PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO PUC/SP

Jacinto Ordem

PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA: CONCEPÇÕES DE ESTUDANTES DA LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA EM MOÇAMBIQUE

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2015

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Jacinto Ordem

PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA: CONCEPÇÕES DE ESTUDANTES DA LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA EM MOÇAMBIQUE

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

SÃO PAULO

2015

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por me iluminar em todos os momentos de minha vida e proporcionar a realização do meu sonho inédito em toda minha linhagem.

Ao meu orientador, Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pela paciência, compreensão, e acima de tudo, pelo auxílio presente e desinteressado desde o mestrado em 2008 até ao presente momento para a minha formação acadêmica.

À Professora Doutora Adair Mendes Nacarato pelas valiosas contribuições que deu na minha qualificação como um dos componentes da banca.

Ao Professor Doutor Benedito António da Silva, por fazer parte da banca de qualificação e pelas contribuições para o andamento da tese.

Ao Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira, por ser um dos membros da banca qualificadora e pelas valiosas contribuições para o andamento da presente pesquisa.

Ao Professor Méricles Thadeu Moretti, por ter sido membro da banca e por ter encorajado para o prosseguimento da pesquisa.

À minha namorada Maria das Dores Monteiro, pela compreensão, paciência e encorajamento que sempre me proporcionou mesmo estando distante de mim e nos momentos em que fui ao meu país.

Ao meu sobrinho Jordão Tito Manuel depositário de minhas esperanças.

Ao grupo PEA-MAT, pelo acolhimento, pelas discussões e pelo aprimoramento que me proporcionou nos vários encontros.

Ao Programa de Convênio de Pós-Graduação Internacional da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES-PEC/PG, pela concessão da bolsa de estudos que permitiu a realização do meu sonho de cursar o doutorado, realização inédita no meio dos meus familiares mais próximos, quiçá, minha povoação de origem.

Aos meus colegas e amigos do grupo de pesquisa, em especial, a Kátia Vigo Ingar, Amari, Cleusiane Silva, Eliana Gomes, Rita Lobo, Cristiane, Maridete, pela simpatia e companheirismo que me proporcionaram durante os meus estudos de doutorado. Parabéns Kátia por teres sido a primeira, antes de mim, de concluir o doutorado e pelo encorajamento que sempre me proporcionaste durante toda a nossa convivência em São Paulo - Brasil.

Ao meu amigo e compatriota, Professor Dr. Guilherme Basílio, pela amizade que desfruto dele desde que nos conhecemos em 2008.

À mestra Lénia Mapelane, a compatriota, pela amizade e grande préstimo que me proporcionou no primeiro ano de doutorado traduzindo vários textos em francês.

Aos meus irmãos Rosário Ordem e Rafael Ordem, e suas esposas e seus filhos e filhas, pela compreensão e amizade fraternal que sempre me proporcionam.

À minha Irmã e todos os seus filhos e filhas incluindo netos e netas, pelo carinho que sempre me proporcionam e, sobretudo, a atenção quase de mãe, que minha irmã me proporciona.

Ao meu compatriota, Pedro Mateus, com qual convivi em todos estes anos compartilhando momentos de alegria e de aflição, pela amizade e grande préstimo que me proporcionou em momentos de angústia. Parabéns, Pedro, por teres conseguido concluir os teus estudos de doutorado, dentro do tempo e antes de mim, mesmo tendo começado os estudos de doutorado um pouco depois de mim. Tu és verdadeiro guerreiro, Prof. Dr. Pedro Mateus!

Aos estudantes de Licenciatura em matemática das delegações da Beira e Nampula que aceitaram participar da minha pesquisa, pelos valiosos dados que me proporcionaram.

Às Professoras Doutoras Maria José Ferreira da Silva (Zezé), Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pela amizade e contribuições para a minha formação acadêmica tanto no grupo de pesquisa PEA-MAT, quanto de docência nas disciplinas que cursei convosco.

Ao Professor Doutor Fumikazu Saito, pela amizade e aprendizagem que me proporcionou na área de História e Filosofia da matemática e um pouco da História da Ciência em geral.

A todos os professores do Programa de estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pela oportunidade que me proporcionaram de ser um dos seus discentes a aprender parte de seus conhecimentos e ensinamentos.

A todos os colegas de doutorado, pela oportunidade de poder conviver e partilhar momentos de aprendizagem.

Ao meu amigo Mussa Sualé, pelos grandes préstimos tanto em minha casa durante a ausência quanto às assistências técnicas que prestou ao meu instrumento de trabalho, o *notebook* bem como a amizade desinteressada.

À direção da Universidade Pedagógica de Moçambique, na pessoa do Magnífico Reitor Professor Doutor Rogério Uthui e a delegação da Beira na pessoa do seu diretor Professor Doutor Zacarias Ombe, pela oportunidade que me concederam ao autorizar minha continuação dos estudos.

À direção da delegação da Universidade Pedagógica de Nampula na pessoa do seu Diretor ajunto Pedagógico, Mestre Machado, por me ter proporcionado facilidades de poder coletar parte dos meus dados naquele local.

Aos meus colegas do Curso de Licenciatura em matemática, Professores Doutores Marcelino Caetano Luís e Adelino Evaristo Murimo, pelos valiosos contributos e préstimos durantes os meus estudos.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação,

Endereço meus sinceros agradecimentos – “Koshukhuru”

O autor

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar as concepções de prova e demonstração em geometria plana de estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique. É uma pesquisa de natureza qualitativa, cujo procedimento de coleta de dados se baseou em questionário e em entrevistas. O questionário é composto por uma sequência de tarefas exigindo a produção de provas e demonstrações e a avaliação de métodos de prova pelos sujeitos da pesquisa, em um primeiro momento. Em um segundo momento, os mesmos sujeitos são entrevistados sobre suas próprias produções – suas respostas. Para levar a cabo esta parte da pesquisa, cada sujeito conversa com o pesquisador sobre aquilo que fez, procurando-se perceber a fundo o sentido de suas produções. É essa coleta de dados articulando o questionário e as entrevistas que damos o nome de triangulação de método, terminologia emprestada de Araújo e Borba (2006). Participaram da pesquisa 19 futuros professores do 4° ano da Licenciatura em Ensino da Matemática, para séries finais do ensino básico – Ensino secundário – das delegações de Nampula e Beira. Ainda fez parte dos procedimentos metodológicos análises didáticas (a *priori* e a *posteriori*) das tarefas concebidas para o questionário. Como referencial teórico, utilizamos as ideias de Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométricos propostas por Houdement e Kuzniak; os Tipos de Prova propostos por Balacheff e os Esquemas de Prova avançados por Harel e Sowder. A análise dos resultados mostrou que: (i) os sujeitos não mostraram estratégias consistentes de produção de demonstrações, nem justificativas com embasamento matemático plausível – suas estratégias parecem mais influenciados pela abordagem da geometria nos livros didáticos adotados no ensino fundamental. (ii) os sujeitos lidam com provas e demonstrações como mais um tópico de aprendizagem em matemática e não como meio de comunicação e de validação em matemática. (iii) os nossos sujeitos não utilizam critérios consistentes para avaliar provas e demonstrações. (iv) os sujeitos da pesquisa têm uma concepção de que provas e demonstrações são simples rituais dissociadas de uma de suas funções principais, a de validar propriedades e conjecturas verídicas, ou de refutar conjecturas falsas. O estudo revela ainda que, entre os sujeitos da pesquisa, reina a concepção de que existem métodos empíricos que validam propriedades geométricas, mesmo que não sejam demonstrações, e métodos empíricos que não validam propriedades geométricas, consoante o tipo de instrumento utilizado. Em nossa perspectiva, podemos dizer a pesquisa é um contributo valioso para a Educação Matemática, em geral, e, particularmente para o contexto moçambicano, se atendermos que pesquisas deste gênero pouco se tem falado de sua realização para o público alvo a que ela esteve voltada. Portanto, acreditamos que os resultados podem levar a se repensar sobre o quadro institucional a que a disciplina de Geometria plana é encarada na Universidade Pedagógica de Moçambique.

Palavras-chave: Concepções de estudantes de Licenciatura. Prova e demonstração. Paradigmas Geométricos. Universidade Pedagógica. Geometria plana

ABSTRACT

This research aims to analyze the conceptions of proof and demonstration in plane geometry among undergraduate students in mathematics teaching at Pedagogical University of Mozambique. It is a qualitative research whose data collecting procedure was based on a questionnaire and interviews. The questionnaire consisted of a sequence of tasks requiring the production of proofs and demonstrations, and the evaluation of methods of proofs by the subjects, at first. In a second step, the same subjects are interviewed about their own productions – their responses. To carry out this part of study, each subject talks with the researcher about what he/she did, seeing to understand in depth the sense of his/her productions. This data collecting, articulating the questionnaire and the interviews, that we call triangulation of method, a terminology borrowed from Araújo and Borba (2006). Attended the research 19 prospective teachers in their 4th year of training in Mathematics Teaching, for final series of basic education – Secondary education – from Nampula and Beira Campus. Yet, took part of methodological procedures the didactical analyzes (*a priori* and *a posteriori* analyzes) of tasks designed for the questionnaire. As a theoretical framework of the study, we used the ideas of Paradigms and Geometrical Workspace proposed by Houdement and Kuzniak; the Type of Proofs, proposed by Balacheff, and Proof Schemes advanced by Harel and Sowder. The analysis of results showed that: (i) the subjects did not show consistent strategies of production of demonstrations, nor justifications with plausible mathematical foundation – their strategies seem to be more influenced by didactical textbooks adopted in elementary school geometry. (ii) the subjects deal with proofs and demonstrations another topic of mathematics learning and not as means of communication and mathematical validation. (iii) the subjects do not use consistent criteria for evaluate proofs and demonstrations. (iv) our subjects have conception that proof and demonstration are simple rituals dissociated from one of its main roles, that of validating true properties and conjectures, or rejecting false conjectures. The study also showed that among subjects, reins the conception that there are empirical methods that validate geometrical properties, even if they are not demonstrations, and empirical methods that do not validate geometrical properties, depending on the type instrument used. In our perspective, we can say that this research is a valuable contribution to Mathematics Education, in general, and, particularly to the Mozambican context, if we consider that research of this kind is scarce in Mozambique. Therefore, we believe that the results of the study may contribute to rethink about the way geometry is seen at Pedagogical University of Mozambique.

Key-words: Conceptions of undergraduate students. Proof and demonstration. Geometrical Paradigms. Pedagogical University. Plane Geometry.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

A demonstração[1] é o principal meio pelo qual a comunidade dos matemáticos valida os resultados de suas descobertas e, consequentemente, decide sobre que resultados serão aceitos como verdadeiros. Lakatos (1989) defende que por meio do processo de formulação, refutação e revisão de demonstrações, a prova matemática acaba sendo um meio pelo qual os matemáticos buscam novos conhecimentos. Por sua vez, Rav (1999) considera as demonstrações como o real coração da matemática. Bell (1976), de Villiers (1990, 1999, 2001, 2002) apontam o papel das demonstrações para a matemática. Contudo, segundo Niss (1999) várias pesquisas em Educação Matemática apontam que apesar da importância de que as demonstrações revestem para a Matemática, o processo do seu ensino e da sua aprendizagem é um dos mais difíceis em toda a Educação Matemática. Nesse caso, um dos desafios é: como ajudar os alunos a ter uma compreensão adequada do que é uma prova em matemática e, como aprimorar suas técnicas de demonstração (MARRANDES e GUTIÉRREZ, 2000).

Goetting (1995) afirma que os professores de matemática precisam estar cientes do impacto de suas práticas em seus alunos, aspecto muito importante a incutir nos professores de matemática em formação. Além disso, salienta que os futuros professores precisam saber e interiorizar desde a sua formação que argumentos baseados em evidências empíricas não são aceitos como demonstração em matemática.

Um dos aspectos considerado decisivo na atuação do professor em sala de aula tem a ver com suas concepções sobre determinado aspecto da matemática (PONTE, 1992). Em relação a este último autor, tomamos como aspecto específico as provas e demonstrações em Geometria Plana.

---

[1] Cabe lembrar que, neste trabalho, prova e demonstração não são conceitos matemáticos, mas são noções paramatemáticas, no sentido de Chevallard (1991, p.50), que não são, em geral, objeto de ensino explícito, nem tampouco são usualmente avaliadas: são saberes auxiliares, “ferramentas de estudo”. As noções matemáticas englobam objetos facilmente reconhecíveis nos contextos escolares, tais como as quatro operações, a equação de primeiro grau, as figuras geométricas, triângulos etc. Por essa razão que falaremos de noções de prova e demonstração neste trabalho.

Desse modo, decidimos abraçar para objeto de pesquisa de doutorado o estudo de concepções de prova e demonstração em geometria plana de estudantes do Curso de Licenciatura em Ensino de Matemática. Por concepções de prova e demonstração queremos nos referir ao domínio do conhecimento de conteúdo, ao significado que eles atribuem às provas e demonstrações; às estratégias que utilizam para produzi-las ou avaliá-las; ao papel que as atribuem para a aprendizagem da matemática escolar, bem como o modo como lidam com conjecturas geométricas.

Neste trabalho utilizamos os termos prova e demonstração segundo Balacheff (1987): por prova queremos nos referir a explicações aceitas por uma comunidade num dado momento, e demonstração, as provas aceitas pela comunidade dos matemáticos e, portanto, respeitando rigorosamente determinadas regras.

Esta investigação dá continuidade ao foco de estudo iniciado no mestrado, no qual, abordando a problemática de prova e demonstração em Geometria no contexto de Moçambique, analisamos material didático (livros didáticos de Matemática de 6ª a 8ª classes aprovados pelo Ministério da Educação para seu uso em escolas, nomeadamente: Draisma, J. e Sovertkov, P. (1991); Zavala, C.A.M e Issufo, D.S. (2005); Nhêze, I.C. (1998); Nheze, I.C. & Vi, V.T. (1991); Caravalho, R.F. e Martins, Z.A. (2007). Esse estudo constituiu um dos primeiros momentos em que refletimos com certa profundeza acerca das provas e demonstrações na prática escolar e, em particular, sobre como esse objeto de saber matemático é tratado nos livros escolares de Moçambique. Uma das constatações desse estudo é que a noção de prova em geometria estava presente em todos os livros analisados.

O estudo à volta das demonstrações incidiu sobre as praxeologias das organizações matemática e didática incorporadas nos livros.

À luz do referencial teórico que norteou o estudo, constatamos que, nesses livros didáticos analisados, predominam provas pragmáticas[2] segundo a classificação proposta por Balacheff (1987). Com efeito, o estudo focalizou três aspectos, todos eles com um olhar sobre a organização praxeológica,

[2] Expressão que Balacheff (1987) utilizou para designar o primeiro nível na gênese da construção da noção de prova matemática pelos alunos, em que se valem de recursos de ação tais coma figuras, observação de figuras para validar conjecturas matemáticas.

nomeadamente: (i) principais funções de prova; (ii) tipos de provas; e, (iii) articulação entre os registros de representação semiótica em atividades de prova. As propriedades de triângulos contempladas no estudo foram (1) a soma das medidas dos ângulos internos; (2) a desigualdade triangular; e, (3) a congruência de triângulos. O estudo constatou que uns livros validavam a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo a partir de atividades de recorte, dobradura ou simples medições; um livro simplesmente enuncia a propriedade, e outro enuncia a propriedade e apresenta a respectiva demonstração sem antes nenhuma atividade exploratória. Quanto aos critérios de congruência de triângulos, o estudo constatou três principais tendências dos autores dos livros analisados: ou o livro apresenta todos os critérios como axiomas; ou o livro baseia-se na ideia de sobreposição de figuras; ou o livro usa a ideia de isometrias. Em um livro o processo de institucionalização dos critérios simplesmente baseou-se em construções com régua e compasso ou transferidor. Quanto à desigualdade triangular o estudo constatou que apenas três dos cinco livros abordam explicitamente a propriedade, e em dois deles, a abordagem consiste em fornecer três números como supostas medidas de um triângulo, pedir que se construa um triângulo e, para cada resultado que se obtiver – possível ou não – comparar a relação da soma ou da diferença entre dois com o terceiro número. Para o terceiro livro, constatamos que a propriedade é apresentada como conhecida (ORDEM, 2010, p. 94). Quanto à propriedade do ângulo externo de um triângulo, apenas três livros tratam explicitamente dessa propriedade. Contudo, Ordem (2010) salienta que embora existam propriedades que são características de certo tipo de triângulos – os isósceles – a exploração de suas propriedades foi superficial e restringiu-se apenas a um livro didático.

Assim, movidos pelo desejo de aprofundarmos mais a reflexão em torno das noções de prova e demonstração no contexto moçambicano, decidimos complementar o estudo realizado com um estudo cujos dados fossem resultados de uma interação entre o pesquisador e os alunos no intuito de analisar concepções desses alunos sobre prova e demonstração.

Com público alvo estudantes do Curso de Licenciatura em Ensino de Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique, Delegações da Beira e de Nampula, o estudo tem como questão norteadora: **Quais concepções estudantes de Licenciatura em Matemática apresentam em situações que**

envolvem provas e demonstrações em Geometria plana?

O objetivo geral da pesquisa é analisar as concepções de prova e demonstração em geometria plana dos estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique e como objetivos específicos:

1. Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de licenciatura em matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações.

2. Identificar a função que estudantes de licenciatura em matemática atribuem à prova e demonstração em matemática.

3. Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em matemática.

4. Analisar que critérios utilizam para avaliar uma prova e demonstração em geometria plana ou argumentos que consideram convincentes que uma propriedade em geometria é válida.

O estudo compreende os seguintes capítulos:

O capítulo I apresenta nosso perfil profissional, o Sistema da Educação em Moçambique, um breve estudo histórico sobre a formação de professores em Moçambique pós-independência, o Ensino superior em Moçambique, o lugar da Universidade Pedagógica na formação de Professores, bem como uma visão da geometria dedutiva e apresentação da relevância do nosso estudo.

O capítulo II, apresenta dados de estudos realizados para subsidiar esta pesquisa.

No capítulo III, apresentamos e discutimos os seguintes aspectos: o referencial teórico que utilizamos neste trabalho, as noções de prova e demonstração adotadas; o sentido do termo concepção segundo Michèle Artigue; os tipos e esquemas de prova segundo Balacheff e Harel; Sowder, respectivamente; os conceitos de paradigma e espaço de trabalho geométricos segundo Houdement; Kuzniak que norteiam as análises dos resultados de trabalhos dos sujeitos da pesquisa; a relação entre a classificação de Balacheff e de Harel; Sowder. Finalmente, descrevemos como serão utilizadas, nesta tese, as ideias do quadro teórico para a análise dos dados da pesquisa.

No capítulo IV, apresentamos o delineamento da pesquisa destacando os objetivos e questão da pesquisa; a metodologia, os procedimentos de coleta e análise de dados e o perfil dos sujeitos da pesquisa.

No capítulo V, apresentamos as tarefas propostas aos sujeitos da pesquisa e sua respectiva análise didática, destacando os conhecimentos matemáticos necessários para cada uma delas; as possíveis formas de resolvê-las e algumas de suas variáveis didáticas na sua resolução. Apresentamos também a análise a *posteriori* de cada tarefa, acompanhada, sempre que possível e necessário, de dados da entrevista.

No capítulo VI, considerações finais, as conclusões e as limitações do estudo e perspectivas futuras. Finalmente, apresentamos as referências.

CAPÍTULO I: PERFIL PROFISSIONAL, SISTEMA DE EDUCAÇÃO EM MOÇAMBIQUE E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Nosso interesse por questões ligadas a provas e demonstrações surgiu, com muita força, quando começamos a cursar o mestrado profissional em ensino de Matemática, em 2008, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Nessa altura, encontramos discussões muito profícuas do grupo de pesquisa de que o nosso orientador é responsável – PEA-MAT – sobre a validação de conjecturas em Geometria. Essas discussões despertaram nossa atenção sobre a nossa vivência profissional anterior acerca das concepções e proficiências de nossos estudantes na instituição de formação de professores de que viemos. Nessas reflexões, também, surgiram, em nossa mente, conversas informais com nossos colegas do local de trabalho que não raras vezes lamentavam o desempenho muito fraco dos estudantes do curso da Licenciatura em Ensino de Matemática na disciplina de Geometria Plana: além das dificuldades com o domínio de vários conceitos da geometria plana, as dificuldades eram tremendas quando era pedido aos estudantes que produzissem demonstrações de algumas propriedades geométricas da Escola básica. O relato de nossos colegas não foi a única fonte de experiência, mas também a nossa própria prática foi fonte de inspiração quando lecionamos a disciplina "Matemática Escolar". Nessa disciplina, um dos tópicos abordados com os futuros professores é o método de demonstração por indução finita. Por força de hábito, o método era sempre precedido com aquilo que chamávamos de indução de fórmulas, atividade que consistia em explorar regularidade matemáticas para avançar com uma fórmula matemática cuja validade é objeto de exploração por meio de uma prova. Uma das atividades, muito frequente nessas aulas de introdução ao método de demonstração por indução, era a avaliação da fórmula $f(n) = n^2 - n + 41$, com n natural, se é um número primo ou não. Curiosamente com apenas poucas verificações, a resposta que sempre se ouvia era: sim, dá um número primo.

O que nos motivou a abraçar o tema não só foi o que acabamos de relatar, mas, sobretudo, como é que o nosso meio de trabalho – uma instituição voltada para formação de professores do ensino secundário e outros quadros da educação – encara a geometria plana enquanto uma área de conhecimento.

Ao longo dos oito anos efetivos de trabalho, constatamos que os nossos estudantes não têm sido encorajados o suficiente para realizarem trabalhos de conclusão do curso em geometria plana, porém, várias monografias estudando dificuldades na aprendizagem de outros tópicos específicos, tais como frações, funções, gráficos, inequações racionais, derivadas, logaritmos, etc., são muito frequentes.

Com a exceção da brochura “Teoremas Famosos da Geometria” de Gerdes e Cherinda (1991) em que os autores explicitamente afirmam esperar que despertassem o interesse pela geometria, estimulassem o estudo dessa bela e importante ciência e incentivassem os leitores a tentarem descobrir demonstrações dos teoremas enunciados, e Gerdes (1991a, b) “Cultura e Despertar do Pensamento Geométrico”, “Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação” respectivamente, nos quais o autor discute conceitos geométricos a partir do ponto de vista da etnomatemática, não achamos trabalhos feitos em Moçambique, que se propõem a incentivar o estudo da Geometria entre os formandos de Licenciatura em Ensino de Matemática e muito menos pesquisas que enveredam pelo estudo do estado das provas e demonstrações no contexto moçambicano.

Os programas de ensino – tanto do currículo geral da educação como do currículo de formação de professores da Universidade Pedagógica – não são muito claros sobre o papel e lugar que a atividade de prova e demonstração deve ter na matemática escolar, embora a contemplem. O Ministério da Educação e Cultura e o Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (MEC/INDE,2007), por meio do Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG), afirmam que um dos objetivos com a aprendizagem da Matemática é desenvolver “habilidades tais como: classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, deduzir, provar e julgar”. (MEC/INDE, 2007, p. 43), porém não apresentam nenhuma proposta sobre como isso pode ser desenvolvido na escola. Na proposta curricular do 2º Ciclo (ESG2 – 16-18 anos de idade) salienta-se que um dos objetivos é

> Desenvolver, nos alunos, hábitos de trabalho, rigor, precisão, ordem, clareza, criatividade, crítica, persistência, tolerância, cooperação e uso correto da linguagem matemática, preparando assim os alunos na perspectiva da continuação dos estudos nos níveis posteriores ou para sua inserção na vida laboral. (MEC/INDE, 2007, p. 53)

Os únicos documentos que davam certa orientação explícita de como trabalhar com argumentação[3] o que é argumentação) e prova [em Geometria], que tivemos acesso, são programas de Matemática da 6ª e 7ª classe que vigoraram até os princípios dos anos 2000, mas que atualmente deixaram de vigorar. Em relação à Geometria, afirma-se que:

> A unidade sobre geometria e cada unidade estão estruturadas de tal forma que os alunos possam justificar ou verificar todas as afirmações e conclusões, na base das propriedades e definições aprendidas anteriormente. Contudo, na 7ª classe, ainda não se podem exigir, duma forma geral, demonstrações lógicas rigorosas. (DRAISMA, J. & MANJATE, A. 1988, p. 100)

O documento em referência destaca explicitamente a importância do trabalho com argumentação e prova nas aulas de matemática. Para esse quesito, Draisma & Manjate (1988, p. 100) afirmam que “O professor deverá continuar a dar muita importância à explicação, justificação e verificação feita pelos alunos”. Mas, essa recomendação não é levada em consideração nos documentos curriculares da atualidade, senão apenas meras menções. Embora Pietropaolo (2005, p. 32) afirme que há uma grande diferença entre as prescrições em currículos oficiais e os currículos efetivamente praticados nas escolas, entendemos que a não explicitação do assunto nos currículos prescritos pode fazer com que não mereça a devida atenção nas aulas de Matemática.

A falta de clareza sobre como se deve abordar prova e demonstração em matemática escolar em Moçambique, contrasta largamente com os estudos sobre o tema na área de Educação Matemática. Por exemplo, os *Principles and Standards for School Mathematic*s emitidos por *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de 2000, defendem que no ensino da matemática escolar a atividade de argumentação e prova deve ser abordada em todos os níveis de escolaridade, desde o jardim de infância até ao ensino médio, como forma de evitar que os alunos enfrentem muitas dificuldades quando chegam à Universidade, local onde essa atividade é o centro da matemática praticada e

---

[3] Segundo Montoro (2007) uma argumentação é qualquer discurso empregue para tornar algo claro, um raciocínio que se emprega para convencer alguém. Contudo, há um consenso entre autores de que há diferença entre argumentação e demonstração em matemática. Posições epistemológicas bem divergentes são tomadas por Balacheff (1999) e Duval (1999). Porém, apesar da diferença, há outros autores (PEDEMONTE 2007; ANTONINI & MARIOTTI 2009; DOUK 2009, apud ORDEM 2010) defendendo que um trabalho inicial com argumentação favorece uma aprendizagem sem muitos sobressaltas das demonstrações em matemático.

ensinada. Nesse quesito, afirma-se nessas Normas:

> Programas de ensino desde pré-escola até a 12ª série devem permitir a todos os alunos:
> - reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da matemática;
> - fazer e investigar conjecturas matemáticas;
> - desenvolver e avaliar argumentos e demonstrações em matemáticas;
> - selecionar e utilizar diferentes tipos de raciocínio e métodos de demonstração, (NCTM, 2000, p. 56, tradução nossa).

Os mesmos documentos estipulam que

> Até o final do ensino secundário, o aluno deve ser capaz de compreender e produzir demonstrações - argumentos que consistem de deduções logicamente rigorosas de conclusões a partir de hipóteses - e deve distinguir o valor de tais argumentos (NCTM, 2000, p. 56, tradução nossa).

Seria desejável que fosse possível alcançar, para a maioria dos alunos ou quase todos, o que é estipulado por esses documentos, porém, há muitas pesquisas que mostram a prevalência de dificuldades com provas e demonstrações, inclusive entre estudantes universitários e professores (KNUTH, 2002a e 2002b; MARTIN e HAREL, 1989; CHAZAN, 1993; WEBER, 2003; entre outros). Contudo, o fato desses documentos explicitarem o trabalho com provas e demonstrações e suas implicações para a formação matemática dos alunos, é salutar porque não deixam o professor à deriva para tão importante conceito matemático.

Pietropaolo (2005) salienta, também, que durante as discussões que levaram à elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Brasil, um dos pontos era a inclusão de um trabalho efetivo com as demonstrações nas séries finais do Ensino Fundamental no Brasil. Segundo o autor, nessas discussões a ideia dos “pareceristas” era de que isso se poderia efetivar “[…] desde que esse tema fosse anteriormente discutido nos cursos de formação de professores” (p. 3).

Os argumentos de Pietropaolo dão mais subsídios às nossas pretensões para um estudo que envolve sujeitos em formação acerca de demonstração nos cursos de formação de professores.

Constatamos, também, que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Brasil (1998-99) deixam transparecer alguma ideia sobre a importância da inclusão de atividades de argumentação e prova, com variados graus de exigências, nos diferentes níveis de escolaridade. Por exemplo, sugerem que no terceiro ciclo do ensino fundamental se trabalhe no sentido de desenvolver a capacidade de argumentação, para que os alunos não se sintam satisfeitos apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las (p. 71); propõem que a produção de "provas" se baseie em experimentos com material concreto ou com a medição em figura. Já no quarto ciclo os PCN recomendam que se trabalhe no sentido de o aluno reconhecer a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas; destacam que as atividades de Geometria são propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que, a partir de experiências concretas, leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas (BRASIL, 1998, p. 126). Contudo, esses documentos afirmam que, apesar de se iniciar com o trabalho com algumas demonstrações [no terceiro e quarto ciclos], com o objetivo de mostrar sua força e significado, convém não se abandonarem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos. Os "*Principles Standards and for School Mathematics"* também enfatizam o valor das conjecturas ao afirmarem que: "Conjectura é uma importante via para a descoberta" (NCTM, 2000, p. 57, tradução nossa).

As discussões, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil, acerca da argumentação e prova, nos dão certo incentivo para o nosso contexto moçambicano. Mas sentimos que os mesmos documentos também esbarram em um ponto problemático: ao reconhecerem a importância das demonstrações para a validação e, ao mesmo tempo, defenderem que, no terceiro ciclo do ensino fundamental, as "provas" se baseiem em material concreto ou medições sem, porém, destacar as limitações desse procedimento em matemática que pode criar ideias inadequadas nos alunos, acerca dos procedimentos de validação em matemática. Esse fato é denunciado por certos autores (HEALY e HOYLES, 1998) como sendo uma das causas que faz que alunos recorram a exemplos para demonstrações em matemática mesmo em casos nos quais se espera uma demonstração (HAREL e SOWDER, 1998). Almouloud (2007b) relata também um episódio em que um grupo de professores do ensino fundamental II e médio, participando de formação continuada, teve dificuldades em identificar prova em livros didáticos, confundindo-a com figuras de ilustração.

Ainda, alguns autores, como Goetting (1995), defendem, e nós concordamos, que os futuros professores deviam sair dos cursos de formação sabendo diferenciar verificações empíricas e demonstrações. No entanto, Martin e Harel (1989) relatam, em seu estudo levado a cabo nos EUA, que mesmo depois de um curso focando demonstrações, apenas 10% de 101 futuros professores do ensino fundamental rejeitaram por completo todas as argumentações indutivas, quer dizer, cerca de 91 deles consideraram, em algum momento da pesquisa, um argumento baseado em exemplo como demonstração. Zhou e Bao (2009) constaram também que, alguns professores de matemática do ensino secundário cursando mestrado em uma universidade da China, mesmo tendo mostrado boa “alfabetização” em muitas tarefas inclusas na pesquisa sobre prova e demonstração, consideraram as evidências empíricas que o *software* mostra sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, como demonstração daquela propriedade.

Outro aspecto que, mesmo não sendo exclusivo à matemática, não tem menos importância na prática de ensino e aprendizagem, tem a ver com as concepções. Philipp (2007, p. 259) descreve o termo concepção como “uma noção geral ou estrutura mental que engloba crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais e preferências” (tradução nossa). Por sua vez, Ponte & Chapman (2006) afirmam que “as concepções podem ser vistas como elementos de natureza cognitiva que estruturam o conhecimento de cada indivíduo e que têm um papel decisivo na sua forma de pensar e de agir”. Nesse sentido, algumas pesquisas, incidindo sobre professores de matemática em exercício no ensino fundamental II ou médio (KNUTH, 2002a, 2002b), mostraram que os professores envolvidos naquela pesquisa realizada nos EUA, tinham uma concepção pragmática sobre as demonstrações: na universidade, demonstrações formais (apenas baseadas em construções dedutivas); no ensino médio, sobretudo para os alunos mais aptos, demonstrações menos formais (sem muito rigor); e no ensino fundamental, demonstrações informais (provas baseadas em evidências empíricas).

Tomando em consideração esses múltiplos aspectos mencionados por vários autores em educação matemática e documentos curriculares, delimitamos como foco de estudo as concepções de prova e demonstração de estudantes da licenciatura em ensino de matemática [em Moçambique].

Centramos nosso foco em geometria plana porque, para além de termos dito que é uma área de conhecimento que embora faça parte da grade curricular na formação de professores na Universidade Pedagógica de Moçambique, há pouco incentivo aos alunos para concluírem seus estudos da licenciatura com trabalhos voltados a essa área, sobretudo na Delegação da Beira. Como também destacam Ponte et al. (2006)

> A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. [...] As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações (p. 71)

Portanto, focando nosso trabalho nas concepções de estudantes no que diz respeito às provas e demonstrações em geometria plana, pretendíamos ver como exploram propriedades e conjecturas em geometria que Ponte et al. destacam como contribuindo para perceber aspectos essenciais da atividade matemática.

Depois da delimitação do objeto de estudo, passamos a apresentar, em linhas gerais, nossa trajetória profissional, o sistema educacional de Moçambique quanto à estrutura, formação de professores, particularmente a que se realiza na Universidade Pedagógica – instituição donde viemos - bem como alguns tópicos previstos nos programas oficiais de ensino sobre provas e demonstrações em geometria.

1.1. Nossa Trajetória Profissional

Antes, porém, queremos descrever sucintamente a nossa trajetória profissional. Começamos a exercer a profissão docente em 1984 como professor de Matemática de 5ª e 6ª classes do Antigo Sistema de Educação de Moçambique atualmente 6ª e 7ª classes do Ensino Primário do segundo grau, EP2, depois de ter frequentado um curso de formação de professores entre 1981 e 1983 na Escola de Formação e Educação de Professores de Chibututuíne. Essa instituição era a segunda do gênero existente em Moçambique para aquele nível de ensino. Passados 7 anos de trabalho, primeiro, na Escola secundária de Pemba entre 1984 e 1986; depois, no EP2 de Namahaca nos anos de 1987 e

1988; EP2 de Napipine, cidade de Nampula, em 1989 e na Escola Industrial e Comercial de “3 de Fevereiro” também na cidade de Nampula em 1990. Ingressamos em 1991 no Instituto Superior Pedagógico, que mais tarde passou a se chamar Universidade Pedagógica, em 1995, num projeto de Licenciatura em Educação Matemática para o Ensino Primário (LEMEP) concebido por um Professor moçambicano de origem Holandesa que por muito tempo militou na Frente de Libertação de Moçambique, FRELIMO, durante a luta de libertação nacional, Professor Doutor Jan Draisma, e sua esposa Dra. Frouke Draisma, mas que atualmente já regressaram ao seu país em que nasceram, a Holanda, porém, continuando ativos em Moçambique ainda no campo da educação. Ainda fez parte do grupo de organizadores desse curso LEMEP, uma professora portuguesa, a Dra. Joaquina Ferreira da Silva. Em 1995 concluímos o bacharelato e três anos mais tarde, em 1998, a Licenciatura. No ano de 2000 fomos convidados a trabalhar na Universidade onde fomos formados, na mesma Delegação da cidade da Beira, Província central de Sofala.

Como assistente estagiário começamos por acompanhar aulas do saudoso Professor Doutor Arie em 2000 e a partir de 2001 começamos a lecionar a disciplina de Matemática Escolar. Com o andar do tempo tivemos experiências com um pouco de Cálculo Diferencial e Integral em R, Teoria das Probabilidades, Estatística básica e Inferência Estatística e, depois do Mestrado com Geometria Euclidiana Plana, área que abraçamos atualmente como o nosso foco, com maior incidência para as provas e demonstrações. Todas as disciplinas elencadas são voltadas para a formação de professores.

Convém sublinhar que entramos para a Educação num momento em que a prioridade do país pós-independência estava centrada na educação e saúde após fuga maciça de quadros portugueses quando da Independência de Moçambique em 25 de junho de 1975.

1.2 Estrutura do Sistema de Educação em Moçambique

Nesta parte, passamos a apresentar de forma breve como está estruturado o sistema educativo de Moçambique. Mas, antes, vamos apresentar um pouco o país.

Moçambique, oficialmente República de Moçambique, é um país localizado no sudeste da África Austral, limitado a norte pela Tanzânia, a noroeste pelo Malawi e Zâmbia, a oeste pelo Zimbábue, a leste pelo Canal de Moçambique e o Oceano Índico, a sul e sudoeste pela África do Sul e Suazilândia.

Figura 1: Mapa de Moçambique

Fonte: http://www.girafamania.com.br/africano/materia_mocambique.html

Ex-colônia portuguesa, Moçambique obteve sua independência no dia 25 de junho de 1975. Administrativamente Moçambique compreende 11 províncias, incluindo a Cidade de Maputo – a Capital – e 151 distritos. O país não está totalmente municipalizado, possuindo atualmente 53 municípios que não cobrem todo o território nacional.

1.2.1. Os subsistemas do Sistema Nacional de Educação em Moçambique

A lei do Sistema Nacional de educação (SNE) estabelece 3 subsistemas: Ensino Pré-escolar, Ensino escolar e Ensino extraescolar.

O Ensino Pré-escolar: é da responsabilidade das creches e escolinhas do Ministério da Mulher e Ação Social (MMAS), das organizações não governamentais ou comunitárias e setor privado. As creches são para crianças de 0 a 2 anos de idade, as escolinhas ou jardins de infância para crianças de 2 a 5 anos de idade. É um subsistema facultativo sob a coordenação do MMAS (REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE, 2012, p. 12).

Ensino Escolar compreende: (1) Ensino Geral (2) Ensino Técnico-Profissional e (3) Ensino Superior. A língua oficial de instrução é português (ibid).

O Ensino Geral compreende: (i) Ensino Primário (ii) Ensino Secundário.

O Ensino Primário subdivide-se em dois graus: Ensino primário do 1º grau (EP1) da 1ª a 5ª classes e Ensino primário do 2º grau (EP2) 6ª e 7ª classes.

A idade oficial de ingresso na 1ª classe é de 6 anos completados no ano de ingresso.

A partir do currículo introduzido em 2004 o Ensino Primário estrutura-se em 3 ciclos de aprendizagem de 7 anos para todos assim distribuídos: 1º ciclo (1ª e 2ª classes); 2º Ciclo (3ª a 5ª classe) e 3º Ciclo (6ª e 7ª classes). Os ciclos "são unidades de aprendizagem com objetivo de desenvolver habilidades e competências específicas" (Ministério da Educação/Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação (MINED/IND), 2008, p. 24).

O Ensino Primário quando oferecido pelo poder público é gratuito. Após a conclusão deste nível de ensino, o aluno pode continuar os seus estudos no Ensino Secundário Geral ou no Ensino Técnico-Profissional básico (REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE, p. 13).

O Ensino Secundário Geral (ESG) compreende 5 classes – 8ª a 12ª classes – e subdivide-se em dois ciclos: 1º Ciclo – 8ª a 10ª classes (13 a 15 anos de idade) – e 2ª Ciclo – 11ª e 12ª classes (16 a 17 anos de idade). O segundo ciclo do ensino secundário é que antecede a entrada ao Ensino Superior.

Em Moçambique o Ensino secundário não é gratuito. Para responder à demanda, em Moçambique instituíram-se turnos noturnos para o ensino secundário para atender a alunos com mais de 15 anos de idade. Ainda segundo a República de Moçambique (2012) estão surgindo muitas escolas particulares (escolas privadas) para este nível de ensino, particularmente nas cidades, em 2011 essas escolas absorveram 10% do total dos alunos do ensino secundário. O Ministério da Educação introduziu, recentemente, um programa de Ensino Secundário Geral à Distância, mas sua cobertura ainda é reduzida.

Por sua vez, o Ensino Técnico Profissional possui dois níveis, básico e médio, ambos com duração de três anos, e é organizado por ramos: industrial, comercial e agrícola. O nível mínimo de ingresso é 7ª classe para o nível básico, e 10ª do Ensino Geral ou 3º ano do Ensino Técnico Profissional, para o nível médio. Este subsistema de ensino também não é gratuito.

E finalmente, o Ensino Superior compreende as Universidades (Públicas ou particulares), escolas e institutos superiores públicos ou privados e as Academias. Ingressa no ensino superior quem tiver 12ª classe do Ensino Geral ou seu equivalente do Ensino Técnico Profissional. Segundo o documento que vimos citando, para evitar exclusões de pessoas vindo de famílias de baixa renda, existe um sistema de bolsas para o Ensino Superior em Moçambique.

As instituições do Ensino Superior gozam de autonomia científica, pedagógica e administrativa regulamentada por meio da Lei do Ensino Superior.

Com o estabelecimento da idade mínima para o ingresso na 1ª classe do Ensino Primário, as projeções das faixas etárias por ciclo, são: 6 – 10 anos de idade (EP1); 11-12 anos de idade (EP2); 13 – 15 anos de idade (ESG1); 16 – 17 anos de idade (ESG2) e 16 – 17 anos de idade (Ensino Técnico Profissional Médio) (REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE, 2012, p. 132).

2.2 A Formação de Professores em Moçambique

Desde 1975, ano de independência, Moçambique implementou vários modelos de formação de professores. Por exemplo, para o ensino primário, existiram formações do tipo 4ª classe + 4 anos; 6ª classe + 1 ano, 6ª classe + 2 anos; 7ª classe + 1 ano; 7ª classe + 2 anos e 7ª classe + 3 anos como modelos de formação nos Centros de Formação de Professores Primários (CFPP) e mais tarde 9ª classe + 2 ou 9ª classe + 3 anos nos Institutos Pedagógicos. Já para o Ensino Secundário, 1º ciclo, existiram 9ª classe + 2 anos na Faculdade de Educação da Universidade Eduardo Mondlane. Também houve um modelo de formação de professores de 6ª classe + 2 anos ou 8ª classe + 2 anos nas Escolas de Formação e Educação de Professores (EFEP) para lecionar 5ª e 6ª classes concentrando-se sua especialização em uma única disciplina. Esta última modalidade funcionou apenas em dois centros, nomeadamente Filipe Elija

Machava, na cidade de Maputo e Chibututuine, no distrito da Manhiça, Província de Maputo. Foram essas duas últimas Escolas de formação de Professores que em 1984 deram lugar a Institutos Médios Pedagógicos com ingresso de 9ª classe e duração de 2 anos inicialmente e depois 3 anos e se espalharam para outras partes de Moçambique com a criação dos Institutos nas cidades da Beira e Nampula.

Só atualmente é que o modelo de formação de 10ª + 2 ou 12ª + 2 para o ensino Primário completo (1ª a 7ª classe) e formação superior para o Ensino secundário Geral e Técnico Profissional, estão impondo-se no sistema de educação em Moçambique. Mesmo assim, constatamos cursos que a própria Universidade levou a cabo num passado não muito distante, mas que não tiveram continuidade. Um exemplo concreto é o de Licenciatura em Educação matemática para o Ensino Primário (LEMEP), um curso que estava voltado para a formação "[...] de docentes para as disciplinas de Didática da Matemática e matemática nos Institutos de magistério Primário e responsáveis de Educação matemática ao nível Central, Provincial e distrital [...]" (LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ENSINO PRIMÁRIO, 1998/1999, p. 2) que não teve mais continuidade após a formação do primeiro grupo.

1.2.3 O Ensino Superior em Moçambique

O ensino superior em Moçambique data de 1962, quando, pelo decreto 44.530 de 21 de agosto foram criados "Estudos Gerais Universitários de Moçambique" (EGUM) como forma de o governo colonial português acomodar as reivindicações nacionalistas das suas colônias (TAIMO, 2010). Pelo decreto-lei 43799 de dezembro de 1968 do Conselho de Ministros, foi criada a Universidade de Lourenço Marque (ULM). Quando da Independência de Moçambique, em 1975, a Universidade de Lourenço Marques continuava sendo a única instituição de Ensino Superior. Em 1976 a ULM passou a se chamar Universidade Eduardo Mondlane (UEM), mas também única (Ministério da Educação: Direção para a Coordenação do Ensino Superior, 2014, p. 6).

Em 1985 foi criado o Instituto Superior Pedagógico (ISP) especificamente voltado para a formação de professores e outros quadros de Educação com nível superior. Em 1995 o ISP foi transformado em Universidade Pedagógica. Desse modo, estabelecia-se, a segunda universidade pública do país.

Depois da criação do ISP, foi criado pelo Decreto 1/85 de 5 de fevereiro o Instituto Superior Relações Internacionais (ISRI) voltado para a formação de quadros para as áreas de relações internacionais e diplomacia.

Em decorrência da dinâmica do ensino superior que o país vinha conhecendo crescimento, tanto em número de instituições quanto dos ingressos, é publicado em 1991 o diploma ministerial que institui os exames de admissão ao Ensino superior e em 1993 é aprovada pela Assembleia Popular a Lei do Ensino Superior – Lei 1/93 de 24 de junho – que cria o quadro legal para a aprovação dos Estatutos Orgânicos de cada instituição, e para a institucionalização do Conselho do Ensino Superior. Com a lei nº 1/93 é criado o dispositivo legal não só para o funcionamento regrado das instituições de ensino superior até então existentes, mas também se abre espaço para criação de outras instituições de ensino superior, tanto públicas como privadas. Surgem assim, as primeiras instituições Privadas do Ensino Superior, nomeadamente, a Universidade Católica de Moçambique (UCM) pelo Decreto 44/95, o Instituto Superior Politécnico e Universitário (ISPU) pelo decreto 44/95, Instituto Superior de Ciências e Tecnologia (ISCTEM), pelo Decreto 46/96 (PORTAL DO GOVERNO).

Desde então, mais Universidades entre Públicas e particulares foram sendo criadas, destacando-se entre as públicas a Universidade Lúrio (UniLúrio), na região norte de Moçambique com sede em Nampula e Campi espalhados nas diferentes províncias que compõem esta parte de Moçambique (Nampula, Niassa e Cabo Delgado); a Universidade do Zambeze (UniZambeze), na região centro de Moçambique com sede na cidade da Beira e campi em Sofala, Manica Tete e Zmabézia – que são as províncias que compõem a parte centro do país – para além das outras públicas, Universidade Eduardo Mondlane – a mais antiga e com sede e Maputo e Universidade Pedagógica com sede também em Maputo, mas com representação em todo Moçambique mencionadas no início deste subtítulo.

1.2.4 A Universidade Pedagógica de Moçambique (UP)

A UP é a segunda Instituição de ensino Superior a ser criada em Moçambique nos finais da primeira metade da década de 1980, com propósito de elevar o nível de ingresso aos cursos de formação de professores e a qualidade de formação. Inicialmente foi conhecida por ISP (Instituto Superior Pedagógico), conforme dissemos antes. A universidade pedagógica abraçou, como eixo principal, desde a sua criação, a formação de professores e outros quadros da educação. Assim, um dos objetivos definidos como fundamental para UP é formar professores e quadros da educação que possuam alto nível de competência e qualidade científica, técnica, pedagógica, didática e profissional (FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA, 2009, p.8). Tem sua sede e *campus* principal localizados em Maputo, capital de Moçambique, e delegações em todas as províncias de Moçambique.

No decurso de sua existência a UP teve variações de seus planos curriculares, tanto em nível de sua Delegação sede situada em Maputo quanto em relação às Delegações nas províncias, com maior incidência para a sua primeira e principal delegação – a Delegação da Beira – bem como da UP como um todo.

Com efeito, enquanto a Delegação de Maputo teve cursos bivalentes, isto é, o futuro professor devia graduar-se em duas disciplinas, por exemplo, quem seguia a licenciatura em ensino de História devia forçosamente ter como segunda opção o ensino de Geografia vice-versa, quem cursava licenciatura em ensino de Química devia ter como segunda opção o ensino de Biologia vice-versa, etc. exceto os cursos de Licenciatura em ensino de Línguas, a delegação da Beira funcionou com licenciaturas monovalentes, isto é, cursos que só conferiam ao graduado a uma única disciplina de especialidade, por exemplo, licenciado em ensino de Matemática, licenciado em ensino de Física, etc., sem obrigação a uma segunda opção.

A partir de 2004 a UP começou uma reforma curricular que culminou com a introdução de novos programas a partir de 2009 que, embora não inclua a Declaração de Bolonha[4], optou-se por um princípio de "formação e educação de

---

[4] A declaração de Bolonha foi um compromisso de 29 países signatários com seis "linhas de ação" voltadas para estabelecer um Espaço Europeu de Educação Superior a ser realizado até 2010. Dentro desse "Espaço",

professores para uma sociedade que preconiza, por um lado, a universalização dos conhecimentos e, por outro lado, a valorização dos saberes locais e da diversidade cultural" (FACULDADE de CIÊNCIAS NATURAIS e MATEMÁTICA, 2009, p. 6).

De acordo como a modalidade de formação de professores no Programa vigente, o curso é designado por Licenciatura em Ensino de Matemática com a habilitação na área complementar de Física ou Informática, sendo a parte principal "Licenciatura em Ensino de Matemática" denominada por "Major" e a parte complementar designada "Minor". O curso de Licenciatura em Ensino de matemática "Major" visa formar professores que vão atuar no ensino secundário e médio enquanto o de habilitação em ensino de Física, "Minor" visa formar profissionais que vão atuar no Ensino Secundário Geral do 1º Ciclo (ESG1) como no ensino técnico profissional.

A duração do curso de Licenciatura em Ensino de Matemática como "major" é de quatro anos, correspondentes a 600 (240-Bolonha) créditos. Inclui-se nesses 4 anos uma área de habilitação complementar "Minor" que equivale a 25% (150) dos créditos (FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA, 2009, p. 15). A condição de ingresso é ter 12ª classe ou equivalente e ser aprovado nos exames de admissão da disciplina de Matemática.

Desse modo, a diferença entre o currículo vigente e os currículos que funcionaram outrora na UP está na uniformização da grade das disciplinas e bivalência dos cursos em toda a UP, mas também no tempo de duração dos cursos. Enquanto no atual são 4 anos, nos programas que vigoraram antes a duração dos cursos foi de 5 anos. Porém, em ambos os casos, depois do cumprimento integral da parte curricular, a conclusão do curso exige a realização de uma Monografia Científica, cujo conteúdo e formato estão regulamentados.

A grade do curso compreende componentes de formação Geral, Educacional e Específica. A formação geral inclui áreas de conhecimento relacionadas com Línguas e Antropologia Cultural. A área educacional é

---

a mobilidade de docentes e discentes deveria ser reforçada com o alinhamento da garantia de qualidade nacional; uma estrutura compatível para a formação acadêmica seria desenvolvida com base no modelo 3+2+3 (licenciatura, mestrado e doutorado), a adoção de um sistema de transferência de créditos, e uma maneira comum de descrever as qualificações a serem delineadas estariam em um "suplemento ao diploma" pessoal (ROBERTSON, S. L, 2009, p. 407).

composta por disciplinas de caráter Psicopedagógico e Didático. A área específica é constituída por disciplinas de Matemática (Cálculo Integral e Diferencial em R e em R^n; Geometria analítica; geometria Euclidiana, Geometria projetiva, Álgebra linear, Teoria de Números, ...) e Física ou Informática.

1.2.5 A Geometria em Escolas Moçambicanas (Do Ensino Básico E Secundário) E Na UP com Enfoque nas Provas e Demonstrações

Todas as escolas do Ensino Básico e Secundário, públicas e privadas, que se orientam pelos princípios do Sistema Nacional da Educação, SNE, seguem o mesmo programa definido centralmente pelo Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação, INDE, conforme o nível de escolaridade. É dentro desse panorama que deve ser entendida o que se segue em relação à Geometria ensinada na Escola Básica e no 1º Ciclo do Ensino Secundário que passamos a apresentar. Apenas Instituições do Ensino Superior têm autonomia de definir os seus programas de ensino.

O ensino da geometria nas escolas moçambicanas está previsto deste o 1º ciclo do Ensino Básico. Porém, a introdução ao ensino e à aprendizagem da demonstração em Geometria começa no final do 3º Ciclo do Ensino Básico, especificamente, na 7ª classe, com a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sem, no entanto, especificar-se o método a ser utilizado. Em seguida aborda-se ângulo externo de um triângulo, como o suplemento ao ângulo interno adjacente; depois, a verificação de que em um triângulo isósceles a altura, a mediana e a bissetriz são coincidentes; a verificação de que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes (o documento usa o termo iguais), bem como a verificação de que em um triângulo equilátero, os três ângulos são congruentes.

Os programas de ensino preveem uma Geometria distribuída ao longo de todo o ano, entremeada com os diferentes conteúdos previstos.

Já no ensino secundário, especificamente, na 8ª classe retoma-se o estudo da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, mas como notou Ordem (2010), os livros didáticos optam por argumentos empíricos (medição, recorte e dobradura) para sua validação. Depois, retoma-se o estudo da propriedade do ângulo externo de um triângulo, desta vez a validação é fundamentada com conceito matemático claro, a relação de ângulos determinados em retas paralelas cortadas por uma transversal; ainda se prevê o ensino dos casos de congruência de triângulos; a demonstração do teorema de Pitágoras via gravura, portanto usando argumentos empíricos; aplicação dos critérios de congruência de triângulos e teorema de Pitágoras na resolução de problemas; relações métricas em circunferência (ângulo inscrito, ângulo central, ângulo inscrito sobre o diâmetro, etc.).

Na 9ª classe prevê-se a sistematização e estudo das propriedades dos quadriláteros – trapézios, paralelogramos; estudo da homotetia – redução e ampliação – o conceito de figuras semelhantes e critérios de semelhança de triângulos; o teorema de perímetro e área de figuras semelhantes; o teorema de Thales e suas aplicações; a demonstração do teorema de Thales pela semelhança de triângulos e relações métricas em triângulos retângulos. Contudo, com a exceção da demonstração do teorema de Pitágoras baseado na semelhança de triângulos, recomenda-se que os restantes teoremas previstos para a 9ª classe sejam institucionalizados a partir de verificações empíricas (medições) dando-se mais atenção às suas aplicações na resolução de exercícios.

Tanto na 8ª como na 9ª classe, não se discute a necessidade de validar as propriedades previstas por meio das demonstrações. Por exemplo, no programa da 8ª, apesar de aparecer um parágrafo que defende a demonstração de todas as propriedades relacionadas com ângulos inscritos sobre o mesmo arco ou inscritos sobre o diâmetro, recomenda-se que a introdução e generalização dessas propriedades e outras se baseie em construções, medições e comparação de resultados anotados no quadro (lousa) de diferentes grupos de alunos (MINED/IND, 2008, p. 48-49).

Ao defender que todas as propriedades previstas na 8ª classe sejam demonstradas e, simultaneamente, defender que as generalizações sejam baseadas em verificações empíricas, os autores do programa parecem querer dizer que esses exemplos recomendados constituem demonstração.

O curso de Licenciatura em Ensino de Matemática contempla uma disciplina voltada para o estudo da geometria do Ensino Secundário (I e II ciclos). Oferecida no 2º semestre do 1º ano, a disciplina designa-se “Geometria Plana”, define-se como competências a desenvolver nos estudantes da licenciatura:

> Aplicar e desenvolver técnicas de demonstrações geométricas.
> Aplicar os métodos geométricos na construção de figuras planas, usando corretamente o material clássico. Usar modelos concebidos em software para a explicação e demonstração de conceitos e teoremas da geometria espacial (FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA, 2010, p. 1).

Contudo, nos parece que os proponentes dessas competências, ao contemplarem o uso de *software*, fizeram uma mera inclusão sem clareza do seu real papel na aprendizagem da geometria, porque não discutem como o software poderá auxiliar na explicação e demonstração de conceitos da geometria espacial e nem fazem menção de sua aplicação para o estudo da geometria euclidiana plana, conteúdo matemático foco de nosso estudo.

Quanto aos objetivos da disciplina, propõe-se, entre outros, que, até ao final da disciplina, os estudantes sejam capazes de:

> Compreender a importância da axiomática na construção de teorias matemáticas, em especial da consistência da Geometria Euclidiana. Desenvolver o raciocínio matemático através do exercício de indução e dedução de conceitos geométricos.
> Definir conceitos da geometria escolar. Construir figuras geométricas planas; visualizar, caracterizar e comparar figuras geométricas no plano e espaço (FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA, 2010, p. 1).

Aqui de novo, vemos que não se clarifica a importância das demonstrações para a validação das propriedades geométricas, pelo contrário afirma-se de forma ingênua a indução e dedução como se as duas formas podem validar as conjecturas e propriedades da geometria plana. Os autores do programa ao elencar apenas o desenvolvimento do raciocínio indutivo e dedutivo de conceitos geométricos sem fazer menção às limitações do processo de indução para a validação das propriedades geométricas, parecem não perceber as limitações desse processo no estabelecimento da validade de propriedades em matemática e, por consequente, a dedução como único meio para a validação de conceitos em matemática.

Comparando as prescrições contidas nos programas de ensino geral com as da Universidade Pedagógica em relação à geometria plana, constatamos um discurso sobre a validação das propriedades geométricas que não difere muito quanto ao valor das verificações empíricas e o raciocínio dedutivo. Embora se oriente para a demonstração de teoremas, sua abordagem pode não ser eficaz. Contudo, o estudo desse material foi importante para a nossa pesquisa uma vez que nos permitiu determinar que conteúdo contemplar no estudo e com que profundidade construir as situações a explorar, para além de constituir um elemento importante a tomar em consideração na análise dos dados da pesquisa.

1.3 Relevância do Estudo

Hanna, G. et al. (2009) salientam que os educadores matemáticos enfrentam uma tarefa importante, que consiste em proporcionar aos alunos condições para compreenderem as funções de argumentação e prova em Matemática. Em *“Aspects of the Nature and the State of Research in Mathematics Education*”, Niss (1999, p.18) menciona a necessidade de revitalização da pesquisa sobre provas e demonstrações na escola, destacando sua importância para a Educação Matemática. Segundo o autor, essas noções fazem parte de rol das mais cruciais, exigentes, complexas e polêmicas em toda a educação matemática por envolverem aspectos científicos, filosóficos, psicológicos e educacionais profundos. Pelo seu caráter complexo e profundo, o autor salienta que elas levantam sérios problemas de aprendizagem por parte de alunos. Esses problemas são caracterizados pela diferença entre concepções de alunos sobre prova e demonstração e aquelas da comunidade de matemáticos.

Goetting (1995) defende que os professores de matemática precisam estar cientes do impacto de suas práticas em seus alunos e enfatiza que essa ideia deve ser criada nos alunos que estão estudando para se tornar professores de matemática. Práticas, tais como, tentar convencer uma classe da generalidade de uma propriedade matemática por meio de alguns exemplos no lugar de uma demonstração, podem induzir os alunos a acreditarem que esse procedimento empírico é um método válido para certificar-se da verdade das generalizações em matemática. Se o professor não fizer entender o poder da generalidade dos argumentos em uma demonstração, os alunos podem achar que a demonstração é apenas um método que serve para verificar casos particulares, ilustrar um conceito, ou apenas um mero exercício para treinar a mente.

O hábito de, em aulas de geometria, o professor sempre apresentar as demonstrações em duas colunas, com o propósito de incentivar os alunos a organizarem as informações, pode induzir os alunos a interpretar o formato em si como sinônimo de prova. A consequência disso é de os alunos não conseguirem entender que o formalismo e o rigor não são fins em si, mas, o meio pelo qual a comunicação em matemática é reforçada.

Ainda alguns autores denunciam o hábito de, em geometria, sempre se apresentar afirmações verdadeiras, para daí pedir a produção de suas provas, e raramente exigir provar algo falso ou decidir se algo é verdadeiro ou falso. Esse fato pode fazer com que os alunos vejam as demonstrações como um mero exercício que serve para apoiar afirmações e nunca para refutá-las.

Neste contexto, um estudo que se propõe a investigar as concepções de futuros professores sobre prova e demonstração, em um ambiente difícil de encontrar estudos similares, pode ser útil e relevante tanto para a educação matemática em geral, quanto ao próprio ambiente em que a pesquisa será realizada, pois trata-se de, por um lado, agregar à comunidade dos educadores matemáticos novos estudos, por outro, provocar reflexões no próprio ambiente focal sobre esse tópico muito importante.

A relevância de nosso objeto de estudo pode ser ainda percebida pelas inúmeras pesquisas e publicações já realizadas, e pelos espaços de discussão criados, que apresentamos de forma não exaustiva: existe um site intitulado "Newsletter on Proof'', cujo link de hospedagem é: http://www.lettredelapreuve.it, espécie de boletim Internacional sobre o Ensino e Aprendizagem de Prova em Matemática; *The International Handbook of Mathematics Educational* editado por Bishop et al. (1996) contém um capítulo de Hanna e Janke que trata de prova e processo de prova; em 2009 realizou-se um simpósio do ICMI 19 (LIN et al. 2009) que tratou exclusivamente da problemática de prova e processo de provar em Educação Matemática , e em 2012, Hanna & de Villier (Eds.) lançaram o New ICMI Study Series "Proof and Proving in Mathematics Education" contendo algumas das apresentações nesse Simpósio aprovadas para sua publicação em livro; o CERME, uma conferência Europeia que ocorre de dois em dois anos, tem um grupo de trabalho dedicado exclusivamente a argumentação e demonstração. Entendemos que nosso estudo se insere no âmbito das reflexões sobre os problemas de ensino e aprendizagem de prova e demonstração, focando um público que julgamos fundamental para a efetiva implementação dos processos de ensino e aprendizagem desse tema.

A seguir, no capítulo II, apresentamos alguns resultados de pesquisas realizadas envolvendo alunos e futuros professores ou professores de matemática em exercício no ensino fundamental e/ou médio quanto a provas e demonstrações.

CAPÍTULO II: REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo apresentamos a revisão da literatura enfocando em alguns estudos realizados e suas principais conclusões, nas causas dos fracassos constatados, nas alternativas apontadas para a superação das dificuldades enfrentadas, no papel que as provas e demonstrações tem tanto na matemática como área de conhecimento bem como no ensino e aprendizagem da matemática. Apresentamos posteriormente a pertinência dessa revisão e finalizamos o capítulo com uma síntese das principais ideias.

2.1 Algumas pesquisas realizadas sobre provas e demonstrações

Almouloud (2007b) apresenta os resultados de um projeto de intervenção levado a cabo pelo grupo de pesquisa Pensamento Matemático (PEA-MAT) do Programa dos Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, o qual teve como objetivo investigar os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem envolvendo raciocínio dedutivo em matemática. Esse projeto tem como sujeitos de pesquisa dois grupos de professores do Ensino Fundamental e Médio. O autor destaca dois objetivos da pesquisa: (1) os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados com o ensino e a aprendizagem de provas e demonstrações em matemática nas séries finais do ensino fundamental e, (2) as representações dos professores dessas séries finais quanto ao papel do raciocínio dedutivo na formação do aluno. A pesquisa adotou como procedimento metodológico:

- leitura pelos participantes do projeto – professores, pesquisadores e observadores (alunos do mestrado e doutorado) – de textos de certos autores;

- levantamento inicial, por questionário, da identificação e diagnóstico a respeito do conhecimento de demonstração pelos professores participantes do projeto de pesquisa.

- realização de oficinas em dois dias por semana, nas quais foram discutidos termos como hipótese e tese; argumentação, prova e demonstração no início e, posteriormente, discussão e busca de soluções matemáticas para os problemas submetidos pelos pesquisadores.

Segundo o autor, o processo de coleta de dados envolveu notas e gravações de áudios e compreendeu quatro fases:

(i) a análise epistemológica da noção de demonstração em matemática;

(ii) a análise do processo ensino-aprendizagem envolvendo provas e demonstração,

(iii) a análise das concepções dos estudantes e professores, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;

(iv) a análise do campo no qual ia se situar a realização efetiva de um cenário didático (ALMOULOUD, 2007b, p. 7).

Nortearam o projeto três questões, nomeadamente:

> Quais fatores influenciam no processo de ensino e aprendizagem envolvendo o raciocínio dedutivo em matemática? Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas envolvendo provas e demonstrações? Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores, no que diz respeito às provas e demonstração? (ALMOULOUD, 2007b, p. 6),

Os resultados relatados pelo autor mostram que os professores tinham dificuldades em identificar hipótese e tese nas atividades propostas, havendo inclusive confusão entre os dois termos; tinham dificuldade em reconhecer uma demonstração em livros didáticos. Para esses professores, uma demonstração em matemática era sinônimo de ilustração de conceitos por meio de figuras. Com efeito, conforme escreve o autor,

> ficou evidente essa dificuldade de reconhecimento de prova quando buscavam aleatoriamente nos livros, através de uma visualização de formato de texto matemático, identificar uma prova. Em geral, detinham-se em textos com figuras como potes, balanças, no sentido de que uma explicação exemplificada com situações concretas deveria aproximar-se ou, efetivamente, ser uma demonstração (ALMOULOUD, 2007b, p. 16).

Gouvêa (1998), em sua pesquisa de mestrado, constatou que metade dos professores com que trabalhou verificava, por meio de exemplo, a veracidade de uma propriedade matemática e, para casos em que se exibia figura, deixaram-se levar por evidências falsas em lugar de se servirem da demonstração para prová-la. A autora trabalhou com 12 professores. Após efetivação de uma sequência didática, a qual tinha como foco a geometria dedutiva, constatou certa evolução dos professores quanto à visão sobre as demonstrações em geometria, mas ainda havia certa resistência por parte dos mesmos em organizar um texto com um desenvolvimento dedutivo pautado nas propriedades já demonstradas.

O estudo de Zhou e Bao (2009) procurou entender a "alfabetização em demonstração" e sua implementação em sala de aula de um grupo de professores do ensino secundário na China cursando mestrado em Educação Matemática. Os autores definiram como objetivos (1) compreender o sentido de demonstração que os professores tinham; (2) a capacidade dos professores produzirem demonstrações; e, (3) o conhecimento que os professores tinham sobre o ensino de demonstrações. A coleta de dados baseou-se em questionário.

Segundo os autores, os sujeitos mostraram ter boa noção de demonstração: 100% dos sujeitos (75) identificaram bem resoluções com argumentos matematicamente válidos para a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Contudo, os autores constataram que alguns dos professores continuavam acreditando que a invariância da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo que se observa quando se usa a ferramenta "arrastar" de um *software*, ou a prova por recorte dos ângulos de triângulo em papel, ou outras provas empíricas apresentadas podiam ser usadas como demonstração sem, porém, fornecer as razões. Contataram também que embora eles conseguissem identificar provas contendo erro, eram incapazes de explicitar a natureza do erro. Em relação à questão relativa às dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem das demonstrações, os autores afirmam que os sujeitos da pesquisa estavam familiarizados com as dificuldades e obstáculos que os alunos enfrentam quando estudam demonstrações.

Parzysz (2006) descreve uma pesquisa que realizou entre 2000 e 2004 na França envolvendo 878 futuros professores para as séries iniciais em formação inicial (PE1). Baseando-se em três objetivos, o autor utilizou a teoria dos paradigmas[5] geométricos para discutir os resultados da pesquisa. A pesquisa tinha três objetivos: (1) fazer um levantamento e uma classificação de tipos de argumentos utilizados em geometria pelos professores do ensino fundamental, (2) colocar à prova o quadro teórico que classifica a geometria em Paradigmas e (3) elaborar e testar as engenharias didáticas (em ambiente papel-

[5] Esta teoria é objeto de explicação nos parágrafos seguintes.

lápis e informático) destinadas a provocar a tomada de consciência pelos Professores do Ensino Fundamental da distinção entre dois paradigmas.

O modelo teórico dos paradigmas geométricos (PARZYSZ, 2001, 2006) concebe a geometria sob dois focos: por um lado, a natureza dos objetos em jogo (físicos vs teóricos) e por outro, a forma de validação das propriedades (perceptivo vs hipotético-dedutivo).

Com esse olhar, Parzysz divide a geometria em dois tipos: o primeiro deles é a geometria não axiomática, na qual os objetos são estudados a partir de realizações materiais (maquete, figura, etc.), trata-se da geometria G0; ou situações concretas idealizadas para constituir "espaço-gráfica", a geometria G1. Nesse tipo de geometria, a validação das propriedades dos objetos ou relações entre objetos se baseia na percepção, sem um discurso teórico bem fundamentado. O segundo tipo é a Geometria axiomática, cujos objetos são teóricos. Neste segundo tipo, pode acontecer que se faça referência ao real e a axiomatização seja incompleta, ou que a axiomatização seja completa e a referência ao real seja facultativa. Para o primeiro caso, Parzysz chama Geometria proto-axiomática ou G2, e para o último caso, Geometria axiomática ou G3.

Do ponto de vista didático, a diferença entre essas geometrias manifesta-se nas rupturas de contrato didático que podem ser discernidas pelo fato de que um aspecto aceito numa dada geometria pode não ser aceito na outra: por exemplo, enquanto na G2 as justificações podem basear-se em propriedades "evidentes", na G3 todas as propriedades devem ser justificadas com base na axiomática interna; ou, enquanto na G0 usa-se material concreto (madeira, papel, palha, …) para modelar situações geométricas, na G1 a figura desempenha papel fundamental na modelação de situações geométricas, ou, ainda, na G2, a figura deve começar a ser visto não como próprio conceito, mas uma simples ilustração visual do conceito.

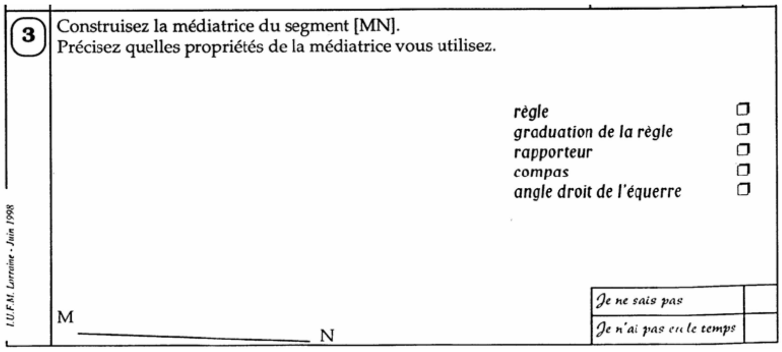
Segundo o autor, do ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático (TAD), as diferentes geometrias, que compõem os paradigmas geométricos, podem ser vistas como diferentes praxeologias que, para um mesmo tipo de problema vão se diferenciar no nível das técnicas, das tecnologias e das teorias a usar para resolver o problema proposto.

Quanto à relação entre as geometrias que compõem os paradigmas, as ações em dois paradigmas consecutivos podem ser vistas como se controlando mutuamente. Por exemplo, se uma contradição perceptiva é identificada na 'figura' (G1), pode-se procurar em G2 o erro que a produziu; ou, se a conclusão de um raciocínio geométrico em G2 não é muito evidente para o interlocutor, o retorno à 'figura' e às técnicas de G1 pode permitir confirmar ou 'enfraquecer' o resultado, etc., isso podendo acontecer entre outros paradigmas geométricos. Quanto ao *habitat* dessas geometrias, G1 é vista como sendo da escola elementar, G1 e G2 dos Ensinos Fundamental II e Médio e G3 da Universidade. Depois desta breve exposição da teoria dos paradigmas geométricos segundo Parzysz, voltamos ao resumo da pesquisa de Parzysz (2006).

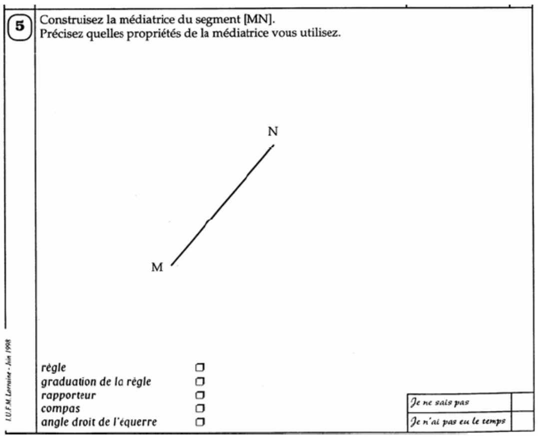
O estudo centrou-se na relação entre os saberes geométricos dos PE1, e teve como método de coleta de dados um questionário e sessões de formação, com foco na construção de mediatriz de um segmento de reta pelo método clássico de papel e lápis, e ambiente de geometria dinâmica (Cabri-géomètre).

Entre as tarefas propostas no questionário, três restringiam-se à construção da mediatriz do segmento MN com algumas diferenças entre elas: no item 5, o segmento estava situado no meio de um quadro de resposta; no item 3 o segmento estava próximo à borda inferior do quadro e, no item 8, dois triângulos isósceles de base MN (não traçado) estavam desenhados. Segundo Parzysz, o item 5 visava identificar os procedimentos disponíveis nos PE1 (particularmente os disponíveis utilizando o compasso e régua não graduada, e aqueles utilizando o esquadro e régua graduada); o item 3 visava ver se a restrição imposta conduziria a procedimentos diferentes daqueles do item 5; e, o item 8, verificar se os PE1 iriam ou não perceber que a mediatriz já era fornecida pelos pontos U e E, como representado na Figura 1, tarefa 8.

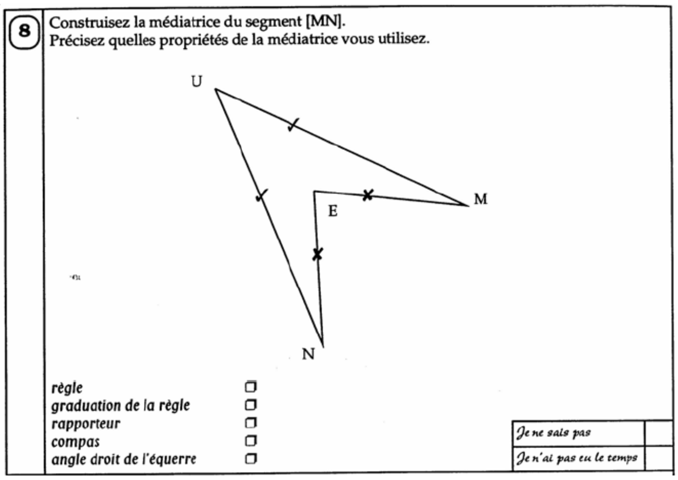
Figura 2: Atividade de construção da mediatriz de um segmento



Tarefa 3



Tarefa 5



Tarefa 8

Fonte: Parzysz (2006, p. 150-151)

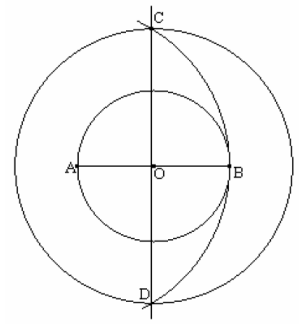
O autor e sua equipe de pesquisa constataram que: no item 5, 78% dos PE1 utilizaram as interseções de arcos de mesmo raio, centrados em M e N e situados em cada lado de MN para construir a mediatriz, 11% dos PE1 recorreram ao método de "ponto médio + esquadro". No item 3 (que continha restrições), constataram procedimentos similares, mas com certa adaptação: 51% dos PE1 utilizaram uma interseção superior de dois arcos, ou associado a um ângulo reto, ou ao ponto médio de MN; e 28% utilizaram o método de “ponto médio + esquadro”. Finalmente, para o item 8, constataram que 49% dos sujeitos traçaram a mediatriz unindo diretamente os pontos E e U; 14% utilizaram um dos pontos U ou E mais um outro elemento (interseção de arcos, ponto médio ou perpendicular) para traçar a mediatriz. Parzysz destaca que o recurso à análise implicativa permitiu chegar a algumas conclusões acerca dos conhecimentos dos seus sujeitos de pesquisa (PE1), a saber: (i) aqueles que, em posição *standard* (normal), utilizavam um raio igual a MN, tinham bastantes dificuldades em mudar de procedimento no caso imposto em 3. Para o autor, isso revela que os que procedem dessa maneira apenas têm um simples saber-fazer, não ligado a nenhum saber geométrico; (ii) aqueles que utilizaram a interseção de dois arcos de circunferência ou os sub-procedimentos depois justificando sua construção pelo fato de que mediatriz é reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio (definição aprendida por eles quando alunos), coloca em evidência de que eles não fazem a ligação entre esta propriedade relevante de G2 com a técnica de traçado aplicada em G1. Para Parzysz, isso revela que eles não estão em condições de usar um paradigma geométrico para controlar outro, nem de adaptar seu procedimento.

Quanto à parte experimental da pesquisa, o autor destaca que se consistiu de quatro sessões, nas quais os PE1 tinham de realizar uma tarefa que diferia de sessão para outra apenas nas medidas dos raios das circunferências, mas que a formulação da tarefa era igual e dizia o seguinte:

> Traçar uma reta d. Chamemos O um ponto desta reta.
> Traçar a circunferência C1 de centro O e raio R1. Esta circunferência corta a reta d em dois pontos A e B.
> Traçar a circunferência C2 de centro O e raio R2.
> Traçar a circunferência de centro A e raio R3. A circunferência corta C2 em dois pontos C e D.
> Qual(is) meio(s) você pode utilizar para saber se a reta (CD) é, ou não, a mediatriz do segmento AB? (PARZYSZ, 2006, p. 136, tradução de Silva e Almouloud – PUC/SP)

Conforme salientou o autor, R_1, R_2 e R_3 assumiam distintos valores em cada uma das sessões e, eram escolhidos de modo que em um caso, duas versões tivessem $(R_1)^2 + (R_2)^2 = (R_3)^2$, e no outro $(R_1)^2 + (R_2)^2$ fosse próximo de $(R_3)^2$ mas diferente deste. As sessões foram organizadas de modo que, em cada grupo, dois estudantes trabalhassem numa versão em que CD era mediatriz de AB e os outros dois CD não era mediatriz de AB, mas a diferença era imperceptível, ou seja, a tarefa foi organizada de tal modo que dois estudantes de um grupo tivessem como resposta à pergunta "CD é mediatriz de AB?", "sim" em G1 e G2, e para os outros dois, "sim" em G1 e "não" em G2.

Figura 3: Figura da sessão experimental em ambiente de papel-lápis



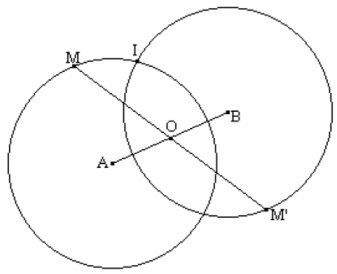
Fonte: Parzysz (2006, p. 137)

O autor reporta que as respostas obtidas revelaram que os grupos não se preocuparam em "saber" por que a reta CD era ou não mediatriz, mas assumiram ser mediatriz, o que desencadeou a apresentação de argumentos para justificar as respostas. Esses argumentos podiam ser agrupados em três tipos. (i) argumentação que evidenciava G2 – os grupos que ostentaram isso apresentaram uma demonstração clássica de geometria do ensino médio, embora às vezes fosse incompleta; (ii) argumentação que evidencia G1 – para esses casos os estudantes evocaram o uso de compasso ou régua graduada para verificar se a reta CD passava pelo ponto médio de AB e de esquadro para verificar a perpendicularidade entre as retas CD e AB; (iii) argumentações aparentemente a evidenciar G2, mas com confusão entre o sabido e o percebido (CSP) – estudantes deste grupo apresentaram uma autêntica demonstração de geometria e manifestaram um certo grau de conhecimento de G2, pela utilização do vocabulário e do simbolismo, a argumentação foi apresentada de forma clara com afirmações justificadas, mas foram enganados pela figura para aceitar no alinhamento dos pontos C, O e D que sua posição carecia de prova (PARZYSZ, 2006). Para o ambiente Cabri-géomètre, o autor deu a seguinte tarefa nas sessões experimentais:

> Sejam A e B dois pontos do plano e O o ponto médio do segmento [AB].

> Sejam M um ponto do plano e M' o simétrico de M em relação ao ponto O.
> Traçar a circunferência de centro A passando por M e a circunferência de centro B passando por M'.
> Chamamos I um ponto de intersecção destas duas circunferências.
> O que acontece com o ponto I quando o ponto M se desloca no plano? (PARZYSZ, 2006, p. 138, tradução de Silva e Almouloud – PUC/SP)

Figura 4: Figura da sessão experimental em ambiente de Cabri



Fonte: Parzysz, (2006, p. 139)

Fazendo comparação dos efeitos induzidos nos dois ambientes em que as sessões decorreram, papel-lápis e Cabri, Parzysz destaca que Cabri facilita consideravelmente o acesso à conjectura, graças ao seu aspecto dinâmico, porém, destaca que para os processos de validação, em que a evidência visual da "figura" tem-se mostrado como um obstáculo ao processo correto de se fazer uma demonstração, é similar nos dois ambientes, sendo mais acentuado no ambiente Cabri em virtude da qualidade do *software* e da grande precisão das figuras aí realizados. Em termos de conclusão, Parzysz (2006) afirma que os professores PE1 possuíam uma base sólida de conhecimentos de G2, largamente suficiente para ensinar geometria na escola elementar: definições, teoremas, vocabulário, simbolismo, as principais construções clássicas de mediatriz, losango. Contudo, salienta que apesar desse todo conhecimento, parece que a maioria deles não possuía um grau de conhecimento geométrico suficiente para lhes fazer distinguir que a prova perceptiva e a demonstração não se situam no mesmo plano. Além disso, não pareciam estar cientes de que as "figuras" que construíam eram apenas representações materiais de objetos teóricos da Geometria do final do Ensino médio.

Knuth (2002a, 2002b) descreve os resultados de um estudo em que examinou as concepções de prova de 16 professores de matemática do ensino fundamental II e médio nos Estados Unidos. Segundo o autor, 12 deles eram graduados em Matemática enquanto 5 em engenharia ou em ciências físicas; 13

tinham mestrado, dois dos quais em Matemática; a experiência de trabalho variava entre 3 e 20 anos. Nesse estudo, a principal fonte de coleta de dados foi a entrevista semiestruturada. Em Knuth (2002a) o autor enfoca a noção de prova em matemática, isto é, os professores deviam pensar nas demonstrações como alguém que conhece o lugar que elas ocupam na matemática enquanto área científica.

Em Knuth (2002b) o autor foca a noção de demonstração em contexto de matemática escolar: na entrevista eram solicitados que pensassem nas demonstrações em contexto de ensino e aprendizagem da matemática escolar a alunos do fundamental II e médio. Em ambiente de entrevista, o autor pedia aos professores que respondessem a perguntas gerais sobre demonstração (por exemplo, para que serve uma demonstração em matemática?), ou para avaliar argumentos dados (uns empíricos e outros dedutivos), e para indicar argumentos que julgassem mais convincentes.

O autor afirma que os resultados sugerem que a implementação das demonstrações em matemática escolar podia ser difícil, porque os professores viam-nas como adequadas para o ensino da matemática de uma minoria de alunos. O autor destaca ainda que os resultados de sua pesquisa sugerem que os professores tendiam a ver demonstração de forma pedagogicamente limitada, ou seja, viam-nas como um tópico de estudo e não como uma ferramenta de estudo e comunicação em matemática. Em alguns casos, revelaram compreensão inadequada da noção de demonstração. Com efeito, em resposta a uma pergunta que explorou a falibilidade das demonstrações, isto é, se uma vez apresentada a demonstração de uma propriedade é possível torná-la inválida, o autor constatou que 6 dos 16 sujeitos pensaram que poderia ser possível encontrar evidências contraditórias, o que a tornariam inválida; 6 disseram que isso só poderia ser possível se talvez houvesse mudança do sistema axiomático no qual a demonstração foi produzida, e apenas, quatro dos 16 disseram que uma demonstração uma vez feita corretamente, não está sujeito a provas contraditórias.

Knuth (2002a) salienta ainda que embora os professores em geral tenham identificado corretamente 93% dos argumentos, um terço dos argumentos inválidos (ou por se basearem em exemplos, ou por não dizerem respeito à propriedade invocada) foram avaliados como provas válidas, e cada professor considerou pelo menos um dos oito argumentos inválidos como uma prova válida, enquanto 11 consideraram mais de um argumento inválido, como uma prova válida. Um exemplo de argumento inválido, por ser empírico, apresentado nessa pesquisa é uma atividade relativa à validação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo:

Figura 5: Uma das tentativas de provar que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°

(a) Rasguei os ângulos do triângulo obtusângulo e coloquei-os juntos (como mostrado abaixo).

Os ângulos, juntos, formam um ângulo cujos lados estão um no prolongamento do outro formando uma linha reta, um ângulo de 180º. Eu também tentei em um triângulo agudo, bem como no caso de um triângulo retângulo e aconteceu a mesma coisa. Por isso, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Fonte: Knuth (2002a, p. 392)

Este argumento foi considerado como demonstração por 5 professores. Knuth constatou ainda que alguns professores não reconheciam a generalidade de uma prova válida, pois, a uma tarefa que consistia em dizer se a demonstração apresentada pelo pesquisador estava correta ou não, depois de terem reconhecido que estava certa, quando acrescentou à pergunta o item “era possível achar um contraexemplo?”, quatro dos 16 professores, antes de responder, construíram triângulos adicionais como meio de verificar por si próprios os argumentos da conclusão e só depois é que responderam que a conclusão era válida para todos os triângulos. Para o autor isso é similar ao resultado obtido por Fischbein; Keden (1982, apud KNUTH, 2002a) em que um aluno de graduação em matemática, chegou a dizer: “Esta demonstração dedutiva é para este triângulo (na figura), mas o enunciado diz que é para qualquer triângulo. Eu tenho de pensar se em todos os tipos de triângulos, poderia ser verdade. Eu não poderia garantir isso de imediato". Também Knuth constatou que 13 dos 16 professores investigados achavam que argumentos baseados em exemplos ou representações visuais eram mais convincentes.

Em Knuth (2002b), no qual a atenção estava direcionada à noção de demonstração em um contexto de matemática escolar, destaca que muitos professores que participaram da pesquisa distinguiam três significados de demonstração conforme o grau de formalidade:

(i) demonstrações/provas formais, são aquelas com formato de duas colunas (argumentos escritos em uma coluna e as justificativas correspondentes em uma segunda, como as demonstrações de duas colunas da geometria), ou que utilizam uma linguagem específica (rigorosa), satisfazendo os requisitos exigidos pelos matemáticos. Segundos esses professores, este tipo de demonstração é apenas acessível a estudantes de graduação e outros graus mais altos;

(ii) *demonstrações/provas menos formais* – o argumento estabelece a verdade para todos os casos relevantes, porém, sem rigor na apresentação do argumento. Segundo esses professores esse tipo de demonstração continua não sendo acessível a todos os alunos do ensino fundamental e médio, com a exceção dos mais dotados; e,

(iii) *demonstrações/provas informais,* foram consideradas por todos os professores como explicações e argumentos fundamentados empiricamente. Knuth (2002b) descreve esse tipo de provas como argumentos em que se fornecem razões para justificar algumas ações matemáticas ou em que se apresentam exemplos para justificar afirmações (porém, em ambos os casos, os argumentos não podem ser considerados demonstrações válidas).

Dado que a maioria dos professores parece ver a demonstração como inapropriada para alunos das classes iniciais, o autor afirma que todos relatam que aceitariam provas informais (ou seja, argumentos fundamentados empiricamente) como demonstrações de seus alunos em aulas de matemática escolar. Contudo, salienta que esse procedimento acaba levando os alunos a criar falsas concepções de que a verificação de vários exemplos constitui demonstração. Apenas dois professores afirmaram que os alunos precisam entender que "provar [com alguns exemplos] não significa que a prova vai valer para todos os casos".

Movidos por uma demanda de reformas curriculares em Israel que determinam que provas e demonstrações sejam um componente permanente de prática em salas de aula, Barkai; Tabach; Tirosh; Tsamir; Dreyfus (2009) conduziram um estudo no campo da teoria Elementar de Números envolvendo 50 professores de ensino médio. O estudo tinha como objetivo dar respostas preliminares a duas questões: Será que o conhecimento de professores do ensino médio é suficiente para demonstrar afimações na Teoria Elementar de Numeros? E, será que os seus conhecimentos permitem que eles avaliem a validade de um argumento apresentado pelos seus alunos? (BARKAI, et al., 2009, p. 272-273, tradução nossa). Para obter dados de suas questões, os autores conceberam um questionário com seis atividades de múltipla escolha (três verdadeiras e três falsas). As questões foram escolhidas por forma a incluir três atributos (sempre verdade, por vezes verdade ou nunca é verdade) e um dos dois quantificadores (universal ou existencial). A natureza do questionário era tal que as produções dos participantes fossem de dois tipos (validações ou refutações). Segundo os autores, os participantes foram convidados a examinar cada uma das afirmações, a determinar se era verdadeira ou falsa, e a apresentar a prova de sua afirmação. Eram 43 justificações para seis declarações. Para cada justificação, os participantes deviam dizer se verificava (ou refutava) a declaração e a explicar sua avaliação. As justificações foram apresentadas como se tivessem sido escritas por alunos em vários modos de representação da argumentação.

Os autores constataram que todos os professores produziram demonstrações corretas para cada uma das afirmações apresentadas. Os modos de argumentação escolhidos pelos professores para cada proposição eram adequados e suas demonstrações foram apresentadas de forma simbólica [para as demonstrações que necessitavam de um modo geral de argumentação] ou numérica para refutar duas afirmações universais. Os autores também constataram que a maioria deu um exemplo numérico único para validar duas afirmações existenciais. Segundo os autores nenhum dos participantes forneceu vários exemplos para provar ou refutar uma declaração.

Essas respostas foram vistas como reveladores de que os participantes que usaram exemplos numéricos sabiam quando um exemplo é suficiente para provar um enunciado. Porém, constataram que “cerca de um terço dos professores não conseguiu identificar como universal os aspectos que englobam argumentos dados em língua natural" Segundos eles, esses resultados corroboram as conclusões relatadas por Dreyfus (2000, apud Barkai, et al., 2009), segundo os quais os professores tendem a perceber as provas verbais como deficientes por falta de notações simbólicas. Enquanto Dreyfus constatou que o professor tende a rejeitar provas verbais, Barkai, et al. (2009) descobriram que os professores tinham dificuldades em compreender as provas verbais, mas não as rejeitavam como tal.

Por causa dessa rejeição de provas verbais, os autores se expressaram

> dificuldades dos professores com justificativas verbais são particularmente preocupantes em função dos resultados relatados por Healy e Hoyles (2000) segundo os quais os estudantes do ensino médio não só preferiam provas verbais devido ao seu poder explicativo, mas também que seus argumentos verbais eram, com mais frequência, dedutivamente corretos do que seus argumentos em outros modos de representação, mas, ao mesmo tempo, esperavam obter notas baixas para tais provas (p. 279, tradução nossa).

Moore (1994) examinou as dificuldades cognitivas que os alunos universitários enfrentam para aprender a fazer demonstrações em matemática. Segundo o autor, o objetivo do estudo não foi verificar uma teoria ou testar uma hipótese a *priori*, mas desenvolver uma teoria fundamentada acerca das dificuldades dos alunos com demonstrações, observando-os no contexto de um curso de matemática regular e atendendo as perspectivas do professor (MOORE, 1994, p.250). Para a coleta de dados, o autor conduziu dois estudos preliminares e um principal nos cursos de graduação em matemática da Universidade da Geórgia durante o inverno, verão e outono de 1989. A administração das aulas estava sob a responsabilidade de um professor muito respeitado por sua competência profissional. Participaram do curso 16 estudantes assim descriminados: 8 da graduação em matemática, 6 da graduação em educação matemática e 2 graduados em educação matemática. Para efeitos de seu estudo, o autor concentrou sua atenção em dois estudantes da matemática e três da Educação matemática, por serem representativos de uma variedade de origens e habilidades matemáticas e estarem dispostos a colaborar com o pesquisador para entrevistas e sessões de tutoria fora da classe. O pesquisador obteve os dados por meio da observação não participante de aulas de cada dia, entrevistas com o professor pela administração das aulas e os alunos, bem como sessões de tutoria com os alunos do grupo focal fora da turma. O professor pela administração das aulas explicitou aos participantes os objetos do curso: “ensinar a ler e fazer demonstrações e apresentá-los a certas ideias matemáticas que permeiam a matemática avançada” (MOORE, 1994, p. 250-251). Os temas abordados durante o curso contaram com lógica matemática e métodos de demonstração, o princípio de indução matemática, a teoria dos conjuntos, relações e funções, e o sistema de números reais. Segundo Moore, as provas requeriam passos curtos de dedução em que as inferências foram baseadas em grande parte em definições e axiomas. O professor e o livro didático forneciam todas as definições, axiomas e teoremas. Como resultado de sua pesquisa, Moore (1994) constatou sete principais fontes de dificuldades dos alunos em fazer demonstrações/provas: (D1) – Os alunos não sabiam as definições, isto é, os alunos com dificuldades não eram capazes de indicar definições; (D2) – Os alunos tinham pouco entendimento intuitivo dos conceitos; (D3) – Imagens dos conceitos dos alunos eram insuficientes para produzir provas; (D4) – Os alunos com dificuldades eram incapazes de gerar e utilizar seus próprios exemplos; (D5) – Os alunos não sabiam como usar definições para obter a estrutura de uma prova; (D6) – Os alunos não eram capazes de compreender e utilizar a linguagem e notação matemática; e, finalmente, (D7) – os alunos não sabiam como começar uma prova.

O autor discutiu as dificuldades e percepções de seu estudo em termos de esquemas de compreensão de conceitos, baseando-se em Vinner[6] (1983) e outros autores que distinguem entre a definição de um conceito matemático - o chamado “conceito definição” – e a estrutura cognitiva na mente de um indivíduo associada ao conceito – o chamado “conceito imagem”. Segundo Moore, o primeiro mencionado

> refere-se a uma definição formal verbal que é precisa e explicita o conceito de uma forma não circular, tal como se encontra em livros de matemática, enquanto o conceito imagem refere-se ao conjunto de todas as imagens mentais que se associam ao conceito, juntamente com todas as propriedades que o caracterizam (MOORE, R.,1994, p. 252, tradução nossa).

[6] VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 14, p. 293-305, 1983.

Ainda para o autor, o “conceito imagem” é a estrutura cognitiva na mente de um indivíduo associada ao conceito e é formado a partir de exemplos, diagramas, gráficos, símbolos e outras experiências que o indivíduo tem com o conceito.

Moore ressalva que enquanto os precursores da ideia de conceito definição e conceito imagem estavam interessados nas diferenças entre o conjunto de objetos determinados pela definição do conceito e o conjunto de objetos determinados por um conceito imagem, ele utilizou a distinção para esclarecer as diferentes formas em que é preciso entender os conceitos matemáticos para usá-los em demonstrações. O autor salienta ainda que os dados de seu estudo revelaram um terceiro aspecto da compreensão do conceito: o uso do conceito – que se refere às formas de operar com o conceito na geração ou uso de exemplos ou produção de provas e demonstrações. De fato, na descrição dos resultados, Moore (1994) salienta, por exemplo, que em alguns casos os alunos podiam saber a definição e poderem explicá-la informalmente, mas não serem capazes de usar a definição para escrever uma demonstração. Por exemplo, o autor apresenta o episódio de uma aluna finalista em matemática que sabia que “uma função f é injetora, desde que não haja dois objetos distintos do domínio de f que tenham a mesma imagem no contradomínio”, mas não sabia escrever uma demonstração de que uma função é injetora. Em outros casos, o autor constatou que os alunos pareciam não saber como usar uma definição para estruturar uma demonstração, ficando às vezes confusos com a hipótese da proposição.

