PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Eliza Souza da Silva

TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA:
Uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais

São Paulo

2015

Eliza Souza da Silva

TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA:

Uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira

São Paulo

2015

Eliza Souza da Silva

TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA:

Uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

_____

Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira (Orientador) PUC-SP

_____

Prof. Dr. Armando Traldi Júnior IFSP

_____

Profa. Dra. Marilena Bittar UFMS

_____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud PUC-SP

_____

Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado PUC-SP

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial desta dissertação por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Assinatura_____local e Data_____

A minha família por todo o incentivo, em especial ao meu filho, que foi a minha inspiração.

Aos meus amigos(as) que sempre estiveram ao meu lado.

Ao meu orientador, pela paciência e dedicação.

AGRADECIMENTOS

“Porque Deus dá a sabedoria, da sua boca é que
vem o conhecimento e o entendimento”
Provérbios 2:6

Ainda, muitos foram os que contribuíram na construção desta pesquisa, dando-me um pouco do apoio, do conhecimento, do carinho, que me foram imprescindíveis. Com apreço...

Ao Professor Dr. Gerson Pastre de Oliveira, pela orientação dedicada e amiga, pela compreensão, pela paciência, pelo incentivo e apoio constantes.

Aos professores doutores da Banca Examinadora Saddo Ag Almouloud, Armando Traldi Júnior, Silvia Dias Alcântara Machado e Marilena Bittar, pela atenção, compreensão e sugestões.

À coordenação e ao corpo docente do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio, apoio e compreensão.

Ao meu filho Guilherme, minha mãe Raimunda, meu pai Manoel e às minhas irmãs, Eliane e Edilene, que além de compreenderem meus momentos de ausência, sempre se fizeram presente para me apoiar, incentivar e auxiliar nos momentos mais difíceis desta jornada.

Aos amigos de Doutorado e Mestrado, pelas contribuições e por terem me permitido multiplicar e construir meus próprios conhecimentos.

A meus amigos(as) por todo apoio recebido nos momentos mais difíceis.

A UEPA, por seu apoio financeiro.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

...Muito Obrigada.

Apólogo dos dois escudos

Conhecem o apólogo do escudo de ouro e de prata?
Eu lhe conto.
No tempo da cavalaria andante, dois cavaleiros armados de ponto em branco (= com cuidado, com esmero, completamente), tendo vindo de partes opostas, encontram-se numa encruzilhada em cujo vértice se via erecta uma estátua da Vitória, a qual empunhava numa das mãos uma lança, enquanto a outra segurava um escudo. Como tivessem estacado, cada um de seu lado, exclamaram ao mesmo tempo:
- Que rico escudo de ouro!
- Que rico escudo de prata!
- Como de prata? Não vê que é de ouro?
- Como de ouro? Não vê que é de prata?
- O cavaleiro cego.
- O cavaleiro é que não tem olhos.
Palavra puxa palavra, ei-los que arremetem um contra o outro, em embate singular, até caírem gravemente feridos.
Nisto passa um dervis, que depois de os pensar com toda a caridade, inquire deles o motivo da contenda.
- É que o cavaleiro afirma que aquele escudo é de ouro.
- É que o cavaleiro afirma que aquele escudo é de prata.
- Pois, meus irmãos, observou o dares, ambos tendes razão e nenhum a tendes. Todo esse sangue se teria poupado, se cada um de vós tivesse dado ao incômodo de passar um momento ao lado oposto. De ora em diante nunca mais entreis em pendência sem haverdes considerado todas as faces da questão!

José Júlio da Silva Ramos

RESUMO

Esta pesquisa tem como objeto de estudo a aprendizagem das transformações lineares por licenciandos em Matemática e foi realizada tendo como sujeitos oito alunos de uma turma do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Pará. O referencial teórico da investigação repousa sobre a teoria das situações didáticas, utilizada com o intuito de produzir uma sequência didática com o propósito de investigar de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática resolvem problemas conceituais em relação ao tema “transformações lineares” no âmbito de situações didáticas e com o uso de tecnologias digitais. As atividades empregadas têm por base uma situação didática arquitetada para dar aos sujeitos condições de desenvolverem, com autonomia, suas próprias estratégias, contando, para este fim, com o uso do programa computacional GeoGebra 5 como elemento mediador. A revisão bibliográfica realizada apontou para a existência de dificuldades, por parte dos estudantes universitários, na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear, as quais foram confirmadas ao longo deste estudo. Os resultados da pesquisa apontaram, também, que o desenvolvimento de atividades baseadas nos pressupostos teóricos apresentados, por meio de uma sequência didática adequadamente planejada e com mediação por tecnologias digitais pode auxiliar os estudantes a desenvolver autonomia na aprendizagem e ganhos cognitivos consideráveis, ainda que permaneçam dificuldades relacionadas à construção conceitual.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Transformações Lineares. Visualização e experimentação. Tecnologias Digitais. Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra.

ABSTRACT

This research has as object of study the learning of linear transformations by undergraduates in mathematics and was held having as subjects eight students in a class of second year of the Licentiateship Degree in Mathematics from the State University of Pará. The theoretical framework of the investigation rests on the theory of didactic situations, used in order to produce a didactic sequence to investigate how Mathematics Degree students are able to solve conceptual problems related to the topic "linear transformations" in the context of didactic situations using digital technologies. The employed activities are based on a didactic situation architected in order to give to subjects conditions to develop, with autonomy, their own strategies, counting with the computer program GeoGebra 5 as mediating element. The theoretical review pointed to the existence of difficulties on the part of college students in learning linear algebra contents, which were confirmed in this study. The research results showed also that the development of activities based on the conceptual framework presented through a didactic sequence properly planned and with mediation by digital technologies can help students develop autonomy in learning and considerable cognitive gains, despite remaining difficulties related to the conceptual construction.

Keywords: Linear Algebra. Linear Transformations. Visualization and experimentation. Digital technologies. Theory of Didactical Situations. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-Exemplo da resolução de um estudante (verificação de transformação linear) 34
Figura 2- Interface do software GeoGebra 5 67
Figura 3- Janela de visualização 3D da interface do GeoGebra 5 68
Figura 4- Interface do GeoGebra 5 (construção de um exemplo) 69
Figura 5- Planilha referente às construções matriciais 70
Figura 6 – Esquema gráfico de uma transformação linear 73
Figura 7- Transformação escalar no plano 75
Figura 8- Transformação de rotação no plano 76
Figura 9- Transformação de cisalhamento no eixo Ox 77
Figura 10- Cisalhamento 77
Figura 11 - Translação do quadrado no plano 78
Figura 12- Janela de visualização do GeoGebra 5 94
Figura 13- Interface do GeoGebra 96
Figura 14- Interface do GeoGebra 5 referente ao final da Atividade 1 98
Figura 15 - Visualização geométrica da atividade 1 99
Figura 16- Interface do GeoGebra referente ao quadrado dilatado 102
Figura 17 - Interface do GeoGebra 5 referente ao quadrado rotacionado 104
Figura 18- Interface do GeoGebra 5 referente à translação do quadrado 105
Figura 19 - Interface do GeoGebra 5 referente a terceira atividade 109
Figura 20- Protocolo de construção da primeira parte da atividade (Dupla A) 116
Figura 21- Resposta da primeira parte da atividade – Dupla A 118
Figura 22– Resposta do item b, primeira atividade – Dupla A 119
Figura 23 - Protocolo de construção da segunda parte da atividade 1 – Dupla A 120
Figura 24 – Resposta da segunda parte da atividade 1 – Dupla A 120
Figura 25– Resposta final da atividade 1 – Dupla A 121
Figura 26 - Protocolo de construção da primeira parte da atividade – Dupla B 122
Figura 27– Resposta referente ao item a da primeira atividade – Dupla B 124
Figura 28– Resposta do item b da primeira atividade - Dupla B 126
Figura 29 - Conclusão sobre o item b da primeira atividade – Dupla B 126
Figura 30- Resposta ao item c da primeira atividade - Dupla B 127
Figura 31- Protocolo de construção da atividade 1 – Dupla B 128
Figura 32- Resposta ao item c da primeira atividade – Dupla B 129
Figura 33- interface do GeoGebra 5 referente à parte inicial da 1ª atividade da dupla C (parte 1) 130
Figura 34 - interface do GeoGebra 5 referente a parte inicial da 1ª atividade da dupla C (parte 2) 130
Figura 35 -Respostas relativas ao item a da primeira atividade – Dupla C 132
Figura 36- Respostas relativas ao item b da primeira atividade – Dupla C 133
Figura 37- Protocolo produzido na consecução da primeira atividade – Dupla C 133
Figura 38- Respostas relativas ao item c da primeira atividade – Dupla C 134
Figura 39 - Visualização simultânea dos vetores v1, v2, v3, lv1, lv2 e lv3 – Dupla C 134
Figura 40– Protocolo do GeoGebra 5 para item a, primeira atividade (Dupla D, parte 1) 136
Figura 41– Protocolo do GeoGebra 5 para item a, primeira atividade (Dupla D, parte 2) 136

Figura 42 - Resposta aos itens a e b da primeira atividade – Dupla D 137
Figura 43 - Solução da primeira parte da atividade – Dupla D..... 138
Figura 44- Protocolo de construção referente ao último item da primeira atividade – Dupla D 138
Figura 45- Resposta do item c da primeira atividade – Dupla D 139
Figura 46- Construção no GeoGebra 5 da matriz A – Dupla A 145
Figura 47- Construção no GeoGebra 5 da matriz AM – Dupla A..... 146
Figura 48- Construção no Geogebra 5 referente à matriz BM – Dupla A..... 147
Figura 49- Construção no GeoGebra 5 referente à matriz CM – Dupla A..... 147
Figura 50- Resposta ao item c da segunda atividade – Dupla A..... 148
Figura 51- Resolução do item a da segunda atividade – Dupla A 148
Figura 52– Resposta aos itens d, e da segunda atividade – Dupla A..... 149
Figura 53– Construção do quadrado – Dupla B..... 151
Figura 54- Ampliação e redução das dimensões do quadrado – Dupla B..... 152
Figura 55 - Rotação do quadrado em torno do eixo Oz – Dupla B..... 152
Figura 56 - Translação do quadrado paralelamente ao plano xOy – Dupla B..... 153
Figura 57- Resposta aos itens a, c – Dupla B 154
Figura 58- Resposta final da segunda atividade – Dupla B..... 155
Figura 59 - Construção do quadrado – Dupla C..... 156
Figura 60– Construção, no GeoGebra 5, do quadrado rotacionado – Dupla C..... 157
Figura 61– Construção, no GeoGebra 5, do quadrado transladado – Dupla C..... 157
Figura 62- Resposta final da segunda atividade – Dupla C..... 158
Figura 63- Construção no GeoGebra 5 referente às matrizes A e AM – Dupla D 160
Figura 64- Construção no GeoGebra referente às matrizes B e BM – Dupla D..... 161
Figura 65- Construção no Geogebra 5 referente às matrizes C e CM – Dupla D 161
Figura 66– Resposta final da segunda atividade – Dupla D (parte 1)..... 162
Figura 67– Resposta final da segunda atividade – Dupla D (parte 2)..... 163
Figura 68– Construção no ambiente Geogebra 5 da terceira atividade - Dupla A..... 169
Figura 69– Registro da terceira atividade, itens a, b, c – Dupla A..... 169
Figura 70– Registro da terceira atividade referente ao item d 170
Figura 71- Visualização no GeoGebra 5 da segunda atividade – Dupla B 172
Figura 72– Respostas da terceira atividade – Dupla B 172
Figura 73– Respostas da terceira atividade – Dupla B 173
Figura 74– Respostas finais da terceira atividade – Dupla B..... 174
Figura 75- Construções referentes à terceira atividade – Dupla C..... 175
Figura 76- Resposta aos questionamentos levantados na terceira atividade – Dupla C 176
Figura 77- Resposta final da terceira atividade – Dupla C..... 177
Figura 78– Construções relativas à terceira atividade – Dupla D..... 178
Figura 79– Resposta da terceira atividade – Dupla D..... 179
Figura 80- Resposta aos itens (d) e (e) da atividade com base na interface do GeoGebra 5..... 179
Figura 81- Resposta final da dupla D 180

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Principais recursos do GeoGebra 5 utilizados nesta pesquisa 68
Quadro 2 - Elementos básicos que servem de base ao conceito de transformação linear 113
Quadro 3- Análise esquemática da primeira atividade - Dupla A 117
Quadro 4 - Análise esquemática da primeira atividade - Dupla B 123
Quadro 5 - Análise esquemática da primeira atividade – Dupla C 131
Quadro 6 - Análise esquemática da primeira atividade – Dupla D 140
Quadro 7- Análise esquemática da segunda atividade - Dupla A 150
Quadro 8 - Análise esquemática da segunda atividade – Dupla B 155
Quadro 9- Análise esquemática da segunda atividade – Dupla C 159
Quadro 10- Análise esquemática da atividade 2 – Dupla D 164
Quadro 11 - Análise esquemática da segunda atividade – Dupla A 171
Quadro 12- Análise esquemática da segunda atividade – Dupla B 174
Quadro 13- Análise esquemática da segunda atividade – Dupla C 177
Quadro 14– Análise esquemática da segunda atividade – Dupla D 180

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 19
Motivações e justificativa: trajetória da pesquisa em relação à disciplina de Álgebra Linear 19
CAPÍTULO UM 31
APORTES TEÓRICOS DA INVESTIGAÇÃO 31
1.1 Revisão teórica 31
1.2 Contrato didático 46
1.3 Teoria das situações didáticas (TSD) 49
1.3.1 Fases da situação didática 54
1.4 Tecnologias e Educação Matemática 57
1.4.1 Tecnologias digitais como mediadoras em Educação Matemática 57
1.4.2 Tecnologias digitais: experimentação, visualização e dinamismo 62
1.4.3 Interface específica da pesquisa: descrições sobre o GeoGebra 5 66
CAPÍTULO DOIS 72
TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES 72
2.1 Transformações lineares: uma abordagem matricial 72
2.1.1 Transformações lineares no plano 74
2.2 Transformação linear e translação 78
2.2.1 Coordenadas homogêneas 79
2.3 Os livros didáticos 80
CAPÍTULO TRÊS 85
SUPORTES E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 85
3.1 Metodologia 85
3.2 Os sujeitos da pesquisa 88
3.3 Coleta de dados 89
3.4 Descrição das atividades 91
3.4.1 Descrição da atividade 1 91
3.4.1.1 Análise da primeira atividade 93
3.4.2 Descrição da atividade 2 100
3.4.2.1 Análise da segunda atividade 101
3.4.3 Descrição da terceira atividade 107
3.4.3.1 Analise da terceira atividade 108
CAPÍTULO QUATRO 111
ANÁLISE DE DADOS 111
4.1 Análise da atividade 1 115
4.1.1 Dupla A 116
4.1.2 Dupla B 122
4.1.3 Dupla C 129
4.1.4 Dupla D 135
4.1.5 Comentários acerca da primeira atividade 140
4.1.6 Análise da institucionalização da primeira atividade 141
4.2 Análise da segunda atividade 144
4.2.1 Dupla A 145
4.2.2 Dupla B 151
4.2.3 Dupla C 156
4.2.4 Dupla D 160
4.2.5 Análise da institucionalização da segunda atividade 164

4.3 Análise da atividade 3 167
4.3.1 Dupla A 168
4.3.2 Dupla B 171
4.3.3 Dupla C 175
4.3.4 Dupla D 178
4.3.5 Análise da institucionalização da terceira atividade 180
CONSIDERAÇÕES FINAIS 183
REFERÊNCIAS 189
Anexo A - Parecer Consubstanciado do CEP 194
Anexo B - Modelo do termo de consentimento Livre e Esclarecido 197

INTRODUÇÃO

Motivações e justificativa: trajetória da pesquisa em relação à disciplina de Álgebra Linear

Esta é uma pesquisa desenvolvida no âmbito do grupo PEA-MAT, ligada ao projeto "Tecnologias e Educação Matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces"[1], e que trata sobre o conhecimento acerca do tema "transformações lineares" com alunos da licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), por meio de sequências didáticas mediadas pelo *software* GeoGebra 5. As motivações e justificativas contidas nesta seção do trabalho partem de razões ligadas à compreensão sobre a aprendizagem de Álgebra Linear e terminam por indicar a questão para qual busca-se direcionamentos e eventuais respostas.

A álgebra linear constitui parte fundamental das ferramentas matemáticas utilizadas para estudos modernos de muitas áreas do conhecimento e/ou ciências, tais como a física, engenharia, administração e computação. No domínio das chamadas Matemática pura e aplicada, o emprego dos conhecimentos relativos à álgebra linear é, de igual forma, bastante relevante. Segundo Lima (1998), a "álgebra linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles". O mesmo autor destaca, ainda, que "são numerosas e bastante variadas as situações, em Matemática e em suas aplicações, nas quais esses objetos ocorrem". Deste modo, pode-se aventar a grande importância dos conceitos envolvidos em Álgebra Linear no ensino de Matemática.

Muitos objetos criados virtualmente em computadores são conseguidos por meio das representações numéricas armazenadas em memória e transformados por operações matemáticas. Apenas depois de semelhantes transformações é que tais objetos são exibidos na tela do computador. Esta é, por exemplo, a tônica do trabalho de Gonçalves (2013), que ressalta a importância das transformações lineares no campo da computação gráfica. No desenvolvimento de sua investigação, essa autora apresenta as propriedades fundamentais e necessárias para que os leitores compreendam, ainda que inicialmente, os conceitos de transformação linear,

[1] Este projeto tem o apoio financeiro (CNPq) e é coordenado pelo Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira.

espaços vetoriais e matrizes e como estes conceitos estão interligados. Em seguida, ainda no propósito de apresentar aplicações importantes de transformações lineares na computação gráfica, a autora realiza uma apresentação formal dos processos matemáticos necessários para realizá-las. Dentre as aplicações de transformações lineares vistas na computação gráfica, Gonçalves (2013) apresenta a construção de caracteres visualizáveis na tela do computador e o “jogo do tatu”, que consiste em guiar um tatu de um ponto arbitrário “A” até o local em que o mesmo armazena sua comida. Em ambas as situações, a autora dá um tratamento bidimensional às construções. Com relação às transformações em 3D, traz o exemplo de um protótipo de carroceria de automóvel que, para ser observado em uma tela de vídeo por vários ângulos, necessita de vários cálculos matriciais, além de teorias de transformações espaciais por ela já detalhadas. O que se percebe da leitura das análises e das considerações da autora é a importância dedicada, no âmbito investigativo, ao nível de conhecimento sobre matrizes e das transformações lineares, uma vez que semelhantes elementos matemáticos são constantemente utilizados tanto no meio acadêmico quanto em outras áreas de conhecimento específicas.

Esta descrição do trabalho de Gonçalves (2013) é feita aqui porque constitui uma das motivações desta pesquisa, que parte do pressuposto de que, via de regra, a disciplina Álgebra Linear é um pré-requisito para várias áreas do conhecimento.

Outro ponto a se considerar, e que serviu de incentivo à investigação aqui desenvolvida, é que vários problemas de matemática aplicada envolvem o conteúdo de transformações algébricas, isto é, muitos problemas contêm questões relativas à existência de elementos de entrada que se transformam em elementos de saída, e como isto ocorre, em termos matemáticos. Em muitos modelos matemáticos nos quais ocorrem tais fenômenos, evidencia-se que as transformações envolvidas são lineares, isto é, a soma de duas entradas é transformada na soma de suas saídas individuais, ou o múltiplo de uma entrada é transformado no múltiplo da entrada original, gerando, assim, uma saída significativa em termos algébricos.

Nesse sentido, e ainda com referência à utilização de transformações lineares em aplicações contemporâneas, pode-se tomar como exemplos os modelos de regressão usados para determinar padrões nas informações coletadas, distribuídos em um gráfico onde os pontos correspondem a um vetor de duas variáveis. É o caso do modelo de regressão usado para descrever o volume de busca de anais em uma biblioteca; neste caso, é possível colocar os vetores em uma transformação linear, a

fim de determinar as tendências nos dados e estimar o número de buscas futuras. Outro exemplo, também importante do uso de transformações lineares, é encontrado em aplicações no campo da computação gráfica, já mencionado neste texto, no qual cada vetor de um plano corresponde a um *pixel* de uma imagem para *designers* gráficos, de modo que o uso de transformações lineares adequadas pode servir para aumentar, girar e diminuir *pixels* um a um, até que a imagem adquira as mesmas formas.

Pelo menos, no que diz respeito à aplicabilidade dos conceitos em um cenário social (em relação à profissão, por exemplo), a transformação linear é um conteúdo essencial para a formação dos alunos do ensino superior. Na visão de Oktaç e Uicab (2006, p. 462), trata-se de um tema central, envolvendo conceitos como espaço vetorial, combinação linear, valores de base e autovetores, entre outros. Para os autores, ainda, as transformações lineares cumprem um papel relevante em diversas áreas da Matemática, bem como em relação a diversos problemas aplicados em contextos científicos, econômicos e sociais.

Entretanto, no campo profissional das pessoas que ensinam Matemática – em particular, aqueles que se preparam para tal tarefa por meio das Licenciaturas específicas – parece surgir um impasse, ao menos no que se refere à realidade brasileira. Se conteúdos relativos à Álgebra Linear (as transformações lineares, por exemplo) não são tratados na escola básica, por que deveriam ser objetos de uma pesquisa como a que aqui se configura, envolvendo justamente licenciandos em Matemática? Talvez a melhor justificativa neste ponto seja contemplada pelo caráter transdisciplinar da aprendizagem em Matemática, o que implica em entender que há (ou deveria haver) uma profunda correlação entre os conteúdos, por exemplo, desenvolvidos na escola básica (no Ensino Médio, em particular) e o desenvolvimento de conhecimentos mais aprofundados para aqueles que enveredarem pela área de Exatas no Ensino Superior. Objetivamente, para o potencial professor de Matemática, público preferencial das licenciaturas mencionadas, é importante constituir conhecimentos que lhes permita efetuar demonstrações, compreender e contextualizar os conteúdos e suas ligações algébrico-geométricas, quando for o caso. Além disso, para o futuro professor, as transformações lineares explicitam a importância de conceitos como os de matrizes e sistemas de equações. Justamente sobre isto, vê-se:

> Embora a AL [álgebra linear] provoque dificuldades apontadas pelas

> pesquisas, ela constitui um assunto essencial para a formação do professor de matemática. Sua aprendizagem fornece uma poderosa ferramenta para a matemática superior, desenvolve a capacidade e habilidade de demonstrações matemáticas, explicita e exemplifica a ligação entre álgebra e geometria, entre outras coisas. É importante lembrar que os conhecimentos dos conceitos básicos de Álgebra Linear dão ao professor subsídios para a compreensão da importância de certos temas abordados na Educação Básica como matrizes, sistemas de equações, etc. (MACHADO E BIANCHINI, 2012, p. 70)

O tema, no entanto, representa certa complexidade inerente, o que parece causar muitas dificuldades de entendimento entre os licenciandos em Matemática no dia-a-dia da sala de aula. Nesta pesquisa, apontam-se outras investigações que indicam, em sua maioria, como causa principal destas dificuldades, o formalismo com que esse conteúdo é tratado e apresentado ao aluno, que, muitas vezes, acaba por ser induzido à memorização de determinados conceitos da álgebra linear, sem o devido cuidado em relação à compreensão dos mesmos. A despeito disso, Dorier e Sierpinska (2001), esclarecem que

> As dificuldades dos alunos com o aspecto formal da teoria de espaços vetoriais não são apenas um problema geral com formalismo, mas principalmente, uma dificuldade de compreender o uso específico do formalismo dentro da teoria do espaço vetorial e a interpretação dos conceitos formais em relação com contextos mais intuitivos como geometria ou sistemas de equações lineares, em que historicamente surgiu (DORIER; SIERPINSKA, 2001, p. 461, tradução nossa)

A notação algébrica é destacada como causa de dificuldades por Machado e Bianchini (2012), além do que chamam de “alto nível de abstração” (p. 85), que seria necessário para a compreensão de seus elementos constituintes e aplicações. Para as autoras, ainda, as mencionadas dificuldades se manifestam por “formas de automatismo e interpretações pessoais” (p. 86), muitas vezes inadequadas e imprecisas.

