YXxhcmNoaXZlGd4Ojc2ZmNlY2IzZjM0YWIwOWU>. Acesso em 26/10/2014

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura**. Tese de Doutorado (Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2007.

RIBENBOIM, P. **Números Primos: velhos Mistérios e novos recordes**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

ROWLAND, T. **Generic proofs in number theory**. In S. Campbell and R. Zazkis (Orgs.) Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction. Westport, CT: Ablex Publishing, pp. 157-184, 2002

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÃO PAULO. **Secretaria de Estado da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias – Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio**, 2010.

SELDEN, A.; SELDEN, J **Reflections on mathematics education research questions in elementary number theory**. In S. R. Campbell and R. Zazkis (Orgs.), Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction. Westport, CT, Ablex Publishing, pp. 213-230, 2002.

SFARD, A. **Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function**. In G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), The concept of function (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America, 1992.

SIERPINSKA, A. **On some aspects of students' thinking in linear algebra**. In: DOURIER, J.L (ed.). On the teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 151-245.

SKEMP, R. R. **Mathematics in the Primary School**. Taylor & Francis e-Library, 2002.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

SOYDAN, G.; DEMIRCI, M.; IKIKARDES, N. Y.; CANGUL, I. N. Classification of the Bachet Elliptic Curves. **International Journal of Mathematics Sciences**, v.1, n. 4, 2007.

STEIN, S. K. **Mathematics: the man-made universe**. 2. Ed. Freeman: San Francisco, 1969.

STRUIK, D. J. **História concisa das Matemáticas**. 3 ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

TANNERY, P.; HENRY, C.; WAARD, C. **OEuvres de Fermat**. Paris: Gauthier-Villars et cie, 1891-1922.

TEPPO, Anne R. Integrating content in classroom Mathematics. In: CAMPBELL, S.; Zazkis, R. (Orgs.). **Learning and Teaching Number Theory**. Westport: Ablex Publishing, pp.117-130, 2002.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. R. Prime decomposition: understanding uniqueness. **Journal of Mathematical Behavior**, 15(2), 207-218. 1996.

ZAZKIS, R.; GADOWSKY, K. Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.). **NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics** (pp. 41-52). Reston, VA: NCTM, 2001.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S.R. Number Theory in mathematics education research: Perspectives and prospects. In ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. (Orgs.). **Number Theory in mathematics education: perspectives and prospects**. Lawrence Erlbaum Press, pp. 1-18, 2006.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHN, P. Understanding primes: the role of representation. **Journal for Research in Mathematics Education**, 35(3), 164-186. 2004.

ZAZKIS, R. Language of number theory: Metaphor and rigor. In CAMPBELL, S. R.; ZAZKIS, R. (Orgs.). **Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction**. Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing, pp. 83-96, 2002.