Para o autor uma razão comum das dificuldades dos alunos com as definições foi a de que os conceitos eram vistos como abstratos pelos alunos; eles tinham dificuldades em encontrar ou criar imagens mentais dos conceitos e, segundo ele, sem um entendimento informal de um conceito, os alunos não podem aprender a forma escrita da definição. Moore ainda salienta que o “conceito imagem” de um aluno pode ser bastante diferente da definição do conceito que ele/ela tem, não lhe permitindo, desse modo, traduzir a imagem em símbolos escritos.

Aos três aspectos de um conceito, a saber, definição, imagem e uso, Moore deu o nome de “esquema de compreensão de conceito”.

Estudos mais recentes, como os de Heinze e Kwak (2002), salientam que outras pesquisas baseadas em questionários, observação e entrevistas com alunos e protocolos de pensar em voz alta, sugerem que o conhecimento declarativo, ou seja, o conhecimento de axiomas geométricos, definições e teoremas embora necessário, não é suficiente para a proficiência de modo a produzir demonstrações em geometria. Eles mencionam Greeno que defende três tipos necessários de conhecimentos geométricos: (a) teoremas e regras; (b) os padrões visuais, por exemplo, a imagem de ângulos correspondentes que os formam, e, (c) “princípios estratégicos” que, por exemplo, regulam a construção de demonstrações, como sendo essenciais para a compreensão do processo de prova e demonstração em Geometria.

Hanna et al (2009) analisam a importância dos *Softwares* de Geometria Dinâmica (SGD) para a promoção da demonstração e do processo de demonstrar em sala de aula, colocando o problema em termos de continuidade ou de descontinuidade entre argumentação e demonstração. Concentrando-se na ideia de “arrastar”, os autores defendem que o SGD pode servir como contexto para fazer conjecturas sobre objetos geométricos e, portanto, levar à geração de situações de demonstração. Segundo eles o SGD pode desempenhar o papel de mediador na transição entre argumentação e demonstração por intermédio de sua função de “arrastar”, graças ao seu *feedback* instantâneo e com os valores criados na tela, como resultado dos movimentos de arrastar: “a função arrastar abre novas perspectivas para o conhecimento teórico dentro de um ambiente concreto que seja significativo para o aluno” (HANNA, et al. 2009, p. 1-xxiv-xxv).

Selden e Selden (1995) investigaram as capacidades dos alunos para construir ou validar uma estrutura de demonstração de uma declaração matemática. Eles analisaram dados de testes e exames de 61 alunos, que frequentaram cursos introdutórios de matemática no nível universitário. A esses estudantes, foram apresentados itens, que visavam a identificação da estrutura lógica de declarações informais escritas. Houve 8,5% de respostas corretas dadas por apenas 13,5% dos estudantes. Do resultado, os autores concluíram que os déficits na identificação da estrutura lógica de uma declaração implicariam problemas na construção de uma estrutura da demonstração para estas declarações.

Martin e Harel (1989) analisaram as concepções de demonstração de 101 futuros professores (com idade entre 18-22 anos), nos Estados Unidos, do ensino fundamental em curso de matemática que focalizou provas e demonstrações durante um semestre, apresentando-lhes justificações indutivas e dedutivas de uma afirmação considerada válida da teoria elementar de números. Os autores pediram que os sujeitos avaliassem esses diferentes argumentos indutivos e dedutivos e, dissessem quais constituíam demonstração. Eles constataram que apenas 10% dos sujeitos rejeitaram por completo todos os argumentos indutivos, porém, 80% dos sujeitos consideraram uma demonstração válida a pelo menos um argumento indutivo.

Por sua vez, Healy e Hoyles (1998) realizaram um estudo em grande escala, denominado "Justificando e Demonstrando na Matemática Escolar". O estudo investigou 2.459 alunos da 10ª série (14 -15 anos de idade) em 94 turmas de 90 escolas da Inglaterra e país de Gales. O projeto "Justificando e Demonstrando na Matemática Escolar" iniciou em novembro de 1995 com objetivo de analisar o impacto do Currículo Nacional sobre as competências na demonstração em matemática de alunos até a 10ª série. Em particular, o estudo se propôs a (1) descrever as características da justificação matemática e demonstração reconhecida pelos alunos até 10ª série; (2) analisar como os alunos constroem demonstrações; (3) investigar as razões por trás das avaliações das demonstrações pelos alunos, o seu desempenho na construção de prova e seus métodos de construção de provas. Os autores utilizaram instrumento de coleta de dados de múltipla escolha no qual cada afirmação matemática era seguida de, pelo menos, quatro diferentes provas: uma solução empírico-dedutiva, uma solução em estilo formal com argumento circular, e duas soluções corretas, uma em estilo formal e uma em estilo narrativo. A pesquisa incluía também pergunta com um formato aberto, na qual os alunos eram convidados a construir as suas próprias provas, uma para uma conjectura muito conhecida, e outra para uma conjectura menos conhecida. A ordem das perguntas da pesquisa era tal que era possível usar uma conjectura apresentada na questão de múltipla escolha ou modificar um dos argumentos apresentados nesta questão como parte de uma construção da demonstração mais adiante. Por exemplo, os argumentos usados na G1 para provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 ° podia ser modificada para criar uma prova sobre a soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero. A conjectura muito conhecida era G4: “Prove que se você adicionar os ângulos internos de qualquer quadrilátero, a sua resposta é sempre 360°”, e, a conjectura menos conhecida para ser provada foi:

> A é o centro de um círculo e AB é o raio. C representa um ponto na circunferência por onde a mediatriz de AB atravessa a circunferência. Provar se é verdadeiro ou falso que o triângulo ABC é sempre equilátero. Escreva a sua resposta em uma forma que você obtenha a melhor pontuação. (HEALY e HOYLES, 1998, tradução nossa)

As questões envolviam álgebra e geometria. Segundo as autoras, em geral, o desempenho dos alunos na produção de demonstrações foi muito fraco: a pontuação máxima foi de 1,5 nas questões mais conhecidas e, abaixo de 1 para as menos conhecidas. Entre 14% e 62% da amostra teve pontuação 0, portanto nem sequer tinha começado a produzir a demonstração e, no universo que haviam começado a produção da demonstração, entre 28% e 56% teve pontuação 1, com apenas algumas informações relevantes, porém, sem nexo lógico. Ainda constataram que o raciocínio dedutivo foi melhor em questões de Álgebra do que nas de Geometria: por exemplo, ao tentar provar a conjectura de que a soma de dois números ímpares é sempre um número par, 40% dos alunos usaram algum raciocínio dedutivo, enquanto apenas 24% usaram dedução para a conjectura de que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Nenhum aluno da amostra foi capaz de avaliar corretamente os dez argumentos fornecidos na geometria, porém, 20 fizeram com sucesso em álgebra.

As autoras constaram também que argumentos escritos em forma narrativa eram mais comuns do que as apresentações formais e, em geral, estavam associados a uma maior incidência de raciocínio dedutivo. O estudo constatou que os alunos foram melhores em escolher argumentos matemáticos válidos do que em produzi-los e que alunos com pouca ou nenhuma ideia da demonstração (mais de um quarto da amostra de 2459) eram mais propensos a escolher argumentos empíricos.

Ainda, o estudo evidenciou que fatores curriculares foram variáveis significativas no desempenho dos alunos: as horas de ensino da matemática em cada semana, o livro didático utilizado e os programas seguidos afetaram significativamente nas respostas dos alunos, e que a ênfase específica na demonstração melhora o desempenho do aluno.

A principal conclusão do projeto é de que a maioria dos alunos até o 10º ano, depois de seguir o currículo nacional por 6 anos foi incapaz de distinguir entre demonstração e argumento empírico; foram incapazes de usar o raciocínio dedutivo em seus argumentos; muitos ainda continuaram confiando mais na verificação empírica. Ainda, constatou que os alunos foram mais bem-sucedidos quando se tratou de escolher uma demonstração correta produzida por outros, do que em construí-la. A maioria também reconhece que uma demonstração válida é geral e concede um elevado *status* aos argumentos formalmente apresentados, mesmo valorizando argumentos empíricos (HEALY e HOYLES, 1998).

As autoras afirmam que a capacidade de construir, avaliar ou escolher uma demonstração válida não é simplesmente uma questão de realização matemática geral. O mau desempenho de alunos da escola secundária pode ser explicado simplesmente pela falta de familiaridade com o processo de demonstrar. As autoras destacam que o desempenho dos alunos em geometria foi notavelmente baixo, podendo ser consequência do currículo: os alunos tinham pouca familiaridade com estruturas e relações geométricas, mesmo as mais simples.

Outros autores defendem que talvez a pergunta mais natural sobre a concepção de uma demonstração matemática e seu *status* seja o seguinte: Será que uma pessoa envolvida com demonstração em matemática "compreende claramente que uma demonstração de uma afirmação matemática lhe confere o atributo a *priori*, a validade universal e, portanto, exclui a necessidade de quaisquer verificações complementares?" (FISCHBEIN e KEDEN, 1982, p. 128, apud HERSHKOWITZ, et al., 1990). Para responder a esta pergunta, Fischbein e Keden construíram dois questionários, um algébrico e um geométrico. O questionário geométrico incluiu a seguinte declaração: "ABCD é um quadrilátero e R, P, Q, S são os pontos médios de seus lados. É preciso provar que PQRS é um paralelogramo". Seguiu-se uma demonstração da propriedade dada. 397 alunos do ensino médio (entre 15-17 anos), em Israel, foram questionados se aceitariam sua validade. Depois disso, a seguinte questão foi colocada: "V é um cético. Ele acha que nós temos que verificar pelo menos uma centena de quadriláteros, a fim de ter certeza de que PQRS é um paralelogramo. Qual é a sua opinião? Justifique sua resposta.” (FISCHBEIN e KEDEN, 1982, p. 128, apud HERSHKOWITZ, et al., 1990). As respostas desses alunos de 10ª a 12ª séries foram analisadas e três categorias principais foram encontradas:

1. **Consistentemente formal**. Os estudantes nesta categoria compreendem corretamente a natureza da demonstração em matemática.

2. **Consistentemente empírica**. Os estudantes nesta categoria têm uma abordagem empírica das demonstrações matemáticas. Eles acreditam que verificações adicionais de casos particulares dão suporte à afirmação de que foi provado. A demonstração em si não garante a validade absoluta da declaração.

3. **Basicamente inconsistente**. Os estudantes nesta categoria demonstram comportamento inconsistente, aceitando a validade absoluta da demonstração, por um lado, mas não rejeitando a necessidade de controles adicionais, por outro.

Os autores do estudo salientam que “Verificou-se que menos de 10% dos estudantes foram consistentemente formais e cerca de um terço eram basicamente incompatíveis. Metade dos alunos não podia ser classificada de acordo com os critérios”, (FISCHBEIN e KEDEN, 1982, p. 128, apud HERSHKOWITZ, et al., 1990). Os autores constataram também que os alunos não entendiam que a demonstração em matemática não requer verificação empírica adicional: mesmo depois da apresentação de uma demonstração válida de uma dada propriedade, os alunos precisavam verificar com alguns casos especiais, uma indicação de que eles continuavam tendo dúvidas sobre sua veracidade. Estudo de Vinner[7] (1983, apud HAREL e SOWDER 1998) apoiou-se neste resultado e acrescentou que os alunos do ensino médio veem a prova geral como um método para analisar e verificar um caso particular. Martin e Harel (1989) relatam o mesmo comportamento em relação a estudantes universitários. Esses autores mostraram que os estudantes universitários também acreditam que uma demonstração de uma declaração geral sobre um objeto geométrico não garante que a afirmação é verdadeira para todos os casos desse objeto.

[7] VINNER, S. The notion of proof: some aspects of students’ view at the senior high level. In: R. HERSHKOWITZ (Ed.), **Proceedings of the seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Rehovoe, Israel: Weizmann Institute of Science, p. 289-294, 1983.

Para esses estudantes, uma demonstração apenas garante que a afirmação é verdadeira para aqueles casos nos quais os objetos são espacialmente semelhantes à da figura referida na prova. Por sua vez, Schoenfeld (1985, p. 173, apud HAREL e SOWDER, 1998) apontou que, em sua maior parte, a perspectiva de estudantes universitários sobre o papel da demonstração ou é para confirmar algo que é intuitivamente óbvio, ou para verificar algo que já é conhecido ser verdade.

Reiss; Hellmich; Thomas (2002 apud HEINZE e REISS 2003, p. 4-5) constataram que era muito mais difícil para os alunos avaliar “demonstrações” incorretas do que demonstrações corretas: enquanto 67% avaliaram bem as demonstrações certas, apenas 35% deram respostas corretas para as "demonstrações" incorretas. Constataram também que os alunos tiveram melhor desempenho na avaliação de demonstrações com argumento circular[8] do que no reconhecimento do problema de um argumento empírico. Ainda constataram que tiveram melhores resultados quanto à validação da prova correta em um estilo narrativo do que prova correta em um estilo formal. Já Reiss; Klieme; Heinze, (2001), num estudo com 81 alunos de 13º grau da Alemanha, constataram que mesmo nas últimas séries do nível secundário estudantes têm *déficits* em todos os três aspectos do conhecimento metodológico. Segundo os autores, comparando esses resultados com os dados achados na 8 ª série, pode-se dizer que no 13º grau (Ensino médio) há mais alunos que reconhecem as limitações de uma argumentação empírica. No entanto, o número de estudantes que rejeitaram a solução circular foi ainda cerca de um terço. Com base em sua nova análise dos dados, Reiss; Klieme; Heinze (2001) concluíram que as partes essenciais da competência em prova são: o conhecimento metodológico, o conhecimento declarativo, e metacognição.

Heinze e Reiss (2003) entrevistaram 11 alunos escolhidos de uma amostra de 700 alunos participantes de uma pesquisa na Alemanha, na qual os testes eram de múltipla escolha sobre itens de geometria. O estudo tinha por objetivo coletar informações detalhadas sobre os conhecimentos metodológicos dos alunos da 8ª série, relativos à produção de prova. Na entrevista, cada aluno era convidado a pensar em voz alta na avaliação de quatro soluções dadas para

[8] Demonstrações em que um dos argumentos da prova é a tese antes que esta seja estabelecida.

um item de prova geométrica. O item era formulado da seguinte maneira: “C é um ponto qualquer da mediatriz de AB. Prove que: Triângulo ABC é sempre isósceles.” (HEINZE e REISS, 2003, p. 4-5, tradução nossa). Em seguida, eram dadas quatro soluções: uma empírica, uma contendo argumento circular e duas corretas sendo uma formal (usando o conceito de congruência de triângulos) e uma em estilo narrativo (usando o conceito de reflexão). Os alunos tinham de avaliar cada solução e, em seguida, responder a três perguntas: se a prova é universalmente válida, ou se é apenas válida para casos especiais, e se a prova contém um erro. Os autores constataram que quase todos os alunos foram capazes de avaliar corretamente as duas demonstrações válidas. No entanto, a maioria dos alunos achou a prova com o argumento de congruência mais complicada do que a prova narrativa usando o conceito de reflexão. Os autores constataram ainda que vários estudantes aceitavam o argumento empírico à primeira vista, usando esquemas[9] de prova indutiva em suas explicações; os erros mais frequentes dos alunos na avaliação das soluções estavam relacionados com problemas na estrutura da prova: primeiro, a prova como um todo; outros, não percebiam o argumento circular na solução que continha esse tipo de erro; e, muitos alunos utilizavam argumentação circular quando avaliavam as soluções (em particular no caso das soluções incorretas).

Usiskin[10] (1987, apud HAREL e SOWDER, 1998) estudou 99 turmas do ensino médio de geometria em cinco estados nos EUA e descobriu que no final de seu curso, 28% dos alunos não puderam construir uma demonstração simples de congruência de triângulos, e apenas 31% dos estudantes eram considerados competentes na construção de demonstrações. Senk[11] (1985, apud HAREL e SOWDER, 1998) descobriu que apenas 30% dos alunos com curso de geometria contemplando o ensino de demonstrações durante todo o ano chegam apenas 75% do domínio na escrita de uma demonstração.

---

[9] Esquemas de prova indutiva é uma expressão introduzida por Harel e Sowder (1998) para se referir a formas que alunos usam para convencer-se ou persuadir ao outro da validade de uma dada conjectura matemática, baseando-se em argumentos empíricos: medições diretas de quantidades, cálculos numéricos, substituições de números específicos na expressão algébrica, etc.

[10] USISKIN, Z. Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In: M. M. LINDQUIST; A. P. SHULTE (Eds.), **Learning and Teaching Geometry, K-12**, 1987 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 17-31, 1987.

[11] SENK, S. L. **How well do students write geometry proofs?** Mathematics Teacher, vol. 78, n. 6, p. 448-456, 1985.

Lovell[12] (1971, apud HAREL e SOWDER, 1998) descobriu que a maioria de estudantes de 14 a 15 anos de idade, deduz a verdade da declaração geral a partir de uma sequência de casos particulares. O autor verificou que isso se passava também com até 80% de professores do ensino fundamental que estudavam e trabalhavam. Porteous[13] (1986, apud HAREL e SOWDER, 1998) salienta também que muitos estudantes com 11 a 16 anos de idade, não veem a importância da prova dedutiva em geometria, álgebra e, em geral, o raciocínio matemático. Galbraith (1981) relata um estudo realizado na Austrália, no qual o foco era avaliação e construção de provas, de que um terço de cerca de 170 alunos (entre 12-17 anos de idade), não entendiam o papel de contraexemplos em refutações de afirmações gerais. Sobre a importância de contraexemplos em matemática, Heinze e Kwak (2002), destacam que entender que um contraexemplo é suficiente para refutar uma declaração faz parte de uma posição correta do raciocínio matemático e em demonstrações, mas restrições no pensamento científico fazem com que alunos de níveis inferiores e também de nível secundário ou mesmo médio tratem refutações de conjecturas, considerando o contraexemplo como uma exceção (BALACHEFF, 1991[14]; REISS e THOMAS, 2000, apud HEINZE; KWAK 2002).

Pietropaolo (2005), em sua pesquisa de doutorado, investigou a necessidade e a acessibilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica, bem como as implicações que essa inovação traz aos currículos de formação inicial de professores. Tendo pautado por uma pesquisa bibliográfica e documental, o autor entrevistou pesquisadores em Educação Matemática e professores da Educação Básica, cuja prática profissional incluía algum tipo de trabalho envolvendo demonstrações. Pietropaolo constatou que alguns entrevistados eram favoráveis à inclusão das demonstrações nas aulas de Matemática, desde o Ensino

---

[12] LOVELL, K. The development of the concept of mathematical proof in abler pupils. In: M. ROSSKOPF; L. STEFFE; S. TABACK (Eds.), **Piagetian cognitive-development research and mathematical education**. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, p. 66-80, 1971.

[13] PORTEOUS, K. Children's appreciation of the significance of proof. Proceedings of the Tenth International Conference of the Psychology of Mathematics Education. London, England, p. 392-397, 1986.

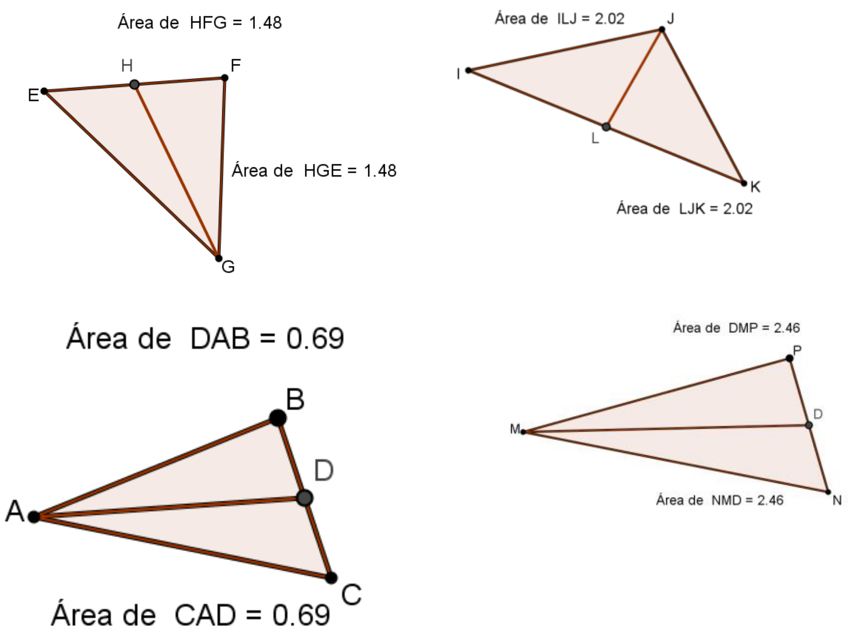
[14] BALACHEFF, N. Treatment of refutations: Aspect of the complexity of constructivist approach to mathematics learning. In: E. von GLASEARSFELD, (Ed.), **Radical Constructivism in mathematics education**. Dordrecht: Kluwer, p. 89-110, 1991.

Fundamental; outros defendiam um trabalho mais voltado às verificações empíricas para se chegar à formalização no Ensino Médio. O autor afirma que os participantes defendiam um trabalho com demonstração matemática que fosse um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação e comunicação, com sentido mais largo que não inclui necessariamente o *status* de rigorosa. Para os professores da Educação Básica "[…] esse processo deveria começar pela informalidade, depois passar pelas demonstrações "semiformais" antes de propor as "formais"". Portanto, vê-se mais uma vez que o autor encontrou resultados similares aos de Knuth (2002b). Contudo, Healy e Hoyles (1998) denunciam esta visão como sendo a principal responsável pelo desempenho fraco que se tem registrado com os alunos no quesito de demonstrações, pois por um lado, eles vêm no ensino fundamental que argumentos empíricos são demonstrações, mas já quando chegam a universidade esta visão deve ser "desmanchada" a favor de métodos dedutivos como únicos aceites para a validação de conceitos em matemática.

Chazan (1993) apresenta um estudo, realizado nos Estados Unidos envolvendo 17 alunos com idade a volta de 17 anos do ensino secundário, com exemplos de falas que lhe levam a defender que a visão dos alunos sobre argumentos empíricos e argumentos dedutivos em matemática pode ser organizada em torno de dois aspectos principais: (i) a evidência é vista como demonstração, e (ii) uma demonstração é vista como uma simples evidência.

A evidência como demonstração: alguns alunos julgam que, tanto a medição como a escrita dedutiva, podem permitir que se chegue a conclusões gerais válidas para determinados objetos (infinitos ou não) que gozam dessa propriedade. Por exemplo, Chazan (1993) afirma que para tentar estabelecer a propriedade que os dois triângulos que se obtêm traçando uma mediana de qualquer triângulo têm área igual, os alunos podem simplesmente medir uma série de exemplos e daí considerarem a conjectura válida. Para ilustração podemos imaginar uma situação hipotética como a que apresentamos na figura 5 que se segue.

Figura 6: Divisão do triângulo por uma mediana



Fonte: O autor

Portanto, segundo esse pensamento, depois de verificar cada um dos casos ilustrados na figura 6 o aluno conclui que a propriedade é válida para qualquer triângulo.

Demonstração é simples evidência: alguns alunos veem as demonstrações em geometria como prova para um único caso, o caso que é retratado no diagrama associado: "alunos com esse tipo de concepção não entendem o aspecto genérico dos diagramas em provas geométricas". Em um item que avaliou os conhecimentos dos alunos do princípio da generalização de uma demonstração, Willian[15] (1979 apud CHAZAN, 1993) constatou que 20% dos alunos da 11ª classe (16 anos), no Canadá, não sabiam que a prova dedutiva mostra a relação de todos os triângulos, enquanto 31% pareciam reconhecer o princípio de generalização.

Como salienta Goetting (1995), embora a matemática seja uma ciência exata, a definição da noção de demonstração não é exata como se poderia pensar. Por exemplo, Bell (1976, p. 26) define demonstração como "uma árvore direcionada de declarações, conectada por implicações, cujo ponto final é a conclusão e cujos pontos de partida ou são dados ou são geralmente fatos ou

---

[15] WILLIAMS, E. **An investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof** (Unpublished doctoral dissertation). University of Alberta, Edmonton, Canada, 1979.

princípios acordados” (tradução nossa). Destaca que as partes que compõem a demonstração serão mais ou menos explícitas dependendo do público a quem é dirigida a redação da prova; partes consideradas óbvias podem ser omitidas e que também a escrita da prova pode apelar para teoremas ou resultados que, nessa época, são aceites pela comunidade. Desse modo, afirma Bell (1976) que a escrita de uma demonstração é “essencialmente uma atividade pública” (p. 24). Para Bell, o significado da demonstração carrega três sentidos:

- **Primeiro sentido**: verificação ou justificação – preocupado com a verdade de uma proposição.
- **Segundo sentido**: iluminação – espera-se que uma boa demonstração transmita uma visão sobre por que uma proposição é verdadeira, sem, porém, afetar a validade de uma demonstração.
- **Terceiro sentido**: sistematização (um sentido caracteristicamente matemático) – organização dos resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas principais, e resultados menores derivados destes (BELL, 1976, p. 24, tradução nossa).

Ainda, o autor destaca que a demonstração é uma atividade essencialmente pública, que segue o alcance de convicção, embora possa ser realizada internamente, contra um imaginário cético potencial.

Para Griffiths (2000), “uma demonstração é um encadeamento formal e lógico de raciocínio que começa com um conjunto de axiomas e avança através de passos lógicos a uma conclusão”. Porém, Willian Thurston (1994, apud WEBER, 2003, p. 1) defende que é importante distinguir entre provas formais e as demonstrações que os matemáticos realmente constroem. Segundo esse autor, nessas últimas, muitos cálculos de rotina e manipulações lógicas são suprimidos não devido a descuido, e sim porque as demonstrações seriam muito longas.

Segundo Davis e Hersh (1981, apud WEBER 2003, p. 2) é impossível determinar com precisão o tipo de argumentos que são aceitos como prova válida pela comunidade dos matemáticos, com exceção de alguns aspectos. Por exemplo, o aspecto marcante que diferencia a prova matemática de outros tipos de argumentos, é que as demonstrações sobre um conceito devem usar a definição desse conceito e devem proceder dedutivamente, ao contrário de examinar casos protótipos ou dar um argumento intuitivo. Entendemos que o ponto que é levantado acerca do princípio das demonstrações serem feitas utilizando definições do conceito e de forma dedutiva, isto é, sem rupturas nos argumentos, é deveras importante para um candidato a professor, pois sem consciência deste aspecto é muito difícil o professor explicitar, para seus alunos, critérios que devem ser tomados em conta para o início e a construção de uma demonstração de uma dada propriedade.

Fetissov (1994) na explicação sobre o que é uma demonstração [em geometria] destaca dois aspectos: sistema axiomático geométrico, e o que garante a validade das propriedades provadas dedutivamente. Para o primeiro aspecto, o autor salienta que um sistema axiomático geométrico é formado por um número relativamente pequeno de verdades fundamentais ou postulados, obtidos por indução e aceitos sem demonstração, as demais verdades geométricas são derivadas desses postulados ou axiomas através de deduções. Já em relação ao segundo aspecto, o da validade das propriedades provadas dedutivamente, o autor salienta o seguinte:

> A validade do procedimento dedutivo decorre do fato de se aplicarem certas leis gerais a casos particulares, sendo absolutamente óbvio que aquilo que é válido no plano geral também o é nos casos particulares. Se eu disser, por exemplo, que a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° e que a figura ABC é um triângulo, então não há dúvida nenhuma de que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. […] é precisamente assim que se raciocina em cada dedução (FETISSOV, 1994, p. 22).

Entendemos que é importante que os dois aspectos enfocados por Fetissov sejam do domínio dos professores, pois, sem, por exemplo, pleno conhecimento do primeiro aspecto, de como funciona o sistema axiomático, os professores podem quase situar-se no mesmo plano de seus alunos no qual não se vê a necessidade de validar a maior parte de verdades geométricas mediante demonstrações; e, em relação ao segundo aspecto, os professores podem não saber explicar como funcionam as regras de dedução que garantem a validade das conclusões a que se chega. Enfim, sem o conhecimento dos dois aspectos que concorrem para a definição da prova/demonstração em geometria, os professores podem não levar a cabo boas ações pedagógicas para o ensino e aprendizagem das mesmas, e muito menos detectar e combater concepções que fogem do sentido de demonstração em geometria aceito, uma delas a de que verificações empíricas podem validar conjecturas.

Ainda há definições que enaltecem a natureza social e contextual da prova, salientando-se para essa tendência os educadores matemáticos. Um deles é Balacheff (1987). Com efeito, Balacheff, ao introduzir o seguinte: “Nós chamamos de prova uma explicação aceita por uma determinada comunidade em um dado momento”, está enaltecendo o lado social da noção de prova. Nesse sentido, Manin (1977 apud Weber 2003, p. 2) afirma que “Um argumento torna-se uma prova após o ato social de aceitá-lo como uma prova”. Bell (1976) deixou também transparecer este ponto de vista quando disse que a escrita da prova é um ato essencialmente público.

van Dormolen (1977) destaca que quando alguém quer resolver um problema matemático, geralmente ele não começa por seguir um raciocínio estritamente dedutivo desde o início. Como regra, ele começa com um período mais ou menos desordenado de tentativa e erro em que tenta obter um controle sobre o problema. Após este ter sido bem sucedido, ele vai continuar a tentar colocar a sua solução em uma forma organizada. Ou seja, ele vai fazê-lo em um argumento estreitamente fundamentado. A única coisa que no final tem de ser escrito ordenadamente é um argumento dedutivo. Então, para o autor, a educação matemática deveria incluir o ensino de como chegar a um argumento dedutivo.

2.2. Causas apontadas como estando na origem dos fracassos no ensino e aprendizagem da demonstração

Muitos educadores matemáticos argumentam que os resultados das pesquisas são consequência de como o ensino da demonstração é abordado na escola, a saber:

- a demonstração é apresentada como um produto acabado, os alunos são meros receptores passivos do conhecimento, não participando da sua construção (ALIBERT e THOMAS, 1991, apud WEBER, 2003):
- O conflito entre a prática dos matemáticos, por um lado, e métodos de seu ensino, por outro, provoca problemas entre alunos;
- A falta de preocupação em destacar o significado da demonstração em matemática; epistemologia inadequada da demonstração junto dos alunos.

Para Usiskin (1980), o ensino da demonstração falhou porque muitas vezes se ignorou as circunstâncias em que os matemáticos as fazem e porque as produzem, bem como a variedade de demonstrações possíveis, para além de como os matemáticos apresentam as demonstrações. Para a autora, criam-se impressões distorcidas nos alunos sobre a demonstração em geometria – parte mais privilegiada da matemática escolar para a introdução dos alunos às demonstrações – ao sujeitá-los à busca de provas para propriedades bem estabelecidas; ao obrigar que os alunos apresentem as demonstrações em duas colunas, ou ao enfatizar apenas demonstrações da geometria. Com efeito, a autora destaca que:

(i) a maior parte do trabalho do matemático circunscreve-se em explorar e conjecturar, não em busca de demonstrações de proposições bem estabelecidas, e certamente não em proposições evidentes, como muitas vezes é feito nas aulas de geometria.

(ii) há uma grande variedade de tipos de demonstrações, não apenas de geometria, todas diferentes entre si: demonstrações usando indução matemática; demonstrações de identidades trigonométricas; demonstrações de limites que usam épsilon-delta; demonstrações em álgebra abstrata; etc., todas elas diferindo em algum aspecto;

(iii) os matemáticos não escrevem demonstrações em duas colunas, como ocorre no seu ensino da geometria.

Para Harel e Sowder (1998, p. 236-237), uma das principais causas das dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão, valorização e produção de demonstrações é o fato de os professores não darem o devido valor ao que constitui evidência na visão dos alunos. Em vez de se ir gradualmente refinando concepções dos alunos sobre o que constitui evidência e justificação em matemática, são impostos métodos de demonstração e as regras de implicação que muitas vezes são irrelevantes para eles. Segundo esses autores, um dos exemplos é o fato de desde a sua introdução pela primeira vez na geometria do ensino médio, exigir-se que as demonstrações sejam escritas em um formato de duas colunas, com “justificativas” formais, cuja necessidade nem sempre é compreendida por um aluno iniciante. Ademais, apresentam-se as demonstrações bem indicadas, e em muitos casos óbvias proposições, ao invés de pedir investigações e conjecturas.

Para Olsker (2011, p. 42) os alunos passam por vários níveis de escolaridades nos quais são sujeitos a raciocínio matemático, justificação e demonstração. Assim, cada um desses níveis (fundamental, médio ou superior) é uma comunidade matemática com diferentes padrões sobre o que constitui demonstração. Por exemplo, o padrão de prova na escola fundamental é muito diferente do da aula de geometria do ensino médio, que por sua vez é diferente do padrão de demonstração nas aulas de matemática na graduação, e assim por diante. Por esses níveis de escolaridade, os alunos vão adquirindo uma grande variedade de percepções ou crenças sobre os critérios (muitas vezes subjetivos) a observar para que uma prova seja considerada válida. Yackel e Cobb[16] (1996, apud WEBER 2003, p. 7); Dreyfus (1999, apud WEBER 2003) também mencionam normas sócio matemáticas como uma das causas da formação de diferentes concepções sobre demonstração às vezes contraditórias. Com efeito, esses autores salientam que em diferentes momentos da vida estudantil de um aluno, diferentes tipos de justificações obrigatórias vão aparecer, porém, qual o tipo de justificação adequada raramente é explicitado ao aluno e, em alguns casos contraditórios. Por exemplo, alguns livros de matemática vão oferecer uma explicação intuitiva de uma propriedade, um exemplo para justificar outra declaração, e uma prova (formal) rigorosa para outra, mas a transição entre o pensamento intuitivo, empírico e formal, não está claramente marcado. Isso tudo pode levar a que alunos desenvolvam concepções inadequadas sobre o rigor, a explicação e demonstração, e pode explicar parcialmente porque alunos apresentam argumentos informais como demonstração mesmo em cursos avançados.

Outras causas que estão por detrás das dificuldades dos alunos com as demonstrações, têm a ver com a compreensão conceitual e estratégias de sua escrita. Segundo essas pesquisas, estratégias ineficazes na produção de demonstrações e falta de compreensão dos conceitos concorrem para as dificuldades que os alunos enfrentam com as demonstrações.

Recio e Godino (2001) destacam que muitas das técnicas de provas inválidas são adequadas em domínios não matemáticos. Por exemplo, tirar uma

---

[16] YACKEL, E.; COBB, P. **Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics**. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 27, n. 4, p. 458-477, 1996.

conclusão geral examinando muitos casos específicos é inteiramente apropriado nas ciências sociais. Com efeito, Bell (1976) sugere que o raciocínio indutivo é a maneira pela qual as pessoas chegam à convicção em situações não matemáticas. Ele afirma que se chega a uma convicção na maioria das vezes como resultado de análise de um conjunto de exemplos pertinentes.

2.3 Alternativas apontadas para a superação de fracassos

À luz dessas leituras, podemos destacar algumas alternativas para a superação de concepções de alunos e/ou de professores que fogem muito do sentido de demonstração mais próximo do dos matemáticos, como segue:

(i) dar atenção aos métodos que enfatizam a demonstração como uma atividade de caráter social, uma forma de comunicar a verdade de enunciado matemático a outras pessoas, ajudando-as a compreender porque é verdadeiro (ALIBERT e THOMAS, 1991, p. 216)

(ii) defendem que introdução dos alunos à geometria deve incluir atividades que estimulem a inferência e a dedução (SHAUGHNESSY e BUGER,1985, p. 426).

(iii) "as conjecturas e a demonstração de sua validade lógica são a essência do ato criativo de fazer matemática [...], além de fazer e investigar conjecturas, os alunos devem aprender a responder à pergunta: Por que isso funciona?", o professor deve estar ciente que "*Conjecturar é uma importante via para a descoberta"* (NCTM, 2000, p. 57).

Contudo, o último aspecto elencado não encontra consenso entre educadores matemáticos, pois, por exemplo, Stylianides (2011) afirma que "práticas de ensino fundamental que promovam ou tolerem uma concepção da prova como uns argumentos empíricos incutem nos alunos hábitos mentais que se afastam significativamente do sentido convencional matemática de demonstração". Dewey[17] (1903, p. 217, apud STYLIANIDES, 2011) alertou os educadores para o perigo de tais práticas, quando disse que qualquer que seja a abordagem preliminar para a aprendizagem, não deve inculcar "hábitos mentais e preconceitos que depois têm de ser deslocados do corpo ou

---

[17] DEWEY, J. **The psychological and the logical in teaching geometry**. Educational Review, XXV, p. 387-399, 1903.

arrancados, a fim de garantir a compreensão adequada do sujeito" (STYLIANIDE, 2011). Com efeito, Healy e Hoyles (1998) apontam diversas variáveis como causas do baixo desempenho dos alunos no levantamento realizado na Inglaterra e país de Gales, uma das quais o currículo, outrora seguido, estimulava que a introdução da demonstração em matemática fosse adiada que os alunos passassem pela fase de explorações e raciocínios empíricos como procedimentos de validação de conjecturas.

2.4 A necessidade da demonstração em matemática e em matemática escolar

Vários autores têm destacado o valor das demonstrações para a Matemática e Educação Matemática. A respeito das demonstrações, Fuchs (1970, p. 20) escreveu o seguinte:

> O colorido e a variedade da paisagem matemática deve sua existência principalmente ao poder criador das mais variadas demonstrações utilizadas pelo matemático. As demonstrações constituem os fios da imensa rede que entrelaça as proposições de uma teoria matemática.

Alguns autores apresentam diferentes papeis para uma demonstração em matemática. Entre eles citamos Griffiths (2000, p. 2) para o qual o propósito de demonstrar um teorema é estabelecer sua certeza matemática: "uma demonstração ratifica a verdade para o matemático tal como o método experimental ou a observação para o cientista natural" (tradução nossa). Mas, segundo Weber (2003), matemáticos e educadores matemáticos defendem que o que institui a veracidade de uma proposição é apenas uma das muitas razões para a construção ou apresentação de uma demonstração. Além de convencer, a demonstração de um teorema ou proposição matemática tem outras funções, a saber:

- Explicação: ao examinar uma demonstração, o leitor pode entender por que uma certa afirmação é verdadeira. Alguns educadores matemáticos (HANNA, 1990; HERSH, 1993) defendem que a explicação deve ser o objetivo principal da demonstração na aula de matemática.

- Sistematização: a demonstração pode permitir que se organizem resultados díspares anteriores em um todo unificado. Ao organizar um sistema dedutivamente, pode descobrir-se argumentos que podem ser falaciosos, circulares ou incompletos (de VILLIERS, 1990).

- Comunicação: a linguagem da demonstração pode ser usada para comunicar e debater ideias com outros estudantes e matemáticos (de VILLIERS, 1990).

- Descoberta ou criação de novas matemáticas (KNUTH, 2002b). Com efeito, de Villiers (2001) destaca que: "Há numerosos exemplos na história da matemática em que os resultados novos foram descobertos ou inventados, de forma puramente dedutiva [por exemplo, geometrias não-euclidianas]" (p. 33).

- Justificação de uma definição: pode-se mostrar que uma definição é adequada para a essência intuitiva de um conceito demonstrando que todas as propriedades essenciais do conceito podem ser derivadas a partir da definição proposta (WEBER, 2003, p. 3).

- Desenvolver a intuição: ao examinar os vínculos lógicos da definição de um conceito, pode-se, por vezes, desenvolver uma compreensão conceptual e intuitiva do conceito de que se está a estudar (PINTO e TALL 1999[18], apud Weber 2003, p. 3).

- Proporcionar autonomia: ensinar aos alunos como demonstrar pode proporcionar-lhes, de forma independente, autonomia de construir e validar o conhecimento matemático novo (YACKEL e COBB 1996, apud WEBER 2003, p. 3).

Weber (2003) defende que a consciência dos usos variados de demonstração pode melhorar o apreço dos alunos para o papel da demonstração em matemática.

Ainda há pesquisadores em educação matemática que veem outra dimensão da demonstração já no contexto da sala de aula. Trata-se Hanna (1995) que distingue entre demonstrações que comprovam e demonstrações que explicam; e Weber (2002) que distingue entre demonstrações que justificam o uso das definições e as estruturas axiomáticas, e demonstrações que ilustram técnicas.

---

[18] PINTO, M.; TALL, D. Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In: O. ZASLAVSKY (Ed.), **Proceedings of the 23rd Conference of PME**. Haifa, Israel, vol. 4, p. 65-73, 1999.

2.5 A pertinência da Revisão da literatura

Os artigos revisados entre teses e dissertações defendidas em nosso e outros programas de Educação Matemática, artigos publicados em periódicos com comité científico tais como ZDM, For the learning of mathematics, Educational Studies in Mathematics; ou em anais com reputação em Educação Matemática como os casos das conferências de PME e CERME; os materiais curriculares de alguns países como os editados por NCTM dos Estados Unidos, ou os PCN do Brasil ou artigos de autores renomados em Educação Matemática publicados por Springer, mas sempre com o cuidado de buscarmos publicações mais citadas em várias pesquisas da Educação Matemática foi o critério de escolha dos artigos revisados e, desse modo, deram-nos certa visão acerca das diferentes perspectivas na abordagem da problemática das provas e demonstração em Educação Matemática. Autores como Zhou e Bao (2009) dão-nos alguns resultados preliminares sobre o desempenho em demonstrações de mestrandos em Educação Matemática de uma amostra da China que ao mesmo tempo são professores de Matemática na Escola secundária, e Hanna et al. (2009) proporcionaram-nos alguns resultados de pesquisadores que formam um grupo de trabalho preocupado com os processos de ensino e de aprendizagem de provas e demonstrações. Percebemos que para este último grupo, sua preocupação não está voltada apenas para provas e demonstrações de uma parte específica da matemática, mas sim, a necessidade de reativar o lugar das provas e demonstrações enquanto aspectos fundamentais da Matemática. Nossa pesquisa está direcionada para estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática e para uma área específica da Matemática – a geometria - do Ensino Básico e Secundário de Moçambique. Portanto, acreditamos que aí reside a primeira diferença e justifica-se a pertinência da pesquisa para a Educação Matemática. Os artigos de Hanna et al. (2009) e de Niss (1999) trazem-nos contribuições que têm a ver com a forma como teremos de lidar com fenômenos observáveis em ambientes em que se trabalha com *softwares*.

Almouloud (2007b), relato-nos os resultados de pesquisa que mostra uma clara dificuldade entre professores do ensino fundamental e médio de entender o significado de demonstração em matemática escolar, dificuldade essa manifestada na concepção de que ilustrar uma noção ou conceito por meio de uma figura é sinónimo de demonstrar.

Parzysz (2006) reporta-nos um estudo junto a futuros professores do ensino fundamental da França em que, utilizando um quadro teórico que desenvolveu – os paradigmas geométricos – deixa transparecer o quão é difícil fundamentar os processos de construções geométricas se não se dominam as diferentes geometrias que compõem esses paradigmas, bem como as armadilhas que as evidências das “figuras” bem como a precisão dos fenômenos em ambientes de geometria dinâmica podem ofuscar bons processos de raciocínio dedutivo em geometria se boas estratégias de exploração desses ambientes não forem desenhados.

Knuth (2002a, 2002b) apresenta-nos uma pesquisa que, embora não sendo única nem pioneira, destaca algumas das concepções enraizadas entre professores de diferentes níveis de ensino, independentemente do nível de formação, que podemos encontrar sobre o ensino das provas e demonstrações.

Os relatos de Healy e Hoyles (1998, 2000) deram-nos subsídios sobre o desempenho dos alunos até as classes finais do ensino fundamental ou médio e inspiraram-nos a pensar no tipo de questões a propor para os sujeitos da nossa pesquisa; a referência de Hershkowitz et al. (1990), Fischbein e Keden (1982) iluminou-nos ainda mais sobre o estudo das concepções de prova em matemática e indicou-nos mais o caminho a seguir em nossa busca dos procedimentos metodológicos.

A revisão da literatura foi a principal fonte de inspiração para a elaboração das tarefas de pesquisa. Muitas das tarefas que construímos são oriundas de pesquisas de vários autores que revisitamos neste estudo.

2.6. Síntese da revisão da literatura

A revisão da literatura forneceu-nos dados que mostram que provas e demonstrações, enquanto objetos de pesquisa, são bastante complexas. As definições dessas duas noções são precisas, mas as concepções em torno delas são variadas, sendo as mais comuns as seguintes:

(i) Tanto os professores do ensino fundamental e médio, como os alunos dos diferentes níveis de escolaridade – desde o nível básico à universidade –

têm recorrido a verificações empíricas para validar propriedades matemáticas, embora se saiba que em matemática evidências empíricas não constituem demonstração.

(ii) Entre professores do ensino básico (fundamental e médio) prevalece a ideia de que há três tipos de demonstrações quanto ao nível de formalidade: (1) demonstrações formais- não adequadas para os alunos; (2) demonstrações menos formais- apenas para alunos excepcionais – e (3) demonstrações informais – as mais indicadas para o ensino - e se baseiam em verificações empíricas para validar conceitos matemáticos.

(iii) os professores tendem a ver as demonstrações de forma pedagogicamente limitada, ou seja, veem-nas como um tópico de estudo e não como uma ferramenta de estudo e de comunicação em matemática. A revisão mostrou ainda que prevalece entre professores do ensino básico a ideia de que a “casa” das demonstrações na matemática escolar é a geometria plana.

(iv) alunos sem ideias de como iniciar uma demonstração são mais propensos a verificações empíricas para validar conjecturas. Mostrou ainda que tanto alunos como professores facilmente conseguem identificar demonstrações com erro, porém, têm tido dificuldade em identificar o próprio erro.

(v) A revisão também mostrou que é mais fácil para os alunos reconhecerem demonstrações com raciocínio circular, do que reconhecer a invalidez de verificações empíricas nas demonstrações.

(vi) A revisão evidencia que mesmo reconhecendo que as demonstrações devem se basear em argumentos dedutivos, os professores do ensino básico continuam aceitando evidências empíricas como provas e a recorrer a exemplos para convencer a seus alunos.

Estes aspectos elencados nesta recapitulação, bem como os outros que poderão aparecer como pertinentes vão nortear o processo de coleta de dados e posteriormente sua análise.

CAPÍTULO III: REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos as ideias das principais teorias que nortearam as análises dos dados do presente estudo. Essas teorias são: Paradigmas e Espaços de Trabalho Geométricos; a tipologia de provas e taxonomia de esquemas de prova. Antes desse quadro teórico, fazemos uma discussão teórica sobre as noções de prova, demonstração e concepções, termos estes mais recorrentes em nosso estudo.

3.1 As Noções de Prova e Demonstração

Marrandes e Gutiérrez (2000) salientam que termos como explicação, verificação, justificação e demonstração têm sido utilizados na literatura com significado de convencer um interlocutor, ou a si mesmo, da veracidade de uma proposição matemática. Contudo, salientam que, às vezes, o mesmo termo pode ter mais de um significado, tomando como exemplo o termo "justificação" que, no sentido de Bell (1976), Balacheff (1988) e Hanna (1995), denota certa diferença nos significados com que é empregado por cada um desses autores. Assim, Marrandes e Gutiérrez afirmam que:

> A partir de agora neste artigo, usaremos o termo justificação para se referir a qualquer motivo dado para convencer as pessoas (por exemplo, os professores e outros alunos) da verdade de uma afirmação, e vamos usar o termo (formal matemático) prova para se referir a qualquer justificação que satisfaz os requisitos de abstração, rigor, linguagem, etc., exigido por matemáticos profissionais para aceitar uma afirmação matemática como válida dentro de um sistema axiomático. (Marrandes e Gutiérrez, 2000, p. 89. Tradução nossa).

Para Montoro (2007), a demonstração é um procedimento ou atividade matemática que serve para estabelecer propriedades dos conceitos, equivalência de definições ou a confirmação de conjecturas. Segundo ela, um aspecto que distingue uma demonstração matemática de uma argumentação em geral, é a necessidade de aquela existir em relação a uma axiomática explícita. Neste contexto, para a comunidade matemática, não haveria muita diferença entre demonstrar ou justificar uma afirmação: ambos os termos significam deduzir sua validade mediante raciocínios logicamente válidos na axiomática pertinente.

Portanto, para os matemáticos, os verbos justificar, provar ou demonstrar indicam a mesma ação, quer no contexto puramente matemático, quer no de ensino, salienta Balacheff (1987) e por conta disso, certos autores utilizam indistintamente os termos prova e justificação com o mesmo sentido. Contudo, Balacheff pontua que isso provoca um obstáculo à pesquisa e defende que deve haver distinção entre as noções de prova e demonstração particularmente no contexto da pesquisa, propondo os seguintes sentidos:

(1) **Explicação** é um discurso que tem por objetivo tornar inteligível um caráter da verdade adquirida pelo locutor de uma proposição ou de um resultado. As razões invocadas podem ser discutidas, rejeitadas ou aceitas.

(2) **Provas** são explicações aceitas por uma comunidade em um dado momento. A decisão de aceitar a explicação como prova tem por base um sistema de validação comum aos membros da comunidade.

(3) **Demonstrações** são as provas da comunidade dos matemáticos e, portanto, respeitam rigorosamente certos critérios – deve ser uma sequência organizada de enunciados segundo certas regras: ou o enunciado é assumido como verdadeiro (axioma), ou é deduzido dos que lhe precedem com ajuda de uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definido. Com efeito, traduzindo o discurso do autor, temos:

> Nós chamamos **explicação** um discurso que tem por objetivo tornar inteligível um caráter da verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado. As razões invocadas podem ser discutidas, rejeitadas ou aceitas.
> Chamamos **prova** uma explicação aceita por certa comunidade num dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate em que o significado é exigência para determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
> No seio da comunidade matemática não podem ser aceitas como provas explicações que adotam uma forma particular. Elas devem ser uma sequência de enunciados organizada segundo regras determinadas. Um enunciado é considerado como verdadeiro ou é deduzido daqueles que lhe precedem com ajuda de uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definido. Nós chamamos **demonstração** estas provas.
> Nós reservamos a palavra **raciocínio,** para designar atividade intelectual, na maior das vezes não explícita, de manipulação de informações para, a partir dos dados, produzir novas informações. (BALACHEFF 1987, p. 147-148. Tradução nossa)

Contudo, Balacheff (2004) destaca que no contexto de ensino e aprendizagem, existem alguns aspectos comuns nas epistemologias dos conceitos prova e demonstração que é preciso reconhecer: (i) a origem da racionalidade matemática é construída sobre e contra a racionalidade baseada em senso comum, apoiada em aspectos culturais, históricos, sociais, religiosos, morais e profissionais; (ii) a relação entre argumentação e demonstração; (iii) a necessidade da demonstração ser considerada à luz da teoria e prática; (iv) o reconhecimento de que conteúdos matemáticos geram dificuldades que devem ser superadas por meio da demonstração, ou mesmo que os conteúdos devem surgir da prova e demonstração; (v) o professor tem um papel fundamental no estímulo e facilitação do processo de ensino e aprendizagem das demonstrações (BALACHEFF 2004, p. 12-13).

Quanto às palavras argumentação e argumento, Fetissov (1994, p. 18) considera argumento de uma demonstração como sendo cada uma das ponderações usadas para convencer o interlocutor e, argumentação como o conjunto de todos os argumentos. Nunes (2011, p. 16) define argumentação como "raciocínios expressos de forma oral, escrita ou gestual utilizados para justificar conjecturas e convencer interlocutores". Estas definições estão todas próximas umas das outras e não se contradizem e pensamos que podemos adotá-las para o nosso estudo.

Embora autores como Balacheff façam distinção explícita entre prova e demonstração, ou Marrandes e Gutiérrez diferenciem apenas justificação da prova sem, porém, fazerem alguma referência ao termo demonstração, e, nós tenhamos optado pela linha que diferencia prova da demonstração para efeitos acadêmicos, entendemos que, o nosso estudo sendo de natureza mais cognitiva, a preocupação deve tender mais para o significado que os estudantes da Licenciatura têm das duas noções e, particularmente, o tipo de argumentos que eles recorrem para validar propriedades ou proposições incluindo situações em que lhes é pedido validarem propriedades em geometria; o papel que atribuem às provas e demonstrações para a aprendizagem da geometria. Enfim, isso nos faz focalizar mais nos argumentos apresentados por eles na validação de conjecturas, avaliação ou produção de provas e demonstrações em geometria plana, do que propriamente a distinção entre as duas noções.

3.2 Discussão teórica das concepções e o sentido adotado neste estudo

A palavra "concepção" foi utilizada há vários anos em pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de matemática sem que ela tivesse tido uma definição didática pelos seus utilizadores (ARTIGUE, 1990, p. 266). É empregada por Brousseau (apud ARTIGUE, 1990) assim como em Confrey (apud ARTIGUE, 1990). Segundo a autora numa acepção dominante o termo descreve "um objeto local" e não se separa claramente do estatuto epistemológico particular de concepções errôneas ou de "conhecimentos locais". Com efeito, Artigue menciona A. Duroux (1982) como tendo descrito o termo "concepção" nos seguintes termos:

> no desenvolvimento do processo de aquisição de conhecimentos, por diversas razões (causas), [...] certas situações são privilegiadas em detrimento de outras. Isto provoca o aparecimento de conhecimentos locais, que operam sobre os subgrupos do campo conceitual, e em certos valores das variáveis das respectivas situações. Esse saber local é que chamamos concepção (A. DUROUX, 1982, apud ARTIGUE, 1990, p.29, tradução nossa do artigo em Espanhol).

É dentro de "objeto local" que também a autora faz sua discussão teórica.

Para Artigue (1990), uma concepção é um ponto de vista local sobre um dado objeto, caracterizado por:

> - situações que lhe servem de ponto de partida: situações ligadas à aparição da concepção ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adequado;
> - sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas;
> - propriedades, invariantes, técnicas de tratamento, métodos específicos (implícitos ou explícitos), (Tradução de ALMOULOUD, 2007a, p. 154)

Ainda segundo a autora, a noção de concepção satisfaz a duas necessidades diferentes:

> - pôr em evidência a pluralidade dos pontos de vista possíveis sobre um mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os modos de tratamento que lhes são associados, pôr em evidência sua adequação à resolução de problemas;
> - auxiliar o pesquisador em didática da matemática a questionar suposta clareza da comunicação didática presente nos modelos propostos de aprendizagem, permitindo-lhe diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos (ARTIGUE, 1990, p. 24, tradução do artigo em Espanhol)

Portanto, a autora enxerga nas concepções a manifestação do conhecimento que o aluno construiu relativamente a um dado saber. Também a autora destaca que para um objeto matemático (único), o aluno pode desenvolver várias concepções e, sob o ponto de vista didático, essa distinção é importante. Com efeito, ela afirma:

> a distinção que temos feito entre o objeto matemático que é único, e as concepções variadas que podem ser associadas ao objeto, nos parece importante. Ela é, dentro da investigação, uma ferramenta de análise das situações-problema a propor aos estudantes e da análise de seus procedimentos (ARTIGUE, 1990, p. 28, tradução nossa do artigo em Espanhol).

Baseando-se nos resultados de uma pesquisa sobre a forma circular em que os pesquisadores definem a *priori* o conceito de círculo caracterizando-o ou a partir de suas propriedades, ou sob o ponto de vista pontual ou global, estático ou dinâmico, elementos ou propriedades privilegiadas, mas todas caracterizações logicamente equivalentes, Artigue ressalta que para além dos alunos do ensino fundamental terem mostrado habilidades de utilizar de forma operatória as concepções muito variadas de círculo, a pesquisa mostrou que há uma estreita dependência entre as concepções e as situações propostas.

Desse modo, a autora defende que ao didático não interessa a categorização final das concepções possíveis relativo a um dado conceito, mas sim estudar a articulação concepção-situação dentro de um dado aprendizado.

Brousseau (1997) restringindo-se à didática da matemática descreve concepção como “cada maneira organizada, mas particular de tratar uma noção matemática” (p. 17) e dá exemplo de que na divisão podemos observar uma dúzia de concepções diferentes.

E acrescenta:

> As concepções podem ser determinadas teoricamente como conjunto de conhecimentos e saberes frequentemente solicitados para resolver situações. Empiricamente como padrões de respostas coerentes dadas por uma parte importante dos sujeitos sobre uma classe de situações (BROUSSEAU, 1997, p. 17, tradução nossa).

Vemos assim que Brousseau interpreta concepções como conhecimentos e saberes frequentemente mobilizados, ou como padrões de respostas coerentes dadas por um sujeito para uma parte importante de classe de situações.

Em contrapartida, Artigue no lugar de considerar conhecimentos e saberes mais mobilizados ou padrões de respostas coerentes, defende que existem dois tipos de concepções: (1) as concepções matemáticas a *priori*, para uma dada noção; e, (2) as concepções desenvolvidas pelos alunos no seu ambiente cultural ou na aprendizagem de certo conceito.

Ainda, Artigue (1990) menciona outros autores que estendem a categorização das concepções. Cita Habiba El Bouazzaoui que, na sua pesquisa que realizou sobre as concepções desenvolvidas por estudantes e professores da escola secundária sobre o conceito de continuidade de uma função, ao efetuar uma revisão detalhada das diferentes noções a volta dela, levanta certo número de distinções:

- Em nível dos estudantes, retoma a distinção entre concepções iniciais, prévias a toda aprendizagem escolar sobre as noções que formam objeto de pesquisas, e as concepções induzidas pelo ensino; dentro das concepções induzidas, a distinção entre concepções controladas pelo ensino e concepções não controladas pelo ensino que alguns pesquisadores precedentes fizeram.

- Em nível dos professores propõe uma distinção entre as concepções manifestadas pelo professor e as concepções que ele inclui em seu ensino.

- Finalmente, ela distingue as concepções “individuais” das concepções “coletivas” que podem estar associadas aos programas e manuais de ensino ou identificadas em gênese histórica.

Philipp (2007, p. 259), descreve concepção como “uma noção geral ou estrutura mental que engloba crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais e preferências” (tradução nossa). Por sua vez, Ponte & Chapman (2006) afirmam que “as concepções podem ser vistas como elementos de natureza cognitiva que estruturam o conhecimento de cada indivíduo e que têm um papel decisivo na sua forma de pensar e de agir”.

Para Almouloud (2007a), “as concepções são modelos construídos pelo pesquisador para analisar as situações de ensino e os comportamentos cognitivos dos alunos.” Com efeito, Almouloud salienta que as concepções permitem interpretações, construções de modelos com propósito de descrever parte do funcionamento cognitivo do aluno.

Balacheff (1995) caracteriza uma concepção por uma quadra (P, R, L, Σ) na qual P representa o domínio de validade da concepção; R, seus operadores; L, os sistemas de representação sobre os quais ela se apoia; e, Σ, uma estrutura de controle. O último componente se refere principalmente aos teoremas-em-ação e as inferências, as quais, segundo a teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por G. Vergnaud, representam os modos de validação que podem ser colocados pelo sujeito para controlar sua própria atividade.

Uma descrição próxima da de Balacheff (1995) foi apresentada pela primeira vez por G. Vergaund (1982, apud ARTIGUE, 1990, p. 29-30) que,

> depois de definir um conceito matemático como uma tríplice (S, I, T) com
> S: conjunto de situações que dão um sentido ao conceito
> I: conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito
> T: conjunto de significantes que permitem representar o conceito, suas propriedades e as situações que permitem apreender, ele apresenta a noção de concepção como tema análogo, em um momento dado do conceito.

Segundo Artigue, a definição de G. Vergnaud sobre concepção perde o seu caráter local e se converte em um objeto ligado ao sujeito, uma vez que a multiplicidade de concepções possíveis não aparece como característica do saber, mas o faz como a manifestação da multiplicidade de concepções possíveis de um mesmo objeto com o decorrer do tempo. Para a autora, neste contexto, "cada concepção é ela mesma global: ela tem e conta a totalidade da estrutura do objeto em momento dado, como as concepções tomam em conta a totalidade do conhecimento sobre o objeto matemático.[19]" (ibid, p. 30, tradução nossa do artigo em Espanhol).

Contudo, Artigue afirma que esta forma de ver a noção de concepção como um "objeto global", apesar de parecer atrativa não é útil para o didático, pois não parece prático e viável, a partir da observação, inferir de um aluno a globalidade de suas concepções sobre este ou outro objeto matemático. E acrescenta:

> De fato, o que interessa ao didático não é a compreensão a fundo dessa estrutura global hipotética senão a identificação de concepções locais. Estas se manifestam na situação e na análise das condições de passagem de algumas concepções locais a outras (ARTIGUE, 1990, p. 31, tradução nosso do artigo em Espanhol).

[19] Encontramos um objeto muito próximo o "conceito imagem" introduzido por Tall e Vinner. De fato, o conceito imagem se define como: a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, a qual inclui todas as representações mentais e propriedades associadas ao processo (ARTIGUE, 1990, p 31, tradução nossa).

Este parágrafo nos remete, portanto, ao que a autora defendeu sempre: uma concepção é um "objeto ligado ao sujeito" e a multiplicidade de concepções possíveis não aparece como uma característica do saber, mas fá-lo como a multiplicidade de concepções possíveis de um mesmo objeto com o decorrer do tempo. E ainda destaca a autora que ao didático não interessa estabelecer um catálogo das concepções possíveis, mas sim, estudar a articulação concepção – situações dentro de certa aprendizagem.

Então, nesta pesquisa usamos a noção de concepção segundo Artigue. Especificamente, quando dizemos concepções de prova e demonstração nos referimos à pluralidade dos pontos de vista manifestados sobre as noções de prova e demonstração; às estratégias mobilizadas para resolver tarefas de prova e demonstração em geometria apresentadas na pesquisa; modo como lidam com conjecturas geométricas bem como o significado e valor que atribuem às provas e demonstrações em geometria plana.

3.3 Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométricos

Inspirados na definição de Thomas Kuhn (1962), segundo o qual

> o termo paradigma, em sentido lato, é o conjunto de crenças, técnicas e valores compartilhados por uma comunidade científica. Ele fixa a maneira correta de propor e interpretar a resolução de problemas [...]. Em sentido restrito, a palavra define também os exemplos significativos que são dados aos alunos e estudantes para ensinar-lhes a reconhecer, isolar e distinguir entre os diferentes constituintes dum paradigma global" (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 169),

e os trabalhos de Gonseth sobre diferentes modos de pensamento como a intuição, a experiência e raciocínio dedutivo, Houdement e Kuzniak (1998-1999, 2003, 2006) categorizam esses modos geométricos de pensar chamados de paradigmas, que se caracterizam pela sua relação com a realidade e se diferenciam entre si por sua relação com a intuição, a experiência e a dedução, de seguinte modo:

- a **Geometria I** (ou Geometria natural): a fonte de validação é a realidade, o manuseável (ações e manipulação de instrumentos – régua graduada, compasso, transferidor ou outros materiais). Está intimamente ligada à realidade. A intuição é considerada como percepção imediata, experimentos e deduções sobre objetos materiais por meio da percepção e dos instrumentos. A relação entre o modelo e a realidade é permanente e pode ser utilizada para validar conjecturas. Segundo os autores, o adjetivo “natural” atribuído à Geometria I não se refere à ideia de natureza em oposição à cultura, mas, ressalta a existência de uma relação forte com a realidade no processo de validação, pois, Geometria I em si é um esforço de abstração da realidade na medida em que o pensamento seleciona certos aspectos de objetos materiais traduzindo-os em padrões, tais como figuras simples (círculos, quadrados,...). A intuição, a experiência e o raciocínio dedutivo é sobre objetos materiais ou materializados graças à percepção ou à implementação efetiva de experimentos mecânicos, tais como dobrar, cortar ou manipular virtualmente. A dedução está liga a experimentos mecânicos e a demonstração de propriedades óbvias é dispensada.

Geometria II (ou Geometria axiomática natural): Nesta geometria, a fonte de validação é baseada nas leis hipotético-dedutivas tão preciso quanto possível, contudo, o problema da escolha de axiomas surge. O vínculo com a realidade ainda existe nessa geometria, na medida em que foi formada para organizar o conhecimento geométrico de problemas espaciais. A axiomatização é certamente uma proposta de formalização, mas não é ainda como sintaxe formal, porque não está desligada da semântica vinculada à realidade material. Daí a conservação do termo "natural” (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 181). Seus objetos são teóricos, mas representações e modelações de objetos reais e concretos. Como destacam os autores, “geometria II pode ser exercida por meio de uma axiomatização parcial, como ilhas de axiomatização" (p. 181). A Geometria Euclidiana plana enquadra-se neste paradigma.

Geometria III (ou Geometria axiomática formalista): essa geometria, a qual surge como resultado da descoberta de geometrias não euclidianas, trabalha com objetos teóricos sem qualquer referência à realidade e seu sistema de validação é bastante formal. Os axiomas não se baseiam mais no manuseável, prevalece o estatuto de raciocínio lógico. O tipo de raciocínio é similar ao da geometria II, mas o sistema de axiomas está completo e independe de suas aplicações possíveis para o mundo. Segundo os autores, “o único critério de validade é a coerência (ou seja, ausência de contradições)” (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2003, p. 4, tradução nossa). Nela a ruptura entre a realidade e o teórico é explícita como destaca Wittgenstein (1975, apud HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 181) com a seguinte expressão: “Os axiomas de uma geometria podem conter nenhuma verdade”[20]. A diferença fundamental com Geometria II reside na integridade de axiomas na Geometria III, e axiomatização parcial na Geometria II.

Segundo os autores, o modelo teórico dos paradigmas geométricos assenta-se no princípio fundamental da homogeneidade entre os diferentes paradigmas, quer dizer, neste modelo, é possível ter um raciocínio dentro de um paradigma sem conhecer a natureza do outro. Alunos e professor não estão necessariamente situados em um mesmo paradigma, fato que tem sido fonte de mal entendimentos.

O **Quadro 1** é o resumo da descrição dos três paradigmas.

Quadro 1: Os aspectos que caracterizam cada paradigma geométrico

	Geometria Natural (G1)	Geometria axiomática natural (G2)	Geometria axiomática formalista (G3)
Intuição	Manuseável, ligada à percepção, enriquecida pela experiência	Ligada a figuras	Interna à matemática
Experiência	Ligada ao espaço mensurável	Ligada a esquemas da realidade	Lógica
Dedução	Perto do real e ligada a experimentos	Demonstração com base em axiomas	Demonstração com base em um sistema completo de axiomas
Tipo de espaço	Espaço intuitivo e espaço físico	Espaço físico e espaço geométrico	Espaço euclidiano abstrato
Estatuto de figura	Objeto de estudo e de validação	Apoio de raciocínio e "Conceito figural"	Esquema de um objeto teórico, instrumento heurístico
Aspecto privilegiado	Evidência e construção	Propriedades e demonstração	Demonstração e relações entre os objetos, estrutura
Objetos	Físicos	Teóricos	
Validações	Perceptivas ou por utilização de instrumentos	Dedutivas	

Fonte: Houdement e Kuzniak (2003, p. 5)

Os autores defendem que o acesso a paradigmas geométricos far-se-á a partir de obras de matemáticos, seu estilo e passa pela resolução de certo número de problemas típicos que na terminologia de Kuhn, são designados

[20] Les axiomes d’une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité

como problemas exemplares. Houdement e Kuzniak observam que na França a Geometria está presente em todos os ciclos de ensino desde o jardim de infância à Universidade. O que obviamente mostra que a geometria não poderia ter o mesmo sentido em todas essas instituições. Esses autores, levando em consideração esses aspectos da história da matemática que mostram que o papel da geometria mudou ao longo dos tempos, propuseram uma classificação das geometrias em paradigmas em virtude ter a vantagem de conciliar duas componentes de formação de professores: os saberes partilhados por uma comunidade científica e as práticas de ensino. Nesse sentido, eles afirmam que

> Esta visão tem a vantagem de conciliar duas componentes da formação de professores. A primeira refere-se à integração no paradigma de crenças relacionadas a saberes compartilhados por uma comunidade científica. A segunda integra uma perspectiva do ensino do paradigma relativo a práticas que o constituam (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 178, tradução nossa)[21].

Os autores defendem que o esforço na formação de futuros professores deve ser feito no sentido de que os mesmos compartilhem conhecimentos e tenham compreensão dos aspectos fundamentais da geometria de cada nível de ensino. Ainda, Houdement e Kuzniak (2006, p. 179), destacam que os trabalhos dos anos 1945-1952 de Gonseth forneceram uma base essencial para a busca de uma epistemologia sustentada por paradigmas.

Uma experiência de Geometria I (em que a validação está ligada, muitas vezes, à manipulação de instrumentos) pode contribuir para dar sentido a axiomas em Geometria II, e levar a interpretações possíveis em Geometria III na qual o critério de validação aceito é a coerência.

Houdement e Kuzniak (2003) salientam que na teoria dos paradigmas:

(a) a passagem de um tipo de geometria para outro é realmente complexa: trata-se de mudança da teoria, mudança esta que pode ser vista como uma revolução ou uma dialética e evolução progressiva;

(b) pelo menos duas transições não são da mesma natureza. A primeira (de Geometria I para Geometria II) diz respeito à natureza dos objetos e do

[21] Cette vision présente l’avantage de concilier deux composantes de la formation d’enseignants. Le premier point rappelle l’intégration dans le paradigme des croyances à des savoirs partagés par une communauté scientifique. Le second intègre une perspective d’enseignement du paradigme en faisant référence aux pratiques qui en sont constitutives (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 178)

espaço. A segunda (de Geometria II para Geometria III) é de caráter epistemológico.

Com efeito, Houdement e Kuzniak afirmam que a prática em cada paradigma pressupõe a existência de um ambiente particularmente complexo, constituído de objetos visíveis e palpáveis, tais como instrumentos de construções geométricas, ou ferramentas de *hardware*, e objetos conceituais, tais como definições e teoremas. É a esse aparato que os autores dão o nome de espaço de trabalho geométrico (ETG).

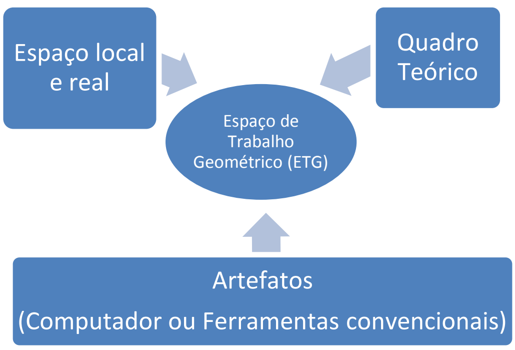
3.3a. O conceito de espaço de trabalho geométrico (ETG)

O conceito de espaço de trabalho fornece uma base para examinar as especificidades inerentes à atividade realizada por um praticante [da geometria], seja ele um especialista ou iniciante (KUZNIAK, 2011).

> Vamos nos referir a espaço de trabalho geométrico (ETG) como o ambiente organizado por e para o geômetra articular de forma adequada os três componentes seguintes:
> - um conjunto de objetos, eventualmente materializáveis em um espaço real e local;
> - um conjunto de artefatos que serão instrumentos e ferramentas a serviço do geômetra;
> - um referencial teórico que pode ser tomado como modelo teórico (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 184, tradução nossa)

O espaço de trabalho geométrico pode ser esquematizado como a **figura 7.**

Figura 7: Componentes do espaço de trabalho geométrico (ETG)



Fonte: Houdement e Kuzniak (2006, p. 185)

O trabalho consiste no estabelecimento de uma relação entre objetos empíricos e objetos teóricos; é uma atividade intelectual em que o indivíduo tem certa maneira e estilo próprio de estabelecer a relação entre os dois tipos de objetos sem necessariamente levar à produção de objetos concretos. Portanto, segundo os autores, o termo “trabalho” refere-se ao estabelecimento de uma relação entre o conteúdo e a forma.

A descrição de ETG explicita quais são os objetos empíricos (por um lado, o meio físico com o conjunto de objetos concretos e tangíveis, e por outro, os artefatos tais como instrumentos de construções geométricas incluindo os próprios figuras) e quais os objetos teóricos (as definições, as propriedades, as figuras geométricas).

Nesta tese utilizamos as expressões “desenho” e “figura geométrica” na acepção de B. Parzysz (1989): “a figura geométrica é o objeto geométrico descrito por um texto que a define, uma ideia, uma criação da mente, enquanto a desenho é uma representação”[22] (PARZYSZ, 1989 apud BULF, 2008, p. 54, tradução nossa)

Ao descrever os componentes do ETG, os Houdement e Kuzniak destacam que:

- o primeiro componente do ETG tem a ver com a realidade do espaço: é um conjunto composto por objetos reais e eventos existentes fora do pensamento do sujeito incluindo a atividade mental dos indivíduos e da atividade reflexiva das comunidades culturais (HOUDMENT e KUZNIAK, 2006, p. 186).

- O segundo componente do ETG tem a ver com todos os artefatos, aqui o termo artefato no sentido de P. Rabardel (1995) isto é, qualquer coisa que pode sofrer uma transformação humana visando certa finalidade. “Em geometria essas coisas são ferramentas e instrumentos tais como régua, esquadro, mas também dobras, ... Rabardel afirma que um instrumento é um artefato sob domínio de alguém graças a esquemas de ação” (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 186).

Por isso, os autores consideram que os artefatos são um componente determinante do espaço de trabalho porque “constituem a faceta mais visível e a mais privilegiada pelos alunos” (ibid, p. 186). A escolha e uso de certo artefato é regulado pelo paradigma no qual se insere. Na Geometria euclidiana clássica

[22] La figure géométrique est l’objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée une création de l’esprit tandis que le dessin est une représentation (PARZYSZ, 1989, apud BULF, 2008, p. 54)

em que construções com régua e compasso assumem lugar de destaque, a chave está na justificativa teórica para uma técnica de construção.

> Régua não graduada e precisão na construção, pouco importam. Assim, GII se difere radicalmente de GI na qual o acabamento da figura é essencial. Inversamente, a escolha dos artefatos, particularmente na ocasião de construção, implicitamente tampouco define o paradigma visado (Ibid, p. 186, tradução nossa).

- Finalmente, o terceiro componente do ETG é o referencial teórico que define o sistema lógico-dedutivo. É este referencial teórico que vai dar sentido aos objetos e artefatos por meio de uma articulação que se cria graças a um conjunto de definições, propriedades e relações. Essa articulação permite obter uma espécie de estrutura teórica que também pode ser considerada como modelo teórico. Sem essa articulação, os objetos e artefatos geométricos não teriam sentido, permaneceriam, desse modo, como simples objetos empíricos.

Para os autores, a palava modelo oscila entre concreto e abstrato, realização material e norma abstrata. Esta variação reflete a distinção entre os diferentes paradigmas envolvidos. O modelo teórico, é o modelo abstrato que resulta ou de uma modelação ou de uma definição *a priori*. No primeiro caso, o modelo teórico resulta de um processo de modelagam por esquema e idealização do mundo real que procura considerar de forma mais fiel. A geometria axiomática clássica entra nessa descrição. No segundo caso, o modelo teórico preexiste e esse modelo é uma interpretação (e, muitas vezes criação) para explicar os objetos e propriedades definidas pelos axiomas. Essa interpretação pode ser baseada em uma representação física ou virtual destinando-se a dar sentido a um sistema de axiomas e declarações dadas *a priori*. Num sentido mais restrito o modelo pode também ser uma realização material de um objeto geométrico-desenho de uma figura geométrica: nesse caso pode criar uma confusão entre trabalho sobre objeto real e o objeto ideal. O referencial de GI não parece referir-se a qualquer estrutura de um modelo teórico, senão admitir definições sensíveis (p. 187).

A interpretação do problema dependenderá dos diferentes paradigmas geométricos associados ao tipo de instituição – escola ou mesmo país, em que a geometria é ensinada. Desse modo, somos levados a distinguir diferentes tipos de ETG conforme a relação com o saber, sobre como ensinar o conhecimento, ou apenas sobre como um problema em geometria é enfrentado por um sujeito particular. Esses ETG são:

ETG de referência. É o espaço de trabalho definido apenas baseando-se em critérios matemáticos. [...]. Nós também podemos considerar este espaço como ETG institucional da comunidade dos matemáticos profissionais (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2006, p. 188-189). Este espaço irá também explicitar o quadro teórico matemático que fundamenta essa referência.

ETG adequado. O ETG de referência deve ser preparado e organizado para se tornar um espaço de tabalho eficaz e adequado em uma determinada instituição e com uma função definida. Isso implica uma reflexão sobre a reorganização dos componentes do espaço de trabalho de referência. Segundo os autores, a escolha do adjetivo adequado implica que este espaço é concebido e operacionalizado para as perguntas feitas nesta instituição. Um dos utilizadores deste espaço é o professor. Primeiro projeta-se o ETG institucional e, em seguida, questiona-se a sua adequação.

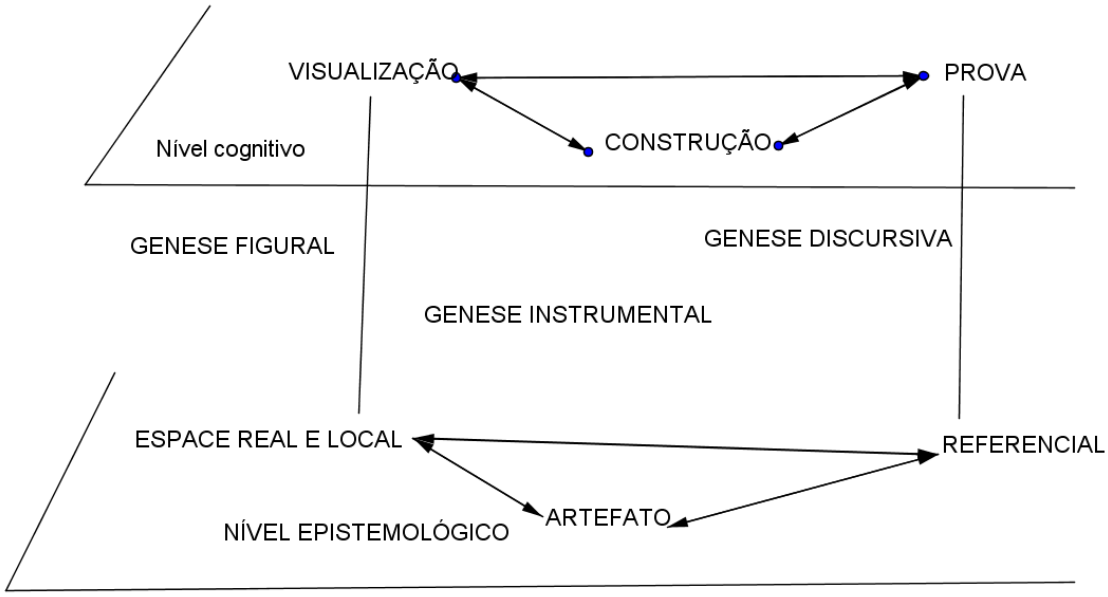
ETG pessoal ou personalizado. O ETG adequado deve ser usado pelos alunos, mas também pelos professores. Cada um se apropria com seu conhecimento matemático e habilidade cognitiva individual. É este espaço de trabalho que chamamos ETG pessoal. É espaço definido por um indivíduo particular (aluno ou professor) resultado de uma reflexão entre o conhecimento de que dispõe e o posto em ação na resolução de um problema geométrico de acordo com suas habilidades matemáticas e cognitivas.

A importância do quadro de ETG reside no fato de definir as condições que permitem a um indivíduo (aluno, estudante, professor, pesquisador,…) realizar o seu trabalho como um geómetra (CHÁCON e KUZNIAK, 2011). Essa função observa-se quando se faz uma reorganização dos níveis epistemológico e cognitivo descrevendo uma rede de relações de três gêneses: a gênese figural; a gênese intrumental e a gênese discursiva. Segundo Chácon e Kuzniak (2011)

> - a gênese figural: precisa o trabalho sobre objetos palpáveis do ponto de vista da visualização das primeiras intuições do espaço;
> - a gênese intrumental: depende do tratamento que envolve o processo de organização e construção de configurações, sobretudo devido ao uso de artefatos;
> - a gênese discursiva: raciocínio que se baseia nas propriedades e formas de raciocínio dedutivo que favorecem o registro discursivo. Funciona em estreita colaboração com o processo de prova (CHÁCON e KUZNIAK, 2011, p. 189. Tradução nossa).

Essa reorganização fornece-nos o seguinte esquema da figura 8.

Figura 8 - Diagrama de espaço geométrico baseado na gênese do raciocínio discursivo



Fonte: Chacón e Kuzniak (2011, p. 204)

Particularmente interessante é o aspecto dinâmico do ETG proporcionado pelos instrumentos de construções geométricas que, na geometria ensinada na escola, constituem, para os alunos, o mais visível e base para a formulação de conjecturas sem, por vezes assegurar um raciocínio hipotético-dedutivo. Para Houdement e Kuzniak (2006) aí reside a importância da gênese instrumental que transforma um artefato em um instrumento com uma dupla orientação: a instrumentalização voltada para o uso do artefato, e a instrumentação que diz respeito à apropriação pelo sujeito dos esquemas de ação. Os objetos e artefatos da geometria constituem a parte empírica: eles só fazem sentido articulados com um conjunto de definições, propriedades, relações em uma espécie de referencial teórico.

A teoria dos paradigmas e do conceito de ETG serviu de meio para analisar o desempenho dos alunos em relação às tarefas propostas de seguinte modo:

(i) os conhecimentos geométricos implícita ou explicitamente manifestados pelo sujeito serão categorizados segundo o nível de apropriação desses conhecimentos – sabe bem; sabe menos e/ou não sabe – refletindo, desse modo, o ETG construido pelo sujeito.

(ii) a forma de validação da propriedade geométrica: dependendo do discurso e dos artefatos mobilizados, a interpretação é segundo a ideia de paradigma geométrico, uma vez que são os paradigmas que determinam os saberes geométricos e suas formas de validação conforme a instituição.

Por exemplo, em uma dada resposta analisamos o conteúdo em dois níveis: o objeto geométrico exteriorizado e a relação desse objeto com os polos teórico e empírico utilizados para a sua caracterização e/ou validação.

3.4. A tipologia de provas de Balacheff (1987)

No artigo “Processus de preuve et situations de validation”, Balacheff (1987) destaca que a demonstração é uma noção importante na matemática cujo aprendizado tem levantado dificuldades significativas. Algumas das causas que frequentemente são invocadas têm a ver com a ruptura de contrato didático[23] entre a prática matemática que se caracteriza pela ação e observação nos anos iniciais do ensino fundamental, para uma “matemática mais teórica” caracterizada pela introdução da demonstração numa segunda fase do ensino fundamental (ou médio). O autor destaca que essa passagem aparece como uma verdadeira ruptura de contrato didático que antes da introdução da demonstração regulava as relações entre os alunos e o professor sobre a atividade matemática.

Contudo, para o autor, o estudo do processo de prova deve ser conduzido em referência tanto à pessoa que implementa como ao conhecimento do sujeito e da situação em que ele usa esse processo. Desse modo, poder-se-á identificar diferentes níveis de provas que podem ter lugar na gênese da demonstração numa perspectiva de aprendizagem. Na verdade, de acordo com Hershkowitz, R. et al. (1990, p. 91), “em Geometria Euclidiana, prova significa um argumento formal dedutivo”. Na pesquisa cognitiva o interesse é sobre os muitos tipos de

[23] Segundo Brousseau (1996, p. 51) contrato didático é o conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor. “[..] é uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro”, sendo as rupturas de contrato realmente as mais importantes.

provas (justificativas) de alunos. Dentro dessa perspectiva cognitiva, Balacheff defende que na aprendizagem das demonstrações os alunos passam por dois tipos de provas até chegar à noção de prova segundo a convicção matemática. Esses dois tipos são: provas pragmáticas e provas intelectuais.

As *provas pragmáticas* são provas que se valem de recursos de ação, por exemplo, figuras, observação de figuras para a validação das propriedades; as *intelectuais* são as que consistem em argumentos que implicam propriedades e relações entre propriedades e sua comunicação caracteriza-se pela linguagem matemática. Os dois tipos de provas são escalonados em quatro níveis: os três primeiros níveis compõem as provas *pragmáticas* (empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico) e o último nível corresponde às provas intelectuais (experiência mental).

Empirismo ingênuo *(empirisme naif):* é o primeiro nível de validação de uma conjectura. O aluno assume uma conjectura como verdadeira, a partir da verificação de vários casos. Segundo o autor, este meio muito rudimentar (e insuficiente), de prova é uma das primeiras formas do processo de generalização (PIAGT 1978, apud BALACHEFF, 1987). Contudo, em uma pesquisa envolvendo alunos de 15 anos, Bell (1979) constatou que 25 por cento deles baseavam suas respostas apenas em verificação de alguns casos. Balacheff (1988) interpreta esse fato afirmando que o empirismo ingênuo constitui uma forma resistente a generalização.

Experiência crucial (*expérience cruciale*): é o segundo nível de validação de uma conjectura por alunos apoiando-se em um caso cuidadosamente escolhido. Após o aluno constatar que funciona naquele caso específico escolhido, conclui que sempre funcionará. Distingue-se do nível anterior, pelo fato de neste segundo nível a preocupação ser a de generalização enquanto no primeiro nível essa preocupação não existe.

Exemplo genérico (*exemple générique*): o aluno explicita as razões para a verdade de uma afirmação (conjectura) por meio de operações ou transformações de um objeto que considera ser o representante característico de sua classe. Neste nível, o aluno busca uma generalização baseada em exemplos, mas procura justificá-la com alguma teoria.

Em relação às provas intelectuais, Balacheff (1988) as subdivide em dois tipos: experimento de pensamento (experiência mental) e cálculo simbólico.

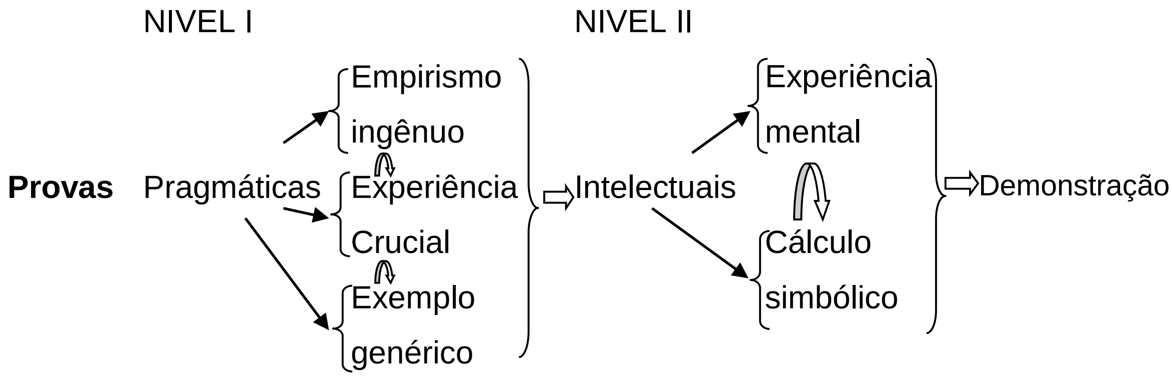
Experiência mental (*expérience mentale*): o aluno invoca uma ação em um caso específico, mas afasta-se de sua concretização. Ainda se observa um desenvolvimento anedótico temporal, mas as operações e as relações fundamentais da prova são designadas pelo resultado da sua aplicação, isto é, os exemplos particulares são tomados não como elementos de convicção, mas sim para ajudar a organizar a justificação ou como suporte de argumentação, quer dizer, as justificações são dissociadas de exemplos específicos.

No "cálculo simbólico" – as justificações são baseadas somente sobre transformações de símbolos.

Balacheff salienta que a evolução de provas pragmáticas para as provas intelectuais e demonstração não só é marcada por uma evolução de características linguísticas, mas também pelo *status* e natureza dos conhecimentos. As provas pragmáticas apoiam-se em saberes práticos, essencialmente envolvendo a ação, enquanto as provas intelectuais exigem que tal conhecimento seja tomado como um objeto de reflexão ou debate, e o nível experiência mental marca a transição entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais. Nesse nível, as ações interiorizadas tendem a generalidade, desprovidas de concretização particular, constituindo-se em gênese cognitiva da demonstração.

Figura 9 - Classificação dos níveis de provas

Esquematizando esta classificação, temos:



Fonte: O autor

Portanto, é segundo esta ordem que interpretamos a classificação de Balacheff (1987) para que a noção de demonstração fique bem construída nos alunos.

Em artigo posterior, Balacheff (1988), destaca que a noção de prova e a respectiva classificação em pragmáticas e conceituais ou intelectuais é mais do ponto de vista das práticas dos alunos do que do ponto de vista lógico.

3.5. Os Esquemas de Prova Segundo Harel e Sowder (1998, 2007)

Interessados na forma como os indivíduos provam ou justificam conjecturas[24] matemáticas, e especificamente, como os estudantes verificam proposições matemáticas para se convencer ou convencer aos outros da veracidade de uma conjectura matemática, Harel e Sowder (1998) propõem uma classificação de provas que se baseia em "esquemas de prova". É importante destacar que esses autores afirmam que a expressão "esquema de prova" tem forte cunho psicológico e centra-se no estudante. Assim, "esquema de prova de uma pessoa (ou comunidade) é composto por aquilo que para essa pessoa (ou comunidade) representa provar ou convencer" (HAREL e SOWDER, 2007, p. 7, tradução nossa). Para esses autores, "Provar é um processo usado por um indivíduo (ou comunidade) para remover dúvidas acerca da verdade de uma proposição". Esse processo de provar consiste em comprovar ou averiguar e persuadir ou convencer. Comprovar ou averiguar é o processo que um indivíduo (ou uma comunidade) emprega para tirar suas próprias dúvidas acerca da verdade de uma conjectura, enquanto que persuadir é o processo que um indivíduo (ou comunidade) emprega para remover dúvidas de outros acerca da veracidade de uma conjectura. Esses autores identificaram três categorias principais de esquemas de prova: (i) esquema de prova de convicção externa; (ii) esquema de prova empírica; e, (iii) esquema de prova analítica. Cada uma destas categorias tem suas subdivisões.

Os autores destacam que cada um dos esquemas representa uma fase de desenvolvimento cognitivo, a capacidade intelectual no desenvolvimento matemático dos alunos.

Descrevemos a seguir cada um desses esquemas.

---

[24] Harel e Sowder (1998) definem conjectura como "uma observação feita por uma pessoa que tem dúvidas sobre sua veracidade". Para esses autores, a observação de uma pessoa deixa de ser conjectura e se torna um fato na visão dele ou dela, assim que se certificar de sua veracidade, por meio de certo mecanismo.

1. Os esquemas de prova de convicção externa – são formas de prova em que tanto o que convence o aluno como o que o aluno utiliza para persuadir os outros, reside fora do problema. Esta fonte pode ser uma autoridade (por exemplo, um professor ou livro), a forma de argumento, a confiança na manipulação de símbolos. Esta categoria compreende as seguintes subdivisões:

1.1 Esquema de prova autoritária – quando o aluno invoca professor ou livro de texto, etc. para validar conjecturas.

1.2 **O esquema de prova ritual**: quando o aluno julga a validade de um argumento estritamente pela aparência do argumento e não por correção do raciocínio envolvido (SOWDER e HAREL, 1998).

Por exemplo, julgar que uma prova em Geometria será válida se for apresentada no formato de duas colunas.

1.3 Esquema de prova simbólica: Quando os alunos tratam os símbolos como se tivessem uma vida independente de qualquer sentido ou qualquer relação com as situações em que surgiram. Por exemplo, a seguinte redução algébrica incorreta $(a + b)/(c + b) = (a + \cancel{b})/(c + \cancel{b}) = a/c$) que alguns alunos podem aceitar como válida (HAREL e SOWDER, 2007, p. 7).

2. Os esquemas de prova empírica – quando a validação das conjecturas depende de fatos físicos ou experiências manipuláveis (HAREL e SOWDER, 1998, p. 252).

Esta categoria congrega as seguintes subdivisões:

2.1. Esquema de prova indutiva – É quando o aluno procura convencer-se ou convencer outros por meio de avaliação quantitativa: medição direta, substituição de números específicos nas expressões algébricas, etc.; quer dizer, se o aluno achar que, verificando uma declaração geral, a partir de um exemplo, ou talvez vários exemplos, é suficiente para provar a sua validade.

Por exemplo, se se pede o seguinte: "Mostre que, para cada número inteiro ímpar n, $n^2 - 1$ é divisível por 8", um aluno faz: "$1^2 - 1 = 0$, que é divisível por 8; $3^2 - 1 = 8$, que é divisível por 8; $5^2 - 1 = 24$, que é divisível por 8. E assim por diante. Portanto, se n é ímpar, $n^2 - 1$ é divisível por 8." Esta validação da conjectura, com base em substituições na expressão $n^2 - 1$ por números específicos, enquadra-se no esquema de prova indutiva.

Harel e Sowder (1998) salientam que não é que os esquemas de prova indutiva sejam por si inúteis: é a confusão que os alunos têm tido entre a admissibilidade da prova por contraexemplo com a inadmissibilidade da prova por exemplos, alguns alunos chegando a afirmar “Estou confuso. Às vezes você pode provar as coisas por meio de exemplos e às vezes você não pode” (HAREL e SOWDER, 1998, p. 255, tradução nossa).

2.2. Esquema de prova perceptiva - São procedimentos em que os alunos tentam validar conjecturas com base em percepções de um ou várias figuras e/ou quando também tentam convencer os outros lhes mostrando uma figura. Como exemplo, Weber (2003) apresenta a seguinte situação: para provar que a sequência numérica $a_n = \frac{1}{n}$ converge, alguns alunos desenham um diagrama ilustrando que quando n cresce grandemente, os termos a_n se tornam arbitrariamente próximos de zero.