Por sua vez, Dorier (2001) apresenta vários resultados de estudos relacionados à álgebra linear realizados por outros pesquisadores. Dentre eles, por exemplo, está o trabalho desenvolvido por Dorier, Rogalsky, Robret e Robnet, intitulado “Obstáculo do Formalismo em Álgebra Linear”, no qual os autores se dedicam às investigações relativas ao ensino e à aprendizagem de álgebra linear, constatando que os estudantes apresentam muitas dificuldades para compreender o funcionamento de seus conceitos.

Além disso, pelo fato de esta disciplina ser apresentada nos momentos

iniciais de sua vida acadêmica, muitos alunos apresentam dificuldades relacionadas à nova linguagem exigida, o que acarreta, também, problemas para o ensino e a aprendizagem das transformações lineares. Evidentemente, não se descarta o aspecto formal da Álgebra, presente na linguagem simbólica mediadora entre os objetos matemáticos e suas representações. O que se procura indiciar, neste ponto, é que a formalização mencionada precisa de interposições didáticas, a partir de uma estratégia adotada pelo professor por meio da qual se engajem os estudantes, de modo que ela lhes faculte a construção do conhecimento, no lugar de propor memorizações áridas.

Sobre isto, Dorier (1997) alinha, especificamente, diversas dificuldades demonstradas por estudantes universitários iniciantes no que se refere à álgebra linear:

- Menos de um quarto dos estudantes avaliados em seu trabalho conseguem manipular noções elementares relativas às transformações lineares (p. 116);
- Menos da metade consegue prover respostas para sistemas de equações lineares 4 x 4, considerado elementar pelo autor;
- Cerca de um terço dos estudantes pesquisador não consegue obter o matriz de uma transformação linear quando o espaço vetorial é diferente de $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$, nem, tampouco, atentam para o isomorfismo.

O autor indica que, para a maioria dos estudantes, a Álgebra Linear se limita a uma coleção de muitas noções abstratas praticamente incompreensíveis, que lhes permite prosseguir apenas com muita dificuldade, em meio a um emaranhado de novos termos, definições, símbolos e teoremas.

Enquanto docente da universidade Estadual do Pará (UEPA), a pesquisadora vivenciou e observou uma situação reputada como preocupante que ocorre, normalmente, no início de cada ano letivo da instituição, quando é promovido um concurso para monitores das disciplinas dos cursos acadêmicos. Nestes casos, o concurso possui como único pré-requisito que o aluno tenha, na sua aprovação, a nota mínima 9,0 (nove) no histórico semestral, na disciplina a cuja monitoria aspira, ou seja, espera-se que ele tenha um bom desempenho no decorrer do curso de sua

pretensão, o que é mensurado através da avaliação[2]. Como a pesquisadora faz parte do grupo de correção dos testes de Cálculo, Álgebra Linear (Álgebra I) e Álgebra Abstrata (Álgebra II), notou que grande parte dos alunos tem predileção pelas disciplinas de Cálculo em detrimento das demais. Além disso, com relação aos alunos que escolheram trabalhar com a disciplina Álgebra Linear (Álgebra I), observa-se que apresentavam mais habilidade nas questões de sistema lineares e espaços vetoriais. Entretanto, geralmente, as atividades que envolvem transformações lineares são deixadas em branco nestes concursos, ou realizadas de forma inadequada. De modo geral, então, poucos alunos apresentam bom desempenho com relação às transformações lineares, o que indica as dificuldades acentuadas daqueles discentes em relação a esse conteúdo.

Muitas pesquisas, como as de Sierpinska e Hillel (2002), Dorier et al., (1999), Sierpinska (2000), Dorier e Sierpinska (2001), confirmam que grande parte dos alunos apresenta dificuldades na aprendizagem, bem como problemas em distinguir os objetos matemáticos e suas representações. Segundo Celestino (2000), a Álgebra Linear figura entre as matérias com alto índice de reprovações o que confirma a dificuldade apresentada pelos alunos para aprender esse tópico.

Diante dessa constatação, e a fim de trabalhar o conceito de transformação linear no âmbito acadêmico, uma metodologia muito comum encontrada nos livros didáticos para introduzir os conteúdos de álgebra linear é fazer uso de uma abordagem algébrica clássica, como, por exemplo, representar vetores por *n-uplas* e transformações por matrizes. Nesta linha didática, uma definição formal de transformação linear muitas vezes dada é “uma transformação de espaços vetoriais que preservam combinações lineares entre vetores”. Os vetores, que no plano são indicados pelo par (*x,y*), e, no espaço, pela terna (*x,y,z)*, são geometricamente representados por flechas que partem da origem e vão até os pontos P(*x,y*) e P(*x,y,z*), respectivamente. A importância dessa abordagem da álgebra linear é a de não apenas permitir a resolução de problemas lineares, mas também conferir um caráter universal e uma linguagem que habilita a utilização em vários contextos.

A introdução desta nova abordagem matemática no âmbito acadêmico desencadeou um novo caráter de abstração, exigindo, geralmente, uma familiaridade com conceitos e linguagem novos, os quais, muitas vezes, não têm

2 Não é intenção deste trabalho discutir se as avaliações praticadas na instituição são adequadas, mas apenas evidenciar o critério de escolha dos monitores.

muita relação com conceitos estabelecidos da estrutura cognitiva dos alunos, o que, consequentemente, origina dificuldades e problemas para os estudantes.

Dentro deste panorama de uma nova abordagem matemática, muitos percalços podem surgir, como apontam Sierpinska, Nnadozie e Oktaç (2002, p. 18), quando indicam que muitos alunos apresentam dificuldade em atividades de demonstrações ou, como eles mesmos colocam, “problemas de prova”, durante as quais é muito comum o professor ouvir a frase “- Não sei [nem] começar”. Na maioria das vezes, apontam os autores, estes alunos não buscam estratégias fundamentadas na teoria que envolve a questão, mesmo quando suscitados a fazê-lo. Os autores enfatizam, ainda, que podem surgir exemplos dados pelos alunos, a fim de resolver o problema em questão. Apesar de refutarem algumas afirmações gerais acerca do problema, os alunos têm, muitas vezes, dificuldades para resolvê-lo.

Dada a relevância e as preocupações observadas em torno do ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, direciona-se esta pesquisa às questões relativas às transformações lineares, em função da importância, reitera-se, da construção deste saber para um grande número de aplicações na área das Ciências Exatas, bem como em razão das inúmeras dificuldades apresentadas pelos alunos para a compreensão do assunto.

Propõe-se, nesta pesquisa, constituir um diagnóstico que permita apontar *de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática resolvem problemas conceituais em relação ao tema “transformações lineares” no âmbito de situações didáticas e com o uso de tecnologias digitais.* Além disso, pretende-se averiguar se os estudantes evidenciam, no discurso e no registro escrito que fizerem, compreensão acerca do significado das transformações lineares em um contexto mediado por tecnologias digitais (o *software* GeoGebra 5, em particular), superando a ênfase atribuída unicamente à terminologia abstrata que envolve este conceito, típica dos cenários de ensino expositivos, e que, por vezes, constitui-se na memorização pura e simples do vocabulário específico. A visão que se espera é a de *processo*, ou seja, os símbolos e a terminologia própria às transformações lineares se encaixariam, por meio de um trabalho didático teórico-prático que culminaria em evidências, apuradas por meio das análises, de compreensão do conceito.

Assim, aventa-se que a elaboração das atividades e sua adequada aplicação

em sala de aula podem cooperar para que os alunos adquiram uma postura mais autônoma na formulação de estratégias para construção do conceito de transformação linear, de modo que tal conhecimento passe a compor sua estrutura cognitiva e que, desse modo, possa ser manipulado e utilizado no futuro. Além disso, pretende-se obter, a partir das análises efetivadas no âmbito da investigação, um diagnóstico acerca do grau de efetividade da abordagem didática mencionada em relação à aprendizagem conceitual de transformações lineares por estudantes de Licenciatura em Matemática. Para tanto, propõe-se que a intermediação de tecnologias digitais de caráter computacional seja um importante meio para os alunos montarem suas próprias estratégias, sem, necessariamente, deixarem de lado materiais tradicionais/antigas tecnologias, como papel e lápis. É nesse sentido que nossa pesquisa se justifica.

As interfaces computacionais não são vistas, entretanto, como elementos centrais à compreensão, ou seja, aqueles instrumentos que, por serem disponibilizados em certos contextos, provocarão a aprendizagem. É que a utilização desses recursos abre perspectivas menos disponíveis nos artefatos tradicionais – a visualização, a experimentação e o dinamismo, em níveis diferenciados, entre elas. Ainda assim, dependem de fluência e de intervenção crítica e estratégia, uma vez que usar tecnologias na experiência de aprender Matemática provoca a necessidade de desenvolver habilidades nos elementos específicos a serem empregados. Além disso, não basta apenas que se proponha qualquer utilização de *softwares*, nem que essa utilização se proceda descolada dos temas matemáticos em discussão (Oliveira, 2013). As estratégias propostas pelo professor, e mesmo aquelas desenvolvidas por um estudante em particular, precisam ser consideradas, como Borba (2011) propõe

> O que é possível perceber é que quando se decide utilizar um software, seja ele gráfico, geométrico ou algébrico, em um curso a distância online, é importante que se reflita sobre como propor uma atividade considerando o contexto e visando contemplar os objetivos educacionais, sempre apoiado nas concepções teóricas acerca da temática. De modo geral, utilizar tecnologias informáticas em um ambiente de ensino e aprendizagem requer a sensibilidade do professor ou pesquisador para optar por estratégias pedagógicas que permitam explorar as potencialidades desses recursos, tornando-os didáticos. A estratégia pedagógica deve incluir a elaboração das atividades que serão propostas aos estudantes, bem como a maneira como será conduzida a discussão e socialização dos resultados obtidos nos processos de investigação matemática (BORBA, 2011, p. 5).

Nesta pesquisa, a abordagem engendrada para a consecução das atividades está baseada no conceito de situação didática, a ser discutido oportunamente neste trabalho, e que permeia as atividades propostas (Brousseau, 2008). O uso de tecnologias se encaixa, portanto, nesta proposta, ao mesmo tempo teórica e didática. Assim, o trabalho do estudante, em atitude investigativa, tem um lugar de destaque, na medida em que os problemas são submetidos aos sujeitos para que eles ajam, formulem e validem suas conjecturas, sem que seja possível, perceberem a intencionalidade do proponente. No que diz respeito aos artefatos digitais, Oliveira (2007, p.102) ensina que "com o uso de novas tecnologias, abre-se a perspectiva de um professor, no lugar de exercer o papel de fonte absoluta de sabedoria e ciência, transformar-se no incentivador da aprendizagem, orientador e incentivador das trajetórias". De igual forma, Oliveira (2007, p.103) salienta que, dentro desta perspectiva tecnológica, o aluno entra neste processo "como um elemento ativo, crítico e autônomo", de forma que, em conjunto, alunos e professores podem estar em conexão na busca da construção dos conhecimentos pretendidos.

As dialéticas propostas por Brousseau (2008) encaminham o estudante, no âmbito de "bons problemas", à construção de uma postura investigativa comparada pelo autor, na devida proporção, à imitação do trabalho de um matemático. Esta postura também é defendida por Borba (2011), ao incluir tecnologias digitais ao procedimento, quando afirma que "as possibilidades de investigação e experimentação propiciada por essas mídias podem levar estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, validá-las e levantar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática" (BORBA, 2011, p.3).

Neste sentido, Oliveira (2009) enfatiza que

> [...] as TICs descentralizam a tarefa de ensinar desde as mãos do professor, para compartilhá-la entre os grupos de alunos, sob sua orientação, em jornadas de descobertas, questionamentos e trabalho conjunto (OLIVEIRA, 2009, p. 13)

Desse modo, a articulação entre os pressupostos teóricos aqui delineados deve permitir o trabalho investigativo com o tema *transformações lineares*, lançando mão de atividades organizadas no âmbito de situações didáticas, em relação às quais se pretende fornecer elementos para a estruturação da aprendizagem e para a compreensão de como as mesmas se dão (com que expansões e/ou limitações)

sobre o tópico matemático em tela, tendo como elementos mediadores preferenciais as tecnologias digitais.

Assim, o objetivo geral desta pesquisa poderia ser descrito da seguinte forma: *investigar se uma sequência didática baseada na teoria das situações didáticas, envolvendo o uso do software GeoGebra 5, propicia aos alunos da licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará a construção do conceito de transformações lineares nos* $\mathbb{R}$*-espaços vetoriais* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$*.*

E os seguintes objetivos específicos:

a) Analisar a relevância, para estudantes de Licenciatura em Matemática, do domínio de conceitos prévios, como o de matrizes e sistemas lineares, na compreensão conceitual do tema “transformações lineares”;
b) Analisar de que maneira uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais (com o GeoGebra 5, especificamente) pode concorrer, por meio do estímulo à visualização e experimentação dinâmica, para a compreensão conceitual do tema “transformações lineares”; e
c) Analisar de que forma sequências organizadas como situações didáticas, com base no trabalho autônomo dos estudantes de Licenciatura em Matemática, sujeitos da pesquisa, podem concorrer para a compreensão conceitual do tema “transformações lineares”.

Em função dos argumentos expostos durante esta problematização, e dos objetivos delineados, indica-se a seguinte questão substantiva: ***de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática resolvem problemas conceituais em relação ao tema “transformações lineares” no âmbito de situações didáticas e com o uso de tecnologias digitais?***

Para responder a esses questionamentos, o restante deste trabalho está assim estruturado:

O capítulo um traz a argumentação teórica que fornece suporte para esta pesquisa, empregando, para isto, pesquisas referentes à Álgebra Linear, com foco no conteúdo “transformações lineares”. Para isso, o capítulo apresenta um levantamento de caráter bibliográfico, buscando encontrar elementos que venham a permitir uma compreensão de pesquisas relevantes sobre o tema, ao mesmo tempo em que evidencie um suporte adicional para as análises. Nesse capítulo, são descritos, ainda, os aportes teóricos relativos à Teoria das Situações Didáticas (TSD) e ao conceito de contrato didático.

O capítulo dois destina-se à apresentação do objeto matemático escolhido nesta investigação, caracterizado pelas transformações lineares e por conceitos correlatos.

O capítulo três aponta que a pesquisa tem caráter qualitativo, adotando, como delineamento, a análise de conteúdo. Os procedimentos metodológicos empregados na pesquisa são descritos, bem como evidencia-se o uso dos instrumentos pertinentes à investigação.

O capítulo quatro descreve os procedimentos relacionados à análise dos dados coletados, correspondentes às conjecturas e estratégias desenvolvidas pelos alunos, separados em duplas, para trabalhar com a sequência didática proposta.

Em seguida, como última parte deste texto, são tecidas as considerações finais da pesquisa, em conjunto com algumas recomendações relacionadas ao tema.

CAPÍTULO UM

APORTES TEÓRICOS DA INVESTIGAÇÃO

1.1 Revisão teórica

Neste capítulo, foram examinados trabalhos resultantes de pesquisas cujos temas podem ser correlacionados com os elementos desta investigação. Em função deste objetivo, realizou-se um levantamento de caráter bibliográfico, no sentido de encontrar subsídios relevantes para apoiar o quadro teórico e, consequentemente, efetuar de forma mais abalizada as análises.

Esta revisão se baseia em duas categorias de trabalhos: a primeira delas aborda questões envolvidas no aprendizado de álgebra linear; a segunda trata sobre as tecnologias digitais como mediadoras no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Para a primeira abordagem, tomou-se por base os trabalhos de Rosa et al., (2009), Gutiérrez e Lara (2006) e Karrer (2006); com relação à segunda, foram utilizados os trabalhos de Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1999), Molina e Oktaç (2007) e Sierpinska (2000).

Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1999), em seu trabalho de pesquisa sobre ensino e aprendizagem de transformações lineares, trazem como proposta de ensino uma abordagem geométrica para o tema em questão. Nessa pesquisa, os autores apontam que muitas das dificuldades dos estudantes resultam do fato de que a álgebra linear elementar usa três tipos de linguagens e níveis de descrição, correspondentes a três modos de pensamento:

a) A linguagem geométrica de espaço de dimensão dois e três (segmentos de reta com direção, pontos, retas, planos e transformações geométricas), correspondentes ao modo de pensamento sintético-geométrico;
b) A linguagem aritmética de $\mathbb{R}^n$ (n-uplas, matrizes, posto, soluções de sistemas de equações, etc.), que corresponde ao “modo aritmético-analítico do pensamento”; e
c) A linguagem algébrica da teoria geral (espaços vetoriais, subespaços, dimensão, operadores, núcleos, etc.), que corresponde a um modo “analítico-estrutural do pensamento”.

Os alunos demonstram dificuldade para entender quando os diferentes modos de pensar são relacionados, e como decidir qual deles é mais adequado para a resolução de um problema. Os autores verificaram que, de um modo geral, o início do ensino da disciplina Álgebra Linear é realizado assumindo uma abordagem aritmética ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$), considerando os vetores como pares ou ternos e as transformações lineares como matrizes. Depois, por meio da geometria analítica, é feita a ligação com a geometria plana ou espacial. Contudo, as transformações lineares são introduzidas de modo formal, como transformações entre espaços vetoriais, com a preservação da combinação linear. Depois, multiplicações de matrizes resultam em reflexões, projeções, rotações que são, normalmente, interpretadas geometricamente, no intuito de ajudar os alunos a estabelecer ligações entre os elementos do novo conhecimento adquirido. A partir, então, dos dados que levantaram, os autores observam que esta abordagem provoca dificuldades de entendimento para os alunos, já que um dos efeitos possíveis dela é não provocar a conexão do pensamento dos estudantes em relação às transformações lineares, ou seja, não favorecer uma aproximação dos aprendizes em relação a este tópico.

Outro ponto destacado pelos autores em relação à abordagem supramencionada é que a transição da linguagem aritmética para a estrutural da Álgebra Linear é algo que os alunos dificilmente conseguem realizar. Com base no fato de que a geometria é comumente utilizada como apoio para introduzir conceitos algébricos, os autores elaboram uma sequência didática, por meio do software *Cabri Geometrè*, fazendo uso de uma abordagem mais conceitual do que técnica. Dessa forma, alinham como hipótese que esse procedimento auxiliaria os estudantes no desenvolvimento do pensamento analítico a respeito dos conceitos elementares do conteúdo.

Para que a pesquisa fosse desenvolvida, os autores, antes de introduzirem as noções de transformação linear aos alunos, promoveram a familiarização dos mesmos com a linguagem e com a representação das transformações no ambiente do Cabri. Assim, após a aplicação e análise das sequências, os autores verificaram que a utilização do Cabri permitiu manipulações que não seriam possíveis no ambiente no qual os materiais usados normalmente eram o papel e o lápis. O ambiente informático proporcionou uma melhor visibilidade da transformação linear do que seu esboço no papel, já que a variável e sua imagem podiam ser visualizadas simultaneamente na tela, e, consequentemente, o efeito da

transformação podia ser observado diretamente. Os autores concluíram, ainda, que existia uma forte dependência entre as noções de vetor, de transformações e o ferramental adotado. Desta maneira, a ferramenta tecnológica utilizada auxiliou na constituição das concepções dos alunos.

Sierpinska (2000) verifica os aspectos do pensamento mobilizados por estudantes de álgebra linear, e conclui que eles tendem mais a usar o que chama de "pensamento prático" no lugar do "pensamento teórico" para a resolução de problemas atinentes à álgebra linear. Neste sentido, a autora indica entender que o pensamento teórico é caracterizado por uma reflexão consciente acerca do significado semiótico da representação do conhecimento e por sistemas conceituais ao invés de meras agregações de ideias. Desta forma, o raciocínio, quando guiado por elementos teóricos desta natureza, baseia-se em conexões lógicas e semânticas entre os conceitos no âmbito de um sistema. A argumentação da autora indica uma rede complexa de conexões que embasariam o pensamento teórico:

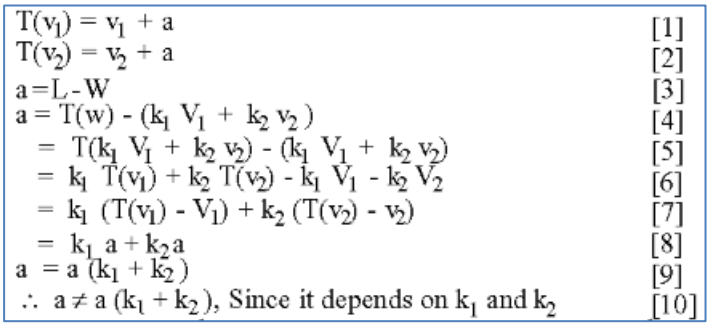
> As relações entre conceitos e objetos são mediadas por relações dos conceitos com outros conceitos. Em particular, definições de conceitos, comparações entre conceitos e suas diferenciações são construídas com base nas relações destes conceitos com conceitos mais gerais e não, por exemplo, com base nos exemplos mais comuns (SIERPINSKA, 2000, p. 270)

Para a autora, várias razões levam os estudantes a falharem quando tentam pensar do ponto de vista teórico. Um dos elementos mais importantes nesta afirmação ocorre por meio daquilo que chama de "transparência da linguagem", caracterizada, principalmente, pela tendência dos estudantes em empregar um discurso implícito, típico da oralidade, em suas propostas de resolução de atividades, no lugar de constituírem redações detalhadas por meio do discurso escrito, que é estreitamente ligado com o pensamento científico. Como consequência, respostas ligadas a este discurso implícito apresentam quase que a impossibilidade em recuperar o raciocínio empregado pelo aluno, uma vez que não existem explicações sobre suas ações e muitos passos empregados em certas resoluções surgem sem qualquer justificativa teórica.