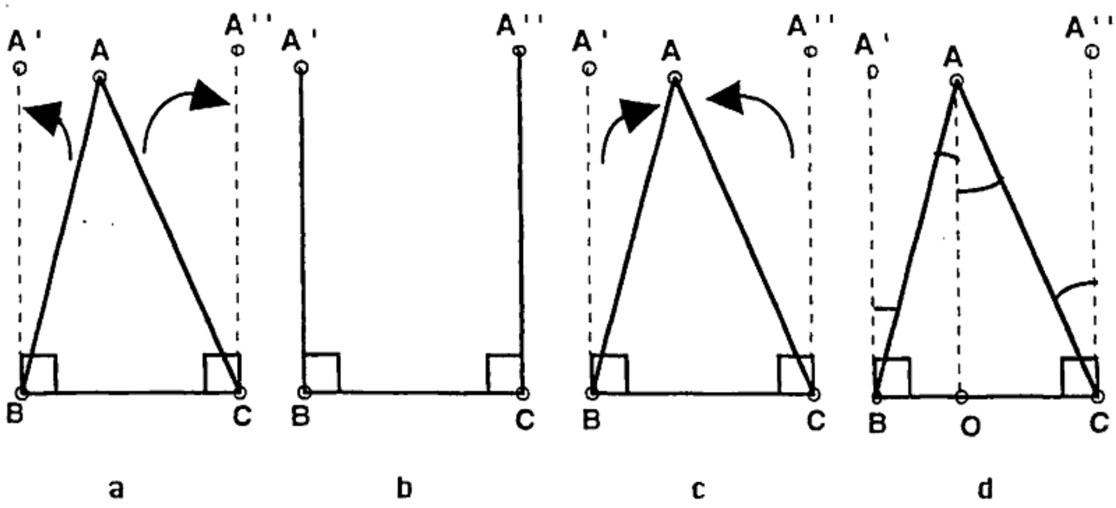
Segundo Harel e Sowder (1998), apesar de suas limitações graves na prova matemática, o esquema de prova empírica tem valor. Exemplos e contraexemplos enriquecem imagens próprias e podem ajudar a gerar ideias ou dar *insights*. O problema surge em contextos nos quais uma demonstração é esperada, e ainda tudo o que é necessário ou desejável aos olhos do aluno é uma verificação por um ou mais exemplos.

3. Esquemas de provas analíticas – quando a validação das conjecturas é feita na base de argumentos abstratos e deduções lógicas. Por sua vez, os autores subdividem esta categoria em:

3.1. Esquemas de provas transformacionais – quando as justificativas se baseiam em operações sobre objetos e antecipação de resultados que logo são convertidos em argumentos dedutivos.

Para esta categoria, os autores fazem menção à prova que Amy apresentou à sua turma sobre como ela interpreta, por meio de uma sequência de figuras, o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, como se reproduz na Figura 10.

Figura 10 - Ilustração de transformações dinâmicas de uma figura



Fonte: Harel e Sowder (1998, p. 259)

Amy vê um triângulo como uma entidade dinâmica, um produto de sua própria construção imaginativa, não de uma percepção passiva. Suas operações foram orientadas pelo objetivo e generalização da conjectura. Ela transformou o triângulo e foi completamente capaz de antecipar os resultados das transformações, isto é, a alteração dos ângulos B e C em 90°, causada pelas transformações, é compensada pela criação do ângulo A, o que levou Amy a deduzir que a soma das medidas dos ângulos do triângulo é 180°.

3.2. Esquemas de provas axiomáticas – quando as validações são formadas por cadeias dedutivas baseadas em elementos de um sistema axiomático.

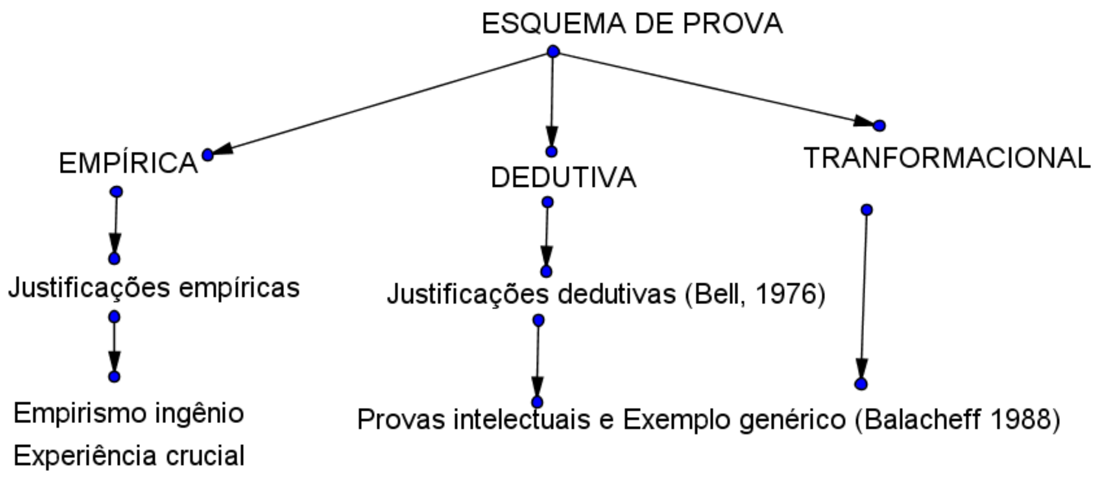
Segundo os autores, todos os esquemas de prova transformacional e provas axiomáticas partilham três características essenciais: a generalidade, o pensamento operacional e inferência lógica. A generalidade tem a ver com um entendimento pessoal de que é preciso justificar objetivamente os seus argumentos, sem casos isolados nem exceções. Pensamento operacional ocorre nos casos em que se tenta antecipar os resultados durante o processo de prova; e, finalmente, quando um indivíduo compreende que justificar em matemática deve necessariamente basear-se em regras de inferência lógica, manifesta-se a inferência lógica. Os esquemas de prova axiomática têm também por base as mesmas três características que acabamos de elencar.

A seguir discutimos a relação entre as duas classificações de provas apresentadas por Balacheff (1987) e Harel e Sowder (1998, 2007) para salientarmos em que as duas classificações assemelham ou diferem.

3.3. Relações com taxonomias de provas propostas por outros

Harel e Sowder (2007) estabelecem relação entre sua classificação com a dos outros: Bell (1976) e Balacheff (1988) da seguinte maneira: os esquemas de prova empírica e os esquemas de prova dedutiva correspondem respectivamente a "justificações empíricas" e "justificações dedutivas" nos estudos de Bell (1976) e a "provas pragmáticas" e "provas intelectuais", de Balacheff (1988). Contudo, dado que Balacheff distingue três tipos de provas pragmáticas (empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico), o esquema de prova empírica corresponde especificamente a empirismo ingênuo e experiência crucial enquanto exemplo genérico corresponde a esquema de provas dedutivas porque, segundo os autores, este último tipo de prova pragmática satisfaz as três características do esquema de prova transformacional: a generalidade, o pensamento operacional e inferência lógica. Também correspondem a esquema de provas transformacionais, as provas intelectuais.

Figura 11 - Esquema de prova



Fonte: O autor

Na visão de Cabassut et al. (2012, p. 173-174), as classificações de Balacheff e de Harel e Sowder são diferentes na sua essência: a classificação de Balacheff evidencia a gênese da prova, isto é, as fases por que os alunos passam até compreenderem o sentido de demonstração, enquanto que as categorias de Harel e Sowder refletem as ideias dos alunos sobre a natureza de um argumento convincente. Para Cabussat et al. isso pode ser reflexo do nível dos alunos com que cada um dos autores trabalhou.

> O que distingue os dois sistemas é o fato de que o sistema de Balacheff envolve uma sequência genética enquanto Harel e Sowder não parecem estar interessados em tal sequência, o seu ponto de vista é mais a coexistência ou mesmo a concorrência entre as concepções de prova e argumentação em vários campos da vida humana (a vida cotidiana e outras ciências). [...] (CABASSUT, et al. 2012, p. 174, tradução nossa).

Mais do que o reflexo do nível dos alunos com que cada um dos autores trabalhou para estabelecer as categorias de prova, interpretamos de Cabassut et al. (2012) que as classificações de Balacheff e de Harel e Sowder diferem em nível epistemológico, uma vez que um estabelece as fases de amadurecimento da noção de demonstração, enquanto outra classificação discute o que, para o aluno, pode ser considerado como uma prova. Portanto, entendemos que

- Balacheff cataloga a evolução do sentido de demonstração

Provas pragmáticas → Provas intelectuais → Demonstração

- Harel e Sowder categorizam o que é, para um aluno, uma prova centrando-se nos motivos que são apresentados para convencer ou persuadir a outrem.

Assim, as ideias de tipo de prova e/ou esquema de prova servem para analisarmos as produções de nossos sujeitos quanto à validação das propriedades e conjecturas que fizeram parte das tarefas. Utilizamos a classificação proposta por Balacheff para analisar a preocupação do sujeito em relação à apresentação da justificativa. Nos casos em que o sujeito assuma uma certa preocupação com a apresentação de justificações, utilizamos a categorização baseada em esquemas de prova proposta por Harel e Sowder.

A articulação dos construtos teóricos relativos aos Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométrico propostos por Houdement e Kuzniak, bem como os tipos de prova propostos por Balacheff e os esquemas de prova segundo Harel e Sowder, fornece-nos o marco teórico que nos permite abordar nossa investigação voltada para o estudo de concepções de prova e demonstração de estudantes de licenciatura em ensino de matemática em Moçambique. A partir desse marco teórico, desenhamos a análise dos dados da pesquisa segundo os seguintes critérios:

1. os procedimentos de validação, quer baseados em manipulação de instrumentos, quer baseados em definições ou propriedades, são utilizados para categorizar as respostas segundo o tipo de provas proposto por Balacheff ou esquema de provas de Harel e Sowder;
2. a articulação entre instrumentos de construções geométricas e a produção da prova, ou a articulação entre elementos teóricos da geometria na validação das propriedades apresentadas, foi classificada segundo o quadro de paradigma e espaço de trabalho geométricos.

Depois de apresentarmos o referencial teórico que orientou nosso olhar sobre os dados da pesquisa, a seguir apresentamos o capítulo no qual descrevemos o *design* da pesquisa que adotamos para esta investigação.

CAPÍTULO IV: DELINEAMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo retomamos os objetivos e a questão que norteiam o estudo, e apresentamos a metodologia e os procedimentos metodológicos que adotamos para a pesquisa e a caracterização dos sujeitos de pesquisa.

4.1 Objetivos e Questão de Pesquisa

A noção de demonstração é de grande importância no estudo da matemática. Smith e Henderson[25] (1956, apud MARTIN e HARL, 1989, p. 41) afirmam, por exemplo, que a "ideia da demonstração é uma das ideias fundamentais na matemática. Ela nos permite testar a implicação de ideias, estabelecendo a relação entre ideias e levando à descoberta de novos conhecimentos". Rav (1999) corrobora também com a ideia ao afirmar que as demonstrações são indispensáveis para a ampliação do conhecimento matemático, são "o coração da matemática, o caminho real para a criação de ferramentas analíticas e catalisadoras do desenvolvimento" (p. 6). Para o autor, as demonstrações são mais do que enunciar os teoremas, "elas são os portadores do conhecimento matemático" (p. 20). Ele afirma que os

> teoremas são, em certo sentido, apenas etiquetas, rótulos para demonstrações, sínteses de informação, manchetes de notícias, dispositivos de redação. Todo o manancial de métodos matemáticos, conceitos, estratégias e técnicas de resolução de problemas, o estabelecimento de ligações entre as teorias, a sistematização dos resultados, todo o *know-how* (conhecimento) matemático está embutido nas demonstrações (RAV, 1999, p. 20. Tradução nossa).

Assim, é importante que futuros professores saiam da formação superior tendo boa compreensão do papel da demonstração em matemática, tendo competências nessa atividade, bem como uma compreensão de como seus próprios alunos concebem a demonstração. Porém, pesquisas a que tivemos acesso destacam que nem sempre os professores têm essas competências em provas e demonstrações, nem mesmo conhecem suficientemente as funções das provas e demonstrações em Matemática. Essas pesquisas mostram que os

---

[25] SMITH, E.; HENDERSON, K. B. Proof. In: P. S. JONES (Ed.), **The growth of mathematical ideas, grades K-12** (24th Yearbook of the NCTM). Washington, DC: NCTM, p. 111-181, 1959.

professores têm tendência em não fazer distinções entre demonstração e argumento empírico. Em face disso, decidimos buscar respostas, no contexto moçambicano, à seguinte questão: **Quais concepções estudantes de Licenciatura em Matemática apresentam em situações que envolvem provas e demonstrações em Geometria plana?**

O objetivo geral da pesquisa é "Analisar as concepções de prova e demonstração em geometria plana dos estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique" e como objetivos específicos:

1. Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de licenciatura em matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações.

2. Identificar o papel que estudantes de licenciatura em matemática atribuem à prova e demonstração em matemática.

3. Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em matemática.

4. Analisar que critérios utilizam para avaliar provas e demonstrações ou argumentos que lhes convencem de que uma propriedade em geometria é verdadeira.

Entendemos que esta questão e esses objetivos são pertinentes para a pesquisa porque estudos mostram que as concepções de professores sobre uma demonstração e suas funções influenciam de alguma forma as escolhas e as práticas de ensino desses professores, bem como influenciam como avaliam as produções de seus alunos. Ainda muitos pesquisadores têm apontado que o conhecimento e concepções dos professores desempenham um papel fundamental para o sucesso de práticas em sala de aula (FENNEMA e FRANKE, 1992; THOMPSON, 1984 apud VARGHESE, 2009, p. 3, tradução nossa). Varghese (2009) destaca que

> dado que concepções do professor sobre prova influenciam inevitavelmente tanto o papel como a natureza do ensino das demonstrações dentro de uma sala de aula, o conhecimento limitado neste aspecto do ensino geralmente provoca sentimentos de incerteza e a falta de confiança quando se trata de ensinar o conceito.

O autor associa elevados níveis de confiança a elevados níveis de compreensão e, inversamente, baixos níveis de confiança com baixos níveis de compreensão conceitual (tradução nossa). Jones (1997) defende que o nível de confiança no assunto depende do conhecimento do objeto pelo professor. Além disso, Stylianides (2011) menciona autores como Ball, Thames e Phelps, 2008; Goulding, Rowland e Barber, 2002; Ma, 1999, que defendem que os professores devem ter bons conhecimentos acerca de uma demonstração, pois a qualidade de aprendizagem que os alunos recebem em sala de aula depende da qualidade do conhecimento de seus professores.

Segundo argumenta Stylianides (2011), não é possível ter um bom conhecimento sobre concepções dos estudantes acerca da demonstração sem um entendimento sólido das ideias matemáticas que sustentam essas concepções.

Para esse autor, o ensino eficiente de demonstrações exige aos menos três tipos gerais de conhecimentos inter-relacionados: (1) conhecimento de professores sobre demonstrações; (2) conhecimento de concepções de alunos sobre prova e demonstrações; (3) conhecimento pedagógico para o ensino de provas e demonstrações.

O autor destaca que os professores devem compreender a diferença entre argumentos empíricos e demonstração. Também destaca que a compreensão da taxonomia das concepções dos alunos sobre prova assim como os diferentes níveis em que essas concepções se manifestam, são outros conhecimentos importantes que os professores devem possuir. Para o autor, e nós concordamos com ele, sem esses conhecimentos é difícil avaliar os diferentes estágios de pensamento dos alunos a respeito das provas em matemática. Ainda para este autor, esses conhecimentos podem ser considerados como exemplos do que Shulman (1986) chama de conhecimento pedagógico do conteúdo, isto é, o conhecimento sobre “o que faz para que a aprendizagem de tópicos específicos (neste caso o da prova e demonstração) se torne fácil ou difícil”.

Nossa hipótese é que as estratégias que os estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática, usam para produzir provas e demonstrações em Geometria da escola básica refletem as concepções que eles têm acerca do seu significado, papel e valor que elas desempenham nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

O estudo de concepções de estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática sobre prova e demonstração em geometria pode ser pertinente para que, identificadas as concepções prevalecentes entre os estudantes, se possam construir intervenções acertadas de formação no contexto moçambicano. Vários autores destacam que um dos graves equívocos dominante entre os estudantes de todos os níveis de escolaridade, incluindo professores em formação ou mesmo em exercício no ensino fundamental ou básico em geral, é utilizar argumentos empíricos como demonstração. Martin e Harel (1989, p. 41-42), chegam mesmo a afirmar que "[se] professores [do ensino fundamental] levam seus alunos a acreditar que alguns exemplos bem escolhidos constituem uma demonstração, é natural esperar que a ideia de demonstração em geometria do ensino médio e outros cursos será difícil para os alunos".

Os futuros professores precisam saber e interiorizar, desde a sua formação, que "em matemática argumentos baseados apenas em evidências empíricas para generalizações, não são aceitos como demonstrações" (GOETTING, 1995, p. 11-12). Gutiérrez e Jaime (1999) afirmam que muitas vezes futuros professores não têm o conhecimento e a compreensão do conteúdo matemático necessário para aplicar as inovações metodológicas propostas e que, o conhecimento matemático limitado dos mesmos é um obstáculo para a sua formação didática e pedagógica.

4.2 Metodologia e Procedimentos de Pesquisa

4.2.1. A abordagem metodológica da pesquisa

Nossa pesquisa é de natureza qualitativa, pois como salienta Creswell (2010), esse tipo de pesquisa é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano. Este autor afirma que

> Uma das principais razões para se conduzir um estudo qualitativo é que o estudo é exploratório. Isso em geral significa que **não foi escrita muita coisa** sobre o tópico ou **sobre a população que está sendo estudada, e que o pesquisador procura ouvir os participantes e desenvolver um entendimento baseado nas ideias deles**. (CRESWELL 2010, p. 52. Grifo nosso.)

Em nossas buscas bibliográficas tivemos dificuldades em encontrar fontes que retratam o estado da arte de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de prova e demonstração no contexto de formação de professores em Moçambique. Assim, entendemos que a pesquisa é de natureza qualitativa porque fizemos um estudo exploratório sobre concepções de prova e demonstração no contexto moçambicano, no qual poucos estudos estão disponíveis sobre esse tópico.

Segundo D'Ambrósio. (2006, p. 11), a pesquisa qualitativa, também chamada pesquisa naturalista, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes. Chamada também de método clínico, a pesquisa qualitativa emergiu da psicanálise e da antropologia. A sua metodologia por excelência repousa sobre a interpretação e várias técnicas de análise de discurso. "Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas" (D'AMBRÓSIO, 2006, p. 19).

No nosso estudo os sujeitos exteriorizaram suas ideias sobre as noções de prova e demonstração (em Geometria plana), o que pode mostrar que procuramos ouvir o discurso e gestos que dão pistas sobre suas concepções acerca das provas e demonstrações em geometria.

Já para Garcia (2006) o adjetivo "qualitativa" é adequado às pesquisas que reconhecem:

> (a) a transitividade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARCIA, 2006 p. 88).

Goldenberg (2004) destaca que

> na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc., (GOLDENBERG, 2004, p. 14).

Não levamos a cabo um estudo de âmbito nacional, mas sim circunscrito a um grupo de estudantes de uma instituição de formação profissional e, dentro dessa instituição, um grupo de estudantes de 4º ano de Licenciatura em Ensino de Matemática de dois locais. Portanto, em primeiro lugar, não estávamos preocupados com a representatividade do grupo, mas apenas as concepções desses sujeitos para com o nosso objeto de estudo. Nosso objetivo foi mapear as concepções desse grupo sobre prova e demonstração em geometria. Assim, pelo seu caráter, vemos que os resultados desse estudo não são generalizáveis a todos os estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique, mas a validade é para esse grupo. Contudo, entendemos que o estudo pode provocar reflexões na nossa instituição como um todo e aí está a nossa grande aposta ao enveredarmos por este estudo – provocarmos uma reflexão sobre a formação de nossos licenciandos a respeito de um tópico tão complicado, difícil e polêmico em toda a Educação Matemático, que é o tópico de provas e demonstrações como alguns autores caracterizam esse sub tópico da matemática. Assim, entendemos que muitos dos adjetivos qualificativos apontados por Garcia (2006), ou a descrição dada por D'Ambrósio (2006) ou Goldenberg (2004) são aplicáveis ao nosso estudo.

4.2.2 O processo de coleta de dados

A coleta de dados envolveu questionário, e entrevista semiestruturada. Segundo Freixo (2011, p. 197) o questionário é um instrumento de colheita de dados "constituído por um conjunto de enunciados ou de questões que permitem avaliar as atitudes, e opiniões dos sujeitos ou colher qualquer outra informação junto desses mesmos sujeitos", enquanto na entrevista semiestruturada, o investigador procura obter por meio de entrevistas aspectos considerados mais relevantes de um problema de investigação. Galbraith (1981) pontua a importância da recolha de dados clínicos para investigar a compreensão das demonstrações pelos alunos e, Martin e Harel (1989) defendem que entrevistas precisam ser realizadas para determinar a verdadeira compreensão dos alunos.

Em nossa pesquisa, o questionário serviu para os sujeitos deixarem registrado em papel seus pensamentos e ações relativas a provas e demonstrações em geometria, enquanto que a entrevista serviu para os mesmos participantes da pesquisa terem a oportunidade de explicar, oralmente, aquilo que em papel não está claro, recolher o seu nível de compreensão de algumas das tarefas cujas soluções mostram-se não claras, bem como esclarecer alguns dos pontos emergentes do questionário que as respostas não parecem claras. A maior parte do questionário foi composta por tarefas abertas em o sujeito tinha de desenvolver suas ideias a respeito de cada uma delas sem ser limitado pelas alternativas pré-definidas. Apenas uma tarefa era fechada, mas mesmo assim, em alguns itens da mesma era preciso justificar a escolha.

A coleta dos dados compreendeu três fases:

Primeira fase: Os sujeitos responderam o questionário proposto pelo investigador.

A aplicação do questionário foi presencial e realizou-se entre três e quatro dias e cada sessão compreendeu um certo número de tarefas diferentes umas das outras. De cada vez era apresentada uma tarefa em uma folha com respectivo espaço para resposta. As instruções relativas a cada item apareciam no topo de cada página e logo a seguir o espaço reservado para a(s) resposta(s). A duração variou de tarefa para tarefa. A realização da tarefa seguinte foi condicionada pela conclusão e entrega da resolução da anterior. Só após isso era entregue o enunciado da tarefa seguinte. A duração de cada sessão variou entre 45 minutos e uma hora. Nada mais que isso.

Segunda fase: Parte das tarefas propostas no questionário foi realizada individualmente e/ou em grupos em meio informático utilizando *software* de geometria dinâmica, especificamente o GeoGebra, versão 4.2. Esta fase envolveu parte dos sujeitos da pesquisa, por incompatibilidade do tempo entre o pesquisador e os restantes estudantes participantes da pesquisa.

Terceira fase: o investigador entrevistou parte dos participantes (15 dos 19 participantes da pesquisa) individualmente. Cada entrevista levou cerca de 180 minutos em média. As entrevistas tinham uma parte comum e outra parte específica a cada sujeito. A parte comum eram perguntas do tipo: para si, o que a noção de prova significa? E demonstração? Em sua opinião, por que acha que se ensinam provas ou demonstrações em matemática escolar? Na avaliação de argumentos em relação à certa propriedade, o que tomava em consideração para aceitá-lo que constituía uma prova ou rejeitá-lo? Etc. Quanto à parte específica a cada entrevista, as perguntas versavam sobre aspectos particulares que o entrevistado apresentou nas respostas ao questionário. Cada entrevista foi gravada em áudio e posteriormente transcrita para fazer parte do protocolo de coleta de dados. As entrevistas decorreram depois da realização de todas as tarefas do questionário, pois, desse modo permitiu que o entrevistador visse, de forma breve todas a respostas de cada sujeito ao questionário.

Fazem parte do protocolo de dados, o questionário respondido e as gravações das entrevistas com as respectivas transcrições. Assim, o processo de análise dos dados baseou-se na transcrição das gravações feitas, nos protocolos das produções dos participantes da pesquisa e nas anotações do investigador.

Com dados desses instrumentos fizemos a sua checagem por triangulação de método. Segundo Araújo e Borba (2006), em uma pesquisa qualitativa, triangulação “consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados” (p. 37) sendo a triangulação de fontes e a de métodos as principais. A triangulação de fonte consiste em checar, por exemplo, as informações colhidas em uma entrevista com as atas de uma reunião sobre o mesmo assunto, enquanto se se observa o trabalho de um grupo de sujeitos e em seguida entrevista-se a seus membros sobre o trabalho desenvolvido, trata-se da triangulação de método. No nosso caso foi por meio de triangulação de método que analisamos os dados da pesquisa, pois, checamos os dados que obtivemos no questionário por meio de uma entrevista sobre as respostas produzidas no questionário.

Na análise dos dados apenas contemplamos os dados obtidos na primeira e terceira fase, isto é, o questionário respondido individualmente e as entrevistas realizadas.

4.3. Os sujeitos da pesquisa

Nossa pesquisa envolveu estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática que estudam na Universidade Pedagógica de Moçambique, nas Delegações da Beira e de Nampula, que cursam o 4º ano. São 19 estudantes que participaram efetivamente da pesquisa (sendo 8 em Nampula e 11 na Beira). Inicialmente tivemos 12 estudantes na Beira tendo desistido um aluno por incompatibilidade do tempo disponível dele com o nosso e, em Nampula começamos com uma turma de 19 estudantes, mas destes apenas 8 trabalharam efetivamente conosco, os restantes desistiram por vários motivos sendo o mais invocado a falta de tempo que conciliasse os afazeres deles com o nosso trabalho. O trabalho de campo coincidiu com os últimos meses do ano acadêmico na Universidade o que, em certa medida, influenciou sobremaneira na disponibilidade dos estudantes do 4º ano para sua participação, devido ao currículo que estão seguindo, que se subdivide em duas vertentes: ensino de matemática com habilitação (*minor*) em ensino de informática; ensino de matemática com habilitação (*minor*) em ensino de física. Estas subdivisões fizeram com que em alguns dias da semana houvesse separação dos alunos devido à diferença de atividades curriculares a desenvolver, fator que limitou o nosso trabalho com eles, particularmente com os estudantes da delegação de Nampula.

Dos 19 estudantes, 17 ingressaram na Universidade Pedagógica provenientes do Ensino Geral (12ª classe), dentre os quais 14 sem experiência de ensino e, outros 3 com experiência de ensino na Escola Primária do 2º grau (6ª e 7ª classes); 2 obtiveram o nível médio a partir de instituições de formação de professores para o ensino primário (1ª – 7ª classe), portanto têm alguma experiência de ensino, mas não no nível secundário (8ª – 12ª classe).

A construção da amostra foi por conveniência: contemplamos apenas estudantes do 4º ano da Universidade Pedagógica por todos eles terem tido geometria euclidiana plana no 2º semestre do 1º ano, fator que poderia evitar alegações de que nunca viram geometria, ou nunca viram demonstrações elementares em geometria da escola básica, e sendo seu último ano de formação, podemos aferir também o conhecimento que eles desenvolveram ao longo dos quatro anos de formação sobre as provas e demonstrações em geometria plana.

Trabalhamos com estudantes de Nampula e da Beira por uma questão de facilidades de contato: na Beira, é donde viemos e Nampula é nossa cidade natal e a direção Pedagógica mostrou-se bastante receptiva para conosco. Quanto ao grupo alvo, poderia ser de qualquer uma das dez delegações da Universidade Pedagógica, porque os programas e conteúdo de ensino estão uniformizados desde que foi introduzida a reforma curricular em 2009.

No capítulo a seguir, o capítulo V, apresentamos as situações-problema, as tarefas que foram contempladas no questionário, incluindo a respectiva análise didática.

CAPÍTULO V: TAREFAS PROPOSTAS E SUA ANÁLISE DIDÁTICA

Nesta parte de trabalho apresentamos as tarefas que foram submetidas aos sujeitos de nossa pesquisa com a respectiva análise didática a *priori* e a *posteriori*. Fazemos também a discussão dos resultados. Para cada tarefa fazemos uma introdução dos objetivos e uma análise a *priori*. Imediatamente após a análise *a priori* de cada tarefa apresentamos a análise *a posteri*or, sempre que possível acompanhada de dados da entrevista.

As tarefas aqui concebidas foram adaptadas pelo pesquisador a partir da literatura revisada ou a partir de livros didáticos de Moçambique.

São tarefas que achamos que podiam fornecer dados necessários para respondermos à questão norteadora – geral – da pesquisa, bem como aos objetivos específicos que propusemos para o nosso estudo. Como foi apresentado no capítulo 3, o objetivo deste estudo é "Analisar as concepções de prova e demonstração em geometria plana de estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique". Assim, as tarefas foram propostas tendo como foco o significado que os sujeitos de pesquisa atribuem às provas e demonstrações, as estratégias que utilizam para produzi-las ou avaliá-las, o papel que as atribuem para a aprendizagem da matemática.

Desse modo, as atividades que propomos a seguir foram projetadas para fornecer respostas ao nosso objetivo geral da pesquisa a partir dos respectivos objetivos específicos que apresentamos novamente a seguir:

1. Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de licenciatura em matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações.

2. Identificar o papel que estudantes de licenciatura em matemática atribuem à prova e demonstração em matemática.

3. Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em matemática.

4. Analisar que critérios utilizam para avaliar provas e demonstrações ou argumentos que lhes convencem de que uma propriedade em geometria é verdadeira.

Com esse olhar, propusemos atividades com objetivo de obtermos dados que permitem responder à questão de pesquisa proposta para nortear o estudo.

Depois de cada análise a priori de cada tarefa, apresentamos e discutimos os dados da pesquisa. Os dados compreendem os protocolos produzidos pelos sujeitos quando da resolução das tarefas do questionário e as respostas dadas durante as entrevistas. De cada vez, apresentamos os resultados gerais de cada tarefa e para cada uma delas reproduzimos os protocolos de alguns dos sujeitos com respostas significativas para a nossa pesquisa. Checamos as respostas do questionário com extratos de algumas das entrevistas. Uma vez que participaram efetivamente do primeiro instrumento de coleta de dados, a sequência, 19 sujeitos dos quais 14 conseguimos entrevistar, a análise dos dados concentrou-se em apenas seis, cujas respostas se revelaram pertinentes para o nosso objetivo da pesquisa. Uma vez que a pesquisa decorreu em dois locais diferentes, nomeadamente na Beira e em Nampula, optamos por apresentar o extrato de protocolos de três sujeitos da pesquisa para cada uma delas não necessariamente os mesmos para todas as tarefas, mas sim, de acordo com o interesse do pesquisador orientado pela questão da pesquisa.

O questionário foi o primeiro instrumento de coleta de dados realizado. Levado a cabo nas Delegações da Universidade Pedagógica da Beira e de Nampula, em Moçambique, a aplicação ocorreu entre os meses de outubro e novembro de 2013. Era composto por 15 tarefas que os sujeitos realizaram em diferentes dias. Cada tarefa era apresentada em uma folha e para cada uma delas, os sujeitos de pesquisa tinham uma ou mais páginas para colocarem suas respostas. Cada participante recebia seu enunciado de cada vez. O tempo médio de cada tarefa foi entre 5 e 10 minutos de duração.

No âmbito da apresentação dos resultados da pesquisa, decidimos analisar e discutir as respostas das tarefas 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 e 15 por serem tarefas mais significativas quanto às estratégias a verificar nos sujeitos da pesquisa, bem como na riqueza quanto às propriedades e significados de prova e demonstração envolvidos nessas tarefas. Outras razões, como o tempo disponível, o número elevado de tarefas e motivos pessoais ditaram, em grande medida, a não inclusão de todas as tarefas. Por essa razão que as tarefas 5, 7, 11, 12, 13 e 14 são apresentadas com sua análise *a priori* no apêndice.

Na apresentação das respostas das tarefas, não distinguimos se o sujeito é de Nampula ou da Beira e o número varia de algumas tarefas para outras, dado que durante a fase de resposta ao questionário, alguns dos sujeitos foram desistindo, sobretudo na delegação de Nampula. Em geral, consideramos que o número fixo de participantes é de 19, uma vez que é este número que prevaleceu em toda a pesquisa. Na Beira participaram desde o início da pesquisa Amorim, Cuco, Dário, Elísio, Fred, Getúlio, Herculano, Luís, Jackson, Kelmon, Ludovico e Baú, tendo desistido Baú. Em Nampula foram inicialmente Bonifácio, César, Dionísio, Emerson, Fernão, Gomes, Hélder, Iran, Lucas, Moisés, Nilza, Ofélia, Paulo, Quitério, Rui e Tarcísio, dos quais apenas completaram todo o questionário Dionísio, Emerson, Fernão, Gomes, Iran, Nilza, Ofélia e Paulo.
Por questões éticas, é preciso salientar que os nomes aqui mencionados são fictícios, não correspondendo ao verdadeiro nome dos sujeitos de pesquisa para efeitos de preservação da integridade e manutenção de anonimato na apresentação dos resultados do estudo.

Apesar da variação na apresentação dos extratos das respostas do estudo, constituíram grupo focal Cuco, Fred, Kelmon, Fernão, Ofélia e Gomes pela natureza das respostas e a possibilidade que tivemos de entrevistá-los, exceto Gomes, permitindo comparar as respostas no questionário com as das entrevistas.

5.1. Análise da tarefa 1

5.1.1. Análise *a priori* da tarefa 1. Os ângulos internos de um triângulo

Uma das propriedades muito presente nos livros didáticos de matemática de Moçambique é relativa à soma dos ângulos internos de um triângulo e expressa o seguinte: “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180°”.

a. Se fosse ensinar esta propriedade, que conhecimentos mobilizáveis são necessários para a sua validação?

b. Apresente, então, a/uma prova dessa propriedade.

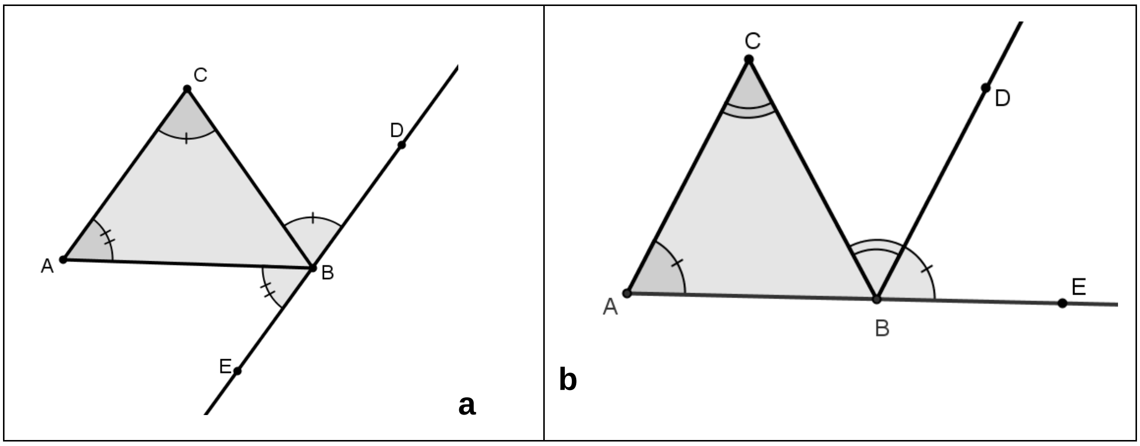
Sendo uma das muito presentes em livros didáticos, portanto uma das mais básicas, começamos com esta tarefa para observarmos como é que os sujeitos da pesquisa a validam, já que constatamos em estudo anterior (ORDEM,

2010) que os livros analisados nesse estudo utilizam verificações empíricas para a sua validação.

O item a) tem como objetivo principal fazer emergir os conhecimentos ou elementos necessários que os estudantes usariam para a elaboração de uma prova ou demonstração de uma propriedade geométrica. Desse modo, esperamos que os estudantes investigados pensem na medição de ângulos do triângulo com um transferidor e façam a soma de suas medidas. Eles poderiam, a partir do resultado obtido, concluir que a propriedade é verdadeira.

Uma alternativa é construir uma reta que passa por um dos vértices do triângulo e paralela ao lado oposto desse vértice (Figura 12a). Outra alternativa é prolongar um dos lados do triângulo e, a partir do mesmo traçar uma semirreta paralela ao lado oposto (Figura 12b). Em ambos os casos o traçado da paralela a um dos lados do triângulo é sempre possível, já que o quinto Postulado de Euclides ou das paralelas garante que "por um ponto fora de uma reta, existe uma única reta paralela à reta dada".

Figura 12 - Elementos gráficos dos argumentos para a validação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: O autor

Depois, eles podem utilizar a propriedade de ângulos alternos ou correspondentes em retas paralelas intersectadas por uma transversal para justificar os passos da prova, ou podem recorrer a instrumentos de construções geométricas para verificarem os ângulos congruentes.

O item b tem por objetivos fazer emergir as formas que os sujeitos utilizariam para validar a propriedade. Elencamos as seguintes possibilidades:

(i) medir os ângulos do triângulo e somar suas medidas;

(ii) construir diferentes triângulos e, para cada figura medir os ângulos internos, fazer a soma das medidas obtidas e posteriormente comparar os resultados obtidos.

(iii) recorrer à representação de triângulo em cartolina, recortar dois dos seus cantos (ângulos) e posteriormente colocar os dois no terceiro ângulo obtendo um ângulo raso.

(iv) o aluno pode fazer apelo à geometria dinâmica, por exemplo, o Geogebra (um aplicativo de uso livre atualmente muito difundido), ou Cabri plus II. Usando a opção “arrastar”, ele pode variar as medidas dos ângulos do triângulo e perceber que a soma das medidas desses ângulos é “sempre” 180°.

Os 4 métodos de prova apresentados, por se basearem em verificações empíricas, não explicam a propriedade: apenas dão mais suporte intuitivo de que a propriedade pode ser válida para qualquer triângulo, porém, sem garantir que não haverá um contraexemplo. São assim, provas pragmáticas, segundo a categorização de Balacheff, ou provas indutivas segundo os esquemas propostos por Harel e Sowder. Com a exceção da prova (iv), as outras provas são presentes em livros didáticos de Moçambique (ORDEM, 2010). Esse fato no leva a conjecturar que esses métodos de prova da propriedade em discussão fazem parte do ETG institucional das escolas de Moçambique. Quanto ao paradigma geométrico a que se enquadram essas provas, diríamos é a G1 – Geometria natural – dado que o discurso de validação não vai para além da gênese instrumental que relaciona a visualização com o polo teórico: a conjectura é apenas assumida a partir da manipulação instrumental, sem nenhum discurso teórico da geometria que explique a tomada de decisão.

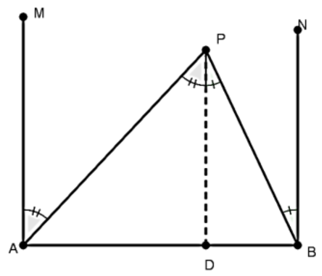
Para além dos métodos acima mencionados, vale a pena abordarmos também dois outros métodos. O primeiro desses métodos é o que Fischbein (1982, apud REID e KNIPPING, 2010, p. 40) considerou como sendo argumento para o desenvolvimento da intuição de necessidade. É o seguinte argumento: Imaginemos que temos um segmento de reta AB[26]. Pelas suas extremidades, A

---

[26] Nesta tese utilizamos a seguinte simbologia:
$\overleftrightarrow{AB}$ - reta AB
$\overrightarrow{AB}$ - Semirreta de origem A passando pelo ponto B
$\overline{AB}$ – segmento de reta AB ou com extremidades A e B
AB – medida do segmento de reta AB ou com extremidades A e B
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ - segmento de reta AB é congruente ao segmento de reta CD

e B, levantamos duas perpendiculares, $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$. Em seguida, podemos “criar” um triângulo ABP, inclinando os segmentos AM e BN em sentidos opostos. Assim, podemos observar que o ângulo APB “acumula” o que se “perde” do ângulo PAB e do ângulo PBA quando inclinamos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ (Figura 12). Já que os ângulos MAB e NBA são dois retos, então podemos concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale dois ângulos retos, ou seja, 180°.

Figura 13 - Diagrama de Fischbein, 1982, (apud REID e KNIPPING, 2010)



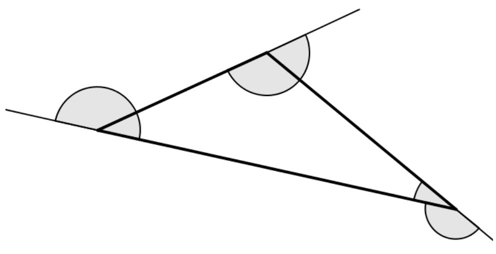
Fonte: Reid e Knipping (2010, p. 40).

A Figura 13, embora seja vista pelo autor citado como argumento para o desenvolvimento da intuição de necessidade, não conta como demonstração já que não está feita usando a linguagem matemática. Contudo, esta apresentação de um argumento, quando bem aproveitada, pode validar a propriedade sob o ponto matemático.

O segundo método do grupo adicional, é o método que Hoyles (1997) apresenta, e se expressa de seguinte modo:

Figura 14 - Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus

Se você andar por todo o caminho em torno da borda do triângulo, você acaba tornando ao ponto em que você começou. Você deve ter dado uma volta total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo é adicionado ao ângulo interno e ambos dão 180°, porque os seus lados fazem uma linha reta. Isto perfaz um total de 540°. Então, 540° - 360° = 180°.



∡ABC ou A$\hat{B}$C – ângulo ABC com vértice em B.

Portanto, é verdadeiro.

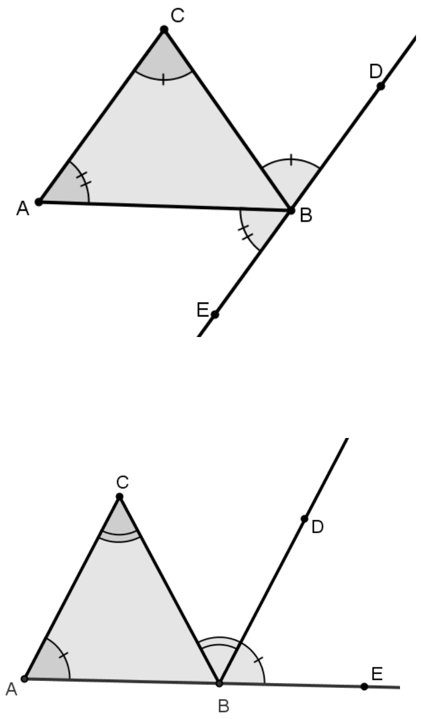
Fonte: Hoyles (1997, p. 12)

Com este método, embora se chegue ao resultado 180°, não garante que se consiga apresentar as razões que estão por trás do resultado. Trata-se, mais uma vez, de um método de prova que pertence à categoria de prova pragmática já que se baseia unicamente em um experimento. Dado ao fato que a conclusão se baseia na intuição apoiada em figura, então podemos concluir que se trata de uma prova na G1, geometria natural. Quanto ao outro método imediatamente anterior a este, embora na perspectiva epistemológica de alguns autores não seja uma demonstração por não ter uma linguagem matemática justificada, entendemos tratar-se de uma verdadeira gênese de demonstração uma vez que o discurso aí presente se justifica na base de conceitos matemáticos.

Apesar da precariedade de alguns dos métodos apresentados, são métodos de prova da propriedade que a literatura revisada mostrou fazerem parte de procedimentos de validação que alunos e professores têm recorrido, portanto, que é preciso não ignorar sua existência.

A propriedade do sistema axiomático da geometria plana que permite justificar matematicamente a propriedade em discussão é o postulado das paralelas que, garante de que, por um ponto fora de uma reta é possível traçar uma reta paralela a essa reta. Assim, traçando uma paralela a um dos lados pelo vértice oposto, criam-se ângulos determinados por uma transversal em duas retas paralelas. Isso permite que, em um caso, seja possível recorrer à propriedade dos ângulos alternos internos em retas paralelas para validar a propriedade (como por exemplo, os métodos 3 e 7 da tarefa 4); em outro caso, dois conceitos geométricos simultâneos, ângulos alternos e ângulos correspondentes em retas paralelas, permitem validar a propriedade (método 2 da tarefa 4). As duas formas básicas de demonstração da propriedade são apresentadas na Figura 15.

Figura 15 - Validação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: O autor

Consideremos o triângulo ABC.

Por um dos vértices, por exemplo, por B, façamos passar uma reta paralela, $\overleftrightarrow{ED}$, a um dos lados, $\overline{AC}$. Neste caso a relação de ângulos alternos internos em retas paralelas ($\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$) intersectadas por uma secante ($\overline{CB}$ para os ângulos C e DBC, ou $\overleftrightarrow{AB}$ para os ângulos A e EBA) serve de meio para validar a propriedade.

Em outra alternativa, prolongamos um dos lados do triângulo a partir de um dos vértices, por exemplo, B. Do mesmo vértice B, traçamos uma paralela, $\overleftrightarrow{ED}$, ao lado oposto, $\overline{AC}$. Obtemos dois tipos de ângulos (ângulos correspondentes e ângulos alternos internos) em retas paralelas intersectadas por uma secante: ângulos A e FBD (correspondentes) e ângulos C e DBC (alternos internos). Esses ângulos é que vão servir de argumentos para a validação da propriedade.

Os dois últimos métodos apresentados articulam dois tipos de elementos de natureza distinta em um discurso matematicamente coerente: por um lado, estão os elementos da natureza gráfica resultantes do uso de material de construção, por outro, estão elementos de natureza teórica para justificar a possibilidade da construção e as relações que posteriormente são criadas. Trata-se de elementos da geometria G2 (axiomática natural) e tipo de prova intelectual segundo Balacheff ou a esquemas de prova transformacionais, segundo Harel e Sowder.

Pensamos que todos os métodos discutidos podem ser identificados em um ou outro sujeito de pesquisa como fazendo parte do seu ETG.

Resumindo, podemos afirmar que para este item **(b)** da tarefa 1, praticamente todos os métodos apresentados na tarefa 4 do presente trabalho são possíveis métodos a esperar dos nossos sujeitos de pesquisa incluindo os descrevemos acima. Foi pensando nessa possibilidade que primeiro pedimos que os participantes da pesquisa nos apresentassem o seu método de validação da propriedade, e só depois pedimos que eles avaliassem os diferentes métodos de tentativas da validação da mesma propriedade. Essa ordem de apresentação foi intencional para que evitássemos uma possível influência no pensamento deles quanto à forma de validação.

5.1.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 1: Os ângulos internos de um triângulo

Esta primeira tarefa tinha dois itens: o item (a) pedia que os sujeitos de pesquisa elencassem os conhecimentos necessários a mobilizar para a validação da propriedade, isto é, a caixa de ferramentas necessárias para a prova dessa propriedade e o item (b) a apresentação de uma prova da propriedade.

No item (a), dos 30 estudantes que inicialmente participaram da pesquisa, a maioria não conseguiu listar conceitos necessários para a validação da propriedade, mencionados em alguns casos aspectos que têm mais a ver com a organização dos alunos, mas não dos conhecimentos matemáticos a usar como ferramenta de trabalho; ou mencionando vagamente a caracterização do triângulo e não os conceitos geométricos que se entrelaçam durante a validação da propriedade. No **Quadro 2** transcrevemos as respostas dadas para este item

Quadro 2 - Respostas que mencionam algum conhecimento

Estudante	Conceitos mencionados
César	Falaria dos ângulos no seu todo, e em particular dos ângulos e sua respectiva medição; falaria da unidade dos ângulos; falaria do comportamento de cada tipo de ângulo; falaria da representação gráfica de cada ângulo; falaria da diferença de um ângulo entre eles e das suas características; falaria dos lados de um ângulo e o seu respectivo vértice; falaria dos internos inscritos num triângulo e ângulos internos inscritos na mesma reta ou em diferentes retas paralelas.
Hélder	Ter a noção do conceito de ângulo e saber identificar os diferentes tipos de ângulos existentes; ter o conhecimento da figura em referência.

Tarcísio	Os alunos devem ter conhecimentos de figuras planas concretamente o retângulo ou quadrado; Ter o conhecimento de diagonais nessas figuras; saber que essas diagonais dividem o ângulo de 90° em 2 partes iguais.
Dionísio	Conceito de figura como triângulo e quadrado; Conceito de ângulo numa figura geométrica no plano; Conceito de ângulo interno de um triângulo.
Ofélia	Um dos conhecimentos é o conceito de triângulo, ângulo, quantos ângulos tem um triângulo, ângulo de um triângulo. Para validar iria fugir um pouco do triângulo, usaria o conceito de quadrado ou retângulo para poder fazer a respectiva demonstração. Pode fazer a respectiva demonstração sem querer dizer de que este seja único conhecimento, visto que existem ainda outros.
Paulo	Conceitos de ângulo e segmento; conhecer as medidas dos ângulos de um retângulo; o conceito de um triângulo.
Amorim	Para a validação da propriedade é necessário conhecer os ângulos especiais e suas medidas (raso, giro, reto, etc.), conhecer o quadrado, retângulo, as diagonais das figuras geometrias atrás referidas, conhecer o paralelogramo e suas propriedades. As propriedades existentes num feixe de retas paralelas. As retas paralelas, como construir triângulos.
Baú	Conhecer o triângulo como um polígono com três lados, três vértices e três ângulos; identificar ângulos alternos internos entre duas retas paralelas e cortadas por uma secante.
Cuco	Conhecer a medida do ângulo raso; Conhecer as propriedades dos ângulos alternos em retas paralelas.
Dário	1º dar nome os ângulos, exemplo: α, β, γ; dar o conceito de ângulos internos ou mostrar quais os ângulos são internos; o conceito de ângulos alternos internos também é necessário para a demonstração; o conceito de paralelismo também é aplicado.
Fred	Primeiro começaria a partir dum retângulo com objetivo de identificar os ângulos visto que os ângulos retos facilmente são identificados pelos alunos. 2º traçava uma diagonal com intuito de

	ter dois triângulos a partir daí teria em cada triângulo 1 ângulo reto e 2 ângulos agudos daí que introduziria a propriedade começando por $\alpha + \beta = 90°$, o que significa que $\alpha + \beta + 90° = 180°$, c.q.d.
Getúlio	Se fosse para eu ensinar esta propriedade, os conhecimentos necessários seriam: - conhecer pontos, retas e próprios triângulos estes são definidos por três pontos não colineares. - conhecer o conceito de ângulo bem como suas propriedades e classificação
Herculano	Para ensinar esta propriedade pode-se recorrer ao uso de congruência de ângulos em paralelas cortadas por uma reta, ou retas concorrentes em uma das paralelas.
Jackson	Se fosse a ensinar esta propriedade, para a sua validação seria necessário que os estudantes tivessem conhecimentos sobre retas paralelas, ângulos alternos, ângulos correspondentes em retas paralelas e ângulos opostos pelo vértice.
Kelmon	Os alunos devem ter conhecimentos sobre os ângulos internos de quadrilátero, em particular o quadrado.

Fonte: Dados de pesquisa

A demonstração sendo uma técnica que estabelece relações entre conceitos ou definições, algumas das respostas dadas sugerem indícios de que os seus proponentes não saibam disso.

O segundo grupo é de estudantes que parecem não ter entendido o pedido, porque as respostas que deram não parecem ir ao seu encontro.

O quadro 3 apresenta algumas das respostas.

Quadro 3 - Respostas de alguns alunos

Estudante	Resposta dada
Emerson	Primeiro considerar as medidas dos segmentos do triângulo dado; o tipo de triângulo e formação dos ângulos descritos a partir da interseção das três retas e transferidor.
Fernão	Através de um material manipulável como um triângulo qualquer feito através de madeira, um transferidor para medir os vértices e somar os ângulos obtidos.

Gomes	Bem, mobilizaria da seguinte forma: sabemos que o triângulo apresenta três inclinações que constituem os ângulos do tal. Dependendo do tipo de triângulo verifica-se que no máximo cada inclinação vale 90°, como amplitude dessa inclinação, mas como é sabido, se uma das inclinações vale 90° de amplitude, então as duas restantes serão menores, e juntando teremos 180° de amplitude.
Nilza	Para ensinar esta propriedade temos que ter em conta os conhecimentos que o aluno já tem sobre a matéria isto é ele deve ser capaz de definir: um teorema para poder se chegar a uma demonstração, isso significa que o professor deve explicar ao aluno esses conceitos. Depois de dar os conceitos temos que explicar ao aluno sobre os elementos que temos numa demonstração neste caso, hipótese, tese e depois proceder com a demonstração.
Elísio	Se fossemos a ensinar esta propriedade, vamos supor por exemplo na 8ª classe. Em primeiro lugar, perguntaria aos alunos o seguinte: já ouviram de falar de triângulo? – caso sim. O que é um triângulo? - Eles respondem que o triângulo é uma figura com …. - Quantos ângulos tem um triângulo? Eles respondem … Com estes conceitos dos alunos, partiria da realidade o que é o triângulo na vida real e dali explico.
Luís	No caso de ensinar faria: 1º construiria um triângulo para visualizar estes ângulos melhor situar a criança no espaço fora até que ponto estes ângulos, se somar e dá 180°.
Ludovico	Saber qual a condição necessária para existência de um triângulo; saber o que são ângulos internos; saber o que é a soma (no caso dos ângulos internos do triângulo); conhecer os tipos de triângulos e como eles se manifesta(am).

Fonte: Dados de pesquisa

Na nossa análise didática desta tarefa, já deixamos transparecer que se pode pensar na medição e soma de ângulos – nesse caso há menção explícita de transferidor e sua forma de manipulação. Para este caso, constatamos que apenas Emerson e Fernão perceberam isso.

A alternativa diferente da que usa o transferidor é a que recorre ao recorte e ângulo raso. Para este caso, constatamos que nenhum dos nossos sujeitos pensou em usar conhecimentos desse tipo.

Descrevemos ainda na nossa análise teórica da tarefa, o uso de postulado das paralelas. Para este caso, embora nenhum dos sujeitos se tenha explicitamente referido a ele, constatamos que as respostas de Dário, Herculano, Jackson, Baú e Cuca dão esse indício ao mencionar como conhecimentos necessários para a validação da propriedade, ângulos alternos internos entre duas retas paralelas e cortadas por uma transversal. Jackson elenca mais elementos úteis para a validação da propriedade ao mencionar entre outros conhecimentos “conhecimentos sobre retas paralelas, ângulos alternos, ângulos correspondentes em retas paralelas e ângulos opostos pelo vértice”

Constatamos também respostas que mostram que os seus proponentes pensaram em outros meios que não previmos na nossa análise didática da tarefa. Trata-se de respostas que mencionam conhecimentos relacionados com quadriláteros como retângulo, paralelogramos, propriedades das diagonais de um retângulo ou quadrado. Estão nesta categoria, as respostas de Dionísio, Ofélia, Péricles, Amorim, Fred, Kelmon.

Finalmente, temos outro grupo de sujeitos cujas respostas parecem revelar que a propriedade depende do tipo e tamanho de triângulo. Estão nessa categoria as respostas de Emerson, Golden, Ludovico.

Apenas o grupo composto por Dário, Herculano, Jackson, Baú e Cuca, revelou conhecimentos que se baseiam na Geometria axiomática natural. Os restantes sujeitos revelaram confiar em métodos empíricos na validação dessa propriedade.

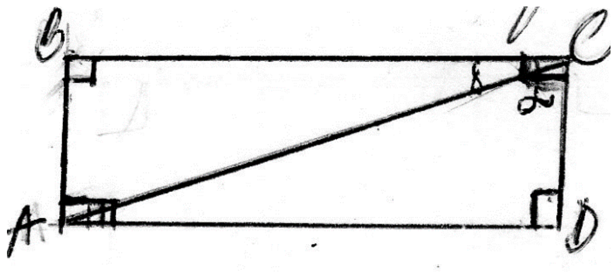
No item (b) era pedido que os participantes da pesquisa apresentassem uma prova da propriedade em discussão na tarefa 1. Neste item, existe uma variedade de respostas nas quais levantamos as seguintes:

1. Recorrer à propriedade dos ângulos internos de um quadrilátero.

Neste método, os proponentes construíram figuras, considerando que os quatro ângulos são retos e traçaram uma das diagonais obtendo dois triângulos. Consideraram que a diagonal traçada divide cada um dos dois ângulos em dois ângulos congruentes de 45° cada e com terceiro ângulo de 90°, somaram os três valores obtendo 180°. Foram dez sujeitos que procederam assim: Nilza, Ofélia, Péricles, Kelmon, Fred, Ludovico, Tarcísio, João, Rui, Quitério. A seguir apresentamos algumas das resoluções

Fred escreveu: “[...] a partir dos conhecimentos que o aluno tem de que os ângulos internos de quadriláteros é igual a 360° será um molde suficiente para iniciar, ora vejamos”:

Figura 16 - Figura usada por Fred



ABC é um triângulo
B = 90° e C = ½ de 90°
Logo: C + A = B → 45° + 45° = 90°
Isto é A + C + B = 180°

Fonte: Dados da pesquisa

Para melhor esclarecimento do procedimento, decidimos entrevistá-lo, intenção concretizada no dia. Eis o extrato da entrevista.

Pesquisador *- A tarefa 1 tem a ver com os ângulos internos de um triângulo. Então diz-se assim: “se fosse a ensinar essa propriedade que conhecimentos mobilizáveis são necessários para a sua validação? Então o senhor escreveu aqui: primeiro começaria com um retângulo com o objetivo de identificar os ângulos visto que os ângulos retos facilmente são identificados pelos alunos. Depois, traçava uma diagonal com o intuito de ter dois triângulos, a partir daí teria em cada triângulo um ângulo reto e dois ângulos agudos, daí é que introduziria a propriedade começando por* $\alpha + \beta + \delta = 180°$*. O que significa* $\alpha + \beta + 90° = 180°$*, como queria demonstrar.” [...] em algum momento colocou que partiria pela definição dos ângulos internos de quadrilátero. [...]. Então, a pergunta que coloco é: que argumentos usaria para justificar que a med(*$\hat{C}$*) = ½ de 90° na sua figura?* (Figura 16).

Fred responde nos seguintes termos:

Fred *– [...] talvez pela organização dos conteúdos, isso pode ser contraditório, mas eu parti de ângulo reto porque qualquer aluno conhece ângulo reto, logo só por olhar e reparando para uma figura como esta aqui, um retângulo como este, ele já podia identificar, a partir daí nós contávamos quantos ângulos tem por isso eu me baseei mais aqui.*

Fred mostra claramente que seu propósito é utilizar a percepção com base em figura como prova. Imagina um ângulo reto em um triângulo e depois considera que as diagonais de um retângulo dividem os seus ângulos em ângulos congruentes de 45° cada. Com esse raciocínio (errado) considera que cada um dos triângulos tem um ângulo de 90° e os outros dois de 45° cada, o que no total perfazem 180°, isto é, 90° + 45° + 45°. Trata-se aqui de um exemplo explícito de um esquema de prova perceptiva, um procedimento de validação de propriedades geométricas norteado por GI. Contudo, a questão que se pode colocar sobre este raciocínio é:

- será que Fred tem consciência de que em um retângulo com os quatro lados não congruentes, a diagonal o divide em dois triângulos retângulos congruentes, mas que cada um deles tem lados diferentes?

- como situar a propriedade que afirma que em um triângulo apenas a lados iguais opõem-se ângulos congruentes e vice-versa?

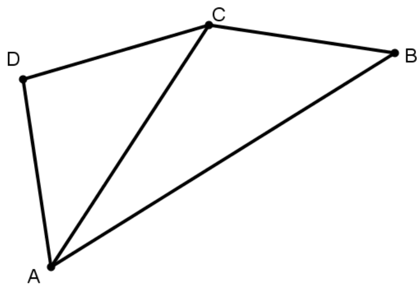
Não discutimos estas questões com o nosso entrevistado, mas para colocá-lo numa situação pouco confortável em relação à sua escolha, depois de discutimos com ele a notação adequada do ângulo considerado de $\hat{C}$ e chegado à conclusão de que a notação sem ambiguidade é a que utiliza seus lados, isto é, o ângulo ACD (vide de novo a Figura 17), procuramos saber como justificar a que medida do ângulo ACD é metade da medida do ângulo de 90°:

Pesquisador *– [...] como justifica que este ângulo pequeno aqui é metade de 90°?*
Fred *– [...] porque é diagonal, ... da figura.*

Apresentamos, então, a Figura 17

Figura 17 - Quadrilátero não retângulo para entrevista a Fred

Pesquisador *- [...] supomos o quadrilátero ABCD. É quadrilátero esse, não é? Como usaria esta figura para demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°?*



Fred *- Usando essa figura?*
Pesquisador *- Para este caso, [...] pode?*
Fred *– [...] seria contraditório porque se eu usei este aqui é por causa dos elementos que a própria figura apresentava: o ângulo reto, porque é do conhecimento do aluno. Mas em todo o caso aqui também porque de todas as formas aqui temos também ângulo, temos um obtusângulo, um agudo, temos eh... podemos fazer a demonstração. [...] Sim*.

Pesquisador *- Como então demonstrar? Como provar que este ângulo B aqui, mais BCA, mais CAB é igual a 180°? (*apontando *na* Figura 17*), ou então que B mais BCA, mais BAC é igual a 180°?*

Peremptoriamente, Fred respondeu: “[...] vai ser complicado. Não, não vale a pena.”

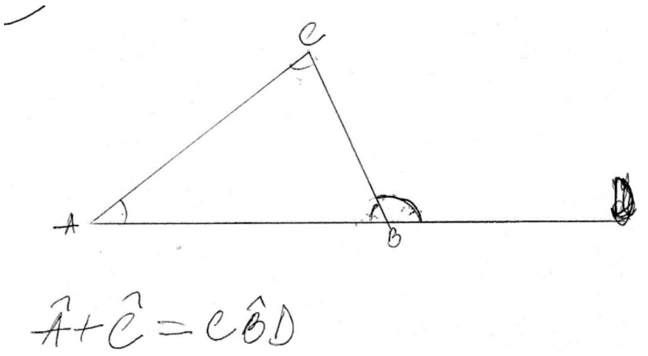
Pesquisador *– Por quê?*
Fred *- Porque ... aí, quer dizer, aí eu poderia andar cegamente porque não há nada que me prove a amplitude desse ângulo. Não há nada que me prove ... porque eu só aproveitei esse porque, eu já tinha prova de certos ângulos. [...] ângulos retos e o aluno já saberia que aqui tem noventa, se corto, passo uma diagonal passa a cortar na metade daquele ângulo. Logo, já era fácil demonstrar a partir deste triângulo, a partir desta figura.*

O Discurso de Fred continua tendo erro de raciocínio: como é que um triângulo com lados não congruentes vai ter ângulos internos congruentes de 45°? Infelizmente esse erro não foi explorado na entrevista, contudo é o erro comum a todos os que se basearam nessa opção com exceção de Kelmon. Nessa ordem de ideias a conversa deveria explorar este erro e continuar mostrando que, nessas condições, a tarefa é justamente demonstrar que a sua soma é 90° e não outro valor. Contudo, esta possibilidade não foi explorada na conversa, mas mesmo assim, o desenvolvimento da entrevista levou Fred a perceber que essa escolha por “conveniência” não valida a propriedade em outros triângulos e não chega a responder à questão colocada pelo pesquisador “como explicar que este ângulo pequeno aqui, BCD, é metade de 90?”. Pese embora não tenha respondido o que lhe foi questionado, reconheceu as limitações do método de recorrer a exemplos concretos como forma de validação de propriedades universais.

Fred - Agora, aqui (apontando a figura apresentada) não há nada que me vai demonstrar de que este aqui é obtusângulo, esse aqui é isso, ... Isso já vai-me tornar difícil.
O pesquisador rebate: “[...] Mas esta propriedade é uma propriedade que quase é abordada a partir da escola primária. [...] Ela até pode ser considerada básica para quem viu geometria. Qual é mesmo a demonstração que o senhor daria?”
Fred – [...] eu acho que a mais prática seria a de ângulo externo.
Pesquisador – Pode experimentar aqui? [...]

Fred faz uma figura representando um triângulo ABC, prolonga o lado AB no sentido do vértice B, designa o extremo do prolongamento por D obtendo a **Figura 18** reproduzida.

Figura 18 - Ilustração usada por Fred durante a entrevista



Fonte: Dados da pesquisa

Fred *– Seria mais ou menos assim. [...], temos este ângulo aqui que está fora (apontando o ângulo CBD). Temos o ângulo externo ... a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a este ângulo é igual este que está aqui (apontando de novo o ângulo externo)*

Pesquisador – Pode pôr.

Fred – Se somarmos A mais C será igual a este, vou destacar.

O nosso interlocutor tem dificuldades em designar os ângulos pelos seus lados.

Pesquisador *– Dizer CBD.*

Fred *– Sim, sim. Será igual a CBD.*

Durante a conversa, escreve o seguinte: $\hat{A}+\hat{C}=C\hat{B}D$

Fred *– Estamos a dizer que a soma deste será igual a este – apontando.*

Pesquisado*r – Por quê?*

Fred *– Porque ... nós podemos ver ... podemos dizer que a continuação dele com esta forma já um ângulo raso, e que a soma deste (apontando o ângulo CBD) e este (apontando o ângulo CBA) será igual a 180 graus. Isso é uma das coisas que dá para então na nossa justificação. Essa é a primeira prova.*

Conforme se vê o nosso interlocutor evitou responder à pergunta “Por quê?” que tinha em vista a explicação da relação entre um ângulo externo e os internos não adjacentes.

Pesquisador *– Aí já demonstrou que a soma das medidas dos ângulos internos vale 180°?*

Fred *(sorri) – heheheheh. Iya.*

Depois de algum tempo, retoma o discurso.

Pesquisador – Já concluiu que a soma das medidas dos ângulos internos é 180°?

Fred *– Nada, ainda não conclui.*

Pesquisador *– Então, queria ver?*

Fred *– Iya, como estava dizer que somando estes dois ângulos será igual a este externo.*

Pesquisador *– Esse é o primeiro passo. O passo a seguir?*

Fred *– E se este equivale a dois ângulos que estão lá, então fica outro que está fora, fica outro que não foi tomado em consideração.*

Pesquisador *– Qual o outro que não foi tomado em consideração?*

Fred *– Este que está dentro, que é adjacente ao ângulo externo.*

Pesquisador *– E daí?*

O nosso interlocutor leva 13 segundos pensativo e depois afirma:

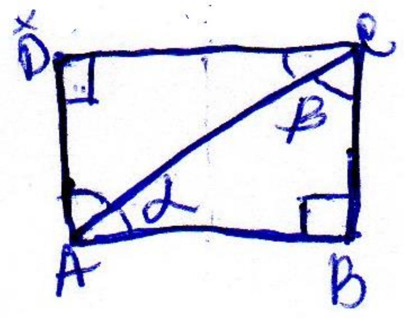
Fred *– Sabendo que este mais este, ..., sabendo que este ângulo é interno – apontando o ângulo ABC - mais este externo também será igual a 180°, podemos concluir que a soma destes três ângulos internos será igual a 180°.*

Fred foi buscar conhecimentos relativos à relação entre um ângulo externo com os internos não adjacentes para tentar explicar a propriedade acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Contudo, ele não chega a explicar essa relação, apenas a assume como verídica. Ele simplesmente aplicou a propriedade e, por percepção apoiada em figura, começa a relacioná-la com o ângulo interno adjacente. Utiliza propriedades não justificadas para estabelecer a propriedade. Por isso, interpretamos que o horizonte teórico de Fred foi norteado por uma Geometria axiomática natural fragmentada. De fato, Fred não parece ter ficado consciente de que usou uma propriedade que também pode ser objeto de prova e, ao ser questionado, ignorou a pergunta. Sua prova pode ser classificada como proto-axiomática.

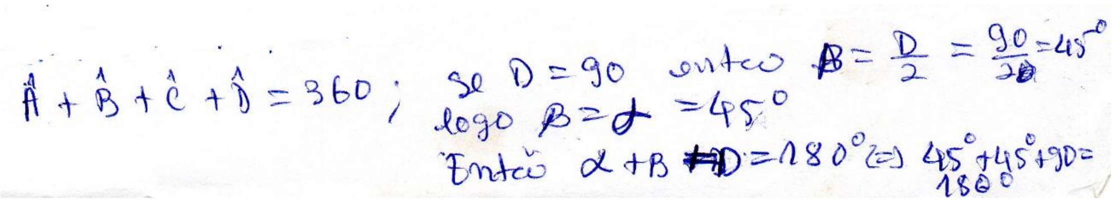
Embora não seja “habitual” utilizar a propriedade de ângulo externo para explicar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos, alguns autores (TALL et al, 2012, p. 33-35) consideram como um dos métodos constatados por pesquisas anteriores, antes mesmo de alunos terem sido introduzidos à demonstração, como uma sequência dedutiva de proposições que utilizaram para provar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Nilza utilizou o mesmo método de subdivisão de um quadrilátero por uma das suas diagonais para explicar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, porém, ela não se importou pela natureza do quadrilátero, senão apenas pensar que a diagonal dividiria os dois ângulos do quadrilátero em dois congruentes de 45° cada e assumiu que o oposto à diagonal mede 90°. Somando esses valores deu 180, tal como reproduzimos na Figura 19.

Figura 19 - Figura usada por Nilza para a tarefa 1, item (d)



E ao lado do desenho escreveu o que colocamos abaixo.

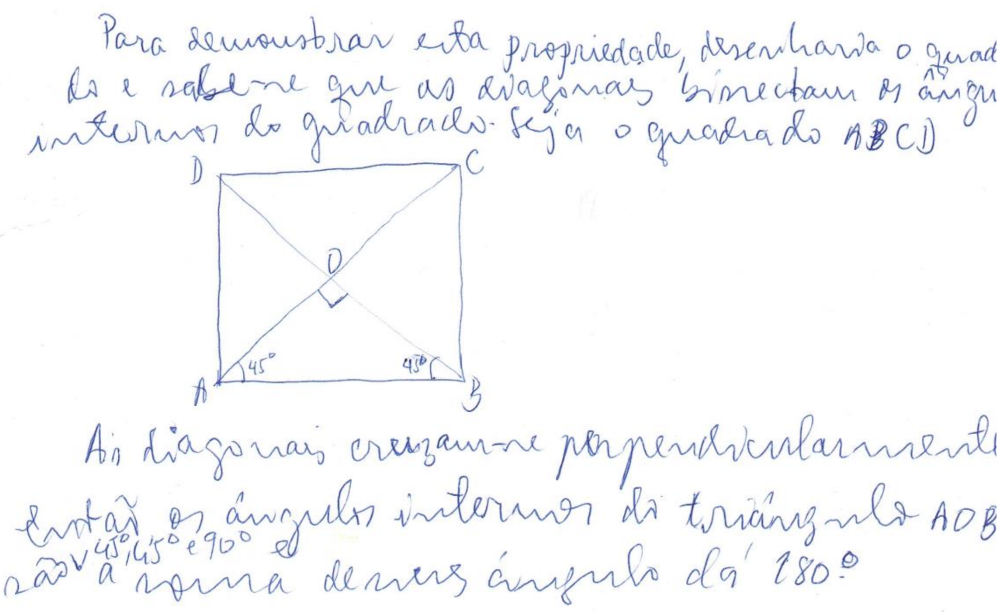


Fonte: Dados da pesquisa

Este procedimento serviu simplesmente para ilustrar a propriedade, não é uma prova empírica e muito menos uma demonstração.

Já o estudante Kelmon baseou-se em um quadrado e suas propriedades relativas às diagonais para tentar provar a propriedade, tal como reproduzimos na Figura 20.

Figura 20 - Prova de Kelmon



Fonte: Dados da pesquisa

É uma prova baseada em figura convenientemente escolhida, portanto, é uma prova pragmática ou esquema de prova indutiva.

Tentamos perceber o raciocínio de Kelmon por meio da seguinte conversa;

***Pesquisador** – [...] Como acha que a propriedade sobre ângulos internos de um quadrilátero pode ser abordada antes da propriedade sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?*

***Kelmon** - É que o quadrado facilita muito. Facilita, se nós traçamos as diagonais, são bissetrizes dos ângulos dos quadrados. Bissectam os ângulos. Onde se cortam forma um ângulo reto.*

***Pesquisador** – [...] Na verdade você recorre a propriedades de um quadrado para tentar validar a propriedade sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Por quê? Porque recorreu a um quadrado e não a outro.*

***Kelmon** – Sim, é que ele já tem, já nos dá uma informação, tem isso que eu disse sobre as diagonais são bissetrizes desses ângulos. Essa característica é particular, pode existir outra, mas essa característica é patente em quadrados: que já temos 45, por ser bissetriz significa que tal que era 90 corta ao meio, aqui também temos 45. Então temos um de 90 que vai surgir da interseção dos lados.*

***Kelmon**, tal como o Fred, utilizou uma figura cuidadosamente escolhida com o intuito de usar as medidas dos ângulos que daí advém. Contudo, o pesquisador rebateu:*

***Pesquisador** – Onde formam um ângulo reto. [...] São propriedades meramente enunciadas, ou demonstradas?*

***Kelmon** (ri e depois responde) - Podiam ser demonstradas, mas neste caso são apenas enunciadas.*

***Pesquisador** – Então usa os argumentos de que as diagonais bissectam os ângulos, não é, para mostrar que o ângulo ABO é congruente ao ângulo BAO. É isso?*

***Kelmon** – Sim.*

Pesquisador – Está trabalhando com triângulo retângulo?

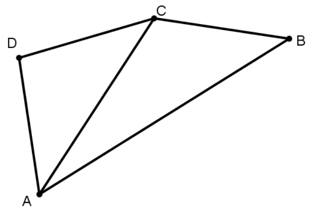
***Kelmon** – Sim.*

Para deixar contrariado pela opção e daí provocar uma reflexão sobre o método seguido por Kelmon, o pesquisador apresentou de novo uma figura similar a que foi apresentada a Fred.

O Pesquisador insiste apresentando-lhe uma configuração como a que é representada na Figura 21 e questiona:

Figura 21 - Figura usada na entrevista com Kelmon sobre tarefa 1, item (d)

Pesquisador- E se no lugar do quadrilátero ABCD que você ilustra, fosse um quadrilátero qualquer em que se traça a diagonal como a que se segue, como você demonstraria que med($\widehat{D}$) + med(D$\hat{C}$A) + me(D$\hat{A}$C) = 180°? Ou que med($\hat{B}$) + med(B$\hat{C}$A) + med(B$\hat{A}$C) = 180°? [...] você usou quadrilátero quadrado. E no caso de um quadrilátero daquele tipo ali, como é que teria de demonstrar?

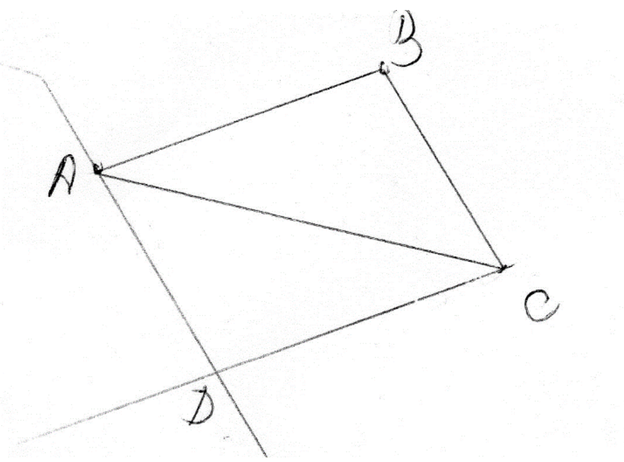


Fonte: O autor

Kelmon *balbucia um pouco e diz: "Talvez eu vou tentar esboçar também".*
Pesquisado*r – Quer esboçar?*
Kelmon *– Sim.*
Pesquisado*r – Ou quer dizer, eu não sei se vai tentar esboçar um quadrilátero, ou um triângulo qualquer?*
Kelmon *– Posso tentar fazer como está a figura.*
Pesquisador *– Mas eu coloquei só por uma questão de ilustração [...] Eu quero que seja um triângulo.*

Kelmon desenha um triângulo e em seguida afirma: "[...] Se eu traço este triângulo ABC, então, ... se eu traço ... tenho de produzir um paralelogramo". Utilizando régua e esquadro com um ângulo de noventa graus Kelmon completa o traçado obtendo um paralelogramo, como reproduzido na Figura 22.

Figura 22 - Ilustração para deduzir o teorema da tarefa 1 por Kelmon



Fonte: Dados da pesquisa

E ai continua

Kelmon *- O paralelogramo ABCD. Então já voltei àqueles quadriláteros que eu anunciei. [...] Não é só quadrado.*
Pesquisador *– Aí a ideia é mostrar que a soma das medidas dos ângulos*

ABC, ... talvez escrever aqui, não é... a medida do ângulo BAC, mais a medida do ângulo ABC , mais do ângulo BCA é igual a 180°. A ideia é essa.

***Kelmon** – Mas como vamos mostrar isso aí? Ih, o que tem de ser mostrado também é que estes dois triângulos obtidos que são congruentes. São. Eh, Podemos usar medida lado-lado-lado, os três lados são congruentes. Esse é lado comum, AC; este lado AB é igual a este, em princípio podemos mostrar; se este é paralelo, este lado é paralelo a este e este é paralelo a este, então não há dúvidas que temos aqui ... se este é paralelo a este; este é paralelo a este, estamos perante um paralelogramo em que ...*

Conforme vemos, a prova do paralelismo dos lados do quadrilátero ABCD baseou-se simplesmente nos procedimentos de construção com régua e compasso e utilizados, mas não fundamentados em propriedades geométricas.

***Pesquisador** – Mas a ideia é você mostrar que a soma das medidas dos ângulos internos é 180°.*

***Kelmon** – Sim, então isso tem a ver com a congruência desses triângulos. Primeiro sabemos que a soma de todos ângulos deste quadrilátero é o ângulo A + B + C + D é igual a 360 graus. Significa que ... Então o que está aqui na verdade temos esses dois são congruentes, fica é: são duas metades que juntas formam 360 graus. Então é isso que está aqui. Então este triângulo, este retângulo, este triângulo ABC é congruente, significa que tem a mesma medida. Então se é congruente eu posso dizer não é, o triângulo. Do triângulo ABC é congruente a ADC. Ok, então se são congruentes, têm a mesma medida, então eu posso designar, posso designar por, por uma letra qualquer. Se eu disse que este é igual a este posso dizer é uma capa (K), fica este capa, este é capa. Então este se eu disse que se os dois triângulos formam quadrilátero, este triângulo, mais ou outro vão formar aquele quadrilátero cuja medida é 360 graus. Então, simplesmente, dois capas (2K) igual a 360 graus, onde capa vai ser 180 graus. Pelo menos eu já tenho garantia que estes são congruentes. Então, assim cada um deles vai medir 180 graus.*

Depois disto fica registrado no papel o seguinte:

Figura 23 - Protocolo de Kelmon

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + CBCA = 180^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\underbrace{\Delta ABC}_{k} \cong \underbrace{\Delta ADC}_{k} = k$$

$$k + k = 360^\circ$$

$$2k = 360^\circ$$

$$k = 180^\circ$$

Fonte: Dados da pesquisa

Kelmon não percebe há algo não claro na sua explicação: como explicar que a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é 360°?

Pesquisador *– Acha que sempre tem de se passar por um quadrilátero para demonstrar essa propriedade?*
Kelmon *– Humm, da maneira ... existem outras demonstrações que não passam por quadrilátero.*
Pesquisador *– Conhece alguma ou não?*
Kelmon *– Uma delas é aquela de recorte.*
Pesquisador *– De recorte?*
Kelmon *– Sim. Não passa por quadrilátero.*
Pesquisador *– Está bem.*

Kelmon não foi o único que acha que para demonstrar a propriedade acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, se se tiver um triângulo é preciso completar em quadrilátero e daí traçar uma das diagonais. Em entrevista, a Ofélia teve o mesmo raciocínio só que não exploramos a fundo como fizemos com Kelmon.

Em relação à diferença entre prova e demonstração, entrevistamos a aluna Ofélia. Depois de conversarmos sobre os termos prova e demonstração da qual obtivemos a resposta de que há diferença entre elas, eis o que respondeu a nossa interlocutora em relação à demonstração da propriedade supracitada:

Pesquisador *– Por aquilo que viu quando é o professor sentia que o aluno* *apresentou uma demonstração, ou então, se o professor pedisse que o aluno apresentasse uma demonstração de uma propriedade, em que consistia?*

Ofélia *– Eu não consigo puxar tanto a minha memória e nem quando fui estagiar estava muito ligada à geometria, mas pelo que eu me lembro um pouco na geometria davam duas figuras, por exemplo, dois triângulos e diziam: mostre ... até que diziam, prove que estes dois triângulos são semelhantes ... Mais ou menos, demonstre que o triângulo ABC e o triângulo ABC linhas, para distinguir, são semelhantes ou são congruentes. Então, nessa vertente, o que se tem verificado, pega-se os triângulos, verifica-se ... tem certos critérios que mostram que dois triângulos são semelhantes ou são congruentes. Então, a partir daqueles teoremas começa-se a fazer uma demonstração. É mais ou menos isso.*

Pesquisador *– E se por exemplo, aquela propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?*

Ofélia *– A soma das medidas dos ângulos ...*

Pesquisador *– Sim, sim, é igual a 180°, como tem sido feito?*

Ofélia *– Lá como tem-se feito a demonstração ... Mas para mim, mas sendo docente, posso demonstrar de várias formas. Posso completar o triângulo, se, por exemplo, vem o triângulo tem três lados, eu posso completar colocando outro triângulo para obter outra figura. E a partir daquela figura posso traçar diagonais e daí fazer o estudo dos ângulos e proceder ...*

Pesquisador *– Por exemplo, que figura?*

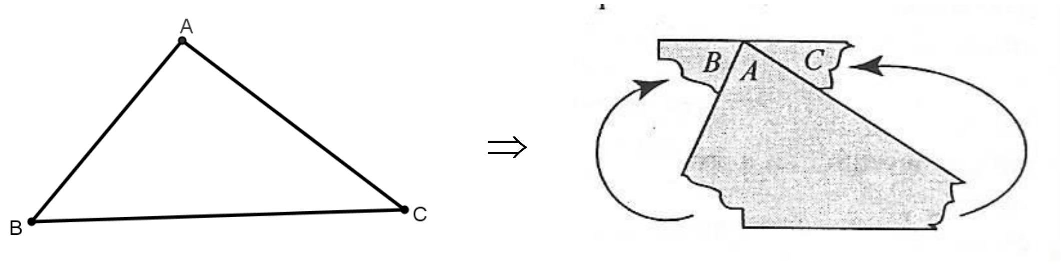
Ofélia *– Eh, ..., pensando assim, é muito difícil identificar, mas consequentemente, vou ter um quadrilátero. Porque dois lados do triângulo estarão como mediatriz do quadrilátero.*

Notamos que a nossa entrevistada comete um equívoco ao falar de mediatriz e não diagonal, contudo, a ideia é empregar o procedimento que geralmente é utilizado para estender a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, para a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Este raciocínio será objeto de discussão mais a frente desta mesma tarefa.

Voltando ao método de recorte, apesar de não termos explorado devidamente durante a entrevista com Kelmon, esse método surgiu entre nossos participantes da pesquisa. É um método que não permite necessariamente demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Esse procedimento faz apelo à relação com o ângulo raso que, embora não esclareça matematicamente a relação, relaciona perceptivamente duas configurações:

- o formato de um ângulo raso e o de um ângulo obtido juntando os três ângulos como se apresenta na Figura 24.

Figura 24 - Relação entre o recorte e dobradura dos ângulos internos de um triângulo e o ângulo raso



Fonte: O autor

Explorando devidamente a Figura 24, percebe-se que o método estabelece uma relação entre uma transformação material – corte e ajustamento dos ângulos de um triângulo em cartolina, por exemplo – com um ângulo raso.

Interpretamos esta relação que se deve estabelecer entre as duas configurações como sendo o motivo pelo qual alguns pesquisadores revistados consideram o método de recorte como um autêntico germe do método euclidiano que usa a ideia das paralelas (Vide TALL et al, 2012, p. 33-35).

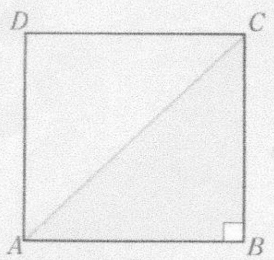
Contudo, o método da subdivisão de um quadrilátero em dois triângulos, não tem essa possível ligação com o postulado das paralelas. Em contrapartida, se analisarmos a fundo o método enfatizado por Kelmon e Ofélia que parte de um quadrilátero, constatamos que nos leva a um argumento circular, isto é, a uma situação em que assumimos a propriedade objeto de demonstração como um dos argumentos da prova o que, conceitualmente, é um erro de raciocínio. Kelmon, ao considerar que ambos os triângulos congruentes perfazem 360° e ao representar por k a soma de cada um deles e, portanto, 2k como 360°, por conseguinte k igual a 180°, valor que ele deveria demonstrar, está primeiro tomando a tese como argumento da prova e, mais tarde, transformando-a em tese.

Para tentarmos compreender um pouco mais o procedimento que recorre a quadriláteros e, particularmente a retângulos, voltamos à nossa revisão de literatura até então realizada, mas, não encontramos nenhum autor que refere a esse tipo de procedimento. Buscamos em livros didáticos mais recentes, em circulação em Moçambique (desde 2006 para cá). Encontramos uma obra sem data que apresenta um procedimento similar ao dos dois sujeitos supra citados. Trata-se da edição intitulada “AS MARAVILHAS DA MATEMÁTICA” da Plural

Editores, um livro de Matemática da 6ª classe dos autores Amaral, A. J. e Nhalungo, C. Para abordarem a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, os autores partem de um quadrado e traçam uma das diagonais, a diagonal AC, e destacam um dos triângulos; em seguida, afirmam que os ângulos BAD e DCB foram divididos em dois ângulos iguais com amplitude de 45°. Considerando o triângulo destacado anotam as medidas dos seus ângulos:

$\measuredangle ABC = 90°$ $\measuredangle BCA = 45°$ $\measuredangle CBA = 45°$, como reproduzimos na Figura 25.

Figura 25 - Ilustração em livro didático do teorema acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



A soma dos ângulos internos num triângulo

Observa que os ângulos A e C, ou seja, $\measuredangle BAD$ e $\measuredangle DCB$ foram divididos em dois ângulos iguais com uma amplitude de 45° cada.

Assim o ΔABC tem os seguintes ângulos:

$\measuredangle ABC = 90°$

$\measuredangle BCA = 45°$

$\measuredangle CAB = 45°$

Fonte: Amaral e Nhalungo (s/d, p. 132)

Depois terminam com o seguinte:

A soma dos ângulos internos num triângulo é igual a um ângulo de 180°.

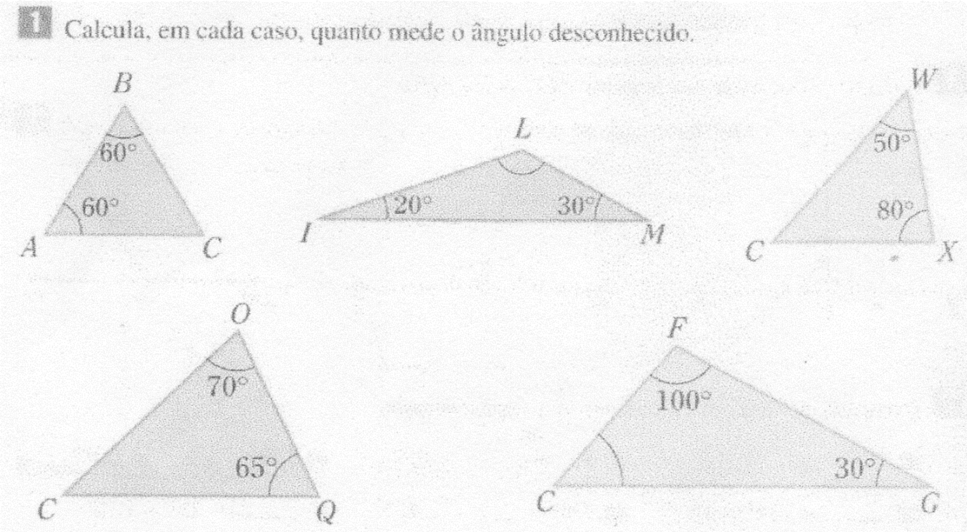
$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 180°$$

$$90° + 45° + 45° = 180°$$

Fonte: Amaral e Nhalungo (ibid)

Após esta apresentação, os autores não fazem mais nada que dar exercícios de memorização que passamos também a reproduzir na íntegra:

Figura 26 - Exercícios propostos no livro didático sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



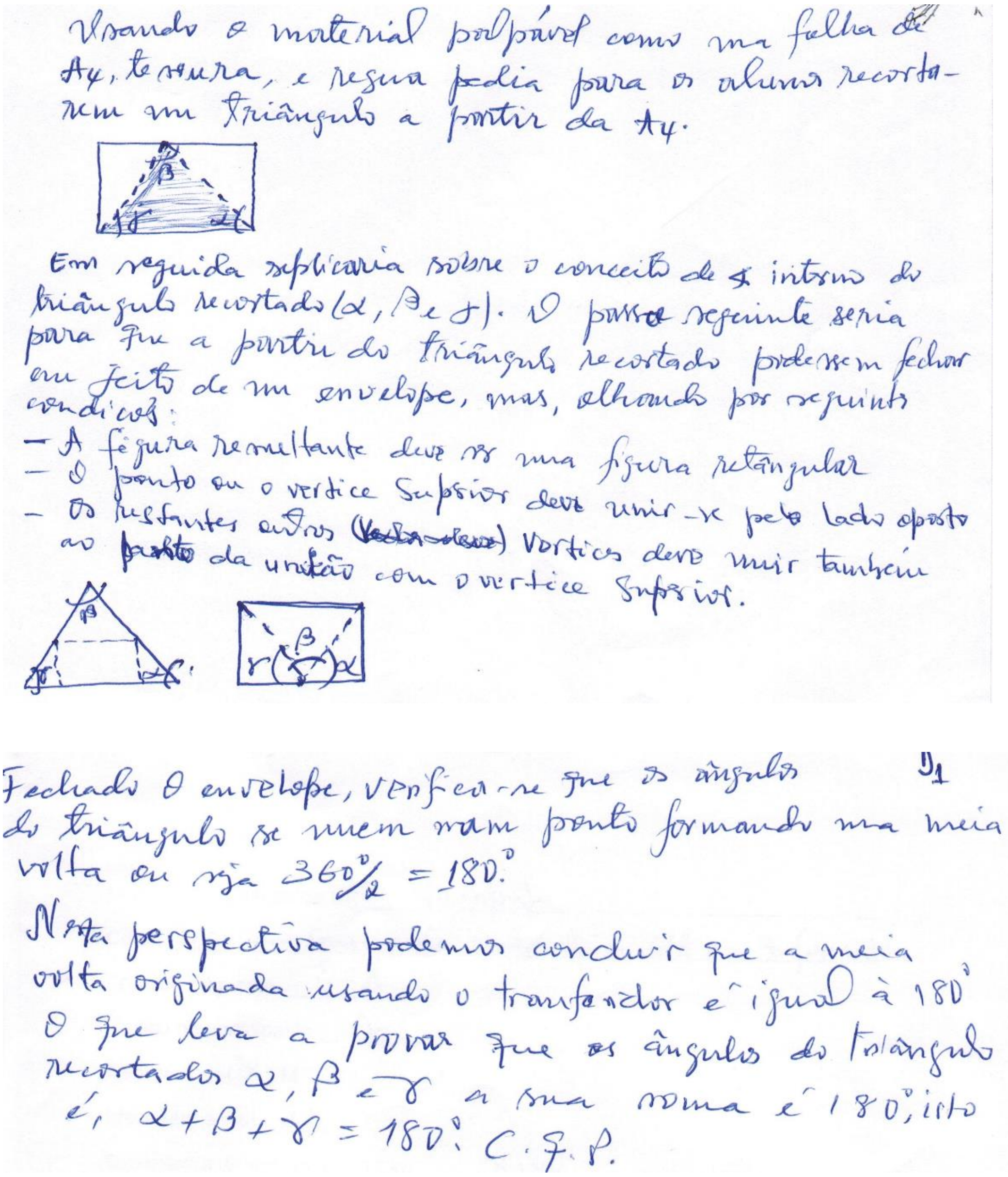
Fonte: Amaral e Nhalungo (ibid)

É uma ilustração da propriedade e não uma demonstração. Esse pormenor deveria ter sido destacado, ou se de fato o propósito dos autores foi mesmo de demonstrar a propriedade então, eles não o fizeram porque a demonstração de uma propriedade geral não se deve basear em casos particular, pois, assim procedendo não reflete todos os casos, isto é, torna-se inválida. Estamos imaginando que, se nossos sujeitos de pesquisa estão encarando essa ilustração como demonstração, o que poderia acontecer com os professores do ensino primário cuja formação não passa, muitas vezes, do nível médio de Moçambique.

Se relacionarmos o fio de pensamento dos que se basearam em retângulo para provar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, vemos que sua gênese pode ser desse livro, as pequenas diferenças podem ser interpretadas apenas como uma tentativa de criatividade de seus autores. Portanto, observa-se o provável impacto que esta prova do livro teria na construção de ideia de demonstração desses dois sujeitos de pesquisa.

Voltando para o método que não exploramos devidamente durante a entrevista com Kelmon, o método de recorte, constatamos que esse método foi explicitamente utilizado por três sujeitos (Dário, Luís e Fernão). Por exemplo, Dário deixou registrado o seguinte:

Figura 27 - Prova de Dário


Usando o material palpável como uma folha de A4, tesoura, e régua pedia para os alunos recortarem um triângulo a partir da A4.

Em seguida explicaria sobre o conceito de ∡ internos do triângulo recortado (α, β e γ). O passo seguinte seria para que a partir do triângulo recortado pudessem fechar em jeito de um envelope, mas, olhando por seguintes condições:
— A figura resultante deve ser uma figura retangular
— O ponto ou o vertice superior deve unir-se pelo lado oposto
— Os restantes outros (~~[illegible]~~) vertices deve unir também ao ~~ponto~~ da união com o vertice superior.

D1

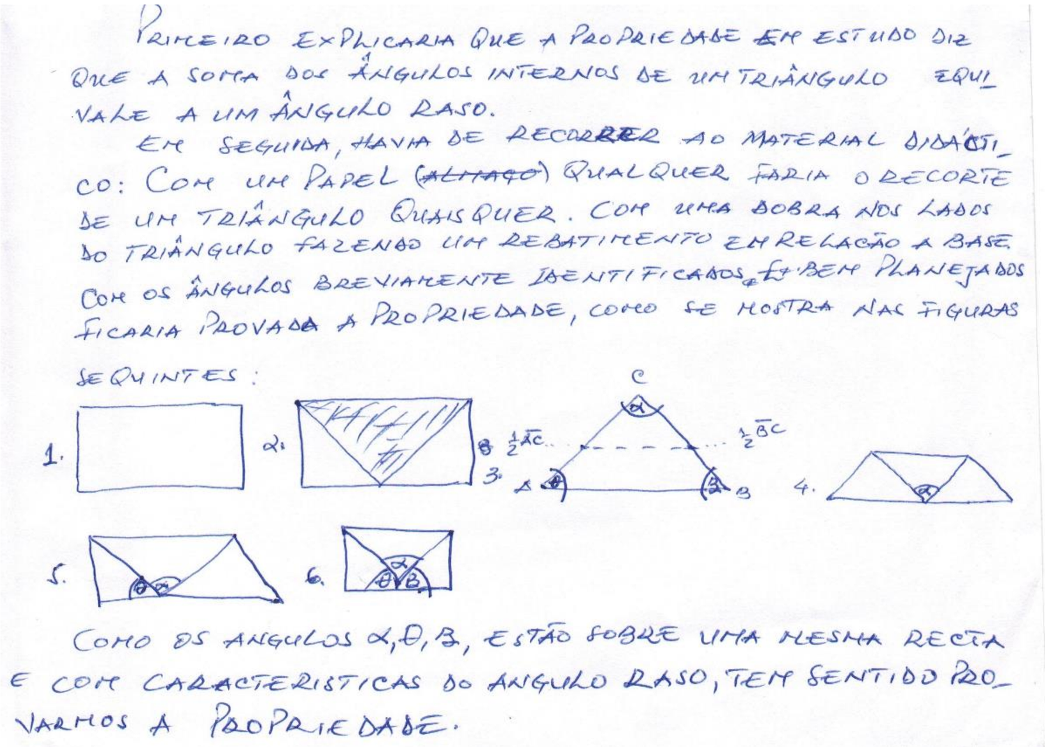
Fechado o envelope, verifica-se que os ângulos do triângulo se unem num ponto formando uma meia volta ou seja $360°/2 = 180°$.
Nesta perspectiva podemos concluir que a meia volta originada usando o transferidor é igual à 180°
O que leva a provar que os ângulos do triângulo recortados α, β e γ a sua soma é 180°, isto é, $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. C.Q.P.

Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução de Dário, para além da prova em si, constatamos a descrição de como procederia diante dos alunos. Concentrando-nos apenas na prova, observamos que ele faz apelo ao uso de material manipulável que, fazendo dobras, ilustra triângulo e seus ângulos, depois descreve como é que se deve efetuar a dobradura até se obter a junção dos três ângulos do triângulo ilustrados pelos cantos do envelope de papel.

Em relação a essa situação, Luís apresentou a seguinte prova:

Figura 28 - Prova de Luís



1)
PRIMEIRO EXPLICARIA QUE A PROPRIEDADE EM ESTUDO DIZ
QUE A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO EQUI_
VALE A UM ÂNGULO RASO.
EM SEGUIDA, HAVIA DE RECORRER AO MATERIAL DIDÁCTI_
CO: COM UM PAPEL (~~ALMAÇO~~) QUALQUER FARIA O RECORTE
DE UM TRIÂNGULO QUAISQUER. COM UMA DOBRA NOS LADOS
DO TRIÂNGULO FAZENDO UM REBATIMENTO EM RELAÇÃO A BASE
COM OS ÂNGULOS BREVIAMENTE IDENTIFICADOS, E BEM PLANEJADOS
FICARIA PROVADA A PROPRIEDADE, COMO SE MOSTRA NAS FIGURAS
SEGUINTES:

COMO OS ANGULOS α, θ, β, ESTÃO SOBRE UMA MESMA RECTA
E COM CARACTERISTICAS DO ANGULO RASO, TEM SENTIDO PRO_
VARMOS A PROPRIEDADE.

Fonte: Dados da pesquisa

A prova de Luís é similar à de Dário, mas com pequenas variações.

As duas provas revelam outras tentativas de validação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Elas envolvem explicitamente uma ideia de manipulação de material, e apresentam justificativas para convencer o interlocutor. O ETG dos sujeitos envolve explicitamente ângulo raso com um discurso baseado na percepção visual. Dizemos que se trata de um esquema de prova perceptiva segundo a classificação de Harel e Sowde, ou prova pragmática segundo Balacheff. É uma validação que se baseou nos princípios de GI, no qual a percepção ou a aplicação efetiva de experimentos mecânicos, tais como dobrar, cortar ou manipular, podem ser usados para validar propriedades.

Relacionando este tipo de prova com o que revisamos na literatura, vemos que esta prova tem fonte em vários livros didáticos utilizados em Moçambique (Vide ORDEM, 2010).

Por sua vez, o estudante Paulo assume um discurso que aparenta uma demonstração, mas no fundo não passa do que fizeram Fred ou Nunes, que se basearam em um retângulo. Na sua tentativa de demonstração, ele escreveu:

> Hipótese: ABC é um triângulo
> Tese: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180°
> Demonstração:
> Pela hipótese ABC é um triângulo (por possuir três ângulos e três lados)
> Sabe-se que um retângulo tem 4 ângulos retos, pela definição.
> Traçamos a diagonal AC que divide retângulo em dois triângulos semelhantes: ABC e ACD
> A diagonal AC divide as medidas dos ângulos A e C em dois ângulos iguais, ou seja,
> A = 90° = C ou ainda BAD = 90° = BCD e BAC = ½ BAD = 45° BCA = ½ BCD = 45°.
> ABC = 90° pela definição do retângulo.
> Somando os ângulos BAC + BCA + ABC do triângulo ABC temos: 45° + 45° + 90° = 180°.
> Logo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.

Fonte: Dados da pesquisa

Tanto a prova de Paulo como as de Fred e Nunes basearam-se em exemplos convenientemente escolhidos para explicar a propriedade: a definição de retângulo e a ideia (errada) de que as diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos, enquanto Kelmon utilizou uma ideia adicional: a de que diagonais de um quadrado intersectam-se perpendicularmente. As quatro provas são pragmáticas na sua forma de experiência crucial segundo Balacheff, já que a ideia foi de utilizar um exemplo com o intuito de generalizar seu resultado. Esse procedimento baseia-se na Geometria Natural segundo Houdement e Kuzniak, pois apesar de os alunos aparentarem o uso de propriedades matemáticas para justificar os argumentos, o procedimento incorporou um triângulo especial em que um dos ângulos tem medida conhecida. O desafio era justificar que a soma dos outros ângulos é também 90°, fato que não é feito por nenhum deles. Isso revela que os sujeitos deixam transparecer a ideia de que se a propriedade é válida para aquele triângulo, então será válida para um triângulo qualquer.

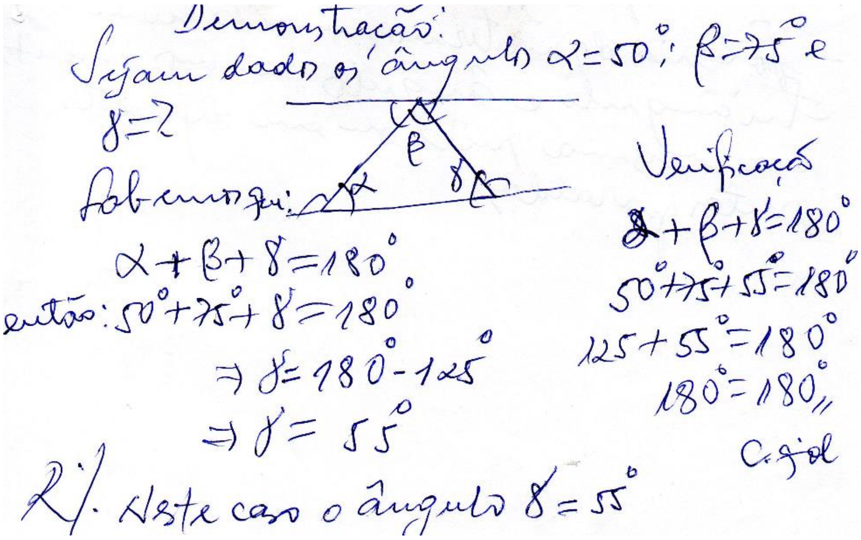
Há outro tipo procedimento que constatamos neste estudo: trata-se de seis sujeitos que simplesmente escolheram dois valores e o terceiro foi determinado como consequência dos dois anteriores e o pressuposto de que a soma deve dar 180. Trata-se das produções de Golden, Emerson, Lucas, César, Hélder e Antunes.

Por exemplo, César escolheu os seguintes valores: α = 50°, β = 75° e γ = ?, e em seguida resolveu a equação $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ obtendo o valor 55 para γ, isto é, γ = 55° e finalmente fez a verificação $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$$50° + 75° + 55° = 180°$$
$$180° = 180°, \text{ c.q.d.}$$

Na Figura 29 reproduzimos na íntegra a resolução de César.

Figura 29 - Prova de César



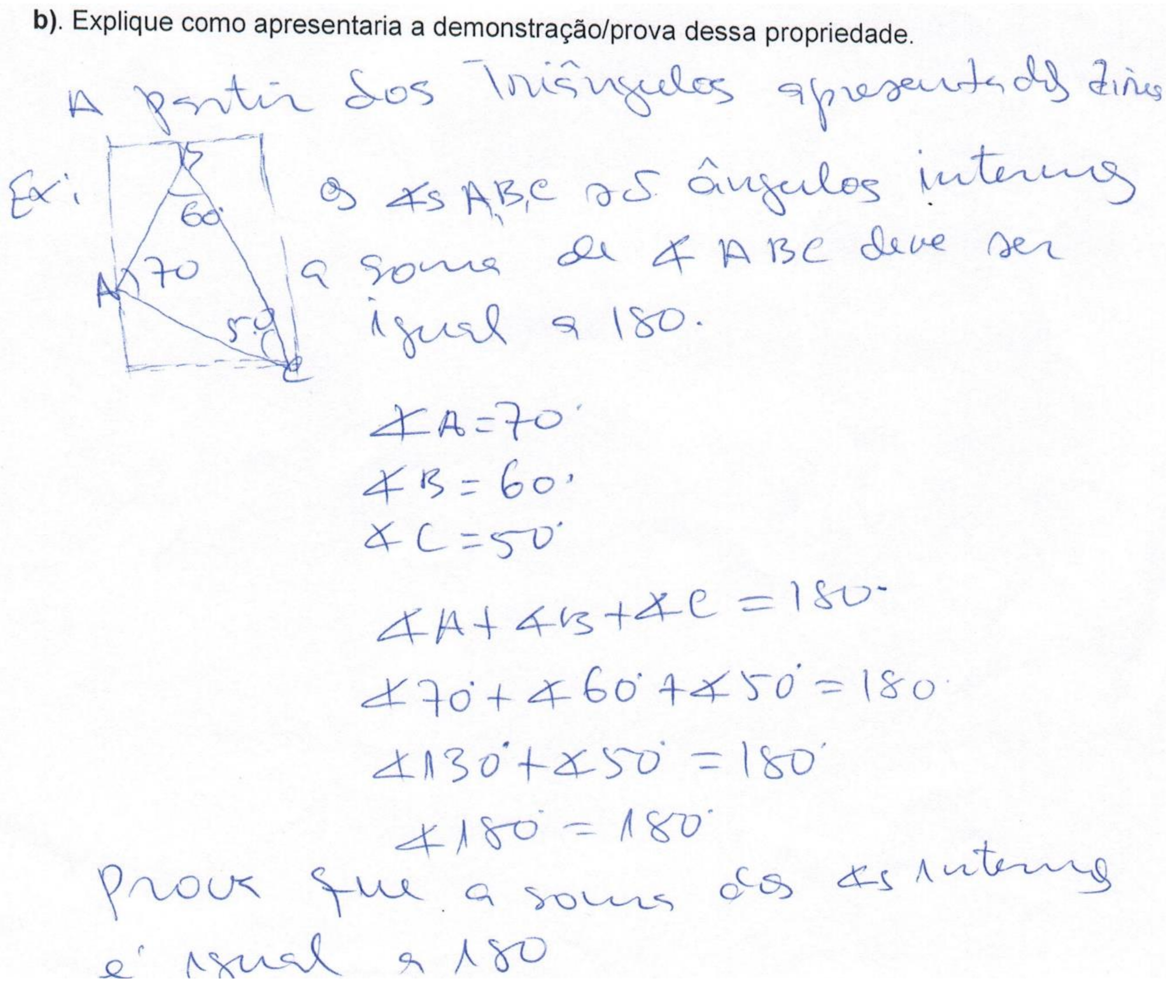
Fonte: Dados da pesquisa

Por sua vez, Hélder apresentou o seguinte: "Pela propriedade dos ângulos internos de um triângulo diz que: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180°, então teremos: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$". Em seguida, ele substituiu os três ângulos por suas amplitudes 60° + 60° + 60° = 180°; 180° = 180° e escreve o seguinte:

> Hipótese: Sejam A, B, C ângulos de um triângulo.
>
> Tese: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
> Demonstração: Pela hipótese $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.

Além das duas produções, Lucas fez o seguinte:

Figura 30 - Prova de Lucas



b). Explique como apresentaria a demonstração/prova dessa propriedade.

A partir dos Triângulos apresentados diria

Ex: os ∢s A,B,C são ângulos internos a soma de ∢ ABC deve ser igual a 180.

∢A=70°
∢B=60°
∢C=50°
∢A+∢B+∢C=180°
∢70°+∢60°+∢50°=180°
∢130°+∢50°=180°
∢180°=180°

Prova que a soma dos ∢s internos é igual a 180

Fonte: Dados da pesquisa

Como vemos, no protocolo reproduzido na Figura 30, Lucas não se preocupa com o símbolo de grau.

Neste grupo, não existe nenhum indício de tentativa de explicação da propriedade, senão uma simples aplicação da propriedade. Em fase de suas respostas, procuramos conversar com Emerson e Gomes sobre isso. Eis o diálogo travado:

Pesquisador *- O senhor apresenta isto aqui como uma prova, uma demonstração da propriedade. O senhor acha que isto é uma demonstração que é válida para qualquer triângulo?*

Emerson *– Sim.*

Pesquisador *– Aqui o senhor colocou sessenta, noventa graus. A figura é um triângulo que não é retângulo. Este ângulo não é reto, este não é reto, o outro também não é reto, A, B, C nenhum daqueles ângulos é de 90 graus. Quer dizer é um triângulo que não é retângulo. Este ângulo não reto, este não é reto,* *outro também não é reto, A, B, C nenhum daqueles ângulos é de 90 graus. É menor que 90 graus; este aqui a sua medida é maior que noventa graus ou um pouco menos, mas podemos construir ou podemos considerar que é obtuso, maior que 90 graus. Então, nesse caso, se o senhor aqui está a usar 90 graus e aqui não aparece nenhum ângulo de 90 graus, nestes dois aqui, então a propriedade não é válida...*

***Emerson** – É válida.*

***Pesquisador** – Como é que explica então, eu quero uma demonstração para estes casos.*

***Emerson** – Então, neste caso estarei a medir com meu transferidor, é isso que estou a dizer.*

Como vemos aqui pela conversa, Emerson considera que se o triângulo não apresenta ângulo reto, a "demonstração" consistirá em utilizar um instrumento de medida para determinar as medidas dos três ângulos e depois adicionar os valores obtidos para em seguida, dizer que, pelo resultado da medição, já se validou a propriedade. Assim, como vemos que, para ele medir os ângulos de um triângulo com um instrumento de medida, é demonstrar.

Entrevistamos também Gomes cuja resolução é "pela hipótese seja dado um triângulo qualquer com os ângulos α, β e γ, tem-se $\alpha \leq 90°$ e $\beta \leq 90°$ e $\gamma \leq 90°$, o que significa que os ângulos são agudos, e se um dos ângulos vale 90° de amplitude, então os dois restantes serão agudos. Somando os ângulos α, β e γ, tem-se o seguinte: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, sendo α, β e γ conhecidos no triângulo, que prova a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo.", colocando-lhe a seguinte pergunta:

***Pesquisado**r – [...] Você acha que já apresentou a demonstração dessa propriedade de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus? Estava-se a pedir para você apresentar a demonstração da propriedade.*

***Gomes** – Sim*

***Pesquisador** – Apresentou? Porquê?*

***Gomes** – Para dizer que essa é cem por cento demonstração, acho que não. Mas naquele primeiro instante o que eu percebi é mais ou menos isso que eu pude fazer.*

***Pesquisador** – Por que mais ou menos?*

***Gomes** – Não se chega a cem por cento. É difícil chegar a uma conclusão que é meramente uma demonstração.*

***Pesquisador** – Por quê?*

***Gomes** – Porque a forma de eu fazer vai ser claro, vai ser diferente da forma como outro vai resolver.*

Tentamos continuar a entrevista para percebermos melhor os argumentos do sujeito entrevistado, mas ele continuou afirmando que é difícil duas pessoas distintas apresentarem a mesma demonstração, portanto, o que apresentara era uma demonstração. Encontramos o mesmo posicionamento no Fernão quando em uma passagem da entrevista convergimos no seguinte:

> ***Pesquisador*** *– [...] Vocês discutiram se verificações são provas ou demonstrações?*
> ***Fernão*** *– Nessa vertente não. Não. Do tipo quer dizer, tentar discutir sobre o que é prova e sobre o que é demonstração? Não, não me lembro.*
> ***Pesquisador*** *– Não, não. Até porque pode não ser assim. Usar exemplos como método de prova ou de demonstração, isso é mais importante, vocês discutiram isso ou não?*
> ***Fernão*** *– Usar exemplos como método de prova?*
> ***Pesquisador*** *– Sim, porque o senhor aceitou isto aqui como prova válida (demonstração).*
> ***Fernão*** *– Sim, sim.*
> ***Pesquisador*** *– Aqui (apontando prova por figura que se deu na tarefa 15 do questionário), discutiram lá ou não?*
> ***Fernão*** *– Discutimos sim.*
> ***Pesquisador*** *– A que conclusão chegaram?*
> ***Fernão*** *– Eu não sei, eu acho que conclusão como tal, não houve, porque se havia é de, por exemplo, nessa situação que colocou: colocava-se um teorema para ...*
> ***Pesquisador*** *– Por exemplo, esta propriedade aqui.*
> ***Fernão*** *– O que me lembro é que as demonstrações cada qual fazia em conformidade com aquilo que sabe ... usávamos um padrão que o docente dá, o padrão é, eram dois padrões: usando argumentos, mas também pode colocar imagens, uma figura qualquer. Agora tirar-se conclusão tipo essa demonstração é que é válida em relação àquela ali, nunca houve esse tipo de [...] de discussão.*

A nossa conversa mostra que Fernão não sabe se exemplos podem ser usados como método de validação de propriedades gerais. A situação é mais nítida em Emerson, o qual explicitamente assumiu que nos casos em que trabalha com triângulos não retângulos a forma de validar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, é mediante a medição direta com transferidor. Antes desta última conversa de Fernão que transcrevemos, em outra passagem anterior, desenrolou a seguinte conversa:

> ***Pesquisador*** *– [...] vai dizer a seu aluno, vai explicar a seu aluno [...] que ou pode verificar, ou pode apresentar assim uma cadeia de argumentos [apontando a prova por coluna da tarefa 15] que isso é uma demonstração? [...] o senhor está-se formando professor!*
> ***Fernão*** *– Sim. Eu penso que posso adotar as duas vias, via imagem e via palavras.*

Ao afirmar que pode adotar via exemplos ou via dedução como método para validar propriedades geométricas gerais, Fernão está mostrando que tem ideia bastante superficial sobre o que é uma demonstração em matemática. Não só ele, como também Emerson, Gomes, Hélder, Lucas, Antunes, Nilza, Paulo, Kelmon, Fred, Ludovico, Tarcísio, João, Rui, Quitério, Dionísio, Iran estão na mesma situação.

Contudo, constatamos uma postura bastante diferente quando entrevistamos a Ofélia sobre se exemplos podiam servir de demonstração de propriedades gerais, como pode ser observado nas transcrições a seguir:

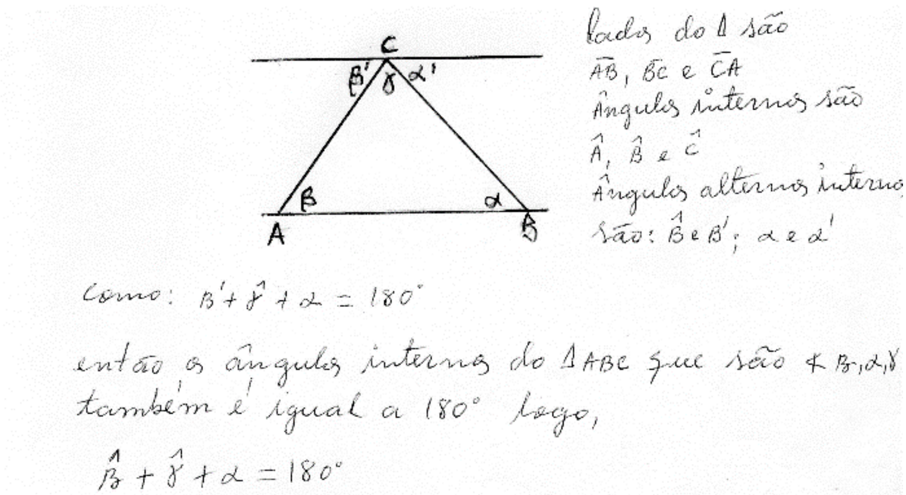
***Ofélia** – [...] é aquilo que disse para fazermos uma demonstração, por aquilo que eu já vi muitas das vezes quando a gente usava duma forma mecânica, por exemplo nos dão um triângulo a gente pega isto põe aqui, pega isto põe aqui ... muitas vezes era invalidada a demonstração, mas se por exemplo, temos um triângulo e dizer quero mostrar esta proposição, me limitar mais nos conceitos que já existem a partir de teoremas que já existem e eu chegar a demonstrar [...] O que eu quero dizer, pelo meu ponto de vista para demonstrar, eu tenho que buscar teoremas já existentes, já provados para demonstrar aquele não duma forma mecânica ..., por exemplo, se me dão, dizer que leva este ângulo junto, ..., para mim isso não é demonstração. [...]*

Segundo aquilo que dizemos anteriormente, uma demonstração não pode basear-se apenas em figuras, em exemplos.

Apenas cinco sujeitos (Baú, Cuco, Getúlio, Luís e Jackson) da pesquisa usaram, de forma completa ou incompleta, argumentos baseados em propriedades matemáticas para validar a propriedade.

Por exemplo, na solução (Figura 31), Baú usa implicitamente o postulado das paralelas e a relação entre ângulos em duas retas paralelas cortadas por uma transversal, sem menção explícita dessas propriedades matemáticas.

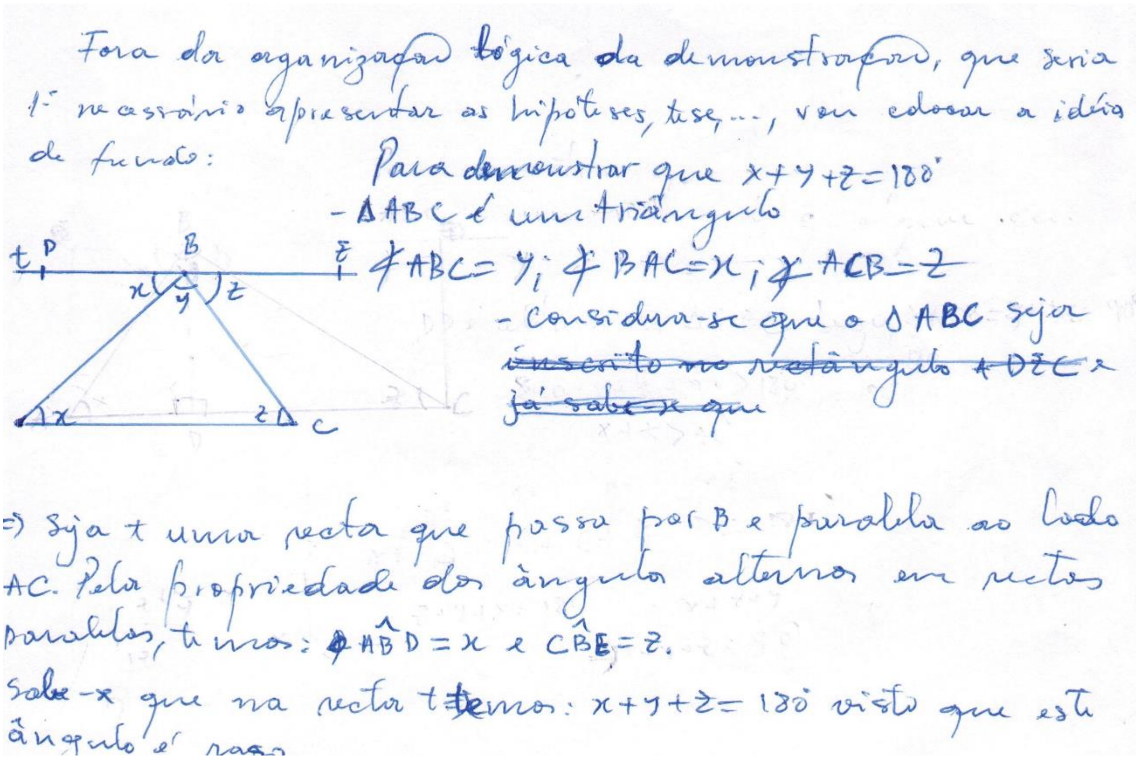
Figura 31 - Prova de Baú



Fonte: Dados da pesquisa

Por não utilizar deduções formais, entendemos que a produção de Baú inspira-se na GII fragmentada, pois envolve aspectos de GII e GI. A mesma categorização pode se aplicar à demonstração proposta por Getúlio que apresentou a seguinte tentativa de validação.

Figura 32 - Prova de Getúlio acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo


Fora da organização lógica da demonstração, que seria 1º necessário apresentar as hipóteses, tese..., vou adoçar a idéia de fundo:

Para demonstrar que $x+y+z=180°$
- ΔABC é um triângulo
$\measuredangle ABC = y$; $\measuredangle BAC = x$; $\measuredangle ACB = z$
- Considera-se que o ΔABC seja ~~inscrito no rectângulo ADEC e já sabe-se que~~

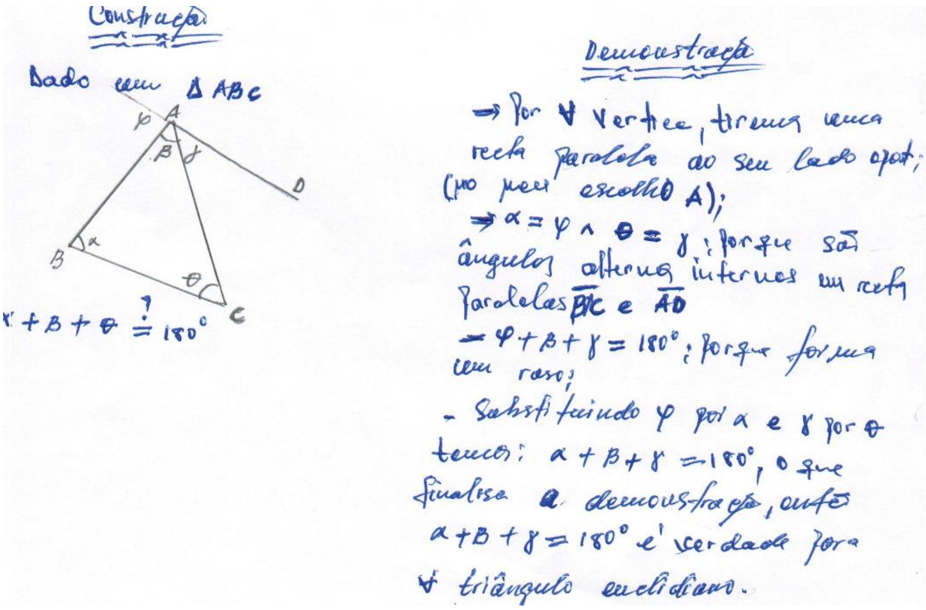
⇒ Seja t uma recta que passa por B e paralela ao lado AC. Pela propriedade dos ângulos alternos em rectas paralelas, temos: $\measuredangle A\hat{B}D = x$ e $C\hat{B}E = z$.
Sabe-se que na recta t temos: $x+y+z = 180°$ visto que este ângulo é raso

Fonte: Dados da pesquisa

De fato, o discurso de Getúlio é incompleto porque não chega a explicitar a razão que lhe leva x + y + z = 180° e a própria notação que apresenta para dois pares de ângulos indicados com letras iguais é confusa: um par com a letra x e outro par com a letra z.

Finalmente, a produção de Cuco apresenta indícios de um discurso razoavelmente coerente, como podemos observar na Figura 33.

Figura 33 - Prova apresentada por Cuco sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa

É uma produção cujo ETG é norteado por GII por utilizar convenientemente justificações das relações que estabelece, mas a axiomatização é incompleta: ele não chega a explicar porque é possível traçar por qualquer um dos vértices do triângulo uma reta paralela ao terceiro lado.

Em geral, verificamos que os sujeitos de pesquisa não foram capazes de validar com argumentos estruturais a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Embora seja uma propriedade básica da geometria plana, os métodos apresentados parecem ter sido influenciados pelos livros didáticos em uso em Moçambique, uma vez que os utilizados mais frequentemente pelos sujeitos da pesquisa (uso de retângulo, uso de recorte, escolhas arbitrárias de valores), são muito presentes nos manuais escolares de Moçambique.

5.2. Análise da tarefa 2. Explorando os pontos médios dos lados de um triângulo

5.2.1. Análise *a priori* da tarefa 2

Outra propriedade dos triângulos diz que "O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro lado".

a. Formule a mesma propriedade começando por: "Se…., então…"

b. Nessa formulação [que você dá], o que é assumido como conhecido? E o que se deve demonstrar?

c. Que conhecimentos são necessários mobilizar para demonstrar essa propriedade?

d. Como apresentaria aos seus alunos a demonstração dessa propriedade.

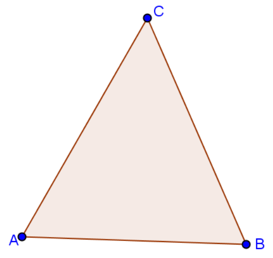
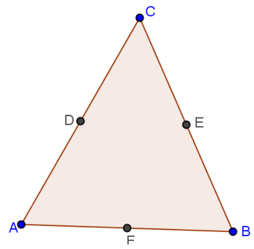
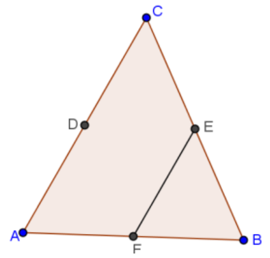
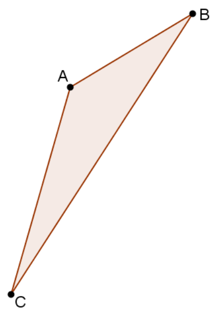
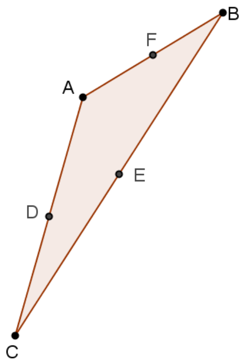
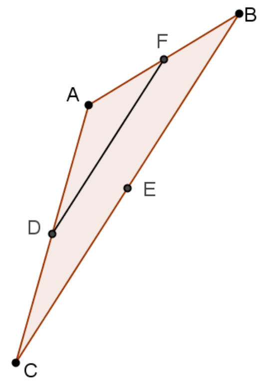
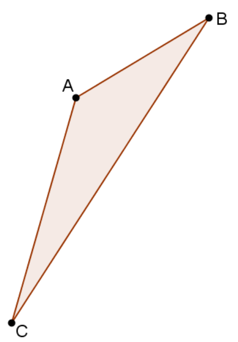
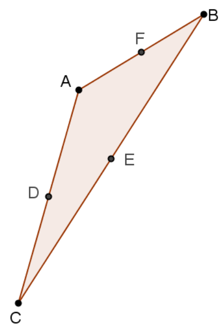
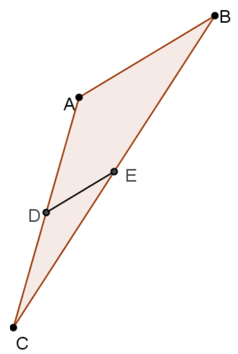
O objetivo da tarefa 2 é explorar os conhecimentos de que dispõem os sujeitos de pesquisa acerca da propriedade da base média de um triângulo, nomeadamente: a identificação das partes constituintes - os dados (ou a hipótese) e o que se deve demonstrar (ou a tese), - se eles sabem que algumas proposições ou teoremas podem ser enunciados na forma condicional com sentido equivalente ao da enunciação direta e como o fazem, bem como analisar se eles conseguem validar a mesma propriedade.

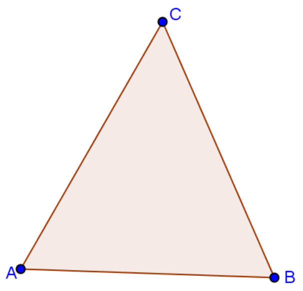
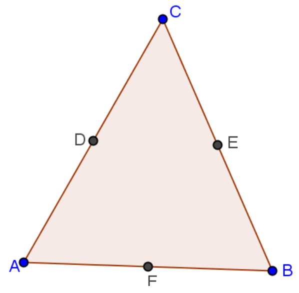
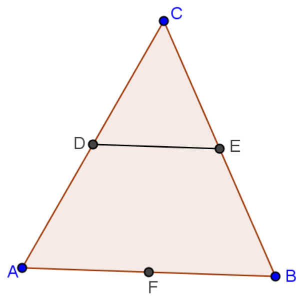
Esta propriedade tem por base a semelhança de triângulos. Ela envolve vários conceitos da geometria plana, nomeadamente, o conceito de triângulo, o conceito de ponto médio de um segmento, o paralelismo, relação entre medidas de segmentos em um determinado contexto. Além do mais, é necessário entender que a tese é composta por dois elementos que devem ser demonstrados em separado: (i) o segmento determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado; (ii) a medida do segmento determinado por pontos médios de dois lados de um triângulo é metade da medida do terceiro lado do triângulo.

A apresentação da tarefa em si situa seu objeto em Geometria II (Geometria axiomática natural) ou em Geometria III (Geometria axiomática formal) e assume-se que a forma de validação é dedutiva. O que se pretende verificar é se essa propriedade faz parte do ETG dos estudantes ou não incluindo os modos de sua validação.

O primeiro passo útil desta tarefa é articulação de dois processos, o registro figural e o registro em língua natural e matemática como as apresentadas na Figura 34.

Figura 34: Possíveis ilustrações figurais do enunciado da tarefa 2.

 Ilustração do triângulo	 D, F e G são os pontos médios dos lados	 $\overline{EF}$ une dois pontos médios de dois lados. Então, $\overline{EF}$// $\overline{AC}$ e EF = $\frac{1}{2}$AC (a)
 Ilustração do triângulo	 D, F e G são os pontos médios dos lados	 $\overline{DF}$ une dois pontos médios de dois lados. Então, $\overline{DF}$ // $\overline{BC}$ e DF = $\frac{1}{2}$BC (b)
 Ilustração do triângulo	 D, F e G são os pontos médios dos lados	 DE une dois pontos médios de dois lados. Então, $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ e DE = $\frac{1}{2}$AB (c)

 Ilustração do triângulo	 D, F e G são os pontos médios dos lados	 DE une dois pontos médios de dois lados. Então, $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ e DE = $\frac{1}{2}$AB (d)

Fonte: Próprio

Apresentamos quatro construções aparentemente diferentes por duas razões. A primeira razão, é para deixar claro que a propriedade é independente dos lados que se tomam e do tipo de triângulo. A segunda, é para destacar que a posição e o tipo de triângulo podem constituir uma variável didática importante. Por exemplo, em conversa, alguns participantes do projeto de pesquisa em andamento, Processos de ensino e aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT, aceitaram que nas construções (a) e (d) a propriedade é válida, mas (b) e (c) não consideram, *a priori*, que a propriedade é válida por envolver triângulos com lados não congruentes. Ainda, a impressão visual na (c) parece revelar que o segmento DE não é paralelo a $\overline{AB}$ ou que a medida $\overline{DE}$ não é metade de $\overline{AB}$. Esses todos aspectos consideramo-los importantes em uma pesquisa, para além de explorarmos algumas das possibilidades de registro figural, que nem sempre os livros didáticos o fazem.

***Item* a**: Tem por objetivo explorar o fato de que alguns teoremas podem ser enunciados na forma condicional na qual as partes constituintes, hipótese e tese, são nitidamente explicitadas. Nessa formulação, o antecedente, isto é, a hipótese (aquilo que se assume como conhecido) aparece imediatamente após a conjunção condicional *se* e, o consequente, isto é, a tese (aquilo que é objeto de prova), segue imediatamente ao advérbio *então*. Assim, espera-se a seguinte formulação: **Se** um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, **então** esse segmento é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade da medida desse lado.

É preciso ressaltar que qualquer separação dos dois componentes que constituem consequência na formulação condicional (ser paralelo ao terceiro lado e sua medida ser metade da medida desse terceiro lado) incorre numa formulação que não é equivalente ao enunciado da tarefa proposta. Por exemplo, formulações como (i) “se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo e é paralelo ao terceiro lado, então sua medida é metade desse terceiro lado” ou (ii) “se um segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, então sua medida é metade da medida desse terceiro lado” não podem ser considerados como equivalentes à formulação inicial porque na primeira, a hipótese é composta de dois dados: ser segmento que une dois pontos médios de dois lados e ser paralelo ao terceiro lado, no segundo caso, a formulação parece mostrar que há casos em que um segmento é determinado por pontos médios de dois lados de um triângulo, mas não é paralelo ao terceiro lado.

No **item b,** pretende-se despertar nos sujeitos da pesquisa a necessidade de identificar eficazmente as partes constituintes de um teorema (hipótese e tese), especificamente: aquilo que se assume como conhecido – hipótese – o segmento é determinado por pontos médios de dois lados de um triângulo. A segunda parte, aquela que será objeto de validação por meio de uma demonstração, aquilo cuja veracidade carece de ser provada – nesse caso: o ser paralelo ao terceiro lado do triângulo e, sua medida ser metade da medida desse lado.

A resposta ao **item c** depende do nível de rigor e do tipo de prova escolhido para convencer o locutor da validade da propriedade. O aluno pode utilizar ferramentas de provas empíricas (baseadas em medições), ferramentas teóricas (baseadas em propriedades matemáticas).

No primeiro caso, o ETG é fundamentado pela Geometria I na qual as validações se baseiam em percepções ou instrumentos de construção. Como afirma Kuzniak (2010) neste caso há um jogo de paradigmas em que aspectos da Geometria II são assumidos para justificar os procedimentos na Geometria I. Tais aspectos são propriedades da geometria que deverão ser utilizadas nos procedimentos, especificamente: saber que duas retas *r* e *s* são paralelas se a distância de qualquer ponto da reta *r* à reta *s* for sempre constante; saber o que é distância de um ponto a uma reta e como se determina essa distância; saber utilizar régua e esquadro para traçar retas perpendiculares ou paralelas e o conceito de ponto médio de um segmento de reta.

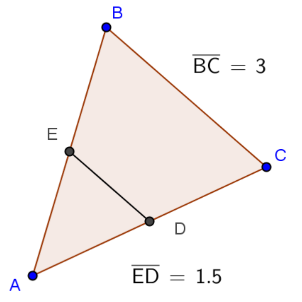
No segundo caso, em que se recorre a ferramentas de natureza teórica (definições, teoremas ou propriedades assumidas como conhecidas ou previamente demonstrados), os sujeitos da pesquisa podem mobilizar conhecimentos tais como: retas paralelas, casos de congruência de triângulos, propriedades dos lados de paralelogramo, relação entre ângulos correspondentes ou alternos internos em retas paralelas, ângulos opostos pelo vértice. Neste caso dizemos que o ETG é norteado pela Geometria axiomática natural, GII.

O **item d** tem por objetivo explícito explorar as estratégias de validação da propriedade da base média em um triângulo.

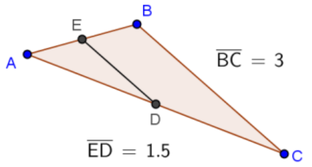
Considerando o tipo de paradigma geométrico que vai nortear o ETG do sujeito, temos duas estratégias para responder ao item 2d.

A utilização explícita de procedimentos de GI, que privilegia o uso de medições de exemplos para a validação da propriedade, assumindo a GII. Na Figura 35, ilustramos esse tipo de procedimento.

Figura 35 - Algumas formas de medição para a validação da propriedade da base média de um triângulo

<table>
<tr>
<td>

Caso 1</td>
<td>Com ajuda de régua e lápis o sujeito traça em papel um triângulo ABC. Depois, marca os pontos médios E, D dos lados AB e AC, e traça em seguida o segmento ED.

O aluno mede o segmento ED e verifica que sua medida é metade da medida do segmento BC. Daí, concluiu que a propriedade é verdadeira.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Caso 2</td>
<td>Em ambiente de geometria dinâmica, por exemplo, Geogebra, o sujeito constrói um triângulo os pontos médios dos lados como na figura ao lado com ajuda da ferramenta “Ponto médio ou Centro” do aplicativo. Em seguida, com a ferramenta “Segmento” determina o segmento ED. Com a ferramenta “Relação” do</td>
</tr>
</table>

	software controlei a relação entre ED e BC e constata que são paralelos. Com a ferramenta “Distância, comprimento” verifica as medidas dos segmentos BC e ED e constata que a medida do segmento ED é metade da medida do segmento BC. Arrasta os vértices do triângulo, mas constata que a medida do segmento ED é sempre a metade da medida do segmento BC. Daí concluiu que a proposição é verdadeira.

Fonte: O autor

As duas provas embora convençam, não explicam, nem generalizam a propriedade.

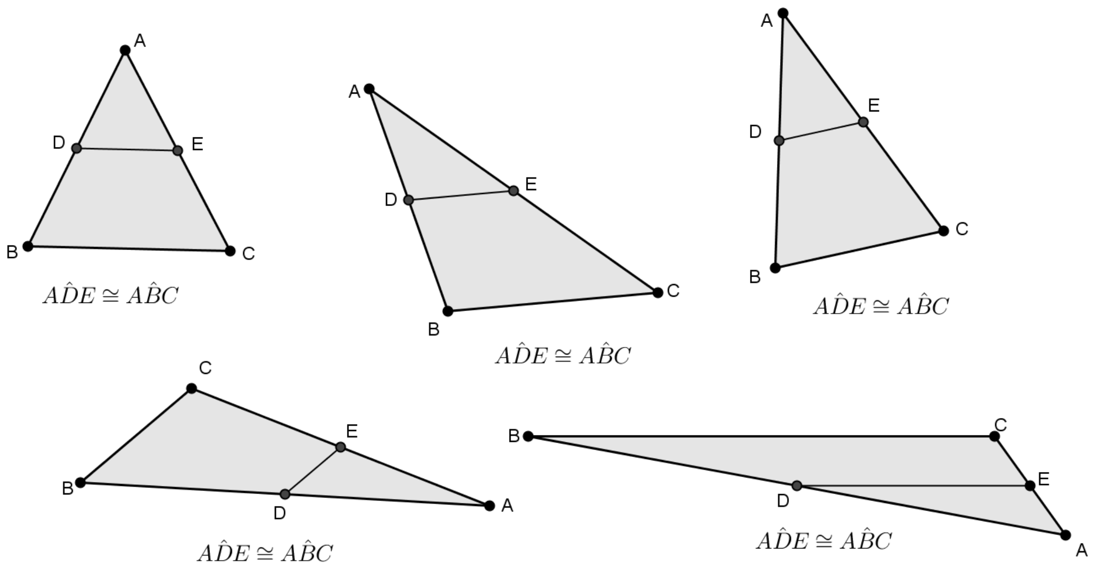
Há uma alternativa de recorrer ao mesmo tipo de prova baseada em medições de alguns exemplos, mas separando nitidamente as duas partes que compõem a tese, isto é:

(i) O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro.

(ii) A medida do segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é metade da medida do terceiro lado.

Assim, uma possível forma de obter a resposta para a parte (i) poderá ser por medição de vários exemplos como ilustra na Figura 36**.**

Figura 36 - Argumento baseado em medição de exemplos



Cada um dos cinco triângulos de tamanhos diferentes, foi medido o ângulo ADE e viu-se que é congruente ao ângulo ABC. Assim, em cada caso DE é paralelo a BC. Portanto, a afirmação é sempre verdadeira.

Fonte: O autor

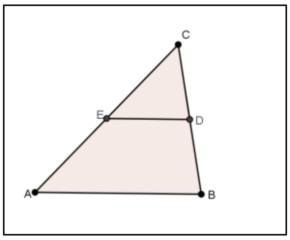
Acreditamos que esta pode ser uma possível resposta a esperar, pois como salientamos, há estudos que mostram respostas dessa natureza (CHAZAN, 1993).

Para a parte (ii), pela mesma via de medições, é determinar as medidas dos segmentos DE e BC e, em seguida comparar os valores. Finalmente, concluir, com base nas relações numéricas, que a propriedade é válida.

Uma resposta como a que é apresentada em (i) e (ii) pode ser considerada como empirismo ingênuo ou prova indutiva, já que se baseia em resultado de experimentações com artefatos. O paradigma norteador ao ETG é a Geometria Natural (GI) tal como classificamos para o caso anterior.

A outra possibilidade é a que se baseia em um ETG norteado pelo paradigma da Geometria axiomática natural (GII), dado que se assume que ela existe. Uma vez que na GII a validação é assegurada por cadeias dedutivas baseadas em um sistema axiomático (mesmo que tal axiomática não seja completa), as figuras desempenham seu papel heurístico, espera-se que a resolução da tarefa comece com a reconfiguração que permite visualizar as representações dos conceitos que estão em jogo: um triângulo, um segmento unindo dois pontos médios de dois dos seus lados, como ilustrado na Figura 37.

Figura 37 - Ilustração de um triângulo com a respectiva base médio



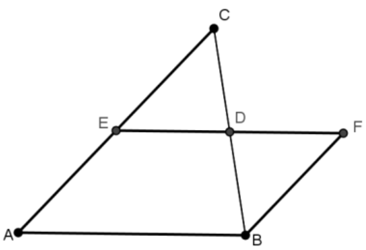
Seja ABC um triângulo com os pontos médios D e E localizados nos seus lados BC e AC respectivamente

Fonte: O autor

A propriedade afirma que o segmento que une os pontos médios D e E dos lados $\overline{AC}\ e\ \overline{BC}$ de um triângulo ABC, é paralelo ao lado AB do triângulo e sua medida é metade da medida de AB.

Precisamos utilizar os conceitos mencionados em **c,** como ilustramos na figura 38.

Figura 38 - Triângulo ABC com acréscimo de elementos gráficos



Fonte: O autor

Por B traçamos uma reta r paralela a AC e, prolonguemos ED até intersectar a reta r em F. Fixando nossa atenção nos triângulos DCE e DBF, e recorrendo à propriedade sobre de ângulos em retas paralelas intersectadas por uma secante e ângulos opostos pelo vértice, constatamos que:

1- E$\hat{C}$D ≅ F$\hat{B}$D por serem ângulos alternos internos em retas paralelas;

2- $\overline{DC}$ ≅ $\overline{DB}$ por hipótese;

3- E$\hat{D}$C ≅ F$\hat{D}$B por serem ângulos opostos pelo vértice

Então, as três relações nos permitem concluir que ∆DCE ≅ ∆DBF, pelo critério ALA da congruência de triângulos. Consequentemente BF ≅ CE já que são lados correspondentes de triângulos congruentes. Ora $\overline{CE}$ ≅ $\overline{AE}$ (por hipótese), então $\overline{BF}$ ≅ $\overline{AE}$, por transitividade da relação de congruência. Isto prova que no quadrilátero ABFE os dois lados AE e BF são paralelos e têm o mesmo comprimento.

Ainda não completamos a demonstração da propriedade, precisamos de outra propriedade para fazer isso. É outra propriedade que carece de outra demonstração, porém, para a presente tarefa vamos simplesmente assumi-la sem a provarmos. Essa propriedade diz o seguinte: “se um quadrilátero tem dois lados opostos paralelos de igual comprimento, então os outros dois lados opostos do quadrilátero são paralelos e de igual comprimento” Assim, temos:
$\overline{AB}$ // $\overline{FE}$ e $\overline{AB} \cong \overline{FE}$, pela propriedade mencionada antes. Como $\overline{ED}$ é parte de $\overline{EF}$, então $\overline{AB}$ // $\overline{ED}$, o que completa a demonstração da primeira parte da propriedade. Quer dizer, conseguimos demonstrar que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.
Agora vamos demonstrar a segunda parte da propriedade, isto é, que: “o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo tem por medida a metade da medida do terceiro lado”. No decurso da demonstração da primeira parte da propriedade, prolongamos o segmento ED obtendo o ponto F, e construímos o quadrilátero ABFE unindo os pontos B e F. Depois, demonstramos que os triângulos DCE e DBF são congruentes. Assim, os lados correspondentes são congruentes. Da demonstração anterior podemos inferir o seguinte:

Como ABFE é um paralelogramo, então $\overline{EF} \cong \overline{AB}$, porque são lados opostos.

$$\overline{ED} + \overline{DF} = \overline{EF} \Rightarrow \overline{ED} + \overline{DF} = \overline{AB} \qquad (1)$$

Da congruência dos triângulos DBF e DCE, temos que $\overline{DF} \cong \overline{ED}$, lados correspondentes de dois triângulos congruentes (2). Substituindo (2) em (1), temos que $\overline{ED} + \overline{ED} = \overline{AB}$, isto é: $\overline{AB} = 2.\overline{ED}$, ou seja, $\overline{ED} = \frac{\overline{AB}}{2}$, que é exatamente o que queríamos demonstrar na 2ª parte da propriedade. Assim, completamos a demonstração da propriedade invocada na tarefa 2.

Como se pode ver, a demonstração da propriedade subdividida em duas partes mostra que ela pode ser enunciada de seguinte modo:

Propriedade 1: O segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado do triângulo.

Propriedade 2: O segmento de reta que une pontos médios de dois lados de um triângulo é metade do comprimento do terceiro lado do triângulo.

Ainda, nesta tarefa, a operação de reconfiguração mostra-se como uma atividade fundamental para que se possam descortinar os caminhos para a demonstração da(s) propriedade(s). Gravina (2001) destaca que a dificuldade mais complexa tem a ver com o fato de elementos que sustentam a argumentação durante o processo de construção da demonstração precisarem ser acrescidos mais tarde, porque não aparecem desde o início no componente figural. Esta autora afirma que

> […] os objetos geométricos necessários ao encadeamento de relações inferenciais não estão ainda visíveis no componente figural e devem ser identificados e acrescidos ao componente figural para que assim emirjam, via reinterpretações e reconstruções, os subcomponentes figurais que sustentarão a argumentação (GRAVINA, 2001, p. 75)

A articulação entre a gênese figural e a gênese discursiva consistia, nesta tarefa, na exploração heurística da figura que permitiu que elementos de natureza gráfica permitissem produzir o raciocínio discursivo mediante o encadeamento dos conceitos geométricos.

Este processo de validação é uma prova intelectual segundo Balacheff (1987) e segundo Harel e Sowder (1998, 2007) pertence à categoria de esquemas de provas axiomáticas, é uma validação que se enquadra na Geometria axiomática natural (GII) segundo Houdement e Kuzniak (2003, 2007). É um processo de validação possível de ser observado nos sujeitos de nossa pesquisa se, segundo estes últimos autores, sendo característica do espaço de trabalho geométrico institucional, for componente do espaço de trabalho geométrico pessoal dos estudantes de licenciatura em ensino de matemática em Moçambique.

5.2.2. Análise dos resultados da tarefa 2

A tarefa 2 tem quatro itens: item: (a) pedia que os estudantes formulassem uma propriedade dada na forma direta em forma condicional; o item (b) pedia que os mesmos sujeitos identificassem a hipótese (o que se assume como conhecido), e a tese (o que se pretende validar por meio de uma prova ou de uma demonstração); o item (c) pedia que os sujeitos indicassem os conhecimentos que julgassem essenciais para a validação da propriedade objeto de discussão, e o item (d) pedia que apresentassem a demonstração.

Quanto ao item (a) constatamos que dos 24 sujeitos que responderam à tarefa 2, apenas 5 conseguiram formular corretamente o enunciado condicional da propriedade em discussão: Paulo, Amorim, Getúlio, Herculano e Jackson.

A formulação correta, conforme discutimos na análise didática é: "**Se** um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, **então,** esse segmento é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade da medida desse lado".

Com a exceção de Tarcísio, que embora sua formulação seja ligeiramente diferente, mas sem erro de conteúdo, os restantes participantes da pesquisa (dezenove) não conseguiram dar uma resposta correta. A maior parte das formulações incluiu na hipótese uma das partes da tese. Trata-se de 9 sujeitos (Emerson, Iran, Nunes, Ofélia, Baú, Elísio, Fred, Kelmon e Ludovico) que deslocaram uma das partes da tese para a hipótese. A formulação deles foi: "se o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro, então sua medida é metade da medida desse terceiro lado".

Esta formulação não é equivalente ao enunciado da tarefa por duas razões: primeiro, nesta formulação a hipótese consta de dois elementos (um segmento que une dois pontos médios e um segmento que é paralelo ao terceiro lado), enquanto que na formulação inicial a hipótese é composta de um só elemento (um segmento une pontos médios de dois lados de um triângulo). Segundo, a formulação dada subentende que pode existir um segmento que, unindo pontos médios de dois lados de um triângulo, não seja paralelo ao terceiro lado de um triângulo.

Os autores das outras formulações não parecem ter consciência do que tinha sido pedido. Por exemplo, é o caso dos autores das três formulações que reproduzimos a seguir:

Dionísio*: Se dois segmentos são paralelos num triângulo então um dos segmentos une pontos médios de dois lados do triângulo e a medida desse segmento é a metade do outro que é paralelo a ele mesmo.*

Cuco*: Se o segmento que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade desse terceiro lado, então é um triângulo.*

Fernão*: Se a união de pontos médios de dois lados de um triângulo é um segmento paralelo ao terceiro, então a sua medida é metade desse terceiro lado.*

Hélder*: Então os pontos médios que o segmento dos 2 lados de um* *triângulo é paralelo ao terceiro e a sua medida é metade desse terceiro lado.*

***Luís**: Se AM = MC e BN = CN porque OMXN é ponto médio dos lados AB; BC então AB é a metade dos lados AC e BC.*

Essas formulações não parecem ter a ver com o que foi pedido na tarefa.

Para percebermos se havia alguma relação entre as formulações desses sujeitos e a enunciada na tarefa, entrevistamos alguns dos sujeitos. Apresentamos transcrição das conversas que tivemos com Cuco, Fred, Fernão e Ofélia.

***Pesquisador** – O que você formulou.*

***Cuco** – [...] Se o segmento que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e a sua medida é metade desse terceiro lado, então é um triângulo.*

Depois da leitura pôs-se a rir.

***Pesquisador** – É um triângulo. Aqui o que se assume que é conhecido?*

***Cuco** – Aqui nesta que ... (apontando o que acabou de ler) - [...] O que é conhecido: pontos médios, e também ... dois pontos de dois lados, e também o segmento que une aqueles pontos, o paralelismo com o outro lado; a medida deste em relação ao outro.*

***Pesquisador** – Então, tem que demonstrar o quê?*

***Cuco** – Que se isso acontecer, é um triângulo.*

***Pesquisador** – É a mesma coisa?*

***Cuco** – Não, aqui era para demonstrar medidas e paralelismo.*

***Pesquisador** – Já assume que são formulações diferentes, não é?*

***Cuco** – Sim, não são equivalentes, porque aqui tem de demonstrar que é um triângulo. Aqui é para demonstrar o paralelismo e a relação daqueles dois lados ...*

Como pode ser observado a partir dessa conversa, **Cuco** conseguiu entender que as duas formulações não são equivalentes.

Vamos agora analisar a formulação Fred em relação a do enunciado da tarefa.

***Pesquisador** – Vamos para a tarefa 2. Aqui pedia-se alguma coisa, dizia-se assim: o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro lado. Então pedia-se no item a que a formulação fosse, começasse "se" e a conclusão começar com "então". Aí colocou aqui "se o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro, então a sua medida é metade desse terceiro lado". A pergunta que eu coloco é: acha que as duas formulações, está com a que deu são equivalentes?*

***Fred** – Penso que sim.*

***Pesquisador** – Por quê? Por quê acha que são equivalentes?*

***Fred** – Diz que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e a sua medida metade desse terceiro lado. [....] esse eu posso dizer na lógica como nós podemos chamar uma proposição como esta aqui, esta é uma condição que é equivalente àquela propriedade dada.*

***Pesquisador** – Pode construir aqui o que foi dito nesta, pode esboçar o que foi dado aqui – apontando o enunciado – no enunciado da tarefa 2?*

Fred fez o que foi pedido e, em seguida, a conversa deu continuidade.

***Pesquisador** – Esboçou o que foi dito aqui?*
***Fred** – Sim.*
***Pesquisador** – está-se dizendo que o segmento que une os pontos médios. O senhor determinou os pontos médios*
***Fred** – Estes, de AB e de BC.*
***Pesquisador** – Não é? Aí então diz que...*
***Fred** – É paralelo ao terceiro.*
***Pesquisador** – Ao terceiro, a este lado aqui – apontando – e sua medida é o quê?*
***Fred** – É a metade.*
***Pesquisador** – A medida deste segmento é a metade deste segmento.*
***Fred** – Sim.*
***Pesquisador** – O que escreveu aqui?*

Fred lê em voz alta o que escreveu. "Se o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro, então a sua medida é metade desse terceiro lado".

Perguntamos novamente se as duas formulações se eram equivalentes. Sem responder à nossa pergunta, Fred leu novamente sua formulação.

***Pesquisador** – São equivalentes?*
***Fred** – Iya, equivalência como tal, porque esta é uma condição, enquanto aquela já é uma propriedade dada.*
***Pesquisador** – Mas esta propriedade não pode ser apresentada sob a forma de "se", "então"?*
***Fred** – Iya, eu penso que é equivalente.*

Como vimos que continuava considerando de equivalentes, avançamos com as nossas perguntas.

***Pesquisador** – Ok. Vamos, talvez vamos ver... É um teorema ou propriedade a demonstrar. Que nome se dá a parte a ser demonstrada? Num teorema que queremos demonstrar, ou uma propriedade aquela parte que se deve demonstrar que nome se dá?*
Fred – Tese.
Pesquisador – Neste caso aqui ... aquilo que vamos demonstrar é tese. Nesta formulação aqui, qual a tese?

Não respondeu. Então pedimos que identificasse o que se devia demonstrar a partir da figura que fez, traduzindo o que foi dado no enunciado.

***Fred** – Tem que se demonstrar que ED é a metade de AC.*
***Pesquisador** – Só?*

***Fred** – Também tem de se demonstrar que o triângulo. [...] Tem de se mostrar que E é ponto médio de AB, D é ponto médio de BC.*
***Pesquisador** – É isso que está aqui?*
***Fred** – Nada. Aqui só tem que ser demonstrado se este é metade deste.*
***Pesquisador** – Só? Leia bem.*

Fred lê em voz alta o enunciado da tarefa: *"O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua .... também provar se é paralelo."*

***Pesquisador** – Ok. Aqui na sua formulação o que tem de ser demonstrado?*
***Fred** – Na minha formulação ... se o segmento que une dois lados de um triângulo é paralelo (para algum tempo na leitura) ... tem que se demonstrar que é metade.*
***Pesquisador** – É metade?*
***Fred** – Sim.*
***Pesquisador** - E o paralelismo deve ser demonstrado aqui?*
Ele lê novamente o enunciado*: "Se o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo, então ...".*
***Fred** - Também de ser demonstrado o paralelismo.*
***Pesquisador** – Então acha que tanto aqui ... as duas formulações são equivalentes?*
***Fred** – É isso que estava a dizer que são equivalentes.*

Fred não conseguiu ver que as duas formações não são equivalentes dado que foi incapaz de dizer qual a tese da formulação de que é autor.

Questionamos a Ofélia nos seguintes termos:

***Pesquisador** – [...] Aqui se diz: "O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro". Formulou assim: "se o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro, então, a sua medida é metade desse terceiro lado." Acha que essas duas formulações são equivalentes?*

Depois de ler a formulação da proposição no enunciado da tarefa, responde:

***Ofélia** – Não dizemos a mesma coisa.*

Na justificação torna a ler a formulação no enunciado da tarefa.

***Pesquisador** – Sim. E para o seu caso, disse o quê?*
***Ofélia** – Se o segmento que une ... (não completa a leitura) ... Bom, porque aqui (apontando a formulação no enunciado) diz: o segmento que ....*

(não completa a leitura) e aqui coloca uma condição: se .... então, ...

Pesquisador – *Aqui usa condição. Mas não era possível usar uma condição e serem equivalentes?*

Depois de quase cinquenta segundos responde:

Ofélia – Acho que não.

Portanto, percebe-se pela resposta, que ela não está segura. Ele não percebeu nas duas formulações a hipótese e a tese deveriam ser os mesmos elementos.

Item (b)

Conforme salientamos, este item pedia que os sujeitos identificassem o que era assumido como sabido (a hipótese) e o que devia ser demonstrado (a tese) acerca da propriedade do segmento determinado por pontos médios de dois lados de um triângulo.

Apenas 6 sujeitos identificaram corretamente os dois elementos pedidos. Trata-se de Iran, Paulo, Tarcísio, Amorim, Getúlio, Herculano e Jackson. Mesmo havendo diferenças mínimas na formulação, eles conseguiram identificar o que foi assumido como conhecido: o triângulo e os pontos médios de dois lados. O que deve ser demonstrado é a relação entre o segmento que une os pontos médios de dois lados e o terceiro. Outros alunos, além do que foi destacado, explicitaram o que deve ser demonstrado: o paralelismo entre esse segmento e o terceiro lado do triângulo, bem como a relação de grandeza entre esse segmento e o terceiro lado.

Alguns deram resposta incompleta tal como Gomes que disse o seguinte: "*Nessa formulação, o que é conhecido é o triângulo com três lados e seus pontos médios. E o que deve ser demonstrado é o paralelismo entre o segmento que une os pontos médios de dois lados desse triângulo*". Nesta resposta consta-se que não só deixa de lado a relação de grandeza entre o tal segmento determinado por dois pontos médios de dois lados com o terceiro, como também a relação de paralelismo é incompleta.

A seguir, apresentamos as formulações de alguns alunos que não identificaram devidamente o que era pedido no item (b):

Emerson *- Nesta formulação o que é assumido como conhecido é o terceiro lado. O que deve ser demonstrado é o tal segmento (união de dois lados).*

***Fernão** - O conhecido é segmento paralelo da união de dois pontos médios de dois lados de um triângulo. Deve ser demonstrado: a medida ser igual ao terceiro lado.*

***Hélder** - O que é assumido como conhecido é: lados, triângulo e metade. O que deve ser demonstrado é paralelismo.*

***Ofélia** - Conhecimento: a medida do segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é metade do terceiro lado. Demonstrado: o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.*

***Quitério** - É assumido como conhecido a união de dois pontos médios de lados de um triângulo que este segmento é paralelo ao terceiro. Deve ser demonstrado que o segmento com estas condições* – apontando no enunciado **-** *sua medida é metade do terceiro lado.*

Essas formulações dos alunos apresentam indícios de que esses alunos têm dificuldades em identificar os componentes de um teorema ou propriedade objeto de uma demonstração. Nosso argumento é reforçado pela produção de Fred, que parece não ter a mínima ideia o que seriam hipótese e tese, como pode ser observado na seguinte afirmação:

***Fred** - Nessa formulação o que é assumido como conhecido é o próprio triângulo e o segmento que une os dois lados. O que deve ser demonstrado é o próprio teorema ou propriedade*.

As respostas desses alunos reforcem os resultados de algumas pesquisas revisadas que mostram que os sujeitos investigados tinham dificuldades em diferenciar tese e hipótese.

Item (c)

Percebemos que, no item que pedia que os estudantes elencassem conhecimentos necessários para demonstrar a propriedade dos pontos médios dos lados de um triângulo, há um descompasso entre o que foi pedido e as respostas dos alunos, como pode ser observado nos extratos a seguir:

***Amorim**: "Teorema de Pitágoras, paralelismo".*

Fred: "Os conhecimentos necessários para demonstrar essa propriedade podem ser: o Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e a Homotetia"

***Herculano:** "Para demonstrar esta propriedade é necessário mobilizar conhecimentos relacionados com pontos médios, paralelismo, teorema de Tales".*

***Jackson**: "Essa propriedade pode ser demonstrada a partir de conhecimentos sobre razões trigonométricas em triângulos retângulos".*

***Emerson**: "Os conhecimentos necessários para demonstrar essa propriedade são: o posicionamento do próprio triângulo, o paralelismo dos lados, o tipo de intersecção das retas, ilustração do próprio triângulo e sua clareza (isósceles, retângulo ou equilátero)".*

***Fernão**: "união de dois pontos, paralelismo de retas; adição, subtração, divisão e multiplicação de retas (se possível); ângulos de um triângulo e semelhança de triângulos".*

***Hélder:** "Os conhecimentos necessários a mobilizar para demonstrar essa propriedade são: a noção do conceito de paralelismo; saber quanto é que se diz que esta é metade de um lado".*

Constatamos que nestes extratos, apenas Fred e Herculano mencionaram algumas ferramentas teóricas que são realmente úteis para a demonstração da propriedade. Essas ferramentas são: pontos médios, paralelismo, homotetia e semelhança de triângulos. Contudo, Herculano menciona o teorema de Thales cujo emprego exige que os triângulos sejam semelhantes, o que deve ser demonstrado no caso de nossa situação. Portanto, trata-se de um erro proceder assim.

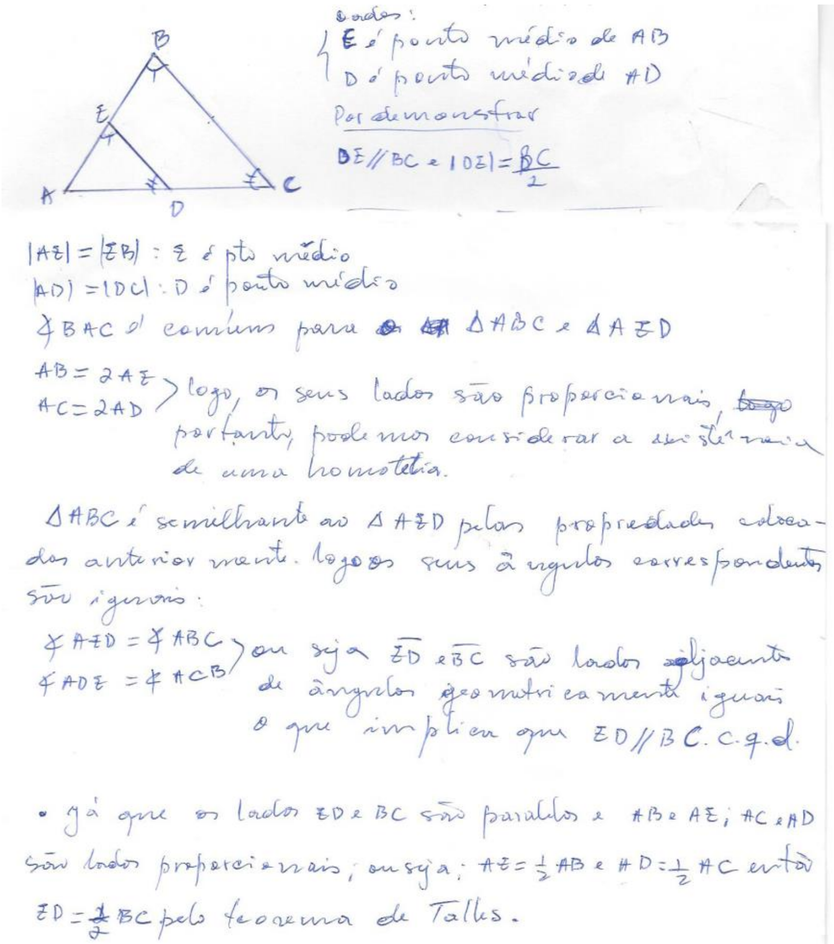
Item (d)

Neste item, pedimos que os estudantes apresentassem uma proposta de demonstração da propriedade apresentada na tarefa 2.

As respostas apresentadas pelos alunos item revelaram grandes dificuldades na validação da propriedade. Os seguintes extratos (Figura 39) de respostas são indicativos disso.

Apenas Getúlio, conseguiu demonstrar o paralelismo dos segmentos, mas de forma ambígua como pode ser observado no extrato da Figura 39.

Figura 39 - Prova apresentada por Getúlio sobre a propriedade da tarefa 2, item (d)

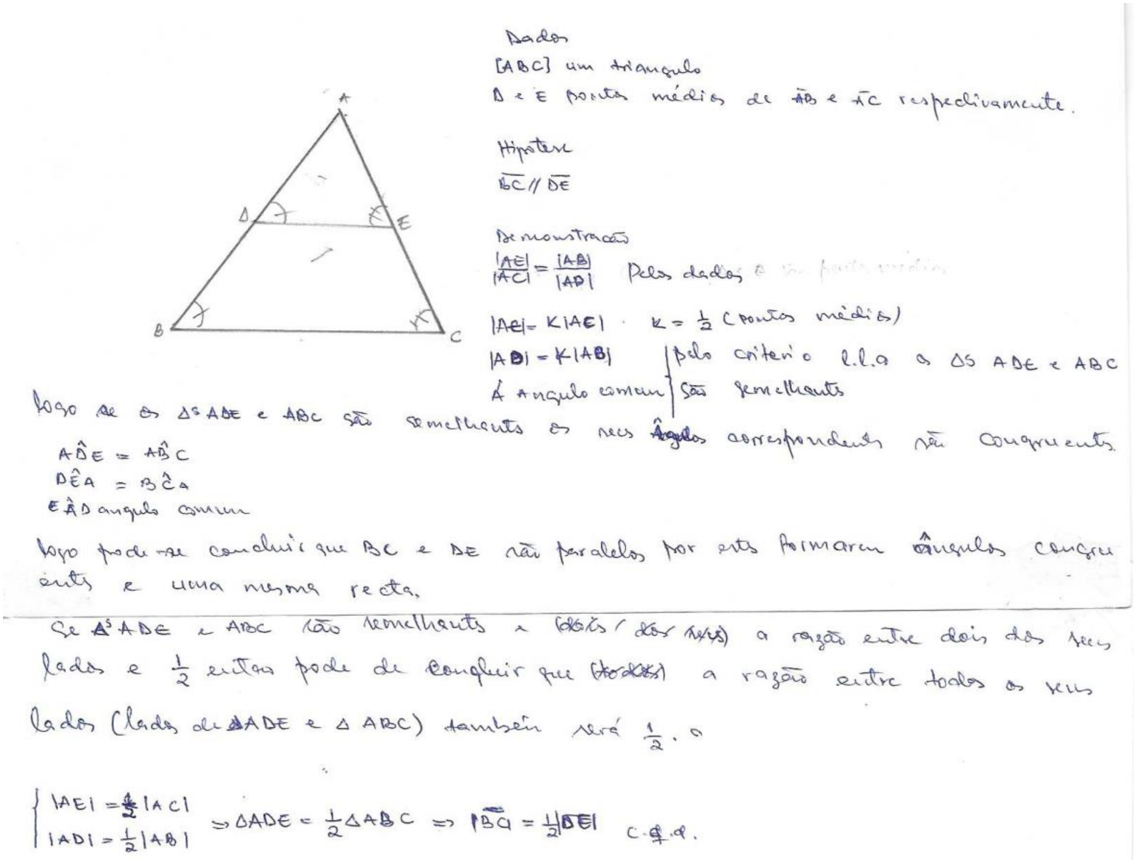


Fonte: Dados da pesquisa

Nesta produção, Getúlio consegue deduzir a relação de paralelismo dos segmentos a partir de conceitos geométricos usando o seguinte argumento: “ED e BC são paralelos por serem lados adjacentes de ângulos geometricamente congruentes”. Contudo, a relação ED = ½ BC não está bem explicitada: ele explica claramente os lados proporcionais, mas não apresenta explicitamente um passo essencial que levaria à relação ED = ½ BC. Trata-se da relação: $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{1}{2}$, (por serem proporcionais). Desta proporção é que resultaria ED = ½ BC, completando, desse modo, a explicação da propriedade.

Herculano consegue também demonstrar que os segmentos DE e BC são paralelos por formarem ângulos correspondentes congruentes com a mesma reta transversal, consegue justificar a semelhança de triângulos, mas também não consegue deduzir a relação ED = ½ BC (Figura 40).

Figura 40 - Prova apresentada por Herculano sobre a propriedade da tarefa 2, item (d)

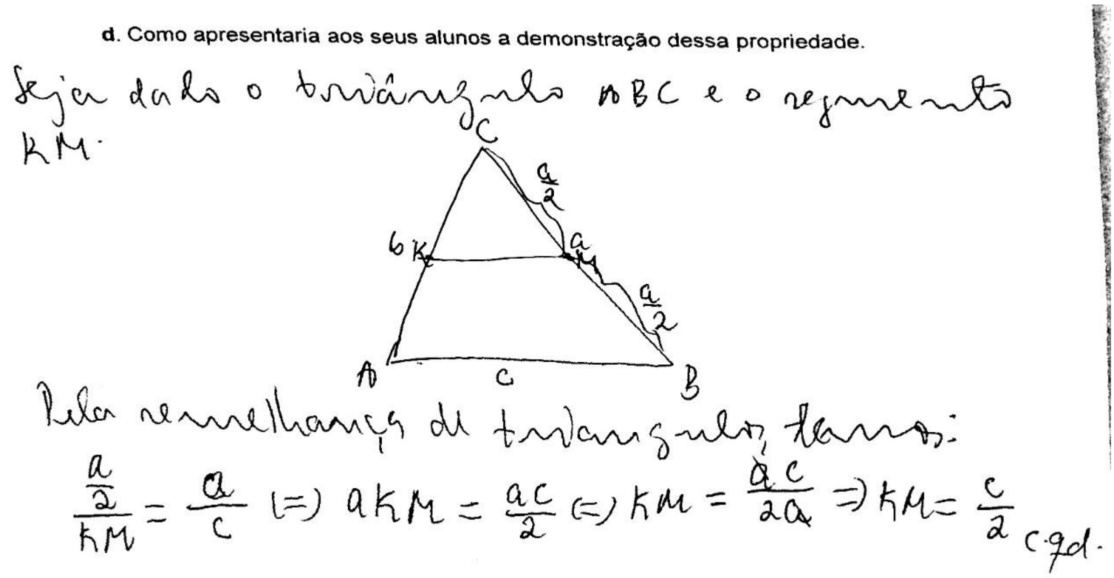


Fonte: Dados da pesquisa

Contudo, nem Getúlio, nem Herculano chegaram a demonstrar as duas relações completamente.

Kelmon apresentou a seguinte resolução (Figura 41).

Figura 41 - Prova apresentada por Kelmon sobre a propriedade da tarefa 2, item (d)



d. Como apresentaria aos seus alunos a demonstração dessa propriedade.

Seja dado o triângulo ABC e o segmento KM.

Pela semelhança de triângulos, temos:

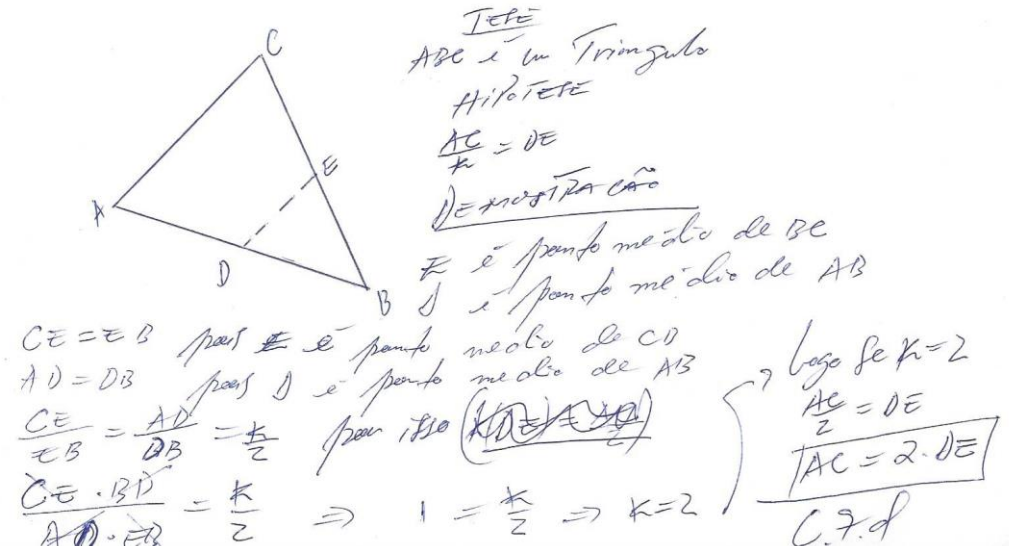
$$\frac{\frac{a}{2}}{KM} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow aKM = \frac{ac}{2} \Leftrightarrow KM = \frac{ac}{2a} \Rightarrow KM = \frac{c}{2}$$ c.q.d.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta resolução, Kelmon, ao assumir a semelhança dos dois triângulos com um ângulo comum, está implicitamente afirmando que os lados KM e AB são paralelos, $\overline{KM}$ é o segmento determinado pelos pontos médios dos lados AC e BC do triângulo ABC. $\overline{AB}$ é o terceiro lado do mesmo triângulo. Então, vemos que Kelmon assume, como fato estabelecido, a propriedade que era considerada como uma conjectura na tarefa, portanto, deveria ser validada ou rejeitada usando regras matemáticas cientificamente corretas.

Procedimento similar foi apresentado por Ludovico, cujo extrato (Figura 42) integral da resolução segue.

Figura 42 - Prova apresentada por Ludovico sobre a propriedade da tarefa 2, item (d)

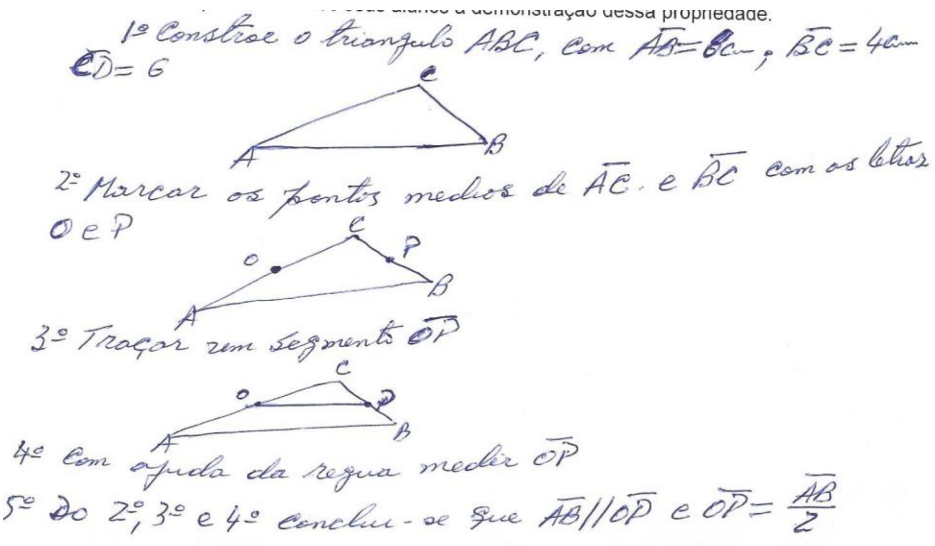


Fonte: Dados da pesquisa

Ludovico, além de deduzir a propriedade dos pontos dos lados de um triângulo sem justificar as relações de igualdade que ele estabeleceu, assumiu a outra relação que ele deveria demonstrar como um fato conhecido. Constamos também que Ludovico confunde hipótese e tese. Este fato vem ao encontro de resultados de algumas pesquisas que revistamos, como Almouloud (2007b).

Tarcísio baseou-se em instrumentos de construções geométricas para provar as duas relações: a relação de paralelismo e a relação entre as medidas, como pode ser observado na Figura 43.

Figura 43 - Prova apresentada por Tarcísio sobre a propriedade da tarefa 2, item (d)

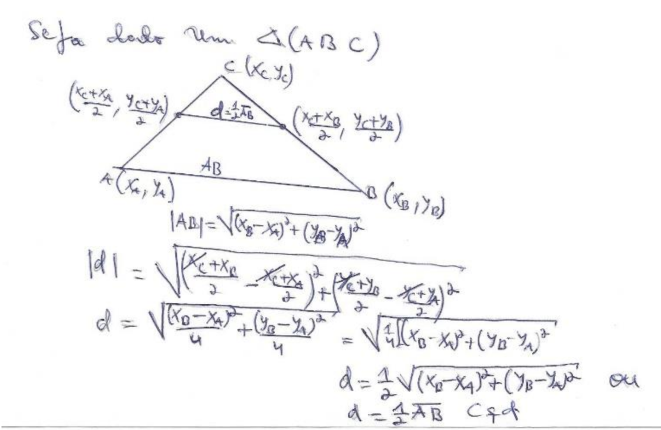


Fonte: Dados da pesquisa

As descrições de Tarcísio dão indícios de que ele se baseou nas evidências empíricas (figura e medição) para tentar validar a propriedade em discussão. Esta prova é pragmática segundo Balacheff (1987) ou esquema de prova indutiva segundo Harel e Sowder (1998, 2007), uma vez que Tarcísio tira suas conclusões a partir de medição direta (5º passo da descrição). Para este caso dizemos que o ETG que norteou a produção de Tarcísio é GI (Geometria I), de acordo com Houdement e Kuzniak (2006).

Outras respostas, como a de Dário (Figura 44), evidenciam as dificuldades que os sujeitos de nossa pesquisa tiveram com esta tarefa.

Figura 44 - Tentativa de produzir uma prova relativa à tarefa 2, item (d) por Dário

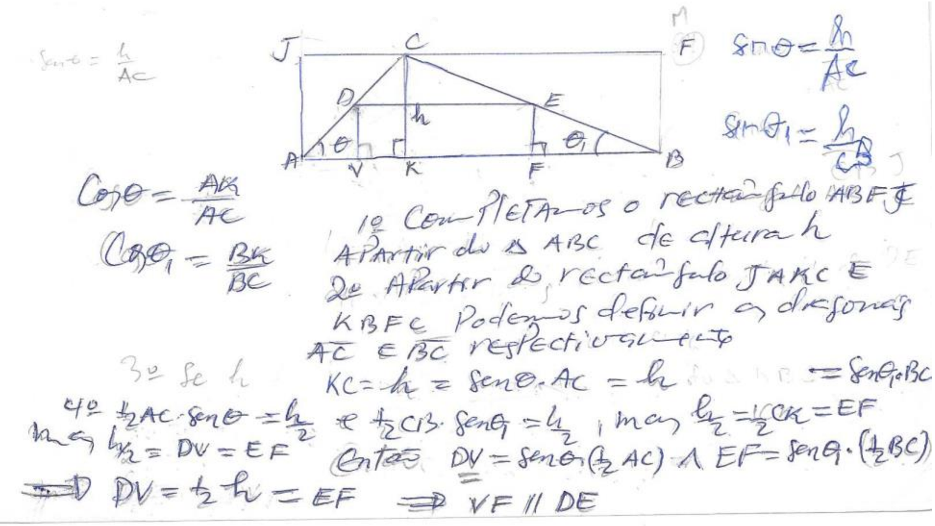


Fonte: Dados da pesquisa

Nesta figura, percebe-se que Dário introduz elementos da geometria analítica, mais especificamente coordenadas de pontos e cálculo de distâncias em um referencial cartesiano que ele não especifica na estratégia de resolução de problema. Seria interessante fazer uma análise mais aprofundada das razões que o levaram a proceder assim. Mas, não tivemos condições de fazer isso, dado que não exploramos por meio de entrevista.

Nas Figuras 45 à 48, temos produções de alunos nas quais eles utilizam estratégias de resolução que envolvem teoremas e definições inadequadas relativamente ao contexto da tarefa apresentada.

Figura 45 - Tentativa de produzir uma prova relativa à tarefa 2, item (d) por Jackson

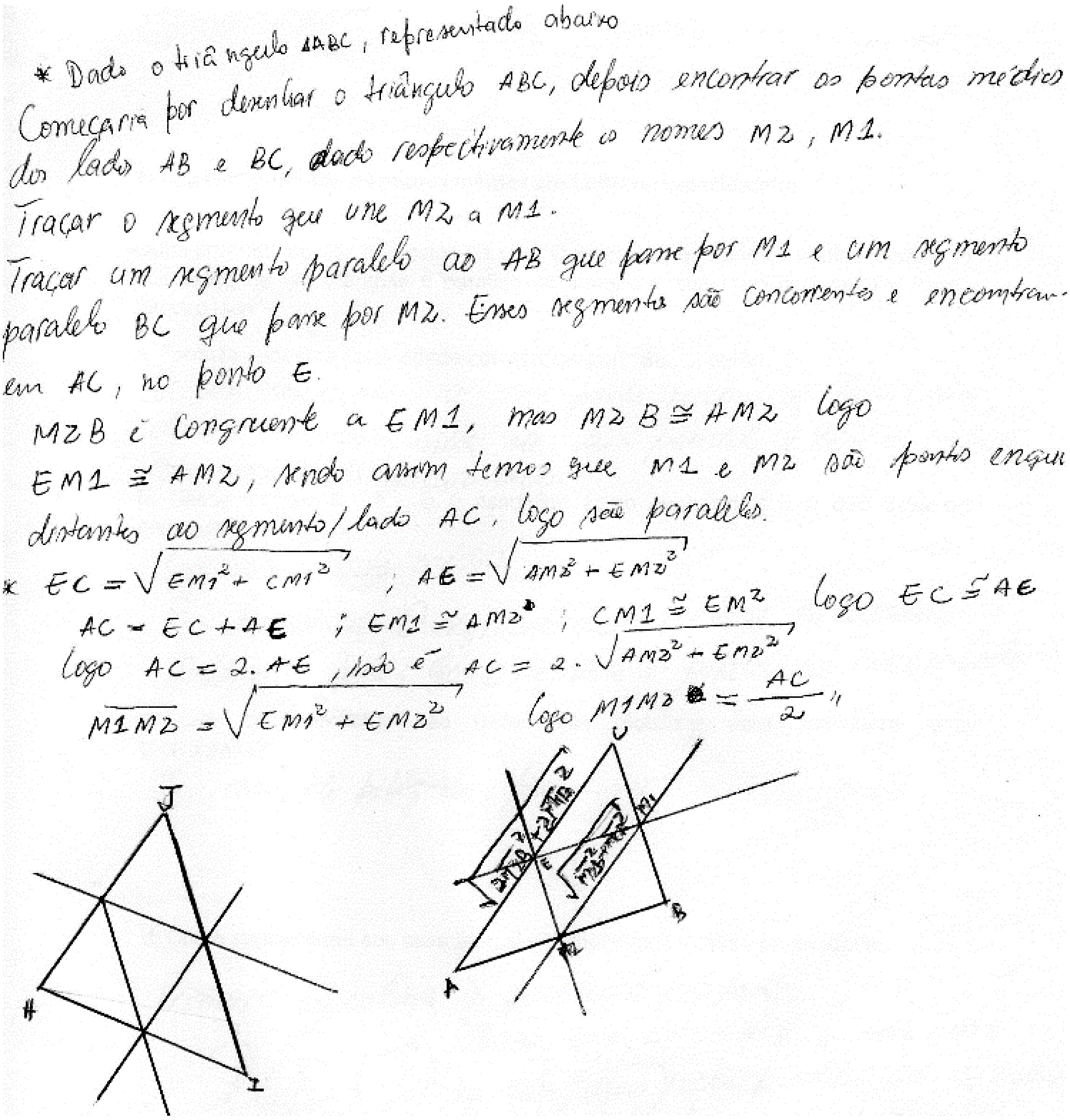


Fonte: Dados da pesquisa

Jackson apresenta tentativa de uso de relações trigonométricas a partir de figuras particulares: retângulo e triângulo. Mesmo que os resultados fossem corretos relativamente à propriedade em discussão, a prova seria inválida uma vez que ele recorre a casos particulares para tentar validar uma propriedade geral.

Amorim apresenta relações que ilustram o emprego do teorema de Pitágoras, mas sem justificar a sua proveniência (Figura 46).

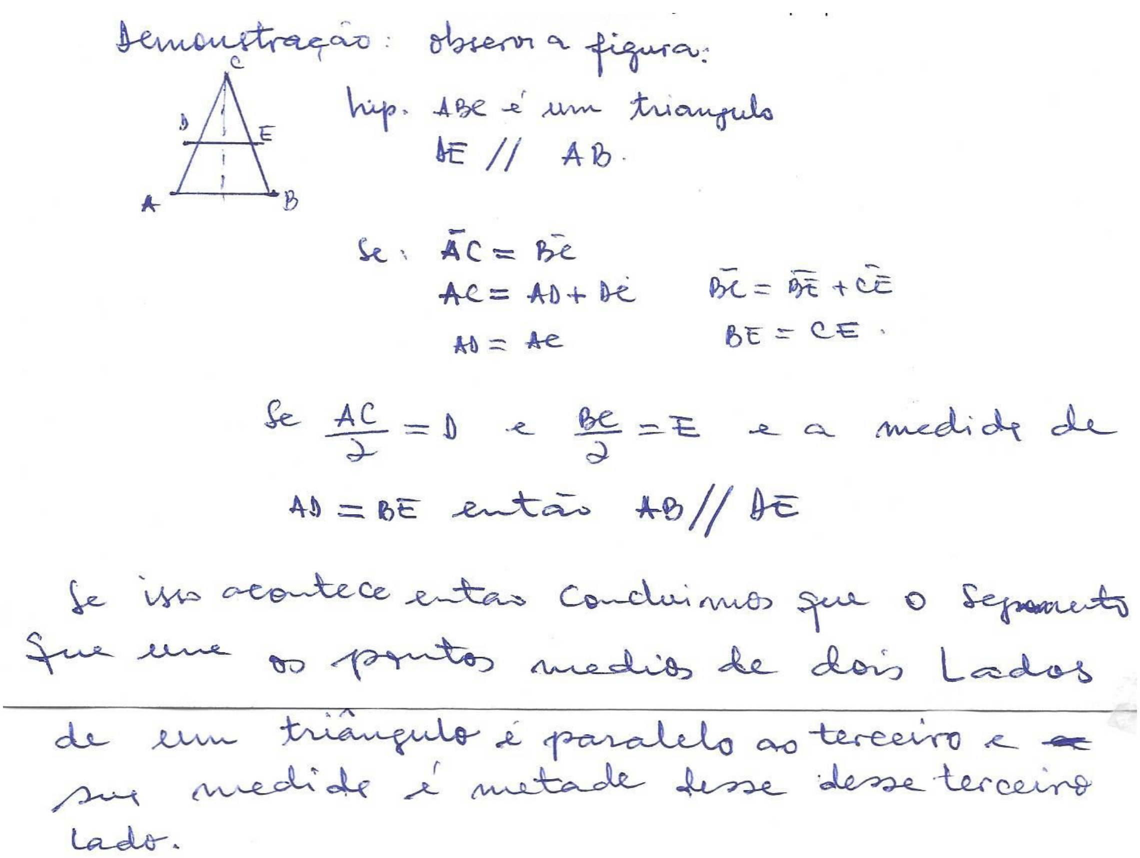
Figura 46 - Tentativa de produzir uma prova relativa à tarefa 2, item (d) por Amorim


* Dado o triângulo ΔABC, representado abaixo
Começaria por desenhar o triângulo ABC, depois encontrar os pontos médios dos lados AB e BC, dado respectivamente os nomes M2, M1.
Traçar o segmento que une M2 a M1.
Traçar um segmento paralelo ao AB que passe por M1 e um segmento paralelo BC que passe por M2. Esses segmentos são concorrentes e encontram-em AC, no ponto E.
M2B é congruente a EM1, mas $M2B \cong AM2$ logo
$EM1 \cong AM2$, sendo assim temos que M1 e M2 são pontos equidistantes ao segmento/lado AC, logo são paralelos.
* $EC = \sqrt{EM1^2 + CM1^2}$; $AE = \sqrt{AM2^2 + EM2^2}$ logo $EC \cong AE$
$AC = EC + AE$; $EM1 \cong AM2$; $CM1 \cong EM2$
logo $AC = 2.AE$, isto é $AC = 2.\sqrt{AM2^2 + EM2^2}$
$\overline{M1M2} = \sqrt{EM1^2 + EM2^2}$ logo $M1M2 = \frac{AC}{2}$.

Fonte: Dados da pesquisa

Até há apresentação de passos que não revelam quase nada, como vemos na Figura 47.

Figura 47 - Tentativa de produzir uma prova relativa à tarefa 2, item (d) por Moisés


Demonstração: observa a figura:

hip. ABC é um triangulo
DE // AB.

Se: $\overline{AC} = \overline{BC}$
AC = AD + DC $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE}$
AD = AC   BE = CE.

Se $\frac{AC}{2} = D$ e $\frac{BC}{2} = E$ e a medida de
AD = BE então AB // DE

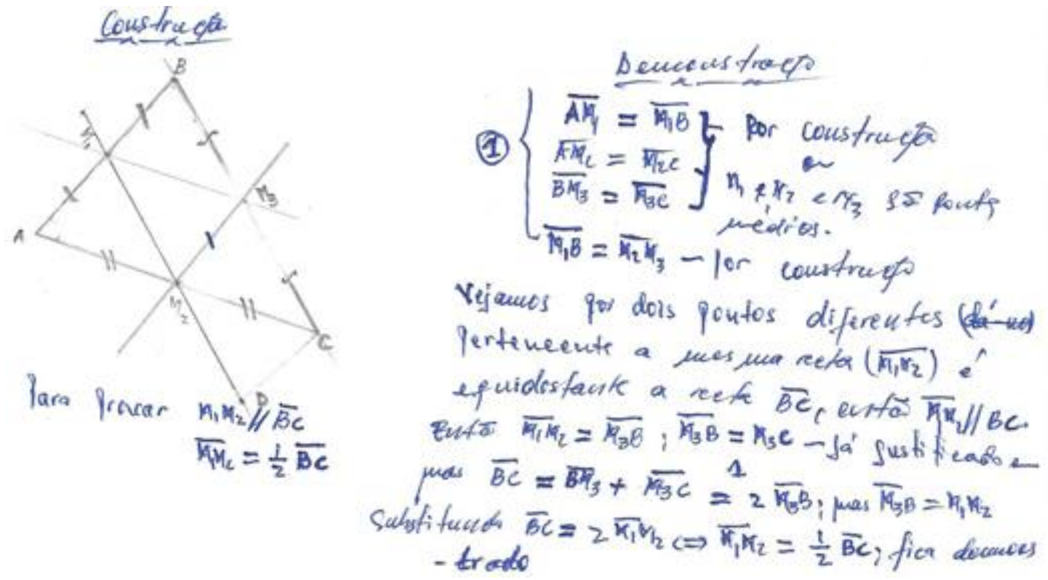
Se isso acontece então concluimos que o segmento que une os pontos medios de dois Lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e ~~a~~ sua medida é metade ~~desse~~ desse terceiro Lado.

Fonte: Dados da pesquisa

Essas produções apresentam indícios de que esses sujeitos da pesquisa não parecem ter ideia de como demonstrar dentro do contexto do problema.

Para ter mais dados sobre o processo de construção das provas propostas por esses alunos, entrevistamos o aluno Cuco que apresentou a seguinte tentativa de prova, Figura 48.