A figura 1 representa um exemplo utilizado pela autora no sentido de explicitar esta tensão entre o discurso da oralidade, de elementos explícitos, e o discurso explícito que deveria haver, típico da linguagem escrita, a qual, aliás, a autora indica que deveria ser do domínio de qualquer estudante universitário de Matemática. A

figura mencionada representa a resolução de um estudante acerca da questão: “Verifique se a translação por um vetor constante *a* no plano, definida pela fórmula T(v) = v + a, é uma transformação linear”.

Figura 1-Exemplo da resolução de um estudante (verificação de transformação linear)



Fonte: SIERPINSKA, 2000, p. 213

Para a autora, é muito difícil recuperar o raciocínio empregado na resolução exposta na figura 1, porque a mesma não traz qualquer explicação. Pode ser, por exemplo, que L na linha 3 signifique o lado esquerdo da equação (de *left*, em inglês). Talvez o estudante tenha visto o padrão de igualdades nas linhas 1 e 2 como L = w + a e tenha deduzido que a = L – w, mas não se pode ter certeza. Além disso, na linha 6, a expressão $T(k_1v_1 + k_2v_2)$ é substituída por $k_1T(v_{1)} + k_2T(v_2)$, o que sugere que ou o estudante cometeu um erro lógico (uso de argumentos circulares) ou que utilizou um método de prova por contradição. De igual forma, as passagens entre as linhas 5 e 8 poderiam ser justificadas pelas leis de operações sobre vetores, mas o estudante não escreve qualquer justificativa. As linhas 9 e 10 representam contradições entre si, e, ainda que pareça mesmo, ao final, que uma prova por contradição tenha sido o caminho adotado, não é possível ter qualquer indicação sobre isto. Em particular, sobre problemas deste tipo, a autora indica que a maioria dos estudantes adota a equação $T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_{1)} + k_2T(v_2)$ como detentora de poderes mágicos, capaz, por isso, de fornecer a chave para todos os problemas. A autora indica, ainda, que o uso do *software* Cabri auxiliou, em um primeiro momento, na formulação de um discurso teórico conceitual mais consistente quando o problema usado dizia respeito à transformação de vetores – ainda que este discurso tenha sido, de certa forma, induzido pelo professor. Entretanto, logo em seguida, diante de uma situação comum de sala de aula, mesmo usando o Cabri, os estudantes que adotaram o discurso prático não explicaram elementos de

transformações, limitando-se a afirmar que “coisas estavam acontecendo” (p. 216).

Em relação a outras limitações apresentadas em relação ao uso inadequado do discurso, a autora indica a incapacidade dos estudantes que participaram de sua pesquisa em formular definições consistentes dos objetos matemáticos de álgebra linear de forma a determinar completamente este objeto – a autora obteve apenas indicações errôneas ou incompletas dos objetos em teste. Além disso, Sierpinska (2000) identificou uma incapacidade de perceber o caráter sistêmico do conhecimento científico por parte dos sujeitos quando constatou, em seus experimentos didáticos, que certas afirmações dos estudantes contradiziam resultados recentes providos por eles mesmos. Isto acontece, na visão da autora, de várias formas e em vários momentos, mas, em especial, nos momentos iniciais da aprendizagem em álgebra linear, ou seja, nos níveis mais elementares, uma vez que, nestas circunstâncias, a quantidade de conceitos novos cresce muito rápido e as ligações entre eles se tornam cada vez mais complexas. De forma agravante, inclusive, a autora aponta que os estudantes não parecem interessados em identificar estas incoerências, mesmo que de forma empírica, por meio do uso de recursos providos por *softwares*, por exemplo. Sierpinska (2000) indica, neste contexto, que os estudantes tendem a relacionar os conteúdos mais de maneira “temporal”, por assim dizes (“- Vi isto algumas semanas atrás” ou “- Acho que aprendi isto na semana 5”) do que de acordo com o que chamou de “relações de generalidades” (p. 218). Do ponto de vista desta investigação, aliás, o exemplo trazido por Sierpinska (2000) neste ponto do texto é bastante significativo, motivo pelo qual o mesmo é descrito.

Trata-se de um problema dado como lição de casa para os alunos depois de os mesmos terem trabalhado com o *software* Cabri por algum tempo, de modo a poderem, entre outras coisas, definir a igualdade de vetores geométricos de várias maneiras, decompor vetores em combinações lineares de outros vetores, além de trabalhar com equações vetoriais lineares. Em particular, os alunos estavam familiarizados com o comando “Novos Eixos” do *software*, e tiveram a oportunidade de perceber que um vetor pode ter diferentes coordenadas, dependendo da escolha dos vetores unitários para os eixos. Desta forma, o problema estava dividido em duas partes. Na primeira, os alunos tinham cinco pontos (O, A, B, C, D) na tela Cabri, posicionados de modo que o ponto de intersecção M das linhas AB e CD estava dentro da tela que os mesmos visualizavam (sem necessidade de rolar a

mesma). Foi solicitado aos alunos que descrevessem a posição do ponto de intersecção M em relação ao ponto O, escrevendo o vetor $\overrightarrow{OM}$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Esta parte do exercício poderia ser feita "empiricamente", usando as ferramentas do Cabri e apenas lendo as coordenadas de M em “Novos Eixos”, construídas em $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Na segunda parte do problema, os pontos foram posicionados de tal forma que as retas AB e CD no mais se intersectavam visivelmente no espaço provido pela tela que os estudantes podiam visualizar, mas eram obviamente não paralelas. A questão era exatamente a mesma. Os estudantes não podiam rolar a tela, ou seja, usar este recurso “empírico” para verificar qualquer coisa que fosse. Coincidentemente, os pontos O, A e C, usados na proposta, pareciam ser colineares – mas não eram, e isto poderia ser verificado pelos alunos usando recursos simples do Cabri. Era esperado que os estudantes encontrassem, utilizando o Cabri, as coordenadas de C e D no sistema de coordenadas baseado nos vetores $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OB}$, e então procedessem analiticamente, por meio da representação do vetor desconhecido $\overrightarrow{OM}$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de modo a resolver o sistema de equações, usando, por exemplo, a unicidade de representação de um vetor em uma base. Assim:

$$\overrightarrow{OM} = s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{OM} = t\left(k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB}\right) + (1-t)\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

onde $(k_{1,}k_2)$ e $(m_{1,}m_2)$ são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ no sistema baseado nos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Os estudantes poderiam obter valores concretos para tais coordenadas usando o Cabri ou resolver o problema mais geral com as coordenadas como parâmetros. Justamente, esta atividade era típica da abordagem proposta no curso em questão, com problemas divididos em duas partes, sendo que a primeira permitia a manipulação de objetos na tela do computador, enquanto que a segunda restringia esta possibilidade, de forma que representações analíticas e conhecimentos de álgebra linear eram imprescindíveis. Esta abordagem se baseou no pressuposto epistemológico de que não há acesso direto aos objetos do conhecimento científico.

Dentre os oito estudantes envolvidos nesta atividade, três mudaram as posições dos pontos A, B, C, D de tal forma que M permanecesse na tela que

visualizavam, sem rolar a mesma, e resolveram a segunda parte do problema da mesma forma como fizeram com a primeira, ou seja, usando as ferramentas do Cabri; dois outros estudantes tentaram obter uma solução analítica com base nos conhecimentos de álgebra linear, mas não conseguiram; e três outros não forneceram qualquer resposta. Entre os estudantes que procuraram a resposta por meio de um procedimento analítico, os erros mais comuns repousaram justamente na inobservância do caráter sistêmico do conhecimento que empregavam, de ordem científica, o que concorreu por produzir diversas contradições (assumir como iguais relações desiguais, fazer substituições inválidas, entre outras). Para a autora, tais observações corroboram a falha dos estudantes em tentar fazer conexões entre as ideias básicas de alguns teoremas e as definições, e, também, ao assumirem uma escolha arbitrária de premissas a partir de evidências visuais fornecidas pela figura na tela (p. 222).

Ao contrário do que parece, no entanto, Sierpinska (2000) não se opõe ao que chama de pensamento prático em álgebra linear (ou acerca de qualquer outro discurso científico). A autora indica que tanto o pensamento teórico quanto o prático são importantes, e frequentemente funcionam de forma conjugada. Mesmo os cientistas agem assim, recorrendo mais ao pensamento teórico diante de perplexidades, contradições, desafios ou críticas. Entretanto, o uso isolado (ou predominante) do pensamento prático pode conduzir a erros (mesmo entre os cientistas), uma vez que pode funcionar como obstáculo epistemológico, no sentido indicado por Bachelard.

Molina e Oktaç (2007) realizaram investigações em Álgebra Linear, mais especificamente sobre o conteúdo de transformações lineares, devido às dificuldades conceituais que este conceito representa para os alunos e pela importância que possui no currículo de engenharias e nas licenciaturas em Matemática. Os autores baseiam sua investigação na ideia de que os alunos, para aprenderem determinado conceito matemático, realizam construções de significados a eles associados, por meio de modelos intuitivos.

Desta maneira, Molina e Oktaç (2007), nesse trabalho, trazem a proposta de identificação dos modelos intuitivos construídos pelos alunos, no sentido apontado

por Fischbein, citado por Molina e Oktaç (2007)[3], modelos estes que os alunos utilizam na construção do conceito de transformação linear em um contexto geométrico. Mais especificamente, os autores buscaram ver como a existência de modelos geométricos influencia a aprendizagem do conteúdo de transformação linear. Para realizarem suas analises, os autores adotaram as categorizações de modelos intuitivos descritas por Fischbein (1987), da seguinte maneira:

a) Modelos explícitos e implícitos (ou tácitos): diferencia modelos explícitos de modelos implícitos. Os explícitos são construídos ou escolhidos conscientemente, para facilitar a busca de uma determinada solução, ao contrário dos modelos implícitos ou tácitos, de cujo alcance os alunos não têm consciência;
b) Modelos análogos e paradigmáticos: duas entidades estão em relação de analogia quando há semelhanças sistemáticas entre elas, as quais poderiam incentivar alguém a assumir a existência de outras semelhanças. Neste caso, o modelo e o original pertencem a dois sistemas conceituais distintos. Com relação aos modelos paradigmáticos, o original consiste em certa classe de entidades, enquanto que o modelo é fornecido por uma instância ou subclasse da categoria mencionada.

Assim, para os autores, devido ao caráter abstrato da álgebra linear, os alunos tendem a buscar substitutos que lhes ajudem a converter as noções desta área em noções aceitáveis intuitivamente, justamente porque uma das características mais notáveis dos modelos intuitivos é a simplicidade que apresentam, que os conduz a terem, inclusive, um caráter trivial. Por vezes, então, não chega a ser uma questão da impossibilidade de aceitar a teoria matemática subjacente, mas uma necessidade inconsciente de reduzir o nível de abstração do conceito.

Molina e Oktaç (2007), constroem, então, situações geométricas no plano, com o intuito de identificar padrões geométricos que podem influenciar a compreensão do conceito de transformação linear. Os autores partem da hipótese de que os alunos podem associar a ideia de movimento às transformações lineares. E, nesse sentido, identificam três tipos de movimentos:

[3] Fischbein (1987) adota, por sua vez, para a noção de modelo, a proposta de Gentner: “um sistema B representa um modelo de um sistema A, se, na base de certo isomorfismo, uma descrição ou uma solução produzida em termos de A pode ser refletida consistentemente em termos de B e vice-versa”.

a) Movimentos geométricos simples: certos movimentos associados a transformações lineares como, por exemplo, de expansão ou de contração; de rotação ou de reflexão;
b) Combinações de movimentos geométricos simples: combinações que os alunos podem realizar com movimentos simples. Por exemplo, quando fazem a composição de uma rotação e uma expansão;
c) Transformações difíceis ou impossíveis de descrever com movimentos geométricos simples ou combinações dos mesmos: é o caso da transformação linear de cisalhamento, que necessita de interpretação geométrica para ser aceita como uma transformação linear.

Deste modo, os autores apresentam a hipótese de que alguns alunos podem associar geometricamente uma transformação linear com os casos **a** e **b**, e a existência de transformação linear pode ser rejeitada geometricamente se representa o caso **c**.

Na pesquisa, os autores entrevistaram cinco egressos de um curso de licenciatura em Matemática que iniciavam seus mestrados em Educação Matemática. Além de perguntas sobre o tema “transformações lineares”, algumas questões foram usadas, no sentido de verificar se os estudantes conseguiam identificar casos de transformações lineares e se poderiam explicar os mesmos.

Em relação aos resultados das análises dos dados coletados e efetivadas por meio de uma engenharia didática, os autores destacaram que os modelos intuitivos detectados em todos os sujeitos representavam uma série de casos particulares de transformações lineares. Entre as dificuldades levantadas por eles, destacam-se a existência de modelos intuitivos que tendem a reduzir as transformações lineares em movimentos geométricos simples ou que buscam justificá-las como movimentos simples que viessem a explicar as mudanças nos vetores envolvidos, além de incompreensões dos conceitos de espaço vetorial e problemas para transitar entre distintas representações (geométrica e algébrica, por exemplo).

Em suas considerações finais, os autores enfatizam que foi demonstrado que os alunos relacionam o termo “transformação linear” com linhas retas, e estas com os graus de expressões algébricas. Também, salientam que alguns alunos têm a ideia de que se um objeto é uma linha curva, ele não pode ser o resultado de uma transformação linear. Esta afirmação pode ser feita com base nas observações, das

quais levantaram o exemplo sugerido como transformação não-linear pelos sujeitos: a função quadrática. Neste sentido, afirmam que convém buscar uma forma de quebrar esta concepção. Também recomendam que, para fins didáticos, o trabalho com o conceito de transformação linear se utilize de dimensões diferentes, como por exemplo, de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, salientando que este tipo de atitude contribui para que o aluno perceba que a transformação linear pode representar situações diferentes daquelas que ocorrem com movimentos simples.

Rosa et al., (2009), em sua pesquisa, abordam o ensino e a aprendizagem do conteúdo de transformação linear, enfatizando o fato de o mesmo não mostrar uma relação mais direta da Álgebra Linear com a Geometria, fato este colocado como um fator que torna seu ensino mais abstrato. Para estabelecer um direcionamento em sua pesquisa, os autores enfatizam o pressuposto de que o ensino de Matemática deve abranger três componentes fundamentais: a conceituação, a manipulação e a aplicação, destacando a necessidade de existir uma dosagem adequada de cada um destes três componentes, a fim de se obter um melhor resultado nos cursos.

Para a realização de sua pesquisa, ainda, os autores se apoiaram nas atividades com o uso do software *Winplot* para explorar o conceito de transformações lineares no plano, bem como os tipos existentes, buscando dar um suporte maior para a interação das mesmas em outros espaços vetoriais, proporcionando, também, um estudo mais aprofundado da geometria das transformações. Neste sentido, os autores propõem atividades que trabalhem exemplos de modo que o aluno possa chegar a generalizações do conceito.

Com relação à escolha do *Winplot*, os autores argumentam que o *software* serve de auxílio para a visualização e o entendimento dos conceitos em tela, proporcionando ao aluno manipular e aplicar o que aprendeu, fazendo uso da geometria das transformações.

Gutiérrez e Lara (2006) apresentam o estudo de transformações lineares como um dos conteúdos de Álgebra Linear em que os alunos encontram grande dificuldade de aprendizagem. Os autores colocam o fato de os alunos apresentarem dificuldade em relacionar as interpretações geométricas com as representações de uma matriz de transformação linear, o que concorre para o surgimento de uma série de problemas no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo. Desse modo, como objetivo de sua pesquisa, os autores propõem a apresentação de uma estruturação educacional alternativa para o ensino de transformações lineares,

desenvolvendo atividades que levem os alunos a descobrirem a relação entre a representação matricial de uma transformação linear com as suas propriedades.

Em sua pesquisa, os autores utilizam o *software Cabri Geometry II Plus*, que permitiu, segundo eles, abordar o ensino deste conteúdo de uma forma diferenciada da tradicional, uma vez que o *Cabri Geometry II Plus* seria um *software* de aprendizagem geométrica que ajudaria a propor diferentes situações de aprendizagem, com recursos distintos daqueles disponíveis na forma tradicional. Neste trabalho, os autores procuraram apresentar uma visualização das propriedades geométricas a partir do *software*.

Como sujeitos de seu trabalho, os autores utilizaram os alunos do curso de álgebra linear da Universidade Autônoma do México. Durante o desenvolvimento de seu trabalho, observaram que a proposta obteve uma boa aceitação por parte dos alunos. De acordo com os pesquisadores mencionados, o uso da estratégia baseada no *software* contribuiu para a produção de uma aprendizagem mais significativa dos conceitos estudados, de forma a superar eventuais dificuldades apresentadas.

Karrer (2006) aborda questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear no ensino superior, mais precisamente o conceito de transformação linear. Neste sentido, a autora traz em seu trabalho a avaliação sobre de que modo situações que envolvem a exploração de diversos registros e conversões, principalmente aquelas que integram os registros gráficos, influenciam na conceitualização das transformações lineares no plano, por parte de estudantes universitários na área de computação. No intuito de responder à questão levantada, a autora leva a efeito a elaboração, aplicação e validação de uma abordagem de ensino do objeto matemático “transformação linear plana”, incorporando mudanças de registros e o auxílio do *software Cabri-Gèométre*, tendo como foco as conversões, envolvendo, principalmente, registros gráficos.

A autora encontrou nos trabalhos de Duval (1995; 2000; 2003) a base principal que norteou sua investigação: a abordagem do pesquisador francês a respeito dos registros de representação semiótica, principalmente, quando indica a importância de considerar, sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem matemática, as especificidades inerentes a cada registro. No intuito de obter um referencial para a elaboração de suas conjecturas com relação ao ensino de transformação linear, como ele é desenvolvido na prática docente, a autora realiza

uma análise de livros didáticos de álgebra linear, tendo por base os manuais adotados pelos cursos universitários de computação de doze universidades do país. Neste levantamento, constatou o uso mais frequente de quatro obras, nas quais baseou suas observações.

Do mesmo modo, foi realizada uma análise de livros didáticos da disciplina de computação gráfica, considerando treze universidades do país, para determinar quais registros e conversões seriam mais explorados em relação ao conteúdo de transformação linear, tendo em vista que, na análise de livros didáticos de álgebra linear, ficou evidenciada uma carência de registros gráficos. A análise de livros didáticos, juntamente com os estudos preliminares, a aplicação de questionários e os desenvolvimentos teóricos compuseram a primeira fase da pesquisa.

Ainda em relação à análise de livros didáticos, a autora observa que a matriz curricular dos cursos inclui tanto a disciplina de Álgebra Linear como a de Computação Gráfica. As transformações no plano e no espaço são desenvolvidas em ambas as disciplinas, sendo a Álgebra Linear caracterizada como pré-requisito para o estudo de conceitos de Computação Gráfica. Nesta avaliação dos livros didáticos de Álgebra Linear, a autora observa que existe uma evolução na diversificação das representações, quando são comparados os livros mais atuais, publicados a partir do ano 2000, com as obras mais antigas, editadas pela primeira vez nas décadas de 1970 ou 1980. Deste modo, Karrer (2006) pontua que, com base nestas observações, justificar-se-ia um estudo histórico mais aprofundado sobre os aspectos relacionados às abordagens de ensino e aos registros nos livros didáticos.

Já com relação ao questionário sobre transformações lineares, foi aplicado a oitenta e seis estudantes da área de Computação de quatro instituições particulares do estado de São Paulo. A aplicação deste questionário levou em consideração o fato de os alunos já terem cursado a disciplina de Álgebra Linear no semestre anterior, e que todos os estudantes iriam cursar a disciplina de Computação Gráfica, para a qual necessitariam do conteúdo de Álgebra Linear. Observou-se, contudo, que até o momento da aplicação do questionário, os estudantes não haviam tido qualquer contato com o conteúdo de transformações geométricas desenvolvido na disciplina de Computação Gráfica.

Estes estudos apontaram deficiências e dificuldades com relação à exploração de diferentes registros por parte dos estudantes, principalmente os

registros matriciais e gráficos.

Dando continuidade à pesquisa, a autora compôs a segunda fase com base na metodologia denominada *Design Experiments* (Cobb et al., 2003), o que a levou a propor atividades de exploração das diversas representações de transformações lineares planas, nos ambientes *Cabri-Géomètre* e papel-e-lápis. A autora partiu de uma abordagem diferenciada sobre o conteúdo de transformação linear, buscando avaliar os conhecimentos dos alunos. Esta fase contou com a colaboração de seis alunos do curso de Engenharia de Computação de uma instituição particular de ensino superior de São Paulo. Foi analisado o papel desempenhado pelo ambiente de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre* durante este processo. A escolha desta ferramenta possibilitou explorar, simultaneamente, as relações entre três representações do objeto matemático em questão, além das situações de interpretação de suas propriedades em um contexto geométrico. Com relação ao aspecto dinâmico do *Cabri-Géomètre*, a autora coloca que foi o diferencial para explorar situações não usuais no ensino convencional, como, por exemplo, a relação dinâmica e simultânea entre as representações algébrica, gráfica e tabular, a análise geométrica das condições de linearidade e reflexões diferenciadas sobre as condições necessárias para a obtenção de uma transformação linear. Desta forma, a autora considera que as construções ou objetos elaborados no *Cabri-Géomètre* podem ser classificados como ferramentas que forneceram vantagens pedagógicas.

No que diz respeito ao *design*, o mesmo foi composto de duas fases, sendo a primeira realizada individualmente, com o objetivo de analisar o conhecimento prévio de cada estudante e, na segunda fase, os sujeitos foram organizados em duplas, e se depararam com atividades diferenciadas sobre o conteúdo de transformações lineares planas.

Uma suposição deste trabalho é relacionada às especificidades do ambiente computacional, no qual as atividades do *design* permitiriam ao estudante o entendimento das características de cada registro, bem como as relações entre eles, ou seja, o tipo de impacto que ocorreria em certo registro, quando fosse realizada uma mudança em outro registro. Esta suposição também foi confirmada a partir das ações realizadas pelos estudantes participantes do experimento, pois os mesmos, segundo a autora, demonstraram pleno domínio para avaliar as particularidades das representações gráficas, tabular e algébrica de uma transformação linear plana e em estabelecer as conversões entre elas.