Figura 48 - Prova apresentada por Cuco relativa à tarefa 2, item (d) discutida na entrevista



Fonte: Dados da pesquisa

Pesquisador *– Então, o que se assume como conhecido nesta formulação aqui? (apontando o enunciado inicial)*

Cuco *– O que se assume como conhecido são pontos médios de dois lados de um triângulo.*

Pesquisador *– Os pontos médios de dois lados de um triângulo. O que tem de ser demonstrado?*

Cuco *– Unindo aqueles pontos dos dois lados, sempre vai ser paralelo ao terceiro lado.*

Pesquisador *– Quer dizer, o segmento que une aqueles dois pontos é paralelo ao terceiro lado. Só?*

Cuco *– E também a sua medida é metade desse terceiro lado.*

Pesquisador – E que a sua medida é metade desse terceiro lado.... É que você pôs muita coisa e eu acabei não entendendo. O que é conhecido aqui: é M1M2?

Cuco *–* M_1M_2*.*

Pesquisador *– Então tem de ser demonstrado o quê?*

Cuco *–* M_1M_2 *é paralelo ao lado BC.*

Pesquisador *– E depois o quê?*

Cuco *–* M_1M_2 *é metade de BC.*

Pesquisador *– Ok. Agora vamos para a sua ilustração. Na sua ilustração você apresenta vários segmentos. Por quê? Eu fiquei até perdido, porque apresentou muitos segmentos ali?*

Cuco *– Esses* M_1M_2*;* M_1M_3*;* M_2M_3*.*

Pesquisador – Sim. Parece que colocou todas as possibilidades, não é? Era para explicar todas as possibilidades?

Cuco *– Não. Era para ver também...*

Pesquisador *- ... se era verdade?*

Cuco *– Se era verdade, mesmo aqui, apenas com este, por construção* *podemos observar, porque sempre acontece assim, precisa de demonstração.*

O nosso interlocutor afirma que as construções mostram forte indício da propriedade ser verdadeira, porém, precisa demonstrar.

***Pesquisador** – Ok. Já entendi. Você tenta provar aqui que este segmento aqui M1M2 é paralelo à BC. [...] Você tem que mostrar que M_1M_2 é paralelo a BC e tem que demonstrar que a medida do mesmo segmento M_1M_2 é um meio de BC. Não é isso?*

***Cuco** – Sim, era isso.*

***Pesquisador** – [...]. Você acha que conseguiu provar esse paralelismo?*

***Cuco** – Falando verdade, eu aqui tive poucas dificuldades.*

***Pesquisador** – Poucas ou muitas? Teve poucas dificuldades?*

***Cuco** – Muito mais para concluir o paralelismo. Tive dificuldades.*

***Pesquisador** – Teve dificuldades. Assim concorda que não conseguiu demonstrar?*

Não responde. Apenas afirma:

***Cuco** – talvez algumas coisas ... <u>Aqui já está é só construção. Vejamos dois pontos diferentes pertencem a mesma reta, M_1M_2 é equidistante à reta BC. Então, M_1M_2 é paralelo à BC</u>.(Sublinhado nosso)*

Vemos aqui que o nosso sujeito tira essa conclusão por construção, mas é umas das teses a demonstrar. Quer dizer, a figura foi uma fonte de dedução de uma conclusão, mas não fonte de apoio ao raciocínio.

***Pesquisador** – Sim, sim. Então, o que está aqui: Este passo aqui você diz vejamos que dois pontos diferentes [....].*

***Cuco** – Seria bom: em dois pontos diferentes.*

***Pesquisador** - ... Ok, isso não é tão importante ... em dois pontos diferentes*

***Cuco** - ... pertencente a mesma reta M_1M_2 é equidistante à reta BC.*

***Pesquisador** – Equidistante à reta BC.*

***Cuco** – O que me levou a dizer, aqui, acho que já tinha provado que este lado é igual a este.*

***Pesquisador** – Mas onde está provado aí? Você apresentou essa prova?*

***Cuco** – É isso, não é fácil colocar sem, porque existe uma razão porque eu disse que são iguais.*

***Pesquisador** – Mas não colocou aqui, por isso que eu estou a perguntar.*

***Cuco** – Se é para provar, há um M este, M_2 é este, este M_1, por construção. Aqui o problema é que não coloquei ...*

***Pesquisador** - ... diz que são congruentes ou iguais por construção. [...]. Ok. Você está a assumir que são iguais. Tudo bem. Mas agora eu quero entender, só com base neste argumento logo você conseguiu mostrar que este segmento é paralelo a este?*

***Cuco** – Tudo doutor começa neste ponto: para colocar este argumento, houve talvez alguma coisa. Mas se esse argumento for válido, então este também é.*

***Pesquisador** – Mas que argumento é esse?*

***Cuco** – Este M_1B, M_2M_3.*

***Pesquisador** – Que argumento é esse? Você diz que deve ter havido algum argumento. Então quero saber qual esse argumento.*

Cuco *– Que me levou dizer este?*
Pesquisador *– Sim.*
Cuco *– Deve haver, porque não pode surgir assim.*
Pesquisador *– Não, mas é essa coisa, se você for a classificar um leitor que está a procurar saber sobre isto aqui... fazendo friamente, você acha que já demonstrou?*
Cuco *– Não.*

Como vemos por esta conversa bastante longa, o nosso interlocutor tentou defender-se afirmando que deveria ter havido algum argumento que lhe permitiu tomar algumas das posições, por exemplo, esboçar M_1B e M_2M_3 congruentes, mas não consegue justificar a razão de construir os segmentos M_1B e M_2M_3 que fossem congruentes.

Depois de explicar que o objetivo da entrevista não era de julgar se os procedimentos apresentados eram corretos ou não, mas simplesmente perceber as produções apresentadas, ele muda de tom:

Cuco *– Está bom. Dizer não, eu posso dizer não. Não, é isso que eu disse: não tive como justificar este argumento aqui. [...] Este argumento aqui: M_1B é igual a M_2M_3, iya, são iguais mas não tive bases justificativas que me possam assegurar esse passo.*
Pesquisador *– Então, falta um argumento aí. Significa que essa explicação aqui tem lacunas.*
Cuco *– Tem lacunas.*
Pesquisador *– Tem lacunas. É exatamente esses argumentos que eu queria que apresentasses.*
Cuco *– <u>E eu não sei esses argumentos</u>. Dizer que omiti propositadamente, não. Eu não vi esses argumentos. Eu simplesmente <u>coloquei sabendo que é verdade</u>, mas porque é verdade, é que eu não coloquei. Mas isso é verdade, mas porque é verdade é que eu não coloquei. (*Sublinhado nosso*).*

O nosso interlocutor quer defender-se a todo o custo, mas apresenta contradições no que tange a suas argumentações para demonstrar a propriedade enunciada na tarefa. Uma das nossas dúvidas é: será que ele sabe o que é demonstrar em matemática? Para tentar responder a essa pergunta, retomamos a entrevista como segue.

Pesquisador *– Ok. Então, podemos avançar? Agora a questão é: já conseguiu mostrar que o segmento M_1M_2, a medida do segmento M_1M_2 é metade da medida do segmento BC? Por quê? Quer dizer, explica-me também...*
Cuco *– Eu acho que pelo mesmo fato, esse passo aqui implica muita coisa. Se eu disse que este lado é igual a este, se existirem argumentos fortes que justifiquem isto, fica demonstrado.*

Como pode ser percebido nas respostas de Cuco, esbarramos no mesmo problema: um passo tomado como verdadeiro, por construção, mas que o nosso interlocutor não sabia justificar. Com efeito, Cuco não consegue apresentar conceitos matemáticos que justifiquem a relação de paralelismo pedida e, a relação de medida pedida surgiu graças à relação $\overline{M1B} \cong \overline{M2B}$ assumida por construção, mas que não encontra eco nem nos passos seguintes, nem nos passos anteriores. Nosso interlocutor não consegue perceber que tudo tem a ver basicamente com o segmento CD que ele traçou a partir de uma das extremidades do lado BC do triângulo. Esse segmento deveria ter sido tomado, por construção, como paralelo às retas AB, e M_2D como prolongamento do segmento M_1M_2 que une os pontos médios dos lados AC e AB até a intersecção com CD tomado como paralelo à reta BC por construção. Esses dois procedimentos tomados por construção é que desencadeariam os restantes passos que permitiriam deduzir que M_1M_2 é paralelo à BC e segmento M_1M_2 tem por medida metade da medida do segmento BC.

Temos, assim, um caso de uma produção que parece ser uma demonstração, na realidade, ela é uma prova baseada apenas na observação da figura (paradigma norteador GI), sem apoio explícito de alguma propriedade ou conceito.

Em suma, com a exceção de Getúlio e Herculano, os estudantes não foram capazes de dar passos iniciais da demonstração da propriedade que mostrassem que eles estavam cientes dos conhecimentos a empregar na validação da mesma. Há indícios que indicam que as produções desses alunos tiveram como paradigma norteador a geometria GI e pela característica da linguagem empregada, podemos dizer que as provas são pragmáticas.

5.3. Análise da tarefa 3. Explorando os pontos médios dos lados de um quadrilátero

5.3.1. Análise a priori da tarefa 3

A, B, C e D são 4 pontos quaisquer do plano. Desenhe o quadrilátero ABCD. E, F, G e H são os pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD respectivamente.

a) Obtenha o quadrilátero EFGH unindo os pontos médios pela ordem em que aparecem. Altere a posição de A, B, C e D arrastando esses pontos se estiver trabalhando num ambiente de geometria dinâmica[27], por exemplo Geogebra, de

[27] Os estudantes trabalharam em ambiente de lápis e papel. Por isso, foram recomendados que desenhassem

modo a obter diferentes formas para EFGH. Anote os seus nomes.

b) Qual propriedade comum percebe dessas figuras que vai obtendo? Por que acha que isso acontece?

c) Demonstre a propriedade que observou no item b).

A tarefa tem por objetivo analisar como os sujeitos da pesquisa exploram conjecturas em geometria plana e como as validam, uma vez que esta situação-problema fornece um contexto favorável a explorações empíricas. É uma tarefa que, embora envolva quadriláteros, conteúdo presente no currículo prescrito de matemática de Moçambique desde o ensino fundamental até o ensino médio, não vimos em nenhum livro didático de Moçambique, salvo apenas no livro de Paulus Gerdes[28] e Marcos Cherinda em que faz parte de uma lista de teoremas famosos de geometria que os autores apresentam sem demonstração.

Tendo como base conceitual a propriedade apresentada na tarefa 2, o processo inicial consiste na exploração empírica de vários exemplos de quadriláteros. Em ambiente de lápis e papel a tarefa exige a construção de vários quadriláteros e, para cada quadrilátero a exploração de propriedades de um novo quadrilátero que se forma a partir dos pontos médios dos lados do inicial. Desse modo, o tratamento figural vai ter um papel heurístico para a exploração das propriedades intrínsecas ao quadrilátero EFGH, fato que puxa para o primeiro plano o papel da figura e dos artefatos na gestão do ETG para esta tarefa. Em seguida, vai a parte mais apurada da tarefa: relacionar o aspecto figural das primeiras apreensões fornecidas pela intuição a conceitos geométricos da GII: propriedades e definições que são os elementos de conceitos matemáticos em geometria – retas paralelas, retas perpendiculares, diagonais, quadriláteros de lados opostos paralelos ou de lados consecutivos perpendiculares, triângulos, pontos médios dos lados de um triângulo, propriedades do segmento de reta determinado por dois pontos médios de dois lados de um triângulo, etc. Estes são alguns dos elementos teóricos em que se apoiam as conjecturas esperadas e a possível validação. São conceitos que se espera que façam parte dos componentes epistemológicos do ETG e que deverão caracterizar a gênese

---

vários quadriláteros diferentes.

[28] GERDES, P. e CHERINDA, M. (1991). **Teoremas Famosos da Geometria.** Instituto Superior Pedagógico. Maputo, Moçambique, 1991.

discursiva que alimentaria os componentes cognitivos dos ETG dos sujeitos de pesquisa para a resolução da tarefa.

Poderão surgir conjecturas do tipo: “os pontos médios dos lados de um quadrilátero determinam ainda um quadrilátero”; ou “um retângulo”, “um paralelogramo” etc., conforme as figuras feitas e a forma de analisar as construções. O tipo de figura do quadrilátero será determinante para a conjectura a levantar: se for quadrilátero de lados paralelos ou de lados congruentes, essas características poderão influenciar o tipo de conjetura. Portanto, uma variação no tipo de quadrilátero é necessária. A conjectura plausível que esperamos é “os pontos médios dos lados de um quadrilátero determinam um paralelogramo”.

A sugestão de construir diferentes quadriláteros, no caso de se trabalhar com lápis e papel, tem por finalidade permitir que o sujeito tenha possibilidade de observar diferentes formas do quadrilátero EFGH, dado que nesse ambiente as construções são estáticas, enquanto no ambiente de Geometria Dinâmica a função “arrastar” permite obter diferentes configurações a partir da deformação da figura inicial mantendo invariantes as propriedades intrínsecas ao quadrilátero, que é determinado pelos pontos médios dos lados.

A decomposição do quadrilátero ABCD em triângulos a partir de suas diagonais, bem como o recurso à propriedade da base média[29] constituem os elementos-chave para o processo de validação da conjectura sob o ponto de vista matemático.

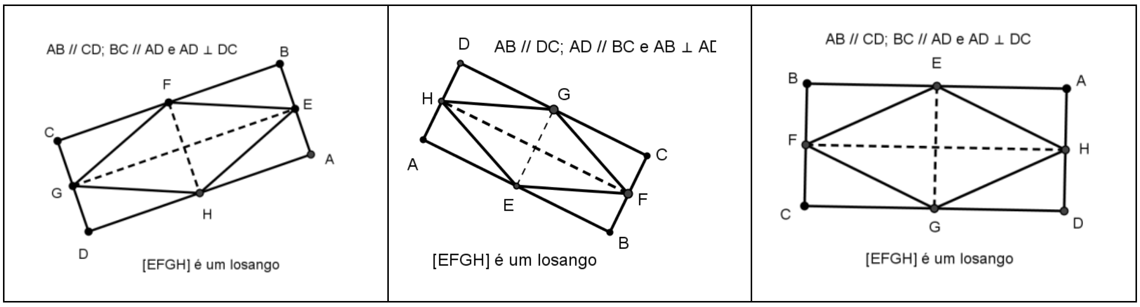
Conforme o enunciado da situação proposta, o primeiro passo envolve o uso de artefatos: lápis e papel ou ambiente informático para a conversão do registro discursivo para o registro figural. Em seguida, respondem-se os itens propostos para a tarefa.

Assim, no **item a**, podem surgir vários nomes conforme a interpretação de cada sujeito participante da pesquisa. A expectativa é que, para cada nome proposto, haja alguma justificação. Conforme o paradigma geométrico de referência, as justificativas podem basear-se em diversos meios: por suposição, por medição, por aparência visual ou por superposição, se o ETG do participante de pesquisa tiver como paradigma de referência a GI; ou cadeia discursiva fundamentada em conceitos geométricos, se o ETG for norteado por GII.

[29] Propriedade objeto de exploração na tarefa 2

As ilustrações que se seguem mostram algumas das possíveis respostas esperadas para qualquer um dos casos previstos para a execução desta tarefa.

Figura 49 - Caso que o quadrilátero ABCD é um retângulo



Fonte: O autor

Para este caso em que o quadrilátero ABCD é um retângulo, a constatação de que os pontos médios E, F, G, H dos seus lados determinam um losango, dependerá do ETG com o respectivo paradigma de referência para produção da conjectura.

Se os instrumentos de construção jogam um papel fundamental na procura da conjectura, então verificações empíricas com artefatos (medições com régua, superposição, transferência de medidas por sobreposição), o uso de ferramentas de *software* tais como “medida de segmento ou comprimento”, “relação”, ou intuições por aparências das configurações, aliadas à invocação de GII, poderão fundamentar as justificações. Por exemplo, uma justificação do tipo “EFGH é um losango porque tem lados de medidas iguais, e como um quadrilátero de lados iguais é um losango, conclui-se que esse quadrilátero é também losango”.

Se o ETG mobilizado, no caso em que se supõe que o quadrilátero ABCD é um retângulo, tiver como paradigma de referência a Geometria axiomática natural (GII), a figura poderá servir apenas de auxílio à intuição e, nesse caso, a justificação de que EFGH é um losango poderá ter uma estrutura de uma cadeia dedutiva, como a que apresentamos a seguir.

Recorrendo a uma das figuras acima constatamos que:

1. $\begin{cases} \overline{EH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD}\ e\ \overline{FG} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD} \\ EH = \frac{1}{2}BD\ e\ FG = \frac{1}{2}BD \end{cases}$, pelo teorema de base média de um triângulo, discutida na tarefa 2.

2. $\overline{EH}$ // $\overline{FG}$ e $\overline{EH} \cong \overline{FG}$, pela transitividade da relação de paralelismo e de congruência do passo (1).

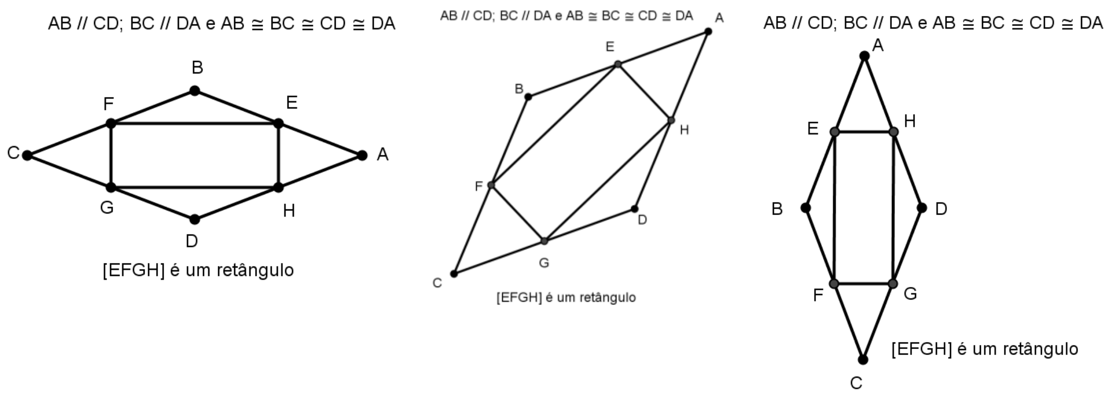
3. $\begin{cases} \overline{EH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC}\ e\ \overline{GH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC} \\ EF = \frac{1}{2}AC\ e\ GH = \frac{1}{2}AC \end{cases}$, pelo teorema invocado em (1).

4. $\overline{EH}$ // $\overline{GH}$ e $\overline{EF} \cong \overline{GH}$, pela transitividade da relação de paralelismo e de congruência.

Mas $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, porque são diagonais de um retângulo. Logo, $\overline{EH} \cong \overline{FG} \cong \overline{EF} \cong \overline{GH}$, isto é, o quadrilátero EFGH é um losango, porque tem os quatro lados congruentes, o que prova que os pontos médios dos lados de um retângulo determinam um losango. Neste caso, a prova é intelectual segundo Balacheff (1987) ou de um esquema de prova axiomática segundo Harel e Sowder (1998, 2007).

Pode ser que o quadrilátero inicial ABCD seja um losango.

Figura 50 - Caso em que ABCD é um losango



Fonte: O autor

Neste caso, constatamos que os pontos médios E, F, G, H dos seus lados determinam um retângulo. A explicação vai também depender do paradigma geométrico a que se apoia o ETG. Se o paradigma de referência for GI, então o instrumento de desenho utilizado ou outro meio material incluindo a intuição, poderão ser o suporte dos argumentos. Aí o tipo de prova será pragmático, segundo Balacheff (19870, ou de esquema de prova empírica, segundo Harel e Sowder (1998, 2007).

Se os instrumentos de construções geométricas serviram apenas para produzir uma configuração de apoio à exploração heurística, recorrendo a conceitos de GII para justificar a conclusão, então a validação será de natureza intelectual ou esquema de prova axiomática. Para este último caso, uma das ilustrações da Figura 50, pode permitir produzir a seguinte sequência dedutiva:

1. $\begin{cases} \overline{EH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD}\ \ e\ \overline{FG} \text{ é } paralelo\ \overline{BD} \\ EH = \frac{1}{2}BD\ e\ FG = \frac{1}{2}BD \end{cases}$, pela propriedade de base média de um triângulo.

2. $\overline{EH}$ // $\overline{FG}$ e $\overline{EH} \cong \overline{FG}$, pela transitividade das relações de paralelismo e de congruência vistas no passo anterior.

3. $\begin{cases} \overline{EF} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC}\ e\ \overline{GH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC} \\ EF = \frac{1}{2}AC\ e\ GH = \frac{1}{2}AC \end{cases}$, pela propriedade de base média de um triângulo;

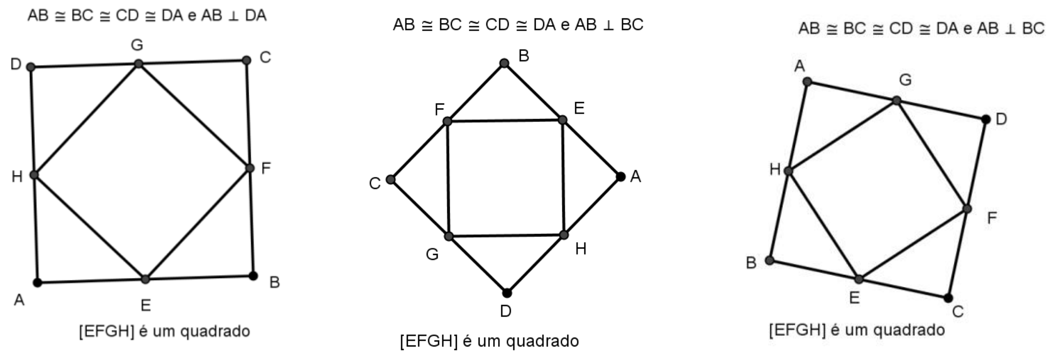
Logo $\overline{EF}$ // $\overline{GH}$ e $\overline{EF} \cong \overline{GH}$, pela transitividade das relações de paralelismo e de congruência aplicada ao passo (3)

4. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, diagonais de um losango. Logo, se $\overline{EH}$ // $\overline{BD}$, $\overline{FG}$ // $\overline{BD}$ e $\overline{AC} \perp \overline{BD} \Rightarrow \overline{EH} \perp \overline{AC}$ e $\overline{FG} \perp \overline{AC}$; se $\overline{EF}$ // $\overline{AC}$, $\overline{GH}$ // $\overline{AC}$ e $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, então $\overline{EF} \perp \overline{BD}$ e $\overline{GH} \perp \overline{BD}$.

Ou seja, o quadrilátero EFGH tem os lados consecutivos perpendiculares, portanto, EFGH é um retângulo, o que completa a demonstração de que os pontos médios dos lados de um losango determinam um retângulo.

Outra alternativa que se pode tomar em consideração, é o quadrilátero ABCD ser um quadrado. Para essa hipótese, a ilustração é apresentada na Figura 51.

Figura 51 - Caso em ABCD é um quadrado



Fonte: O autor

Para este caso o paradigma de referência joga papel fundamental sobre como justificar que os pontos médios dos lados de quadrado determinam ainda um quadrado.

Se o paradigma de referência for Geometria natural, então a justificação pode fundamentar-se em verificações ou aparências visuais, assumindo-se elementos teóricos de GII como, por exemplo, que os lados consecutivos são congruentes e perpendiculares. Pode prever-se até justificações incompletas que só se baseiam na congruência de todos os lados.

Se o paradigma de referência for a Geometria axiomática natural (GII), então uma possível justificação pode basear-se numa das representações da Figura 51**,** como suporte ao raciocínio, resultando numa cadeia dedutiva como a segue:

1. $\begin{cases} \overline{EF} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC}\ e\ \overline{GH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC} \\ EF = \frac{1}{2}AC\ e\ GH = \frac{1}{2}AC \end{cases}$, pela propriedade da base média de um triângulo;

2. $\overline{EF}$ // $\overline{GH}$ e $\overline{EF} \cong \overline{GH}$, pela transitividade das relações de paralelismo e de congruência em (1);

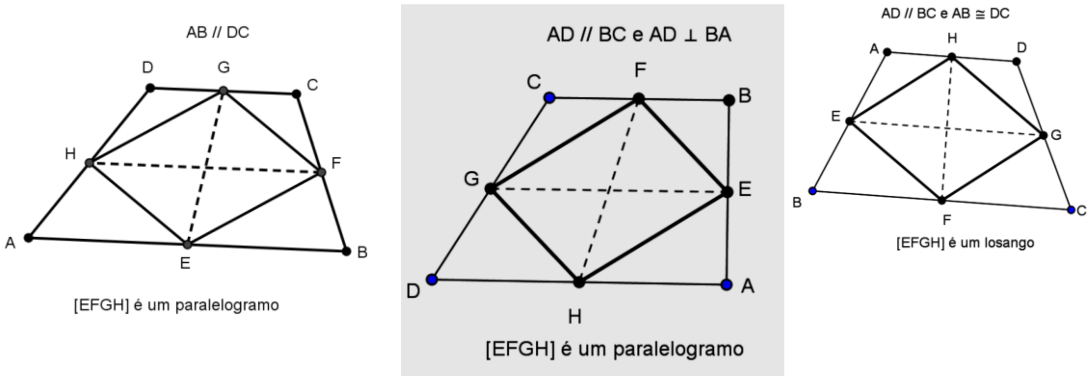
3. $\begin{cases} \overline{EH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD}\ e\ \overline{FG} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC} \\ EH = \frac{1}{2}BD\ e\ FG = \frac{1}{2}BD \end{cases}$, pela propriedade da base média de um triângulo (tratada na tarefa 2).

4. $\overline{EH}$ // $\overline{FG}$ e $\overline{EH} \cong \overline{FG}$, pela transitividade das relações de paralelismo e de congruência.

Mas as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si e congruentes e os lados de um quadrado são todos congruentes. Então do que demonstramos do losango acaba valendo para os quadrados, com uma condição a mais: para além dos lados consecutivos do quadrilátero EFGH serem perpendiculares, são também congruentes, o que acaba com a justificação de que os pontos médios E, F, G, H dos lados de um quadrado, determinam, de novo, um quadrado.

Se o quadrilátero ABCD for um trapézio, qual é a natureza do quadrilátero EFGH? Segue a ilustração disso na Figura 52.

Figura 52 - Caso em que ABCD é um trapézio



Fonte: O autor

Para este caso, também existem duas possibilidades para apresentar a justificativa, cada uma delas dependente do paradigma geométrico que norteia o ETG pessoal do sujeito. Se privilegiar as evidências e construções e a validação basear-se em percepções ou utilização de artefatos, as justificações podem resultar de verificações empíricas ou aparências visuais.

Se o ETG pessoal do sujeito for norteado pela Geometria axiomática natural (GII) espera-se que a justificação da resposta, recorrendo a uma das ilustrações da Figura 52, possa ter uma cadeia de raciocínio com uma estrutura similar à seguinte:

1. $\begin{cases} \overline{HG} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC}\ e\ \overline{EF} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC} \\ HG = \frac{1}{2}AC\ e\ EF = \frac{1}{2}AC \end{cases}$, pela propriedade de base média de um triangula vista na tarefa 2

2. $\overline{HG}$ // $\overline{EF}$ e $\overline{HG} \cong \overline{EF}$, pela transitividade das relações em (1);

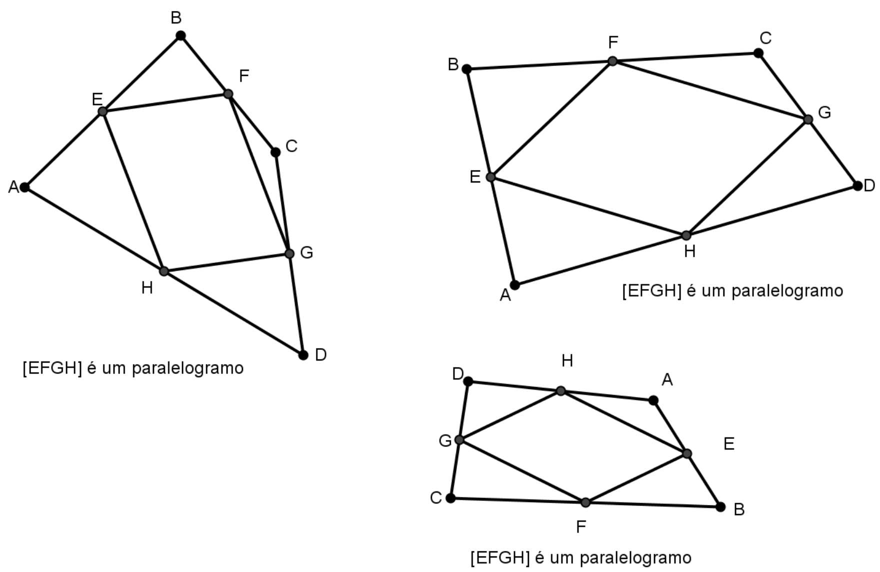
3. $\begin{cases} \overline{EH} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD}\ e\ \overline{FG} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD} \\ EH = \frac{1}{2}BD\ e\ FG = \frac{1}{2}BD \end{cases}$, pela propriedade da base média de um triângulo;

4. $\overline{EH}$ // $\overline{FG}$ e $\overline{EH} \cong \overline{FG}$, pela transitividade das relações em (3).

De (2) e (4) conclui-se que o quadrilátero EFGH é um paralelogramo, porque tem os lados opostos paralelos e congruentes. Portanto, os pontos médios E, F, G, H de um trapézio ABCD qualquer, determinam um paralelogramo.

A hipótese mais abrangente da exploração da situação proposta pode ser o caso em que ABCD é um quadrilátero não especial, ilustrado na Figura 53.

Figura 53 - Caso em que ABCD não é um quadrilátero especial



Fonte: O autor

Para este caso geral também existem duas possibilidades para se justificar o nome a atribuir o quadrilátero EFGH resultante da união dos pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD.

No caso em que o ETG é fundamentado em Geometria natural, resultados de artefatos podem ser utilizados como meio de justificativa assumindo-se elementos teóricos, como por exemplos definições ou propriedades da GII. Nesse caso, a prova é do tipo pragmático ou do esquema de provas indutivas.

Se o ETG for norteado por GII, então, pode-se recorrer a uma ilustração similar à que se apresenta na Figura 53 e produzir um discurso que pode ser representado por uma cadeia de argumentos como a que se apresenta a seguir.

1. $\begin{cases} \overline{EF} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC}\ e\ \overline{HG} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{AC} \\ EF = \frac{1}{2}AC\ e\ HG = \frac{1}{2}AC \end{cases}$, pela propriedade de base média de um triângulo tratada na tarefa 2.

2. $\overline{EF}$ // $\overline{HG}$ e $\overline{EF} \cong \overline{HG}$, pela transitividade em (1).

3. $\begin{cases} \overline{HE} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD}\ e\ \overline{FG} \text{ é } paralelo\ a\ \overline{BD} \\ HE = \frac{1}{2}BD\ e\ FG = \frac{1}{2}BD \end{cases}$, justificação similar a de (1);

4. $\overline{HE}$ // $\overline{FG}$ e $\overline{HE} \cong \overline{FG}$, pela transitividade em (3);

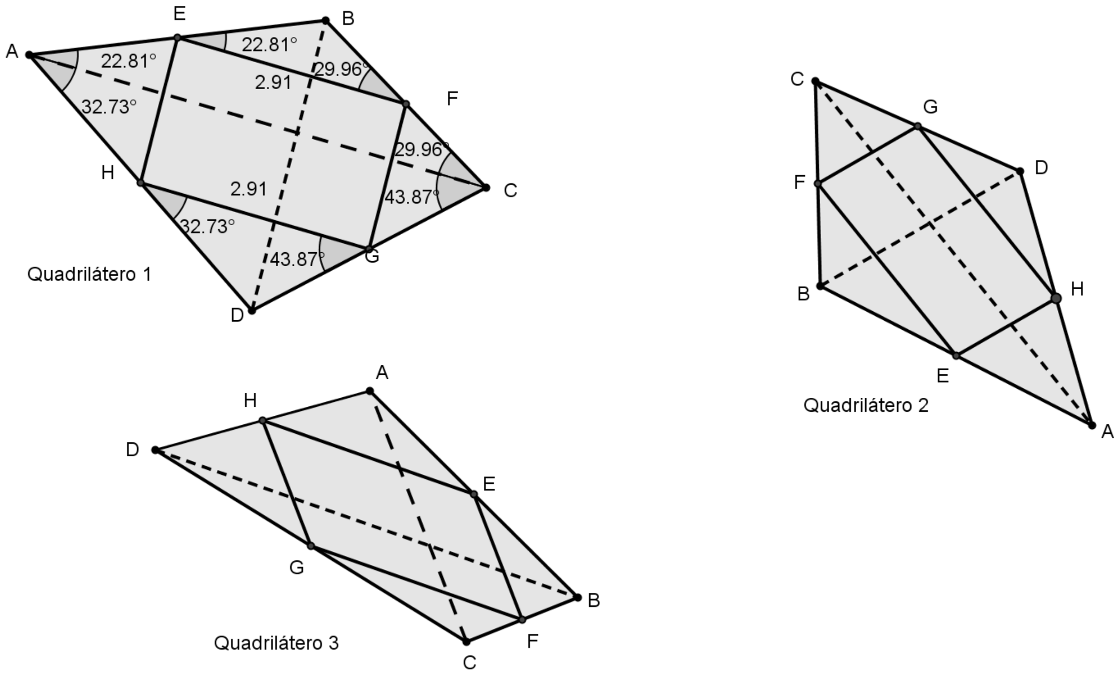
5. EFGH é um paralelogramo porque tem os lados opostos paralelos e congruentes, o que completa a explicação.

Neste caso a prova é intelectual ou pertence a esquemas de provas axiomáticas.

No **item b,** uma resposta correta é que em qualquer dos casos os lados opostos do quadrilátero EFGH são paralelos.

No **item c**, vários procedimentos de tentativa de validação podem aparecer, por exemplo, verificações empíricas (por medição com régua e esquadro incluindo transferidor), de um ou vários exemplos podem se esperar, uma vez que diversas pesquisas mostram que estudantes de qualquer nível recorrem, com frequência, a métodos indutivos para validar conjecturas matemáticas (MARTIN e HAREL, 1989; HAREL e SOWDER, 1998, 2007; CHAZAN, 1993, etc.). Trata-se do caso em que o ETG tem por paradigma geométrico de referência à Geometria natural (GI). Uma situação explícita do uso de resultados de artefatos para produzir uma prova, pode ser como o que se ilustra na Figura 54.

Figura 54 - Argumento baseado na medição de ângulos e lados



Fonte: O autor

A partir do Quadrilátero 1 da **Figura 54**, pode-se produzir um raciocínio discursivo que se aparenta como uma demonstração, enquanto que sua essência baseia-se em GI no qual as evidências empíricas fundamentam o raciocínio. Trata-se do raciocínio com uma estrutura como a seguinte:

1. $D\hat{E}F \cong B\hat{A}C$ e $B\hat{F}E \cong B\hat{C}A \Rightarrow \overline{EF}$ // $\overline{AC}$.

2. $G\hat{H}D \cong D\hat{A}C$ e $D\hat{G}H \cong D\hat{C}A \Rightarrow \overline{GH}$ // $\overline{AC}$.

Pela transitividade da relação de paralelismo, $\overline{EF}$ // $\overline{GH}$.

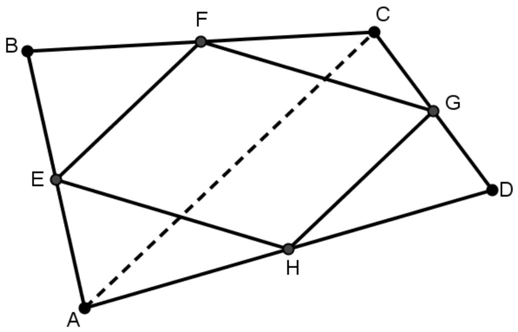
3. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$.

Então $\overline{EH}$ // $\overline{FG}$ e $\overline{EH} \cong \overline{FG}$.

Portanto, o quadrilátero EFGH é um paralelogramo. Esta prova pode estender-se aos quadriláteros 2 e 3. Portanto, EFGH é um paralelogramo para qualquer caso de quadrilátero ABCD.

Se o trabalho geométrico for realizado em GII no qual as validações têm por base uma axiomática explícita, a propriedade do segmento determinado por pontos médios de dois lados de um triângulo pode assegurar os argumentos discursivos, sendo a figura um suporte heurístico.

Figura 55 - Reconfiguração para provar que GH e EF são paralelos



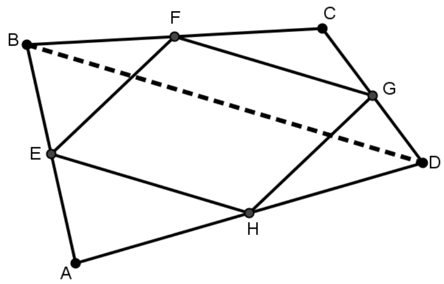
Traçando a diagonal AC (em azul e a tracejado) o quadrilátero ABCD subdivide-se em dois triângulos ABC e ADC com lado comum AC. E, F, G, H sendo os pontos médios dos lados do quadrilátero, a configuração faz que G e H sejam pontos médios dos lados CD e AD do triângulo ADC; E, F sejam pontos médios dos lados AB e CB do triângulo ABC.

Fonte: O autor

Sendo G e H pontos médios respectivamente dos lados CD e AD do triângulo ADC, então $\overline{GH}$ é paralelo a $\overline{CA}$. $\overline{EF}$ é também paralelo a $\overline{CA}$ já que E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC. Da transitividade da relação de paralelismo conclui-se que os segmentos EF e GH são paralelos.

Em seguida, pela reconfiguração na Figura 56, pela mesma propriedade da GII se apresentam argumentos que permitem estabelecer que os lados FG e EH são também paralelos.

Figura 56 - Reconfiguração para provar que EH e FG são paralelos



A diagonal BD, por sua vez, divide o quadrilátero ABCD também em dois triângulos ABD e CBD com um lado comum e, os pontos E e H são pontos médios dos lados do triângulo ABD e F e G são pontos médios dos lados do triângulo BCD.

Fonte: O autor

Recorrendo à mesma propriedade da GII, observa-se que sendo E e H pontos médios dos lados do triângulo ABD, então, $\overline{EH}$ é paralelo a $\overline{BD}$. De igual modo, sendo F e G pontos médios dos lados do triângulo CBD, então o segmento

FG é paralelo ao segmento BD. Da transitividade chegamos ao fato de que $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são também paralelos.

Observamos que os pontos médios E, F, G, H dos lados do quadrilátero ABCD determinam um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos. Buscando as definições em GII vemos que isso coincide com o conceito de paralelogramo. Assim se valida a conjectura acerca do quadrilátero determinado pelos pontos médios de qualquer quadrilátero.

As três tarefas, 1, 2 e 3, têm por objetivo avaliar as habilidades matemáticas e didáticas dos futuros professores na construção e validação de propriedades geométricas. Pretendemos começar com estas tarefas para evitarmos possíveis influências que métodos de prova que apresentamos em outras tarefas possam ter nos estudantes. Assim, a ideia é avaliarmos em uma primeira fase as habilidades que esses sujeitos têm ou mostram quando estão diante de atividades que exigem produção de demonstrações em matemática. De acordo como a literatura revisada, as dificuldades dos alunos com as demonstrações manifestam-se muitas vezes a partir de suas concepções, sendo uma dessas concepções a tendência de quando não sabe como produzir uma demonstração, basear-se em verificações empíricas como procedimento para validar propriedades matemáticas.

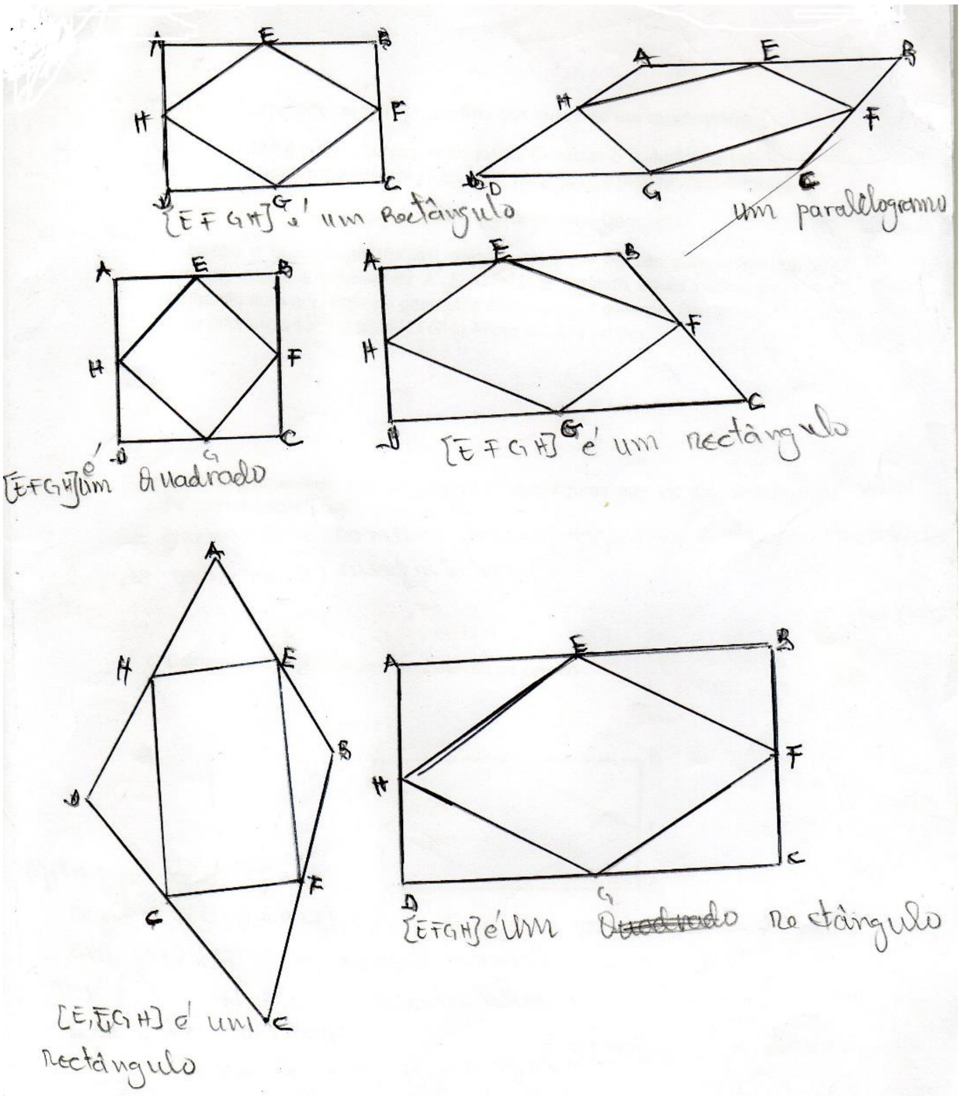
5.3.2. Análise das produções dos sujeitos na Tarefa 3

Com três itens (a), (b) e (c), lembramos que a tarefa explora a propriedade dos pontos médios dos lados de um quadrilátero.

No item (a) pede-se que os estudantes construam diferentes quadriláteros ABCD, e caracterizem o quadrilátero EFGH resultante da união dos pontos médios dos lados de ABCD, respectivamente. Conforme previmos na análise *a priori*, a caracterização desses quadriláteros, na maioria dos casos, resulta das impressões visuais e alguns sem rigor que satisfaz minimamente as exigências geométricas para as séries iniciais do ensino fundamenta: por exemplo, o rigor nos ângulos e relação dos lados consecutivos ou lados opostos. E também em muitos casos não houve justificação dos nomes atribuídos a EFGH.

Apresentamos (Figura 57) a seguir exemplos de construções feitas com lápis e papel.

Figura 57 - Exemplos de quadriláteros EFGH indicados por Gomes

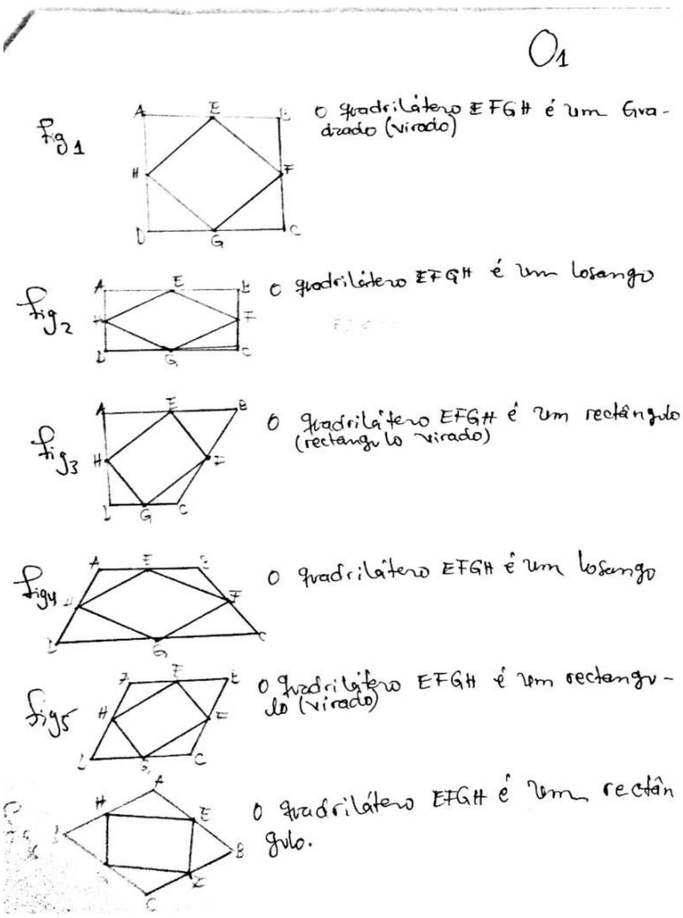


Fonte: Dados da pesquisa

Em três dos seis quadriláteros que Gomes construiu, ele considerou que os pontos médios E, F, G, H dos lados determinam um retângulo. Contudo, ele não explica as razões de sua afirmação. O ETG de Gomes não parece ter alguma referência a um modelo teórico que envolve as propriedades características dos quadriláteros que ele tinha construído.

Constatamos também que Ofélia, Fernão Paulo construíram quadriláteros ABCD com pelo menos dois lados paralelos, o que interferiu nos resultados dos quadriláteros EFGH, mas os nomes atribuídos variaram. Como exemplo, consideramos a produção da Ofélia (Figura 58).

Figura 58 - Exemplos de quadriláteros EFGH indicados por Ofélia



Fonte: Dados de pesquisa

Embora a Ofélia tenha designado quadrilátero EFGH como tendo lados congruentes, não consegue com muita clareza as razões que sustentam sua afirmação. Apoiamo-nos esse fato nos seus argumentos quando afirma retângulo virado, quadrado virado, deixando de lado o losango que tem os lados congruentes. O ETG da Ofélia parece depender de figuras prototípicas como quadrado e não de propriedades geométricas relevantes.

Em geral, tanto em Nampula como na Beira, os sujeitos construíram as figuras a lápis e no papel e, na caracterização do quadrilátero EFGH, obtido unindo os pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD, não houve invocação de alguma propriedade relativa a lados que justificasse o nome atribuído.

Em entrevista, procuramos ouvir de alguns sujeitos para saber em que se basearam para caracterizar o quadrilátero EFGH como tendo os lados congruentes:

Pesquisador *– [...]. Que mecanismo utilizou para nomear o quadrilátero EFGH? Aqui disse que é um quadrado virado. Aqui é um losango. Aqui é um retângulo virado. Aqui é um retângulo...*
Ofélia *– Mecanismo?*
Pesquisador *– Sim, que recurso utilizou para dar esses nomes?*
Ofélia *– Segundo os conceitos de quadrado. Fui ver que o lado EH é igual ao lado EF e é igual ao lado FG, e é igual ao lado GH. Então, como os quatro lados são iguais, a única figura com quatro lados iguais é o quadrado.*
Pesquisador *– Não existe outro quadrilátero com todos lados iguais que não seja quadrado?*
Ofélia *– Acho que não.*
Pesquisador *– Não?*
Ofélia *– Não.*
Pesquisador *– E este (apontando) por que é losango?*
Ofélia *– Losango porque tem quatro lados paralelos dois a dois, mas se formos a prestar muita atenção, o segmento HF é diferente do segmento EG. Quer dizer, EG é menor que HF. Essa é uma das características que me levou a distinguir como losango, não como quadrado. Apesar disso, também com essa característica podia ser retângulo... Mas não. Se formos verificar esta distância aqui EH, EG é igual a [...]*
Pesquisador *– Como se chamam esses segmentos que unem os vértices não consecutivos? Se tomarmos apenas este quadrilátero EFGH aqui como é que se chama este segmento que une os vértices não consecutivos?*
Ofélia – Não é mediatriz?
Pesquisador *– Mediatriz? O segmento que une dois vértices não consecutivos de qualquer polígono?*
Ofélia *- ... é .... – não consegue dizer.*
Pesquisador *– Não se recorda? É diagonal.*
Ofélia *– Sim, é diagonal. Estava dizendo, a diagonal EG é igual a diagonal HF, enquanto aqui, não, a diagonal EG é menor do que HF. Sendo assim, esta mesma característica podia ser do retângulo, mas não é retângulo porque o retângulo tem dois lados iguais e os outros dois também iguais, mas [...]*

Como estamos vendo ao longo da entrevista, nossa interlocutora vê como relevante no retângulo somente os lados.

Pesquisador *– É o que lhe levou a considerar, por exemplo, que este aqui era retângulo?*
Ofélia *– Sim, porque tem dois lados paralelos iguais dois a dois.*
Perguntada porque considerou de retângulo virado a nossa interlocutora apenas respondeu:
Ofélia *– [...] porque tem dois lados paralelos dois a dois [...] e a sua mediatriz ...*
Pesquisador *– Mediatriz?*
Ofélia *– Diagonal [...] as diagonais são iguais. Enquanto aqui as diagonais são diferentes – apontando a figura que apelidou de losango.*

Pesquisador *– Está bem.*

Ofélia *– Porque para o quadrado as diagonais são iguais, mais os seus lados são todos eles iguais, enquanto que para o retângulo as suas diagonais são iguais, mas seus lados são iguais dois a dois.*

Por este diálogo, percebe-se que nossa interlocutora não parece estar consciente de que uma das características principais de um retângulo é ser um quadrilátero com os lados consecutivos perpendiculares. Nossa interlocutora não parece ter consistência no que se refere às definições dos quadriláteros. Esse fato aparece em várias das construções dos investigados.

No item (b) solicitava-se aos estudantes que identificassem e justificassem as propriedades comuns a todos os quadriláteros EFGH.

Dos 19 estudantes que participaram da pesquisa apenas 9 (Dionísio, Paulo, Baú, Cuco, Dário, Elísio, Fred, Getúlio e Herculano) chegaram a afirmar explicitamente que o quadrilátero EFGH é um paralelogramo.

Três estudantes (Fernão, Amorim, Jackson) não mencionaram explicitamente o nome "paralelogramo", mas reconheceram que o quadrilátero EFGH tem os lados opostos paralelos. Apresentamos a seguir as afirmações desses três alunos:

Jackson*: "A propriedade comum das figuras obtidas em a) é que todas elas são figuras com os lados opostos paralelos (isto se verifica porque os pontos que resultam a figura EFGH são marcados em posições equidistantes relativamente ao extremo de cada segmento do quadrilátero dado)".*

Fernão*: "Para qualquer quadrilátero, unindo os pontos médios dos seus lados surge um quadrilátero que tem pelo menos dois lados paralelos".*

Amorim*: "Os lados opostos são sempre paralelos e congruentes. Acho que isso acontece porque todos os lados opostos são paralelos".*

Três outros estudantes (Emerson, Gomes e Ludovico) não conseguiram enunciar uma propriedade característica do quadrilátero EFGH. Por exemplo, Gomes afirmou que a: "propriedade comum dessas figuras é o surgimento de um novo quadrilátero".

Em entrevista, conversamos com Fernão acerca de sua produção.

Pesquisador *– Então, qual é a característica que é comum em todos esses quadriláteros EFGH que o senhor construiu?*

Fernão *– A característica comum é que pelo menos têm dois lados paralelos.*

Pesquisador *– Por que é que diz pelo menos e não diz aquilo que está a ver?*

Fernão *– Não tenho certeza porque este pode não ser paralelo a este,* *dependendo da ...*

A resposta de Fernão tem sentido, pois antes de se demonstrar não podemos ter certeza que todos os lados opostos são paralelos, portanto, trata-se de uma simples conjectura.

***Pesquisador** – Está bom. Se este não é paralelo a este, qual que o senhor está a ver que é paralelo ao outro?*
***Fernão** – Este, quer dizer, os ambos como usei assim.*
***Pesquisador** – A característica saliente aqui qual é?*
***Fernão** – Tem dois lados paralelos dois a dois.*
***Pesquisador** – Tem os lados....*
***Fernão** – Lados paralelos dois a dois.*
***Pesquisador** – Lados opostos, estes ... como é que se chamam?*
***Fernão** – São lados paralelos.*
***Pesquisador** – Lados opostos, são lados opostos. Então a característica comum destes quadriláteros aqui é o quê? Que é comum que estamos a constatar aqui?*
***Fernão** – É só falar lados opostos paralelos. Tem lados opostos paralelos.*
***Pesquisador** – Lados opostos paralelos. É a conjectura que podemos tirar. Estes quadriláteros aqui foram obtidos a partir de pontos...?*
***Fernão** – A partir de pontos ...*
***Pesquisador** - ... médios dos lados. Então, qual a conjectura que o senhor pode tirar? Quando une os pontos médios dos lados dum quadrilátero qualquer obtém o quê?*
***Fernão** – Obtém-se também um quadrilátero.*
***Pesquisador** – Mas há uma característica principal. [...]*
***Fernão** – Bom, o que eu estou a ver como algo comum é essa parte de ter lados paralelos dois a dois. [...]*
***Pesquisador** – Então, se o senhor for a formular, vamos dizer assim: Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer determinam o quê?*
***Fernão** – Determinam um quadrilátero, pode ser.*

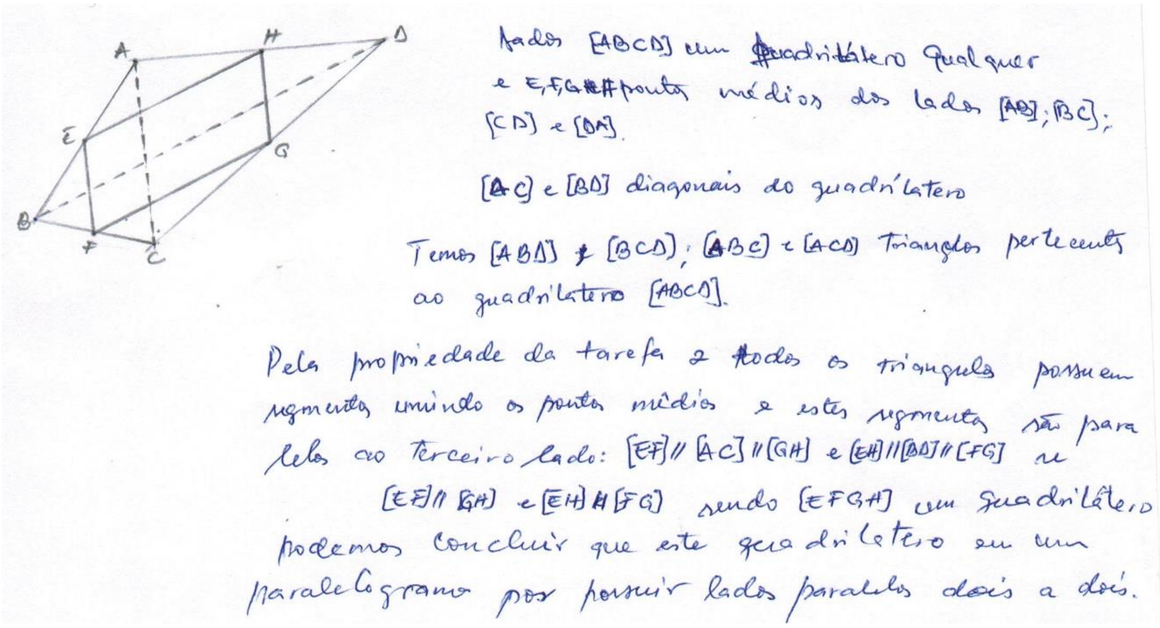
Notamos nas respostas de Fernão bem como as das Ofélia, fortes indícios de que o ETG, relativamente a quadriláteros, é composto, entre outros, de um vocabulário geométrico básico mal estruturado. O que nos leva a afirmar que o paradigma norteador desse ETG é ainda a Geometria natural, que não tem um modelo teórico estruturando o discurso. Portanto, falta neles conhecimentos básicos relativos a propriedades dos quadriláteros.

O item (c) pedia que os estudantes apresentassem uma demonstração da propriedade constada em (b). Embora não enunciada explicitamente, deviam demonstrar que os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero convexo determinam um paralelogramo.

Apenas 4 sujeitos conseguiram validar total ou parcialmente a conjectura por meio de uma demonstração. Trata-se de Herculano, Cuco, Amorim e Dionísio. Três deles fizeram a demonstração mencionando a propriedade tratada na tarefa 2. Isso pode revelar que o escalonamento das tarefas foi importante, pois, mesmo não tendo conseguido demonstrar a propriedade objeto da tarefa 2, alguns foram capazes de perceber que é uma propriedade válida e, consequentemente, poderia ser usada em outras tarefas subsequentes.

Herculano foi o único que aplicou de forma clara a propriedade como pode ser observado na Figura 59.

Figura 59 - Prova apresentada por Herculano sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero

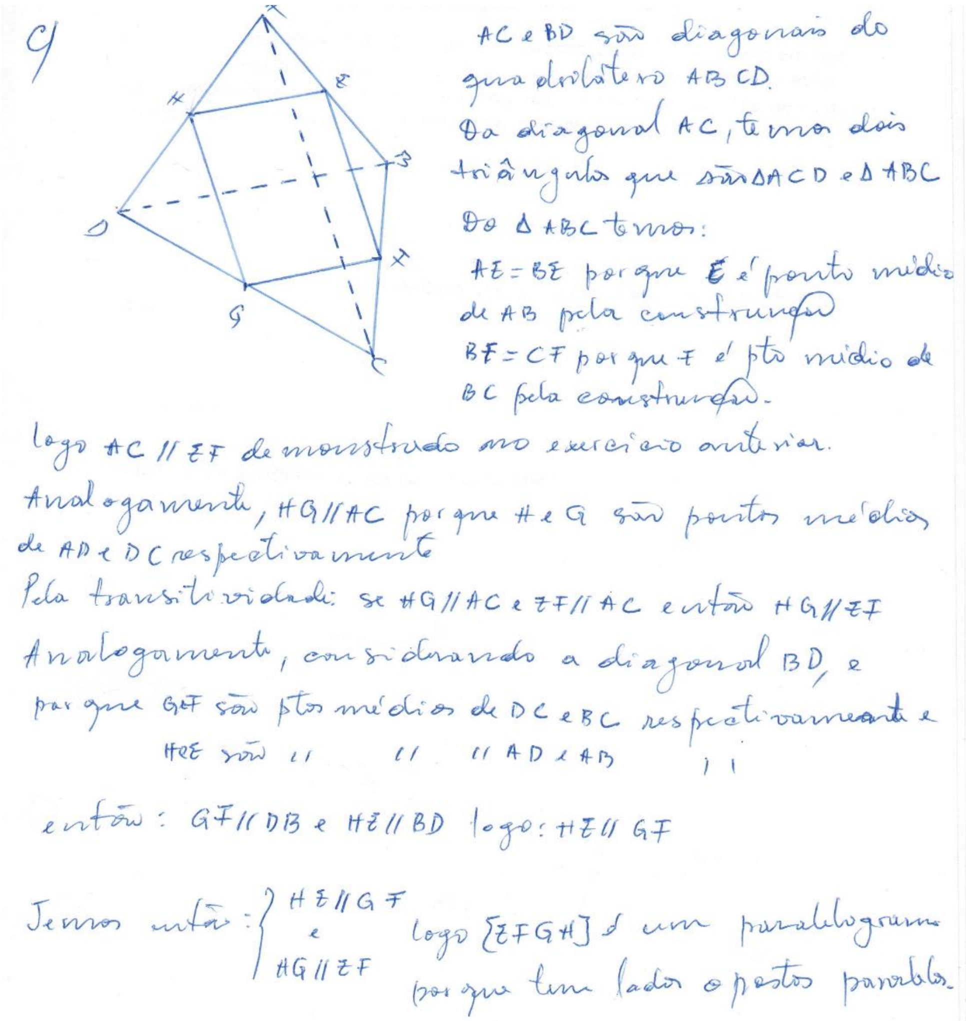


Fonte: Dados de pesquisa

Herculano, apesar de ter sido breve, apresenta uma cadeia dedutiva com argumentos bem fundamentados em propriedades estabelecidas: propriedade dos pontos médios dos lados de um triângulo; definição de paralelogramo; diagonal de um quadrilátero. Pela consistência dos passos apresentados, podemos dizer que se trata de uma prova intelectual na classificação de Balacheff (1987) ou na categoria de esquema de prova analíticas, segundo Harel e Sowder (1998, 2007), já que a validação se baseou em deduções lógicas. Consequentemente, seu ETG foi norteado pela geometria GII.

Uma produção similar é a de Getúlio cujo protocolo de produção apresentamos na Figura 60.

Figura 60 - Prova apresentada por Getúlio sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero



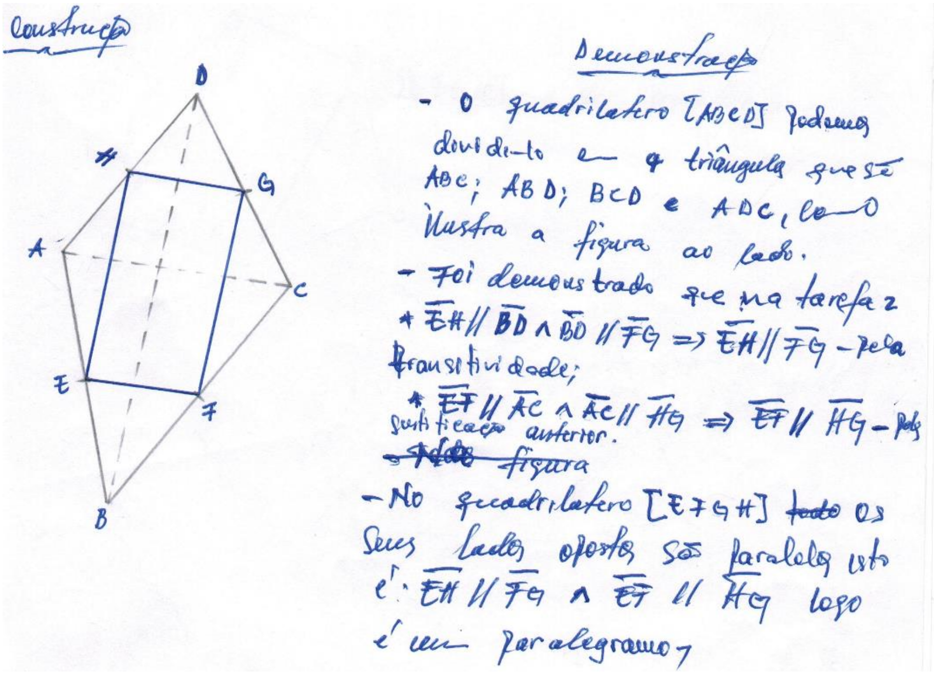
AC e BD são diagonais do quadrilátero ABCD.
Da diagonal AC, temos dois triângulos que são ΔACD e ΔABC
Do ΔABC temos:
AE = BE porque E é ponto médio de AB pela construção
BF = CF porque F é pto médio de BC pela construção.
logo AC // EF demonstrado no exercício anterior.
Analogamente, HG//AC porque H e G são pontos médios de AD e DC respectivamente
Pela transitividade: se HG//AC e EF//AC então HG//EF
Analogamente, considerando a diagonal BD, e porque G e F são ptos médios de DC e BC respectivamente e
H e E são " " " AD e AB " "
então: GF//DB e HE//BD logo: HE// GF
Temos então: { HE//GF e HG//EF logo [EFGH] é um paralelogramo porque tem lados opostos paralelos.

Fonte: Dados de pesquisa

Getúlio foi mais detalhado e utilizou explicitamente a transitividade do paralelismo. Contudo, observamos que no lugar de utilizar a propriedade da tarefa anterior (tarefa 2), ele afirma que a relação foi demonstrada na tarefa anterior (Logo AC // EF demonstrado no exercício anterior). Na realidade, ele usou essa propriedade sem ter feito sua demonstração no exercício anterior.

Identificamos também na proposta de Cuco alguns equívocos de linguagem conforme Figura 61.

Figura 61 - Prova apresentada por Cuco sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero

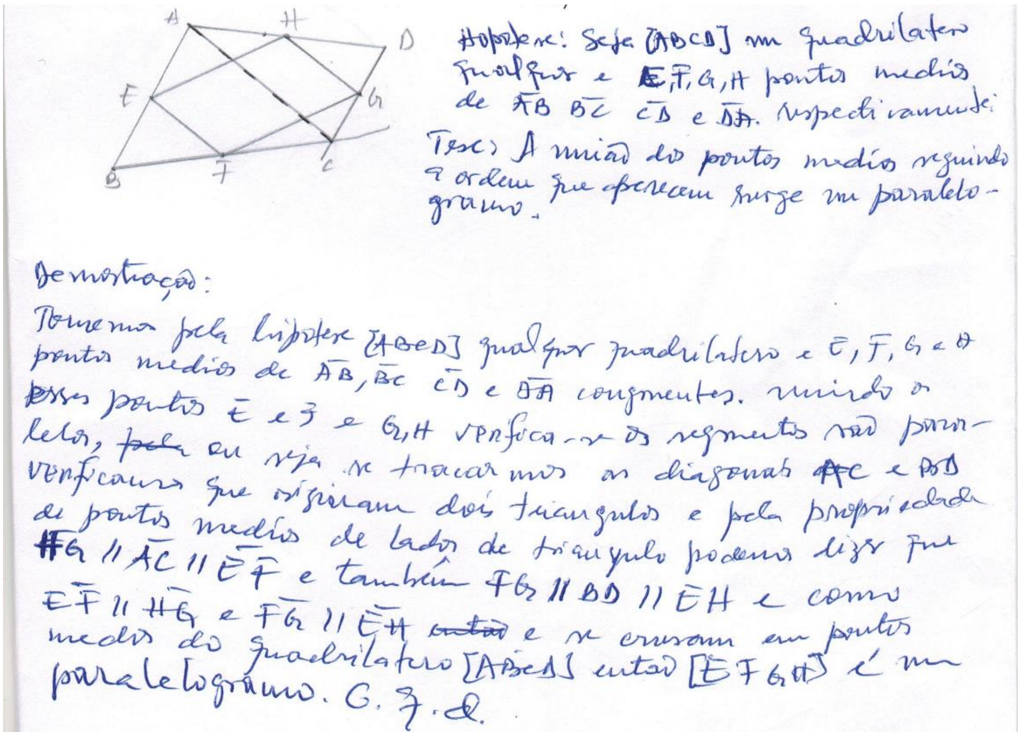


Fonte: Dados de pesquisa

Cuco, ao afirmar que “foi demonstrado que na tarefa 2 $\overline{EH}$ // $\overline{BD}$ e BD // FG ⇒ EH // FG – pela transitividade; EF // AC e AC // HG ⇒ EF // HG – pela substituição anterior”, não se apropriou do procedimento correto para demonstrar a propriedade. Ele deveria mencionar a tarefa em que a propriedade foi mencionada e daí servir-se dessa passagem para demonstrar o que foi pedido.

Dionísio é um dos alunos que conseguiram validar o teorema dos pontos médios de um quadrilátero, como pode ser observado no seu protocolo na Figura 62.

Figura 62 - Prova apresentada por Dionísio sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero



Fonte: Dados de pesquisa

Dionísio é um dos poucos que distingue nitidamente hipótese da tese, e usa a hipótese (o quadrilátero e os seus pontos médios dos lados) bem como as propriedades correlatas (base média de um triângulo) para tirar uma conclusão com um discurso coerente. Podemos dizer que seu ETG para resolver este item compreendeu à propriedade sobre a base média de um triângulo; transitividade; definição de paralelogramo; diagonal de um quadrilátero, a figura que representa o quadrilátero e os pontos médios dos lados desse quadrilátero. O ETG foi norteado pela geometria axiomática natural (GII), já que utilizou um modelo teórico para deduzir a propriedade, a figura sendo um apoio para visualizar subfiguras e fazer conjecturas.

Catorze alunos não conseguiram validar a conjectura por meio de uma demonstração. Destes, quatro assumiram a conjectura como fato estabelecido (Fernão, Gomes, Dário); dois deixaram em branco (Nilza e Ludovico); e, os restantes (Emerson, Iran, Ofélia, Paulo, Elísio, Fred, Luís, Jackson e Moisés) apresentaram uma variedade de respostas, mas sem nenhum discurso coerente baseado em algum modelo teórico.

Para ilustrar esse fato, apresentamos trechos das produções desses alunos.

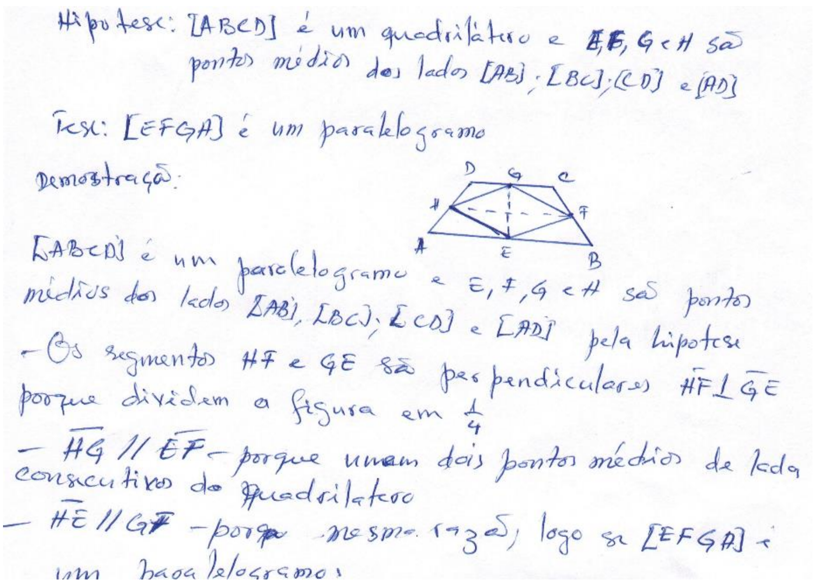
Depois de apresentar suas figuras sem nomear os quadriláteros EFGH, Fernão escreveu o seguinte no item (c):

Consideremos o quadrilátero acima [ABCD] onde AB ≠ CD, AD ≠ BC ou AB ≠ BC; CD ≠ BC. A união dos seus pontos médios obtém-se o quadrilátero EFGH com EF // HG e EH // FG. Portanto o quadrilátero EFGH inscrito em ABCD é um paralelogramo c.q.d.

Contudo, apesar de ter apresentado aquelas relações de paralelismo, em entrevista Fernão assegurou-nos que não sabia se na verdade todos os pares de lados do quadrilátero EFGH eram paralelos. Esse aluno mostra que não sabe iniciar uma demonstração. Na sua produção não é possível reconhecer a hipótese e nem o que ele pretende demonstrar (a tese), assumindo apenas que os lados opostos do quadrilátero EFGH são paralelos. Ele tem um discurso que não se apoia em nenhum modelo teórico e seu ETG é determinado apenas por um vocabulário geométrico desconexo.

Por sua vez Paulo distingue as duas partes da propriedade: hipótese e tese como se vê no extrato do seu protocolo que apresentamos na Figura 63.

Figura 63 - Tentativa de prova apresentada por Paulo sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero


Hipótese: [ABCD] é um quadrilátero e E, F, G e H são pontos médios dos lados [AB]; [BC]; [CD] e [AD]

Tese: [EFGH] é um paralelogramo

Demonstração:

[ABCD] é um paralelogramo e E, F, G e H são pontos médios dos lados [AB], [BC], [CD] e [AD] pela hipótese

- Os segmentos HF e GE são perpendiculares $\overline{HF} \perp \overline{GE}$ porque dividem a figura em $\frac{1}{4}$

- $\overline{HG} // \overline{EF}$ - porque unem dois pontos médios de lado consecutivos do quadrilátero

- $\overline{HE} // \overline{GF}$ - porque mesma razão, logo se [EFGH] é um paralelogramo

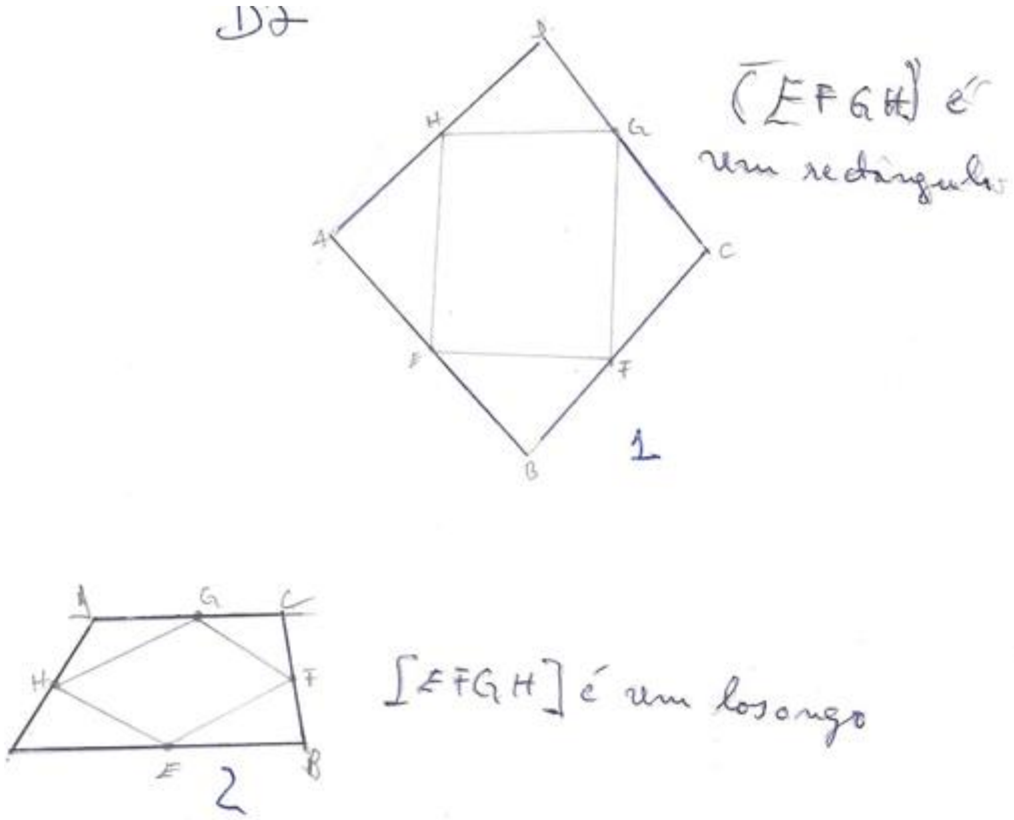
Fonte: Dados de pesquisa

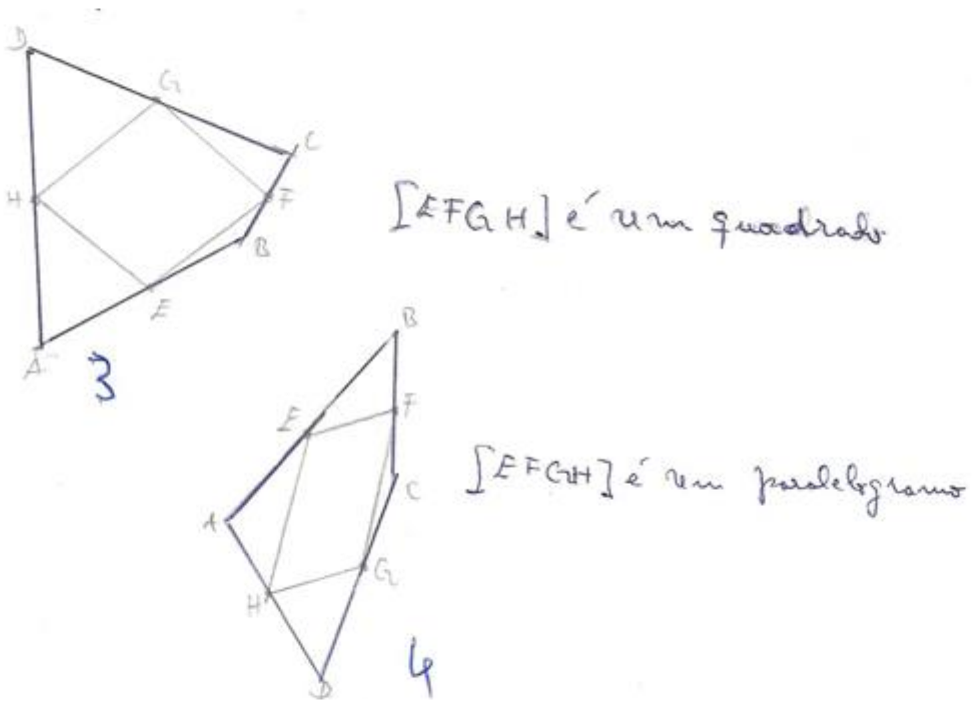
Apesar de Paulo ter identificado corretamente a hipótese da propriedade e a respectiva tese, ele não mobilizou a propriedade correta (pontos médios dos lados de um triângulo determinam segmento paralelo ao terceiro). A linguagem que utiliza para justificar o paralelismo é ambígua: “HG // EF porque unem dois pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero”, em vez de dizer que são segmentos determinados por pontos médios de dois lados consecutivos de um quadrilátero.

Ainda constatamos nesta produção o emprego de uma propriedade não justificada ao afirmar que HF e GE são perpendiculares “porque dividem a figura em ¼”. Temos aqui o que Parzysz (2006) chama de “contaminação do sabido pelo percebido”, pois, não é uma relação dada nem na hipótese, nem deduzida de passos precedentes, mas apenas da própria figura construída.

Dário, no item (a), apresenta o seguinte protocolo que reproduzimos na Figura 64.

Figura 64 - Quadriláteros EFGH indicados por Dário

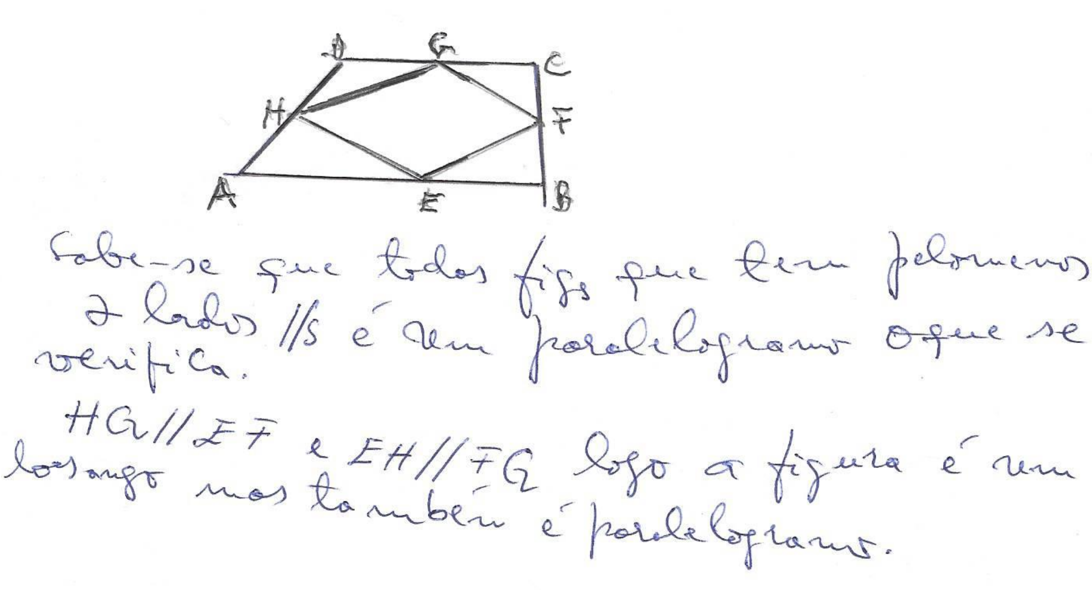




Fonte: Dados de pesquisa

Dário não foi também rigoroso na caracterização dos quadriláteros EFGH obtidos. No item (b) formulou bem a conjectura esperada, mas, no item (c) ele não conseguiu validar a conjectura, como pode ser observado no protocolo que reproduzimos na Figura 65.

Figura 65 - Tentativa de prova apresentada por Dário sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero



Fonte: Dados de pesquisa

Percebemos que ele assume que os lados opostos do quadrilátero EFGH são paralelos, o que deveria ser demonstrado. Ao assumir que os lados opostos são paralelos, Dário parece ter se baseado apenas em evidências empíricas do próprio desenho.

Procurando mais informações voltadas para as justificativas dos alunos participantes da pesquisa, entrevistamos Ofélia, cujas respostas seguem:

Pesquisador *– Podemos avançar? [...] Aqui na demonstração você diz toda as figuras apresentam características típicas: elas apresentam quatro ângulos opostos dois a dois iguais; lados paralelos dois a dois. Então unindo os vértices as duas bissetrizes serão perpendiculares. Bissetrizes, ou diagonais?*
Ofélia *– Diagonais.*
Pesquisador *– Ok. A minha questão é: que mecanismo utilizou para chegar a conclusões de que os lados são paralelos e os ângulos opostos são iguais?*
Ofélia *– A observação das figuras.*
Pesquisador *– pela observação?*
Ofélia *– Sim, nas figuras que já verifiquei.*

Como podemos perceber na entrevista, Ofélia tirou suas conclusões na base de observação. A prova que apresentou é de natureza perceptiva, segundo Harel & Sowder, ou de natureza pragmática, na classificação de Balacheff. Por esse fato, dizemos também que o paradigma que norteou o seu ETG é GI (geometria natural). Constatamos ainda que o comportamento de Ofélia, neste item, contrasta com o que fez quando avaliou provas feitas por outros alunos e partir das quais ela afirmou que uma demonstração bem feita não pode se basear em exemplos, mas, apenas em conceitos matemáticos (axiomas ou teoremas previamente demonstrados). Este procedimento da Ofélia corrobora resultados de algumas pesquisas revisadas como Heinze e Reiss (2003) ou Reiss; Hellmich; Thomas (2002, apud HEINZE e REISS, 2003) segundo os quais, os alunos investigados não conseguiam perceber que exemplos não constituem provas válidas em matemática.

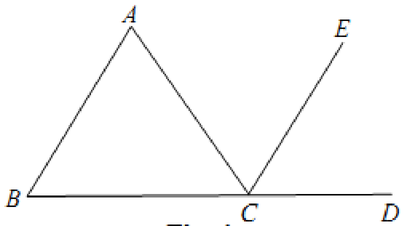
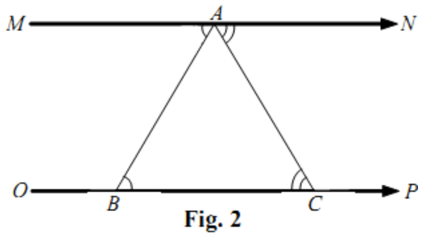
Em resumo: para além dos sujeitos supramencionados, nenhum outro sujeito conseguiu formular corretamente a conjectura relativa ao quadrilátero determinado por pontos médios dos lados de um outro quadrilátero e validá-la por meio de uma demonstração.

5.4. Análise da tarefa 4: Ainda sobre ângulos internos de triângulo

5.4.1. Análise *a priori* da tarefa 4

Várias tentativas de prova foram apresentadas para a afirmação: “a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°”. Os seguintes métodos, se supõe, refletirem diferentes estratégias seguidas por alunos.

Quadro 4 - Métodos de validação propostos

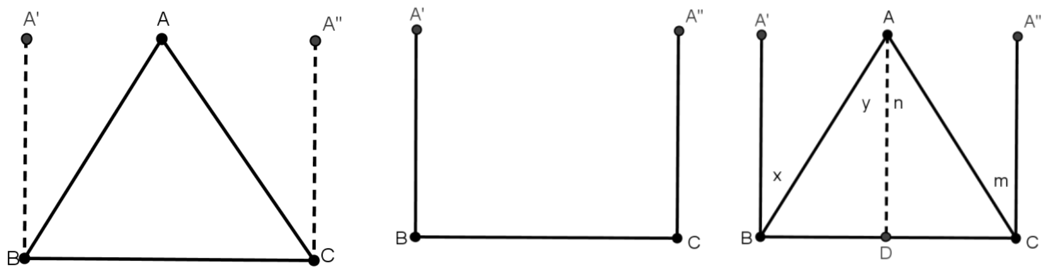
Método 1: Desenha qualquer triângulo e mede os ângulos internos com um transferidor. Se a soma dos três ângulos der 180°, então provaste a proposição.	
Método 2: Como mostra a Fig. 1, traça uma reta passando pelo ponto C tal que $\overline{CE}$ // $\overline{AB}$. De acordo com as propriedades de retas paralelas, prove que D$\hat{C}$E ≅ $\hat{B}$; A$\hat{C}$E ≅ $\hat{A}$. **Método 3**: Como mostra a Fig. 2, a reta passando pelo ponto A é paralela à reta BC. Portanto, isso mostra que a propriedade de retas paralelas pode ser usada para provar a dada proposição.	 **Fig. 1**  **Fig. 2** **Fonte:** Zhou e Bao (2009, p. 494)
Método 4: Aproveitando-se do recurso de animação de *software* geométrico Geogebra: desenhe um triângulo. Se aleatoriamente arrasta um vértice do triângulo e a soma das medidas dos ângulos internos permanece 180°, então a proposição é verdadeira.	
Método 5: Faça um recorte de um triângulo de papel; corte quaisquer dois dos três ângulos; colocá-los em uma linha reta com o terceiro ângulo. Este método mostra que os três ângulos combinados formam um ângulo raso.	
Método 6: Rasguei os ângulos do triângulo obtusângulo e coloquei-os juntos (como mostrado abaixo).	

.

Fonte: Knuth (2002b, p. 292)

Os ângulos juntos formam um ângulo cujos lados estão um no prolongamento do outro formando uma reta, que determina um ângulo de 180º. Eu também tentei por um triângulo acutângulo, bem como um triângulo retângulo e aconteceu a mesma coisa. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Método 7: Usando o diagrama abaixo, imagine $\overline{BA}$ e $\overline{CA}$ movendo-se para posições perpendiculares $\overline{BA'}$ e $\overline{CA"}$, formando assim a segunda figura. Na inversão deste processo (por exemplo, movendo $\overline{BA'}$ de volta para $\overline{BA}$), o valor do ângulo direito, A'BC, que se perde é x. Essa quantidade perdida, no entanto, é compensada com um ângulo y ($\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{BC}$). Um argumento similar pode ser feito para o outro caso. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.



Fonte: Harel e Sowder (1998, p. 259)

Método 8: Como mostra a Fig.3, quando o vértice C se aproxima da reta AB, as medidas de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ ambas se aproximam de 0° e a medida do $\hat{B}$ aproxima-se de 180°. Portanto a soma também é 180°.

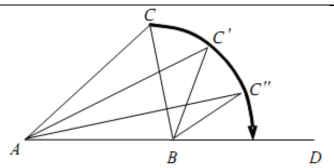
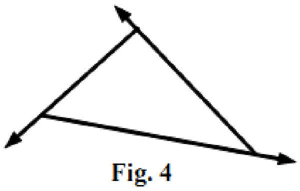


Fig. 3

Método 9: Como mostra a Fig. 4, imagina que uma pessoa começa em um vértice e depois segue as setas, andando a toda a volta e torna ao vértice de partida e, portanto, ela anda um total de 360°. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°×3-360° = 180°.	 Fig. 4 **Fonte:** Zhou e Bao (2009, p. 494)

Fonte: O autor (a partir de adaptações)

a. Diga, para cada método, se o argumento apresentado mostra que a afirmação é verdadeira para todos os triângulos. Se sua resposta for afirmativa diga por que, se for não, também explique as razões.

b) Se fosse pedido ensinar a prova dessa propriedade usando um dos métodos apresentados, que método escolheria? Por quê?

O objetivo da tarefa é analisar que natureza de argumentos os sujeitos de pesquisa vão buscar para defender que cada um dos métodos apresentados na tarefa mostra ou não mostra que a afirmação é verdadeira para todos os triângulos. Estudar que critério utilizarão para a preferência de um dado método dentre os nove elencados na tarefa 4.

Essa tarefa contempla duas formas básicas de validação da propriedade: uma que se baseia em resultados de medições e construções, e outra que utiliza o raciocínio dedutivo como meio de prova, apoiando-se em figuras e construções apenas como meios de suporte heurístico. A primeira forma é típica da Geometria natural (GI). São dessa geometria os métodos 1, 4, 5, 6, 8 e 9, uma vez que se baseiam em argumentos empíricos, isto é, a dedução baseia-se em experimentos. Esses métodos não explicam que a afirmação é verdadeira para todos os triângulos, senão apenas naqueles em que a verificação está ocorrendo. A segunda forma de validação é um procedimento da Geometria axiomática natural (GII): são os métodos 2 e 3 em que os argumentos são baseados em propriedades matematicamente justificadas. Essas duas são as provas que generalizam a propriedade para todos os triângulos, pois fornecem argumentos matemáticos. Há um método que se pode considerar potencialmente gênese de uma prova dedutiva e situa-se entre GI e GII: trata-se de método 7. O método visualiza que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale dois retos, mas falta a ligação entre a visualização e o raciocínio discursivo.

Quanto aos métodos de prova com argumento empírico, vale a pena destacar as particularidades de cada um deles no que diz respeito ao seu nível de sofisticação:

- o método 1 pode levar a muitas discussões, uma vez que medições com instrumentos levam a resultados aproximados. Esse método levanta ainda outras exigências relacionadas com a leitura das medidas dos ângulos, bem como posicionar o transferidor para diminuir o grau de erro durante a leitura dos resultados.

- O método 4, pelo fato de usar uma geometria dinâmica, pode ser que convença facilmente o aluno pelo fato de movimentar e ver que a soma vai ficar sempre igual a 180°. Esse método na verdade permite provar, mas não demonstra porque não usa conceitos matemáticos que justifiquem o resultado. O método será proveitoso se, durante a exploração, surgir o questionamento do tipo: “por que será que o resultado é sempre esse e não outro?”.

- Quanto aos métodos 5 e 6, esperamos que os sujeitos da pesquisa percebam que são similares em sua execução, mas com pequenas diferenças em sua essência. No método 5, o autor acha que se verificar a propriedade a partir de um só caso, isso vale para qualquer caso (experiência crucial, na categorização de Balacheff, 1987). No método 6, o autor não se deixa convencer com um único tipo de triângulo: precisa verificar em cada tipo de triângulo para se certificar se o fato constatado em um tipo se verifica ou não em outro tipo (empirismo ingênuo, na categorização de Balacheff, ou esquema de prova indutiva, segundo Harel e Sowder, 1998, 2007). Entendemos que a riqueza dos dois métodos reside no estabelecimento da relação entre o formato da figura que se obtém ao justapor os três ângulos do triângulo, com o formato de um ângulo raso. Porém, em matemática um ou vários exemplos não validam propriedades gerais.

Os métodos 5 e 6 são muito presentes em vários livros didáticos e, autores como Tall et al. (2012) consideram que esses métodos contem “sementes” para as provas 2 e 3 que utilizam a ideia de retas paralelas. Contudo, em vez de parar apenas na ideia de ‘semente’ de outro método, é fundamental perceber que as duas formas de prática de prova pertencem a dois paradigmas diferentes que necessariamente devem ser distinguidos: o recorte, dobradura e/ou justaposição não generaliza a validade da propriedade; enquanto que os métodos 2 e 3 – que usam noções matemáticas – generalizam a propriedade, conferindo-lhes o estatuto de métodos matematicamente válidos e, esse é um conhecimento importante na formação de professores.

Quanto aos métodos 2 e 3, esperamos que os sujeitos de nossa pesquisa incorporem elementos figurais, que fazem emergir conceitos matemáticos que permitem fundamentar as justificações – relações de ângulos em retas paralelas, mais especificamente:

- no método 2, a menção explícita do paralelismo entre CE e AB permite deduzir relações importantes graças a propriedades de ângulos correspondentes e ângulos em retas paralelas.

- no método 3, utilizando a mesma ideia de três ângulos adjacentes em A formando ângulo raso, espera-se que os sujeitos sejam capazes de perceber que desta vez os ângulos em jogo são alternos internos também em retas paralelas intersectadas por uma transversal.

- o método 7, de natureza transformacional segundo Harel e Sowder (1998), incorpora a ideia de ângulos alternos internos em retas paralelas cortadas por uma transversal como argumento a utilizar. Os sujeitos da pesquisa poderão enxergar essa ideia se perceberem que as três figuras do método 7 devem ser vistas como formando uma só e que todas as semirretas verticais foram levantadas para destacar essa ideia, porém falta esta ligação entre o figural e o discursivo em matemática. Alguns autores, como Fischbein (1982 apud REID e KNIPPING, 2010) não considerem esse procedimento com demonstração.

No método 8, espera-se que o estudante seja capaz de perceber que o ângulo obtido pelo movimento ocupe apenas uma região do plano tal que os seus lados estejam no prolongamento um do outro. Deverá, daí, surgir a ideia de ângulo raso. O método 9 incorpora dois aspectos: movimento e cálculo aritmético. Ambos os métodos não explicam de forma geral a afirmação, mas permitem levantar uma conjectura que carece de uma explicação matemática.

Também por se situarem na manipulação material, eles situam-se na Geometria natural (GI).

No **item b**), pretendemos explorar as estratégias que cada sujeito vai ter com relação aos métodos de prova fornecidos e, ao mesmo tempo, analisar as justificações de suas escolhas. Assim, esperamos que a justificação acerca do método preferido pelo sujeito tenha algum motivo – matemático ou pessoal - em cada caso.

Escolhemos essa tarefa por sua riqueza e por envolver alguns métodos presentes em livros didáticos de Moçambique. Esse argumento por si só nos leva a considerar que alguns dos métodos de prova empírica constituem elementos de ETG individual, mas também institucionais de escolas ou comunidades escolares. Uma das formas de conhecer até que ponto esses livros têm influência nas concepções de prova em geometria dos sujeitos, pode ser por meio da atividade envolvida na tarefa. Com efeito, com exceção dos métodos 4, 7, 8 e 9, os outros aparecem de forma direta ou indireta nos livros didáticos de Moçambique como técnica para validar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, com mais incidência os métodos 1, 5 e 6 (ORDEM, 2010) sem, porém, ignorar a presença dos outros.

Destacamos, já que é consenso entre matemáticos, que verificações baseadas em exemplos não são consideradas argumentos válidos em matemática, embora o que é demonstração dependa mais da autoridade de quem avalia a produção (WEBER, 2003). Assim, para o item **b** esperamos vários tipos de respostas, entre as quais destacamos as seguintes:

- para os métodos 1, 4, 5, 6, 8 e 9, uma das respostas possíveis é: nenhum desses métodos mostra que a afirmação é verdadeira para todos os triângulos, porque cada um deles se baseia em verificações empíricas (medições, recortes, animações, etc.), procedimentos que em matemática não são aceitos como métodos válidos de prova (demonstração);

- pode ser que algum dos métodos seja considerado válido para justificar a afirmação para todos os triângulos, ou seja, é uma demonstração da propriedade. O que não será considerado como demonstração correta em nossa concepção de demonstração. Para este caso, os alunos podem se apoiar as seguintes: (i) porque ilustra facilmente a propriedade; (ii) porque procedendo desse modo aluno vê que ângulo formado é raso; (iii) é uma forma de concretizar a propriedade; (v) com medições o aluno fica mais convencido; (v) porque é mais fácil explicar desse modo e o aluno pode reproduzir o procedimento em casa; (vi) porque isso não foge do que aparece no livro do aluno; (vii) porque a ilustração torna evidente a propriedade. Nossas expectativas em relação à aparição desses argumentos veem ao encontro dos resultados de pesquisas sobre o tema, como apontamos, por exemplo, no trabalho de Knuth (2002a, 2002b) e Chazan (1993), entre outros. Esperamos também justificações plausíveis em relação aos métodos que envolvem procedimentos empíricos. Nossas maiores expectativas também estão em torno dos métodos 8 e 9, que não são muito frequentes em livros didáticos. Em relação a esses métodos, Zhou e Bao (2009) afirmam que eles foram aceitos como demonstração por professores (sujeitos da pesquisa deles) do ensino secundário cursando mestrado em Educação Matemática sem, porém, apresentarem explicações plausíveis.

Quanto aos métodos 2, 3 e 7, pode ser que haja diferença em suas percepções particularmente o 7 que, não sendo frequente em livros didáticos, pode ser que não seja visto como método que incorpora propriedades que podem ser utilizadas para fundamentar os argumentos.

A escolha dos itens da tarefa justifica-se pelo fato de vários autores defenderem que um dos aspectos que deve fazer parte do conhecimento do professor é a construção e avaliação de provas, sobretudo Stylianides (2011), que enumera os tipos de conhecimentos inter-relacionados importantes para o professor no ensino e aprendizagem das provas e demonstrações.

5.4.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 4

Lembramos que a tarefa 4 tinha por foco a avaliação de nove métodos de prova da propriedade acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Dos nove métodos hipoteticamente apresentados por alunos, apenas dois – métodos 2 e 3 – são considerados demonstrações válidas. O terceiro método – método 7 – segundo Reid e Knipping (2010), autores da escola filosófica da matemática apriorista que defendem uma matemática infalível e rigorosa, na qual as demonstrações se baseiam na lógica formal, não é considerado prova válida. Não querendo entrar a fundo nessa discussão, para efeitos do presente estudo, consideramos que o método valida a propriedade, já que, mesmo não indicando claramente o uso da propriedade que incorpora o axioma das paralelas e a dos ângulos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal. Os métodos 1, 4, 5, 6, 8 e 9 são inválidos do ponto de vista conceitual de demonstração em matemática, por envolver argumentos empíricos.

O item (a) pede que os sujeitos avaliem os métodos apresentados, e o item (b) procura saber entre os métodos que estão avaliando, se eles fossem tratar da mesma propriedade em sala de aula, que método optaria.

Conforme salientamos na análise *a priori*, os métodos 1, 4, 5, 6, 8 e 9 não validam a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Contudo, as respostas obtidas mostram que alguns sujeitos da pesquisa julgam que esses métodos validam a propriedade, enquanto outros entendem que não. Algumas respostas têm justificações (plausíveis ou não) e outras não têm justificação. Descriminamos as respostas dos estudantes por método para facilitar nossa análise. Antes, porém, descrevemos de forma breve as respostas de dois sujeitos (Ofélia e Cuco).

Ofélia começa por afirmar que nenhum dos métodos apresentados valida a propriedade: *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°*, alegando que "[..] nenhuma das alíneas demonstra a proposição", mas em seguida, como que a contradizer-se escreve:

Método 1, 4, 5, 6 não considero demonstração porque não se pode verificar tese, hipótese. O restante são demonstrações da proposição "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus" (transcrição do protocolo de produção da Ofélia)

Cuco afirma que valida cada um dos métodos apresentados com a exceção do método 1 em que escreve o seguinte: "*M1± valido; com uma condição: se a medição for rigorosamente aceite, caso contrário não valido*".

Ao analisarmos a fundo a resposta da Ofélia, interpretamos que, ao justificar que não vê a hipótese nem a tese, a estudante simplesmente vê as demonstrações como simples rituais que seguem determinadas regras sem, porém, entender a essência de sua construção. Tudo indica que, ao dar essa resposta, ela manifestaria a ideia de esquema de prova ritual (HAREL e SOWDER, 1998, 2007), pois ela avaliou os métodos apresentados não pela validade dos argumentos apresentados, mas pela aparência.

Já em relação às respostas de Cuco, elas podem ter duas interpretações: por um lado, o seu autor considera que verificações com instrumentos de medida podem validar propriedades ou conjecturas em matemática (para o caso dos métodos 1, 4, 5, 6, 8 e 9). No primeiro caso, ele age norteado por um paradigma em que verificações empíricas podem ser aceitas como meio de validação de propriedades geométricas (GI) e, no segundo caso, a ação é resultante provavelmente da não compreensão da mensagem que o enunciado apresenta.

Entretanto, tanto no caso da Ofélia, como de Cuco, argumentos tecidos pelos dois em entrevista podem dar subsídios para entender melhor suas produções. Porém, antes dos extratos das entrevistas, apresentamos, em forma de tabela, o resumo da classificação dos métodos pelos sujeitos da pesquisa. Apresentamos, como segue, a significação das notações fornecidas no Quadro 5: Nota 1: v – a prova válida a propriedade; nv – a prova não valida a propriedade; Nota 2: Utilizamos os códigos dos sujeitos para economia do espeço; Nota 3: As interrogações (??) significam que o sujeito deu uma resposta confusa, por exemplo, “simplesmente é um método porque não está indicada a tese” (Z2).

Quadro 5 - Classificação dos métodos de prova pelos sujeitos da pesquisa

Prova	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	v	nv	v	nv	v	nv	v	nv	v	nv	v	nv	v	nv	v	nv	v	nv
Z1		X	X		X			X		X		X	X			X		X
Z2	?	?	X		?	?	?	?	X		X			X	X		?	?
Z3	X		X		X		X		X		X		X		X		?	?
Z4		X		X		X	X		X		X			X	X			X
Z5	X		X		X		-	-	X		X		X		X		X	
Z6		X	X		X		?	?		X	X		X		X			X
Z7		X	X		X			X		X		X	X		X		X	
Z8		X	X		X		X		X		X		X		X			X
Z9		X	X		X		X		X		X			X		X		X
Z10		X		X	X			X	X		X			X		X		X
Z11	X		X		X		X		X		X		X		X		X	
Z12	X		X		X		X		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Z13		X		X	X		X			X	X			X		X	X	
Z14	X		X		X		X		X		X		X		-	-	-	-
Z15		X	X		X		X		X		X		X			X		X
Z16		X	X		X		X		X		X		X		X		?	?
Z17	X		X			X	X		X		X		X		X		X	

Z18		X	X			X		X		X		X	X			X	X	
Z19		X		X	X			X	X		X			X		X		X

Fonte: Dados da pesquisa

Para economia de espaço, na primeira da coluna da tabela apresentamos os códigos dos sujeitos que deram as respostas e não os nomes fictícios com os quais os tratamos.

Desse modo, Z1 – Dionísio; Z2 – Emerson; Z3 – Fernão; Z4 – Gomes; Z5 – Iran; Z6 – Nilza; Z7 – Ofélia; Z8 – Paulo; Z9 – Amorim; Z10 – Baú Z11 – Cuco; Z12 – Dário; Z13 – Elísio; Z14 – Fred; Z15 – Getúlio; Z16 – Herculano; Z17 – Luís; Z18 – Jackson e Z19 – Kelmon.

Pela tabela, vemos que apenas Dionísio rejeitou todas as provas baseadas em verificações empíricas (provas 1, 4, 5, 6, 8 e 9) para a validação da propriedade sobre *"*a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo" e, assinalou com sucesso, as três provas que a validam (provas 2, 3 e 7). Contudo, no item **b** em que se procurava saber como esses estudantes ensinariam essa propriedade recorrendo a um dos métodos de prova apresentados, Dionísio escolheu o método 5 justificando que:

[...], pois este método traz uma comodidade ao aluno a partir do ponto em que ele conhece o material a ser usado na aula, estamos a falar de: folha A4, tesoura, régua etc., ele vai fazendo o processo por si só e sob a orientação do professor e assim, sem esforço nem "magia matemática" ele próprio chega a resposta (Dionísio).

Dionísio, ao optar por uma prova pragmática para demonstrar a propriedade, considera que tanto os métodos indutivos quanto empíricos podem validar propriedades universais.

Quanto aos outros sujeitos que consideraram um dos métodos empíricos como uma demonstração da propriedade, quatro sujeitos (Z11 – Cuco, Z7 – Ofélia, Z13 – Elísio e Z14 - Fred) alteraram suas respostas em entrevista, mas seus discursos não mostram muita clareza em relação à validade das provas propostas.

Vejamos alguns extratos de suas respostas:

Pesquisador *– Quais são algumas das regras básicas que se devem observar para a construção de uma demonstração? Você já disse que a técnica para validar é a demonstração. Quais são algumas das regras básicas para a construção de uma demonstração?*

Cuco *– É preciso conhecer...*
Pesquisador *– Sim, sim, é aquilo que eu perguntei no início: aspectos que você procura quando vai para uma prova, argumentos que você segue para dizer que esta é uma demonstração, ou esta não é uma demonstração. São esses aspectos só.*
Cuco *– Tenho de dizer argumentos que justificam uma dada afirmação.*
Pesquisador *– E depois, qual é outra coisa?*
Cuco *– Outra técnica doutor...*
Pesquisador *– Não técnica, outra regra básica.*
Cuco *– [...] talvez podemos validar por construção. Construir uma figura qualquer, mas também justificar, ou seja, usar aquelas coisas que nós habituamos tabela de duas colunas.*

A última resposta de Cuco ilustra essa falta de clareza sobre o que de fato, em matemática, é considerado como demonstração, ao afirmar que podemos validar por construção.

Já a entrevista com Fred deixou as seguintes ideias:

Pesquisador *- [...], eu vou falar em termos gerais um pouco. Os primeiros sete métodos apresentados, o senhor acha que todos eles validam a propriedade. O que é que todos estes métodos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 têm de comum?*
Fred *– Que têm de comum?*
Pesquisador *– Sim, para achar que eles validam? Escreveu aqui*
Fred *– Eu disse que 7 valida mas será trabalhoso para o professor. 3 eu penso que valida porque são modos palpáveis, dinâmicos, concretos num ambiente de ensino ativo, é método 6. Iya. Feita a análise, eu não sei como é que eu considerei responder assim porque de fato carece-me de instrumentos, de elementos essenciais para a sua validação.*
Pesquisador *– Então, quais são os métodos aqui que acha que validam aquela propriedade?*
Fred *– Iya, eu poderia destacar este método 3, por isso eu acabei dizendo este método 3, eu achei como mais prático. [...]. Tem, por exemplo, tem a presença de paralelismo, e tem ângulo raso, e tem aqueles ângulos internos, também pode-se extrair ângulo externo a partir daí. [...]. No método 2 também pode validar porque este é prático e no ensino secundário é usado este para demonstrar porque aqui há o teorema do ângulo externo, nesta figura aqui poderia ter até ângulo externo, o que poderia logo validar o que está lá*.

Vemos aqui uma posição que mostra que nosso interlocutor considera os métodos 2 e 3 válidos, não por razões matemáticas, mas porque eles são usados no ensino secundário.

Pesquisador *– E o método 4?*
Fred *– Eh, o método 4 já que usando o software Geogebra, seria mais prático porque com Geogebra as conclusões aparecem por si mesmo.*
Pesquisador *– Está bom, aparecem. Mas são justificadas essas conclusões?*
Fred *– Só que não são justificadas.*

Pesquisador *– Então, nesse caso, Geogebra dispensa demonstrações ou não?*
Fred *– Iya, coisa, Geogebra dispensa algumas demonstrações.*

Embora Fred não tenha incluído o método 4 no grupo dos dois (2 e 3) acha que o método 4 baseado em GeoGebra pode dispensar a demonstração da propriedade em discussão, mas, não apresenta uma justificação plausível.

Vejamos mais o que ele diz:

Fred *– Estão a ver sozinhos, então.*
Pesquisador *– É demonstração?*
Fred *– Não pode ser demonstração.*
Pesquisador *– Então, dispensa ou não?*
Fred *– Dispensa.*
Pesquisador *– E se ele pergunta porque a soma é 180?*
Fred *– Mas GeoGebra não é capaz de justificar, não é capaz, só faz, colocar ali e sai essa propriedade, mas ele não pode destrocar em quinhentas ao aluno.*

Fred ao afirmar "não pode destrocar em quinhentas", queria dizer que o software por si, não explica nada, precisa de algum ser humano para explicar os resultados que vão aparecendo.

Pesquisador *– Então, este método 4, válida ou não?*
Fred *– Não.*

Fred reconhece que o método 4 não valida a propriedade, mas acha que esse método dispensa demonstração.

Agora vejamos algumas das respostas sobre a rejeição deste ou daquele método.

Começando pelo método 1

Gomes: "*não havendo transferidor nada irá provar a propriedade".*

- Elísio: "[...] *porque se formos a usar o método, teremos muitas dificuldades nas crianças perceber, para além disso, o método é complicado usar transferidor*".

- Getúlio: "*a partir de um único exemplo não podemos generalizar*".

A última justificação, a de Getúlio, parece mostrar que, em Matemática, podemos generalizar uma dada conjectura desde que o número de exemplos seja suficientemente elevado.

- Paulo: "visto que as medidas podem não ser exatas".

Todas as justificações transcritas mostram que apesar dos seus autores terem percebido que o método de medição dos ângulos por compasso não demonstra que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo dá

180°, suas justificações centram-se no instrumento utilizado ou no número de experimentos.

Procuramos perceber bem o teor de algumas das justificações em entrevista. Eis algumas das respostas obtidas.

Pesquisador *– Ok. Em algum momento do questionário teve que responder, [...], teve que avaliar certo número de argumentos. Havia algumas tarefas teve que avaliar alguns conjuntos de ... procurava-se saber se aquilo validava ou não uma dada propriedade.*

Kelmon *– <u>Na verdade foi difícil avaliar, foi difícil porque parecia tudo estar certo, e, portanto foi difícil.</u> Então, para mim, eu usava mais às vezes o que o aluno dizia e a figura que estava lá. Às vezes havia uma figura, então o que ele estava a dizer e a figura que estava lá. Avaliava mais isso e o que ele desenhou. [...].*

Pesquisador *– Ok. Eu vou especificamente, apesar de ter dito que foi difícil, eu vou ... então significa que a escolha foi aleatória, não é porque foi consistente?*

Kelmon *– Muito consistente não se conta. Sinceramente falando. [...]. Acho que não serei capaz de satisfazer, porque eu escolhi, aceitei, porque não aceitei.*

Quando perguntamos acerca do método 1 da tarefa 4, ele nos respondeu da seguinte maneira:

Kelmon – [...] este primeiro caso, "*desenha um triângulo e mede os ângulos internos com transferidor. Se a soma dos três ângulos der 180, então provaste a propriedade" – [lê o enunciado do método]. Acho que não é seguro, ele pode medir mal, não dar, então, vamos dizer que a soma das medidas dos ângulos internos não dá 180? Então, eu acho que não era seguro, não é consistente.*

O Elísio respondeu da seguinte maneira:

Elísio – [...] *o método 1 não considerei porque obriga muitos passos.*

Pesquisador – *Obriga muitos passos*?

Elísio *– Exemplo, diz, desenha qualquer triângulo e mede os ângulos internos. [...]. Não é fácil fazer, você pode falhar ... Se a soma dos três ângulos der 180° então provaste a proposição.*

Perguntamos a Herculano em termos gerais o que considerou pertinente para aceitar ou não um dado método. Eis a conversa:

P*esquisador* *– [...]. Vamos especificamente a algumas tarefas que você realizou nessa avaliação. Por exemplo, indo para a tarefa 4 o que é que considerou ser pertinente, para esta tarefa que falava da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. O que achou ser pertinente para aceitar ou rejeitar um dado método?*

Herculano *– Posso falar sobre cada método?*

Pesquisador *– Se acha que pode, pode ser assim; quer falar duma* *maneira geral, pode.*

***Herculano** – Sim, mas eu, aqui se fala de prova, não é? Eu acho que este método, o método 6 é mais claro. Aqui se usa aquela técnica de recorte, não é, então aqui recortando os ângulos do triângulo e colocando duma maneira que se encaixem dá para ver que a soma, que os três ângulos formam um único de 180. E aqui é já fácil provar que de fato a soma dos três ângulos é igual a 180°. Então, o método 9, por exemplo, este método para mim, para usar é muito difícil explicar este método.*

***Pesquisador** – Porque acha é muito difícil?*

***Herculano** – Sim, porque a forma que pode ser <u>usada para demonstração</u>. (Sublinhado nosso).*

***Pesquisador** – Agora, por exemplo, para estes primeiros métodos.*

***Herculano** – Sim, no método 1, aqui diz: medir com transferidor. Então, acho que com esse método o estudante, o aluno fica dependente do transferidor. <u>Se não tiver transferidor não vai conseguir provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°</u>. [...] Então, neste segundo, neste segundo eu achei também pertinente porque aqui para provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um determinado triângulo recorre-se a uma reta auxiliar, aplica-se a propriedade dos ângulos alternos formados em [...], em duas paralelas por uma reta transversal; o método 3 também usa a mesma propriedade e também pode-se usar para provar a proposição. O método 4 pode ser usado para demonstrar só que é um método limitado depende já das condições que nós temos. Por mim, eu poderia usar este método na sala de aulas temos condições para tal (*sublinhado nosso*).*

Em algumas passagens Herculano parece se contradizer, ora aceita manipulação de material como forma de validação da propriedade, ora não aceita. Parece apoiar sua interpretação no material utilizado e não no método seguido.

Tanto as rejeições como as aceitações desses métodos não parecem ter sido apoiadas em conhecimento matemático fatual que as expliquem tal como assumido por Kelmon.

As respostas dadas por Kelmon, Elísio e Herculano revelam claramente que eles não sabem as razões matemáticas de ter aceitado ou não um método como demonstração. Kelmon disse claramente que não estava em condições de explicar ou justificar a validade do método.

Para os que aceitam o método 1 como uma forma de validação da propriedade, temos os seguintes exemplos:

- Fernão afirma que o método é uma demonstração *"pelo fato de usar transferidor para provar";*
- Iran afirma que o Método 1 é uma demonstração *"porque se medirmos os ângulos internos de qualquer triângulo não viciado[30] e com qualquer*

[30] Triângulo não degenerado.

transferidor também não viciado teremos amplitude total de 180°".

Fred que mudou na entrevista escreveu o seguinte no dia de resposta ao questionário: *"o argumento apresentado valida porque desenhando qualquer tipo de triângulo realmente é igual a 180°".*

Na tabela 1, apresentamos o resumo das respostas que obtivemos da tarefa para melhor confrontação dos dados mais relevantes.

Tabela 1 - Resumo das respostas à classificação dos Métodos

Tipo de Método	Método	Aceitaram o Método	Rejeitaram o Método	Resposta não clara	Total de Respostas
Empírico	1	6	12	1	19
Dedutivo	2	15	4	-	19
Dedutivo	3	15	3	1	19
Empírico	4	11	5	1	19
Empírico	5	13	5	1	19
Empírico	6	15	3	1	19
Dedutivo	7	12	6	1	19
Empírico	8	10	7	2	19
Empírico	9	6	8	5	19

Fonte: Dados da pesquisa

Observando o resumo (Tabela 1) das classificações dos Métodos apresentados quanto à validação da propriedade acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, notamos que dois métodos dedutivos (2 e 3) foram reconhecidos por quinze dos participantes da pesquisa. Do ponto de vista conceitual, esperávamos que esse resultado significasse um conhecimento de que apenas métodos dedutivos validam propriedade universal para a classe de objetos gozando dessa propriedade. Porém, analisando mais atentamente os dados da tabela, vemos que também um método empírico – Método 6 – teve a mesma proporção de aceitação – 15/19 – como método que também valida a mesma propriedade.

Em uma passagem de entrevista que procurava saber em que consistiam as demonstrações em geometria na escola secundária, constatamos uma fala bastante significativa de Dário.

***Dário**: - Consiste em base no exercício que queremos resolver.*

***Pesquisador** – Por exemplo, quando estamos falando da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.*

***Dário** - Primeiro tem a ver que tipo de triângulo é, neste caso, por exemplo, queremos demonstrar que [...] se estamos perante de um triângulo neste caso, por exemplo, demonstrar que [...] se estamos perante de um triângulo, neste caso vou falar muito de triângulo e queremos demonstrar isso que disse, a soma das medidas dos ângulos internos é cento e oitenta graus, primeiro temos que [....] primeiro conhecemos os nossos alunos das escolas, primeiro temos de dizer que <u>tipo de triângulo é</u>.*

***Pesquisador** – Quer dizer que a demonstração tem a ver com o tipo de triângulo?*

***Dário** – A demonstração não tem a ver com o tipo de triângulo, mas eu acho que se o aluno sabe o tipo de triângulo, porque os alunos têm aquela ideia de que [...] primeiro conhecem os triângulos, quais são os triângulos, quais são os triângulos. Eles conhecem os triângulos: este é triângulo, este é triângulo. Então a demonstração não pode ser só feita num único triângulo. É isso que eu estava a dizer, porque [...].*

***Pesquisador** – Deve ser feita em quantos triângulos? - questionamos.*

***Dário** – Quando queremos demonstrar são três tipos de triângulos que nós conhecemos, são três tipos. Então, se nós, por exemplo, demonstramos um certo tipo de teorema com base num único triângulo, claro <u>que o aluno pode pensar que essa demonstração só serve para aquele triângulo</u>. Então, eu acho que a demonstração lá nas escolas secundárias tem que ser feita com base nos diferentes tipos de triângulo. É por isso que estou a falar de equilátero, pode ser escaleno [...]. Então tem de ser feita nesses triângulos.*

***Pesquisador** – Então ao falar, por exemplo, da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos tem de utilizar [...]?*

***Dário** – [...] um triângulo escaleno, um triângulo isósceles [...] para amanhã não vir surpreender o aluno com um triângulo escaleno enquanto ele não fez um exemplo com um triângulo equilátero, por exemplo. Eu acho que tem que ser feito assim.*

Dário acha que a demonstração será bem compreendida pelo aluno se ela for feita em diferentes triângulos, pois se for feita apenas em um único triângulo, o aluno pode pensar que essa demonstração só serve para aquele triângulo. Fred também transmite uma forte mensagem em relação ao método 2: reconheceu o método 2, porque ele é usado no ensino secundário para demonstrar a propriedade. Em nosso entendimento, Dário julga que uma demonstração é válida para a figura a que está associada e não a qualquer tipo de figura com características de um triângulo. Fred aceitou o método 2, porque é o que se usa na escola secundária, e não por reconhecer nele uma regra básica de uma demonstração.

Se relacionarmos as ideias de Fred, Dário e Herculano, as respostas dadas na tarefa 1 item **b** e em seguida estabelecermos uma ligação com as respostas relacionadas com a validade dos três métodos (2, 3 e 6), vemos que essas respostas convergem para o mesmo tipo de conclusão a que chegamos no que diz respeito ao método mais comum entre os sujeitos da pesquisa com o método apresentado por Amaral e Nhalungo (s/d, p. 132): os três métodos foram mais apontados como validando a propriedade não porque se reconheceu neles um forte potencial matemático, mas porque são os mais presentes em livros didáticos de Moçambique. Do ponto de vista da teoria dos paradigmas e espaço de trabalho geométricos, simplesmente é porque os três métodos fazem parte do ETG institucional em Moçambique e quanto ao esquema de provas é uma manifestação de prova autoritária segundo Harel e Sowder (1998, 2007).

Esta conclusão encontra subsídio, porque na introdução, já fizemos menção de que Ordem (2010) constatou que livros didáticos de Moçambique validam a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo recorrendo basicamente a atividades de recorte e dobradura. Não só isso, como também esse método foi utilizado na resolução do item **b** da tarefa 1 por parte de alguns sujeitos do presente estudo para além de ter sido mencionado por outros em entrevista (vide casos da Ofélia, Kelmon, Luís, Dário).

Resumo da análise da tarefa: Os resultados da tarefa mostram que as respostas dos nossos sujeitos se basearam mais no que veem nos livros didáticos do que no reconhecimento das regras de como se constrói uma demonstração bem feita em matemática.

5.5. Análise da tarefa 6. Procurando a validade dos argumentos

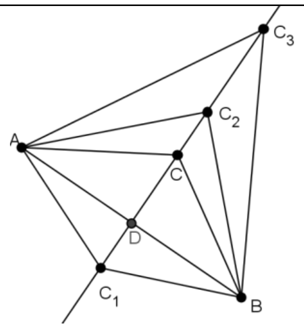
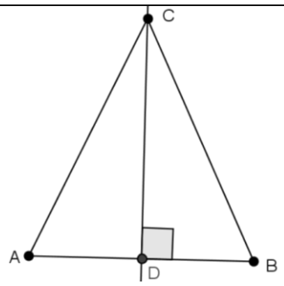
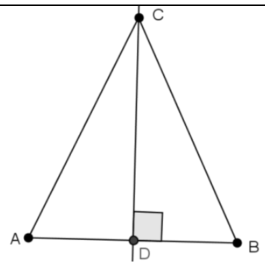
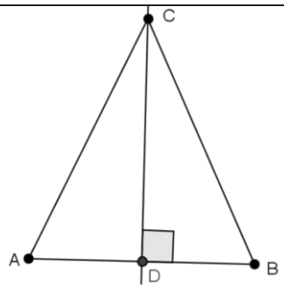
5.5.1. Análise *a priori* da tarefa 6

Seja AB um segmento qualquer. Seja C um ponto qualquer de sua mediatriz.

Afirmação: O triângulo ABC é sempre isósceles.

Quatro alunos deram as seguintes justificativas:

Quadro 6 - Métodos propostos

a. (da Silvia): Eu movi C sobre a mediatriz para diferentes posições. Medindo os segmentos AC e BC, constatei que sempre têm medidas iguais, então os triângulos são isósceles.	
b. (de Jens): med(A$\widehat{D}$C) = 90° - reta perpendicular med(B$\widehat{D}$C) = 90° - reta perpendicular C$\hat{A}$B ≅ C$\hat{B}$D – ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. **Conclusão**: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. A proposição é verdadeira.	
c. (de Ernesto) Consideremos os triângulos ACD e BCD 1. $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ – lado comum 2. $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ – mediatriz de um segmento passa pelo seu ponto médio; 3. A$\widehat{D}$C ≅ B$\widehat{D}$C – mediatriz de um segmento é perpendicular ao segmento. 4. ∆ACD ≅ ∆BCD – pelo caso LAL. Se dois triângulos são congruentes, seus elementos correspondentes são congruentes; portanto: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, c.q.d.	
d. (de Moisés): Consideremos o segmento AB com a sua mediatriz CD, onde C não pertencente a $\overline{AB}$. 1. Já que $\overleftrightarrow{CD}$ é mediatriz de $\overline{AB}$, então $\overleftrightarrow{CD}$ é eixo de simetria do segmento AB; 2. C é simétrico de si mesmo porque é ponto do eixo de simetria; 3. A é simétrico de B e vice-versa já que são os extremos do segmento cujo eixo de simetria é $\overleftrightarrow{CD}$; 4. $\overline{AC}$ é simétrico de $\overline{BC}$ dado que seus pontos são simétricos dois a dois, portanto, AC = BC, pois segmentos simétricos têm a mesma medida. Mas os pontos A, B e C são colineares dois a dois, portanto determinam o ∆ABC. Então, ∆ABC é isósceles já que tem dois lados congruentes. Mas C é um ponto qualquer da mediatriz do segmento AB. ⇒ Qualquer ponto da mediatriz de um segmento AB determina com os extremos A e B um triângulo isósceles, c.q.d.	

Fonte: O autor

Questão: Qual a validade de cada uma das soluções **a**, **b**, **c** e **d** para a afirmação dada? Justificar sua resposta para cada caso. Se achar que algum aluno errou, identifique o que está errado. Neste caso, o que faria para minimizar este tipo de erro?

Esta atividade tem por objetivos: (1) verificar que argumentos os estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática utilizam para aceitarem que uma dada prova é válida; (2) verificar que estrutura de uma prova é aceita facilmente como válida por estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática.

Uma conjectura que envolve propriedades da mediatriz de um segmento de reta e sua validação passa pelo uso dos casos de congruência de triângulos ou do uso das propriedades da simetria axial (reflexão).

Prova da Silvia: Ela utiliza um instrumento (*software*) para tentar validar a conjectura; serve-se de evidências empíricas para tirar conclusões e a dedução que ela faz baseia-se em experimentos. O ETG é norteado por procedimentos da Geometria natural (GI). Dado que a validação se baseia na utilização de artefato, o nível de prova é pragmático na sua forma de empirismo ingênuo, e quanto aos esquemas, ela é de natureza indutiva. A prova da Silvia, sendo de natureza empírica, não valida a conjectura, ela é apenas uma simples constatação.

Prova de Jens: Essa prova contém um discurso cujo espaço de trabalho geométrico parece ser norteado pela Geometria axiomática natural (GII). Mas, em nosso ponto de vista, ela não segue as regras de dedução que regem essa geometria. A autora dessa prova usa o conceito de triângulo isósceles como fato estabelecido, enquanto que a tarefa é exatamente estabelecer esse conceito por dedução. Seu raciocínio contém um argumento circular. A resolução contém erro lógico, portanto, não pode ser aceita como prova correta.

Prova de Ernesto: O discurso de Ernesto mobiliza as propriedades da mediatriz (intersectar o segmento de reta de forma perpendicular e pelo seu ponto médio) e os critérios de congruência de triângulos. Ele deduz a propriedade incorporada na conjectura como decorrência das propriedades que se estabelecem entre dois triângulos congruentes. O ETG individual de Ernesto apoia-se na Geometria axiomática natural (GII), pois ele utilizou convenientemente a articulação entre a gênese instrumental e a discursiva. Sua prova é de natureza intelectual, e quanto a esquemas, ela é de natureza axiomática. Ernesto consegue validar a afirmação segundo a qual se AB é um segmento de reta e C um ponto qualquer de sua mediatriz (C $\notin$ AB), então ABC é um triângulo isósceles.

Prova de Moisés: A resolução de Moisés mobiliza vários conceitos geométricos: conceito de mediatriz, de simetria e eixo de simetria, propriedades da simetria (axial ou reflexão) e a relação entre eixo de simetria e a mediatriz de um segmento de reta. Todos esses conceitos são da Geometria axiomática (natural e formal). Ele utilizou a figura para a exploração heurística e a prova realizada baseou-se na articulação dos diferentes conceitos que mobilizou. A prova é intelectual e quanto ao esquema, ela é de natureza axiomática. A conclusão que tira é o resultado dos passos anteriormente apresentados e não diz respeito apenas à figura apresentada, mas a qualquer triângulo.

Das análises de cada uma das produções apresentadas, concluímos que só as provas c e d validam a conjectura.

Apesar dessa tarefa parecer simples, ela pode induzir em um argumento circular, o que é um dos erros apontados por alguns autores, como Heinze e Reiss (2003) . É por essa razão que a escolhemos para avaliar se os futuros professores estão conscientes desse fato. Uma das razões de nossa escolha é fato de vários autores afirmarem que, entre alunos, é mais fácil apontar prova correta do que construí-la (HEALY e HOYLES, 1998; HEINZE e KWAK, 2002).

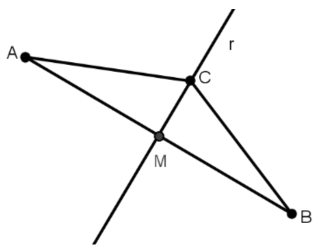
Uma tarefa desse tipo (Figura 66) é apresentada em livro de Moçambique.

Figura 66 - Ilustração do problema

Na Figura, r é a mediatriz de $\overline{AB}$.

(a) Prove que os triângulos AMC e BMC são congruentes.

(b) Sabendo que AC = 13 cm e AM = 12 cm, determine o perímetro e a área do triângulo ABC.



Fonte: Abrantes e Carvalho (1989, p. 32)

O item (a) pode ser resolvido recorrendo a qualquer um dos métodos propostos na tarefa 6. Ao propormos esse item, pretendíamos verificar se os sujeitos da nossa pesquisa vão ter essa consciência, mas acima de tudo, queríamos investigar se poderiam ou não cair no erro de usar a tese como argumento tal como aparece na resolução (b) de Jens. É uma tarefa cuja solução envolve as propriedades de mediatriz de um segmento de reta, o teorema de Pitágoras, as propriedades de um triângulo isósceles e a noção de raiz quadrada.

Com o item **b,** pretendíamos descobrir como os sujeitos iriam usar as propriedades da mediatriz de um segmento de reta. Contudo, para além das propriedades da mediatriz de um segmento de reta, este item apela para o uso do teorema de Pitágoras para determinação da área do triângulo. Assim, esperava-se como procedimento da resolução do item, o seguinte:

Sendo CM mediatriz de AB, então $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, pois o ΔABC é isósceles. Logo, AC=BC=13 cm.

$\overline{AM} \cong \overline{BM}$, uma vez que o ponto M por onde passa a mediatriz é ponto médio do segmento. Logo, AM=BM= 12 cm.

Portanto o perímetro ΔABC = 2.12 + 2.13 = 24 + 26= 50. O perímetro do triângulo é de 50 cm.

Tomando para base do triângulo ABC o lado AB cuja medida é 24 cm, precisamos determinar a altura relativa a essa base. Como por definição a altura de um triângulo relativa a uma base, é o segmento da perpendicular baixada do vértice oposto para esse lado, então, a altura é $\overline{MC}$.

Utilizando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos retângulos, temos:

$AM^2 + MC^2 = AC^2 \Rightarrow MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$. Portanto, MC = 5 cm. Daqui segue que AΔABC = $\frac{24^2 \times 5^2}{2}$ = 7200. Logo, a área do triângulo ABC é de 7200 cm^2.

Esses procedimentos são característicos da Geometria axiomática natural na qual algumas propriedades são deduzidas e outras são assumidas. A tarefa é adequada para fornecer dados para a questão 3.

5.5.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 6

A tarefa procura analisar os argumentos que os estudantes, sujeitos da pesquisa, formulam para aceitar ou rejeitar as demonstrações apresentadas nessa tarefa.

Prova a: Tal como destacamos na análise a *priori*, esta prova baseia-se em evidências empíricas para tirar conclusões, portanto, é própria da Geometria natural (GI). As respostas dos sujeitos da pesquisa distribuem-se da seguinte maneira:

- Apenas seis sujeitos (Emerson, Gomes, Ofélia, Amorim, Fred e Jackson) reconheceram que a prova **a**, baseada em construções com *software*, não valida a conjectura.
- Amorim, na sua tentativa de explicação, apenas se interroga: "*ele baseou nos triângulos, e os que não mediu*?" Numa clara alusão de que basear-se em exemplos não garante a generalização.
- Jackson apresentou também uma explicação plausível ao afirmar o seguinte: "*não exibiu um raciocínio lógico para justificar a afirmação, o que a um dado momento não seria possível trabalhar com todos os pontos da mediatriz do segmento e tirar conclusões que a sua justificação é váli*da". Também aqui vemos que Jackson parece argumentar que os exemplos, que serviram de apoio, não garantem a generalidade da afirmação.
- Quanto à Ofélia, ela afirma que: "*para a solução* ***a*** *notei que não se realizou nenhuma demonstração, porque não foi usado nenhum axioma, muito menos teorema*". Ela invoca também algumas das características rituais que indicam uma ação de uma demonstração.

A partir dos argumentos desses alunos, podemos afirmar que eles entenderam porque a prova por figura não valida a conjectura. O que vem de encontro com suas produções quando foram convidados a demonstrar propriedades geométricas nas situações anteriores.

Ao contrário dos alunos supracitados, catorze dos vinte sujeitos que responderam a questão, consideraram que a prova proposta valida a conjectura, ou deram uma resposta que dá indícios de aceitarem os exemplos como demonstração. Os estudantes Dário, Fernão, Iran, Baú, Cuco, Dário, Luís e Kelmon afirmaram claramente que a prova **a** valida a conjectura, enquanto que os outros deram respostas não muito claras, mas mostram que a aceitam como válida a prova proposta.

O aluno Iram escreveu o seguinte: "*é uma demonstração pois através da figura ilustra-se a veracidade pelo método de 'tentativa'*", enquanto Kelmon deixou registrado "(a) *valida a afirmação, visto que os triângulos dados são isósceles*" e Fernão: "*valida-se a partir da medição feita nos diferentes* *movimentos porque dois lados movidos através do ponto C são iguais então o argumento é verdadeiro pois o triângulo isósceles deve ter dois lados iguais*".

Essas respostas mostram que as medições são vistas como provas contundentes da propriedade de triângulos isósceles, mas não especulações que careciam de explicações matemáticas. As seguintes respostas ilustram isso:

- Paulo escreveu o seguinte: "*a afirmação é válida porque sendo C um ponto da mediatriz significa que divide o segmento em dois lados congruentes, traçando uma reta perpendicular os triângulos nele constituídos serão sempre isósceles*"
- Cuco, por sua vez escreveu: "*valido; sempre que temos mediatriz de um segmento, C qualquer ponto desta mediatriz, forma dois lados simétricos e iguais, então é um triângulo isósceles*"
- Getúlio, disse: "*a afirmação é válida, mas seria difícil de generalizar porque precisaria de muitos experimentos para sua validação ger*al". Getúlio percebe algo não muito bem, mas não parece seguro de que exemplos não validam propriedades matemáticas, julgando que quando forem em número suficientemente grande podem ser consideradas como instrumentos de validação matemática.

Em entrevista procuramos entender algumas das respostas.

A primeira conversa que apresentamos é com Cuco que respondeu "valido [...]". Em entrevista ele mudou de posição justificando que não percebera bem o teor do pedido.

***Cuco** – Não, ... vou ler, se não vou falar a toa. São quatro. Quer se saber se são demonstrações ou não. Por exemplo, a prova a, ele disse que moveu, colocou o ponto aqui na mediatriz, até não disse se traçou perpendicular ou não...*

***Pesquisador** – Mas é preciso dizer?*

***Cuco** – Não, não é preciso dizer.*

***Pesquisador** – Por que não é preciso dizer que traçou perpendicular, apenas falou da mediatriz?*

***Cuco** – Mediatriz é já quando é perpendicular.*

***Pesquisado**r – Ok.*

***Cuco** – Então, ele disse ao longo da mediatriz começou a mudar as posições de C. Ele disse que constatei que sempre as medidas são iguais. Ele constatou. O constatar dele independentemente que sejam infinitas deslocações do ponto C não lhe leva a concluir que sempre o triângulo será isósceles. Então, é por isso que nós estamos a dizer, ou que eu estou sempre a dizer que carece duma certa demonstração.*

***Pesquisador** – Então, não é uma demonstração? Então, porque você* *colocou que validava?*

***Cuco** – Talvez a percepção da pergunta, porque eu tentava detalhar um pouco, [...] até porque o doutor não disse se era para validar o procedimento ou não.*

***Pesquisador** – Não. Mas é por isso que eu coloquei: está aqui: qual a validade de cada uma das afirmações a, b, c, d para a afirmação.*

***Cuco** – Significa que tem de existir procedimentos em que se possa dizer que sim, isto é válido. [...] demonstração não é.*

***Pesquisador** – Ok. Por que não é demonstração? aquela prova **a** [...]?*

***Cuco** – Ele disse que deslocou ... constatou que sempre as medidas são iguais. Assim, talvez um sistema de* software *é possível ver, mas eu basta deslocar a olho nu é possível parece que são iguais, enquanto não são iguais. Então dizer que constatei que sempre as medidas são iguais, então os triângulos são isósceles, só palavras, por mim deveria existir alguns procedimentos.*

O nosso interlocutor parece não seguro em sua resposta.

***Pesquisador** – Você disse que se fosse* software *você aceitaria que é uma demonstração?*

***Cuco** – Nada, não é uma demonstração.*

***Pesquisador** – Apenas uma coisa pequenina: você não precisa muita coisa assim. Por que acha que esse procedimento aí não é uma demonstração?*

***Cuco** – Não, este procedimento eu acho que não é uma demonstração porque ... está bom vou dizer: carece de alguns, até nem vou dizer carecer também de alguns argumentos com fundamentos porque ele já disse: ele só constatou. Então, se ele constatou é porque ele tem firmeza de que sempre é assim.*

Como vemos na última fala, nosso interlocutor não parece bem ciente do que está avaliar: se a prova **a,** baseada em medições, valida a afirmação para todos casos nos quais ela funciona, ou não.

***Pesquisador** – Não aí você ... no início .... não, há uma coisa que você disse no início que é relevante, só que depois pôs muitas palavras e acabei não percebendo, até por você falou que mesmo que seja ...*

***Cuco** – quantas vezes.*

***Pesquisador** – É isso que eu quero, só uma coisa pequenina. Por que acha que não é uma demonstração?*

***Cuco** – Ele o que utilizou, mas é só medidas.*

***Pesquisador** – Medição.*

***Cuco** – Sim, medição.*

***Pesquisador** – Então, se é medição, exemplos nesse caso aí. Exemplos para si não constituem demonstração?*

***Cuco** – Não, medições não são demonstrações.*

Apresentamos um extrato longo da entrevista, simplesmente para mostrarmos que o nosso interlocutor, apesar de ter mudado de posição, ainda não tem muita clareza que provas baseadas em medições, exemplos, não são aceites como demonstração em matemática.

Apenas a Ofélia deu uma resposta consistente, como pode ser percebido na resposta: *Porque aqui* (apontando a prova **a**) *ele diz que move o ponto C sobre a mediatriz. [...] pelo meu parecer fosse para basear-se em demonstrações, poderíamos negar essa como demonstração porque ele fez isto duma forma mecânica, fez verificações. Muitas vezes, por aquilo que eu percebo, demonstrações não se tem baseado em verificações*.

Pesquisador *– Ok. Portanto, verificações não são demonstrações.*
Ofélia *– Não*.

Contudo, esse ponto de vista não está presente nos outros sujeitos como, por exemplo, Fernão que nos dá a seguinte afirmação:

Fernão *– Eu penso que pode validar*
Pesquisador *– A pergunta é: válida ou não?*
Fernão *– Valida.*
Pesquisador *– Por quê?*

O nosso interlocutor não responde de forma direta à pergunta.

Fernão *– Aqui a questão é de triângulo ser isósceles, mas com este "condicionalismo" do segmento AB e C ser um ponto qualquer da mediatriz.*
Pesquisador *– Sim. Por que acha que este método valida esta afirmação?*
Fernão *– Eu olhei exatamente a figura. Olhei ABC, esta figura –* apontando a ilustração apresentada no enunciado.
Pesquisador *– Mas há muitas figuras aqui.*
Fernão *– [...]. São tantos triângulos e todos esses triângulos são isósceles.*
Pesquisador *– Só pelo processo de medição constatar que os lados são congruentes, isso prova que os triângulos são isósceles.*
Fernão *– Pode provar.*
Pesquisador *– Não, não é pode provar. Aí a ideia é: é uma prova ou não é prova? A pergunta que se coloca não é que pode, é uma coisa que tem ser feita agora ou depois. A ideia é: esta é uma demonstração?*
Fernão *– Sim.*
Pesquisador *– Para si é?*
Fernão *– É.*

Ao longo de nossa conversa, temos utilizado mais a palavra "prova", mas foi no sentido demonstração. Na entrevista acima, percebemos que Fernão não faz a diferença entre verificações empíricas e explicações baseadas em conceitos matemáticos.

Outro sujeito que afirma que a prova **a** validava a conjectura é o Dário. Em entrevista, ele disse o seguinte:

Dário *– Sim, este aqui eu disse é verdadeira porque ele [...] Aqui o ponto*

A, os pontos A e B são fixos, não é? Então o que move aqui é o ponto C.

***Pesquisador** – Sim, que está na mediatriz.*

***Dário** – Está na mediatriz neste caso. Então pega C puxa aqui e verificou que se estes são fixos e este está na mediatriz é claro que sempre vai ser triângulo isósceles.*

Tentamos continuar com a entrevista, mas Dário não mudou de postura, continuou defendo que a prova era válida. Como tínhamos outros itens da tarefa, preferimos deixá-lo assim.

Quanto à prova **(b)**, nove sujeitos (Emerson, Gomes, Ofélia, Paulo, Amorim, Fred, Getúlio, Jackson e Cuco) a reconheceram que ela não é válida. Entre as justificativas apresentadas, destacamos as seguintes:

***Getúlio**: "não é válida por ter afirmado que ângulo CAB ≅ ângulo CBD e ter justificado que isto é verdade porque são ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, porque a questão era de mostrar que o ∆ABC é isósceles. Em outras palavras, este aluno usou a tese como argumento".*

***Amorim**: "Solução b não valida, porque ele usou um argumento da tese para justificar a própria tese".*

***Paulo**: "esta afirmação não é válida porque o que se pede é mostrar que os triângulos neles formados são sempre isósceles. O erro é de concluir que os triângulos são isósceles para demonstrar que AC ≅ BC".*

Nestes três extratos percebe-se que, apesar de algum deslize em algumas partes, a ideia é terem constatado que foi utilizada a conclusão a tirar (a tese) como argumento. Com efeito, em entrevista, Ofélia disse o seguinte:

***Ofélia** – [...] diz que o ângulo CAB é igual ao ângulo CBD , diz ele pela perpendicularidade, CD é perpendicular ao segmento AB. Este é um conceito que já existe na matemática que já foi dado. [...]. Depois diz o ângulo CAB é congruente ao ângulo CBD. Ele afirmou isso e depois ... que ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. [Para e sorri]. <u>Agora este é triângulo já dado</u>. Foi afirmado que é isósceles? [Fica algum tempo calada], mas aqui foi afirmado que é sempre isósceles, não é suficiente a gente afirmar que este triângulo é isósceles. (Grifo nosso).*

Quando a Ofélia afirma que "este é triângulo já dado", parece que quis simplesmente dizer que aquele argumento só poderia aparecer como está, se o pedido não fosse de demonstrar que o triângulo é isósceles.

***Pesquisador** – [...] aqui a ideia é fazer o quê?*

***Ofélia** – É para demonstrar. Então não nos é permitido a gente usar esse conceito de triângulo isósceles antes de primeiro a gente mostrar. Porque o que é que ele devia fazer inicialmente tinha de levar outros conceitos que pudessem lhe permitir afirmar mais tarde que este triângulo é isósceles e estar acima desta afirmação. Depois é que poderia usar a partir que ele ... aqui em cima usado esses teoremas é que diria que o triângulo é isósceles, [...] antes não é* *permissível.*

Pela explicação dada por Ofélia, percebe-se que ela entendeu o equívoco de usar a tese como argumento para fazer a demonstração.

Cuco, apesar da imprecisão na formulação de suas afirmações *“Não valido; no passo 3 usa tese para demonstração os seus componentes, nada nos confirma até aí é triângulo isóscele*s”, entendemos que ele queria dizer que a prova não valida a conjectura, porque no passo 3 foi usada a própria tese como argumento.

Onze sujeitos não conseguiram detectar o erro ao considerar prova válida. Trata-se de Dionísio, Iran, Nilza, Herculano, Kelmon, Fernão, Baú, Dário, Elísio, Ludovico e Luís. Este fato vem corroborar alguns resultados revisados como os de Heinze e Reiss (2003) segundo os quais, em uma situação em que os alunos tiveram que avaliar quatro provas, uma delas com argumento circular, os alunos não percebiam esse argumento na solução que continha esse erro. Uma parte de nossos sujeitos de pesquisa formularam respostas que dão indícios forte de que eles aceitavam a prova. Deste grupo apresentamos como exemplo os argumentos de Herculano, Kelmon, Ludovico e Dário:

***Herculano** - a solução **b** é válida “mas ela traz na demonstração uma premissa desnecessária visto que todas mediatrizes são perpendiculares as retas que elas dividem”.*

***Kelmon** - “não era necessário dizer med ∡BDC = 90°, perpendicular, visto que já havia dito med ∡ ADC = 90º. Mesmo assim valida a afirmação dada”.*

Os dois sujeitos centraram-se em argumentos que não são essenciais para a validade dos argumentos, no lugar de avaliar todos os passos apresentados, restringiram-se em um passo não relevante para julgar se a prova é válida ou não.

***Ludovico** - “Concordo com a justificativa, pois se C está fixo em um ponto e C pertence a mediatriz basta notar que os ângulos da base são sempre iguais então isso mostra que a proposição é válida*”.

***Dário** - “prova **b** é verdadeira mas tem um pequeno erro porque dizer ∡CAB ≅ ∡CBD eu acho que é um pouco complicado, talvez dizermos ∆CAD ≅ ∆CBD*”.

Ludovico e Dário não parecem ter clareza do papel da tese em uma demonstração, ela só pode ser utilizada como hipótese, se ela já tivesse sido demonstrada em um passo de demonstração anterior.

Nessa entrevista, Dário continuou defendendo que a prova **b** estava bem feita e, quando fizemos comparação entre a prova **c** e a **b,** Dário respondeu que a **b** era melhor do que a **c,** conforme suas respostas abaixo.

Dário *– Esta – referindo-se a b - é quase idêntico, quase não foge.*
Pesquisador – Não, mas é diferente. Ele não mediu os lados – rebatemos.
Dário *– Sim, é diferente, ele não mediu os lados, mas viu que estes ... não, deixa-me ler um pouco. Aqui se formos a seguir sabemos que em triângulo isósceles a altura faz 90° com a base, não é, o segmento que une o vértice C a base daquele lado oposto, então faz noventa graus. Quando ele faz isso, eu acho que foi nesse sentido em que ele viu, quando traça àquela altura vê que este é triângulo retângulo, então, ele vai obter triângulo ser congruente a este. Por isso eu validei também*.
Pesquisador *– [...]. Por quê?*
Dário *– Ele diz este ângulo é congruente a este,*
Pesquisador – Qual a justificação que ele dá? [...]
Dário *– [...]. Ele diz que ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*
Pesquisador *– Este triângulo aqui é isósceles? Não é isso que quer mostrar?*
Dário *– Sim, é isósceles.*
Pesquisador *– Onde está? Não é isso que tem de justificar? Provar?*
Dário *– Mas está provado aqui quando diz que aqui é 90°.*
Pesquisador *– [...] ele está a dizer que estes dois ângulos são congruentes, porque estes dois lados são congruentes. Não é isso que ele tem de provar?*
Dário *– É para provar que é isósceles este aqui. Então, se ele diz que amplitude deste, amplitude deste são congruentes [...] também está demonstrar.*
Pesquisador *– Você não vê que ele está usar a ideia de isósceles para provar que o triângulo é isósceles?*

Dário continuou defendendo que a prova **b** valida que o triângulo é isósceles.

Passando para a prova **c** de Ernesto, dez sujeitos (Emerson, Gomes, Iran, Nilza, Ofélia, Amorim, Dário, Elísio, Getúlio, Jackson) reconheceram que ela é correta.

Alguns estudantes, embora tenham classificado a prova **c** como validando a conjectura, não chegaram a justificar suas respostas. É o caso de Emerson que escreveu: "[...] *prova **c** é uma demonstração muito correta, significa seguiu todos os passos de uma demonstraçã*o", ou Iran que escreveu: "**c** *é uma demonstração só que o nível de abstração é tão alt*o". Nas duas respostas, os autores não apontam as razões que mostram que a prova apresentada é uma demonstração correta. Contudo, como salientam alguns autores, como Jahnke

(2007) “muitos estudantes das escolas e universidades e mesmo professores de matemática do ensino fundamental têm apenas ideias superficiais sobre a natureza da demonstração” (JAHNKE, 2007, p. 80, tradução nossa). Relatamos no item (a) desta tarefa que tanto Iran como Dário consideram como demonstração o método que consiste em se apoiar na figura e medição dos lados. Portanto, vemos que tanto o método baseado em exemplos, prova **a,** como o que se baseou em uma cadeia dedutiva coerente, prova **c**, foram consideradas como demonstração. Este fato dá indícios que mostram que esses alunos não sabem em que consiste verdadeiramente uma demonstração em matemática. Esse resultado pode ser confirmado pelas respostas de Dário que afirma que as provas **b** e **c** são iguais. O diálogo a seguir apresenta seus argumentos que defendem que a prova **b é valida**.

Pesquisador *- Você não vê que ele está usar a ideia de isósceles para provar que o triângulo é isósceles?*

Dário *– [...] mas também está demonstrar.*

Pesquisador *– Ok. Vai para aqui. O que ele diz?*

Dário *– Ele diz assim: [...] DC é igual a DC*

Pesquisador *– [...] E qual a justificação que ele dá?*

Dário *– Mediatriz de um segmento passa pelo seu ponto médio.*

Pesquisado*r – Ângulo.*

Dário *– Ângulo ADC é congruente ao ângulo BDC, este é congruente a BDC, neste caso este.*

Pesquisador *– Depois?*

Dário *– Triângulo ACD é congruente ao triângulo BCD.*

Pesquisador *– ACD qual é?*

Dário *– É congruente a este. E triângulo ACD já está, não é, então, se dois triângulos são congruentes, seus elementos correspondentes são congruentes. Portanto AC é congruente a BC.*

Pesquisador *– Ele provou que estes dois triângulos são congruentes, para concluir que este lado é congruente àquele.*

Dário *– Sim.*

Pesquisador *– Quer dizer, aqui o triângulo tem dois lados [...]*

Dário *– Congruentes sim.*

Pesquisador *– Então, nesse caso [...]. Esta prova é igual a esta – apontando as provas **b** e **c**.*

Dário *– Quase que é igual, mas não é.*

Pesquisador *– Onde está a diferença?*

Dário *– A diferença é que este mostrou com base nos dois triângulos; e este mostrou pela perpendicularidade deste segmento. Ele diz que se este segmento é comum, é perpendicular à base, então estes dois ângulos são congruentes. Logo, concluiu que é um triângulo isósceles, os segmentos vão ser iguais.*

***Pesquisador** – Não, mas não é isso que ele disse. Você está a inventar. É o que está aí?*

Depois de algum tempo sem responder, diz:

***Dário** – Mas isto é quase igual.*
***Pesquisador** – Olha ele está a dizer que este ângulo é igual a este porque este triângulo é isósceles. É o que ele está a dizer e é diferente disto.*
***Dário** – Este está dizer porque este lado é igual a este.*
***Pesquisador** – Quando é que é que ele afirma?*
Não responde.
***Pesquisador** – Depois de afirmar que este triângulo é congruente àquele triângulo.*
***Dário** – Não, eu acho que este não é suficiente, não é suficiente o fato de [...] – assim o nosso interlocutor considera de insuficientes os argumentos apresentados na prova **c**.*
***Pesquisador** – Ah, para você ... ok, não é suficiente. Para você qual é a melhor demonstração aqui? – perguntamos-lhe comparativamente à prova **c**.*
***Dário** – A melhor demonstração, acho que é esta – apontando a **b**.*
***Pesquisador** – para você a melhor demonstração é esta **b**.*
***Dário** – Não estou a dizer que esta está errada. Mas para mim, a melhor é esta. [...].Para estas duas*
***Pesquisador** – E em relação a todas?*
***Dário** – esta é melhor – apontando a prova **a** baseada em verificações.*
***Pesquisador** – A primeira?*
***Dário** – a primeira.*
***Pesquisador** – Para si é melhor. Por quê?*
***Dário** – Porque a melhor é clara, se eu tenho dois pontos posso movimentar, se este é um ponto que está no segmento, está no ponto médio, é claro que estas duas retas que vou ter, estes dois segmentos sempre vão ser iguais – concluiu.*
***Pesquisador** – E qual o conceito matemático que lhe garante que sempre vão ser congruentes?*
***Dário** – O conceito matemático que me garante que estes [...] bom o conceito matemático que me garante que [...] sempre que eu puxe estes ângulos nunca vão alterar. Os ângulos da base não vão alterar, sempre vão ser congruentes.*

Como podemos ver pela entrevista, Dário considerou que todas as quatro provas dadas na tarefa 6 são corretas, mas que de todas elas a melhor é a prova **a** baseada em verificações e que a **b** é a segunda melhor comparativamente às outras duas – **c** e **d**. Temos assim, um exemplo de quem não sabe como funciona uma demonstração em matemática. A prova considerada como a melhor baseia-se em verificações empíricas e a segunda melhor contém um erro lógico ao invocar uma propriedade de triângulos isósceles antes de demonstrá-la.

Esse aspecto foi superado por Ofélia, que lia todos os argumentos de forma conectada, isto é, se a justificação que se dá em um dado passo não contradiz o que deve ser demonstrado e, em particular, foi cautelosa na identificação da(s) hipótese(se) e tese(s). Vejamos o que ela disse e fez durante a entrevista relativamente à prova **c**.

Pesquisador *– Vamos para c.*
Ofélia *– Diz assim: consideremos estes dois triângulos. Ele diz que DC é igual a DC, lado comum. Se formos a verificar isso verifica porque temos dois triângulos que tem um lado em comum. AD é congruente a DB. Aqui não sei esta reta ... a reta AB congruente a reta DB, é isso?*
Pesquisador *– Não, segmento.*
Ofélia *– Segmento AD congruente ao segmento DB, mediatriz de um segmento passa pelo seu ponto médio.*
Pesquisador *– Concorda?*
Ofélia – <u>Pela figura, sim senhor, mas ...</u> (Grifo nosso).

Ao analisar suas respostas, percebemos que ela não tem muita clareza sobre o conceito de mediatriz, pois, apoia-se na figura para justificar seu argumento e não base de apoio ao raciocínio logico-matemático, como pode observado nas suas respostas (cf. a entrevista abaixo).

Pesquisador *– É pela figura?*
Ofélia *– É isso que eu estava dizendo no início, demonstração, eu não sei, pelo meu ponto de vista, por aquilo que eu percebi o que é uma demonstração, deve-se prestar muita atenção, apesar que nem sempre, quer dizer, se a gente quer afirmar uma certa tese, primeiro temos de provar aquela, neste caso primeiro tinha de mostrar que este, o dizer lado comum não é suficiente para dizer que é mediatriz.*
Pesquisador *– Não, aqui ele não falou de mediatriz*
Ofélia *– Estou-me a referir nesta linha – aponta a linha em que foi usada a ideia de mediatriz como meio de justificar a congruência dos segmentos AD e DB.*
Pesquisador *– Mas não foi dado aqui? Foi dado ou não na hipótese?*

A Ofélia relê o enunciado da tarefa.

Ofélia *– Sim, sim, é conceito dado, mas, o outro aspecto que eu dizia lá, quando estamos a fazer uma demonstração, devemos antes de proceder, controlar, não porque está errado, mas um aspecto que devemos prestar atenção, pegarmos a hipótese: colocar a hipótese, tese, depois aí começar a demonstração porque é mais fácil, subir lá verificar é complicado*.
Pesquisador *– Ah, está bom. O problema é que aqui não foi colocado hipótese, tese....?*
Ofélia *– Sim, colocar hipótese, ..., deram-nos um pedido, vou resolver, tenho que colocar hipótese, isto, aquilo, porque na hipótese são conceitos que já foram dados que podem nos servir na nossa demonstração.*
Pesquisador *– Está bem.*

Ofélia *– E colocar a tese, é aquilo que a gente está a precisar e depois passar a proceder a demonstração. Mas já que isto já foi afirmado lá na hipótese, ah, também pode afirmar.*

Pesquisador *– Está bem. Vamos.*

Ofélia *– Ângulo ADC, ..., sou muito lenta.*

Pesquisado*r – Não há problema, pode ser lenta, só que talvez vamos ficar muito tempo, mas eu estou a gostar do seu trabalho.*

Ofélia *– Ângulo ADC congruente ao ângulo BDC, mediatriz de um segmento é lhe perpendicular.*

Pesquisador *– Talvez a formulação não está boa, não é, devia ser mediatriz de um segmento é perpendicular a esse segmento.*

Ofélia *– He, aqui talvez não estou a perceber o que ele afirmou. Ele está a dizer que o ângulo E é congruente ao ângulo do outro triângulo ...*

Pesquisador *– Sim, este ângulo aqui [apontando] porque está a dizer que está mediatriz e este [apontando o segmento], se são perpendiculares, então estes dois ângulos são iguais, se este e este forem perpendiculares.*

Ofélia *– Mediatriz de um segmento é-lhe perpendicular ... talvez a afirmação me mexeu um pouco.*

Ofélia *– Dizer que estes são congruentes definidos pela perpendicularidade. Sim, partindo ..., nesse só que quando eu li não percebia muito bem essa afirmação. Segundo isso podemos aceitar porque são perpendiculares. O triângulo ACD congruente ao triângulo BCD caso lado, ângulo, lado. Mas onde está esse critério?*

Pesquisador *– Mas ele já deu .... é só procurar agora.*

Ofélia *– Deixa ver, ele já disse.*

Pesquisador *– Um lado, ...*

Ofélia *– Iya, começou um lado comum, outro lado....*

Pesquisador *– Bem ele não ordenou, foi para outro lado, segundo lado.*

Ofélia *– Aha, ... pois é, ..., então critério lado, ângulo lado.*

Pesquisador – E daí avançou e concluiu.

Ofélia – *Se dois triângulos são congruentes, seus elementos correspondentes são congruentes. Portanto, AC é congruente a BC. Bom, aqui acho que ele vai-me levar ao critério dele. Me convenceu. Ele demonstrou apesar de ordem, ele poderia começar ...*

Pesquisador *– Mas a ordem é muito importante aí?*

Ofélia *– Não é muito importante, desde que você mostre dois lados congruentes e um ângulo congruente. Então, a partir deste critério podemos ... mesmo me convenceu.*

Pesquisador *– Podemos aceitar?*

Ofélia *– Sim. Agora o terceiro (d).*

Como podemos ver a partir deste extrato bastante longo, Ofélia avaliou a prova apresentada tomando o conjunto dos passos. Este procedimento foi útil, porque lhe permitiu analisar toda a argumentação apresentada como uma única prova.

Apesar de ter encontrado algumas dificuldades, Ofélia mostra certa maturidade no que tange à análise da estrutura de uma demonstração e detectar a incoerências nela presentes.

Ainda constatamos que há outro grupo de estudantes que não reconheceu que a prova (**c**) é correta. Trata-se dos estudantes Dionísio, Baú, Fred, Herculano, Kelmon. Por exemplo, Dionísio escreveu o seguinte:

A demonstração não é correta de tal modo que prova a congruência de lado comum, a congruência de ângulos e em contrapartida a congruência de dois triângulos que neste ponto deveria ser validada a proposição, mas ele acrescenta mais alguma coisa que lhe contradiz, isto é, quando afirma que se dois triângulos são congruentes seus elementos correspondentes são congruentes e portanto, AC ≅ BC, neste caso poder-se-ia por exemplo tratar-se de outro tipo de triângulos que não seriam isósceles e para além disso, ele prova a congruência de dois segmentos AC ≅ BC (produção de Dionísio).

A explicação de Dionísio contém erro de raciocínio, pois por definição um triângulo isósceles é aquele que possui dois lados congruentes ou possui dois ângulos congruentes. Os dois triângulos mencionados formam um único triângulo, o triângulo ABC. Dado que a hipótese não permitia utilizar a definição que se baseia em ângulos, então o uso de lados é mais apropriado para chegar à conclusão desejada. Portanto, ele não percebeu que primeiro estabelecia-se a congruência dos lados, de acordo com a hipótese dada, e depois se concluía que o triângulo é isósceles. A prova **c** apresenta exatamente esse raciocínio.

Outras respostas revelaram que a apresentação dos passos de um argumento segue certo padrão mesmo nos casos em que um dado passo (premissa) não dependa dos passos (premissas) precedentes. É o caso de Gomes que escreveu o seguinte:

Este argumento é validado com a informação porque a partir das bases que usou chegou-se à conclusão. O erro detectado é que se usa o critério de congruência LAL, então deve-se seguir a ordem mostrando 1º a congruência de dois lados, de dois ângulos e, por fim do último lado para se chegar a conclusão da congruência de dois triângulos (Protocolo de produção de Gomes).

Com efeito, com exceção dos casos em que uma dada premissa é deduzida da(s) anterior(es), "a ordem de colocação das premissas é irrelevante: é o conjunto [{...}] das premissas que se deve considerar como relevante" (OLIVEIRA, 2010, p. 13). Para o caso em discussão não é primeiro apresentando a premissa relativa a lado, depois ângulo e finalmente lado que vai tornar o argumento válido, mas apenas conseguir justificar que de um para outro triângulo temos dois lados e o ângulo por eles formado, congruentes cada um a cada um.

Relativamente à prova (**d**), a de Moisés, em que, além do conceito de mediatriz, mobiliza o conceito de simetria axial (reflexão) e suas relações, constatamos que apenas nove (Dionísio, Iran, Paulo, Amorim, Fred, Getúlio, Herculano, Jackson e Kelmon) dos dezenove participantes da pesquisa reconheceram validar a conjectura. Contudo, alguns destes mudaram de posição durante a entrevista alegando que ela é muito longa, portanto, não aconselhável. Eis algumas das respostas deste grupo:

Kelmon*: "valida a afirmação, apesar de ser bastante longa, isso pode levar a que o leitor perca de vista as informações essenciais"; enquanto Getúlio disse: "É válida, mas por mim não recomendaria o uso desta nas escolas porque é muito complexa".*

Jackson*: "É válida, pois mostrou raciocínios lógicos, que conduziram a sua validação";*

Amorim afirma que *"solução* **d** *valida porque todos os argumentos da prova são válidos, mas ele foi muito filosófico e a resposta ficou muito longa"*

Com a exceção de Jackson, os outros alunos estão preocupados com a extensão da prova, mas não com o encadeamento lógico das premissas do argumento que é a condição essencial para a validade de uma demonstração. Isto pode confirmar o que revisamos na literatura em que alguns autores afirmaram que, não só os professores tendem a rejeitar as demonstrações apresentadas em língua natural pelos seus alunos, como têm dificuldades em compreender as justificações verbais (BARKAI, R. et al., 2009). Com relação ao último aspecto (dificuldade de compreender justificações verbais em uma demonstração), extraímos algumas passagens de algumas das entrevistas.

Pesquisador *– Vamos para* ***d****.*

Fred *– Moisés?*

Pesquisador *– Sim. O senhor achou que era a única a validar a propriedade em questão. O que é que o Moisés fez que torna a solução dele única a validar a propriedade? Parece que agora mudou [...]*

Fred *– Iya, estou a mudar mesmo depois, eu não sei se era fadiga, não sei o que considerei [Ele lê o que o Moisés fez] – Também quando uma demonstração é assim tira certa pontuação.*

Pesquisador *– Por quê?*

Fred *– Quer dizer, é um texto muito longo para tentar demonstrar que a coisa está boa. Então praticamente tira aquela sua rigidez, aquela sua, ..., como posso dizer o seu peso próprio de demonstração. [...]*

Pesquisador *– O que tira mérito a esta demonstração? [...]*

Fred *– Está detalhado demais, é uma demonstração muito longa ... Iya, está detalhar demais.*

Pesquisador *– Mas, então, nesse caso, está a recuar?*

Fred *– estou a recuar.*

Pesquisador *– [...]. Tem algum erro?*

Fred *- <u>Até apresenta elementos muito explicativos</u>, mas uma demonstração quando é assim, perde a sua graça da demonstração, porque cansa antes de chegar até lá para procurar a validade dos argumentos. (Sublinhado nosso)*

Pesquisador *– Não tem erro?*

Fred *– Eu vejo que não tem erro. É muito explicativo.*

É curioso que mesmo reconhecendo que a demonstração apresentada não contém erro conceitual e é muito explicativa, tira seu mérito.

Dado que era última prova da tarefa a avaliar, questionamos-lhe:

Pesquisador *– Então, quais são as provas que validam esta afirmação aqui?*

Fred *– A de Ernesto e um pouco está aqui de Jens –* referindo-se às provas **c** e **b** respectivamente*.*

Pesquisador *– Aquela última descarta?*

Fred *– Mas indo mesmo no concreto descartar de fato é um pouco meio complicado. Aquela até está boa, só que é longa.*

Como vemos, parece que Fred toma como base de análise, não só a coerência dos argumentos apresentados, mas também se esses argumentos são curtos ou longos. Com efeito, Fred está meio constrangido ao perceber que não pode aceitar a prova **d** na sua totalidade, mas ao mesmo tempo, reconhece que ela não contém erro, apenas é longa. Em contrapartida, vemos Fred, aceitando como válida a prova **b** (prova não correta por conter um erro lógico).

Continuamos ainda entrevistando com ele acerca das mesmas provas:

Pesquisador *– Só que é longa?*

Fred *– Sim. [...]. Mas podemos ficar nesta **d**, mas talvez se detalhasse um pouco usando aquelas ideias, mas detalhando um pouco. [...]. É muito explicativo, está bom.*

Pesquisador *– Aqui nas outras não constata nenhum erro?*

Fred *– As outras, é aquilo que estávamos dizer, [...]. eu estava dizendo simplificando demais, sintetizando demais, por exemplo, este aqui, este até devíamos tirar não está tão bem – aponta já a prova **b** de Jens.*

Pesquisador *– Por quê?*

Fred *– Porque tem fases também. Fase 1, aqui não tem, só está a falar duma maneira assim, está exposto todo, mas aqui está detalhar: ponto 1: é isto aqui*

Pesquisador *– Mas podia colocar 1, 2, 3.*

Fred *– Iya, mas para validar uma coisa, só três coisas, penso que com estes argumentos demonstrar só ângulos, ângulos não seriam tão suficiente.*

Pesquisador *– Não tem outro erro que o senhor está a constatar que não vale a pena utilizar? Eu só estou a perguntar, não é porque pode ... Pode ser que exista, pode ser que não exista.*

Fred *– Bem aqui o erro que constato é só incidir mais nos ângulos, não pegar noutros elementos que podem ser úteis na geometria.*

Fred não conseguiu identificar o erro grave da prova **b**: o uso da tese como uma das premissas da prova.

Não só a posição constrangedora relativamente à prova **d** foi manifestamente apresentada por Fred em entrevista, como também ocorreu com outros sujeitos. Vejamos os extratos dessas entrevistas:

Cuco *– Nesta prova* ***d*** *eu estava equivocado. Então disse que não valido, mas depois eu validei. Mas uma outra coisa doutor, numa demonstração se nós sempre usamos muitas palavras e acabamos mesmo não percebendo o que ele, o que nós pretendemos.*

Pesquisador *– Pode ver, mas uma coisa você pode justificar que a prova é muito longa, por isso as pessoas podem não considerar. Mas na verdade a ideia é: você constatou algum erro ou não?*

Cuco revê a prova **d** e no final afirma que não.

Pesquisador *– Portanto, nesse caso, é uma demonstração?! Aceita que é uma demonstração, esta prova, não é?*

Cuco *– Aceito, sim.*

Pesquisador *– Ok. Agora parece que há uma coisa que pôs sobre...*

Cuco *– Sim, sobre palavras. Quando nós, embora as palavras cheguem a uma conclusão com valor lógico verdadeiro, mas tem muitas palavras, até nos desanima*.

À semelhança do que aconteceu com Fred, Cuco também não classifica bem a prova **d** não porque os argumentos apresentados são inválidos, mas porque tem muitas palavras. A mesma posição é tomada por Elísio, que em entrevista se expressou de seguinte modo:

Elísio *– A pessoa [...] prolongou muito para demonstrar uma coisa.*

Pesquisador *– O problema é de usar muito ... é muito longo?*

Elísio *– Sim, é muito longo.*

Pesquisador *– É muito longo. Só isso? Mas válida ou não? Tem argumentos matemáticos ou não tem?*

Elísio *– Eu acho que não tem argumentos*.

Percebe-se que nossos interlocutores tiveram dificuldade em aceitar as justificações discursivas, o que pode ser interpretada à luz de resultados de pesquisas, como a de Barkai e al. segundo os quais há tendências (por parte de professores) de ver provas discursivas como deficientes por falta de notações simbólicas, além das dificuldades de compreendê-las (BARKAI et al., 2009). A última fala de Elísio apresentada atesta o último aspecto. Essa dificuldade acentua-se com a seguinte fala de outro entrevistado, o Dário:

Dário – *[..] eu disse que não é suficiente para provar que este triângulo é isósceles utilizando os dados que estão aqui, então, para mim, se prova mais que um triângulo é isósceles quando se fala de que os ângulos da base são iguais, aliás são congruentes; os ângulos da base são congruentes. Este é congruente a este, então, o triângulo é isósceles, então aqui este estudante fala mais de pontos da mediatriz, então, se este é mediatriz, talvez por causa daquele conceito de que num triângulo isósceles sempre a mediatriz é altura, a mediatriz funciona como altura, como bissetriz, só que acho que só usar aquela prova não é tão suficiente.*

O que constatamos, em todos nas respostas de nossos sujeitos, é incerteza sobre qual das propostas de prova é válida, exceto Ofélia que parece ter entendido a estrutura da demonstração, como pode ser observado na entrevista a seguir a respeito da prova **d**:

Pesquisador – *O quarto. Última prova.*

Ofélia – É o quarto [Lê o que foi escrito nessa resolução, depois de ler acrescenta]. *Aqui tenho um pouco de dificuldades, porque o conceito de simetria me fugiu um pouco, mas como ele iniciou, até que ele pode ter iniciado um pouco bem: consideremos o segmento AB com sua mediatriz e disse a mediatriz CD, onde C não pertence à reta, ao segmento AB. Depois focou o segundo caso. E no terceiro aspecto diz: C é simétrico de si mesmo porque é ponto do eixo de simetria. A é simétrico de B e vice-versa já que são os extremos do segmento cujo eixo de simetria é CD. AC é simétrico de BC dado que seus pontos são simétricos [Repete em voz baixa com ar de dúvidas].*

Pesquisador – *Sim, este aqui – apontando.*

Ofélia – *Dado que seus pontos são simétricos dois a dois.*

Pesquisador – *Sim.*

Ofélia – *C é simétrico com ponto C, A é simétrico com ponto B, citou lá em cima. Portanto, AC é congruente a BC, pois segmentos simétricos têm a mesma medida. Mas A, B e C são colineares dois a dois, portanto, determinam o triângulo ABC. Então o triângulo ABC é isósceles já que tem dois lados congruentes. Mas C é um ponto qualquer da mediatriz do segmento AB. Então qualquer ponto da mediatriz determina com os extremos A e B um triângulo isósceles, como queríamos demonstrar. Também o conceito de simetria é complicado, mas estou lembrando muito pouco, por isso evitei ... mas ele procedeu uma demonstração. Apresentou passos lógicos.*

Pesquisador – *Apresentou passos lógicos?*

Ofélia – *Sim, porque partiu dum conceito e foi usando aquele conceito que ele deu usando teoremas.*

Pesquisador – *Quer dizer, cada passo foi consequência ...*

Ofélia – *Sim do passo anterior. Esse anterior que foi provado também com um teorema já ...*

Pesquisador – *Ok. Então, nesse caso, quais os métodos que validam a propriedade aqui?*

Ofélia *– Métodos que validam? – questiona-nos com um tom de indignação.*

A forma como Ofélia reagiu, pareceu-nos não saber, na verdade, qual a finalidade de uma demonstração relativamente ao objeto matemático em que ela está associada. O mesmo comportamento se registrou em outros sujeitos e, um caso mais flagrante é de Cuco que em muitas passagens do questionar em vez de escrever "esta prova válida [...]", dizia "valido".

Em relação ao item que pedia que os alunos identificassem se existia alguma prova com erro explicitando-o, os dados mostram que apenas três sujeitos conseguiram identificar o erro da prova (b). Por exemplo, Herculano escreveu: *"[...] este aluno usou a tese como argumento"; enquanto Dionísio afirmou "[...] o estudante sustentou-se pela proposição de triângulos isósceles sabendo que quer provar o surgimento desse triângulo*" e Amorim escreveu: "[...] *ele usou um argumento da tese para justificar a própria tese*". Embora Ofélia tenha respondido bem em relação à avaliação das provas **a, b, c, d**, ela não foi capaz de identificar o erro na prova **b.** Essa questão que envolve aspectos didáticos não foi respondida de forma plausível por quase todos alunos. Este fato pode ser interpretado como uma situação fora do domínio didático pedagógico dos referidos alunos, devido ao fato de a maioria de nossos sujeitos não terem experiência de prática de sala de aula e também em virtude da falta de clareza do que é uma demonstração.

Em suma, esta tarefa mostrou que os sujeitos da pesquisa têm muitas dificuldades em lidar com demonstrações apresentadas em língua natural. Isso pode estar relacionado com os conceitos envolvidos na prova, sobretudo, a relação entre mediatriz de um segmento e simetria axial. Também a tarefa mostrou que alunos que analisam provas tomando todo o conjunto de argumentações apresentadas são mais bem sucedidos do que aqueles que fazem recorte dos passos.

Dado que constatamos dificuldades com o conceito de simetria axial (ou simetria ortogonal) achamos por bem passarmos a apresentar a tarefa número 8 que exatamente explorava os conhecimentos sobre a simetria axial.

5.6. Análise da tarefa 8. Explorando as propriedades da simetria axial

5.6.1. Análise *a priori* da tarefa 8

Propusemos a seguinte situação:

Considere um triângulo ABC e D o ponto médio do segmento BC. Seja E o simétrico de D em relação à reta AB e seja F o simétrico de D em relação à reta AC.

a) Que relação existe entre os segmentos CF e BE? Por quê?

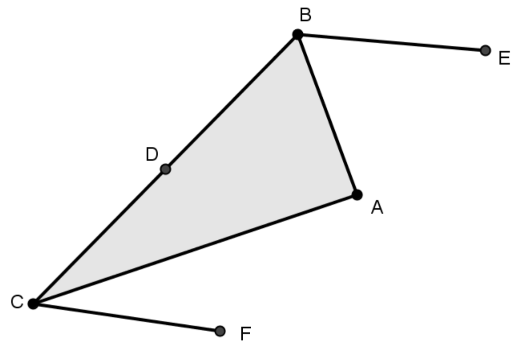
A tarefa tem por objetivo verificar as estratégias que os sujeitos da pesquisa iriam utilizar tanto para dizer a relação entre os segmentos de reta CF e BF quanto para justificar essa relação.

Os conhecimentos geométricos a mobilizar nesta tarefa são: simetria, mediatriz e a relação entre eixo de simetria e a mediatriz de um segmento.

Na apresentação da tarefa não especificamos o tipo de material a usar, mas esperávamos que os sujeitos primeiro desenhassem um triângulo utilizando instrumentos de construção clássica e, em seguida, determinassem o ponto médio do lado BC e depois os respectivos pontos simétricos em relação aos lados AB e AC utilizando os mesmos instrumentos de construções geométricas. Em seguida, esperávamos que eles explorassem a relação entre os segmentos CF e BC que serão obtidos por construção. O passo final é que a explicação fosse dada por eles acerca da relação que constatariam por via experimental. Essa última fase da resolução da tarefa é que iria mostrar o paradigma que norteou o ETG do sujeito: se estivesse agindo apenas em GI, então a explicação poderia restringir-se aos resultados de medição com instrumentos clássicos de construção; se estivesse em GII, notar-se-ia uma articulação entre a figura e o raciocínio discursivo bem como uma transição de GI a GII mediada por uma articulação entre o resultado da visualização e os elementos teóricos da geometria plana. O que nos interessa particularmente são os procedimentos que seriam utilizados na determinação dos simétricos do ponto médio do lado BC em relação aos eixos de simetria que contém os lados AB e AC respectivamente.

A tarefa apela para o conhecimento da relação que existe entre eixo de simetria e o segmento determinado por pontos simétricos, bem com a relação que existe entre eixo de simetria com a mediatriz do segmento determinado por pontos simétricos, isto é, o conhecimento de que o eixo de simetria de dois pontos é ao mesmo tempo a mediatriz do segmento determinado por esses dois pontos. Os elementos que mencionamos são os conhecimentos visados que deveriam ser utilizados como argumentos na produção da demonstração. O primeiro passo da resolução, quando bem executado, poderia dar uma representação do seguinte tipo.

Figura 67 - Ilustração dos pontos simétricos de D em relação aos lados AB e AC do triângulo ABC



Fonte: O autor

No que diz respeito à questão: Qual a relação entre CF e BE?

Se o estudante estiver trabalhando em GII, espera-se que se recorrer à simetria axial (simetria em relação a uma reta), utilize explicitamente suas propriedades para produzir um discurso similar ao segue:

1. D e F são pontos simétricos em relação ao eixo AC (por construção);

2. C é simétrico de si mesmo (por pertencer ao eixo de simetria AC). Logo, os segmentos CD e CF são simétricos por terem extremos simétricos, consequentemente CD = CF.

3. D e E são pontos simétricos em relação à reta AB (por construção);

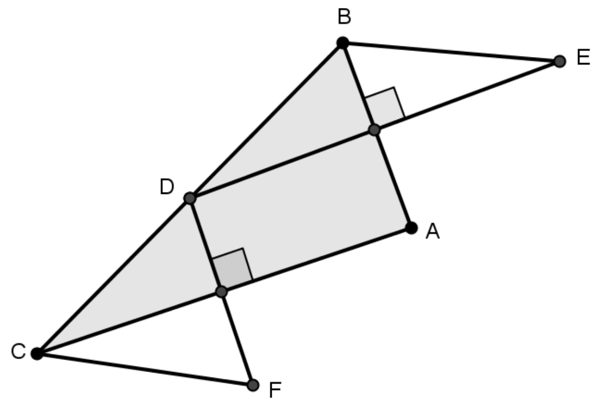
4. B é simétrico de si mesmo (por pertencer ao eixo de simetria AB).

Portanto, os segmentos BD e BE são simétricos, por seus extremos serem pontos simétricos, consequentemente, BD = BE.

5. Mas CD = BD (porque D é ponto médio de BC). Portanto, por transitividade da relação de congruência, BE = CF, que é a relação que estava sendo pedida na tarefa.

A solução apresentada usa explicitamente apenas o conceito de simetria e a propriedade transitiva da relação de igualdade, porém, já dissemos que um raciocínio possível é pensar na relação que existe entre o eixo de simetria e a mediatriz de um segmento. Assim, outra forma de resolver a mesma tarefa é a seguinte:

Figura 68 - Ilustração destacando a relação entre eixo de simetria e mediatriz de um segmento de reta



Fonte: O autor

Para este caso o discurso do raciocínio pode ter a seguinte estrutura:

1º Se o ponto E é simétrico do D em relação à reta AB, então o segmento ED tem por mediatriz AB, portanto qualquer ponto do segmento AB determina com os pontos E e D um triângulo isósceles, i e, ΔEBD é isósceles. Logo, EB = DB.

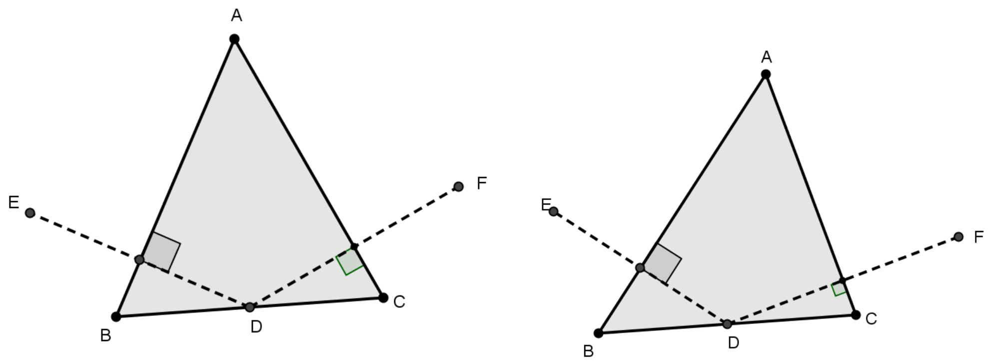
2º Sendo F simétrico de D em relação a AC, então pelas mesmas razões invocadas no 1º passo, ΔDCF é isósceles. Logo, DC = FC.

Temos a seguinte situação: EB = DB; DC = FC e foi dado que D é ponto médio de BC, portanto, DB = DC. Logo, EB = DB = DC = FC. Logo, EB =FC.

Então a resposta é que os segmentos EB e FC são congruentes.

Uma terceira possibilidade de resposta é usando algum recurso de medição, ou seja, determinar as medidas dos dois segmentos EB e FB e, em seguida, justificar esse fato por meio dos passos de dedução apresentados na primeira ou segunda resolução. Esta possibilidade é similar a situações em que a apresentação da figura é forma prototípica. Nestas situações é fácil descobrir que os segmentos ED e FD são congruentes, sendo, nesses casos, o trabalho principal reservado à justificação.

Figura 69 - Ilustração que facilita ver a relação entre ED e FD



Fonte: O autor

Para o caso da Figura 69, uma resposta possível pode ser a seguinte:

Os segmentos CF e BE são congruentes porque:

1º Se E é simétrico de D em relação à reta AB, então as retas ED e AB são perpendiculares, e a reta AB é mediatriz do segmento ED. Como vimos numa das tarefas, qualquer ponto da mediatriz forma com os extremos do segmento (nesse caso E, D) um triângulo isósceles. Portanto, o triângulo BED é isósceles, logo BE = BD (1);

2º Pela mesma razão, as retas AC e DF são perpendiculares e o triângulo DCF é isósceles, portanto, DC = CF (2).

Temos a seguinte situação: $\begin{cases} BE = BD \\ DC = CF \end{cases}$. Foi dado que D é ponto médio de BC, portanto BD =DC.

Logo BE = BD = DC = CF. Da transitividade da relação da congruência, concluímos que BE = CF.

Tarefa 8.1. Explorando as propriedades da simetria axial (Em ambiente de Geometria Dinâmica – Geogebra)

Usando Geogebra construa o triângulo ABC. Designe por D o ponto médio do lado BC. Em seguida, determine os pontos E e F simétricos do ponto D em relação às retas AB e AC respectivamente. Explore a relação que existe entre os segmentos FC e EB. Justifique sua resposta.

A tarefa tem por objetivo verificar como os estudantes iriam explorar as relações que saíssem da experimentação e que mecanismo utilizariam para justificar o que observassem.

Tal como fizemos na tarefa 7, inicialmente propusemos que se trabalhasse em ambiente de lápis e papel incluindo instrumentos clássicos de construção. Nesta segunda fase, pedimos que a tarefa fosse executada em ambiente de um *software* de geometria dinâmica. Esperávamos que o uso das ferramentas incorporadas no GeoGebra, nomeadamente: “ponto médio ou centro”, “segmento de reta”; “reflexão em relação a uma reta”, pudesse facilitar a obtenção dos pontos simétricos de D, ponto médio do lado BC do triângulo ABC, em relação aos lados AB e AC.

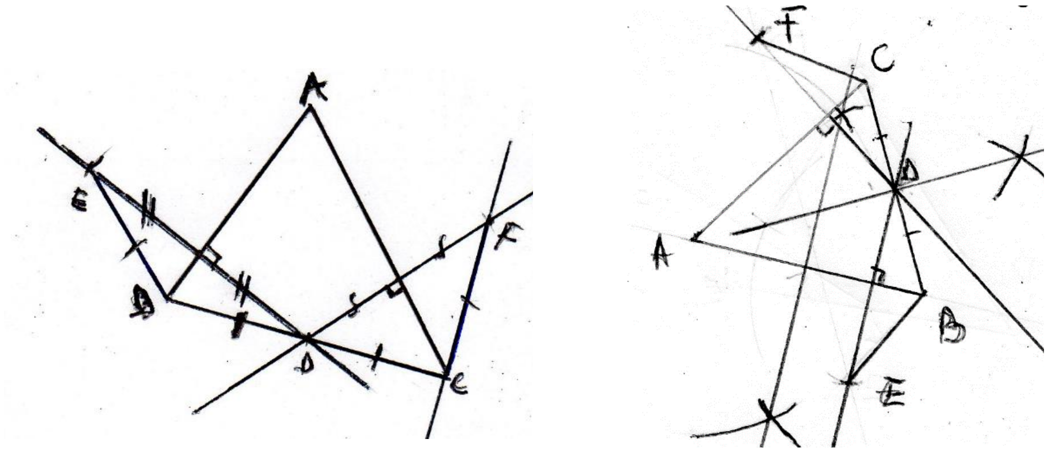
Depois da conversão em registro figural, esperava-se que os sujeitos da pesquisa explorassem a relação pedida por meio de ferramentas do artefato para em seguida, tentar explicar essa relação obtida via experimental utilizando conceitos e definições da geometria plana mediante um encadeamento lógico, conforme uma das três alternativas apresentadas para o caso de lápis e papel.

5.6.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 8

Lembramos que essa tarefa solicitava que os sujeitos primeiro determinassem os simétricos de um ponto em relação a dois eixos de simetria e, depois, levantassem uma conjectura e finalmente validassem ou refutassem tal conjectura.

Para o primeiro passo da tarefa, feito em papel/lápis, tivemos os seguintes resultados: dos vinte sujeitos que responderam ao questionário apenas sete determinaram corretamente os simétricos do ponto médio D do lado BC do triângulo em relação aos outros dois lados. Trata-se de Amorim, Cuco, Dário, Getúlio, Ludovico, Elísio e Herculano. Por exemplo, Cuco e Getúlio fizeram como reproduzimos na Figura 70.

Figura 70 - Produção de Cuco e Getúlio, respectivamente

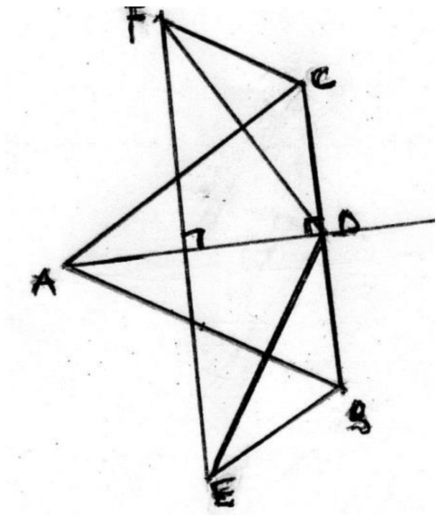


Fonte: Dados da pesquisa

Desses sujeitos, os estudantes Amorim, Cuco, Dário, Elísio, Getúlio e Ludovico conseguiram levantar bem a conjectura quanto à relação entre CF e EB. Herculano levantou uma conjectura usando um triangulo equilátero e afirmou que: “A relação que existe entre CF e BE é de simetria em relação a AD”.

Uma análise circunstanciada da figura feita por Herculano (Figura 71), nos leva a interpretar que sua resposta resulta do que chamamos de “contaminação protótipo” de sua produção.

Figura 71: Produção de Herculano



“Dado ABC um triângulo e D o ponto médio do segmento BC, E e F simétricos a D em relação a AB e AC respectivamente. C é simétrico a B em relação a D visto que a simetria conserva as medidas [...] D é ponto médio de BC. Se D é simétrico a E e F em relação a AB e AC respectivamente e C e B são simétricos em relação a D, então FC e EB também são simétricos em relação a AD.” (Herculano)

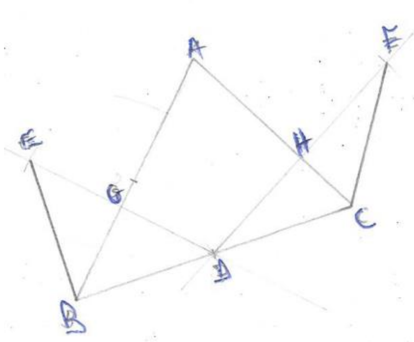
Fonte: Dados da pesquisa

Herculano, ao construir um triângulo com características especiais (triângulo equilátero), fez com que o ponto médio de qualquer um dos seus lados se situasse à mesma distância do ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo. Assim, as mediatrizes passaram a ser ao mesmo tempo bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Essa particularidade faz que, para além da congruência dos segmentos CF e EB, eles sejam também simétricos em relação ao segmento, que partindo do vértice A do triângulo passa por D. Porém, se tomarmos em consideração que Herculano não disse que o triângulo ABC é equilátero, então a conjectura não está certa, pois a formulação foi relativa a qualquer triângulo e não a um específico. Vale ressaltar que este caso especial não tínhamos previsto na nossa análise didática das tarefas propostas para esta pesquisa.

Entre os sujeitos da pesquisa que determinaram corretamente o simétrico de D em relação aos lados AB e AC, e conseguiram conjecturar que os segmentos CF e BE são congruentes, vale a pena apresentar as resoluções de três pelas suas peculiaridades: Amorim, por ter conseguido validar bem a conjectura recorrendo a dois pares de triângulos congruentes; Ludovico, por se ter baseado na figura para tentar validar a conjectura e Dário, por ter estabelecido uma congruência de triângulos que não existe para tentar validar a conjectura.

Amorim depois de determinar os simétricos de D em relação a AB e AC, como apresentado na Figura 72 produziu a seguinte prova:

Figura 72: Produção de Amorim



O segmento $\overline{EB} \cong \overline{FC}$, porque sabemos que D é ponto médio de $\overline{BC}$
BD = DC porque D é ponto médio de BC
EG = GD porque E é simétrico a D pelo segmento AB
GB = GB, GB é simétrico de si mesmo

∡DGB = ∡BGE = 90° porque E é simétrico a D pelo segmento AB e G é ponto médio de ED e está em AB, e AB é mediatriz de ED. Logo, ⊿EGGB = ⊿DGB, pelo critério L.A.L., por consequência $\overline{EB} = \overline{BD}$.

DH = HF porque F é simétrico a D pelo segmento AC

HC = HC, HC é simétrico de si mesmo.