A revisão bibliográfica aqui apresentada indicou, prioritariamente, que os sujeitos das investigações que tinham por tema conteúdos de álgebra linear evidenciam consideráveis dificuldades quando submetidos a atividades desta disciplina, em especial àquelas ligadas às transformações lineares. Pode-se observar que professores em formação, entre outros sujeitos, apresentaram ou consideraram definições incompletas e imprecisas no trato com os temas de tais investigações. Especificamente, então, os pontos de maior destaque que ressaltam desta revisão são:

- Os estudantes adotam um discurso de prática, o qual, muitas vezes, dificulta a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de uma argumentação teórica consistente. Mesmo quando apoiados por softwares, como o Cabri, por exemplo, a melhoria neste quesito é apenas temporária, o que pode indicar que o trabalho com estas interfaces não é suficiente para apoiar o desenvolvimento de conceitos, mas que não dispensa cuidadoso preparo de estratégias didáticas;
- Os alunos recorrem frequentemente a definições incompletas e imprecisas, incorporando tais “ferramentas” aos procedimentos habituais de resolução de problemas em álgebra linear;
- Os sujeitos das pesquisas levantadas, via de regra, apresentam dificuldade em perceber o caráter sistêmico do conhecimento científico, o que sugere certa instabilidade no processo de construção do conhecimento sobre o tema transformações lineares e que patrocina algumas contradições entre informações em diferentes momentos do trabalho de resolução de atividades;
- Os alunos tendem a substituir conceitos e uso de teoremas por modelos intuitivos, de modo a tentar diminuir o nível de abstração envolvido. As pesquisas levantadas nesta investigação apontam que tal fato pode levar a falhas conceituais, como a incompreensão do conceito de espaço vetorial e dificuldades de transitar entre registros. De maneira mais incisiva, esta prática pode conduzir à consolidação de erros;
- Os estudantes apresentam dificuldades em relacionar as interpretações geométricas com as representações de uma matriz de transformação linear.

Um ponto que vale a pena revisitar se refere ao emprego, por parte dos estudantes, de modelos intuitivos. Ressalta destas asserções a possibilidade em torno da prevalência de um modelo mecanizado de ensino desses conteúdos, o que permite supor que essas características poderiam decorrer da falta de sentido e de significados relevantes para a aquisição destes objetos matemáticos, o que colaboraria para impedir o desenvolvimento cognitivo dos alunos de forma mais ampla. Muitos autores, por isso, apresentam uma preocupação com a axiomatização que envolve o ensino dos conteúdos de Álgebra Linear, de modo que esse caráter não venha a contribuir para um aumento das dificuldades existentes na assimilação desses conhecimentos. Entretanto, não se pode deixar de pontuar que essa abordagem axiomática, existente nos conteúdos de álgebra linear, também se faz necessária para o próprio desenvolvimento deste conteúdo matemático. Segundo Dorier e Sierpinska,

> A [axiomatização da álgebra linear], em si, não permitiu que os estudantes de matemática resolvam novos problemas, mas deu-lhes uma abordagem mais universal e uma linguagem para ser usada em uma variedade de contextos (análise funcional, formas quadráticas, aritmética, geometria, etc.). A abordagem axiomática não era uma necessidade absoluta, com exceção de problemas não enumeráveis de dimensão infinita, mas tornou-se uma forma universal de pensar e organizar a álgebra linear. Portanto, o sucesso da axiomatização não veio da possibilidade de alcançar uma solução para problemas matemáticos não resolvidos, mas a partir de seu poder de generalização e unificação e, consequentemente, da simplificação na busca de métodos para resolver problemas de matemática. (DORIER; SIERPINSKA, 2001, p. 257, tradução nossa)[4].

Se é desta forma, seria lícito pensar que o processo de ensino em nada influencia a dificuldade dos estudantes, e que os elementos surgidos neste trabalho a partir do levantamento aqui evidenciado se devem, exclusivamente, à inabilidade dos estudantes. No entanto, seria difícil crer em tal assertiva. De modo geral, ao se trabalhar com conteúdos matemáticos, fica evidente a necessidade da atualização da prática dos professores. Não é diferente quando se fala de álgebra linear. O que

[4] The [axiomatization of linear algebra], in itself, does not allow math students to solve new problems, but gave them a more universal approach and language to be used in a variety of contexts (functional analysis, quadratic forms, arithmetic, geometry, etc.). The axiomatic approach was not an absolute necessity, except for not enumerable problems of infinite dimension, but has become a universal way of thinking and organizing linear algebra. Therefore, the success of axiomatization not come from the possibility of reaching a solution to unsolved mathematical problems, but from its power of generalization and unification and thus simplifying the search for methods to solve math problems

se aventou até agora, inclusive em relação ao levantamento bibliográfico realizado, dentre os elementos dificultadores já mencionados, é que o insucesso e a inabilidade no trato dos alunos com a álgebra linear, e em particular, com as transformações lineares, pode ter relação com seu ensino, cujo caráter puramente abstrato dificultaria a utilização de recursos que possibilitem a construção do conhecimento sobre o tema. Neste sentido, deve ser considerado que o ensino de Álgebra Linear, apesar de não ter a mesma lógica em diferentes países, tem pontos em comum, dos quais se vale este trabalho. Assim, para Celestino (2000):

> Na França a tradição impõe que se introduza a teoria axiomática desde cedo, com forte fundamento nos exemplos teóricos, enquanto que na América do Norte ou no Brasil, o quadro das n-uplas e das matrizes é predominante no começo do ensino da Álgebra Linear. Entretanto, todos os estudos realizados mostram problemas em desenvolver tanto a generalidade dos objetos quanto o caráter formal e abstrato das novas noções (CELESTINO, 2000, p. 43-44)

As questões conceituais aparecem, então, segundo o autor supramencionado em contextos diversos, apesar de diferenças nas abordagens curriculares. De alguma forma, então, percebe-se a relevância de mencionar a ideia de contrato didático, relacionada com processos de aprendizagem.

1.2 Contrato didático

A falta de significado e sentido para os saberes mobilizados pode impedir o desempenho dos alunos e o uso do ferramental matemático em sua vida e nas interações sociais de toda ordem. Deste ponto de vista, percebe-se a influência de um conjunto de regras, normas e representações que criam condicionamentos na relação professor-aluno em dada situação e que facilitarão, de certa forma, a aquisição de um determinado saber. Essas regras, em sua maioria, não aparecem de forma explícita, mas possuem um caráter de obrigações implícitas, levando professores e alunos a atitudes e procedimentos dentro de determinada ordem esperada e previsível.

Neste sentido, Brousseau (1990) caracteriza o contrato didático. Trata-se, segundo o autor, de um conjunto de obrigações e sanções recíprocas em relação a cada integrante da situação didática que consideram necessárias, como imposição explícita ou implícita ao outro, acerca do conhecimento envolvido. O contrato

didático também diz respeito às negociações entre um aluno (ou um grupo de alunos), um meio e um sistema educacional. Desse modo, a noção de contrato didático pode servir para a administração de uma situação didática dentro de sala de aula. Neste caso, segundo o autor, um mau gerenciamento por parte do professor pode provocar dificuldades para a aquisição do novo conhecimento pelo aluno.

Brousseau (1990) salienta que o contrato didático não é considerado como um “contrato verdadeiro”, por ele não ser constituído legalmente (forma documental) e porque suas condições de rupturas e sanções não são previamente colocadas, dada a sua natureza didática. Ele corresponde às expectativas e vontades do professor e dos alunos, um com relação ao outro, dentro das interações didáticas de um sistema educacional. Brousseau (1990) salienta que o contrato didático é composto por cláusulas, na grande maioria, implícitas, e que equilibram a divisão de responsabilidades, assim estabelecendo a relação intuitiva entre professor e aluno na aquisição de um conhecimento.

Sobre o mesmo tema, salienta Brousseau (2000, p.18), que “cada um, professor e aluno, tem uma ideia do que o outro, bem como os demais, espera dele, e essa ideia cria oportunidades de intervenção, como a devolução da parte adidática das situações e a própria institucionalização”. Para o mesmo autor, ainda, “o contrato didático é, portanto, necessário como ficção. O jogo de situações da vida real e situações hipotéticas também é crucial”.

O contrato didático, em sua forma e em seu estilo, influencia, decisivamente, no conhecimento mobilizado no jogo ou no problema. Em função disto, de forma ideal, o professor deve criar condições suficientes para a aquisição de conhecimentos e reconhecer essa apropriação, quando ela ocorrer, enquanto o aluno, por sua vez, deverá satisfazer essas condições por meio de seu esforço investigativo na construção de um conhecimento novo ou pouco explorado. De outro modo, trata-se o contrato didático de um conjunto de atitudes e comportamentos do professor esperado pelos alunos e atitudes e comportamentos dos alunos esperados pelo professor.

Dentro das mais importantes contribuições que o conceito de contrato didático traz, pode-se citar aquela que permite analisar e interpretar os fenômenos que comprometem o processo de aprendizagem dos alunos, e que, muitas vezes, não são tão fáceis de serem percebidos. Em outras palavras, possibilita estudar o processo que inclui constantes negociações ocorridas durante a prática do professor

em sala de aula, e se elas comprometem a autonomia do aluno na aquisição de um determinado conhecimento. Justamente por isso, podem existir ocorrências, denominadas por Brousseau (1990, p.34) “efeitos do contrato”, que têm ação deletéria em relação à construção, pelos estudantes, do conhecimento. Especificamente, dentre os efeitos mencionados, o denominado “Efeito Topaze” faz alusão à situação do cotidiano de sala de aula na qual o professor, com a finalidade de minimizar as dificuldades encontradas pelo aluno, acaba por impedir seu desenvolvimento autônomo na construção do conhecimento.

Isso pode ocorrer, quando o docente elenca uma série de “dicas” que acabam por guiar o aluno e impedir que ele, eventualmente, erre. Almouloud (2007, p.94) alega que este fenômeno ocorre nas situações didáticas em que o professor se encarrega de uma parte substantiva, essencial mesmo do trabalho, que deveria ser de responsabilidade do aluno. De outro modo, o “Efeito Jourdain”, também chamado de “mal-entendido fundamental”, ocorre quando as respostas e/ou ações comuns são aceitas pelo professor como a manifestação de um saber científico. Trata-se de uma variação do Efeito Topaze que acaba por provocar uma superficialidade do conhecimento que deve ser mobilizado, causando um afastamento da essência do saber que o aluno deveria adquirir.

De certa forma, a investigação aqui feita, ao propor estratégias mais abrangentes de ensino do tema “transformações lineares”, relacionando uma outra organização didática e uma interface computacional, encaminha rupturas em relação ao contrato didático tradicional baseado em prescrições e no saber centralizado na figura do professor.

Neste sentido, então, o quadro teórico deste trabalho é composto pela Teoria das Situações Didáticas, com acréscimo da noção de contrato didático e de elementos relativos ao uso de tecnologias na educação matemática, o que implica a propositura de uma articulação entre elas, com a finalidade de prover uma base teórica consistente e que permita o levantamento de subsídios para responder à questão de pesquisa: ***de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática são resolvem problemas conceituais em relação ao tema “transformações lineares” no âmbito de situações didáticas e com o uso de tecnologias digitais?***

1.3 Teoria das situações didáticas (TSD)

A TSD foi desenvolvida por Guy Brousseau, que nasceu em 1933, em Taza, Marrocos. Em 1970, Brousseau, licenciado em Matemática, assume a colocação de assistente de Matemática na universidade de Bordeaux, onde deu início aos primeiros estudos relativos à TSD, abordados em uma conferência no Congresso da Associação de Professores de Matemática do Ensino Público (APMEP) de Clermont-Ferrand; entretanto, foi no decorrer de vinte (20) anos de pesquisas que este pesquisador a apresenta de modo organizado, como um quadro teórico coerente, em sua tese de Doutorado. Assim, para Brousseau (1986), a ideia de situação é apresentada como um modelo de interação de um indivíduo com um meio especifico que condiciona o processo de aquisição de certo conhecimento. Desta forma, uma situação didática representaria uma rede de processos de interação entre o aluno, o professor e o saber, que é organizada no âmbito dos espaços de ensino (a sala de aula, por exemplo), tendo por contexto significativo um *milieu* antagônico e por dinâmica um processo investigativo que evolui ao longo de algumas fases, entendidas como dialéticas, e certas estratégias baseadas, essencialmente, em problematizações.

A teoria das situações didáticas, desenvolvida por Brousseau (1986), no âmbito da Educação Matemática, destaca a importância da tomada de decisões por parte do aluno, de forma autônoma, na construção e retenção do conhecimento matemático. O professor atua como mediador da conduta do estudante, pois é o responsável pela elaboração e criação das condições necessárias para que o aluno venha a reter os conhecimentos matemáticos envolvidos.

Desta forma, uma situação didática é formada de interações didáticas entre professor, aluno e saber, a partir do desenvolvimento de atividades voltadas ao ensino de um determinado conteúdo.

Assim, Brousseau (2008) afirma que:

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno - por meio da seleção sensata dos “problemas” que propõe - as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer pela própria dinâmica com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. (BROUSSEAU, 2008, p. 34).

Deste modo, a proposta é a de que, entre o momento de aceitação do problema e o de sua resolução, a participação do professor ocorra de forma quase

despercebida, na medida em que ele procura não intervir diretamente nas decisões dos alunos ao não lhes fornecer roteiros prontos para a construção do conhecimento a ser aprendido: seu papel é de mediador da aprendizagem por meio da elaboração de problemas adequados. O aluno é levado à aquisição de conhecimentos novos que se justificam pela lógica interna da situação e pela construção própria de respostas às questões envolvidas na situação. A esta proposta Brousseau denomina "situação adidática".

Para Brousseau (1997),

> As situações adidáticas são aquelas situações de aprendizagem nas quais o professor foi bem sucedido na remoção de sua vontade, de suas intervenções e de suas informações como elementos determinantes daquilo que os alunos irão fazer: elas são tais que funcionam sem a intervenção do professor no que se refere ao conhecimento. (BROUSSEAU, 1997, p. 47).

O sucesso dos alunos, ao lidarem com situações adidáticas, determina sua apropriação dos conhecimentos mobilizados, de maneira autônoma, durante a resolução dos problemas contidos na situação. Essa característica da situação lhe atribui um caráter imprescindível, dentro do processo de aprendizagem. E ainda, para Brousseau (1997):

> Se considerarmos o ensino como 'o projeto de ação social que faz apropriar por um aluno um saber constituído ou em vias de constituição', a didática da matemática torna-se 'a ciência das condições de difusão e de apropriação dos conhecimentos matemáticos úteis às pessoas e às suas instituições [...], o termo 'situação didática' [refere-se] 'ao ambiente do aluno, englobando tudo o que contribui especificamente para o componente matemático de sua formação (BROUSSEAU, 1997, p.20-21, tradução nossa).

Em uma situação didática, o professor não pode declarar, antecipadamente, o que realmente deseja como resposta do aluno, mas deve procurar garantir sua aceitação e responsabilidade, na busca por respostas para o problema ou jogo no qual ele está inserido. A este ato, no qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade por uma situação de aprendizagem (adidática), responsabilizando-se, também, pelas consequências desta transferência, Brousseau (2008, p.91) denomina "devolução". O aluno não diferencia de imediato, na situação, o que tem origem didática daquilo que tem origem adidática.

Um primeiro posicionamento de Brousseau (2008, p.89), com relação às contribuições esperadas durante a fase de devolução, surge, quando o autor afirma

que “o ensino tem por objetivo principal o funcionamento do conhecimento como produção livre do aluno em suas relações com o meio adidático”. Outro posicionamento com relação à fase de devolução diz respeito à responsabilidade do professor na organização de situações que possibilitem ao aluno esta devolução, de modo que suas intenções didáticas não estejam de todo declaradas. Neste sentido, Brousseau (2008, p.90) coloca que “o aluno adquire conhecimentos por meio de diversas formas de adaptação às restrições de seu entorno”, e ainda, a fim de reforçar seu posicionamento, o autor afirma que “o valor dos conhecimentos adquiridos dessa forma depende da qualidade do meio como motivador de um funcionamento ‘real’, cultural, do saber” (BROUSSEAU, 2008, p.90).

Brousseau (1970b, p.436) enfatiza que a aprendizagem da matemática não existe sem a utilização de modelos explícitos, linguagem e escrita matemáticas. Ele adverte “que a linguagem e a escrita não são comumente utilizadas coloquialmente em relações singulares estabelecidas pela criança com o seu meio ambiente”. Esta é uma característica que pode ser observada nos alunos de curso de matemática, dentro de um “contexto matemático” que eles não dominam. Segundo Brousseau (1970b, p.436), “não existe um método natural de ensino da matemática”. Assim, ele propõe que o professor, a fim de minimizar as dificuldades dos alunos na aquisição dos conteúdos matemáticos, multiplique as oportunidades de usar modelos e faça convenções universais, para organizar o processo de matematização e a aquisição de novos conhecimentos. Ainda neste sentido, Brousseau (1970b, p.436) advoga que “precocidade e frequência do uso pela criança de uma linguagem relevante e matematicamente correta são bastante cruciais nestas aquisições”.

Um importante componente estrutural da teoria das situações é denominado por Brousseau *milieu* e representa o meio adidático, sem intenção didática explicita[5], podendo conter jogos, situações–problemas, propostas investigativas e respectivos cenários, dentre outros recursos. Brousseau (1997) afirma que o *milieu* deve permitir ao aluno agir de modo autônomo em relação às situações de que participa e em relação às interações com o professor. Esse *milieu* deve ser constituído de forma a possibilitar a aprendizagem dentro de situações passíveis de provocar desequilíbrios, assimilações e acomodações, do ponto de vista construtivista, dando

[5] O fato das intenções didáticas do professor não surgirem claramente para os estudantes não significa que as mesmas não existem: pelo contrário, um *milieu* sem intencionalidade didática seria insuficiente para fomentar a aprendizagem.

condições ao aluno de refletir sobre seus posicionamentos e ações. Desta forma, importantes interações rumo à aprendizagem se dão por meio de retroações em relação a esta estrutura. Logo, o aluno aprende, revendo e corrigindo suas ações e antecipando seus efeitos. Partindo deste pressuposto, as situações em que os alunos estão inseridos (com intuito didático) são para eles os *milieus* de referência sobre o qual exercem sua capacidade de construir conhecimento e aprendizado. Brousseau (1997) enfatiza que a organização do *milieu* é tarefa do professor, e, por consequência, da situação capaz de gerar a aprendizagem.

Entretanto, a teoria das situações didáticas não deve ser vista pelo educador como proposta única de modificação de sua prática. Na verdade, sua principal contribuição é a apresentação de condições mínimas que a devem ser observadas para proporcionarem o ensino e a aprendizagem em um determinado meio. Deve-se verificar a importância desta teoria, no sentido de ela proporcionar ao aluno uma produção autônoma na construção do conhecimento Neste sentido, de acordo com Brousseau (1997, p. 23):

> O sujeito aprende corrigindo suas ações e antecipando os seus efeitos. Dessa forma, as situações em que se envolve são para ele, o *milieu* de referência, sobre o qual exerce a sua capacidade de construir conhecimento e aprendizado. Essas situações de aprendizagem estão no centro do dispositivo de construção do conhecimento e de seu significado. (BROUSSEAU, 1997, p.23).

A teoria das situações também enfatiza a relação que associa boas perguntas a boas respostas, isto é, procedimento no qual o educador propõe um problema ao aluno, que busca respondê-lo, através de recursões a conhecimentos previamente estruturados em seu arcabouço cognitivo. De fato, a resposta a esta natureza de problemas, que coloca o estudante na posição de aprender por investigação e descoberta, de forma típica em relação à atividade matemática fundamental, deve ser o conhecimento mesmo, que se procura consolidar.

Oportunamente, surge aqui o conceito de *situação fundamental* relacionado a um conhecimento específico. A partir dele, então, são feitas escolhas determinantes e restritivas, que definem seus entornos do ponto de vista da abordagem cognitiva, em função de opções feitas pelo docente, bem como das restrições e organizações típicas. Para Almouloud (2007, p.34), “uma situação fundamental constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada, situações que permitem introduzir os conhecimentos em

sala de aula numa epistemologia propriamente científica". De igual forma, então, o conceito de situação didática, de maneira mais ampla, pode ser entendido como

> conjunto de relações estabelecidas de forma explícita/implícita entre um aluno – ou um conjunto de alunos – um certo *milieu* (que pode conter instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor), de forma que estes estudantes adquiram um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1978).

Em seu trabalho, Brousseau (2008) aponta dois posicionamentos que se contrapõem, em relação ao processo de construção do saber.

Primeiramente, existe a proposta psicogenética de Piaget defendida por ele do ponto de vista da naturalidade do processo de aprendizagem, a partir das interações definidas por assimilação e acomodação. Segundo Brousseau (2008), esta visão "corre o risco de eximir o professor de toda responsabilidade didática" e, assim, promover "uma espécie de empirismo". Em segundo lugar, há a visão socrática segundo a qual a aprendizagem só ocorre se vinculada ao ensino. Nesse sentido, Brousseau apresenta um posicionamento distinto dos apresentados anteriormente: a mediação do conhecimento pelo professor, no tocante ao desenvolvimento do saber, visto que "as concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas" (BROUSSEAU, 1997, p 34).

Dessa maneira, dentro dos processos de ensino e aprendizagem será exigido do professor que assuma uma postura não mais de dono de uma verdade absoluta, mas de mediador, na medida em que leve em conta os conhecimentos prévios de seus alunos, ao propor atividades que os orientem a trabalhar com os conceitos propostos, permitindo que organizem as ideias. Neste contexto de ensino, é possível que o aluno passe a ter a capacidade de utilizar, por si próprio, o saber que está sendo construído. Esta é justamente a definição e a intenção das chamadas situações adidáticas.

Ainda com relação ao papel do professor, Brousseau (1997, p 22) destaca que, em relação às situações de ensino, sua ação "compreende um forte componente de regulação dos processos de aquisição do aluno". Sendo assim, o professor que deseja provocar situações de aprendizagem deve mudar o sistema de decisão de seus alunos, confrontando-os com um conjunto de situações de acordo com o conhecimento estabelecido. Nesta ocasião, são estabelecidas obrigações

recíprocas que podem ou não ser explícitas, em função do contrato didático.

No intuito de entender os procedimentos esperados do aluno para que obtenha sucesso na retenção de um determinado conhecimento matemático, deve-se considerar que a cada procedimento corresponde a intenção de buscar características particulares do saber matemático. Brousseau (1997), para avaliar as relações existentes entre as situações de ensino e as várias possibilidades de utilização do saber matemático, observa que o aluno opera de modo distinto em diferentes momentos, e, neste sentido, desenvolveu uma tipologia baseada em dialéticas, sobre a qual se discorre, a seguir.

1.3.1 Fases da situação didática

No âmbito da teoria das situações didáticas, Brousseau (1986) identifica três fases relacionadas ao trabalho investigativo do aluno, de natureza adidática - ação, formulação e validação - além de uma outra, que fica a cargo do professor - a institucionalização.

Na dialética de ação, o aluno é levado a tomar decisões e a propor procedimentos de caráter operacional, mobilizando conhecimentos que acredita estarem relacionados com a natureza do problema proposto. Na formulação, as estratégias para tentar solucionar o problema são explicadas, enquanto que, na fase de validação, são discutidas com os pares as propostas relacionadas anteriormente, visando a uma correção cultural ou empírica, de modo a garantir a pertinência, adequação, adaptação ou em conformidade aos conhecimentos mobilizados. Por fim, na institucionalização, o professor retoma, de forma direta, o controle da situação em jogo, de modo a sintetizar os saberes discutidos, fixando o estatuto válido do conhecimento matemático, em sessões coletivas com seus grupos de alunos. De modo geral, durante a realização das interações ocorridas dentro de uma dada situação, visando à aquisição de um determinado conhecimento, as fases que a compõem estão intimamente relacionadas, levando o aluno a se responsabilizar pelo gerenciamento de sua relação com o saber nas fases de ação, formulação e validação e o professor a se responsabilizar pela institucionalização.