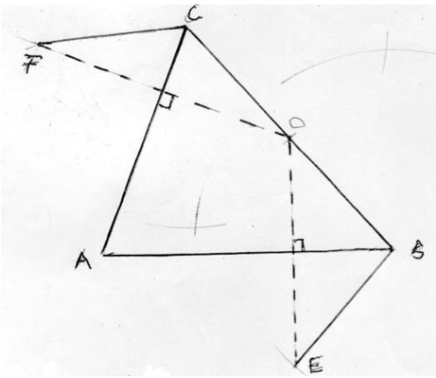
∡CHD = ∡FHC = 90°, porque F é simétrico a D pelo segmento AC e H é ponto médio de DF e está em AC, e AC é mediatriz de DF. Logo, ⊿CDH = ⊿CHF pelo critério L.A.L. Por consequência, $\overline{EB} = \overline{CF}$.
Como $\overline{DC} = \overline{BD}$, então $\overline{EB} = \overline{CF}$.

Fonte: Dados da pesquisa

Embora Amorim tenha misturado as notações, entre segmento e medida de segmento e no lugar de congruência colocou sinal de igualdade, a prova dele é similar a prova (d) da tarefa 6 que foi rejeitada porque tinha muitas palavras, mas está correta. Na produção desse estudante, notamos também o uso das propriedades de mediatriz de um segmento e de simetria axial de forma correta. Portanto, apesar da falta de rigor nas notações, Amorim mostrou que o seu ETG contém conceitos como mediatriz, simetria axial e as respectivas propriedades, que lhe permitiu produzir uma prova intelectual na terminologia de Balacheff e, norteada pela Geometria axiomática natural, conforme a classificação de Houdement e Kuzniak (2006).

Por sua vez, Ludovico depois de determinar bem os simétricos E e F de D em relação a AB e AC respectivamente, Figura 73 produziu a seguinte prova:

Figura 73: Produção de Ludovico



Fonte: Dados da pesquisa

CF ≅ EB porque sendo D o ponto médio de BC significa que BD ≅ DC, após traçarem-se as perpendiculares sobre as retas AB e AC, encontramos o ponto E traçando a compasso tendo B como centro ao ponto D que serve de raio, daí evidente que $\overline{EB} \cong \overline{BD}$, logo $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ e $\overline{DC} \cong \overline{CF}$, por transição $\overline{EB} \cong \overline{CF}$, c.q.d

Ao justificar as relações com base na abertura do compasso e não nas propriedades de simetria axial ou critérios de congruência de triângulos, Ludovico nos revelou que não consegue justificar a construção feita, mas sim assumiu que os instrumentos de construções geométricas utilizados são a base da validação da conjectura. Por essa razão que classificamos a prova que ele produziu como sendo de esquema indutiva segundo Harel e Sowder (1998, 2007), dado que ele justifica os passos da prova com base nos resultados de instrumento.

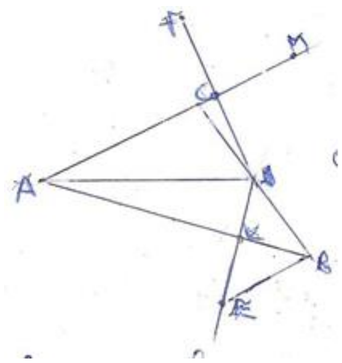
O estudante Elísio também apresentou uma justificativa similar a de Ludovico, pois após determinar os pontos E e F simétricos do ponto médio do segmento BC em relação às retas AB e AC respectivamente, escreveu o seguinte:

Quando a relação $\frac{CF}{BE}$, conforme as figuras acima são iguais; isto pela <u>demonstração da figura acima já nos diz tudo</u> que se ABC é um triângulo com o ponto médio em D do segmento BC, surgindo assim os seus simétricos E e F saindo assim um paralelogramo depois de unir os pontos teremos CB < FE e FC = BE. (Transcrição do protocolo de produção de Elísio, sublinhado nosso).

Apesar de um discurso difícil de entender, Elísio ao afirmar que as figuras são iguais, pois a figura diz tudo, está deixando transparecer que sua conclusão foi tirada da apreensão perceptiva da figura e não de uma justificativa que faz apelo a conceitos e propriedades geométricos.

Enquanto isso, Dário depois resolver a primeira parte da tarefa com alguns equívocos, como mostra a Figura 74 apresentou a prova que é transcrita ao lado da figura.

Figura 74: Produção Dário



"*CF e BE são congruentes, ou seja, $\overline{BE}$, porque se tratando de uma simetria axial e AB e AC como eixos de simetria em relação ao ponto D, então CF e KE são congruentes e* $\Delta EDB \cong \Delta CFM$ *logo* $\overline{EB} \cong \overline{CF}$*, c.q.d*" (Dário)

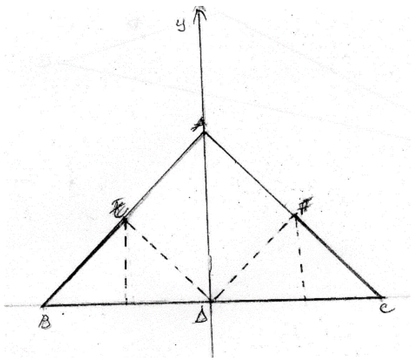
Fonte: Dados da pesquisa

A prova de Dário contém um erro de raciocínio ao afirmar que os triângulos EDB e CFM são congruentes, pois, apesar de D ser ponto médio do segmento BC, não há nada que garante que o segmento ED ser congruente ao segmento FD, nem que os ângulos EBD e DCF serem congruentes.

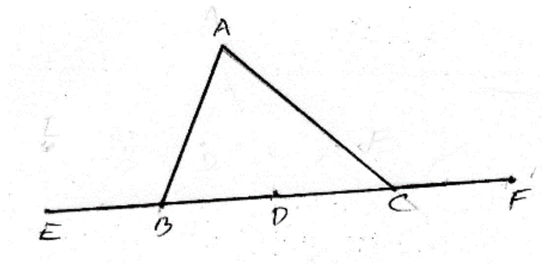
Os outros dois, particularmente Getúlio, demonstrou como previmos na análise didática da tarefa.

Fora de Getúlio que demonstrou corretamente a tese, os estudantes Dionísio, Emerson, Fernão, Gomes, Iran, Nilza, Ofélia, Paulo, Fred, Luís, Jackson, Kelmon, Elísio e Herculano não conseguiram determinar os dois pontos simétricos de D em relação aos lados AB e AC respectivamente. Apresentamos na Figura 75, algumas das produções desses estudantes:

Figura 75: Produções de Iran e Jackson



(Iran)



(Jackson)

Fonte: Dados da pesquisa

Como vemos, Iran representou um sistema ortogonal no qual considerou D como ponto da origem do sistema; marcou os pontos C e B no eixo horizontal equidistantes de D; marcou A no eixo vertical obtendo o triângulo ABC. Depois fez a projeção do ponto B sobre os lados AB e AC do triângulo ABC obtendo os pontos E e F respectivamente.

Depois dessa figura escreveu o seguinte:

Entre os segmentos CF e BE é de congruência, isto é, $\overline{BE} \cong \overline{CF}$*, porque se D é ponto médio de BC e E, F são simétricos de D em relação a AB e AC respectivamente, estes pontos (E, F) se situarão a mesma distância em relação ao ponto D e dado que D é médio de BC, logo equidistantes dos extremos deste segmento* (Produção de Iran).

Apesar de Iran parecer que acertou a relação pedida, ele não fez o que foi pedido.

Fernão construiu um triângulo ABC e pelos pontos médios dos seus lados marcou os pontos médios e os indicou como os pontos E, F e D. Em seguida escreveu o seguinte: "*A relação de CF e BE são concorrentes, porque* $\overline{BE}$ *e* $\overline{CF}$ *são metades das retas BA e CF respectivamente. A simetria de F e D; E e D justifica-se pelos triângulos BDE e DCF*" (Produção de Fernão).

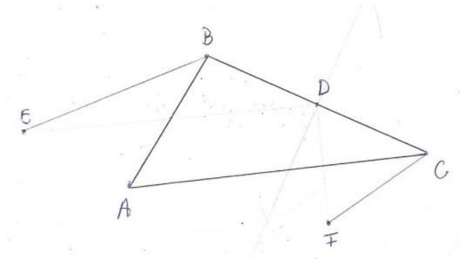
Há na resposta de Fernão indícios que ele não saiba o que é simetria axial. Tanto a resposta de Fernão como dos demais que não foram além da determinação do ponto médio D, sem conseguir sucesso na determinação dos seus simétricos em relação aos eixos AB e AC, revelam as dificuldades que tiveram com o conceito de simetria axial. E isto pode explicar, em parte, porque a prova que envolveu conceitos de simetria no item (d) da tarefa 6, não foi bem avaliada pela maioria dos sujeitos da pesquisa. Por exemplo, Jackson, no lugar de determinar os pontos simétricos de D em relação aos lados AB e AC, fez uma figura na qual E e F aparecem como simétricos de D em relação aos vértices B e C respectivamente, ou seja, a sua construção foi feita apoiando-se na simetria central (sem sabermos se ele tem consciência disso) como pode ser observado nos seus comentários que transcrevemos a seguir.

A relação que existe entre os segmentos EB e CF é que são iguais porque D é ponto médio de BC e DC = CF porque F e D são simétricos em relação ao ponto C (ou seja, a reta que passa por C) e também BD = EB porque E, D são simétricos em relação ao ponto B (ou seja, a reta que passa por B), e uma vez que DC = BD e DC = CF, então BD = DC e BD = EB, temos EB = DC = CF (Protocolo de produção de Jackson).

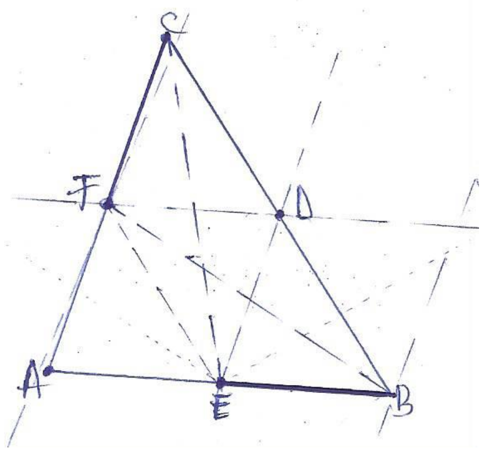
Jackson não parece ter entendido que trabalhou com simetria central, pois o que descreve é apenas de retas passando por C e por B.

Ainda reproduzimos os protocolos de Ofélia e Kelmon.

Figura 76: Produções de e de Kelmon



(Kelmon)



(Ofélia)

Fonte: Dados da pesquisa

Depois de terem feito a figura, Ofélia e Kelmon escreveram as seguintes argumentações:

A relação existente entre os segmentos CF e BE é que um segmento é reflexão do outro. Porque partindo do ponto A, a medida que nos distanciamos de F e E com a mesma distância se vai aumentando para C e B respectivamente, e se

mantermos fixo os pontos F e E, também os pontos C e B manter-se-ão fixos"(Ofélia)
Os segmentos CF e BE são paralelos porque provém da simetria axial. (Kelmon)

Observamos que, enquanto Ofélia não parece ter alguma noção das propriedades da simetria axial, Kelmon determinou bem um dos simétricos de D em relação à reta AC, mas não procedeu de igual modo em relação à reta AB. Ele construiu uma reta passando por D e perpendicular ao segmento DE. Por utilizar dois procedimentos diferentes para objetos da mesma natureza, Kelmon acaba obtendo uma relação diferente da que obteria se utilizasse o mesmo tipo de procedimento. Isto pode ser também indício de que ele não tem plena certeza de como se determinam objetos simétricos em relação a um eixo.

Do ponto de vista das teorias que sustentam nosso estudo, particularmente a dos paradigmas e ETG, a produção desses dois estudantes nos dá indícios de que eles não possuem em seu ETG as propriedades da simetria axial.

Para tentarmos perceber melhor a produção da Ofélia e de Kelmon, entrevistamos cada um deles. Passamos primeiro a apresentar o extrato da entrevista que tivemos com a Ofélia.

***Pesquisado**r - Vamos para 8. [...]. A ideia é assim: pode explicar como obteve os pontos E e F. Porque aqui o dado é que D é ponto médio de BC, não é, e que E é simétrico de D em relação a AB, F tem de ser simétrico de D em relação a AC. Então gostaria de saber como é que obteve aquelas localizações ali.*

***Ofélia** – Diz-se que E é simétrico [...] se o ponto D é médio de BC e aqui está se a dizer que, esta, se dizer que o ponto E é simétrico de D em relação a reta AB, <u>será um ponto médio da reta AB</u>. (Grifo nosso).*

***Pesquisado**r – Por quê?*

Passam cerca de 32 segundos sem resposta.

***Pesquisador** – Por quê? Sabe como se constrói um ponto simétrico de outro em relação a uma reta?*

***Ofélia** – <u>Não, nunca tínhamos estudado isso</u>.*

***Pesquisado**r – Nunca estudaram?*

***Ofélia** – Não.*

***Pesquisador** – Está bem. É pena que não temos tempo, [...] deveríamos ver um pouco essa atividade, eu previa que fosse feita [...] no GeoGebra.*

Portanto, a interpretação que fizemos da resposta da Ofélia e do Kelmon em termos de ETG encontra subsídio nas respostas da Ofélia. Na realidade, não só a Ofélia, mas também todos os sujeitos da Delegação de Nampula que realizaram a tarefa, nenhum conseguiu.

Relacionando esse fato com as dificuldades alusivas à interpretação do item (d) da tarefa 6, percebe-se que uma das causas de não a ver como prova válida, se deve ao fato de esses alunos não entenderem os argumentos apresentados nessa prova.

Em resumo: O estudo mostrou que muitos dos sujeitos da pesquisa não sabem construir o simétrico de uma figura em relação a um eixo (simetria ortogonal). A produção dos alunos nessa tarefa mostrou também que alguns sujeitos da pesquisa utilizaram figuras como fonte de argumentação e não de apoio heurístico.

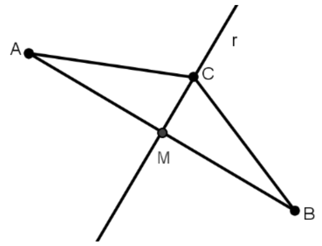
Dizemos que a tarefa 6 continha uma prova com um argumento circular, isto é, um passo que usa a tese como uma das justificações para construir uma cadeia de argumentos antes de se estabelecer a conclusão. Pela natureza do problema, decidimos que os sujeitos não só avaliassem, mas também produzissem uma demonstração de uma tarefa similar, com apenas uma diferença na sua forma de apresentação. Trata-se da tarefa que chamamos de **Atividade correlata** na apresentação das tarefas. Essa tarefa é a seguinte:

Na Figura, r é a mediatriz de AB.

(a) Prove que os triângulos AMC e BMC são congruentes.

(b) Sabendo que AC = 13 cm e AM = 12 cm, determine o perímetro e a área do triângulo ABC.

Figura 77: Produção de Abrantes e Carvalho



Fonte: Abrantes e Carvalho (1989, p. 32)

Apesar de a tarefa aparentar ser simples, apenas sete dos dezenove participantes apresentaram resoluções aceitáveis, são eles: Amorim, Cuco, Elísio, Fred, Getúlio, Herculano e Jackson. Todos recorreram ao critério LAL da congruência de triângulos para provar a relação pedida, porém, apenas Fred iniciou a demonstração distinguindo a hipótese da tese, como pode ser analisado no protocolo que transcrevemos a seguir:

Temos

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$ *porque M é mediatriz de AB*

$\overline{CM} \cong \overline{CM}$ porque $\overline{CM}$ é lado comum dos dois triângulos
$\measuredangle AMC \cong \measuredangle CMB$ porque r é mediatriz de AB
Logo, pelo critério LAL de comparação de triângulos o triângulo $\Delta AMC \cong \Delta BMC$ (Amorim).

Por sua vez, Fred apresentou o seguinte:

Hipótese: r é mediatriz do triângulo ABC
Tese: $\Delta AMC \cong \Delta BCM$
Demonstração
$\overline{CM} \cong \overline{CM}$, lado comum
$\overline{MB} \cong \overline{AM}$, M é ponto médio
$\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMC$, ângulo reto
$\Delta AMC \cong \Delta BMC$, se dois triângulos têm um ângulo e dois lados iguais, então os triângulos são congruentes (Fred).

As duas resoluções apresentam passos justificados com coerência e a conclusão é corolário dos passos precedentes, e, do ponto de vista conceitual, não apresentam rupturas e nem erros lógicos. São provas intelectuais na classificação de Balacheff (1987) e, em termos de paradigmas Geométricos, podemos dizer que pertencem a GII, em que as justificações se baseiam em propriedades estabelecidas.

Conforme salientamos no início da análise das respostas dos estudantes, apesar da simplicidade da tarefa, doze sujeitos tiveram dificuldades na construção da prova. Trata-se de Dionísio, Emerson, Fernão, Gomes, Iran, Nilza, Ofélia, Paulo, Dário, Luís, Kelmon, Ludovico. A principal dificuldade está relacionada à justificação dos passos da demonstração. Por exemplo, Ofélia apresentou a seguinte resolução:

Hipótese: r é mediatriz do segmento AB
Tese: $\Delta AMC \cong \Delta BMC$
Demonstração: Seja o ponto M o ponto que divide o segmento AB em duas partes iguais (pela hipótese), isto é $AM \cong MB$, a reta MC comum para os dois triângulos e os ângulos $AMC \cong BMC$.
Como $AM \cong MB$
$MC \cong MC$ e
$\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMC$, então os ΔAMC e ΔMBC são congruentes (Ofélia).

Com a exceção do passo em que Ofélia apresenta a hipótese e a tese, bem como em que usa a hipótese, todos os outros passos carecem de justificação.

Para percebermos melhor as razões deste procedimento, entrevistamos Ofélia, cujas respostas seguem.

***Pesquisador** – [...]. A ideia é a seguinte: nesta tarefa aqui que critério lhe permite concluir que o triângulo AMC é congruente ao triângulo MBC ou BMC?*

***Ofélia** – Porque critério aqui deve ser lado – ângulo – lado. Olhando para este ângulo, estes dois ângulos opostos a este lado comum.*

***Pesquisador** – É esse critério que usou aqui?*

***Ofélia** – Nada. A via de demonstração, fora do critério lado – ângulo – lado, posso olhar, porque este como é mediatriz, sendo mediatriz divide este segmento em duas partes iguais, consequentemente, este lado é congruente a este. Este lado é comum. Sendo comum, este mesmo lado é congruente para o triângulo ACM e o triângulo BCM. Então, temos aqui estes dois ângulos –* apontando os ângulos AMC e BMC formados pela mediatriz e o segmento AB.

***Pesquisador** – Quais são os ângulos?*

***Ofélia** – Ângulo, posso usar o ângulo M. [..].Ou ângulo ABC e BAC.*

***Pesquisador** – Quero entender no caso dos ângulos A e B.*

***Ofélia** – E se for ângulo M é por causa este segmento AB é perpendicular a CM, então consequentemente, mede 90, 90 –* sem associar, a cada um dos números, o termo graus.

***Pesquisador** – Ok.*

***Ofélia** – Agora para o lado AB precisamos de fazer certas demonstrações para poder provar e daí concluir.*

***Pesquisador** – Mas acha que vai usar os ângulos A e B?*

***Ofélia** – Não sei se esta figura, este triângulo é isósceles. Não sei se já foi afirmado. Caso ele não seja podemos usar o ângulo M.*

Ofélia apesar de não ter apresentado as justificações na prova feita durante a resolução das tarefas do questionário, nessa entrevista, ela foi capaz de apresentar justificações consistentes e corretas. Este fato confirma aquilo que algumas pesquisas identificam nos cursos de formação de professores de matemática como carência de uma escrita discursiva, compreensiva e interpretativa que explora os múltiplos significados das ideias matemáticas (FREITAS e FIORENTINI, 2008). No mesmo artigo que relata parte da pesquisa realizada na Universidade estadual de Campinas, os autores afirmam que “os futuros professores de matemática apresentam dificuldade em colocar no papel suas reflexões e seus pensamentos [...]” (p. 139). Esse resultado vem também ao encontro de resultados de pesquisas revistadas no âmbito desta investigação, segundo os quais os alunos não percebem a importância de apresentar justificações em uma demonstração.

A segunda situação constatada na resolução da tarefa diz respeito à ruptura no raciocínio do estudante, como pode ser observado no protocolo de Luís que passamos a transcrever.

1. $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, porque os segmentos de medidas iguais são congruentes pois M é médio de AB

2. $\overline{CM} \cong \overline{CM}$, ou MC é comum, então:
3. ∡CAM ≅ ∡MBC, pois lados congruentes opõem-se a ângulos congruentes, isto é, CM é oposto a ∡CAM sabendo que $\overline{CM} \cong \overline{CM}$ comum aos dois triângulos tendo que $\overline{CM}$ também é oposto a ∡MBC, logo pela $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, ∡CAM ≅ ∡MBC e $\overline{CM} \cong \overline{CM}$ prova-se que ΔAMC ≅ ΔBMC, c.q.d (Luís).

No passo 3, Luís ao invocar que a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes, não percebeu que ainda não estabeleceu a relação de congruência dos dois triângulos, depois da qual poderia olhar os pares de elementos correspondentes nos dois triângulos. Essa relação deve vir em decorrência da congruência dos dois triângulos, porque os triângulos podiam ter dois ângulos congruentes sem serem congruentes. Portanto, a prova é inválida.

A terceira situação observada diz respeito à dificuldade de estruturação na apresentação dos passos da demonstração e à falta de justificação. Por exemplo, Dário escreveu o seguinte; *"Se r é mediatriz de AB então $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ e C ⊂ r e ∡CAM ≅ ∡MBC, logo o segmento AC ≅ BC, então ABC é isósceles e r ponto médio então ΔAMC ≅ ΔMBC c.q.d.*"

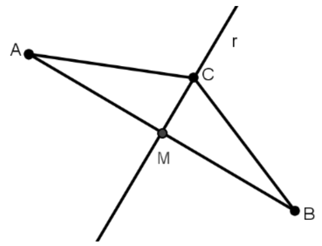
A prova de Dário é das mais polêmicas das que reproduzimos. Por essa característica, a reproduzimos uma parte do enunciado.

Na Figura, r é a mediatriz de AB.

(a) Prove que os triângulos AMC e BMC são congruentes.

.

Figura 78: Produção de Dário



Fonte: Dados da pesquisa

Procedemos assim, para que o leitor acompanhe bem a discussão.

A parte mais polêmica de toda a produção é *"∡CAM ≅ ∡MBC, logo o segmento AC ≅ BC*".

Se Dário está assumindo que os segmentos AC e CB são determinados pelas extremidades do segmento AB e um dos pontos de sua mediatriz, então o procedimento com argumentos plausíveis seria: (i) estabelecer a congruência de AC e BC para, em seguida, deduzir a congruência dos ângulos CAB e CBA com recurso à propriedade que afirma de que em um triângulo a lados congruentes, opõem-se ângulos iguais. O contrário disso nos conduz a um ciclo vicioso que dificulta a validação da prova esperada.

A respeito disso, o entrevistamos para entendermos melhor seus argumentos.

Pesquisador *– [...] existe esta tarefa correlata. Você diz assim, Se r é mediatriz de AB, então AM congruente a MB e C está contido em r e ângulo CAM é congruente ao ângulo MBC, logo o segmento AC é congruente a BC, então o triângulo ABC é isósceles. Como é que você chega à conclusão de que ABC é um triângulo isósceles?*

Não respondeu. Percebemos que nossa formulação foi longa, decidimos ir por partes:

Pesquisador *– O que lhe permitiu concluir que AM e MB são congruentes?*
Dário *– Porque fala-se que M é ponto médio.*
Pesquisador *– Mas você justificou?*
Dário *– Sim.*
Pesquisador *– Está onde aqui?*
Dário *– Se r é mediatriz de AB então ... Sim, está-se a falar que r é mediatriz. Porque M é ponto médio.*
Pesquisador *– Mas está escrito? Você explicou isso?*
Dario *- [...] eu acho que isso não precisa porque no princípio foi dito que r é mediatriz.*

A fala de Dário fornece indícios que nos permitem afirmar que ele sabia explicar o que ele tinha escrito e que era confuso para nós.

Pesquisador *– Como é que você foi concluir que estes dois ângulos aqui, este é congruente a aquele – apontando os ângulos CAM e MBC.*
Dário *– Sim, seguindo, por exemplo, esta prova que está aqui – aponta a prova (**b**) de Jens, uma prova com erro por usar a conclusão a tirar como um dos argumentos antes da conclusão - este é um ponto C; se este é o ponto C, se este lado é congruente a este – apontando os lados AC e BC da referida prova (vide essa prova no enunciado da tarefa 6).*
Pesquisador *– [...]. Como é que você justifica que este ângulo é congruente a este?* – Apontando os ângulos CAM e CBM da parte em discussão, Figura 78.
Dário *– Hummm, está bom. É por isso que eu disse aqui que se C está contido em r, e r é é ponto da mediatriz, aliás, é a mediatriz de AB, r é mediatriz de AB, e MB ser igual a, aliás, ser congruente a AM, e C é ponto da mediatriz é claro que [...], qualquer segmento que passa por C claro que vai ser congruente a qualquer outro segmento oposto que vai passar por C.*
Pesquisador *– Mas não é isso que você devia provar? Supomos que você quer explicar a um seu aluno, como é que você vai dizer [...] que este segmento é congruente a este?* – Questionamos-lhe apontando na figura.

Dário *– Como é que eu vou explicar?*
Pesquisador *– Sim.*
Dário *– Primeiro tenho de dizer que estes aqui são congruentes e C é um ponto que está na mediatriz. Então vou dizer assim: qualquer segmento que sai de B para C e que sai de A para C é claro que vão ser segmentos congruentes.*

Nós reproduzimos esta parte longa para ilustrarmos um caso de um raciocínio cíclico, mas que não é percebido pelo entrevistado.

Damos mais uma parte da mesma entrevista ainda relativa à mesma tarefa.

Pesquisador *– Então, o aluno tem que engolir, você não vai explicar porque são congruentes.*
Dário *– É isso que estou a dizer, isto acontece porque C está na mediatriz. Por causa do ponto C que está na mediatriz. Por isso estou a dizer, se C está na mediatriz está contido na reta r que é a reta da mediatriz, é a mediatriz, então qualquer ponto C, aliás, qualquer segmento que passa por aquele ponto C ... porque esta é mediatriz, basta ter um ponto C, claro que ...*
Pesquisador *– O aluno sabe isso? Ou você está a assumir que ele sabe?*
Dário *– O aluno pode não saber, tenho que explicar.*
Pesquisador *– Por exemplo, aqui onde está r você está a dizer porque estes aqui são congruentes porque este aqui é ponto médio - tornamos para a justificação que se pode apresentar ao dizer que AM e MB são congruentes - E aqui, por que são congruentes? – Apontando os segmentos que unem os extremos de AB com o ponto C da mediatriz C.*
Dário *– Por causa do ponto C que está na mediatriz.*

Poderíamos continuar por muito tempo questionando, ou a relação dos ângulos CAM e CBM, ou a relação entre os segmentos CA e CB que não teríamos saída. Dário não conseguia perceber os argumentos circulares que estava fornecendo como meios de sua demonstração.

Comportamento similar ocorreu na entrevista com Ofélia, mas ela apercebeu-se logo da impossibilidade de usar ∡CAM e ∡CBM como argumento para a prova e descartou logo, apesar de ter tido esse raciocínio.

Um erro próximo do de Dário foi cometido por Kelmon que pelo teor da conversa havida durante a entrevista e sua forma de reagir, preferimos também apresentar.

Kelmou no questionário escreveu o seguinte: “Se r é mediatriz do segmento AB, então ela divide AB em $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, também $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, ∡AMC ≅ ∡BMC, então os triângulos AMC e BMC são congruentes” (Kelmon).

Embora a prova apresentada por Kelmon aparenta ser boa, ela esbarra em uma situação sem saída: ele estabelece a congruência dos lados AM e BM por *r* ser mediatriz de AB; continua estabelecendo a congruência de AC e BC por serem segmentos cujos extremos são simétricos, mas já para terceira relação $\measuredangle$AMC $\cong$ $\measuredangle$BMC, não encontra justificação enquadrada sem passar por afirmar que são ângulos opostos a lados correspondentes de triângulos congruentes, ou ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Estes dois últimos argumentos ainda não foram construídos. Portanto, a prova é inválida.

Em entrevista, procuramos saber que critério o estudante usou para demonstrar que os triângulos AMC e BMC eram congruentes.

A princípio Kelmon respondeu “lado, lado, lado”.

Pesquisador *– É lado, lado, lado?*
Kelmon *– Sim, cada lado...*
Pesquisador *– O senhor usou AM congruente a BM. Tudo bem. AC congruente a BC apesar de não ter justificado; e depois foi para o ângulo AMC, não é isso?*
Kelmon *– Sim*
Pesquisador *– Congruente ao ângulo BMC. Então, que critério usou?*
Kelmon *- Lado, ângulo, lado.*
Pesquisador *– É verdade?*
Kelmon *– Sim, lado, ângulo, lado.*
Pesquisador *– Critério lado ângulo lado, quer dizer o quê? Dois lados e depois? [...]*
Kelmon *– É o ângulo compreendido, o ângulo formado por esses dois lados.*
Pesquisador *– Por esses dois lados. Então, quais são os dois lados? Qual o ângulo formado por AM e AC?*
Kelmon *– AM e AC.*
Pesquisador *– E o ângulo, qual é?*
Kelmon *– O ângulo, é, aqui é B formado por estes.*
Pesquisador *– Mas é isso que escreveu aqui?*
Kelmon *– O ângulo [...] não sei, não sei, mas, não escrevi o que devia escrever.*

Nós interpretamos este erro como resultante do fato de Kelmon não saber como articular e justificar os passos da prova por ele construída. À luz das ideias de esquema de Prova (HAREL e SOWDER, 1998, 2007), o comportamento de Kelmon dá indícios de que ainda não atingiu o nível de esquemas de provas transformacional e axiomática no qual uma das características é a generalidade, isto é, o entendimento de que é preciso justificar objetivamente os argumentos que se apresentam, sem casos isolados, nem exceções. Portanto, vemos que Kelmon ainda não vê a importância de justificar os passos de uma demonstração.

O comportamento de Dário e Kelmon, assim como dos outros que procederam de forma similar, foi mencionado por alguns dos autores revisados. Por exemplo, Heinze e Reiss (2003), observaram, em um grupo de 11 estudantes do ensino médio da Alemanha, dificuldades em reconhecer argumentos circulares na avaliação de provas com esse tipo de erro e, também, alguns apresentavam justificações contendo esse tipo de erro sem se perceberem disso.

Observamos essas dificuldades, também, nas produções de Nilza e Fernão que a seguir apresentamos:

Dado que o ∆ABC onde $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Marcando o ponto M em AB tem-se $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. E como pelo ponto C passa uma reta r que une C e M logo r é perpendicular a AB formando dois triângulos com $\overline{MC}$ comum, por isso conclui-se que os dois triângulos são congruentes (Fernão).
Hipótese: demonstrar que triângulos AMC e BMC são congruentes.
Tese: ∆AMC ≅ ∆BMC
Demonstração:
O lado AM ≅ MB
O lado AC ≅ CB
O lado MC ≅ MC lado comum
Então ∆AMC ≅ ∆BMC pelo critério L.L.L. (Nilza).

A produção de Fernão revela grandes dificuldades em relação à organização dos passos de demonstração e Nilza não parece saber justificar as relações que está estabelecendo. Ela se apoia em premissas aceitas de forma intuitiva (PARZYSZ, 2006). Fernão apresenta relações que devem ser demonstradas como premissas, é o caso em que afirma "dado o ∆ABC onde AC ≅ BC". Esta relação deve ser demonstrada mediante um encadeamento dedutivo lógico para se chegar à conclusão de que "a mediatriz r do lado AB passando pelo vértice C do triângulo ABC, determina dois triângulos congruentes".

Entrevistamos Fernão para melhor entender os argumentos utilizados na demonstração. Apresentamos a seguir parte excerto da entrevista que houve a respeito desta tarefa:

***Pesquisador** – [...]. O senhor disse "dado que triângulo ABC onde AC é congruente a BC; AC congruente a BC". Onde foi dito que AC é congruente a BC?*
***Fernão** – Nos argumentos, não sei, parece que...*
***Pesquisador** – Como é que sabe que AC é congruente a BC?*
***Fernão** – Bom, como muitas das vezes <u>nós ao fazermos alguma descrição, temos que, aliás, temos tido a questão de visão, eu estava olhando a figura e fiz essas conclusões, fiz</u>, digamos, essa leitura da figura, mas nesses*

*dados que aqui estão não tem (*sublinhado nosso*).[...]*

***Pesquisador** – Como é que o senhor vai demonstrar que aqueles triângulos são congruentes? Que mecanismo vai usar?*

***Fernão** – É por que eu mesmo falei dos lados são congruentes.*

***Pesquisador** – Por que AC é congruente a BC?*

***Fernão** – A ideia é: parece que temos a reta r que é mediatriz, então, se é mediatriz então pressupõe que os lados formados aí AC e BC sejam congruentes.*

***Pesquisador** – Por quê?*

***Fernão** – Porque estamos a pensar que se estamos a falar que como a mediatriz passa pelo médio do lado AB,*

***Pesquisador** – Passa pelo ponto médio. E nesse caso como passa pelo ponto médio está a afirmar que BC é congruente a AC? Se este é ponto médio – apontando o ponto M no segmento AB - tem a ver com estes dois segmentos aqui?*

***Fernão** – Bom, eu entendi que se passa pelo ponto médio e <u>pela figura</u> estou a sentir que existem ângulos retos formados nesse ponto M, então, dali dessas conclusões que aqueles lados dois, dois lados são congruentes. (Grifo nosso).*

***Pesquisador** – Por que acha que r é perpendicular a AB?*

***Fernão** – Bom, <u>como disse pela figura</u>, mas eu posso estar errado, porque os olhos podem dizer alguma coisa, mas na verdade aquilo que está lá é outra coisa. Agora, <u>figura olhando a própria figura está-me a parecer que r está formando aí ângulos retos no ponto M</u>. (*Sublinhado nosso*).*

***Pesquisador** – E o senhor não tem dispositivos suficientes para justificar que r é perpendicular à AB?*

Dez segundos depois.

***Fernão** - Para justificar com um dispositivo?*

***Pesquisador** – Bom, não sei que dispositivo, pode ser, depende ... pode ser instrumento, pode ser os seus conhecimentos matemáticos, qualquer coisa.*

***Fernão** – Bom, por enquanto <u>seria via transferidor. [</u>...]. Podia-se medir só para ver se de fato. (*Grifo nosso).

***Pesquisador** – É o que quer fazer?*

***Fernão** – Não sei se precisamos agora?*

Conforme o diálogo aqui transcrito, Fernão sabe que um segmento e sua mediatriz são perpendiculares e que esta última passa pelo ponto médio daquele segmento. Contudo, ele não foi capaz de usar esse conhecimento para justificar os passos de sua demonstração. Todas as justificativas que apresentou basearam-se na apreensão perceptiva da figura. Portanto, mesmo conhecendo algumas das características da mediatriz de um segmento, Fernão foi incapaz de convertê-las em argumentos matemáticos para construir sua prova. Assim, Fernão manifestou um esquema de prova perceptiva, segundo Harel e Sowder (1998, 2007), uma vez que suas justificações se baseiam na percepção visual da figura e não em conceitos matemáticos relativos a mediatriz de um segmento de reta. Seu raciocínio norteou-se em GI com ETG desprovido de argumentos fundamentados em propriedades de mediatriz. Vemos, assim, um Fernão sem indícios de um pensamento de que as justificações matemáticas se devem basear necessariamente em regras de inferência lógica.

Portanto, o comportamento de Fernão corrobora com alguns resultados de estudos anteriores revisados, em particular Moore (1994), segundo os quais alunos parecem não saber como usar uma definição para estruturar uma demonstração. Fernão mesmo tendo mostrado que conhecia as propriedades da mediatriz de um segmento, continuou não sendo capaz de utilizá-las para justificar suas conclusões.

Depois de apresentar e discutir a tarefa 8 do questionário, passamos a apresentar os resultados da tarefa 9.

5.7. Análise da tarefa 9: Explorando as propriedades da mediatriz do raio de uma circunferência

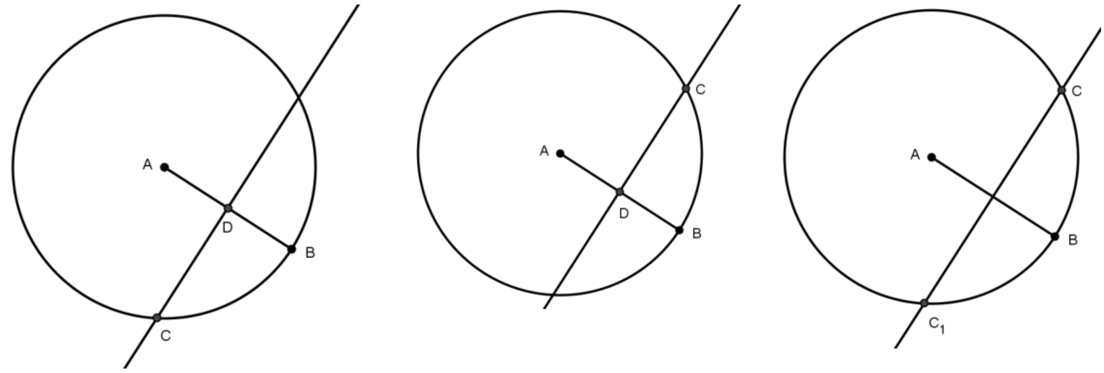
5.7.1. Análise *a priori* da tarefa 9

A seguinte tarefa foi proposta:
A é o centro de um círculo e AB é o raio. C representa um ponto na circunferência por onde a mediatriz de AB atravessa a circunferência. Provar se é verdadeiro ou falso que o triângulo ABC é sempre equilátero.

A tarefa tem por objetivo estudar as estratégias que os sujeitos da pesquisa utilizariam para verificar a conjectura. Os conhecimentos a serem mobilizados para a execução desta tarefa são basicamente as propriedades da mediatriz de um segmento e a congruência de triângulos.

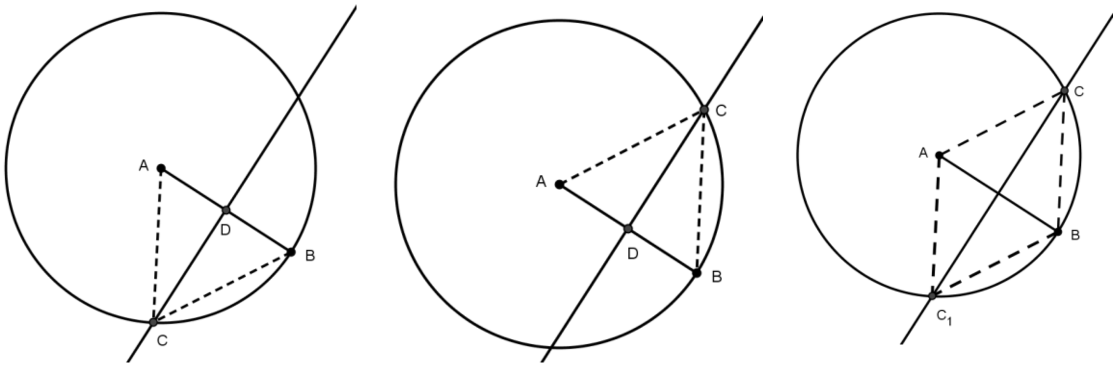
O primeiro passo exige a manipulação de instrumentos clássicos de desenho, régua e compasso, para o traçado da circunferência, de raio AB e de sua mediatriz segundo a descrição fornecida – trata-se da fase em que os instrumentos de construções geométricas servirão de elemento de mediação entre o objeto da tarefa e o sujeito, fase em que o sujeito vai mostrar se sabe ou não o que é mediatriz de um segmento de reta e como se traça por meio de instrumentos clássicos de desenho. É o momento em que se põem ações norteadas por GI. Espera-se que nesta fase configurações como as que se apresentam nas Figuras 79 e 80 sejam feitas.

Figura 79 - Conversão ao registro figural da tarefa 9



Fonte: O pesquisador

Figura 80 - Acréscimo de elemento para a obtenção de um triângulo



Fonte: O pesquisador

Já o passo seguinte incide sobre a validação da conjectura. Nesta fase há duas alternativas: Na primeira alternativa coloca-se em jogo ações indicativas da Geometria natural (GI), e na segunda, foca-se em procedimentos da Geometria axiomática natural (GII). No primeiro caso, as configurações obtidas servirão de objeto de validação da conjectura mediante o uso de medições ou outras ações como a sobreposição ou superposição para chegar à conclusão. A medição pode envolver um ou vários casos. O tipo de prova será pragmático ou indutivo.

Na GII, as configurações servirão de apoio ao raciocínio baseado em regras axiomáticas. O raciocínio pode ser similar ao apresentado por Ernesto e Moisés juntamente com a ideia de que raios de uma mesma circunferência têm medidas iguais. A cadeia dedutiva desse gênero leva à conclusão de que o triângulo ABC é sempre equilátero, pois:

1. Sendo CD ou CC_1 mediatriz do segmento AB, então AD = BD e as retas CD e AB (CC1 e AB) são perpendiculares.

2. CD = CD, por ser lado comum;

Então, pelo critério LAL, $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.

Portanto, AC = BC, porque são lados homólogos de triângulos congruentes. Mas: AC = AB, porque são raios de uma mesma circunferência.

Logo, AB = BC, ou seja, AB = AC =BC, que é o mesmo que dizer de que o triângulo ABC é equilátero. Portanto, a afirmação é sempre verdadeira.

Ainda podemos considerar a possibilidade de o sujeito tentar construir um raciocínio discursivo que aparenta uma prova correta, enquanto contém um erro lógico na apresentação da prova, como o caso da prova de Jens na tarefa 6.

5.7.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 9

Lembramos que a tarefa 9 tem por objetivo analisar os mecanismos utilizados pelos sujeitos da pesquisa para validar ou refutar uma conjectura sobre uma das propriedades da mediatriz de um raio de uma circunferência cuja configuração obtém-se usando lápis, papel, régua e compasso.

Conforme a nossa análise didática da tarefa o passo inicial consiste em, utilizar régua, papel, compasso para traçar uma circunferência de raio AB e a mediatriz desse raio.

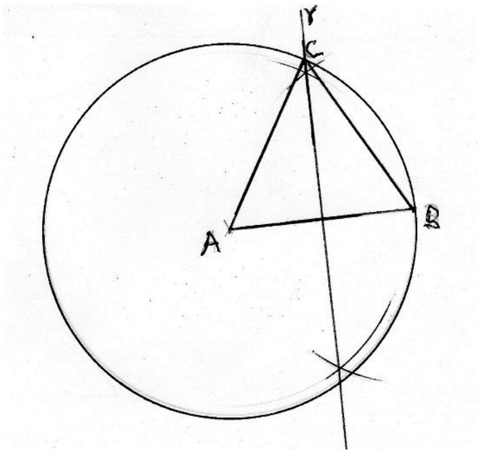
Para essa fase inicial, dos dezoitos sujeitos que realizaram a tarefa, catorze determinaram a configuração certa. Trata-se de Dionísio, Gomes, Nilza, Ofélia, Amorim, Cuco, Dário, Elísio, Fred, Getúlio, Herculano, Luís, Jackson e Kelmon e quatro não conseguiram (Emerson, Fernão, Paulo e Ludovico).

No passo da validação ou refutação da conjectura, constatamos que apenas quatro sujeitos (Amorim, Cuco, Getúlio, Herculano) validaram a conjectura por meio de uma demonstração; quatro (Dário, Elísio, Jackson, Kelmon) basearam-se na figura para afirmar que o triângulo é equilátero, enquanto que o restante afirmou que o triângulo ABC não é equilátero ou assumiu que é isósceles sem justificação.

Comecemos pelos que se apoiaram na construção para aceitar a validade da propriedade.

Kelmon, depois de construir a figura com compasso e régua, escreveu o que se apresenta ao lada da Figura 81.

Figura 81 - Figura que serviu de meio de validação utilizada por Kelmon



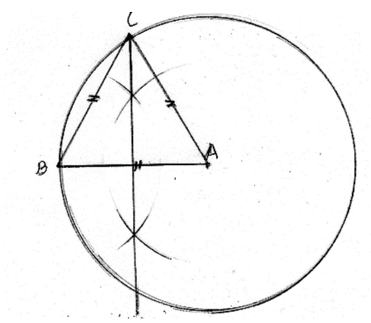
"*Sendo r a mediatriz do segmento AB, com a ponta seca do compasso em A e abertura até B, traça-se o arco BC até intersectar a mediatriz em C. Unindo os pontos A, B, C obtém-se um triângulo sempre equilátero*".

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo texto transcrito percebe-se que Kelmon não explica porque julga que o triângulo obtido dentro das condições da tarefa é sempre equilátero.

Por sua vez, Elísio apresentou a seguinte resposta.

Figura 82 - Figura que serviu de meio de validação utilizado por Elísio



ABC é um triângulo. Pela figura prova tudo que ABC é sempre equilátero, porque da figura adquirida temos o seguinte:

∡B = ∡A = ∡C = 60° - ângulos

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$ *- lados do triângulo*

∡A + ∡B + ∡C = 180°

Já se sabe que: se o triângulo for equilátero, então a soma das medidas dos ângulos internos também será igual a 180°

Fonte: Dados da pesquisa

Como salientamos em nossa análise *a priori* das tarefas propostas, uma das formas que os alunos recorrem para provar propriedades geométricas, é a apreensão perceptiva ou instrumentos de construção ou de figura. Os que notamos nos dois extratos apresentados, Kelmon e Elísio, apoiaram-se nos resultados de construção com régua e compasso para afirmarem que o triângulo é equilátero, em vez de justificar o resultado da construção com base em uma demonstração.

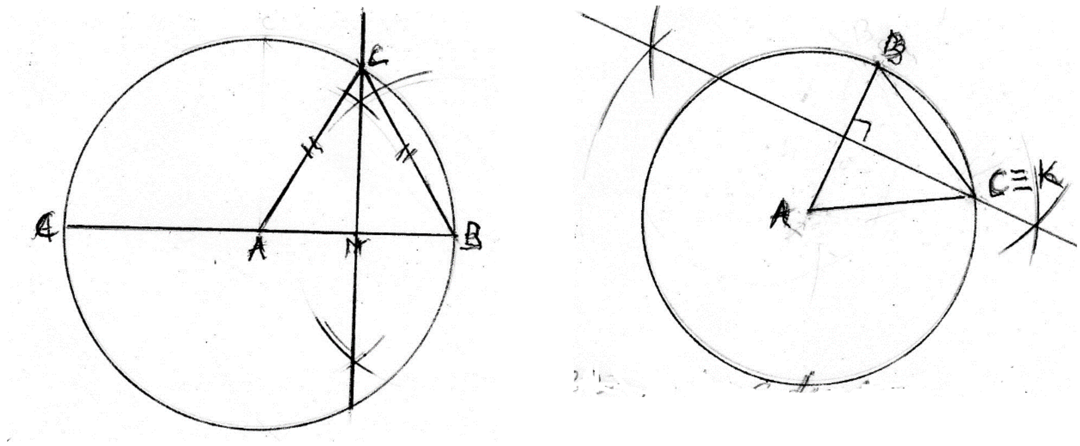
Além disso, notamos no Elísio um resultado geralmente frequente em alunos quando ele afirma que a “figura prova tudo”. Ao contrário dessa visão do aluno, Duval (2004) destaca que não existe figura geométrica sem legenda, chamando, assim, a atenção sobre a necessidade de uma apreensão discursiva quanto se faz um trabalho de prova tendo uma figura como um dos suportes, pois, uma mesma figura pode representar situações matemáticas diferentes e, a interpretação das informações nela contidas depende do contexto da situação em jogo. Ainda sobre a não validade de argumentos baseados em evidências de desenho, Fetissov (1985, p. 18) afirma que: “numa demonstração rigorosamente construída, só podemos nos basear em afirmações anteriormente demonstradas e nunca em fatos considerados “evidentes’”. O autor chama também a atenção para o papel do desenho na demonstração de um teorema geométrico: “[...] é apenas UM MEIO AUXILIAR da demonstração, que ele não passa dum EXEMPLO, dum CASO PARTICULAR em toda a classe de figuras geométricas a que se refere a demonstração em causa” (FETISSOV, 1985, p. 16).

Contudo, vemos Elísio tomando o desenho como meio de argumento.

Há duas respostas que merecem uma análise detalhada devido ao tipo de prova presente nelas. Trata-se das respostas de Dário e Jackson.

Tanto Dário como Jackson construíram, com régua e compasso, figuras, conforme descrito no enunciado. Depois da figura feita cada um deles escreveu (Figura 83):

Figura 83 - Figuras feitos por Dário e Jackson, respectivamente, relativas à tarefa 9



Fonte: Dados da pesquisa

Dário: *"Se M é ponto médio de AB, C um ponto do segmento MC então qualquer C, o ΔABC sempre será equilátero e $\overline{AM} \simeq \overline{MB}$ e o segmento AC sempre será congruente a BC"*.

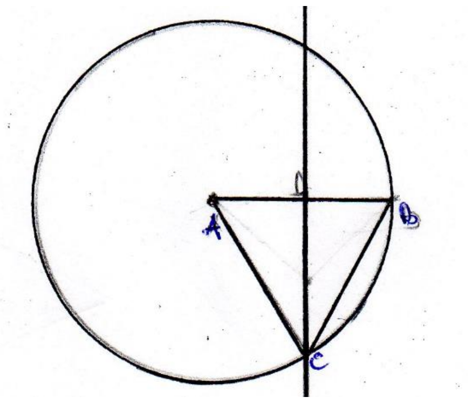
Jackson: *"1º Traçando a mediatriz de AB, com: abertura de compasso de medida AB a partir dos extremos A e B, logo os arcos cruzam-se num ponto K mas AK = BK = AB e AC = AB, porque são raios da circunferência, logo já que AC = AB e AB = AK $\Rightarrow$ (K coincide com C) consequentemente $\overline{AK} \simeq \overline{AK} \simeq \overline{AB} \Rightarrow$ $\overline{AC} \simeq \overline{BC} \simeq \overline{AB}$ (Triângulo equilátero) c.q.d"*.

Dário afirma que C é um ponto qualquer da mediatriz, o que é uma contradição em relação ao contexto do problema. Ainda, Dário ao afirmar que o ΔABC sempre será equilátero antes de demonstrar que seus lados AB, AC e BC são congruentes, ele está utilizando o que se quer provar "BC é congruente a AC e é congruente a AB" como argumento para obter a própria prova. Encontramos o mesmo raciocínio em Jackson.

Do ponto de vista da teoria que norteia o nosso estudo, interpretamos as quatro provas apresentadas como experiência crucial, segundo Balacheff (1987), ou esquemas de prova empírica, na caracterização de Harel e Sowder (1998, 2007). Quanto aos paradigmas geométricos, essas produções basearam-se em GI, uma vez que a figuras e os instrumentos de construção serviram de meio de validação da conjectura. Nesse contexto, o compasso foi o meio determinante do ETG.

Por sua vez Dionísio apresentou o seguinte (Figura 84):

Figura 84 - Produção de Dionísio relativa à tarefa 9



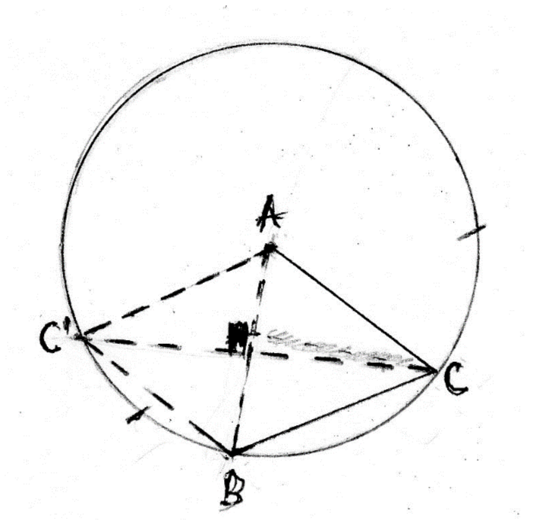
Dionísio afirma que unindo A e C e B e C obtém-se sempre um triângulo equilátero "porque a distância de qualquer um dos extremos de AB é igual a distância deste ponto até ao ponto onde a mediatriz AB corta a circunferência, logo prova-se que o triângulo é sempre equilátero".

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da afirmação de Dionísio ser verdadeira, ele usa de forma intuitiva as propriedades da mediatriz do segmento.

A Ofélia preferiu usar os dois pontos pelos quais a mediatriz do raio AB corta a circunferência, como ilustra a Figura 85.

Figura 85 - Produção da Ofélia relativa à tarefa 9



Depois do desenho, escreveu o seguinte:

Sejam AB, AC e AC' raios da circunferência dada. ABCC' losango, pela definição de raios de uma circunferência, que diz: todos os raiois (pontos que partem do sentro e intersectam a circunferência em ∀ ponto) são iguais, permite-nos afirmar de que AC' = AB e AC' = AC, logo AB = AC. Mas por outro lado, verificamos que ABCC' é um losango o que nos permite afirmar de que AC' = AC = BC' = BC. Da primeira afirmação AC = AB e da afirmação acima AC' = AC = BC' = BC. Podemos concluir que AB = AC = BC, o que nos permite concluir de que o triângulo ABC é equilátero.

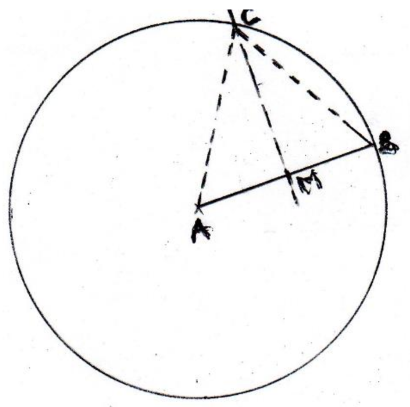
Fonte: Dados da pesquisa

Ofélia estabelece bem as relações entre os segmentos AC', AB, e AC recorrendo à propriedade acerca dos raios de uma mesma circunferência e transitividade da relação de igualdade. Contudo, na sua argumentação, ela introduz o conceito de losango sem ter provado que ACBC' apresenta propriedades de um losango.

Do ponto de vista das ideias de ETG introduzidas por Houdement e Kuzniak (2006), podemos dizer que as seis provas produzidas pelos estudantes, revelam que o ETG pessoal de cada um deles está desprovido das propriedades da mediatriz, já que constituem o fundo de raciocínio a ser empregar nas justificações. Quer dizer, em termos de conhecimentos, podemos dizer que os autores das seis provas não souberam empregar as propriedades da mediatriz para construir os seus argumentos. Portanto, as tentativas de prova apresentadas basearam-se ou nas aparências das figuras (esquema de prova perceptiva), ou em medições (esquema de prova indutiva).

Em relação aos quatro sujeitos que aparentam ter conseguido demonstrar que o triângulo é sempre equilátero, suas provas basearam-se na congruência de triângulos pelo critério Lado – Ângulo – Lado. Nenhum deles utilizou as propriedades de simetria axial. Como exemplo, apresentamos na figura 86 a produção de Cuco.

Figura 86 - Produção de Cuco relativa à tarefa 9



Provemos 1º que ΔAMC ≅ ΔBCM
$\overline{MC}$ – lado comum
$\overline{AM} \cong \overline{MB}$ porque $\overline{MC}$ é equidistante de AB, antes M é ponto médio de $\overline{AB}$
$\measuredangle$AMC ≅ $\measuredangle$BMC = 90°, porque $\overline{MC}$ é mediatriz, então é perpendicular a AB
$\underset{LAL}{\Longrightarrow}$ ΔACM ≅ ΔBCM
$\Rightarrow \overline{AM} \cong \overline{MB}$;
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$;
$\overline{MC}$ – lado comum
Pela consequência da anterior demonstração, temos:
1: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ pela consequência
2: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ raio da mesma circunferência,
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \Rightarrow$ Pela transitividade de 1 e 2;
Assim, $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$. Todos lados são iguais de triângulo, então este triângulo é equilátero. C.q.d.

Fonte: Dados da pesquisa

Observando a apresentação da prova, constatamos que Cuco tem dificuldades em organizar bem tanto o encadeamento dos passos como o uso das hipóteses. Por exemplo, logo no segundo passo, ele justifica a congruência dos segmentos AM e MB afirmando que o segmento MC é equidistante de $\overline{AB}$. Essa justificação não tem sentido, pois o segmento MC será equidistante de AM em relação a alguma coisa, o que ele não menciona. Portanto, a relação $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ que ele estabelece não tem respaldo na justificação que ele dá logo a seguir. O segundo aspecto, é que Cuco apresenta uma prova bastante confusa: ele não explica por que é que o segmento AC é congruente ao segmento BC, pois invoca uma consequência não clara. Consequentemente, as justificações seguintes acabam perdendo força. Embora essa prova aparenta ser válida, ela enferma de muitos defeitos, isto é, tem lacunas em sua essência.

Amorim, Herculano e Getúlio é que conseguiram produzir uma cadeia dedutiva completa e válida para a conjectura. Desse modo, apenas Amorim, Herculano e Getúlio fizeram apelo a alguns elementos da geometria GII de forma consequente enquanto Cuco fá-lo de forma fragmentada.

Em resumo, apesar da simplicidade da tarefa, apenas três sujeitos da pesquisa conseguiram, de forma clara, demonstrar que a conjectura apresentada na tarefa é uma propriedade válida relativa à mediatriz de um segmento (raio de uma circunferência). Os restantes dezesseis não conseguiram construir uma demonstração matematicamente válida.

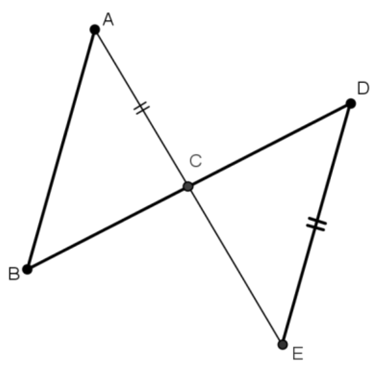
Agora passamos a apresentar a análise *a priori* e *a posterior* da tarefa 10.

5.8. Análise da tarefa 10: Confrontando o registro figural com o discursivo[31].

5.8.1. Análise a *priori* da tarefa 10

Figura 87 - Ilustração da tarefa 10

Considere a seguinte situação: os segmentos de reta AB e DE são paralelos; os segmentos AC e DE são congruentes. Mostre que os triângulos BAC e DEC são congruentes.



Fonte: O autor

A tarefa tem por objetivo analisar os procedimentos que os sujeitos de pesquisa utilizam para produzir uma demonstração a partir de uma rede de relações entre a visualização e o registro discursivo.

A tarefa mobiliza os critérios de congruência de triângulos e o conhecimento básico das relações existentes entre lados e ângulos homólogos de triângulos congruentes. Assim, espera-se que o sujeito, mediante a

---

[31] Tarefa adotada a partir de: Ponte, J. P; Oliveira, P. e Candeias, N. **Triângulos e Quadriláteros: materiais de apoio ao professor, com tarefas para 3° ciclo – 7º ano, 2009.**

coordenação entre os registros figural e discursivo, possa controlar se existem ou não elementos que permitem demonstrar que os triângulos BAC e DEC são congruentes, identificando os elementos correspondentes: Lados correspondentes $\left\{\begin{matrix} BA \\ AC \\ BC \end{matrix}\middle| \begin{matrix} DE \\ EC \\ DC \end{matrix}\right\}$ e ângulos correspondentes $\left\{\begin{matrix} \measuredangle ACB \\ \measuredangle ABC \\ \measuredangle BAC \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \measuredangle DCE \\ \measuredangle EDC \\ \measuredangle DEC \end{matrix}\right\}$.

Pelos dados contidos no enunciado do problema (hipóteses**),** não é possível dizer se os dois triângulos são congruentes, pois, por hipótese as retas AB e DE são paralelas, esse dado leva à conclusão de que ∡BAC ≅ ∡CED e ∡ABC ≅ ∡CDE. No entanto, os lados AC e DE dados na hipótese como congruentes, não são homólogos (correspondentes) para os dois triângulos. Daí, podemos concluir que não temos informação suficiente para inferirmos que os dois triângulos BAC e DEC são congruentes.

É uma tarefa cujo teor se situa na geometria axiomática natural e o sucesso na sua resolução passa necessariamente por ETG fundamentado em uma geometria axiomática.

5.8.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 10

Apenas Kelmon e Ludovico foram contundentes em afirmar que pelas condições dadas nada permite provar que os dois triângulos são congruentes, Ludovico, tendo apresentado um contraexemplo. Transcrevemos as produções dos dois.

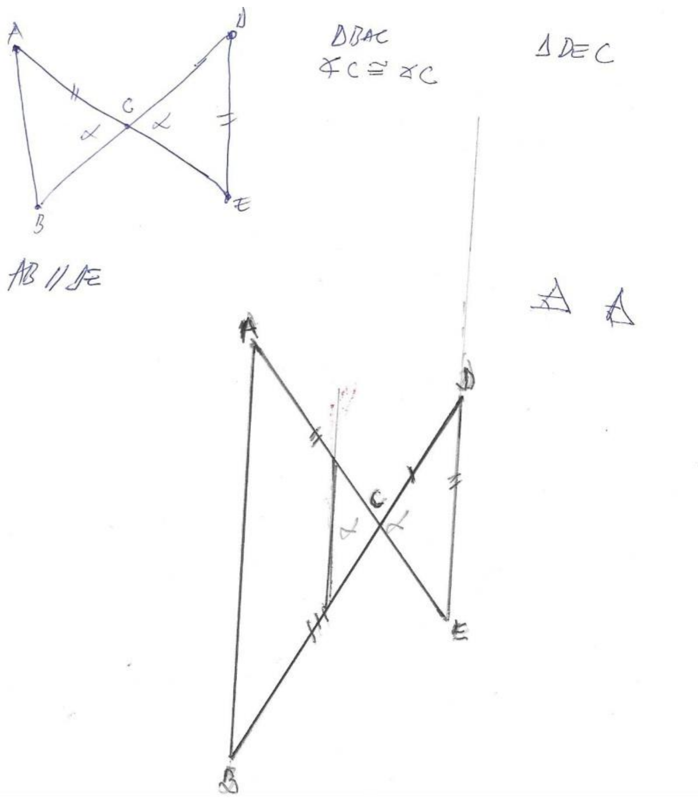
Kelmon: "*Não existem informações ou dados suficientes para se demonstrar a congruência dos triângulos BAC e DEC. Triângulos congruentes são necessariamente semelhantes e na figura acima essa semelhança não está garantida. Os lados correspondentes devem ser congruentes para que haja congruência de triângulos, o que não se nota na figura*".

Por sua vez Ludovico escreveu o seguinte:

"Tese:	*Hipótese*
AB // DE	*∆BAC ≅ ∆DEC*
AC ≅ DE	

Demonstração: Na minha opinião considerando a situação dada não temos condições para demonstrar que ∆BAC ≅ ∆DEC, portanto, não tem como serem congruentes".

Figura 88 - Contraexemplo apresentado por Ludovico



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de Ludovico confundir hipótese da tese na organização da demonstração, constatamos que ele, ao apresentar um contraexemplo, conseguiu refutar a informação.

De igual modo, Kelmon, ao invocar a semelhança de triângulos para justificar a não congruência dos dois triângulos, também teve um raciocínio coerente, pois triângulos congruentes são necessariamente semelhantes com razão de semelhança 1. Mas, essas duas formas de raciocínio não foram observadas nos outros sujeitos.

Cuco, mesmo tendo constatado que nenhum critério de congruência de triângulos permitia provar que os dois triângulos são congruentes, insiste em dizer o seguinte: “[...] mas estes são congruentes”, sem nenhuma demonstração.

Em relação a esta tarefa, Cuco produziu o seguinte discurso:

> *1. $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, pelos dados*
>
> *2. ∢ACB ≅ ∢DCE, são ângulos opostos;*
> *3. ∢BAC ≅ ∢CED e ∢ABC ≅ ∢CDE, são ângulos alternos internos em retas paralelas AB e DE*

> *⇒ pelos dados e 3 passos anteriores não garante que os triângulos sejam congruentes, mas estes são congruentes.*
> *⇒ Os critérios l.l.l, a.l.a e l.a.l não são suficientes para concluir esta demonstração* (sublinhado nosso).

Além do Cuco, também os restantes quinze sujeitos que realizaram a tarefa não conseguiram perceber que nenhum dos critérios de congruência de triângulos era aplicável aos dados da tarefa. Algumas das demonstrações propostas, Elísio e Getúlo, por exemplo, utilizaram artifícios equivocados para justificar suas produções, como pode ser percebido nos seus protocolos que transcrevemos a seguir:

Elísio:

$\overline{BC} \cong \overline{DC}$, C ponto médio
∡BCA ≅ ∡ECD, ângulos opostos pelo vértice
$\overline{AC} \cong \overline{EC}$, C é ponto médio
Logo, pelo caso LAL, conclui-se que o ∆BAC ≅ ∆DEC, c.q.d.
Ou
$\overline{AC} \cong \overline{EC}$, C ponto médio
$\overline{BC} \cong \overline{DC}$, C é ponto médio
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, pela figura
Logo, pelo caso LLL, conclui-se que ∆BAC ≅ ∆DEC, c.q.d.

***Getúlio**:*

Hipóteses: $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$; $\overline{AC} \cong \overline{DE}$
Tese: ∆BAC ≅ ∆DEC
Demonstração:
∡ACB ≅ ∡DCE, porque são opostos pelo vértice
$\overline{AC} \cong \overline{DE}$, pelo enunciado
∡CAB ≅ ∡CED, porque são alternos internos em retas paralelas.
Logo, pelo critério ALA, os triângulos BAC e DEC são congruentes, ou seja, ∆BAC ≅ ∆DEC pelo critério ALA.

Observamos nas produções desses dois alunos que os três critérios básicos de congruência de triângulo (Lado-ângulo-Lado, Ângulo-Lado-Ângulo e Lado-Lado-Lado) foram utilizados para a resolução de uma mesma tarefa, o que é estranho para a situação proposta. Analisando mais a fundo as duas produções, destacamos os seguintes fatos:

(i) Na primeira resolução de Elísio, apesar do critério parecer bem aplicado, ele inclui em sua demonstração (aparentemente de GII) uma propriedade falsa que nem foi fornecida no enunciado nem demonstrada antes, mas que parece ter sido deduzida da figura, trata-se das relações $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EC}$;

(ii) Na segunda resolução de Elísio, apesar de parecer ser de GII, contém também duas relações não fornecidas no enunciado, nem deduzidas de passos anteriores. Ele apoia-se na figura para estabelecer uma delas, a relação $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Ao afirmar claramente “pela figura”, Elísio não parece saber que em geometria, um desenho particular nunca pode ser utilizado para justificar uma propriedade válida para uma classe de entes geométricos que gozam dessa propriedade. Assim, por ter tomado o desenho como argumento, tornou a demonstração inválida.

(iii) Apesar da resolução de Getúlio parecer convenientemente estruturada, o critério ALA invocado na tentativa de validar a relação entre os dois triângulos, contém contradições, pois enquanto no triângulo ABC os ângulos mencionados são adjacentes ao lado AC, no triângulo DEC um dos ângulos, ∡DCE, não é adjacente a DC. O critério invocado não contém necessariamente elementos homólogos dos dois triângulos em estudo.

Na resolução de Elísio, há conflito entre o sabido e o percebido, enquanto na de Getúlio há um erro de raciocínio lógico. Isto mostra que as duas soluções, embora aparentem pertencer a GII na classificação de Houdement e Kuzniak ou GII na classificação de Parzysz, elas são de GI ou G0 nas duas classificações respectivamente, paradigmas nos quais a validação é perceptiva ou se baseia na utilização de instrumentos de medição.

É importante destacarmos que alguns teóricos como Duval (1995, 2004) destacam que em geometria não existe figura “sem legenda”, para mostrar a importância de se buscar propriedades de figuras geométrica somente a partir do que é dado em suas legendas. A respeito dessa pertinência, Dorier; Gutiérrez; Strässer (2003) afirmam e nós concordamos com eles:

> Na verdade, nenhuma propriedade geométrica é, em sentido estrito, visível em uma figura (pode-se medir se duas retas são paralelas, mas a incerteza sobre a precisão da medição é inevitável), ela tem de ser dada na hipótese ou codificada ou provada por deduções[32] (p. 3, tradução nossa).

Elísio, ao considerar que $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EC}$, ou Cuco, ao considerar que os dois triângulos são congruentes, estão exatamente agindo baseados na

[32] “Indeed, no geometrical property is, in a strict sense, visible on a drawing (one can measure if two lines are parallels, but the uncertainty on the precision of the measurement is inevitable), it has to be either given in the hypothesis or coded, or proved by deductions” (DORIER; GUTIÉRREZ; STRÄSSER, 2003, p. 3).

figura, porque em nenhuma parte da tarefa 10, apresentou-se dados que permitem afirmar que os segmentos e os triângulos a que se referem Elísio e Cuco, são congruentes.

Apresentamos mais duas resoluções. Trata-se das resoluções de Dionísio e Fernão.

Dionísio escreveu o seguinte:

> *Pela hipótese $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos e pela proposição: se uma reta que corta duas outras retas paralelas, então os ângulos ∡ABC ≅ ∡CDE e como $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ e ∡BCA ≅ ∡DCE por serem ângulos opostos pelo centro, então prova-se que os triângulos BAC e DEC são congruentes pelo critério A.L.A, c.q.d.*
> *Mas também como ângulos congruentes opõem-se a lados congruentes, então $\overline{BA} \cong \overline{DE}$ porque ∡BCA ≅ ∡DCE, então podemos provar que ∆BAC ≅ ∆DEC pelo critério L.A.L, c.q.d.*

Fernão escreveu o seguinte:

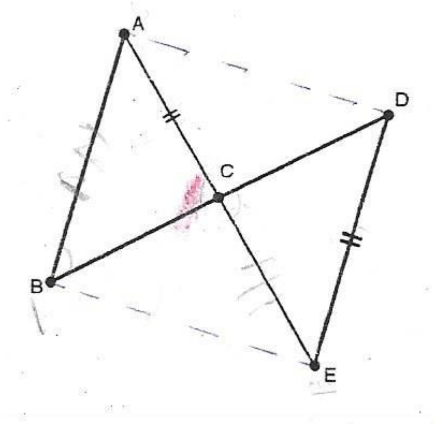
> Pelos argumentos anteriores AB e DE são paralelos e os *segmentos AC e DE são congruentes. Se tomar o segmento AE na figura vê-se que é perpendicular ao lado BD. Os ângulos A e E são (congruentes) / semelhantes, já que AB // DE mas iguais pelo fato de que $\overline{CD} \cong \overline{CE}$; $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ consequentemente $\overline{AC} \cong \overline{CE}$ logo conclui-se que os triângulos BAC e DEC são congruentes.*

Analisando a produção de Fernão notamos que: (i) ele invoca um critério de congruência de triângulos que não se aplica ao caso presente, porque o par de lados sobre os quais assentam os ângulos congruentes não são homólogos (não são correspondentes); (ii) na segunda alternativa que Fernão apresenta para demonstrar a mesma tarefa, ele invoca uma propriedade não válida, pois o fato de ter dois triângulos que tem dois ângulos congruentes, não implica necessariamente que os lados opostos a esses ângulos são congruentes.

Ainda em relação a Fernão, fora dos argumentos cuja validade é questionável, ele deduz uma relação apenas por evidências empíricas: a perpendicularidade dos segmentos AE e BD.

A mesma relação de perpendicularidade é também mencionada por Ofélia quando apresenta sua tentativa de produzir a prova pedida. Transcrevemos sua produção na figura 89.

Figura 89 - Quadrilátero obtido por Ofélia na resolução da tarefa 10



Consideremos o quadrilátero ABDE em que AE e BD são as mediatrizes. A interseção de AE e BD surge o ponto C. AE e BD são perpendiculares, logo ∡ACB ≅ ∡DCE.
Pela definição acima, o segmento $\overline{AC} \cong \overline{ED}$, *consequentemente os segmentos AB e EC são também congruentes. Logo, concluímos de que os triângulos ABC e CDE são congruentes pelo critério L.A.L.*

Fonte: Dados da pesquisa

Ofélia, além de acrescentar uma propriedade observada em sua figura, mas não fornecida no enunciado e nem deduzida de passos precedentes, não explica, nem justifica a relação de congruência dos segmentos AB e EC. Ainda constatamos na Ofélia a falta de domínio da terminologia básica da geometria plana: se considerarmos o quadrilátero ABED que ela determinou, AE e BD são diagonais e não mediatrizes, como erradamente ela escreveu.

Os três sujeitos, ao agirem assim, revelam que os seus argumentos se basearam nas aparências do desenho. Portanto, mais três provas que revelam que seus autores incluíram em suas demonstrações propriedades baseadas em evidências empíricas não dadas no enunciado da tarefa, nem demonstradas por eles em dado passo da demonstração. Em suas produções, eles manifestam esquemas de prova perceptiva.

A análise das produções dos alunos mostra que, nesta tarefa, eles foram levados pelas aparências do desenho ignorando, desse modo, a informação discursiva fornecida, o que tornou todas as suas produções inválidas com a exceção de Kelmon e Ludovico. Em vez de utilizarem o registro figural como apoio ao raciocínio, tomam-no como fonte de validação.

Dado que nossa pesquisa está voltada para estudo das concepções acerca de provas e demonstrações [em geometria plana] desse grupo de estudantes em formação inicial de professor, buscamos, por intermédio de uma pergunta, entender melhor o que sustenta as provas realizada no âmbito da tarefa 10. Trata-se da pergunta formulada nos seguintes termos: “que técnica, método, ou ferramenta é usada em matemática para validar propriedades ou teoremas?"

Apresentamos, a seguir, algumas das respostas dadas pelos estudantes entrevistados:

***Pesquisador** – [...]. Que técnica ou ferramenta é usada em matemática para validar propriedades?*
***Cuco** – Que técnica?*
***Pesquisador** – Sim, que técnica ou ferramenta usada em matemática para validar propriedades?*
***Cuco** – São conhecimentos anteriores.*
***Pesquisador** – Não, mas tem nome essa técnica. Eu quero saber qual o nome da técnica para validar propriedades ou teoremas?*
***Cuco** – Ah, está bom. Axiomas, não é?*

Pouco antes de colocarmos a pergunta havíamos tido uma conversa nos seguintes termos:

***Pesquisador** - Eu já procurei saber o que para si <u>significava validar a afirmação</u>, e <u>chegamos a à conclusão que era no sentido de dizer se aquele método ou argumento é uma demonstração ou não é</u>. Não é isso?*
***Cuco** – Sim.*
***Pesquisador** - E não no sentido de você validar aquilo, dizer que sim o método valida a afirmação. Então, a questão que lhe coloco é: que técnica ou ferramenta é usada em matemática para validar propriedades?*
Cuco fica algum tempo calado
Pesquisador – Eu quero saber, mas falamos agora.

***Cuco** – Que técnicas para validar [...]?! – Questionou-nos com um tom de quem está admirado.*
***Pesquisador** – Sim.*
***Cuco** – As demonstrações.*
***Pesquisador** – São as demonstrações – repisamos a resposta dele.*

Esse comportamento não aconteceu apenas com Cuco, mas também com outros sujeitos.

Agora passamos a apresentar a análise a *priori* e a posterior da tarefa 15.

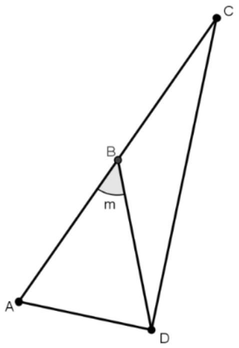
5.9. Análise da tarefa 15: Explorando procedimentos de avaliação de conjecturas

5.9.1. Análise *a priori* da tarefa 15

A seguinte situação (Figura 90) foi proposta aos alunos.

Figura 90 - Ilustração da conjectura

Considere a seguinte conjectura: Se B é o ponto médio de qualquer segmento AC e AB = BD, então o ângulo ADC é um ângulo reto.



Fonte: Goetting (1995, p. 168)

Prova por Figura (Verificação)

Desenhe qualquer segmento AC com ponto médio B.

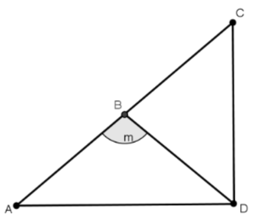
Em seguida, desenhe BD tal que AB = BD.

Ao construir BD, o ângulo m pode ser obtuso, um ângulo reto, ou agudo.

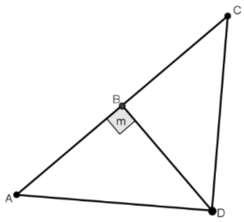
Em baixo o ângulo *m* é desenhado com cada uma das três possibilidades.

De cada vez, o ângulo ADC é forçado a ser ângulo reto, como você pode ver (Figura 91).

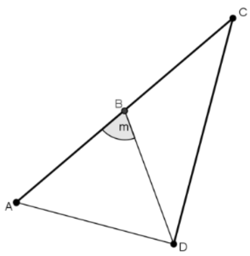
Figura 91 - Alternativas possíveis



m é ângulo obtuso



m é ângulo reto



m é ângulo agudo

Fonte: O autor (adotado de GOTTING, 1995)

Quadro 7 - Método dedutivo

Prova de duas colunas

Afirmação	**Justificação**
∆ABD é isósceles	AB = BD é dado
∡BAD = ∡ADB = m	∆ABD é isósceles
AB = BC	B é ponto médio de AC
BD = BC	AB = BD é dado
Assim ∆BCD é isósceles	Definição de isósceles
∡BCD = ∡BDC = n	∆BCD é isósceles
m + m + n + n = 180°	Ângulos do ∆ADC somam 180°
2m + 2n = 180°	Redução de termos semelhantes
m + n = 90°	Simplificação

Portanto, o ∡ADC é um ângulo reto.

Fonte: O autor (adotado de GOTTING, 1995)

Atividade a realizar:

15. 1 a) A afirmação é verdadeira?

Escolha uma das alternativas abaixo:

1. (___) Certamente não é verdadeira **2. (___)** Talvez não é verdadeira

3. (___) Talvez é verdadeira **4. (___)** Certamente é verdadeira

Justifique sua resposta.

15.2 b) A verificação é uma demonstração (Prova válida)?

Escolha uma alternativa

1. ( ) Certamente que não **2. ( )** Talvez não

3. ( ) Provavelmente é **4. ( )** Com certeza é

15.3 c) A verificação é prova matemática (demonstração) de que a afirmação é falsa?

Escolha uma alternativa

1. ( ) Seguramente que não **2. ( )** Provavelmente não

3. ( ) Talvez sim **4. ( )** Com certeza

O objetivo da tarefa é analisar que meio os sujeitos da pesquisa recorrem para avaliar se uma conjectura em geometria, generaliza uma propriedade verdadeira, dadas duas provas: uma baseada em exemplos e outra baseada em argumentos matematicamente justificados. Visa sobretudo investigar que posição tomariam no caso em que todas as verificações confirmam a propriedade invocada na conjectura.

A tarefa é uma conjectura que deve ser avaliada se é geral ou não, com base em dois modos de argumentação: um modo apresentando exaustivamente as verificações empíricas (prova baseada em exemplos exaustivos ou simplesmente, prova por figura); e, outro modo, raciocínio baseado em uma cadeia dedutiva (prova que se chamou prova de duas colunas).

No primeiro caso todos os exemplos verificam a conjectura. Contudo, embora nas figuras os ângulos ADC pareçam retos, não se sabe com certeza que o são e, mesmo que se saiba que os triângulos ADC são retângulos, não se pode ter certeza de que sempre vai ser assim em qualquer situação. Trata-se desse modo, de procedimentos da Geometria natural na qual resultado com instrumentos de construções geométricas pode validar conclusões. Porém, em matemática uma coleção de exemplos não valida uma propriedade, portanto, em ETG norteado por GII nada se pode concluir com a prova por figura, senão uma simples evidência que precisa ser validada por outros procedimentos.

O segundo modo é um argumento composto por um conjunto coerente de passos de raciocínio dedutivo apresentado na forma tradicional de duas colunas. As deduções baseiam-se nas propriedades alusivas a relações entre lados e ângulos de um mesmo triângulo; na propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e na relação entre segmentos de reta resultantes da divisão de outro segmento pelo seu ponto médio. Trata-se aqui, de procedimentos norteados por princípios da Geometria axiomática natural. Os passos da cadeia dedutiva permitem tirar uma conclusão de que a conjectura é uma propriedade válida. Assim:

No item (**15.1.a**) tanto a opção (1) como a (2) não existem argumentos que possam sustentá-las: talvez a (1) só pode ser resposta de quem não percebeu a finalidade das duas provas apresentadas: Prova por figura e prova de duas colunas; a (2) pode ser de quem está na dúvida sobre o valor de cada uma das duas provas apresentadas incluindo o entendimento do conteúdo da própria conjectura. Nenhuma das duas provas refuta a conjectura. A opção (3) pode ser uma alternativa de resposta para quem saiba que verificações empíricas não validam propriedades em matemática, mas percebe que todos os exemplos apresentados apoiam a conjectura, esgotam as possibilidades dos triângulos quanto aos ângulos (prova por exaustão) e não consegue checar a mensagem contida na “prova por duas colunas” que é apresentada como uma argumentação visando validar a conjectura. Trata-se, nesse caso, de assumir a GII como norteadora das validações, mas continuar agindo sob os princípios da GI na qual evidências empíricas podem validar propriedades. Finalmente, pela argumentação apresentada na opção (4), coerente e utilizando unicamente elementos que se deduzem das hipóteses fornecidas na tarefa, chega-se à conclusão de que é a opção certa para este item **15.1.a**.

Item (**15.2.b**): Como destacamos ao longo do trabalho, em matemática verificações empíricas não são métodos que validam propriedades, senão apenas formas de apoiar a intuição de que a propriedade pode ser válida (portanto estimular a busca de uma explicação ou validação matemática do resultado) ou então abandonar-se a conjectura (se os exemplos não apoiam a intuição).

A resposta certa é da opção que apoia que a verificação não é uma demonstração (não é uma prova válida). Essa opção é a (1). É indicativo de que o sujeito percebe a não validação geral por meio de apresentação de exemplos que confirmam uma afirmação. Trata-se de uma opção que se baseia nos princípios da Geometria axiomática natural ou simplesmente axiomática.

Uma vez que os exemplos apresentados na **Prova por figura** apoiam fortemente a conjectura, são exaustivos e em nenhum momento refutam a conjectura, escolher a opção 4 como a correta, mostra que quem age desse modo está orientando-se na Geometria Natural, paradigma este que aceita evidências resultantes de figuras ou medições como elementos que podem validar conceitos em Geometria.

Em relação à opção (3) só pode ser de quem não tem clareza sobre a diferença entre verificações empíricas e demonstração e, sobretudo quem não saiba que o único procedimento aceito para validar propriedade em matemática é a demonstração, as verificações empíricas servem ou para explorar situações que nos levam à formulação de conjecturas, ou para nos convencer que a procura de uma demonstração não vai constituir uma ação em vão, pois os exemplos sustentam fortemente a conjectura.

E, finalmente, para a opção (2) pode ser considerada como de quem acha que tanto evidências empíricas como argumentos dedutivos podem ser utilizados para validar propriedades em matemática (geometria). Contudo, Goetting (1995) e outros autores defendem que futuros professores ou professores em formação deviam saber, desde o início de suas formações, distinguir entre argumentos baseados em exemplos e argumentos dedutivos.

Item **15.3.c.:** Conforme discutimos no início da análise desta tarefa 15, os exemplos apresentados apoiam fortemente a conjectura, pois nenhum deles refuta a afirmação. Contudo, já destacamos também que evidências empíricas não constituem demonstração, exceto nos casos em que esses exemplos refutam a afirmação, o que com um só contraexemplo se considera provado. Assim:

A opção (1) constitui a resposta certa, já que nenhum dos exemplos apresentados contradiz a conjectura;

A opção (2) pode ser interpretada como de quem duvida de quando aceitar verificações empíricas como constituindo uma demonstração;

As opções (3) e (4) revelam o desconhecimento total de quando assumir que uma verificação refuta uma afirmação.

A tarefa é bastante útil para a identificação tanto dos critérios que os sujeitos recorrem para validar conjecturas geométricas quanto de outras concepções por detrás de suas práticas diante de conjecturas.

5.9.2. Análise das produções dos alunos na tarefa 15

Conforme dissemos, esta última tarefa que compunha o questionário visava estudar os meios pelos quais os sujeitos da pesquisa se apoiariam para avaliar a validade de uma propriedade expressa na forma de uma conjectura e com duas provas apresentadas para a mesma conjectura: uma baseando-se em verificação exaustiva e outra em dedução axiomática. A tarefa é composta por três itens cada um com respostas de múltipla escolha de quatro alternas das quais, uma contém argumento certo.

O item (15.1.a) em que se procurava saber se a conjectura é verdadeira ou não justificando a resposta, temos os seguintes resultados apresentados no quadro 8:

Quadro 8 - Respostas ao item 15.1a

15.1a	Afirmação é				Resposta baseada em		
Sujeito	CertNV	T.NV erd.	T. Verd	Cert. Verdad.	Verificação	Prova dedutiva	Outra – Qual?
Z1				X	?	?	?
Z2				X	?	?	?
Z3			X		?	?	?
Z4				X	?	?	?
Z5				X	?	?	?
Z6	X				?	?	?
Z7				X		X	
Z8				X	?	?	?
Z9				X		X	
Z11				X		X	
Z12				X	?	?	?
Z13	X				?	?	?
Z14			X		?	?	?
Z15				X	X		
Z16				X	?	?	?

Z17				X	?	?	?
Z18			X		?	?	?
Z19			X		?	?	?
Z20				X	X		

Fonte: Dados da pesquisa

Legenda: CertNV – certamente não é verdadeira; TNVerd. – talvez não é verdadeira; T.Verd – talvez é verdadeira; Cert.Verdad. – certamente é verdadeira

Pelo quadro percebe-se que:

- Treze sujeitos reconheceram que a afirmação é verdadeira, por terem assinalado a opção “certamente é verdadeira”.

Para este grupo de resposta, o nosso foco imediato foi entender em que eles se basearam para dar suas respostas. Constatamos que uns apresentaram justificativas que revelam claramente o meio em que se apoiaram enquanto outros apresentam justificações pouco claras. Pelo quadro vemos que:

- Apenas cinco Sujeitos (Ludovico – Z20, Getúlio – Z15, Cuco – Z11, Amorim – Z9 e Ofélia – Z7) conseguiram explicitar em que se basearam: dois na “prova por figura” (Verificação) e três na “prova dedutiva” (Prova de duas colunas). Identificamos esse fato a partir de suas produções, entre as quais transcrevemos algumas:

Getúlio e Ludovico que se basearam na verificação (prova por figura) escreveram: “*Porque em todas as situações possíveis é demonstrável que o ângulo ADC é reto como mostra a prova por figura*” (Getúlio) e “*Porque, usando uma das maneiras que é a verificação que eu acho mais prático, procurou-se verificar usando as três possibilidades ângulo agudo, reto, obtuso e verificou-se então certamente é verdadeiro pois o contrário acredito que não se provou*” (Ludovico).

Por sua vez, Ofélia (Z7), Amorim (Z9) e Cuco (Z11) deixaram registrado o seguinte:

Ofélia: “*Segundo a demonstração apresentada na prova de duas colunas”*, Amorim: *“segundo a demonstração apresentada na prova de duas tabelas*” e Cuco: “*Digo verdadeira porque esta já foi provada anteriormente (prova de duas colunas)* ”.

Cuco deixou transparecer que se baseou na “prova dedutiva” (Prova de duas colunas), mas sua justificação não é muita clara. Vejamos o que ele disse:

"*A afirmação é verdadeira; através da demonstração, por seus passos claramente é verdadeira, assim a prova de duas colunas é melhor que a verificação pois não é demonstração*".

Getúlio e Ludovico, ao se basearem em verificações, suas decisões foram norteadas por GI. Em termos de prova, categorizamos como esquema de prova perceptiva segundo Harel e Sowder (1998; 2007). Apesar das possibilidades de variação do ângulo m (agudo, reto e obtuso) terem sido esgotadas, a afirmação de que "de cada vez o ângulo ADC é forçado a ser ângulo reto" não garante que sempre seja assim.

Ofélia e Amorim mostraram que suas ações foram norteadas por GII e a prova produzida é tipo intelectual. Porém, Cuco parece usar uma mistura dos paradigmas GI e GII, pois ao afirmar que a prova de duas colunas é melhor que verificação deixa certa lacuna na justificação, como pode ser observado nas respostas dadas na entrevista que fizemos e cujos trechos apresentamos a seguir.

Pesquisador *– Nesta conjectura, foram apresentadas duas provas: uma prova por figura e outra prova, prova de duas colunas; por figura ou verificação, e de duas colunas acerca da afirmação. Então, o que coloco é: qual a finalidade dessas provas para esta tarefa?*

Cuco *– A finalidade era para mostrar que aquele ângulo sempre... É para provar que sempre que acontece nestas condições, sempre o ângulo é de 90°.*

Uma análise cuidadosa, percebe-se uma insegurança na reposta. É claro que a verificação (prova por figura) não refuta a afirmação bem como a prova de duas colunas, mas a resposta correta é: as duas provas apresentadas, cada uma delas tinha em vista procurar fundamentar se a conjectura é verdadeira ou falsa.

A situação mais crítica é dos estudantes que não conseguiram perceber a finalidade das duas provas apresentadas acompanhando a conjectura. Nessa vertente, catorze sujeitos não apresentam justificativa clara sobre em que se apoiaram na escolha de suas respostas. Esse grupo não faz nenhuma menção às duas provas que acompanham a conjectura. A título de exemplo, temos as seguintes transcrições:

*- **Dário**: "porque se B é o ponto médio e o $\triangle ABD$ é isósceles, então os segmentos AD e DC serão perpendiculares e m sempre será um agudo".*

*- **Luís**: "Porque o lado $AD \perp CD$ então forma um ângulo reto".*

*- **Jackson**: "Porque a justificação apresentada não traz evidências completas sobre os fatos que ocorrem na descrição das figuras".*

*- **Kelmon**: "Porque as justificações dadas não me convencem que $\measuredangle ADC$ é um ângulo reto".*

- ***Fred**: "Porque uma afirmação não pode deixar dúvidas pois se é afirmação deve ser clara para prever a sua verificação. Ou por outra, uma afirmação pode ser falsa visto que pode ser também como hipótese. Em outros casos <u>pode ser verdadeira depois ser provada</u>*". (Grifo nosso).

Todas as transcrições apresentadas dão forte indício de que seus autores não parecem ter entendido a finalidade das duas provas para a conjectura apresentada. Encontramos esses indícios na entrevista que tivemos com Fernão:

***Pesquisador** – Vamos para a tarefa 15, ainda no mesmo contexto de saber o que é que buscou. Leia esta tarefa. O que lhe chamou atenção? Quais as bases para decidir, por exemplo, para este caso aqui (item 15.1.a) se a afirmação dada na conjectura é verdadeira*.

O nosso entrevistado fica algum tempo sem responder. Voltamos a perguntar novamente para ele:

***Pesquisador** – É sim, é esta afirmação aqui. O que foi buscar para aceitar se a afirmação é verdadeira ou não?*
***Fernão** – Bom, eu aqui confesso que tive dúvidas em tomar decisões, é por isso que escolhi a alternativa "talvez é verdadeira". Não podia afirmar categoricamente que é falsa ou mesmo não é verdadeira. Tive mesmo dúvidas quando estava a olhar a figura. Por isso eu só coloquei "talvez é verdadeira".*
*P**esquisador** – Quer dizer que olhou na figura?*
***Fernão** – Não baseei-me também neste argumento* – referindo-se à conjectura.
Pesquisador – *Esta aqui é uma afirmação dada que pode ser verdadeira ou falsa. Esta aqui é uma ilustração desta afirmação aqui* – apontando a **Figura 89** que acompanha a conjectura - *Então, procurava-se saber se é verdadeira ou não a afirmação?*
Fernão – *Para mim tenho dúvidas*.

O guiar-se pela figura que acompanha a conjectura e o fato de não se ter preocupado com as duas provas apresentadas são os primeiros indícios de que nosso interlocutor não sabe qual era a finalidade daquelas duas provas para a conjectura. Nossa afirmação é reforçada pelas respostas dadas aos nossos questionamentos que apresentamos a seguir.

Pesquisador – *E isto aqui [apontando as provas] era para quê? O que é isto?*
Fernão – *Prova por figura. É uma prova.*
Pesquisador – *quer dizer, é uma verificação. Foi uma verificação. E aqui?* [Apontando a outra].
Fernão – T*ambém prova, de duas colunas*.
Pesquisador – Quer dizer aparece afirmação e aparece justificação.
Fernão – Sim.
Pesquisador – *Estas duas provas aqui serviam para o quê?*

Fernão – *Serviam para demonstrar, provar aquela afirmação*.
Pesquisador – Provar se é verdadeira ou falsa.
Fernão – Se é verdadeira ou falsa.
Pesquisador – Não é isso?
Fernão – É.
Pesquisador – *Então, se quisesse justificar, verificar se a afirmação é verdadeira ou não, devia-se basear-se em quê?*

Fernão não responde. Dado que nosso interlocutor se manteve calado, vimo-nos obrigados a desistir da entrevista.

A partir desse fato, buscamos mais dados, entrevistando Kelmon e Elísio cujas respostas seguem, respectivamente.

Depois de explicarmos ao Kelmon (Z19) que íamos para a tarefa 15 e ler o enunciado da mesma tarefa, lhe questionamos:

***Pesquisador** – Dizia que se B for ponto médio do segmento AC qualquer e AB for congruente a BD, então o ângulo ADC, este ângulo aqui, é reto. Foram apresentadas duas provas: verificação e de duas colunas. Então, a pergunta que se coloca é: o que é que você considerou para responder as perguntas aí colocadas? Os itens aí colocados [...] que aspectos considerou?*

Depois de 31 segundos sem resposta.

***Pesquisador** – Para responder os itens, por exemplo a afirmação é verdadeira? Tem aqui alternativas. O que você tomou em consideração para dizer, por exemplo que "talvez é verdadeira"*
***Kelmon** – É porque não tinha certeza.*
***Pesquisador** – Está bem, não tinha certeza, não usou nada? Não teve alguma referência para responder?*
***Kelmon** – [...]. Tomei como base o que está se a afirmar e a justificação.*
Pesquisador – Mas são duas provas: existe prova por figura, que eu chamei por verificação e existe esta prova aqui que eu chamei prova de duas colunas. Sim, então para responder aquelas questões em que é que se baseou?
***Kelmon** – Eu me baseei em [pausa] prova por figura.*

Entrevistamos também o Elísio (Z13).

***Pesquisador** – Vamos para a tarefa 15. O que considerou aqui para responder esta pergunta? Que aspectos tomou em consideração?*

Nosso interlocutor leva cerca de dois minutos em silêncio.