Neste sentido, é na fase de ação que os alunos, na busca por responder às perguntas de uma situação didática, podem construir modelos mentais mais ou menos satisfatórios, por meio de suas interações com o *milieu*. Esses modelos

tomam um caráter empírico para a obtenção de informações acerca da situação na qual o aluno está inserido. Essas informações, por sua vez, são tomadas como reforços ou retrocessos resultantes da sua ação.

Ainda, durante a fase de ação, ao criar modelos mentais, o aluno verifica quais deles possuem melhor ou pior posicionamento, frente à situação na qual está envolvido, verificando se a informação resultante aborda ou não seus objetivos. Assim, o modelo, nesse momento, será reforçado ou abandonado.

Para Brousseau (1970b, p. 428), “o indivíduo se encaixa por meio de um processo de tentativas e erros”. Ou seja, durante essa fase, são feitas escolhas, resultantes de uma sequência de ações, por modelos que sejam realmente relevantes para a busca do resultado desejado, ou seja, há uma redução e abstração por uma espécie de princípio de economia de modelo. A sequência de ações constitui o processo em que o aluno apresenta um método de resolução de problema, adotando uma estratégia e abandonando outras, de modo intuitivo ou não, na qual apenas considera a eficácia de cada estratégia.

Já durante a fase de formulação, diferentemente da fase anterior, na qual se realizam processos mais imediatos para a resolução de um problema, o aluno, com o mesmo objetivo, passa a fazer uso de alguns esquemas de natureza mais teórica, de caráter mais elaborado. Esta fase contribui para que o aluno empregue outros conhecimentos, e, consequentemente, passe a usar procedimentos metodológicos mais elaborados, de modo a explicar os modelos construídos inicialmente na fase de ação, mas sem possuir um caráter de validação do conhecimento em jogo. O principal objetivo da fase de formulação se encontra na troca de informações entre os sujeitos envolvidos na situação.

A fase de validação é aquela em que os alunos passam a justificar a pertinência dos modelos. Nesse momento, o aluno pode mobilizar os conhecimentos já existentes para convencer a si mesmo e a outros integrantes da situação acerca da validade de suas afirmações. A fim de defender suas opiniões, por meio de raciocínios lógicos, os alunos devem organizar seus enunciados em demonstrações. Com respeito à esquematização dessa fase, Brousseau (2008, p.30) afirma que seus elementos “colaboram na busca de verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas”.

Os alunos, por meio da experiência de lidar com os desafios impostos pela

validação de seus modelos, passam a exercitar a argumentação de seus conhecimentos, o que lhes possibilita a discussão das proposições que não compreendem.

A fase de institucionalização é constituída com o objetivo de encontrar um caráter universal do conhecimento aprendido pelo aluno, no decorrer das interações realizadas entre o professor, o aluno e o *milieu*. O professor, nesse momento, é o responsável por esta passagem do conhecimento, do plano particular, para a dimensão do saber científico. Durante a institucionalização, o aluno passa a compreender o verdadeiro significado do conhecimento adquirido e a entender a necessidade de agregar sua aprendizagem a uma teoria mais ampla.

A análise de todas essas fases possibilita um melhor entendimento de como o saber aprendido é mobilizado, no decorrer da situação em que está inserido. Inicialmente, ele está ligado ao contexto da situação; posteriormente, o saber é descontextualizado, adquirindo, assim, um status de objeto de estudo, e, finalmente, é recontextualizado, passando a ser uma ferramenta a ser usada em outras situações.

As fases de ação, formulação e validação constituem o cerne dialético da situação adidática: elas distinguem-se pelo fato de que, por meio delas, o professor confere aos estudantes a possibilidade de efetuarem tomadas de decisões, de forma a contribuir para que eles realizem descobertas de forma autônoma, não lhes revelando suas intenções didáticas. O professor possui um caráter de mediador nas interações do aluno com o *milieu*. Diferentemente, a fase de institucionalização retoma a visibilidade da intenção didática, caracterizando-se por estabelecer, explicitamente, o estatuto cognitivo do saber. Assim, o professor toma para si a responsabilidade cedida ao aluno, por meio da formalização e da generalização do saber discutido.

Nesta investigação, utiliza-se a TSD como elemento teórico, com o intuito de propor situações didáticas, por meio das quais seja possível verificar de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática resolvem problemas conceituais em relação ao tema “transformações lineares” com o uso de tecnologias digitais. Assim, esta teoria permitirá evidenciar elementos da organização didática implementada por meio das sequências, o trabalho dos sujeitos ao longo das dialéticas, a discussão sobre as variáveis didáticas consideradas quando do planejamento das situações, entre outros aspectos relevantes. Nas análises, uma das articulações com esta

teoria é feita a partir de elementos que permitem discutir o uso de tecnologias em Educação Matemática, como se indica a seguir.

1.4 Tecnologias e Educação Matemática

A referência de Lévy (1993) acerca dos polos da oralidade, da escrita e informático-midiático como paradigmas tecnológicos prevalentes em distintos momentos históricos permite entender que processos comunicacionais, relações sociais e, de alguma forma, iniciativas de ensino sempre ocorreram com base em elementos técnicos desenvolvidos para assumirem caráter mediador. Ao objetivar semelhante caráter, as pessoas, em suas épocas, desenvolveram ou implantaram tecnologias em alguma medida. O discurso oral, o livro e o computador são, assim, partícipes de um processo que atravessa os tempos (Oliveira, 2007).

Vale colocar que a tecnologia não é vista, nesta pesquisa, como elemento destinado a suprir necessidades de aprendizagem dos estudantes, por meio de sua mera e simples inserção no processo. Ao contrário, há um ponto de vista que se posiciona aqui justamente em sentido inverso que consiste em entender as interfaces de natureza tecnológica como mediadoras e reorganizadoras das intervenções das pessoas, o que só se viabiliza a partir da existência de uma estratégia didática coerente. Neste sentido, abordam-se pressupostos teóricos cuja finalidade é abalizar esta compreensão, em relação às tecnologias.

1.4.1 Tecnologias digitais como mediadoras em Educação Matemática

O aspecto mediador característico das tecnologias assume distinções a partir do uso de interfaces digitais. Kenski (2012, p.11) afirma que “o ensino mediado pelas tecnologias digitais pode alterar estas estruturas verticais (professor $\rightarrow$ aluno)”, bem como “lineares de interação”, tão comuns dentro do ambiente escolar. A autora acredita que tais alterações são devidas “às informações [...] e à construção individual e social do conhecimento” provenientes desta mediação. Neste mesmo sentido, ainda, Kenski (2012, p.12) enfatiza que “ambientes digitais oferecem novos espaços e tempos de interação com a informação e comunicação entre os mestres e

aprendizes", tornando estes ambientes diferentes dos tradicionais. A autora menciona os ambientes virtuais, ou seja, aqueles nos quais a sala de aula física surge transformada em espaço/tempo de interações não presenciais; entretanto, é possível entender que os espaços vistos como tradicionais, como a sala de aula, por exemplo, também possuem esta possibilidade, o que, neste caso, dependeria do emprego de estratégias de ensino que privilegiassem a investigação dos estudantes sobre temas eleitos pelo professor, sendo a tecnologia a abordagem mediadora que introduziria características como dinamismo, visualização e experimentações intensivas (Oliveira, 2013).

O cenário da Educação Matemática tem visto propostas de mudança das concepções de abordagem de conteúdos específicos nos diversos níveis de ensino. Das inúmeras pesquisas realizadas nesta área, e que tratam da inserção de tecnologias digitais como importantes ferramentas mediadoras no âmbito dos processos de ensino, destacam-se, aqui, os trabalhos de Borba (2005; 2011), de Oliveira (2007; 2013), de Gutiérrez e Lara (2006), entre outros, que enfatizam a relevância do uso destas interfaces nas atividades didáticas, e o modo como sua inserção influencia na pratica de sala de aula, fazendo com que se repense, por exemplo, o ensino de Matemática. Neste sentido, por exemplo, Borba (1996) afirma que os computadores proporcionaram mudanças significativas para a Matemática, sobretudo, aquelas sobre o que deve ser considerado importante para ser ensinado e aprendido.

Entretanto, nesta investigação, fica evidenciado o posicionamento que aponta a importância da crítica e da reflexão sobre o uso destes artefatos. Segundo Oliveira e Araújo (2011, p.212), "o uso das tecnologias não significa a simples transposição das aulas tradicionais para o computador". Na verdade, é necessária toda a reformulação do ambiente de sala de aula e do contrato didático a partir desta nova proposta, de modo que seja possível provocar "uma mudança na forma de ensinar", o que permitiria "estimular o aluno a ganhar autonomia, avançando desde a perspectiva de um simples executor de tarefas automatizadas, para a de alguém que aprende a aprender" (*idem*).

Ainda sob esta perspectiva, Oliveira (2008, p. 299) alerta que a tecnologia não garante o sucesso no ambiente de sala de aula, quando coloca, por exemplo, que a relação entre tecnologia e os temas matemáticos não ocorre sem intencionalidade: "na verdade, nestes e noutros temas, é necessário pensar, cuidadosamente, não só

as estratégias que deverão ser utilizadas, mas também os objetivos almejados".

Nesta mesma direção, Oliveira (2008, p. 299) acrescenta que o uso de tecnologias nesse âmbito "deve ocorrer por meio de uma estratégia que preveja o trabalho do professor em tarefas de transposição", cabendo ao estudante o trabalho de investigar, conjecturar e constituir o conhecimento de forma autônoma. Para o autor, o ambiente de sala de aula, com a intervenção de tecnologias, em especial aquelas de caráter digital, tem seu universo ampliado, à medida que tal intervenção possibilita uma nova dinâmica de ensinar e aprender Matemática por meio de experimentações, simulações, troca de ideias entre alunos, entre outros aspectos, os quais não teriam lugar noutra situação: quando prepara suas estratégicas didáticas mediadas por tecnologias digitais, o professor "agrega a dimensão transformadora da intervenção dos alunos, que experimentam, trocam, modificam os objetos do saber matemático" de maneira dinâmica (Oliveira, 2009).

Neste contexto, é necessário considerar o fato de que o professor precisa adquirir uma nova postura, por meio da qual deve esquematizar as atividades, de modo a privilegiar uma aprendizagem autônoma, consequentemente, objetivando uma atuação mais reflexiva do aluno em sala de aula. Para alcançar tal propósito, Ponte (1995) acentua que o uso de tecnologias de modo adequado nas aulas de matemática é fundamental e não dispensa algumas características, apontadas pelo autor na lista seguinte.

a) A aprendizagem deve se contatar com uma Matemática mais viva, muito mais próxima do espírito investigativo que caracteriza as atividades dos matemáticos;
b) O aluno precisa desempenhar um papel muito mais autônomo, definindo e aprofundando seus domínios de interesse, e usando, com desembaraço, uma variedade de ferramentas para seu estudo;
c) O professor terá de ser reconhecido e valorizado no papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem.

Ainda dentro dessas condições, Oliveira (2009) argumenta, que, no processo de ensino de Matemática,

> O uso de tecnologias digitais e de ambientes virtuais de aprendizagem não tem, por si só, o efeito de produzir melhorias no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, mas pode

> ampliar, nas diversas instâncias da transposição para o saber a ensinar, uma dinâmica de extensões das experimentações e das reflexões, o que, na ótica dos autores aqui referenciados, altera a própria dinâmica do conhecimento matemático. E isto deve ser considerado quando se pensa na formalização programática dos saberes a ensinar e nas possibilidades para o professor, quanto a sua estratégia didático-pedagógica, que refletirão o saber ensinado (OLIVEIRA, 2009, p. 213)

Desta forma, o discurso de Oliveira (2009) ressalta a necessidade de o professor deitar um olhar mais crítico sobre as diversas interfaces mediadoras. Assim, o uso de tecnologias no planejamento das aulas de Matemática não substitui a atuação do ser humano, mas auxilia a organização do pensamento, abrindo novos caminhos para a formulação e resolução de problemas.

Alguns autores, entretanto, indicam que o processo de inserção de tecnologias no processo de ensino passa por construções progressivas, compostas por fases. Frota e Borges (2004), por exemplo, identificam três concepções relativas ao uso de tecnologias na Educação Matemática, especificamente, a serem consideradas por professores de Matemática, a saber:

a) Consumir tecnologia: os recursos tecnológicos são reconhecidos como poderosas ferramentas para ensinar e aprender Matemática. Segundo essa concepção, acredita-se que produtos e processos tecnológicos possuem a capacidade de modificar os processos de ensino, tornando-os mais atrativos, motivadores, eficazes e eficientes;
b) Incorporar tecnologia: essa concepção é relacionada à modificação das formas de fazer matemática; neste momento, a tecnologia é vista como ferramenta e instrumento cognitivo. Isto é, à medida que a tecnologia é incorporada, por seu uso continuo, surgem novas formas de pensar e solucionar problemas, fazendo com que os alunos obtenham outras formas de fazer matemática;
c) Matematizar a tecnologia: essa concepção coloca a tecnologia em um ponto de vista diferenciado. Ela passa a ser incorporada à educação matemática, não apenas como recurso ou ferramenta material ou simbólica, mas como objeto curricular da educação básica e superior valioso em si ou por si mesmo.

Outro ponto importante diz respeito à fluência tecnológica, ou seja, à capacidade de se usarem artefatos tecnológicosl com certo nível de *expertise*.

Segundo Barin, Muller, Ellenshon (2012), a fluência tecnológica vai além do utilizar as ferramentas tecnológicas: implica aprender novas formas de utilizar estes recursos, de criar a partir deles e utilizá-los para aprender conceitos. Deste modo, para um melhor aproveitamento pelos alunos das tecnologias digitais, é necessário que eles possuam certa fluência, característica que perpassa cada uma das concepções anteriormente discutidas.

Neste contexto, Oliveira (2013) entende a importância da fluência tecnológica em processos de ensino de Matemática. Do ponto de vista do autor, adquirir fluência na tecnologia a ser usada corresponde, para o professor, à primeira fase de um constructo que prevê o uso de mídias em processos de ensino de Matemática, constructo este dividido em duas etapas interligadas. Na primeira delas, acontece a exploração dos componentes da interface. Aqui, o plano é conseguir desenvoltura nos elementos existentes, com a finalidade de encaminhar a construção do efeito que se deseja (gráficos, expressões etc.). A segunda etapa tem por finalidade a apropriação da lógica da interface, e pretende levar a uma compreensão que extravasa aquela da etapa anterior. Trata-se de compreender como a tecnologia em questão trabalha com o aspecto matemático, “ou seja, como se dá a integração entre o conhecimento matemático, fundamental para a resolução de um problema, e a expressão desta resolução sob o ponto de vista da forma como a interface opera” (OLIVEIRA, 2013, p.6).

A construção da fluência no emprego de recursos tecnológicos não é tudo, já que não assegura o aprendizado dos tópicos matemáticos em estudo, este um trabalho do aprendiz, quando lança mão dos recursos cognitivos que possui, no âmbito de conjecturas e trajetórias investigativas. Desta forma, a estratégia docente é importante e pode ter aspecto facilitador, da mesma forma que a tecnologia usada, já que um trabalho didático intermediado por esses recursos pode auxiliar no desenvolvimento de outras fluências:

> Desenvolver fluência equivale a saber usar com desenvoltura, de modo que este aspecto seja aliado de outra fluência, de caráter mental, que permite, por sua vez, ao sujeito, avançar na reorganização dos conhecimentos no âmbito do próprio processo que o leva a tomar o problema proposto como seu e investigar, em dialéticas e movimentos cada vez mais refinados, até formar uma proposição sua, que tenha o status de solução, resposta (OLIVEIRA, 2013, p.7).

Em certos casos e circunstâncias, algumas propostas não poderiam se

materializar sem que se constitua a fluência em determinadas tecnologias. Um exemplo disso é o trabalho desenvolvido por Karrer (2006), no qual a autora empregou o *software* Cabri 3D para a resolução de situações-problema envolvendo transformações lineares, com foco no dinamismo e nas interações de tais resoluções, reiterando que semelhantes aplicações não teriam lugar em um ambiente tradicional com lápis e papel. Na concepção da autora, o dinamismo proporcionado pela utilização da tecnologia em questão no ambiente de sala de aula permitiu que os conceitos em construção fossem explorados visualmente. Outro exemplo neste sentido pode ser visto no estudo de seções em sólidos desenvolvido com alunos do 10º ano, em Portugal, segundo o qual "a utilização de um ambiente de geometria dinâmico é uma oportunidade excelente para promover a manipulação e a visualização das seções" (AMADO E CARREIA, 2014, p.285).

A descrição da importância da tecnologia como mediadora na educação matemática justifica a opção, nesta investigação, pela utilização do *software* GeoGebra 5, como mediador em relação às sequências propostas sobre o conteúdo de transformações lineares. Algumas das principais possibilidades abertas pelo uso deste programa alinham a experimentação, a visualização e o dinamismo como possibilidades, como se vê a seguir.

1.4.2 Tecnologias digitais: experimentação, visualização e dinamismo

De fato, de acordo com Borba (2011), a questão visual interfere decisivamente na construção do conhecimento matemático, na medida em que a "visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático", bem como "a compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles" (BORBA, 2011, p.3). De igual forma, o autor afirma que a "visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas" *(ibidem*). Ao ter acesso ao elemento visual em uma atividade de transformações lineares, o estudante pode aperfeiçoar sua compreensão acerca da estrutura de dada transformação, na medida em que pode perceber o que ocorre com os vetores envolvidos. Nem por isso, entretanto, deve abandonar, como referências, os conceitos e teoremas típicos, empregados com certo nível de formalização.

Em relação ao dinamismo, ou seja, à possibilidade de se manipularem

construções a partir de seus parâmetros, elementos ou valores, pode-se dizer que o processo de teste, validação e/ou refutação de conjecturas pode ser subsidiado de forma consistente. Neste sentido, Borba (2011), afirma que:

> Em consequência da investigação com softwares, um ambiente com características ímpares é criado, no qual as construções podem ser submetidas à prova do arrastar, de modo que as propriedades e conjecturas formuladas poderão ser testadas para vários casos e validadas ou refutadas (BORBA, 2011, p.4).

Justamente neste sentido se ampliam as possibilidades de experimentação, o que, em Matemática, representa, desde a consolidação das tecnologias digitais na educação, um marco distinto, denominado por Lévy (1998) “paradigma informático na Matemática”. De fato, segundo este autor:

> Uma das mais estranhas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas. Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um caráter experimental. Simulações de objetos matemáticos podem infirmar, confirmar, ou gerar conjecturas (LÉVY, 1998, p. 104).

Ao indicarem as tecnologias digitais em suas possibilidades de visualização e extensão, Borba e Villarreal (2005) revisitam a conceituação proposta por Lévy (1993) a partir da qual as tecnologias representam novas e distintas extensões da memória. O autor francês ressalta a constituição de três polos do espírito, formados pela oralidade, a escrita e a informática e suas mídias. Nestas condições, a experiência do ser humano com suas lembranças, técnicas e saberes foi se constituindo de diferentes formas – na oralidade, o discurso e sua extensão dependiam da distribuição a partir da audição e da repercussão falada que deveria atravessar gerações, por meio de relatos, estórias e mitos; a escrita instituiu a extensão externa da memória, que se desvincula da necessidade da presença humana para permitir interpretações vinculadas às ideias e experiências dos leitores, instituindo o encadeamento linear das ideias e reificando a teoria. Da mesma forma, então, a informática assume a condição de extensão da memória, mas com distinções qualitativas em relação à escrita e à oralidade. Neste caso, as principais possibilidades de produção do conhecimento residem na experimentação e na simulação: ao manipular as condições e parâmetros de modelos computacionais, por exemplos, diversas conjecturas podem ser suportadas – não se trata, em um

primeiro momento, de um conhecimento teórico, mas que pode lhe subsidiar. Ainda que institua uma dimensão inovadora em relação às outras formas, a informática representa uma possibilidade de convergência, não de substituição, o que permite promover interações entre as três tecnologias da inteligência mencionadas.

A experimentação com uso de tecnologias é um tema amplo; entretanto, uma perspectiva próxima àquela que se empregará nesta investigação é provida pelo trabalho de Borba e Villarreal (2005), em especial quando mencionam as possibilidades abertas por esta abordagem. Para os autores, usar tecnologias sob um olhar experimental em Matemática possibilita:

- Investir na criação, pelos estudantes, de conjecturas acerca de problemas específicos – e de testá-las, por meio de vários exemplos;
- Descobrir resultados de natureza matemática que não eram conhecidos antes do procedimento experimental;
- Testar formas alternativas de colher resultados;
- Criar novas experimentações – e repeti-las indefinidamente;
- Instituir uma forma diferente de aprender Matemática.

Nessa linha de raciocínio, Oliveira (2009), em relação às tecnologias digitais, no que tange ao ensino da Matemática, no sentido de permitir mudanças e múltiplas intervenções, argumenta que “do ponto de vista da mediação, [as tecnologias digitais] inauguram diversas possibilidades de experimentações, interações, modelagens, simulações, entre outras abordagens, que possuem um caráter dinâmico” (p. 12).

O caráter dinâmico, então, complementa as propostas de construção do conhecimento mediadas por experimentação e visualização por meio de interfaces providas por tecnologias digitais. Segundo Oliveira (2013), é o dinamismo das intervenções em ambientes informatizados que permite a multiplicidade de exemplos a partir de ações simples como arrastar um componente, trocar um valor parametrizado, alterar medidas, entre outras formas de agir. A resposta da maioria dos programas computacionais é praticamente instantânea. O autor indica que esta reação imediata da interface, do ponto de vista da mudança de configurações e estruturas, constitui uma das principais vantagens alinhadas ao dinamismo proposto por boa parte das tecnologias digitais voltadas à educação.

Nesta investigação a interface informática eleita deveria, conforme indicado,

proporcionar amplas possibilidades de experimentação, dinamismo e visualização. Desta forma, a escolha recaiu sobre o GeoGebra 5, lançada no segundo semestre de 2014 em sua primeira versão de produção[6], cujas descrições seguem.

[6] Uma versão de produção, no jargão da informática, segue as versões de testa (alfa teste, beta teste) e pode ser considerada "pronta", ainda que eventualmente receba melhorias e novas características.

1.4.3 Interface específica da pesquisa: descrições sobre o GeoGebra 5

O *software* GeoGebra vem sendo utilizado em diversos trabalhos acadêmicos e escolares, quando se pretende prover construções matemáticas que agreguem o dinamismo, experimentação e visualização como possibilidades. Em relação ao programa computacional, vale saber que o mesmo foi criado por Markus Hohenwarter a partir de 2001, como parte de sua tese de doutorado. O desenvolvimento das funcionalidades do programa é contínuo, por meio de uma rede colaborativa de comunidades GeoGebra estabelecidas em diversos países[7].