Tornamos a questionar:

***Pesquisador** – Em geral que aspectos tomou em consideração aí? [...] Porque foram apresentadas duas provas: por figura (de verificação), e de duas colunas. Em que é que se baseava?*
Silêncio
***Pesquisador** – Você no dia que estava a responder em que se baseava, no dia que preencheu o questionário, é o que eu quero entender.*
***Elísio** – Eu me baseava na figura.*

Pesquisador *– Qual figura? Tem muitas figuras: existe esta figura [apontando do enunciado] e existem estas [apontando as que constituíam prova por figura]. Qual?*

Elísio *– Primeira figura.*

Pesquisador *– Mas essa figura está a ilustrar esta conjectura.*

Elísio *– Baseei-me nesta figura, depois também nestas figuras que estão aqui* – apontando as figuras que compõem a prova por figura.

Pesquisador *– estas aqui que ilustram diferentes casos?*

Elísio *– Sim.*

Ao propormos uma conjectura não muito familiar com duas provas – uma por verificação e outra por dedução – seguida de alguns questionamentos, tínhamos dois objetivos principais: analisar em que meio nossos sujeitos se apoiariam para responder às perguntas e, depois, qual a prova seria a mais indicada.

Acontece que um dos primeiros objetivos, o de ver em que meio eles se apoiaram para começarem a responder aos questionamentos, mostrou-se difícil para os nossos sujeitos.

Interpretamos essa dificuldade como sinal de que eles não veem as provas como meio de validação das propriedades ou conjecturas com as quais estão relacionadas. Em outras palavras, do ponto de vista de conhecimento, nossos sujeitos revelaram não saber porque é que quando se tem uma propriedade ou conjectura matemática se apresenta sua prova ou sua demonstração.

Quanto ao segundo aspecto, depois de muita insistência, os estudantes entrevistados começaram a perceber que deviam buscar os argumentos em uma das duas provas. Ao concentrar suas atenções nas figuras que dão a ilusão que sempre formam um ângulo reto, usam este fato como meio de justificar suas escolhas. Nesse caso, os estudantes revelam que têm uma ideia bastante equivocada sobre a importância das verificações na validação de propriedades. Há também um pormenor que emerge do significado que nossos sujeitos da pesquisa atribuem aos termos “procedimento lógico” e “demonstração”. Vejamos um exemplo ilustrativo disso na justificativa dada por Iran (Z5) que apresentamos a seguir.

Iran para justificar sua escolha escreveu o seguinte: “*porque foi seguido um procedimento lógico (demonstração) para se chegar a afirmação*”.

Para entendermos melhor o sentido expresso na justificação, checamos a explicação dele em entrevista:

Pesquisador *– [...]. Em que é que se baseou, para dar as respostas?*
Iran *– A afirmação* ***a*** *eu disse que é "certamente verdadeira"?*
Pesquisador *- Sim, por que tomou essa posição? Qual o argumento que o senhor foi buscar? Onde foi buscar o argumento para a sua resposta?*
Iran *– Sim, aqui primeiro ele conseguiu ilustrar o pensamento que está nesta proposição aqui assim.*
Pesquisador *– Através de quê?*
Iran *– Através das figuras.*
Pesquisador *– Figuras?*
Iran *– Sim*
Pesquisador *– Então para aquela resposta foi na base destas figuras aqui (apontando a figura que ilustra a* **Prova por figura***), que é esta prova aqui que eu chamei de "prova por figura", será isso? Ou foi por outro método, recorreu a outro método?*
Iran *– A resposta que eu dei?*
Pesquisador *– Sim. Foi na base de quê?*
Iran *– Foi na base destas figuras* – apontando as figuras que ilustram a **Prova por figura –** *Estas ilustrações.*
Pesquisador *– Estas ilustrações?*
Iran *– Sim.*
Pesquisador *– Por causa de quê? Ângulo reto? Ou por outro motivo?*
Iran *– Por aparecerem ângulos retos sempre em todos os casos.*
Pesquisador *– Está bem.*

Como podemos ver pela entrevista, apesar de Iran ter utilizado o termo "demonstração" ou a expressão "procedimento lógico", seu raciocínio não foi para além de aceitar a verificação exaustiva como demonstração de que a conjectura expressa uma propriedade válida. Portanto, baseou-se em esquema de prova empírica ou prova pragmática, e considera que a verificação por meio de figuras constitui uma demonstração, uma vez que cada exemplo dado não refuta a conjectura. Pensar que uma coleção de exemplos que dão uma forte evidência de que uma dada conjectura é necessariamente uma propriedade válida, não constitui, em matemática, um bom princípio de raciocínio lógico. Pelo contrário, é ter uma ideia equivocada acerca do real significado de demonstração em Matemática.

Transcrevemos outra justificação, desta vez apresentada por Luís (Z17) para fundamentar a alternativa 4 de sua escolha: "*Porque o lado $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ então forma um ângulo reto*". Nesta justificação, Luís assumiu como estabelecido aquilo que é objeto de validação, portanto, apresenta um argumento circular. Ele parece não ter entendido que a finalidade das duas provas era justificar que o ângulo ADC é reto.

Além de Luís, também Gomes utiliza a conclusão para justificar sua escolha. De fato, depois de assinalar 4 como alternativa certa, escreveu o seguinte: "*porque o ∡BCD = ∡BDC = n uma vez que a ampluitude do ângulo é o ∡A = 90° reto, o que conclui que é isósceles o ∆BCD, como consequência disso, tem-se que ∡ADC é um ângulo reto.*" Além de não ter justificado a escolha da alternativa 4 como a melhor, Gomes introduz um elemento que em nenhum momento foi citado no enunciado da tarefa: ∡A = 90°. Ao apresentar uma parte de um conjunto de argumentos como justificativa, Gomes não parece entender que uma demonstração é constituída por todos os seus elementos – todos os argumentos – e que uma boa estrutura de uma demonstração é aquela que não tem rupturas e nem omite passos que permitem criar uma cadeia de argumentos logicamente encadeados, fornecendo, desse modo, uma trajetória da hipótese à conclusão.

Depois das entrevistas, percebemos que, além de Getúlio e Ludovico que escreveram terem se baseado na prova por figura para responderem o item, Elísio, Dário, Iran, Kelmon também tiveram o mesmo argumento. Mas, Fernão afirmou ter tido dificuldades em responder o item tendo se baseado na figura que acompanha o enunciado da tarefa. Ele deu um forte indício que não sabe qual a finalidade de uma dada prova para a propriedade ou conjectura a que está associada.

Passando para o item 15.2b, em que se procurava saber se a verificação era demonstração, constatamos que:

- Cinco sujeitos (Emerson, Gomes, Cuco, Elísio, Jackson) assinalaram a alternativa que indica não ser demonstração.

- Quatro sujeitos (Paulo, Dário, Getúlio, Kelmon) assinalaram a alternativa que indica provavelmente ser uma demonstração.

- Um sujeito (Amorim) assinalou a alternativa que indica não saber se é uma demonstração; e,

- Oito sujeitos (Dionísio, Fernão, Iran, Nilza, Ofélia, Fred, Luís, Ludovico) assinalaram a alternativa que assume ser uma demonstração.

Dentro das perspectivas de análise efetuadas, verificamos que o primeiro grupo revela entender que, em matemática, uma verificação empírica não valida propriedades. Porém, dado que o item não pedia que a escolha fosse seguida de uma explicação (justificação), recorremos às entrevistas para percebermos se a escolha foi apoiada em algum conceito matemático, ou simplesmente foi aleatória.

O estudante Cuco foi o primeiro a ser entrevistado:

***Pesquisador** – [...] vamos para alínea b, por que acha que a verificação certamente não é uma prova válida?*
***Cuco** – A verificação pode não ser uma prova válida porque pode ser verdadeiro aí, mas outros casos, pode não ser verdadeiro.*

A resposta de Cuco dá indícios que ele tem clareza das razões da rejeição da afirmação.

Quanto ao segundo grupo, à luz de nossa análise, inferimos que, os alunos que constituem esse grupo, não sabem distinguir argumentos baseados em exemplos de argumentos dedutivos. Mais uma vez para percebermos bem o raciocínio desses sujeitos durante a resolução da tarefa, questionamos Dário, Getúlio, Kelmon e Fernão colocando a seguinte pergunta: “Por que acha que a verificação apresentada pode vir a ser uma prova válida?”. A seguir apresentamos a conversa que tivemos com Fernão.

***Fernão** – Talvez tive dificuldades de superar, mas esta aqui para mim confirmo pelo menos ter ideias em relação a esta. Esta aqui vem figuras. Como são duas provas e ali só pedia-se tipo geral.*
***Pesquisador** – Não no geral, tudo tem a ver com esta aqui.*
***Fernão** – Sim, mas estas duas provas .... essa aqui ... bom ela também pode ser ... mas eu não posso estar seguro.*
***Pesquisador** – Não. Mas o senhor afirmou “com certeza”.*
***Fernão** – Estava olhando as duas.*
***Pesquisador** – Mas aqui vem claro: prova por figura (verificação).*
***Fernão** – Por figura ... Sim, aí por figura houve um pouco de dúvidas, por isso enquadrei-me mais em aqui, quer dizer, tive dúvidas em relação ao que está lá em cima. Mas de tudo, eu penso que são demonstrações só que aí depende de como a pessoa vai percebendo. Então, quando eu estava a ler ....*
***Pesquisador** – Quer dizer, a seu aluno você vai dizer, explicar lá que tendo geometria, sei lá, qualquer que seja a prova, ou pode ser verificação, ou pode ser apresentar assim uma cadeia de argumentos ao aluno, que isso é uma demonstração?*
***Fernão** – Sim. Eu penso que posso adotar as duas vias: via por imagem, via palavras.*

Como vemos pela fala de Fernão, no lugar de analisar a pergunta colocada à luz do contexto, ele deu uma resposta que aparentemente se baseou nas duas provas e, por ingenuidade ou não, afirma que ele pode adotar tanto "argumentos baseados em figura" como os "baseados em cadeias dedutivas". Tudo indica que ele não sabe em que circunstâncias isso é permitido, ou seja, em apenas para refutar afirmações, mas não para validar propriedades em que os exemplos não refutam a afirmação.

O item **15.3.c** da tarefa 15 procura saber se a verificação é uma prova que permite dizer que a afirmação é falsa. Obtivemos as seguintes respostas:

- Onze sujeitos (Dionísio, Emerson, Gomes, Iran, Cuco, Fred, Getúlio, Herculano, Luís, Jackson e Ludovico) reconheceram que não, portanto, assinalaram a alternativa 1;

- Cinco sujeitos (Fernão, Nilza, Elísio, Dário e Kelmon) assinalaram a alternativa 2, isto é, com dúvidas se a verificação mostra que a afirmação é falsa;

- Três sujeitos (Ofélia, Paulo e Amorim) consideraram que a verificação é uma demonstração de que a afirmação é falsa.

Para o grupo que não tem certeza se a verificação é uma prova matemática, Fernão deixou a seguinte explicação:

Fernão – *Bem, eu achei assim para não especular porque cada qual pode olhar num outro contexto do que eu olho, tentar interpretar duma outra forma, então, eu não posso afirmar categoricamente do tipo é uma afirmação falsa ou verdadeira, porque quando se faz demonstração pode-se concluir que é falsa ou verdadeira, mas pelos dois argumentos que eu dei aí, não dá para eu afirmar que isso é verdadeiro ou falso*.

Quanto ao grupo dos estudantes que aceitam que "a verificação não é uma demonstração de que a afirmação é falsa", ouvimos Cuco que deixou o seguinte.

Pesquisador – *Ok. Para item c porque acha que a verificação não é certamente uma demonstração de que a afirmação é falsa?*

Cuco – *Pode ser falsa aqui, mas no outro ponto a situação pode ser verdadeira. É por isso que seguramente a afirmação não é falsa. Podemos verificar com isto, sair falso; mas noutro ponto verificar que é verdadeira, dependendo acho do conjunto, né.*

Pesquisador – *Mas está-se a trabalhar simplesmente com esta conjectura.*

Cuco – *É sobre aquela conjectura que senhor doutor apresentou?*

Pesquisador – *É. Não é outra conjectura*.

Cuco – *Não, estas respostas não vão de acordo com a conjectura. Vão de acordo com a validade de tudo.*

Pesquisador – *Mas é tarefa quinze, então 15.1, 15.2 e 15.3.*

Cuco – *<u>Então não faço ideia</u>.*

Vejamos outra conversa.

Pesquisador – *Sim, tendo em conta que há duas provas aí: uma de verificação, outra de duas colunas*

Elísio – *Sim, a verificação é uma prova matemática de que a afirmação é falsa* – [Lê com tom de quem lê uma afirmação e não uma frase interrogativa] – *Não é verdade.*

Pesquisador – *Não é verdade?*

Elísio – *Não.*

Pesquisador – *Por quê?*

Elísio – *Porque se nós estávamos a verificar ou a provar temos no fim aquela coisa que nós queremos que é verdadeira.*

Pesquisador – *Ok. Mas você entendeu o que é uma verificação? Não é utilizar exemplos?*

Elísio – *Sim, utilizar exemplos.*

Pesquisador – *E você negou. Exemplos constituem uma demonstração? Podem constituir uma demonstração ou não?*

Elísio – *exemplos?*

Pesquisador – *Sim. Parece que negou que evidências constituem uma prova. Parece que você colocou aqui.*

Elísio – *A evidência empírica acho que não sei*.

Voltando para a conversa com Cuco, vemos que, ele não parece ter estabelecido uma relação entre a prova apresentada (prova por figura ou verificação) e o contexto em que ela foi produzida: validar ou refutar a conjectura. Ele manifestou um comportamento inverso ao de Fernão: enquanto Fernão não sabia que a apreensão perceptiva da figura não era suficiente para responder às questões relativas à conjectura, Cuco dissociou a prova do seu contexto. Porém, em ambos os casos, parece haver um denominador comum: a produção de uma demonstração é apenas um exercício que não persegue objetivos fixos. Em vez de considerar as duas provas com uma finalidade, explicar e validar ou refutar a conjectura, Cuco bem como Fernão e outros que agiram de igual modo, dissociaram a verificação do seu contexto. Nós interpretamos isso como indício de esquema de prova ritual segundo a classificação de Harel e Sowder (1998, 2007) já que eles podem ver a produção de qualquer demonstração como um mero exercício intelectual e não com objetivos bem claros.

A interpretação da mensagem contida na pergunta talvez seja difícil, mas dado que exemplos que apoiam uma conjectura não constituem uma demonstração, também o satisfazer a conjectura não pode constituir uma prova de que a proposição é falsa. Portanto, era preciso enquadrar a prova dentro do contexto em que ela foi produzida, quer dizer, sempre ter-se em mente que a produção de uma demonstração ou prova sempre visa alguma coisa: confirmar ou refutar.

Em resumo: Os resultados parecem mostrar que nossos sujeitos não associam a produção de uma dada prova com seu contexto, o que é forte indício de que eles não veem as demonstrações como ferramentas que explicam e esclarecem a razão de ser de uma propriedade e/ou conjectura. Podemos inferir que nossos sujeitos não foram capazes de perceber que se temos duas provas, uma empírica e outra dedutiva para uma mesma proposição, generaliza a propriedade aquela que apresenta argumentos estruturais baseados em conceitos matemáticos, salvo nos casos em que um contraexemplo refuta o que se afirma.

CAPÍTULO VI – DISCUSSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

6.1. Considerações

As noções de prova e de demonstração, apesar de não serem objeto de ensino explícito tal como o são os vários conceitos em Matemática, elas são companheiras inseparáveis desses conceitos para a sua validação. Contudo, vários estudos realizados, alguns dos quais com resultados reportados nesta pesquisa, apontam que essas noções são das mais difíceis em toda a Educação Matemática. As dificuldades manifestam-se, sobretudo, pelos conflitos existentes entre o sentido atribuído a essas noções pelos matemáticos, seu valor dentro da matemática profissional incluindo os pesquisadores em Educação Matemática, com o sentido muitas vezes construído pelos alunos e estudantes no processo de sua apropriação, às vezes, como resultado das práticas de ensino de seus professores.

O presente trabalho está voltado para o estudo de concepções de prova e demonstração dos estudantes de Licenciatura em (ensino de) Matemática, mais especificamente tem como objetivo analisar concepções de prova e demonstração em geometria que teriam estudantes de Licenciatura da Universidade Pedagógica de Moçambique.

Permeado por um quadro teórico que distingue prova da demonstração, o estudo começa com uma reflexão e revisão dos programas de ensino e Orientações curriculares moçambicanos em relação às abordagens dessas noções na escola primária e secundária do primeiro ciclo – correspondentes aos 7º, 8º e 9º das séries iniciais e 1º ano das séries finais no Brasil – e no curso de Licenciatura em (ensino de) Matemática na Universidade Pedagógica de Moçambique.

A revisão mostrou-nos que essas noções são incorporadas nos programas de ensino e Orientações Curriculares, mas sua contemplação não é acompanhada de uma discussão bem fundamentada e objetiva em comparação com o movimento da Educação Matemática que se verifica em quase todo o mundo: por exemplo, Orientações Curriculares nacionais de alguns países como o Brasil (com os seus PCN, 1998-99) e os Estados Unidos da América (com os Princípios e Normas de Padronização para o Ensino da Matemática emitidos periodicamente pelo *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM), são explícitos em relação a esse quesito.

Nestas considerações finais discorremos sobre os aspectos que consideramos relevantes para o presente estudo, nomeadamente, o papel da revisão da literatura e do referencial teórico, a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados, os principais resultados, limitações do trabalho e perspectivas futuras.

6.2. O papel da revisão da literatura

A revisão da literatura acerca das provas e demonstrações mostrou-nos diversas facetas dessas noções, entre elas, citamos:

- são uma ferramenta de estudo e comunicação em matemática;
- levantam sérias dificuldades não só para quem aprende como também para quem ensina;
- há muitas concepções não só entre alunos do ensino fundamental e médio, como também entre professores e estudantes universitários que fogem em parte do sentido atribuído às demonstrações pelos matemáticos;
- os alunos têm dificuldades em reconhecer a não validade de uma coleção de exemplos como meio de generalização de uma propriedade matemática;
- os alunos têm dificuldades em construir uma demonstração e quando eles tentam construir algumas, recorrem a exemplos para provar a generalidade de uma propriedade,
- os alunos têm dificuldades em reconhecer o valor e importância de contraexemplos para refutar uma afirmação, etc.

Essa diversidade de aspectos à volta de prova e demonstração permitiu-nos desenhar nosso próprio estudo inspirado nessa diversidade de facetas e suas formas de manifestação. Ainda permitiu-nos elaborar nossas tarefas que submetemos aos nossos sujeitos de pesquisa.

6.3. Fundamentação teórica

Em qualquer estudo de natureza científica, a teoria é de fundamental importância, porque ela nos ajuda a interpretar e dar sentido aos muitos fatos com que nos deparamos. Giddens (2013, p. 7) reforça essa ideia quando afirma que: “ao contrário do que pensa o senso comum, os fatos não falam por si”, precisam ser interpretados. Essa interpretação só é coerente quando se tem um quadro teórico que sustenta a pesquisa.

Assim, usamos a Teoria dos Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométrico (HOUDEMENT e KUZNIAK, 2003, 2006) para analisar as respostas dos sujeitos da pesquisa quanto à categoria geométrica bem como o objeto geométrico e suas propriedades mobilizadas, ou os que constituem ou não o repertório de quem agiu de um dado modo na resolução de uma dada tarefa da pesquisa. Os tipos de prova (BALACHEFF, 1987) ou os esquemas de prova (HAREL E SOWDER, 1998, 2007) foram fundamentais para classificar as provas explicitamente apresentadas pelos sujeitos segundo os procedimentos de validação ou as justificativas apresentadas durante a resolução das tarefas.

Para dissiparmos equívocos na interpretação do sentido de alguns termos recorrentes ao longo da tese, assumimos uma postura teórica que diferencia prova da demonstração segundo Balacheff (1987), apesar de algumas vezes termos utilizados o termo prova, principalmente nas conversas em entrevista com nossos sujeitos com sentido de demonstração válida. Essa indistinção se deveu a não diferenciação que eles têm dos dois termos, prova e demonstração, salvo nos casos em que o termo prova foi interpretado com significado de teste escrito que normalmente se emprega em escolas moçambicanas para avaliar e classificar alunos em dado tópico de ensino.

Achamos, também, pertinente clarificarmos em que sentido, nesta pesquisa, usamos o termo concepção, tendo merecido uma discussão teórica uma vez que o estudo está voltado para análise de concepções de prova e demonstração de nossos sujeitos de pesquisa. Nessa perspectiva teórica, utilizamos o termo concepção segundo Artigue (1990). Uma das acepções que a autora enfatiza é que a noção de concepção permite evidenciar, relativamente a um mesmo objeto matemático conceitualmente único, uma pluralidade de pontos de vista e, permite diferenciar o saber que o ensino pretende transmitir do(s) conhecimento(s) efetivamente construído(s) pelos alunos. É particularmente essa acepção que buscamos em nossa investigação.

6.4. Metodologia e procedimentos metodológicos

Optamos por recorrer a uma pesquisa de natureza qualitativa por termos notado, em nossas buscas bibliográficas, que pouco ou nada foi escrito sobre as concepções de prova e demonstração de alunos de Moçambique, particularmente, sobre as concepções de prova e demonstração de estudantes de Licenciatura em matemática. Apostamos por procedimentos metodológicos que se baseou em questionário e, em seguida, entrevista semiestruturada sobre as produções apresentadas, para permitir que houvesse uma checagem por triangulação de método. Esse procedimento foi útil, porque o questionário, composto por tarefas de prova e demonstração que os sujeitos deviam produzir ou avaliar, serviu para que os nossos participantes da pesquisa deixassem registrado em papel suas ações durante a resolução das tarefas contempladas na pesquisa, e a entrevista serviu para os mesmos explicitarem o pensamento por detrás das resoluções, pois nem sempre é fácil de deixar registrado em papel por vários motivos: falta de hábito de escrita, limitação do espaço, economia de tempo e de ação, etc. Esse procedimento mostrou-se muito útil, porque em alguns casos, houve dissipação de equívocos surgidos durante a resolução, o que ajudou a dar uma melhor interpretação do que foi colocado e consequente alteração ou melhoria da mensagem tanto de quem transmite ou de quem recebe (neste caso o sujeito da pesquisa e/ou o pesquisador).

6.5. Principais resultados

Tomando em consideração a checagem por triangulação do método que consistiu no confronto entre as respostas ao questionário e as respostas obtidas na entrevista sobre as resoluções do respectivo questionário, observamos que:

1. Os sujeitos da pesquisa, com exceção de dois a quatro, num universo de 19, mostraram não saber que o procedimento utilizado em matemática para validar propriedades e conjecturas é a demonstração.
2. Os sujeitos da pesquisa, com exceção de cinco no universo de 19, recorreram a procedimentos que aparecem nos livros didáticos para tentar validar a propriedade acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo: uso de casos particulares (quadrado) ou a recorte e/ou

dobradura como demonstração dessa propriedade. Também se constatou o uso de argumento circular na produção de algumas demonstrações.

3. Os sujeitos da pesquisa aceitaram um determinado método como demonstração não pela sua riqueza matemática – propriedades matemáticas associadas ao procedimento –, mas por o reconhecerem que está explicitamente apresentado em algum livro didático. Assim:

- métodos de recorte e dobradura foram aceitos na mesma proporção que alguns métodos baseados em propriedades de retas paralelas para validar a propriedade da soma dos ângulos de um triângulo.
- os métodos foram aceitos pela praticidade dos instrumentos envolvidos e rejeitados pela complexidade dos instrumentos utilizados nas manipulações, sem justificação plausível. É assim que métodos como os de recorte e dobradura ou o uso do *software* foram aceitos, tanto durante a resolução da sequência das tarefas, como nas entrevistas, com a exceção de um só sujeito da pesquisa que rejeitou todos os métodos empíricos da lista de métodos válidas para generalização, mas métodos como os de uso de transferidor ou empíricos contemplados na pesquisa foram rejeitados pela maioria.

4 Os exercícios para a fixação do conteúdo da formulação de algumas propriedades foram vistos como demonstração dessas propriedades por alguns sujeitos da pesquisa, particularmente os relacionados com a soma dos ângulos internos de um triângulo, pois foram utilizados na tentativa de provar essa propriedade.

5 Em um universo de 19 sujeitos, mais da metade mostrou não saber utilizar as propriedades da mediatriz para estruturar uma simples demonstração das propriedades de um triângulo isósceles.

6 O estudo mostrou que os sujeitos de nossa pesquisa, com exceção de uma aluna, não sabem avaliar a validade de uma demonstração: tomam os passos da cadeia dedutiva de forma isolada do resto, e não todos os passos relacionando uns dos outros. Apenas uma estudante mostrou saber como avaliar uma demonstração válida, porém, durante a resolução das tarefas do questionário não produziu sequer uma demonstração bem estruturada.

7 O estudo mostra que não só professores tendem a ver provas apresentadas em língua natural como deficientes (BARKAI et al., 2009; DREFUS 2000, apud BARKAI et al., 2009) como também futuros professores em formação nas licenciaturas em matemática que participaram desta pesquisa, mostraram desenvolver cedo essa concepção. Os mesmos sujeitos mostram também que têm dificuldades em compreendê-las tal como relatam Barkai et al. em relação a professores em exercício.

8 Em um contexto que se dá uma conjectura com duas provas, uma baseada em exemplos e outra em cadeia dedutiva, perguntado se a conjectura é uma propriedade válida, o estudo constatou que a maioria dos 19 sujeitos não conseguiu descobrir que devia se basear em uma das provas para responder. Apenas cinco estudantes souberam justificar suas respostas, apontando uma das provas como o meio de apoio, mas entre estes, três apoiaram-se em verificações usando exemplos.

9 Identificamos neste estudo que quase todos os sujeitos da pesquisa, com exceção de um, consideram a invariância da soma dos ângulos internos de um triângulo em um ambiente dinâmico de geometria como forma de validação dessa propriedade, mas não consideram esse procedimento como uma demonstração da propriedade. Eles também consideram que o método de recorte e dobradura valida a propriedade, embora não o considerassem como uma demonstração.

10 O estudo ainda mostrou que, nem sempre conhecer bem os critérios básicos ou esquemas para a construção de uma demonstração é sinônimo de proficiência em demonstrações: uma estudante participante da pesquisa mostrou, em uma entrevista, conhecer bem as técnicas de uma demonstração, bem como o esquema para sua construção, mas não apresentou sequer uma demonstração válida das propriedades simples da geometria da escola secundária contempladas no estudo, na qual está sendo preparada para ensinar. Este resultado pode revelar que não adianta ensinar apenas regras enquanto não colocamos o futuro professor diante de tarefas que exigem que ele construa por si uma demonstração. Isso pode ser um resultado bastante significativo em apoio a tese de Healy e Hoyles (1998) segundo a qual a capacidade de

construir, avaliar ou escolher uma demonstração válida, não é simplesmente uma questão de realização matemática geral, mas uma habilidade que se constrói na prática.

11 Ainda os resultados mostraram que os sujeitos não sabiam quando é que se deve recorrer a um exemplo como meio de prova e quando não, ou o que é um contraexemplo de uma afirmação.

Retomamos a questão de pesquisa, ou seja: **Quais concepções estudantes de Licenciatura em Matemática apresentam em situações que envolvem provas e demonstrações em Geometria plana?**

Os fatos que identificamos acima apresentam indícios de concepções dos sujeitos investigados, concepções essas que levam, na maioria das tarefas apresentadas, a erros no que diz respeito à validação das propriedades e/ou afirmações nelas envolvidas. Identificamos, por exemplo, que os alunos de Licenciatura em Matemática que participaram da pesquisa veem as provas e demonstrações como um simples ritual dissociado da sua grande função, que é a de validar propriedades e conjecturas verídicas, ou de refutar conjeturas falsas.

Ainda o estudo revela que, entre os sujeitos da pesquisa, reina a concepção de que existem métodos empíricos que validam propriedades geométricas, mesmo que não sejam demonstrações, e métodos empíricos que não validam propriedades geométricas, consoante o tipo de instrumento utilizado. Do ponto de vista das concepções segundo Artigue (1990), isso pode significar simplesmente que os nossos sujeitos da pesquisa, até ao quarto ano da faculdade, continuam com um significado de demonstração que foge da noção prevalecente em matemática.

Os resultados do estudo, também, mostram que apesar de terem sido alguns sujeitos que rejeitaram este ou aquele método baseado em exemplos, em geral, não sabem que é inaceitável o recurso a evidências empíricas como meio de generalização, senão apenas argumentos baseados em conceitos e propriedades.

Ademais, as respostas dos sujeitos da pesquisa revelaram o desconhecimento da importância de justificar cada passo de uma demonstração devidamente válida. Ainda, há respostas que mostraram claramente que os sujeitos da pesquisa, na maior parte dos casos, não se basearam em critérios matematicamente justificáveis para resolver situações que envolvem provas e demonstrações em geometria. Um pormenor bastante importante é que o significado de demonstração construído pelos sujeitos parece mais atrelado aos livros didáticos que apresentam de forma equivocada as demonstrações, do que de ideias matemáticas.

Enfim, do ponto de vista da teoria dos paradigmas e espaço de trabalho geométrico, os resultados alcançados mostram que, na maior parte dos casos, os sujeitos agiram norteados por GI e os conceitos e propriedades da geometria plana não parecem ter sido devidamente assimilados. E em termos de tipo de provas ou esquemas de prova, as provas pragmáticas ou provas perceptivas foram as que prevaleceram mais.

Retomando nosso objetivo geral, i e, “analisar as concepções de prova e demonstração em geometria de estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique”, os pontos elencados mostram que foi atingido.

Quanto aos objetivos específicos, o estudo mostrou que:

1. Os sujeitos, ao não mostrarem estratégias consistentes de produção de demonstrações, nem justificativas com embasamento matemático plausível, apresentam estratégias que parecem mais influenciados por livros didáticos do ensino fundamental. A maioria, ao não ser capaz de mostrar domínio na produção de demonstrações, nem como se encadeiam os diferentes passos de demonstração, ao usar casos particulares para validade algumas asserções matemáticas, dá indícios que o nosso primeiro objetivo específico da pesquisa foi atingido.
2. **Em relação ao segundo objetivo, o** estudo não mostrou se os sujeitos sabem que provas e demonstrações desempenham funções específicas importantes em matemática – os dados mostram sujeitos que lidam com provas e demonstrações como sendo mais um tópico de aprendizagem em matemática e não como um meio de comunicação e de validação em matemática.
3. **Quanto ao terceiro objetivo, o** estudo mostra que os nossos sujeitos não têm um significado claro do que é demonstrar em geometria: alguns exemplos são vistos como demonstração; em alguns casos, a prova foi associada à verificação se um dado valor satisfaz ou não uma equação, e nunca prova como explicação.

4. **Por último, o** estudo mostrou que os nossos sujeitos não utilizam critérios consistentes para avaliar provas e demonstrações em geometria.

Retomando nossa hipótese de pesquisa, o estudo mostrou que as estratégias que os alunos da Licenciatura que participaram da nossa pesquisa recorrem para produzir provas e demonstrações em geometria da escola básica refletem, de forma clara, insegurança e falta de domínio de regras básicas da produção de uma demonstração em matemática, insegurança e falta de domínio de conceitos básicos da geometria plana.

6.6. Implicações, limitações e perspectivas futuras

Os resultados desta pesquisa são de certa maneira preocupantes se atendermos que os sujeitos nela envolvidos são futuros professores em seu último ano de formação, que tiveram ao longo de três a quatro anos um curso que deve prepara-los para darem aulas em séries médias e finais do ensino secundário e médio. Do ponto de vista do saber a ser ensinado, os resultados mostraram que este grupo de sujeitos não está devidamente preparado para ensinar a geometria acompanhada de um de seus componentes mais tradicionais, as provas e demonstrações, nas escolas de Moçambique. Apesar de ser uma amostra pequena, em comparação com os restantes de alunos da licenciatura em ensino de matemática não contemplados no estudo, os resultados podem espelhar uma faceta importante do ensino da Geometria na UP: a forma adotada para a oferta da disciplina Geometria Euclidiana – apenas um semestre e com a ideia de que se trata de uma disciplina com apenas conteúdos de revisão, uma vez que se pressupõe que é conteúdo da escola secundária – é equivocada. A Geometria Euclidiana plana é um problema real de ensino e aprendizagem tanto na Universidade Pedagógica, como em escolas de Moçambique. As falas dos sujeitos da pesquisa, segundo as quais, a geometria é relegada ao segundo plano na escola secundária e, quando se alcança esse tópico, sobretudo no que diz respeito às demonstrações, os professores dão apenas trabalhos de casa que nem sempre são corrigidos em sala de aulas, atestam que esses alunos entram na Universidade Pedagógica com sérias lacunas em geometria. Alguns sujeitos afirmaram que era pela primeira vez que viam as demonstrações em geometria.

Também as entrevistas, tanto em Nampula como na Beira, revelaram um dado assombrador: a geometria plana em geral, e as provas e as demonstrações em geometria plana em particular, não são devidamente tratadas na UP enquanto instituição que forma professores que estarão diretamente envolvidos no ensino e aprendizagem dessas noções, como atesta o desempenho dos estudantes obtido na resolução das tarefas do questionário da pesquisa, coadjuvado com as entrevistas realizadas.

Um elemento importante a reter é que os sujeitos participantes da pesquisa deixaram transparecer que na UP nem todos os professores responsáveis pela Geometria euclidiana dão a devida atenção às provas e demonstrações: há casos em que não existe discussão sobre a natureza de uma demonstração correta, deixando desse modo, ainda muito mais mal preparados os alunos.

Todos esses relatos constituem alguma contribuição útil do nosso estudo para uma reflexão profunda sobre o estágio de ensino e aprendizagem das provas e demonstrações em geometria plana na instituição de que viemos – a Universidade Pedagógica – não só nos Campi da Beira e de Nampula, mas em toda a Universidade.

Contudo, as concepções determinadas neste estudo resultam apenas do material coletado nesta pesquisa. Assim, o estudo não pôde determinar se tais concepções são o resultado da prática de ensino a que os sujeitos foram submetidos até a Universidade, ou simplesmente reflexos de se terem se esquecido da matéria, uma vez que ela foi supostamente estudada no segundo semestre do primeiro ano da graduação. Ainda outra limitação deste estudo é que os resultados espelham apenas uma amostra pequena de duas delegações da Universidade e não da maioria dos dez Campi da referida Universidade. Porém, é um diagnóstico que pode dar algumas direções sobre a abordagem dessa disciplina na UP, pois autores revisados como Martin e Harel (1989) relatam alguns episódios constatados com futuros professores nos Estados Unidos, na teoria de números, que se aproximam dos resultados de nossa pesquisa em alguns aspectos: a ideia de utilizar exemplos particulares como método de validação de propriedades gerais. Também o estudo de Knuth (2002a, 2002b) que apresenta algumas concepções de professores em exercício no ensino secundário e médio nos Estados Unidos, aproxima-se dos resultados da presente pesquisa. E mesmo alguns resultados de Almouloud (2007b) segundo os quais alguns professores do Ensino Fundamental e Médio da Cidade de São Paulo associavam demonstração em matemática à ilustração de conceitos por meio de figuras, ou não sabiam distinguir entre hipótese e tese de uma propriedade ou teorema, atestam que nossos resultados, apesar de resultarem de um grupo de dezenove alunos em formação para o magistério, são dignos de merecerem uma reflexão sobre o tipo de professores que estamos formando na Universidade Pedagógica de Moçambique, nomeadamente.

Na revisão da literatura reportamos alguns autores como Usiskin (1987), Harel e Sowder (1998) e outros que apontam como uma das causas do fracasso no ensino e aprendizagem das demonstrações em geometria, a ineficácia dos métodos de sua abordagem: as demonstrações são apresentadas como produto acabado, há falta de envolvimento do aluno, há falta de preocupação em destacar o significado das demonstrações em matemática, as provas e demonstrações são vistas pelos professores como mais um tópico a ensinar e não um meio pelo qual a comunicação em matemática se efetiva. Este estudo mostrou que nossos sujeitos de pesquisa não parecem ter consciência de que as demonstrações, vistas em diferentes cadeiras do curso de licenciatura em ensino de matemática, têm em geral o mesmo objetivo: validar os conceitos matemáticos bordados.

Em tarefas que envolviam formulação de conjecturas seguida de sua validação ou refutação, identificamos alunos que se conformaram em utilizar figuras particulares – como o recurso a triângulos equiláteros, quadriláteros com lados paralelos – e assumiam isso como se fosse caso geral, sem se preocuparem em explorar casos não típicos para ver se lhes levavam a contradições. Dessa constatação, achamos pertinente que atividades desse tipo sejam estimulados tanto em Geometria como em outras disciplinas de modo que os nossos alunos se habituem a atividades de formulação de conjecturas seguidas de sua validação ou refutação. A simples apresentação de propriedades e teoremas bem formuladas não deveria ser única maneira de nossos alunos lidarem com provas e demonstrações.

Em nosso estudo, combinamos dois métodos de coleta de dados: o questionário e entrevistas sobre respostas das tarefas do questionário. Esse procedimento mostrou-se bastante útil para fazer emergir o significado que nossos sujeitos têm de demonstração [em geometria]. Não identificamos esse tipo de procedimento metodológico nas pesquisas a que tivemos acesso. Acreditamos que essa forma de conceber a realização da pesquisa pode constituir um diferencial em relação às pesquisas realizadas e, por conseguinte, um dos nossos contributos à Educação Matemática em geral e, em particular, para futuras pesquisas, tanto na Universidade Pedagógica, como em outros quadrantes. Outrossim, a forma como construímos as tarefas da pesquisa pode ser adaptado para contextos de formação inicial e continuada de professores de forma a permitir a emergência de diferentes concepções que nem sempre são objetos de discussão.

No contexto da organização de nossa pesquisa, revisamos alguns autores como Goetting (1995) que aponta que é preciso deixar bem claro, desde o início de sua formação para o magistério, que em matemática evidências empíricas não são aceitas como meio de generalização de propriedades, isto é, um conjunto de exemplos nunca pode ser tomado como meio de argumentos para validar propriedades universais para uma classe de entes matemáticos, senão apenas argumentos baseados em conceitos bem estabelecidos em matemática – as demonstrações. Ainda, fizemos referência à Stylianides (2011) que defende que não se pode ter um bom domínio das concepções dos alunos sem entender as ideias que sustentam essas concepções. Em nosso estudo, vimos alunos sem certeza de métodos de prova que validam ou não validam propriedades geométricas. Vimos alunos assumindo métodos de verificação de propriedades que aparecem em alguns livros didáticos de Moçambique como demonstração dessas propriedades. Entendemos que esse resultado é uma contribuição valiosa que pode ser incorporada nas práticas de ensino na nossa Universidade, para que nossos futuros professores saiam da formação tendo ideias claras sobre como se validam propriedades em matemática. A incorporação do tipo de tarefas que concebemos para nossa pesquisa, bem como o estudo crítico dos materiais de ensino, particularmente os livros didáticos, deveria ser tomado a sério, para além da necessidade de se envidar esforços no sentido de ver as disciplinas que envolvem conteúdo do ensino fundamental e médio como importantes para a formação do futuro professor que lidará com esse conteúdo.

Entendemos que, pelos resultados que obtivemos neste estudo, é imprescindível repensar a modalidade em que a disciplina de Geometria

Euclidiana Plana é abordada na Universidade Pedagógica: no lugar de supor que é uma disciplina cujo conteúdo é de revisão, devia-se pensar que se trata de uma disciplina na qual os alunos da instituição enfrentam imensas dificuldades. Por conseguinte, sua abordagem devia ser repensada de forma a permitir que vários aspectos sejam discutidos e reforçados. Isso é extensivo às outras disciplinas que envolvem conteúdo do ensino fundamental e médio como Matemática escolar e outras.

Ainda os resultados desta pesquisa nos dão mais encorajamento no sentido de ver a possibilidade de criarmos um grupo de pesquisa que permita disseminar os resultados obtidos e contribuir na formação continuada de professores em nosso meio. Essa é uma das perspectivas que estamos abraçando desde já.

A pesquisa gerou muitos dados. O questionário e as entrevistas produziram muitos dados, porém, por diversos motivos tivemos que fazer certas escolhas para sua análise. Futuramente pretendemos aprofundar a análise desses dados, sobretudo os dados que não foram levados em consideração na presente análise. Ainda, em relação às tarefas que foram deixadas em apêndice, lembrando qual o objetivo expresso para cada uma delas, pela escolha feita e destacada antes da apresentação da análise a *priori*, seus objetivos acabaram não merecendo destaque neste relatório final. Assim, outra nossa perspectiva futura, é aprofundar os dados coletados nessas tarefas envolvendo justamente o papel da prova e demonstração que entendemos importante serem analisadas com mais profundidade.

REFERÊNCIAS

Alibert, D.; Thomas, M. Research on Mathematical Proof. In David Tall (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, The Netherland: Kluwer, p. 215-230, 1991.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007a. (Pesquisa, n. 121).

_____. Prova e Demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **Reunião da ANPED**, 30, 2007, Caxambú, ANAIS ELETRÔNICO Caxambú: 2007b. Disponível em <http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/index.htm>. Acesso em: 13/07/2008.

AMARAL, A. J.; NHALUNGO, C. **Livro do aluno – 6ª classe – Matemática: As maravilhas da matemática: 6ª classe**. Maputo, Editora: Plural Editores, Porto Editora (Livro adoptado pelo Ministério da Educação da República de Moçambique para uso nas escolas), s/d.

ARAÚJO, J. de L.; BORBA, M. de C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática *In* Borba & Araújo (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica (Coleção: Tendências em Educação Matemática), p. 27-47, 2006.

ARTIGUE, M. **Épistémologie et didactique. *Recherches em didactique dês Mathématiques*.** Grenoble: La Pensée sauvage-Éditions, vol. 10-2.3, p. 241-286, 1990.

_____. **Epistemología y concepciones**. Traducción de un texto escrito en francês: Maria Fernanda Espitia Olaya, 1990.

BALACHEFF, N. **Processus de prevuve et situations de validation**. Educational Studies in Mathematics, vol. 18: p. 147-176, 1987.

_____. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Transleted by David Pimm. In: Pimm, D. (ed.), **Mathematics, teachers and children** (Hodder & Stoughton: London), 24, p. 216-235, 1988.

_____. **The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof**. Les Cahiers du Laboratorie Leibniz, Grenoble, n. 109, 2004.

_____. Is argumentation an obstacle ? **International Newletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 1999**. Disponível em <http://www.lettredelapreuve.it>. Acesso em 25 de Outubro 2011.

_____. Conception, connaissance et concept. In : Denise Grennier (ed.) **Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques**. Grenoble : IMAG, p. 219-244, 1995.

BARKAI, R. et al. Modes of Argument Representation for Proving – the case of general Proof. **Proceedings of CERME 6, Working Group 2**, p. 271-280, 2009. Disponível em <www.inrp.fr/editions/cerme6>. Acesso em 25 outubro 2010.
BELL, A. W. **The Learning of Process Aspects of Mathematics**. Educational Studies in Mathematics 10, p. 361-387, 1979.

BELL, A. W. **A Study of pupils' Proof-Explanations**. Mathematical Situations. Educational Studies in Mathematics 7, p. 23-40, 1976.

BISHOP, A.J.,et al. **International Handbook of Mathematics Education, vol.4, Part 2**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BRASIL, Secretaria da educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – 1ª a 4ª séries** – Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Secretaria da educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – 5ª a 8ª séries** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da Matemática. In: BRUN, J. (Dir.) **Didáctica das matemáticas. Tradução: Maria José Figueiredo**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Capítulo I, p. 35-113. (Colecção: Horizontes Pedagógicos).

_____. **La théorie des situations didactiques**. Université de Montréal, 1997.

BULF, C. **Etude des efets de la symetrie axiale sur la conceptualisation dês isometries planes et sur la nature du travail geometrique au college**. Tese (These: pour obtenir le title de Docteur de L'Universite Paris 7, Spélialité: Didactique dês Mathematiques). Université Paris Diderot (Paris 7). UFR de Mathématique ÉCOLE DOCTORALE Savoirs Scientifiques: épistémologie, histoire dês sciences, diadactique dês disciplines, 2008.

CABASSUT, R. et al. Conceptions of Proof – In Research and Teaching. In: Gila Hanna and Michael de Villiers (Eds.), **Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study**. New York: Springer p. 170-190, 2012.

CARVALHO, R. F.; MARTINS, Z. A. **M_8 Matemática 8ª Classe**. 6. ed. Maputo: Texto Editores, 2007.

CHACÓN, I. Mª G. ; KUZNIAK, A. Les espaces de travail géométrique de futurs professeurs em contexte de connaissances. **ANNALES de DIDACTIQUE e de SCIENCES COGNITIVES**. IREM de STRASBOURG, p. 187-216, 2011.

CHAZAN, D. **High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, Nº 4, Aspects of Proof, pp. 359-387, 1993.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, p. 9-21, 2006.

de VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos Diferentes Papeis da Demonstração em Geometria Dinâmica**. Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, 2002, Visue, Portugal. Actas (CD-ROM) Viseu: Associação de Professores de Matemática, 2002. Disponível em <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html.>.Acesso 26 de Outubro 2010.

_____. **Papel e funções da demonstração no trabalho com Sketchpad**. Trad. Eduardo Veloso Educação e Matemática, n. 63, p. 31-36, 2001.

_____. **Thinking Proof with Sketchpad**. Key Curriculum Press. 1999.

_____. **The role and function of proof in mathematics**. Pythagoras, n. 24, p. 17-24, 1990.

DORIER, J. L.; GUTIÉRREZ, A.; STRÄSSER, R. Geometrical thinking: [Introduction to Thematic Working Group 7]. In: Mariotti, M.A. et al. European Research in Mathematics Education III: **Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**, 28 February - 3 March 2003, Bellaria, Italia. Pisa (Italia): Università di Pisa, 2004. Disponível em: http://archive-ouverte.unige.ch/unige:16876. Acesso em 04/05/2015.

DRAISMA, J.; SOVERTKOV, P. **Eu gosto de Matemática. 6ª Classe**. Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE), 1991.

DRAISMA, J.; MANJATE, A. **Eu Gosto de Matemática: 7ª Classe**. Secção de Matemática, Departamento de Planificação Curricular. Maputo, 1988.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamient Humano: Registros Semióticos e Aprendizjes Intelectuais**. Universidad Del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

_____. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals**. Berna: Peter Lang, 1995.

_____. Questioning argumentation. **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof**. Novembre/Décembre 1999. Disponível em <http://www.lettredelapreuve.it>. Acesso em 25 de outubro 2011.

FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA. **Plano Curricular do Curso de Licenciatura em Ensino de Matemática com Habilitações em Ensino de Física ou Habilitação em Ensino de Informática**. Departamentos de Matemática: Curso de Matemática. Maputo, 2009.

_____. **Plano Analítico da Disciplina Geometria Euclidiana**. Departamento de Matemática: Curso de Matemática. Maputo, 2010.

FETISSOV, A. I. **A demonstração em Geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).

_____. **A demonstração em Geometria**. Tradução do Russo por Pedro Lima. Moscovo: Editora Mir, 1985.

FISCHBEIN, E.; KEDEM, I. Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In: A. Vermandel (Ed.), **Proceedings of the sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Antwerp, p. 128-131, 1982.

FREITAS, M. T. M.; FIORENTINI, D. **Desafios e potencialidades da escrita na formação docente em matemática**. Revista brasileira de Educação, vol. 13, n. 37, p. 138-149, 2008.

FREIXO, M. J. **Metodologia Científica: Fundamentos, Métodos e Técnicas**. 3. Ed. Lisboa: Instituto PIAGET, 2011.

FUCHS, W.R. **A matemática moderna**. Tradução de Marianne Arnsdorff e Joé. Manasterski. Revisão do Prof. L. H. Jacy Monteiro. São Paulo, Editôra Polígono, 284 p. ilus, 1970.

GALBRAITH, P. L. **Aspects of proving: A clinical investigation of process**. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 1-28, 1981.

GARCIA, A.V.M. História Oral e Educação Matemática. In: Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, p. 79-100, 2006.

GERDES, P.; CHERINDA, M. **Teoremas Famosos da Geometria**. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GERDES, P. **Cultura e o Despertar do Pensamento Geométrico**. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991a.

GERDES, P. **Etnomatemática: Cultura, Matemática, Educação**. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991b. (Colectânea de textos).

GIDDENS, A. Sociologia. 9.ed. Tradução de Alexandre Figueiredo et al. Lisboa:

Fundação Calouste Gulbenkian, 2013.

GOETTING, M. M. **The college students' understanding of mathematical proof**. 222f. Doctoral dissertation, University of Maryland, Faculty of the Graduate School, College Park, 1995.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8.ed. Rio de Janeiro. São Paulo: Record, 2004.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e Ensinando Geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental**. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 1998.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**, 207 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/2545>. Acesso em 2/03/2009.

GRIFFITH, P. A. **Mathematics at the turn of the millennium**. The American Mathematical Monthly, vol. 107, n. 1, p. 1-14, 2000.

GUITIÉRREZ, A.; JAIME, A. **Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of triangle**. Journal of Mathematics Teacher Education 2: 253-275, 1999. Disponível em <http://www.springerlink.com/content/p74u36443680199/fulltex.pdf> Acesso em 22 de março de 2012.

HANNA, G. et al. ICMI Study 19: Proof And Proving In Mathematics Education: Discussion Document. In: Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh, Gila Hanna, Michael de Villiers (Eds.). **Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, vol. 1**. Taiwan, 2009. Disponível em <http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf> Acessado em 28 de Agosto de 2009.

HANNA, G. **Challenges to the Importance of Proof**. For the learning of mathematics, vol. 15, n. 3, p. 42-49, 1995.

HANNA, G. **Some pedagogical aspects of proof**. Interchange, vol. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In: Alan H. Schoenfeld, Jim Kaput, and Ed Dubinsky (Eds.) **Research in College Mathematics Education III**, pp. 234-283, 1998.

HAREL, G.; SOWDER, L. Toward Comprehensive on the Learning and Teaching of Prooof. In: F. Lester (Ed.) **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, National Council of Teachers of mathematics, 2007.

HEALY, L.; HOYLES, C. **Justifying and Proving in School mathematics: Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK. Research Report**. Mathematical Science, Institute of Education, University of London, 1998.

HEALY, L.; HOYLES, C. **A study of Proof Conceptions in Algebra**. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 31, Nº 9, p. 396-428, 2000.

HEINZE, A.; KWAK, J Y. Mathematical Understanding of grade 8 students. In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** Utrecht, The Netherlands: University, Vol. 1, 398, 2001.

HEINZE, A.; KWAK, J. Y. **Informal prerequisites for informal proofs**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), vol. 34, N. 1, p. 9-16, 2002.

HEINZE, A.; REISS, K. Reasoning and Proof: methodological knowledge as a component of proof competence. CERME 3. **Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**. Bellaria, Italia, 2003.

HERSH, R. **Proving is convincing and explaining**. Educational Studies in Mathematics, vol. 24, n. 4, p. 389-399, 1993.

HERSHKOWITZ, R. et al. Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher e J. Kilpatrick I (Eds.), **Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education**. Cambridge, MA: Cambridge University Press, p. 70-95, 1990.

HOUDEMENT, C. **A la Recherche d'une coherence entre Geometrie de L'Ecole et Geometrie Du College**. REPERES – IREM, Nº 67, p. 69-84, 2007.

HOUDEMENT, C.; KUZNIAK, A. **Paradigmes Géométriques et enseingnement de la géométic. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, volume 11, p. 175-193, 2006.

_____. Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In **Proceedings of European Research in Mathematics Education III. Working Group 7**, 2003. Disponível em <http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf> Acesso em 24 de julho de 2011.

_____. **Paradigmes Geometriques**. Petit x, n. 5, p. 5-21, 1998-1999.

HOYLES, C. **The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof**. For the learning of mathematics, vol. 17, n. 1, p. 7-16, 1997.

JAHNKE, H. N. **Proofs and Hypotheses**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), vol. 39, n. 1-2, p. 79-86, 2007.

JONES, K. **Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof**. Mathematics Education Review, vol. 9, p. 21-32, 1997.

KNUTH, E. J. **Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics**. Journal of Mathematics Teacher Educational, Vol. 5, Nº 1, pp. 61-88, 2002a.

KNUTH, E. J. **Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof**. Journal for Research in Mathematics Educational Vol. 33 Nº 5, pp. 379-405, 2002b.

KUZNIAK, A. Um essai sur la nature Du travail géometrique en fin de la scolarité obligatoire en France. **Annals de Didactique et de Sciences cognitives**, vol. 15, p. 75-95. IREM de STRASBOURG, 2010.

_____. L'Espace de Travail Mathématique et sés gêneses. **Annals de Didactique et de Sciences Cognitives**, vol. 16, p. 9-24. IREM de STRASBURG, 2011.

KUZNIAK, A. et al. Introduction geometrical thinking. In: **Proceedings of CERME 6**. Lyon, France, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6>. Acesso em: 30 agosto de 2011.

LAKATOS, I. **Proof and refutations: the logic of mathematical discovery**. Cambrige University, 1989.

LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ENSINO PRIMÁRIO: objectivos, perfil profissional e campo de aplicação. In: **DADOS PARA ANUÁRIO**, 1998/1999.

MARRANDEZ, R.; GUTIÉRREZ, A. **Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment**. Educational Studies in Mathematics, N. 44, p. 87-125, 2000.

MARTIN, W.G.; HAREL, G. **Proof Frames of Preservice Elementary Teachers**. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No. 1, p. 41- 51, 1989.

MEC/INDE. **Plano Curricular do Ensino Secundário Geral: Objetivos, Políticas, Estrutura, Planos de Estudo e Estratégias de Implementação**. Maputo, MEC/INDE, 2007.

MEC/INDE. **Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG): Objectivos, Política, Estrutura, Plano de Estudos e Estratégias de Implementação**. Maputo, 2007.

_____. **Programas do Ensino Básico – I ciclo (1ª a 2ª classes)**. Maputo:

MINED-INDE, 2003.

MINISTÉRIO da EDUCAÇÃO e CULTURA (MEC). **Sistema Nacional de Educação: Lei Nº 6/92**. Maputo: MEC, 1992.

______. **Programas do Ensino Básico – III ciclo (6ª a 7ª classes)**. 2003. Maputo: MINED/INDE. 2003.

_____. **Plano Curricular de Formação de professores para o Ensino Primário**. Maputo, 2006. Disponível em < www.inde.gov.mz/index.php?option=com_docman&task...>. Acesso em 10 abril 2013.

MINED/INDE. **Plano Curricular do Ensino Básico: Objectivos, Política, estrutura, Plano de Estudos e Estratégias de Implementação**. Maputo, MINED/INDE, 2008.

_____. **Matemática: Programa da 8ª classe**, 2008.

MONTORO, V. Concepções de estudantes de professorado acerca del aprendizaje de la demonstración. **REIEC Revista Electrónica de investigación en Educación en Ciências**, 2, Nº 1, p. 101-121, 2007.
MOORE, R. C. Making the transition to Formal Proof in Educational Studies in Mathematics, Vol. 27, n. 3, pp. 249-266, 1994.

NATIONAL COUNCIL of TEACHERS of MATHEMATICS (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NHÊZE, I. C. & Vi, T. V. **Matemática 8ª classe**, 1991.

NISS, M. **Aspects of the Nature and the State of Research in Mathematics Education**. Educational Studies in Mathematics, n. 40, pp. 1-24, 1999. Disponível em: Disponível em <http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf> Acesso em 15 de novembro de 2011.

NUNES, J. M.V. **A pratica da argumentação como método de ensino: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas**, 219 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2011.

OLIVEIRA, A. F. de. **A Lógica & Aritmética: uma introdução à lógica, matemática e computacional**. 3. ed. Lisboa: gradiva, 2010.

OLSKER, T. C. **What Do We Mean by Mathematical Proof?** Journal of Humanistic Mathematics. Vol. 1, N. 1, p. 33-60, 2011.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em Geometria: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique**. Dissertação (Mestrado Profissional e Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2010.

PARZYSZ, B. **A La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il?** Quadreni di Ricerca in Didatica, Nº 17, p. 128-151, 2006.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et deduction dans une demarche géométrique en PE1. **Actes: XXVIIème Colloque Inter – IREM des formateurs et professeurs de mathématiques charges de la formations dês maîtres**. Tours, p. 99-110, 2001.

PHILIPP, R. A. Mathematics teachers' beliefs and affect. In: F.K. LESTER (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. United States: Information Age Publishing, p. 257-315, 2007.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores**, 247f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2005.

Ponte, J. P.; CHAPMAN, O. Mathematics teachers' knowledge and practices. In: A. Gutierrez and P. Boero (Eds.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, presente and future**. Roterdham: Sense, p. 461-494, 2006.

PONTE, J. P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In: J. P. Ponte (Ed.), **Educação matemática: Temas de investigação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239, 1992.

Portal do Governo de Moçambique. Site: *www.portaldogoverno.gov.mz › INFORMAÇÃO › Educação. Acesso: 31/03/2015.*

RAV, Y. **Why Do We Prove Theorems?** Philosophia Mathematica, Nº 3, Vol.7, p. 5-41, 1999.

RECIO, A.; GODINO, J. **Institutional and Personal meaning of mathematical proof**. Educational Studies in Mathematics, N. 48, pp. 83 – 99, 2001.

REID, D. A; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching**. Sense Publishers, Canada, 2010.

REISS, K., KLIEME, E.; HEINZE, A. Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht (Netherlands): University, Vol. 4, p. 97-104, 2001.

REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE. **Ministério da Educação: Plano Estratégico da Educação 2012-2016**. Maputo, 2012.

_____. **Ministério da Educação. Direcção para a Coordenação do Ensino Superior: Relatório do estudo sobre gênero no Ensino Superior em Moçambique**, 2014.

ROBERTSON, S. L. **O processo de Bolonha da Europa torna-se global: modelo, mercado, mobilidade, força intelectual ou estratégia para a construção do Estado?** Revista Brasileira de Educação, v. 14, n. 42, p. 407-422, 2009.

SELDEN, J.; SELDEN, A. **Unpacking the logic of mathematical statements**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 29, N. 2, p. 123-151, 1995.

SHAUGHNESSY, J. M. e BURGER, W. F. **Spadework prior to deduction in geometry**. Mathematics Teacher, Vol. 78, n. 6, p. 419-428, 1985.

SHULMAN, L.S. **Those who understand: knowledge growth in teaching**. Educational Research, vol. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOWDER, L. e HAREL, G. **Types of Students' Justifications**. The Mathematics Teacher vol. 91, N. 8, NCTM, pp. 670-675, 1998.

STYLIANIDES, A. J. **Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs**. Pythagoras, vol. 32, N. 1, Art. #14, 10 pages. Dói: 10.4102/pythagoras. v32i1. 14, 2011.

Tall, D. et al. Chapter 2: Cognitive development of Proof. In: Gila Hanna e Michael de Villiers (Edrs.) **Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study**. New York: Springer, p. 13-49, 2012.

TAIMO, J. U. **Ensino Superior em Moçambique: História e Gestão**. 229 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Ciências humanas, Universidade de Piracicaba. São Paulo, Piracicaba, 2010.

USISKIN, Z. **What Should Not Be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students**. Mathematics Teacher, 73, p. 413-424, 1980.

van DORMOLEN, J. **Learning to understanding what giving a proof really means**. Educational Studies in Mathematics, vol. 8, N. 1, p. 27-34, 1977.

VARGHESE, T. **Concept Maps to Assess Student Teachers' Understanding of Mathematical Proof**. The Mathematics Educator, Vol. 12, Nº 1, p. 49-68, 2009.

WEBER, K. **Students' Difficulties with Proof**, 2003. Disponível em <http://www.maa.org/tandI/sampler/rs8.html> Acesso em 30/04/2012.

WEBER, K. **Beyond Proving and Explaining: Proofs that Justify the Use of**

Definitions and Axiomatic Structures and Proofs that Illustrate Technique. For the learning of mathematics, vol. 22, n. 3, p. 14-17, 2002.

ZAVALA, C. A. M.; ISSUFO, D. S. **As maravilhas dos números. 7ª Classe**. Maputo: Texto Editores, 2005.

ZHOU, C.; BAO, J. **A survey on mathematical proofs among teachers**. Front. Educ China, vol. 4, nº 4, p. 490-505, 2009

.

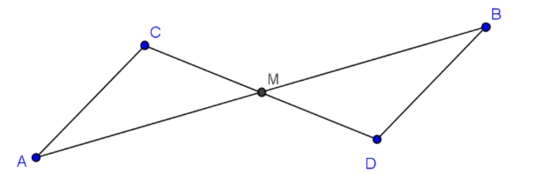
APÊNDICE

As tarefas 5, 7, 11, 12, 13 e 14, apesar de terem sido aplicadas em nossos sujeitos de pesquisa, fizemos a escolha de analisar as atividades pelos dados coletados serem representativos para análise de concepções dos alunos participantes da pesquisa. No entanto, apresentamos os objetivos e as expectativas esperadas tendo em vista nossas escolhas.

Tarefa 5: Identificando a lógica em uma demonstração

Foi dada a um grupo de estudantes do primeiro ano do curso de licenciatura a seguinte tarefa.

Um aluno fez uma demonstração como trabalho de casa, mas enganou-se ao passá-lo para o caderno e baralhou tudo.

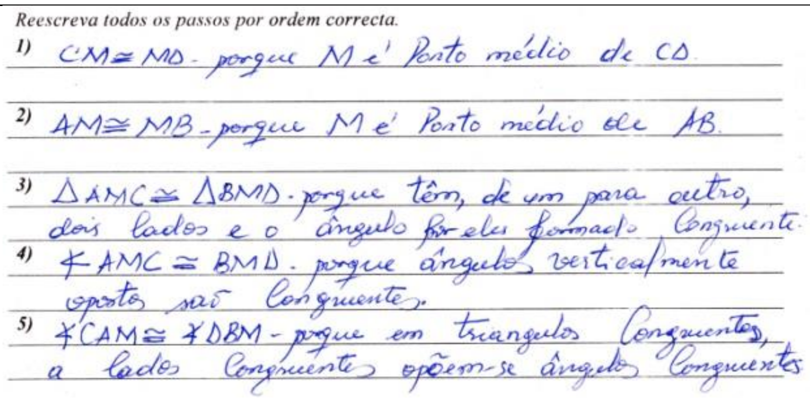
Hipótese: M é ponto médio de $\overline{AB}$ e de CD. Tese: C$\hat{A}$M ≅ D$\hat{B}$M	

Demonstração:

- A$\hat{M}$C ≅ B$\hat{M}$D – porque ângulos verticalmente opostos são congruentes
- C$\hat{A}$M ≅ D$\hat{B}$M – porque em triângulos congruentes a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes
- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ – porque M é ponto médio de $\overline{AB}$
- ΔAMC ≅ ΔBMD – porque têm de um para outro, dois lados e o ângulo por eles formado congruentes.
- $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ – porque M é ponto médio de $\overline{CD}$.

A tarefa pedida era de reescrever todos os passos na ordem correta. As três resoluções que seguem ilustram três principais respostas obtidas.

Quadro 9 - Respostas havidas



Reescreva todos os passos por ordem correcta.

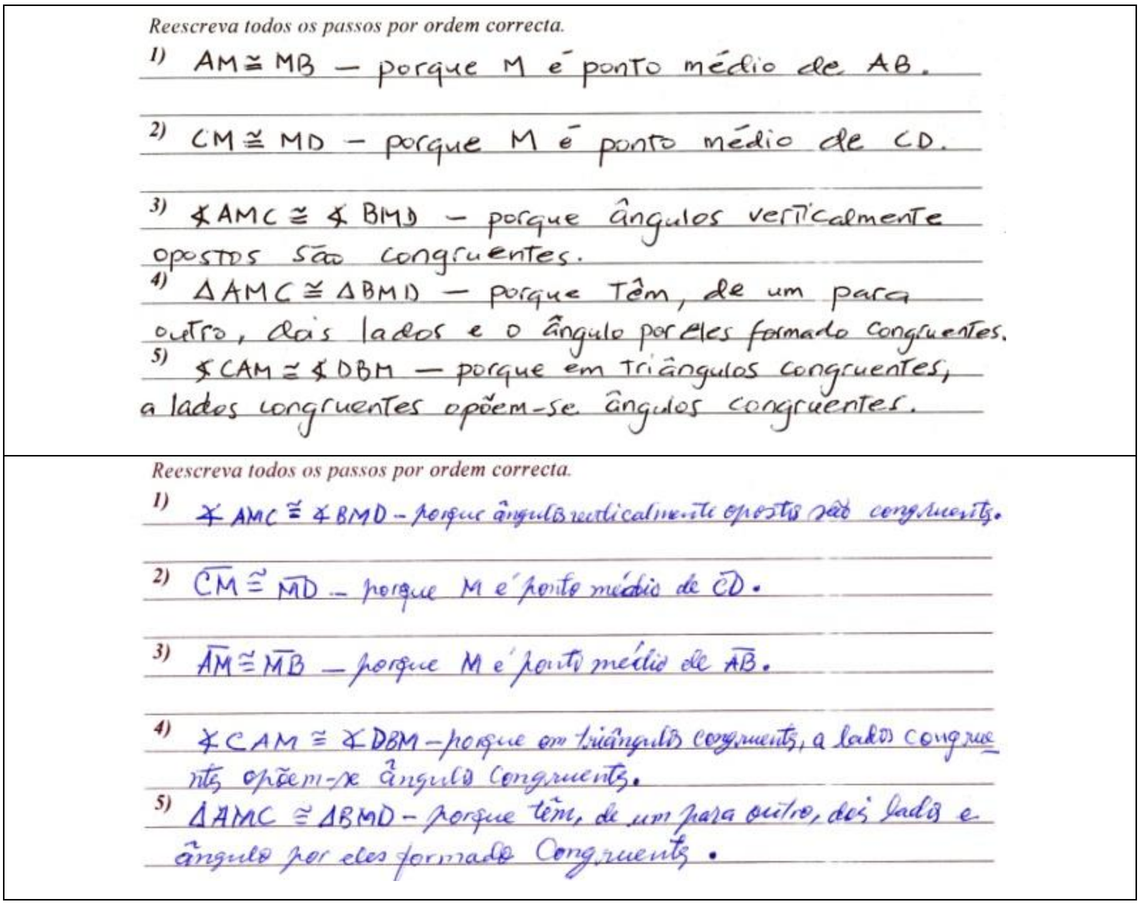
1) CM≅MD - porque M e' Ponto médio de CD

2) AM≅MB - porque M e' Ponto médio de AB.

3) ΔAMC≅ΔBMD - porque têm, de um para outro, dois lados e o ângulo por eles formado Congruente.

4) ∢AMC ≅ BMD. porque ângulos verticalmente opostos são Congruentes.

5) ∢CAM≅∢DBM - porque em triangulos Congruentes, a lados Congruentes opõem-se ângulos Congruentes


Reescreva todos os passos por ordem correcta.

1) $AM \cong MB$ — porque M é ponto médio de AB.

2) $CM \cong MD$ — porque M é ponto médio de CD.

3) $\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMD$ — porque ângulos verticalmente opostos são congruentes.

4) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ — porque têm, de um para outro, dois lados e o ângulo por eles formado congruentes.

5) $\measuredangle CAM \cong \measuredangle DBM$ — porque em triângulos congruentes, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes.

Reescreva todos os passos por ordem correcta.

1) $\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMD$ – porque ângulos verticalmente opostos são congruentes.

2) $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ – porque M é ponto médio de $\overline{CD}$.

3) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ – porque M é ponto médio de $\overline{AB}$.

4) $\measuredangle CAM \cong \measuredangle DBM$ – porque em triângulos congruentes, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes.

5) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ – porque têm, de um para outro, dois lados e ângulo por eles formado congruentes.

Fonte: O autor

Das três respostas aqui apresentadas, apenas uma é correta.

a) Identifique a resposta correta.

b) Indique as erradas (apontando qual o erro em cada uma delas). O que faria para minimizar este tipo de erros?

Esta tarefa tem por objetivos: (1) verificar se os estudantes conhecem a estrutura correta de uma demonstração; (2) estudar que critérios os estudantes utilizam para avaliar os argumentos dessas demonstrações. Em relação a esse aspecto, Heinze & Reiss (2003) propõem alguns conhecimentos metodológicos importantes para a proficiência na produção de provas, entre os quais o conhecimento de como deve ser a estrutura de uma prova. Os autores salientam que o aluno tem que saber que:

> A demonstração começa com premissas dadas e termina numa afirmação específica. Esta afirmação considera-se provada se todos os argumentos são válidos a partir de um ponto de vista matemático, isto é, uma prova tem de provar o que deve provar, e a utilização da afirmação a provar como um argumento não é adequada. Além disso, rupturas na estrutura da argumentação

> não são aceitos como parte de uma demonstração (HEINZE & REISS 2003, p. 2, tradução nossa).

Assim, baseado nesse critério de conhecimento e tomando em consideração os dados da tarefa, pretendemos ver se os estudantes têm consciência disso, o que nos leva a duas resoluções possíveis, nomeadamente:

- o sujeito está ciente de regras básicas para a produção de uma demonstração. Nesse caso, ele deverá partir do princípio de que o que ele deve demonstrar é a congruência dos ângulos CAM e DBM, com base no que se assume como conhecido (hipóteses do problema: M é ponto médio dos segmentos AB e CD). Desses elementos conhecidos ele deve produzir argumentos.

- o sujeito não está ciente dos critérios básicos da estrutura de uma demonstração. Nesse caso, pode acontecer que haja ruptura na estrutura da argumentação, ou pode ser que utilize o que se deseja demonstrar, como argumento.

Para a primeira alternativa, a Geometria axiomática natural (GII) vai nortear o trabalho a realizar sendo a articulação entre o discursivo e o figural, o que pode conduzir à ideia do critério ângulo – lado – ângulo, da congruência de triângulos, como estrutura certa da demonstração. Desse modo, cada metade de um segmento vai constituir com o outro o par de lados homólogos de possíveis triângulos congruentes, o que resultará em: $\overline{CM}$ e $\overline{DM}$ ser um par; $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$ ser o outro par. De acordo com o critério de congruência de triângulos, apenas falta um elemento. O registro figural completa essa informação a partir de outros conhecimentos: ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Com esse dado surge então a seguinte ideia: Os ângulos CMA e DMB são opostos pelo vértice, logo, são congruentes, o que fornece o terceiro e último elemento que sustentará o critério de congruência de triângulos a usar. Os três elementos são dedutíveis da hipótese e do registro figural, resultando o estabelecimento da congruência dos triângulos AMC e BMD. Finalmente, a congruência dos ângulos CAM e DBM é consequência da relação entre elementos correspondentes ou homólogos de triângulos congruentes, o que completa a demonstração. Esta análise direciona para a segunda resolução como a certa.

Já em relação à segunda alternativa duas possibilidades podem ser previstas:

(i) haver ruptura de raciocínio – é o caso em que o sujeito reconhece que a congruência dos ângulos CAM e DBM deve-se em decorrência do estabelecimento da congruência dos triângulos AMC e BMD, mas o aluno não elenca a totalidade das três condições que permitem deduzir que os dois triângulos são congruentes. Vejamos isso na primeira resolução que aponta dois lados congruentes sem apresentar o argumento que garante a congruência dos ângulos AMC e BMD. O aluno afirma que os triângulos (AMC e BMD) são congruentes. Trata-se da primeira resolução reproduzida.

(ii) Uso da condição a provar como argumenta da demonstração – Provavelmente este seja o caso que a literatura trata de "argumento circular". Neste caso, o proponente da demonstração parece agir sem ter a noção dos elementos constitutivos de uma propriedade, ou seja o que é dado (hipóteses) e o que deve ser demonstrado (tese). A terceira resolução apresenta exatamente esse erro: O autor dessa resposta afirma que os ângulos CAM e DBM são congruentes "porque em triângulos congruentes, os lados congruentes opõem-se aos ângulos congruentes", sem, porém ter antes estabelecido a congruência dos triângulos. Entendemos que isso pode ocorrer nos casos em que o sujeito não tem o conhecimento de que a apresentação dos passos de uma demonstração deve ser tal que cada passo seja consequência dos passos anteriores ou tenha relação com o que foi apresentado nos passos anteriores.

Os dois casos (i) e (ii), em que se assume um discurso aparentemente pertencente à GII, mas incongruente, estão no contexto de GI.

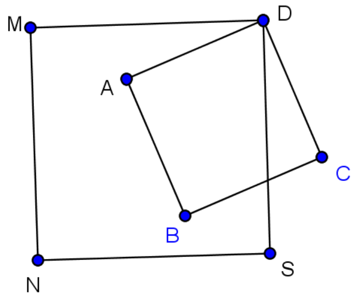
A tarefa foi concebida para fornecer para a segunda parte da questão 3, relativo aos critérios utilizados por estudantes para avaliar argumentos de uma demonstração**.**

Tarefa 7. Explorando a congruência de triângulos

Figura 92: Ilustração da tarefa 7

ABCD e NSDM são quadrados. MD = 3 cm; AD = 2 cm e MA = 1,7 cm.

Qual é a medida o segmento SC? E se $\overline{MA}$ medisse 5 cm, quanto seria o valor de SC? Por quê?



Fonte: Texto de apoia da disciplina de mestrado

Objetivo desta tarefa é verificar a quais mecanismos os sujeitos da pesquisa vão recorrer para responder aos itens da tarefa. Estabelecendo uma interligação entre a visualização e o discursivo em língua natural e matemático, os dados são colocados de tal modo que uma verificação em papel e lápis torna-se inviável porque os dados fornecidos não condizem com as dimensões da figura.

A tarefa tem como ferramenta teórica a congruência de triângulos. Os sujeitos da pesquisa responderiam corretamente, se descobrissem que os segmentos MA e SC são congruentes, isto é: se MA = 1,7 cm, então SC = 1,7 cm; se MA = 5 cm, então $\overline{SC}$ medirá também 5 cm.

Os alunos deverão recorrer a critérios de congruência de triângulos para fundamentar sua resposta, como segue:

$\overline{MD} \cong \overline{SD}$ porque são lados de um mesmo quadrado (maior) (L);

$\overline{DA} \cong \overline{DC}$ são lados do quadrado (menor) (L)

Med(M$\widehat{D}$A) + med(A$\widehat{D}$S) = 90° e med(A$\widehat{D}$S) + med(C$\widehat{D}$S) = 90° (por construção e propriedade de ângulos de um quadrado). Portanto,

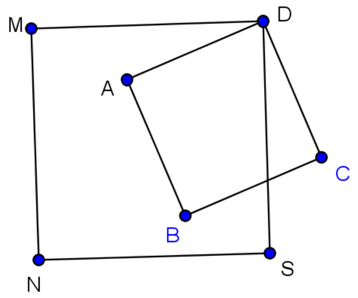
M$\widehat{D}$A + A$\widehat{D}$S = A$\widehat{D}$S + C$\widehat{D}$S, ou seja, M$\widehat{D}$A = C$\widehat{D}$S (A). Então, pelo critério LAL da congruência de triângulos ΔAMD $\cong$ ΔCSD. Portanto, AM = CS (medidas de lados correspondentes de triângulos congruentes). Logo, $\overline{MA} \cong \overline{CS}$ para qualquer valor, o que justifica os resultados anteriormente assumidos.

Entendemos que a tarefa é adequada para o nosso estudo, pois ela tem um potencial de natureza exploratória. Tanto o conteúdo da tarefa, quanto a forma de sua validação fazem parte da Geometria axiomática natural e, o estudante será capaz de resolvê-la se seu ETG for norteado por esse paradigma geométrico.

Tarefa 7.1.Explorando a congruência de triângulos (Ambiente de Geometria Dinâmica – Geogebra)

Figura 93 - Ilustração da tarefa 7.1

ABCD e NSDM são quadrados. MD = 3 cm; AD = 2 cm e MA = 1,7 cm. Qual é a medida do segmento SC? E se MA medisse 5 cm, quanto seria o valor de $\overline{SC}$? Por quê?



Fonte: *Texto de apoia da disciplina de mestrado*

Se quiser faça uma construção com GeoGebra, mas sem se preocupar com as medidas dos lados dos quadrados, e explore a relação entre os segmentos SC e MA recorrendo à opção "Distância, Comprimento ou Perímetro" – na Janela 8) e arraste um dos pontos S ou C. Agora reflita e justifique: Por que será que ocorre essa relação?

Esta tarefa foi inicialmente proposta em ambiente de lápis e papel. Agora está sendo proposta em ambiente tecnológico (ambiente de Geometria Dinâmica) com uso de GeoGebra. Com GeoGebra espera-se que a construção dos quadrados seja a primeira exigência que o sujeito vai ter que enfrentar se não domina perfeitamente as ferramentas do software.

Um aspecto importante é que a construção dos quadrados não deve utilizar a ferramenta "segmento com comprimento fixo" para permitir que a função "arrastar" esteja habilitada para explorar via "medida de segmento" a relação entre os segmentos MA e SC. Desse modo, a construção deverá basear-se na definição de quadrado para que seja possível visualizar as propriedades invariantes desse objeto durante a fase seguinte de exploração da conjectura. Nesse sentido, Healy (2000, apud FLORES, 2009, p. 51) salienta que "(….) quando usamos Geometria Dinâmica, a construção é consequência de um processo no qual se deve utilizar a definição explícita do objeto geométrico com suas propriedades Matemáticas".

Constatada experimentalmente a relação, seguir-se-á a fase de justificação. Essa fase é que vai definir a passagem da Geometria I, caracterizada pela extração da relação entre $\overline{SC}$ e $\overline{MA}$ por manipulação de algumas de suas ferramentas do artefato, para a Geometria II na qual essa relação deve ser justificada matematicamente a partir de conceitos da geometria plana. Espera-se que o processo leve a uma cadeia de justificação similar a que foi apresentada na tarefa anterior (**Tarefa 7**).

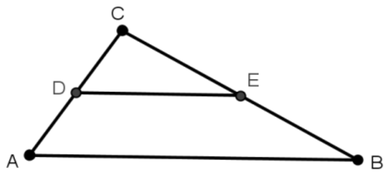
Tarefa 11. Testando o conhecimento da fiabilidade das demonstrações

Figura 94 - Ilustração da tarefa 11

A um aluno foi apresentado a seguinte situação:

Dados o triângulo ABC e os pontos D e E, médios dos lados AC e BC, respectivamente.

Prove que o segmento AB é paralelo ao segmento DE.



Fonte: O autor

Para responder à questão do problema, o referido aluno apresentou à seguinte estrutura de prova.

D é o ponto médio do segmento AC, e E do segmento BC	Pelos dados
DC = $\frac{1}{2}$AC e EC = $\frac{1}{2}$BC	Definição de um ponto médio
∡C ≅ ∡C	Propriedade reflexiva
ΔABC ~ ΔDEC	Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados correspondentes do outro triângulo, e os ângulos formados por esses pares de lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.
∡CDE ≅ ∡CAB	Definição de triângulos semelhantes.
O segmento AB é paralelo ao segmento DE	Se duas retas cortadas por uma transversal (AC) formam ângulos congruentes com a transversal, então as retas são paralelas.

a) Concorda com a demonstração proposta por este aluno?

b) Se eu construir um triângulo, como na figura abaixo a propriedade seria válida? Por quê?

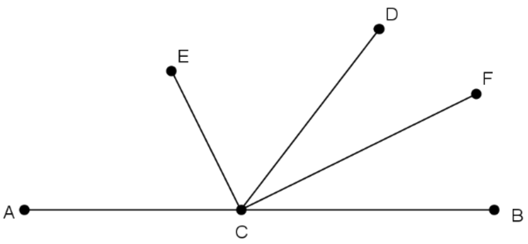
A atividade tem por objetivo verificar se os futuros professores duvidarão ou não de que uma vez provada uma propriedade geométrica independe do formato da figura desde que faça parte da classe desse objeto geométrico. A atividade pode dar dados para as questões 1 e 3.

Tarefa 12. Explorando as propriedades de bissetrizes de ângulos suplementares

Figura 95 - Ilustração da tarefa 12

Considere os ângulos ACD e BCD adjacentes suplementares.
- EC é bissetriz do ângulo ACD;
- FC é bissetriz do ângulo BCD.

Demonstre que EC e FC são perpendiculares.



Fonte: O autor

A tarefa tem por objetivo verificar que procedimentos de validação são usados pelos sujeitos da pesquisa. Tendo como base conceitual a bissetriz de um ângulo. A formulação da tarefa foi feita assumindo-se a Geometria axiomática natural (conceito de bissetriz e demonstração), mas a apresentação da tarefa (forma discursiva e figural) permite que diferentes procedimentos sejam possíveis conforme a concepção de demonstração de cada participante.

Esta tarefa mobiliza como conhecimentos indispensáveis o conceito de bissetriz de um ângulo. Como métodos de validação, são possíveis duas vias conforme o paradigma geométrico que norteia o ETG do sujeito: (i) validação baseada na figura com apoio de um artefato (esquadro, compasso, dobra de papel). (ii) validação baseada em conceitos da geometria (noção de bissetriz) ancorando-se na figura apenas como meio de apoio ao raciocínio.

Para o caso (i) esperamos estratégias de resolução tais como:

a. medição do ângulo que as semirretas EC e FC formam no ponto comum. Esse procedimento pode consistir em:

1. verificar a proposição com exemplos concretos e generalizar a sua validade afirmando que é sempre verdadeira. Para este caso, Recio & Godino (2001) afirmam que o caso mais simples é de ângulos retos adjacentes. Se traçarmos a bissetriz de cada um deles, os ângulos são divididos em 45°, sua soma é 90°, isto é, um ângulo reto. O aluno avança para outros exemplos

argumentando mais adiante que a mesma coisa aconteceria para quaisquer dois ângulos adjacentes suplementares. Se traçarmos suas bissetrizes formarão um ângulo de 90°.

2. O estudante verifica a proposição, em casos particulares, introduzindo alguma simbologia.

Por exemplo: Sejam $\measuredangle$ACD + $\measuredangle$BCD = 180°. Consideremos o caso em que m$\measuredangle$ACD = 150° e $\measuredangle$BCD = 30°. As suas bissetrizes dividirão cada um deles em ângulos de medidas 75° e 15°, respectivamente. Daí temos 75° + 15° = 90°. As bissetrizes formam um ângulo reto.

3. O sujeito pode fazer uma verificação sistemática de casos de ângulos adjacentes suplementares com valores concretos, como na tabela que segue

Tabela 2 - Verificação sistemática dos ângulos formados por bissetrizes de ângulos adjacentes suplementares

<table>
<tr><th>Ângulos adjacentes suplementares</th><th>Medida de cada um deles</th><th>Medida do ângulo determinado pela bissetriz</th><th>Medida da soma</th><td rowspan="9">Como a soma das medidas dos ângulos é 90º, então podemos concluir que as bissetrizes formam entre si um ângulo de 90°, ou seja, são perpendiculares.</td></tr>
<tr><td>A</td><td>90</td><td>45</td><td rowspan="2">90</td></tr>
<tr><td>B</td><td>90</td><td>45</td></tr>
<tr><td>A</td><td>120</td><td>60</td><td rowspan="2">90</td></tr>
<tr><td>B</td><td>60</td><td>30</td></tr>
<tr><td>A</td><td>45</td><td>22,5</td><td rowspan="2">90</td></tr>
<tr><td>B</td><td>135</td><td>67,5</td></tr>
<tr><td>A</td><td>80</td><td>40</td><td rowspan="2">90</td></tr>
<tr><td>B</td><td>100</td><td>50</td></tr>
</table>

Fonte: O autor

Esses procedimentos elencados são formas de validação cujo horizonte teórico é a Geometria natural e, consequentemente, essas provas são de natureza pragmática e pertencentes a esquemas de prova indutiva.

Para o caso (ii) o sujeito utiliza de forma correta a definição de bissetriz, como nos casos anteriores, e deduz a propriedade sem recorrer a exemplos específicos.

Se $\measuredangle$ACD + $\measuredangle$BCD = 180°, então a bissetriz do ângulo ACD formará ângulos em que cada um deles medirá ½ $\angle$ACD. Para o ângulo BCD sua bissetriz formará ângulos com medidas ½ $\angle$BCD.

Então sua soma será ½ ∡ACD + ½ ∡BCD = ½ 180°, ou seja, ½ ∡ACD + ½ ∡BCD = 90°, o que prova que as duas bissetrizes formam um ângulo de 90°, isto é, são perpendiculares entre si.

Esta última validação, por se basear em propriedades e conceitos da geometria, fundamentou-se na Geometria axiomática natural e quanto ao tipo de prova, ela é de natureza intelectual e de esquema axiomática.

Essa tarefa pode subsidiar dados para as questões 1 e 3.

Tarefa13. Explorando as apresentações de livros didáticos

Uma das propriedades de um paralelogramo é a seguinte: "Os lados opostos são congruentes".

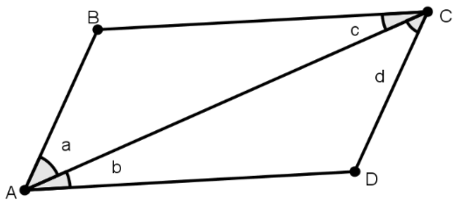
Seguem três validações dessa propriedade em três livros didáticos.

O livro 1 apresenta a seguinte prova:

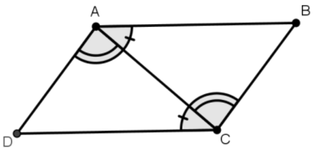
Hipótese: ABCD é um paralelogramo e os lados AB e DC, BC e AD são opostos.

Tese: AB = CD e BC = DA

Demonstração:

Passos	**Justificações**
Trace-se a diagonal AC do paralelogramo	
1) ∡a ≅ ∡d e ∡b ≅ ∡c	Se duas retas são paralelas, então os ângulos alternos internos, determinados por uma secante, são congruentes.
2) ∆ABC ≅ ∆ADC	Dois triângulos são congruentes se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes congruentes, cada um a cada um.
3) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	Nos triângulos congruentes, a ângulos de medidas iguais opõem-se lados congruentes.

O livro 2 apresenta a seguinte prova:



Consideremos o paralelogramo representado ao lado.

Consideremos os triângulos ABC e CDA.

(A) ∡CAB ≅ ∡ACD (alternos)

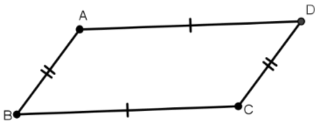
(L) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (lado comum)

(A) ∡ACB ≅ ∡CAD (alternos)

Pelo caso ALA podemos afirmar que △ABC ≅ △CDA.

Então AB = CD e AD= BC.

E o livro 3 apresenta a seguinte prova:



Justificação:

Consideremos o paralelogramo representado ao lado.

sePretende-se mostrar que AB = DC e BC = AD

Passo	Justificação
1. AB = DC	Lados paralelos entre lados paralelos [AD] e [BC]
2. BC = AD	Lados paralelos entre lados paralelos [AB] e [DC]

Questões:

a. Das três provas, aqui reproduzidas, qual ou quais acha que apresentam argumentos que lhe convencem? Por quê?

b. E qual ou quais acha que não apresenta(m) argumentos convincentes? Por quê?

A tarefa tem por objetivo verificar que critérios os estudantes de licenciatura em ensino de Matemática participantes da pesquisa utilizam para avaliar apresentações de livros didáticos.

Nosso estudo estando voltado para as concepções de prova e demonstração de estudantes de Licenciatura em ensino de Matemática, verificar como eles avaliam as apresentações de livros didáticos importante, pois na revisão da literatura encontramos autores que mencionam justificações de estudantes que se apoiam na autoridade de livro didático (Harel & Sowder, 1998, 2007) para considerar se uma dada apresentação é ou não uma demonstração. Portanto, verificar concepções que são construídas a partir de livro didático em uso ou com que se teve algum contato é importante.

O foco na análise das respostas estará voltada nos aspectos que eles vão apresentar, podendo ser: (i) se o livro apresentar todos os passos necessários (por exemplo, o livro 1, não menciona o lado comum dos triângulos) – criando a ideia de que provas aceitam rupturas – (ii) a precisão da linguagem (por exemplo, o livro 2 cria a impressão de que ângulos alternos são sempre congruentes); (iii) se o livro apresenta justificações baseadas em axiomas ou propriedades previamente estabelecidas (por exemplo, no livro 3, os autores utilizam a seguinte propriedade geométrica: "dois segmentos paralelos compreendidos entre duas retas paralelas são congruentes", não demonstrada anteriormente). Entendemos que esses elementos sejam relevantes na tomada de decisão por parte dos sujeitos da pesquisa.

Tarefa 14: Testando sobre as funções da demonstração

Avalie as seguintes afirmações segundo a escala:

(1) discordo completamente; (2) discordo com reservas; (3) Não sei (4) concordo plenamente.

Quadro 10 - Afirmações avançadas

Afirmação\Avaliação	1	2	3	4
a[33]. Sabendo-se que uma declaração geral é verdadeira, então a afirmação é verdadeira para todos os casos específicos.	1	1		
b. Para provar que uma afirmação é falsa, basta exibir um contraexemplo dessa afirmação.				
c. Um dos objetivos da demonstração é estabelecer a validade de uma afirmação.				
d. Uma demonstração pode fornecer insights ou uma visão sobre por que a afirmação é verdadeira.				
e. Se você determinar que a afirmação é verdadeira para um milhão de exemplos e falso para um exemplo, então você provou que a afirmação é falsa.				
f. A evidência empírica de um ou de milhões de casos, constitui uma demonstração.				
g. Verificar alguns casos críticos específicos não constitui uma demonstração.				
h. Uma demonstração pode servir para explicar um resultado ou convencer a alguém porque o resultado é certo.				
i. As afirmações em uma demonstração devem ser ordenadas conforme as leis do raciocínio, de modo a fornecer uma trajetória da hipótese à conclusão.				
j. Depois de apresentar a demonstração de um conceito matemático é preciso verificar com alguns exemplos concretos para convencer os alunos que o conceito funciona mesmo.				
k. Prova de uma propriedade dispensa verificações empíricas.				

[33] A identificação das afirmações por itens é apresentada para facilitar a análise, ela não consta do enunciado entregue aos sujeitos de pesquisa.

l. Propriedades geométricas óbvias em ambientes de geometria dinâmica podem dispensar demonstração.				
m. As demonstrações em geometria devem aparecer no formato de duas colunas em que numa coluna se expressam os argumentos e na outra as justificações para que elas sejam aceites.				
n. A importância de uma demonstração não é apenas para nos convencer de que um teorema é verdadeiro – para garantir que a intuição não jogou papel falso – mas também para nos mostrar por que o teorema é verdadeiro e em que condições.				

Fonte: O autor

A tarefa tem por objetivo verificar as ideias que os sujeitos de pesquisa têm acerca das razões da prática das demonstrações em matemática (com maior incidência para a matemática escolar).

Na revisão da literatura já mostramos que vários autores têm enfatizado que provas e demonstrações são consideradas fundamentais em matemática, porém, mesmo com o peso que têm em Matemática, as práticas de provar e demonstrar em matemática são as mais difíceis e polêmicas entre alunos e professores do ensino básico, incluindo alunos da graduação em Matemática e Ensino de Matemática. Ainda temos destacado que um dos grandes equívocos sobre a natureza das demonstrações em matemática é o fato de vários alunos acharem que argumentos baseados em exemplos podem ser considerados de provas válidas e, o fato de ver as provas em matemática como simples rituais sem grande potencial para aprendizagem da matemática. Assim, tendo em consideração esses fatos que existem entre o valor e a riqueza das provas e demonstrações em Matemática e a percepção de alunos e professores do ensino básico sobre prova e demonstração, escolhemos esta tarefa com propósito de verificarmos o grau de conhecimentos sobre o status das demonstrações: suas funções; o lugar de argumentos baseados em exemplos (argumentos empíricos) para a validação de propriedades em matemática; o contexto em que se recorre a demonstrações, etc. Assim, esperamos que o aluno, sujeito de nossa pesquisa, perceba que:

a. uma vez que as demonstrações tornam válida uma dada propriedade para todos os casos que gozam dessa propriedade, então ela também torna validade para cada um dos casos particulares. A opção (4) contempla esse fato.

b. um contraexemplo refuta uma afirmação, quer dizer, é uma demonstração. Portanto a opção certa é (4).

c. Perceba que a apresentação de uma demonstração não é um mero exercício matemático. A demonstra cumpre uma função matemática importante e, uma dessas funções é a apresentada item (4).

d. Perceba que os conteúdos de **c** e de **d** fazem parte do rol do que se procura ao apresentar as demonstrações em matemática.

e. a formulação neste item é equivalente à formulação fornecida no item **b**.

f. a formulação neste item contradiz o que foi dito em **e.** Portanto, a opção certa é (1).

g. Perceba que, fora de contraexemplos, não existem verificações empíricas que validem conjecturas em matemática. Portanto, a opção certa é (1).

h. a afirmação pode ser interpretada como sendo a afirmação em **d,** mas direcionado a um sujeito particular. Portanto, a opção certa é (4).

i. esta formulação equivale a explicar que a produção de uma demonstração obedece a critérios. Com efeito, a revisão da literatura mostrou que uma das dificuldades enfrentadas por alunos na aprendizagem das provas e demonstrações tem a ver com como iniciar os passos delas e como deve ser a sequência dos passos durante a produção delas. Portanto, opção certa para este item é (4).

j. uma demonstração é uma verificação geral da validade de uma propriedade, portanto, dispensa verificações particulares. A própria produção da demonstração é forma da gente se convencer da validade da proposição ou propriedade. Portanto, a opção certa é (1).

k. depois que fizemos uma análise sobre o item j, o que resta é simplesmente afirmarmos que o teor da mensagem neste item é o contrário de j: uma vez apresentada a demonstração em matemática, ficam desfeitas as dúvidas e mostrada, sem dúvidas, a validade da propriedade para todos os casos que gozam dela. Portanto, a opção certa esperada como resposta certa é (4).

l. em matemática, especificamente em Geometria, só se admite sem demonstrações um pequeno número de verdades fundamentais, os axiomas, mas que as demais verdades – teoremas e propriedades – por mais óbvias pareçam para nós, devem ser demonstradas, isto é, não dispensam demonstração. Portanto, a opção certa é (1).

m., em geometria ou qualquer outro ramo da matemática, uma demonstração bem estruturada não depende do formato da apresentação dos argumentos, mas pura e simplesmente da coerência dos argumentos apresentados. Portanto, a opção certa é (1).

n. este item apresenta uma das principais funções da demonstração em matemática. Portanto, a opção certa é (4).

Portanto, apresentando o quadro de respostas certas teríamos a seguinte estrutura:

Quadro 11 - Resumo de respostas certas esperadas

Afirmação\Avaliação	1	2	3	4
a				X
b				X
c				X
d				X
e				X
f	X			
g	X			
h				X
i				X
j	X			
k				X
l	X			
m	X			
n				X

Fonte: O autor