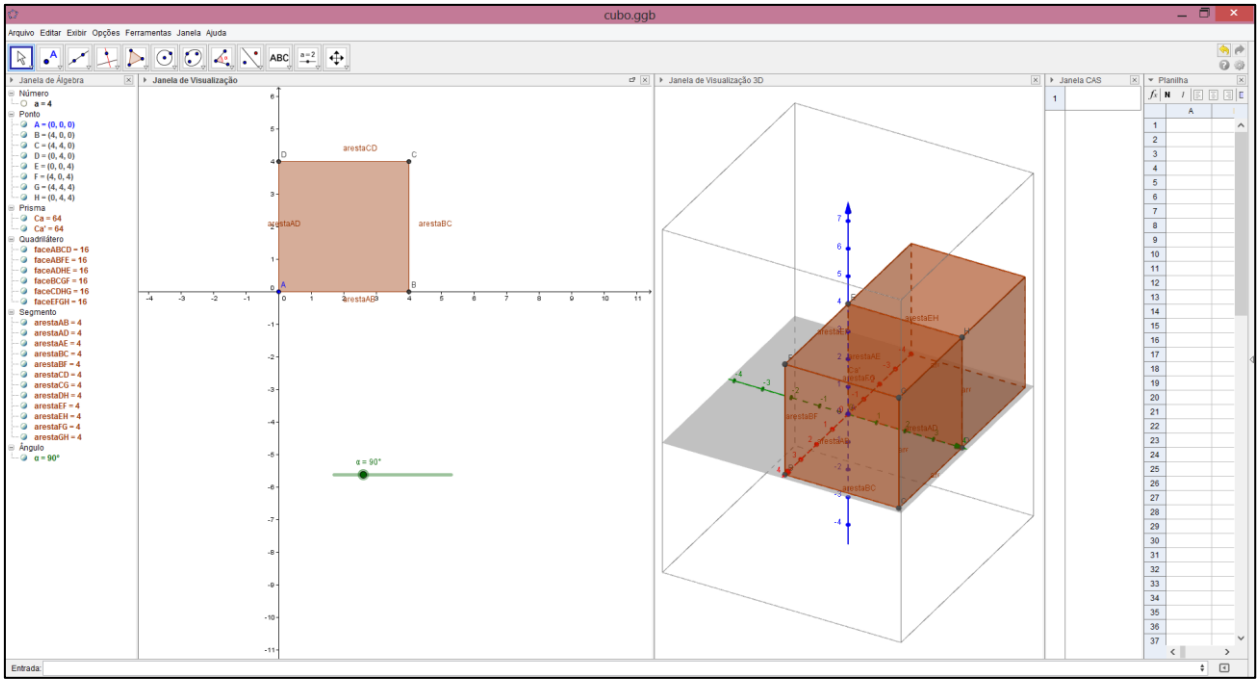
Especificamente, nesta investigação, quando da recolha dos dados, estava disponível a versão 5 beta do programa[8], que possui recursos 3D e pode ser executado na maioria dos sistemas operacionais disponíveis, inclusive a partir da instalação feita em um *pen drive* (disco do tipo *flash usb*). A eleição deste programa específico se justifica, prioritariamente, pela gratuidade das versões, pela disponibilidade de materiais instrucionais gratuitos na Internet e por características específicas da interface, as quais se encaixam nos pressupostos indicados nesta pesquisa. Pode-se indicar, neste caso:

- Interface intuitiva, composta por elementos gráficos em botões e comandos mnemônicos, que facilita a obtenção de fluência nas ferramentas;
- Funcionalidades como “clicar-e-arrastar” e editar construções, facilitadoras do aspecto experimental das intervenções;
- Multiplicidade de janelas de visualização (geométrica plana, algébrica, numérica, computacional, 3D).

A figura 6 indica algumas destas características. Vale indicar que as características relativas à manipulação e criação de objetos 3D só ficaram disponíveis a partir da versão 5.

[7] Maiores informações podem ser obtidas em www.GeoGebra.org.
[8] Chama-se “beta release” (versão beta) à versão de testes (geralmente, já superadas as etapas iniciais de teste, conhecidas como “alpha release”) de um programa qualquer.

Figura 2- Interface do software GeoGebra 5



Fonte: Elaborado da autora

Assim, no ambiente Geogebra 5, um objeto pode ser observado de vários pontos de vista, contemplando diferentes representações. Desta forma, é possível ver mudanças do ente matemático que está sendo manipulado nas diferentes janelas mencionadas, considerando, por exemplo, visualizações 2 e 3D, além daquelas relativas aos elementos algébricos correspondentes. Um exemplo disso é que, na interface do Geogebra 5, é possível arrastar as curvas de funções com o *mouse* e, ao mesmo tempo em que isto é realizado, pode-se visualizar, paralelamente, as modificações de seus parâmetros na janela de álgebra.

Em relação às sequências cuja atividades foram objetos de intervenção dos sujeitos desta investigação, o GeoGebra 5 forneceu, por meio de suas funcionalidades, diversas ferramentas que foram manipuladas pelos estudantes envolvidos. O quadro 1 apresenta alguns destes elementos, de forma resumida.

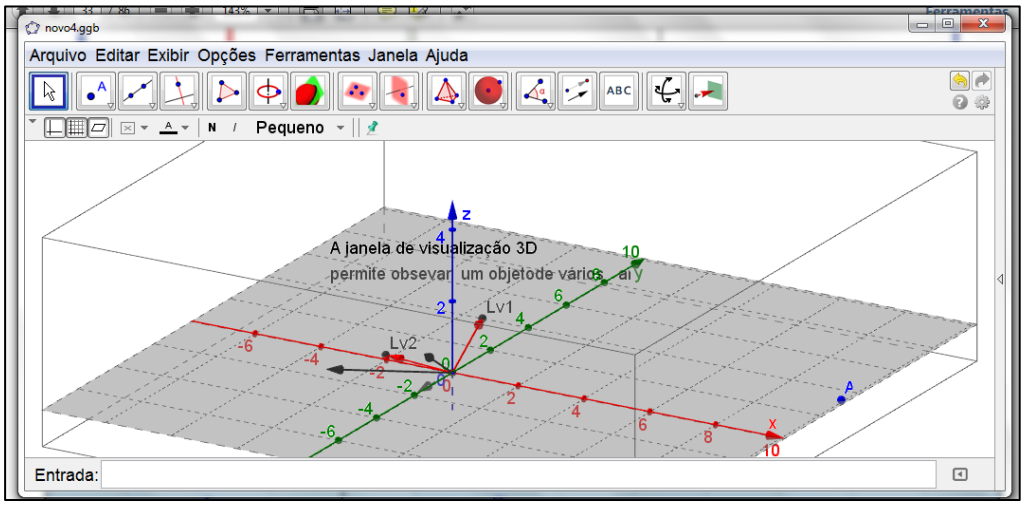
Quadro 1 - Principais recursos do GeoGebra 5 utilizados nesta pesquisa

Mover janela de visualização		Permite arrastar a janela de visualização ou um eixo
Mover		Permite arrastar ou selecionar um ou mais objetos
Controle deslizante ou seletor		Gera um elemento gráfico manipulável e que pode ser relacionado com algum objeto que necessite de variação de mediad (comprimento ou ângulo, por exemplo)
Inserir texto		Permite a inserção e/ou edição de textos, usando linguagem corrente ou LATEX
Segmento definido por dois pontos		Cria um segmento de reta a partir de dois pontos no plano
Polígono		Cria um polígono a partir da definição de todos os seus vértices
Ponto		Cria um novo ponto no plano ou sobre algum objeto preexistente
Ampliar		Amplia o *zoom* para visualização da área de trabalho
Reduzir		Diminui o *zoom* para visualização da área de trabalho
Apagar objeto		Apaga o objeto selecionado
Grava para planilha de calculo		Grava os elementos de um objeto na planilha de cálculo

Fonte: Elaborado da autora

A área de trabalho 3D possui um sistema de eixos cartesianos (figura 3) que permite ao usuário realizar construções e visualizar as mesmas por vários ângulos.

Figura 3- Janela de visualização 3D da interface do GeoGebra 5

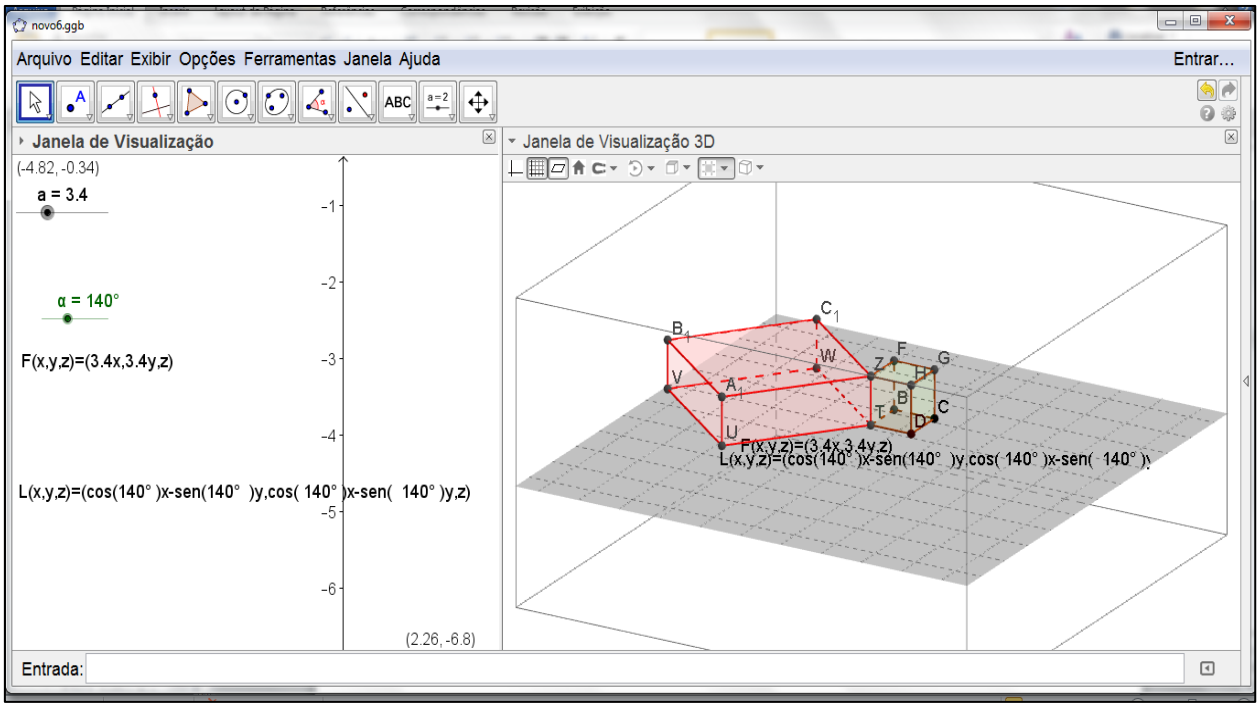


Fonte: Elaborado da autora

A explicação pura e simples das funcionalidades atinentes à janela de visualização 3D seria difícil e pouco útil nesta investigação. Assim, para indicar a maneira pela qual as mesmas podem ser operadas, opta-se, aqui, por um exemplo, relacionado à construção de um cubo que pode ser rotacionado em torno do eixo Oz concomitantemente. A ideia é fazer com que o cubo possa ser dilatado dentro do intervalo [0,4] com relação aos eixos Ox e Oy. Além disso, para cada caso, será descrita a transformação que representa este movimento no espaço.

Em resposta à atividade, na interface do GeoGebra 5 pode-se apresentar a construção indicada na Figura 4.

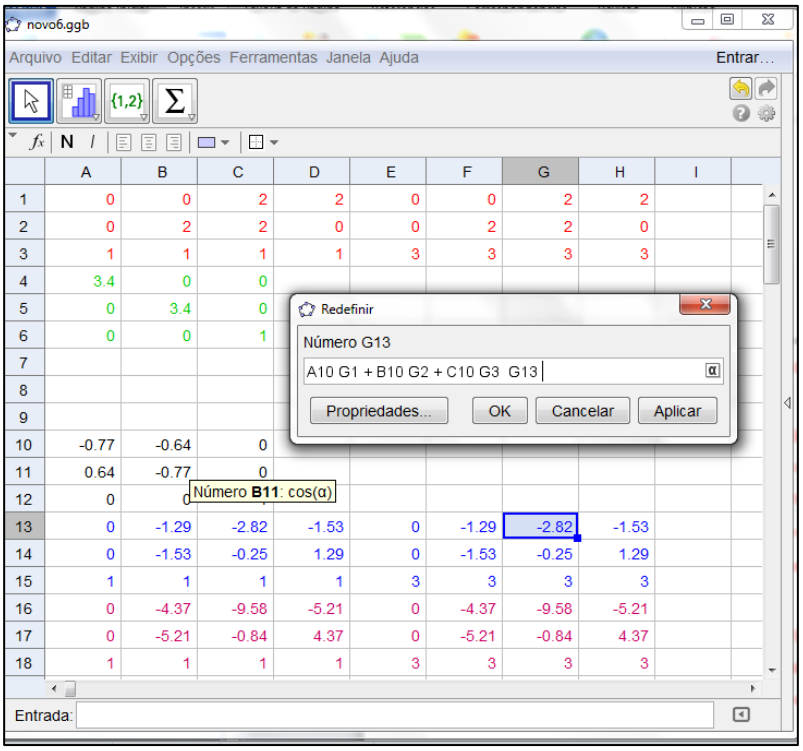
Figura 4- Interface do GeoGebra 5 (construção de um exemplo)



Fonte: Elaborado pela autora

Inicialmente, para obter o resultado descrito na Figura 4, devem ser definidos os seletores “a” e “α” através do botão “Controle deslizante”, já descrito, que pode expressar números ou ângulos, por exemplo. Nesta construção, estas duas características são empregadas. Posteriormente, na janela “Planilha”, constrói-se a matriz cujas colunas correspondem às coordenadas dos vértices do cubo inicial. Na interface do GeoGebra 5 é possível construir matrizes a partir da janela de entrada por meio de comandos específicos, mas, nesta construção, usa-se a planilha, pois a mesma permite o controle de cada entrada da matriz, ou seja, a definição da posição exata de cada elemento, como pode ser observado na Figura 5.

Figura 5- Planilha referente às construções matriciais



Fonte: Elaborado pela autora

Ainda na Figura 5, ao clicar em uma célula específica da planilha, é possível realizar várias operações em relação a outras entradas. Deste modo, nesta construção, além da matriz já mencionada, são construídas as matrizes correspondentes à transformação de rotação entorno do eixo OZ, cuja entrada depende do seletor “α”, e a transformação de dilatação dos eixos OX e OY por meio do seletor “a”, que correspondem, respectivamente, às matrizes de entradas das linhas 10 e 11 e de 4 a 6 na Figura 5. Usando a multiplicação matricial, são construídas as matrizes correspondentes, primeiramente, a um cubo rotacionado, seguido da construção da matriz que corresponde ao cubo rotacionado e dilatado. Tais matrizes correspondem às entradas das linhas 13 a 15 e 16 a 18, respectivamente, na Figura 5.

Depois de construídas as matrizes, constrói-se o cubo, bastando criar os pontos de vértice na janela de entrada, utilizando as colunas da primeira matriz – por exemplo, o ponto F = (F1, F2, F3). Depois da construção de todos os pontos, é suficiente utilizar o botão “Polígono” na barra de ferramentas, selecionando todos os vértices de uma face do cubo. Deve-se proceder da mesma forma para as demais faces. De modo análogo, constrói-se o paralelepípedo que corresponde ao cubo

rotacionado e dilatado em relação à largura e comprimento. Para fazer o cubo se transformar no paralelepípedo da Figura 4, é suficiente arrastar, com auxílio do *mouse*, os seletores “a” e “α”.

Assim, por meio de um exemplo de construção, ficam caracterizadas as principais funcionalidades destinadas a proporcionar visualização, experimentação e dinamismo às construções vistas como essenciais para esta investigação, com o uso do GeoGebra 5. Evidentemente, todas estas construções assumem sentido apenas se considerados os objetos matemáticos pertinentes, e os conceitos relativos às transformações lineares, dos quais se procura dar conta no próximo capítulo.

CAPÍTULO DOIS

TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES

Este capítulo foi reservado à abordagem do conceito de transformações lineares, bem como das notações utilizadas nesta investigação. Além disso, com o intuito de conhecer a forma como este conceito e seus pré-requisitos são ministrados no ensino médio, algumas observações sobre livros didáticos serão feitas para, a seguir, propor uma reflexão acerca do valor deste conhecimento e de suas possibilidades de desenvolvimento. Isso, porque os sujeitos desta pesquisa são licenciandos em Matemática e, em assim sendo, potencialmente, deveriam ter relativo domínio para lidar com os conteúdos aqui discutidos, com os processos de aprendizagem e com as situações típicas da construção deste conhecimento.

2.1 Transformações lineares: uma abordagem matricial

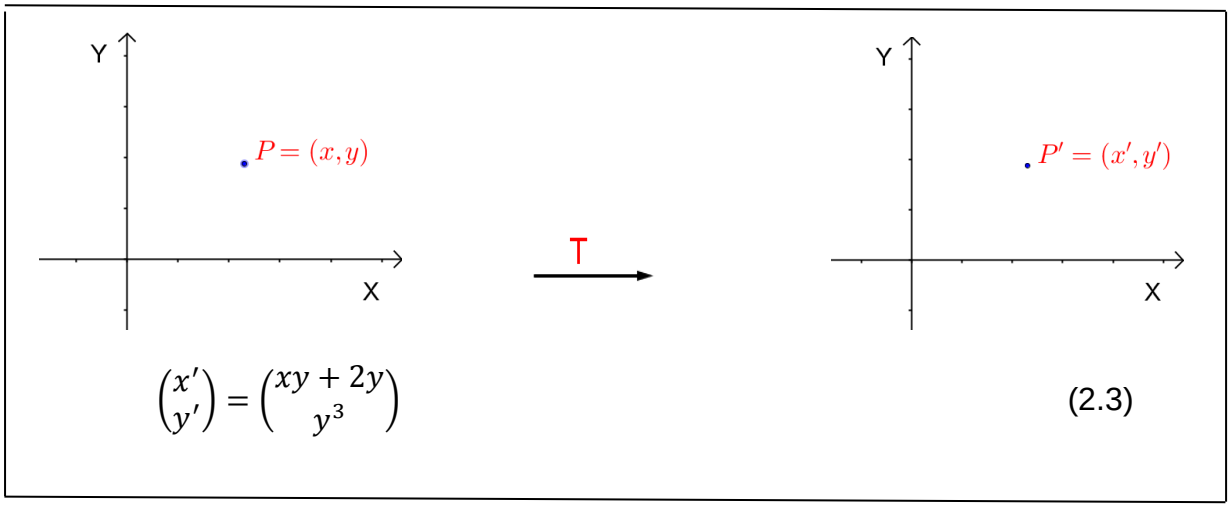
Julgou-se conveniente, a esta altura, iniciar as reflexões sobre o tema "transformações lineares" a partir das transformações do plano no plano, ou seja, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, ou simplesmente, transformações lineares no plano. Como mostra a Figura 6, de acordo com Gattass (2005), uma transformação linear T no plano é uma função que associa a cada ponto p do plano um novo ponto p' de modo que se tem:

$$T(p) = p' \tag{2.1}$$

Ou ainda,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Figura 6 – Esquema gráfico de uma transformação linear



Fonte: Gattass, 2005 (adaptado)

A figura 6 ilustra uma transformação arbitrária. No caso, para se caracterizar dada transformação como linear, segundo Gattass (2005), é condição necessária verificar se as coordenadas da imagem resultante representam uma combinação linear dos vetores transformados. Ou seja, para quaisquer que sejam p_1, p_2 pertencentes ao plano ou ao espaço, e quaisquer que sejam *a, b* pertencentes aos reais, deve valer a relação

$$T(ap_1 + bp_2) = aT(p_1) + bT(p_2) \quad (2.4)$$

Agora, desta forma, a transformação,

$$T(p) = Mp \quad (2.5)$$

na qual *M* é uma matriz e *p* um vetor, é uma transformação linear, pois o produto matricial possui a seguinte propriedade:

$$M(ap_1 + bp_2) = aM(p_1) + bM(p_2) \quad (2.6)$$

Reciprocamente, ainda segundo o autor supramencionado, pode-se dizer que toda transformação linear pode ser escrita como o produto de uma matriz por um

vetor. Ou seja,

$$T \text{ é } uma\ transformação\ linear \ \Leftrightarrow\ existe\ M\ tal\ que\ T(p) = Mp$$

A matriz M associada à transformação linear pode ser obtida, observando que

$$T(p) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Agora, considerando,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

e fazendo a substituição em (2.7), obtém-se

$$T(p) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

Destarte, a matriz de uma transformação linear é aquela cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores da base transformada. Como no desenvolvimento anterior, nada depende especificamente do plano; esta propriedade se estende a qualquer transformação linear sobre um espaço vetorial qualquer (Gattass, 2005). De modo análogo, para transformações lineares sobre o espaço $\mathbb{R}^3$, tem-se,

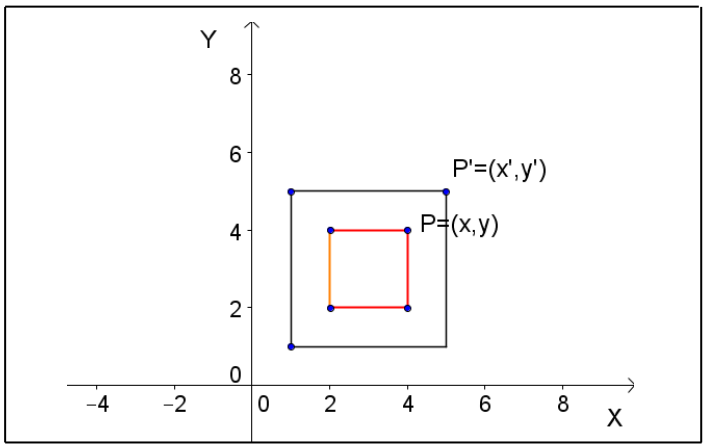
$$M = \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad (2.10)$$

2.1.1 Transformações lineares no plano

Dentre as transformações lineares no plano mais abordadas no Ensino Médio, encontram-se a transformação escalar, a rotação e o cisalhamento. A transformação linear do tipo escala se caracteriza pela multiplicação da coordenada

x por um fator m e da coordenada y por um fator n, conforme ilustrado na Figura 7,

Figura 7- Transformação escalar no plano



Fonte: Elaborado pela autora

Matricialmente, a transformação escalar S no plano é dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ ny \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

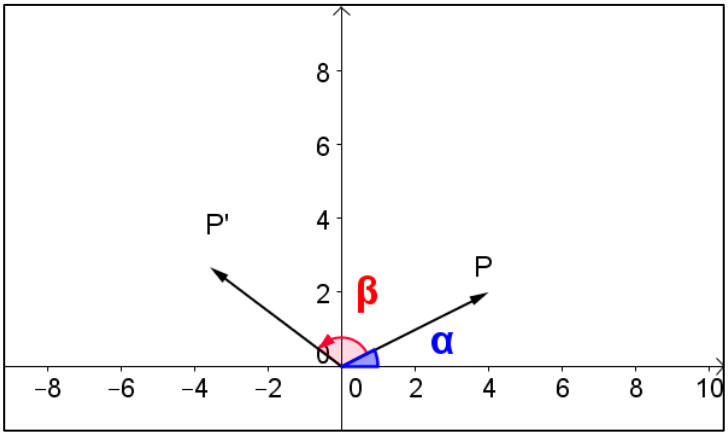
Transformações lineares escalares se classificam como uniformes ou não uniformes, e se distinguem pelos fatores multiplicativos *m* e *n*, de forma que, quando m=n, diz-se que ela é uniforme; caso contrário, diz-se que a transformação é não uniforme. Da mesma forma, pode-se observar que, quando os fatores *m* e *n* são positivos e variam no intervalo (0,1), as coordenadas correspondentes sofrem redução, e, quando forem maiores que 1, as coordenadas correspondentes sofrem ampliação. Quando os fatores *m* e *n* são negativos, a transformação atua sobre as coordenadas correspondentes, de forma a espelhar os pontos em torno do eixo com o qual está relacionada.

Na visão de Gattass (2005), a transformação de rotação, ou seja, aquela que determina a rotação de um vetor de ângulo θ em volta da origem, pode ser obtida por meio das fórmulas trigonométricas que se encontram ilustradas na Figura 8:

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)\cos(\theta) + cos(\alpha)sen(\theta) \qquad (2.12)$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)\cos(\theta) - sen(\alpha)sen(\theta) \qquad (2.13)$$

Figura 8- Transformação de rotação no plano



Fonte: Elaborado pela autora

Desta forma, ainda segundo o mesmo autor, o ponto A' pode ser representado por,

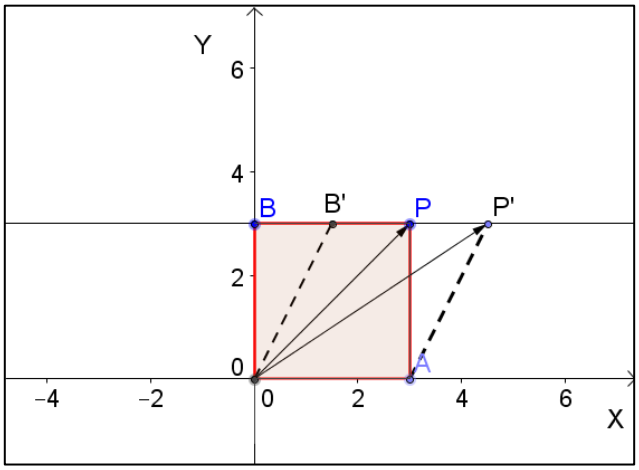
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos(\alpha+\beta) \\ rsen(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rsen(\alpha)\cos(\beta) + rcos(\alpha)sen(\beta) \\ rcos(\alpha)\cos(\beta) - rsen(\alpha)sen(\beta) \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

Gattass (2005) indica que, sabendo que $y = rsen(\alpha)$ e $x = rcos(\alpha)$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} cos\beta & -sen\beta \\ sen\beta & cos\beta \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

A transformação de cisalhamento deve ser definida com relação a um dos seus eixos ou a ambos, se for o caso. Aqui, considere-se a transformação linear de cisalhamento com relação ao eixo *Ox* que tem o efeito de transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B' de mesma base e mesma altura, como mostra a Figura 9.

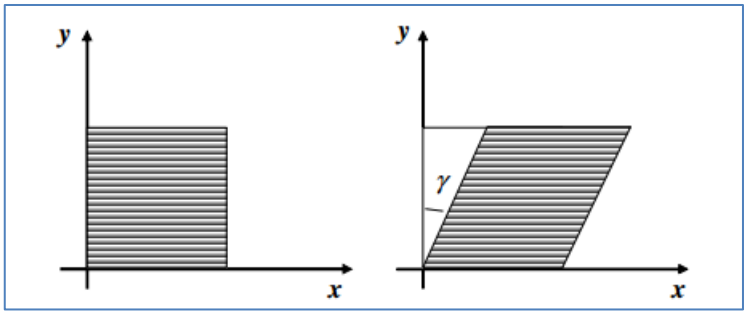
Figura 9- Transformação de cisalhamento no eixo Ox



Fonte: Elaborado pela autora

Como se pode observar, esta transformação preserva a coordenada y e move os pontos na direção de x, de acordo com o valor de y. Na visão de Gattass (2005), no caso, “esta transformação preserva a coordenada y e move os pontos na direção x de acordo com o valor de y”. Para o autor, em se considerando a Figura 9a:

Figura 10- Cisalhamento



Fonte: GATTASS (2005, p. 43)

Para o autor, em se considerando a Figura 9a, tem-se:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\tan\gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

O cisalhamento apresentado anteriormente dá-se apenas em uma direção; contudo, ele pode ocorrer simultaneamente em ambas as direções, caso em que a apresentação matricial é dada por, segundo Gattass (2005), e considerando γ e φ “os ângulos de cisalhamento em relação aos eixos x e y, respectivamente” (idem, p.

43):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\tan\gamma \\ x\tan\varphi + y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\gamma \\ \tan\varphi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.2 Transformação linear e translação

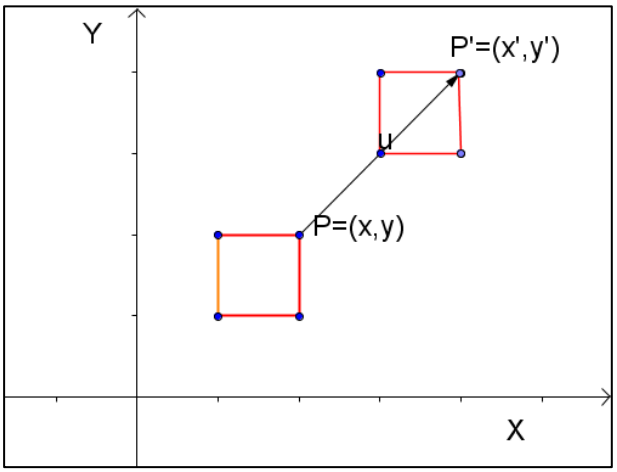
De acordo com Gattass (2005), existem transformações que não podem ser classificadas como lineares. É o caso das translações. Ainda assim, estas transformações são extremamente importantes em diversos processos, como em computação gráfica, por exemplo. Justamente nesta área, é desejável que se realizem todas transformações por meio de multiplicações matriciais, o que, de alguma maneira, cria uma relação entre elas.

Uma translação por um vetor q é uma transformação da forma

$$p' = p + q \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

A Figura 10 mostra a translação do vértice de um quadrado,

Figura 11 - Translação do quadrado no plano



Fonte: Elaborado pela autora

Essa transformação não é linear, pois não preserva a combinação linear entre os vetores, ou seja, a imagem que foi transformada de uma combinação linear não é a combinação linear dos vetores transformados. Assim, a translação não pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

com *a, b, c* e *d* reais. A forma de contornar esse problema é encontrada na introdução de um novo sistema de coordenadas denominadas homogêneas, que possibilitarão realizar transformações por meio de transformações lineares.

2.2.1 Coordenadas homogêneas

Este novo sistema de coordenadas é constituído correspondendo a cada vetor em $\mathbb{R}^2$ um vetor em $\mathbb{R}^3$, de modo que as primeiras coordenadas são mantidas e à terceira é atribuído o valor 1, isto é,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, para mostrar um ponto representado pelo vetor de coordenadas homogéneas $(x, y, 1)^t$ é suficiente ignorar a terceira coordenada e mostrar o vetor $(x, y)^t$.

Consequentemente, ao considerar uma translação T por um vetor *q* em $\mathbb{R}^2$, pode-se encontrar uma representação matricial para T em relação a este novo sistema de coordenadas. Para tanto, basta tomar a matriz identidade de ordem 3 x 3 (isto é, uma matriz de 3 linhas e 3 colunas) e substituir os dois primeiros elementos da terceira coluna pelos elementos de *q*. De outro modo, tome-se, por exemplo, uma translação T por um vetor *q* = $(3,1)^t$. Consequentemente, em coordenadas homogêneas, isto é realizado da seguinte forma:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, este novo sistema de coordenadas permite um mesmo tratamento algébrico para transformações lineares e para as translações (Gattass, 2005).

Até aqui, foram descritos os tópicos ligados às transformações lineares cujos conceitos foram empregados nesta investigação de forma mais direta. Em seguida, apresenta-se algumas observações acerca de livros didáticos do Ensino Médio.

2.3 Os livros didáticos

No intuito de examinar se as orientações dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) eram contempladas em relação a temas correlatos àqueles tratados nesta investigação, viu-se por bem alinhar algumas observações sobre certos livros didáticos utilizados no Ensino Médio nas escolas estaduais do Pará, escolhidos em razão de figurarem entre os mais adotados no contexto mencionado, de modo a levantar eventuais abordagens em relação ao conceito de transformações em geral (e lineares, se for o caso, em particular), bem como no que se refere ao estudo proposto sobre matrizes, uma vez que este tema possui aplicação direta no conceito de transformações lineares. Tais observações se referem a quatro livros didáticos, a saber:

1) IEZZI, Gelson et al., **Matemática:** ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.
2) PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2005.
3) YOUSSEF, Antonio Nicolau; FERNANDEZ, Vicente Paz; SOARES, Elizabeth. **Matemática para o 2º grau:** curso completo. São Paulo: Scipione, 2009.
4) DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** ensino médio. São Paulo: Ática, 2008.

Para facilitar a fluidez em relação aos comentários sobre estas obras, elas foram designadas como Livro 1, Livro 2, Livro 3 e Livro 4, respectivamente.

No Livro 1, o capítulo 6, destinado à introdução do conceito de matrizes, foi examinado. Para tanto, observou-se que esse conceito é construído a partir da exposição de três exemplos envolvendo tabelas. Em seguida, tratou-se das propriedades operatórias que envolvem o conteúdo, sem a proposição de atividades ou problematizações que viessem a evidenciar os significados envolvidos para além da mera abordagem algorítmica. A propriedade operatória relativa à multiplicação matricial é introduzida por meio de um exemplo relacionado com a venda de um determinado jornal em diferentes cidades: a multiplicação matricial é empregada para indicar a receita obtida pelas vendas do jornal, durante uma semana, nos locais mencionados. Percebeu-se, neste ponto, uma ruptura em relação à abordagem predominante: o problema surge devido à carência, no livro, de um contexto, já que todo o encaminhamento anterior é algorítmico.

Quanto às atividades, esta obra apresenta vários exercícios tradicionais que, supostamente, favoreceriam a consolidação das operações matriciais e suas propriedades. Com relação à multiplicação matricial, os exercícios trazem como tema, por exemplo, um caso de venda de alimentos, a relação entre um grupo de alunos e as notas obtidas em português e matemática, entre outros casos que abordam questões diversas, de modo a ampliar, possivelmente, o uso direto dos conceitos e exemplos expostos. Especificamente, com relação ao conceito de transformações, nada é abordado nesta obra.

O Livro 2 inicia a introdução do conceito de matrizes por meio de uma abordagem histórica, apresentando um sistema de equações de primeiro grau proveniente de uma obra encontrada na China, conhecida como “Os nove capítulos da arte Matemática”, na qual o sistema apresentado é:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Para apresentar a estrutura matricial, o manual explica que, na obra, o sistema é resolvido por meio de operações efetuadas a partir da seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Assim, o autor introduz o conceito de matriz, apresentando-o como o registro mais antigo que envolve a estrutura matricial, indicando, como motivação inicial, a resolução de sistemas de equações do primeiro grau. No decorrer de um dos capítulos, são feitas classificações e definidas operações matriciais clássicas acerca de matrizes, dando um caráter bastante algoritmizado à proposta. Contudo, apesar deste desenvolvimento pouco associado à construção de conceitos, e em favor da memorização em grande parte do capítulo, o autor traz, no final, um trecho com o intuito de agregar um significado mais abrangente ao estudo de matrizes, além de uma abordagem acerca de transformações em duas dimensões e, em

particular, as transformações lineares escalar e rotação, relacionando o caráter algébrico e geométrico envolvidos.

No Livro 3, não foi encontrada referência alguma a transformações, muito menos a transformações lineares. As matrizes são introduzidas da mesma forma que no Livro 2, fazendo, inclusive, alusão à mesma obra chinesa. As operações matriciais são introduzidas de modo formal, seguidas de uma lista de propriedades. Ou seja, esta obra, com relação ao conteúdo “matrizes”, realiza um estudo totalmente algebrista, intermediado por exercícios bastante abstratos, sem incluir atividades problematizadoras que poderiam adicionar sentido mais amplo aos conteúdos.

No Livro 4, o autor faz, inicialmente, uma introdução ao conceito de matrizes com base em tabelas utilizadas para armazenar informações sobre *pixels* de uma determinada imagem. Para reforçar a importância do conceito, o autor apresenta, também, outro exemplo de tabela, envolvendo a venda de livros. Apesar da apresentação matematicamente frágil, o autor, em sua abordagem, anuncia e segue um roteiro, buscando disponibilizar ao aluno uma referência para a utilização do conceito de matriz, o que pode ser percebido quando anuncia: “estudaremos as matrizes e as suas operações básicas, aprendendo a utilizá-las como instrumentos”, indicando que “é importante que se domine um instrumento matemático para poder utilizá-lo como ferramenta nas diversas aplicações possíveis” (DANTE, p. 252).

A multiplicação matricial é apresentada por meio de um exemplo que envolve a pontuação de futebol de um time, que pode ser obtida por meio da multiplicação das vitórias, empates e derrotas. Com relação aos exercícios, em sua grande maioria, buscam a consolidação das propriedades operacionais. O autor, como os demais, apresenta exercícios que envolvem cálculos algébricos. Em alguns deles, inclusive, utiliza multiplicações com “aplicações simples e irreais”. Contudo, ao final do capítulo, talvez para consolidar sua proposta em torno de aplicações cotidianas, o autor apresenta uma última seção, que envolve a aplicação de matrizes na computação gráfica, na qual realiza a análise de transformações de rotação, escalar e translação, sem fazer qualquer referência às transformações lineares. O autor, ainda, deixa claro, em sua abordagem, a importância de se obter uma representação matricial para estas transformações, visando a uma composição entre elas. Pontua, em seguida, que as transformações de translação, apesar de não poderem ser relacionadas com matrizes, ao contrário das demais, podem admitir a inserção do

conceito de coordenadas homogêneas.

Outra característica desta obra é que, com relação a esta última seção de aplicações matriciais, segue uma série de exercícios que abordam tais construções e conceitos.

Se se levar em conta as orientações dos documentos oficiais e observado o que os livros didáticos do Ensino Médio contemplam, percebe-se uma carência acentuada de problematizações e de abordagens que favoreçam a aprendizagem dos conteúdos que serviriam de base àqueles relativos às transformações lineares. Pelo que se pode notar em tais obras, há pouca conexão entre os conteúdos representados pela resolução de sistemas lineares, as representações matriciais e as transformações. Some-se a isto as questões indicadas por Sierpinska (2000), em torno da complexidade do sistema linguístico envolvido na representação dos objetos relativos às transformações lineares, para que se avente que as dificuldades em torno do tema tratado nesta investigação podem encontrar suas raízes na cultura pouco interdisciplinar do sistema escolar. O tratamento dos temas de forma estanque e descolada de um projeto de aprendizagem matemática pode explicar, em certa medida, a dificuldade que os estudantes encontrar em relacionar conteúdos.

Da análise dos manuais didáticos, foi possível inferir que haveria a possibilidade de se introduzirem conceitos relativos às transformações lineares que subsidiariam, de forma mais ampla, o aprofundamento deste estudo no ensino superior. Então, focar este aprendizado entre os potenciais professores sujeitos desta pesquisa, poderia concorrer para que eles apresentassem maior desenvoltura e demonstrassem mais conhecimento para articular estes objetos matemáticos no Ensino Médio, o que, de certa forma, também justificaria as propostas feitas nesta investigação. Esta articulação poderia se dar por meio do conteúdo “transformações geométricas”, que poderia favorecer a compreensão das transformações lineares, em um processo que considerasse problemas típicos e que ocorresse de forma progressiva.

Esta proposição não deve causar estranheza, pois compõe um rol de competências e habilidades esperadas do licenciado em Matemática, como aponta o documento intitulado “Diretrizes curriculares para cursos de Matemática”, que trata dos cursos de Licenciatura em Matemática:

> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica; b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos; c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica; d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente; f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica (BRASIL, 2001, p.4).

Notem-se, mais detidamente, as proposições contidas nos itens “b” e “c” do documento supramencionado, nas quais é possível perceber o papel do professor como agente produtor de materiais e como crítico das abordagens curriculares. Além disso, as abordagens flexíveis e criativas destinadas a estimular e promover a autonomia são contempladas pelo item “d”.

Concluídas estas observações acerca do objeto matemático e do tratamento dos temas que lhe serviriam de base nos livros didáticos, este trabalho prossegue, indicando os pressupostos metodológicos assumidos.

CAPÍTULO TRÊS

SUPORTES E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os pressupostos da análise de conteúdo, de acordo com o exposto por Bardin (1977), foram eleitos como suportes metodológicos desta pesquisa. Este capítulo é destinado à descrição desta metodologia, além da apresentação da abordagem qualitativa, de modo mais geral, o que implica a exposição da organização das análises.

3.1 Metodologia

Com respeito à classificação, a pesquisa qualitativa se mostrou mais adequada aos propósitos desta investigação, do mesmo modo como a análise de conteúdo resultou como procedimento analítico mais pertinente. As questões levantadas nesta pesquisa apresentam um caráter muito particular, não permitindo a generalização em termo de quantidades que retratem a confiança de uma resposta e nem percentuais totalmente exatos (OLIVEIRA, 2007).

Para D'Ambrosio (2011, p.93), nas pesquisas de cunho qualitativo, o essencial é que ela seja "focalizada no indivíduo, com toda a sua complexidade, e na sua inserção no ambiente sociocultural e natural". Além disso, o autor indica que "essa modalidade de pesquisa depende muito do pesquisador estar em atividade na sala de aula como professor". Neste sentido, ainda, argumenta que, em análises qualitativas,

> O pesquisador é o instrumento mais relevante nesta modalidade de investigação, sendo o "o ambiente natural" o local de onde surgem, de forma direta os dados de interesse. Mesmo quando do uso de aparelho de registro de falas ou imagens, por exemplo, cabe ao pesquisador o trabalho de revisar as descrições de forma constante. Sendo assim, o contexto é de importância fundamental na pesquisa, influenciando o comportamento das pessoas, o que deve levar o investigador a frequentá-lo, na tentativa de compreendê-lo em suas diversas perspectivas. (D'AMBROSIO, 2011, p. 93)

Nesta investigação, que adota uma metodologia qualitativa de análise, por

meio da observação das interações no contexto proporcionado pelo *milieu* antagônico e de descrições intensivas, para posteriores interpretações, as atividades componentes das sequências didáticas, descritas adiante, serão objetos de análise. Isto será possível por meio do contato sistemático com os sujeitos, alunos escolhidos aleatoriamente em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da cidade de Belém, no estado do Pará. Os fenômenos em jogo têm as características descritas por Oliveira (2007):

> As questões que surgiam e que causavam o impulso em direção da busca de sentidos e elucidações tinham caráter particular, não podiam ser generalizadas em torno de quantidades sempre aplicáveis e de percentuais infalíveis, pedindo, antes, descrições que apontassem na busca das respostas direcionadas pelo problema (OLIVEIRA, 2007, p.27).

Bardin (1977, p.38), por sua vez, indica que a análise de conteúdo "é um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utilizam procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens". A autora ressalta a importância do caráter de inferência desta abordagem metodológica, como quando afirma que:

> É, portanto, importante completarmos os segmentos de definição já adquiridos, pondo em evidencia a finalidade (implícita ou explicita) de qualquer análise de conteúdo: a intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos a condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não) (BARDIN, 1977, p.38).

Esse caráter inferencial da análise de conteúdo descrita na obra da autora possibilita resolver dois tipos de problemas: o primeiro problema consiste em responder "o que é que conduziu um determinado enunciado?". Segundo a autora, esse aspecto diz respeito às causas ou antecedentes da mensagem. O segundo problema seria: responder quais consequências um determinado enunciado, provavelmente, irá provocar. Esse questionamento diz respeito aos efeitos das mensagens.

Desta forma, por meio da verificação do conteúdo das atividades realizadas pelos alunos de um curso superior de Licenciatura em Matemática da UEPA, será possível analisar fenômenos que detêm o que Laville e Dione (1999, p.41) nomeiam multicausalidade, ingrediente típico de um cenário humano e suas complexidades. Isto quer dizer que os fenômenos mencionados neste estudo poderão apresentar

diversas propostas para as atividades indicadas na sequência, o que deverá acarretar soluções distintas e indicadoras de trajetórias peculiares. Desta forma, a abordagem qualitativa permite abarcar este universo humano e suas interações – neste caso, entre os estudantes sujeitos da pesquisa e as atividades matemáticas propostas.

Esta pesquisa, ao trabalhar com os alunos-sujeitos por meio de uma sequência didática, buscou por evidencias de como eles mobilizavam seus conhecimentos prévios, em sua busca pela construção do conceito de transformação linear e sua representação matricial, e, também, como se dá a influência das tecnologias digitais empregadas no estudo, na estruturação das estratégias utilizadas para a construção do conhecimento. Além disso, este percurso de produção de conhecimentos sobre o tema matemático foi cumprido a partir de uma proposta investigativa sobre os problemas envolvidos. Tais elementos metodológicos permitirão tratar os objetivos específicos da investigação, que aqui se repete:

a) Analisar a relevância, para estudantes de Licenciatura em Matemática, do domínio de conceitos como o de matrizes e sistemas lineares na compreensão conceitual do tema “transformações lineares”;
b) Analisar de que maneira uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais (com o GeoGebra 5, especificamente) pode concorrer, por meio do estímulo à visualização e experimentação dinâmica, para a compreensão conceitual do tema “transformações lineares”; e
c) Analisar de que forma sequências organizadas como situações didáticas, com base no trabalho autônomo dos estudantes de Licenciatura em Matemática, sujeitos da pesquisa, podem concorrer para a compreensão conceitual do tema “transformações lineares”.

Da mesma forma, o cabedal metodológico aqui alinhado pretende favorecer o alcance do objetivo geral desta investigação, também destacado aqui: *constituir um diagnóstico que permita apontar em que medida os sujeitos, estudantes de Licenciatura em Matemática, resolvem problemas eminentemente conceituais em relação ao tema “Transformações Lineares”, por meio de estratégias nas quais os mesmos venham a mobilizar conhecimentos supostamente adquiridos no Ensino Médio e em momentos anteriores de sua formação universitária, no âmbito de situações didáticas construídas para promover condições para que consigam evidenciar suas próprias estratégias de modo autônomo, com uso de tecnologias*

digitais.

Da mesma forma, a questão de pesquisa que se procura responder é ***de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática resolvem problemas conceituais em relação ao tema "transformações lineares" no âmbito de situações didáticas e com o uso de tecnologias digitais?***

3.2 Os sujeitos da pesquisa

Para trabalhar com as sequências didáticas, adiante descritas, foram escolhidos oito alunos de uma turma do segundo ano do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Pará. Os alunos participantes da pesquisa fazem parte de uma mesma turma na qual a pesquisadora também ocupa a função de professora.

Esta escolha teve por base, primeiramente, o fato de que o grupo de sujeitos ser formado por alunos que já haviam sido apresentados aos conteúdos de geometria analítica, disciplina que haviam cursado no primeiro ano, e cujo conhecimento, supostamente, lhes permitiria fundamentar suas conjecturas e estratégias. Além disso, são alunos que, durante o ano de 2014, no qual a sequência foi aplicada, estavam cursando a disciplina Álgebra Linear, que apresenta peculiaridades compatíveis com os objetivos desta investigação em sua linguagem (conceito de espaço vetorial, base, dimensão, operações matriciais, dentre outros) e tratamento, e que deveriam fazer parte da estrutura cognitiva dos participantes desta pesquisa. Deve-se, também, enfatizar que os sujeitos participantes, apesar de estarem, à época, cursando a disciplina Álgebra Linear, até o momento da aplicação da sequência não haviam tido contato algum com o tema transformações lineares na disciplina, além daquele que, eventualmente, poderiam ter adquirido no ensino médio.

Outra característica foi o fato de que os sujeitos observados nesta pesquisa deveriam ser aqueles alunos que participaram, integralmente, de cada momento da aplicação da sequência didática, ou seja, foram observadas quatro duplas dentro de um universo de 20 alunos. Em resumo, fizeram parte da pesquisa oito alunos separados em duplas formadas desde o início da aplicação da pesquisa até seu final. Isso quer dizer que não houve troca de duplas no decorrer da aplicação da sequência, que ocorreu em sessões distintas (cinco ao todo, com duração de 100

minutos cada, realizadas em momentos distintos daqueles reservados às aulas, tendo como ambiente a própria universidade), e que se subdividiram em uma oficina de informática, que correspondeu a duas sessões, destinadas à familiarização em relação a interface do GeoGebra 5. As outras três sessões foram voltadas à aplicação da sequência didática.

Cada dupla, nesta pesquisa, foi identificada por letras do alfabeto (de A a D), de modo a resguardar a identidade dos estudantes.

Como se disse, anteriormente à aplicação da sequência, foi realizada uma oficina sobre o *software* GeoGebra 5, pois, apesar de alguns alunos dizerem que o conheciam, ficou evidenciado que sabiam apenas operar os elementos básicos da interface. Este problema pode ter sido ocasionado pelo fato do curso de informática, do qual os alunos participaram até então na instituição, ser, na maior parte das vezes, ministrado por um professor de informática que, por sua vez, por não necessariamente possuir uma formação matemática, pouco mobiliza o conhecimento algébrico dos alunos ao apresentar este *software* em sua dinâmica de sala de aula. Trata-se, então, na maior parte das vezes, de um trabalho muito mais instrumental do que matemático.

Concluídas as considerações metodológicas, passa-se às descrições relativas à coleta de dados.

3.3 Coleta de dados

Esta seção tem por objetivo a apresentação da sequência didática elaborada sobre transformações lineares, procurando mostrar como ela deverá se desenvolver com relação ao *milieu*. A sequência é composta por três atividades, aplicadas em três dias distintos.

A primeira atividade foi preparada com o intuito de que os alunos, a partir da utilização dos seus conhecimentos prévios sobre resolução de sistemas e operações matriciais, classificassem as transformações do espaço $\mathbb{R}^n$ no $\mathbb{R}^m$, no sentido de indicar se preservam ou não combinações lineares.

A segunda atividade foi elaborada com o objetivo de que os alunos construíssem estratégias e utilizassem seus conhecimentos matemáticos na busca por uma representação matricial para transformações lineares específicas, de modo

que pudessem generalizar esta construção e utilizá-la em outros espaços $\mathbb{R}^n$.

A terceira atividade foi elaborada para que os alunos mobilizassem seus conhecimentos no intuito de observar a determinação de uma transformação linear, a partir dos seus valores, em uma base específica.

Desse ponto de vista, e de acordo com os pressupostos da TSD, os alunos deveriam propor soluções para os problemas supramencionados, de maneira autônoma, passando pelas dialéticas de ação, formulação e validação. Os conceitos propriamente ditos seriam discutidos, coletivamente, no momento de institucionalização organizada sob a orientação da pesquisadora, de modo que cada dupla teria a oportunidade de discutir e compartilhar suas construções.

Outra importante questão que envolve todas as atividades diz respeito à utilização do *software* GeoGebra 5. Neste sentido, a elaboração de cada atividade contempla a utilização do *software,* no intuito de observar o quanto ele é relevante para que os alunos construam o conhecimento, durante suas trajetórias de investigação, com foco em características como experimentação, visualização e dinamismo.

Para a realização desta investigação, durante a aplicação da sequência, a pesquisadora assumiu a posição de observadora das ações dos alunos, respondendo aos questionamentos dos alunos, referentes aos comandos do GeoGebra 5, mas sem interferir diretamente em suas ações. Deste modo, evitou-se responder perguntas relacionadas à construção do novo conhecimento e incentivou-se que cada dupla relatasse todos os seus resultados, bem como levantasse outros questionamentos, de modo que os sujeitos refletissem acerca de possibilidades que os ajudariam a resolver seus problemas e reorganizar suas ideias.

Para a coleta de dados, distribuiu-se, para cada dupla, folhas de papel necessárias para realizarem o registro escrito de suas formulações e conclusões, bem como solicitou-se que cada dupla registrasse seus procedimentos em arquivos do GeoGebra 5 para, ao final dos trabalhos, os mesmos pudessem ser recolhidos a partir dos computadores utilizados pelos sujeitos em um laboratório da universidade, local onde ocorreram as sessões. Além disso, como garantia de que os dados seriam preservados, foi solicitada a entrega de arquivos de imagens das telas do GeoGebra 5, utilizando a tecla “*Print Screen*” dos computadores, tanto do protocolo de construção como das janelas obtidas, para que, desse modo, se pudesse observar as estratégias adotadas durante a atividade.

As variáveis didáticas consideradas nesta pesquisa podem ser elencadas como as que seguem:

- Suporte para a realização das atividades (informático, por meio do GeoGebra 5, ou estático);
- A abordagem matricial em relação às atividades envolvendo o tema matemático, no âmbito da disciplina de álgebra linear (transformações lineares);
- A organização didática (sequências estruturadas como situações didáticas, do ponto de vista da TSD).

3.4 Descrição das atividades

3.4.1 Descrição da atividade 1

O objetivo das primeiras atividades da sequência didática foi dar ao aluno subsídios indispensáveis para construir, de modo autônomo, as características necessárias para classificar uma aplicação arbitrária como sendo ou não linear.

Esta atividade foi preparada para que as duplas, inicialmente, fizessem escolhas adequadas em relação a um vetor no espaço, o qual, ao ser adicionado a dois vetores fornecidos na atividade, permitisse aos alunos mobilizar seus conhecimentos de resolução de sistemas e, com isto, estabelecer uma relação entre os vetores dados e o vetor escolhido. Estabelecida esta relação entre os vetores, esperava-se que os alunos, ao dar prosseguimento à atividade, utilizassem as mesmas estratégias usadas no vetor obtido, ao usarem uma determinada aplicação que associa vetores do espaço aos vetores iniciais, e observassem que a relação entre esses novos vetores fica preservada. Durante as ações realizadas nesta atividade, a pesquisadora primeiramente faz uma leitura da atividade para sanar qualquer dúvida que possa surgir em seus enunciados e assegurar que os alunos compreendam que lhes cabe a responsabilidade pelo processo investigativo que culminará, possivelmente, na resolução da proposta.

Para um melhor controle das ações dos alunos, conforme já mencionado, cada dupla salvou o arquivo construído no processo de resolução da atividade no GeoGebra 5, estabelecendo, deste modo, parte do protocolo de suas ações. Além disso, os sujeitos registraram com lápis e em papel, ao responderem aos

questionamentos da atividade, que segue descrita como foi disponibilizada para os estudantes.

Atividade 1

Considere os vetores $V_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $V_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Fazendo uso do *software* GeoGebra 5 e de lápis e papel:

a) Escolha um vetor V_3 e construa, no ambiente computacional, a matriz M = [A|B] = [V_1,, V_2, V_3]; descreva com o auxílio de lápis e papel o sistema AX = B, associado à matriz M, explicando a relação que o mesmo descreve com respeito aos vetores V_1,, V_2, V_3. Sendo a matriz A = [V_1,, V_2] e a matriz B=V_3.

Com respeito ao item (a):

1) Descreva a matriz M = [V_1,, V_2, V_3] construída no ambiente GeoGebra 5;
2) Escreva o sistema AX = B, cuja matriz aumentada é descrita pela matriz M;
3) Qual relação você encontra entre os vetores V_1, V_2, V_3, obtidos a partir dos itens anteriores?

b) No ambiente GeoGebra 5, escalone a matriz M = [A|B] = [V_1, V_2, V_3] e verifique se o sistema AX = B possui solução ou não. Com lápis e papel, descreva o sistema equivalente obtido e descreva qual a relação com o sistema original. No caso do sistema AX = B não ter solução, repita o processo, modificando a escolha do V_3, e descreva a relação entre os vetores V_1, V_2, V_3.

Para resolver o item (b), responda as seguintes perguntas:

1) O sistema descrito (AX = B) representa um sistema compatível (possível)? Justifique sua resposta.

2) Com relação ao item anterior (com solução), o que você pode dizer a respeito da relação descrita entre os vetores V_1, V_2, V_3?

c) Considere as aplicações $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, L(V)=$\begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$, nas quais V=($x_1$, x_2, x_3).

Para os vetores V_1, V_2, V_3 relacionados anteriormente, calcule $L(V_1)$, $L(V_2)$ e $L(V_3)$. Repita o procedimento do item (b) na matriz aumentada $[C|D] = [L(V_1), L(V_2), L(V_3)]$, na qual $L(V_3) = D$. Determine a relação estabelecida entre os vetores $L(V_1)$, $L(V_2)$ e $L(V_3)$ decorrente do sistema $CX = D$. Com suas palavras, descreva as características observadas entre as relações estabelecidas nos itens (b) e (c).

Com respeito ao item (c):

1) Escreva os valores $L(V_1)$, $L(V_2)$ e $L(V_3)$ obtidos;
2) Escreva a matriz aumentada $[L(V_1), L(V_2), L(V_3)]$ construída no ambiente GeoGebra 5 e escreva o sistema $CX = D$ ($L(V_3) = D$ e $C = [L(V_1), L(V_2)]$), associado a mesma. Descreva a relação estabelecida entre os vetores $L(V_1)$, $L(V_2)$, $L(V_3)$;
3) No ambiente GeoGebra 5, encontre a matriz equivalente decorrente do escalonamento da matriz $[L(V_1), L(V_2), L(V_3)]$ acima e escreva o novo sistema proveniente do mesmo;
4) Descreva o que o novo sistema do item anterior determina com respeito à relação encontrada entre os vetores $L(V_1)$, $L(V_2)$, $L(V_3)$;
5) Nos itens 3 de (b) e no item 4 de (c), compare as relações encontradas e descreva qual a característica mantida pela aplicação $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(V)=\begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$, onde $V=(x_1, x_2, x_3)$.
6) Na característica descrita anteriormente, quais são as operações envolvidas?

3.4.1.1 Análise da primeira atividade

Durante o item (a) da primeira atividade, o aluno deve realizar ações que o conduzam à associação de cada matriz [A|B] a um sistema de equações que correspondam a uma combinação linear entre os vetores $V1=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $V2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, V3. Consequentemente, o aluno, ao escolher um vetor V3, como, por exemplo, $V_3=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

deverá apresentá-lo por meio da multiplicação entre a matriz A=$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Além disso, o aluno também deverá observar as condições de existência da multiplicação entre matrizes, deste modo conjecturando a ordem da matriz (vetor) X, possibilitando a realização do trabalho algébrico necessário à obtenção do sistema:

$$\begin{cases} 0.x_1 - x_2 = 5 \\ 2\ .x_1 + 0.x_2 = 2 \\ -3.x_1 + 2.x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 5 \\ 2x_1 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

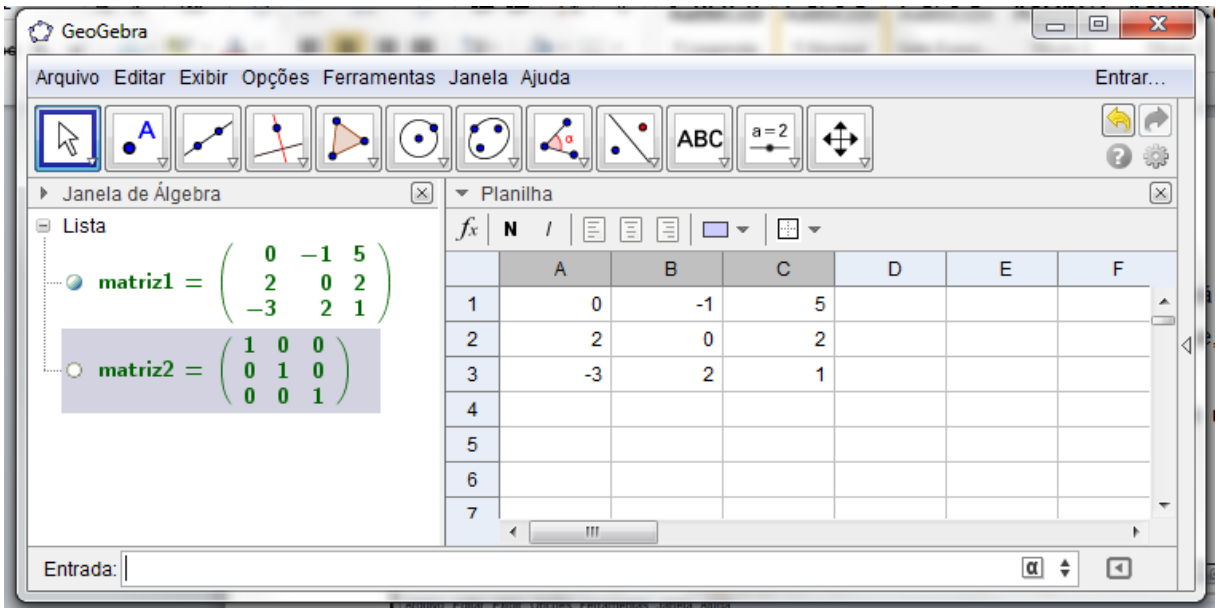
Com base no sistema já estruturado, o aluno deverá mobilizar conhecimentos atinentes à resolução de sistemas, de modo a realizar os devidos agrupamentos e obter o seguinte esquema operacional:

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 V_1 + x_2 V_2 = V_3. \qquad (1)$$

Procedendo desse modo, o aluno poderá concluir que o vetor V_3 deverá ser obtido a partir da combinação dos vetores V_1 e V_2, posicionamento este que, se alcançado com sucesso, o ajudará na construção de suas estratégias.

Com relação ao ambiente do Geogebra 5, o aluno deverá construir uma janela, possivelmente, equivalente a que segue na Figura 11.

Figura 12- Janela de visualização do GeoGebra 5



Fonte: Elaborado pela autora

Neste caso, a “matriz1” corresponde à matriz M, cujas colunas são formadas pelos vetores V_1, V_2, V_3; para construí-la na interface do GeoGebra, duas formas são possíveis: ou usando a janela de entrada, fazendo a listagem das linhas da matriz, ou utilizando a janela de planilha, descrevendo elemento por elemento matricial na planilha, para, depois de construída, selecioná-la e transformá-la em matriz, por meio dos comandos da própria janela de planilha. Independentemente da forma como a construa, e de posse da matriz1, os sujeitos podem usar o comando “Matrizescalonada{matriz1} para obter a matriz2 como a escalonada da matriz1. Consequentemente, dependendo do resultado da matriz2, o aluno verifica se essa nova matriz corresponde a um sistema com solução ou não. Por exemplo, caso a matriz2 seja igual à matriz identidade, então, o aluno deverá concluir que o sistema a ela associado não possuirá solução, ou seja, o sistema é impossível. O aluno poderá, neste instante, apresentar alguma dificuldade ao desenvolver o pensamento analítico necessário para obter esta combinação linear, o que, possivelmente, prejudicará a obtenção de conclusões matematicamente coerentes. Assim, alternativamente, o professor poderia, sem direcionar o aluno para a resolução da atividade, realizar uma análise prévia do desenvolvimento da mesma com relação a este item, e, de posse dos resultados provisórios, convidar o aluno a revisitar seus conceitos, de modo que tenha a possibilidade de refletir sobre sua trajetória investigativa e corrigir alguns de seus posicionamentos. Por outro lado, o professor pode pedir que o estudante, de posse de outra combinação linear, obtenha um sistema linear de equações, de modo que a fazê-lo refletir sobre a comparação de diferentes resultados, para que possa cogitar a realização de um caminho inverso à ação que ele, eventualmente, deva corrigir.

Com relação ao item (b), o aluno pode escolher, por exemplo, $V_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, deste modo encontrando uma matriz do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} resultando\ no \\ seguinte\ sistema \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1.x_1 + 0.x_2 = 0 \\ 0.x_1 + 1.x_2 = 0 \\ 0.x_1 + 0.x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \ sistema\ sem\ solução \quad (2)$$

Este resultado no ambiente GeoGebra 5 pode ser observado na matriz2 da Figura 16. Ao fazer a relação deste resultado e o que matematicamente ele representa, o aluno pode observar que o mesmo corresponderá a um sistema sem

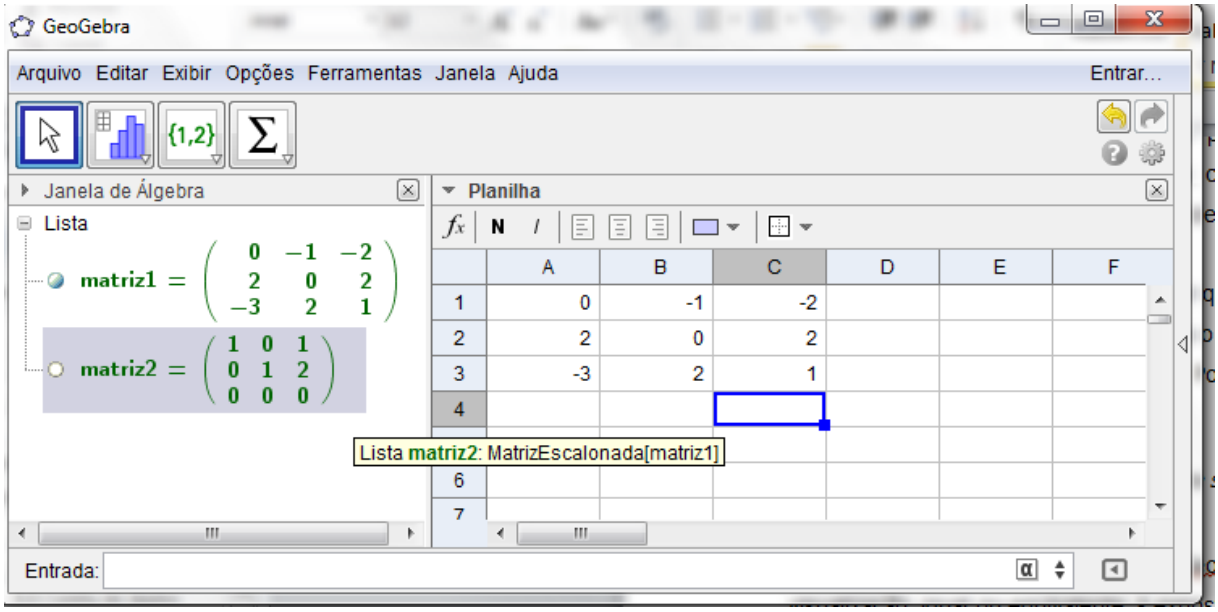
solução, conclusão esta baseada em seus conhecimentos prévios acerca de sistemas lineares e de matrizes como se observa em (2). Assim, pode-se observar que esta escolha de um vetor que corresponda a um sistema com solução poderá ser bastante exaustiva, se a atividade fosse realizada apenas com o auxílio de lápis e papel. Desta forma, por meio da experimentação e do dinamismo, como propõem Borba e Villarreal (2005), a tecnologia digital eleita para esta pesquisa assume bastante relevância, porque contribui para que o aluno tenha uma visão mais abrangente e possa exercitar diversas conjecturas. O uso de lápis e papel, neste caso, colabora no registro das descobertas realizadas pelo aluno no ambiente do GeoGebra 5.

Neste caso, o aluno, ao concluir que a escolha gera um sistema sem solução, deverá realizar uma nova escolha para o vetor V_3, até obter um sistema equivalente reduzido por linha que possui solução. Por exemplo:

$$V_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; obtendo\ o\ seguinte\ sistema \Rightarrow \begin{cases} 0.x_1 - 1.x_2 = -2 \\ 2.x_1 + 0.x_2 = 2 \\ -3.x_1 + 2.x_2 = 1 \end{cases}$$

Tal escolha, no ambiente GeoGebra 5, corresponde à obtenção da visualização igual ou equivalente à exposta na Figura 12.

Figura 13- Interface do GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora

Neste caso, é possível observar que “matriz2”, a matriz escalonada

proveniente da nova matriz M, foi obtida a partir da nova escolha do vetor V_3, o que o levaria a obter a seguinte matriz reduzida por linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} resultando\ no \\ seguinte\ sistema \\ equivalente \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1.x_1 + 0.x_2 = 1 \\ 0.x_1 + 1.x_2 = 2 \\ 0.x_1 + 0.x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases},$$

Na verdade, o processo de troca de valores objetiva permitir que os alunos tenham a possibilidade de reorganizar seus conhecimentos, de forma que, ao retornarem ao sistema original, possam obter a seguinte relação entre os vetores

$$x_1 \mathrm{V}_1 + x_2 V_2 = V_3 \quad \Longrightarrow \quad 1.\mathrm{V}_1 + 2.V_2 = V_3$$

Desse modo, o professor espera que os alunos concluam que a relação entre os vetores é a de combinação linear, de modo explícito.

Na resolução do item (c) o aluno deverá realizar as mesmas ações do item (b), observando que os coeficientes da combinação linear entre os vetores V_1, V_2, V_3 são preservados pela aplicação, ou seja, caso o aluno encontre um vetor V_3 de modo a obter a seguinte combinação:

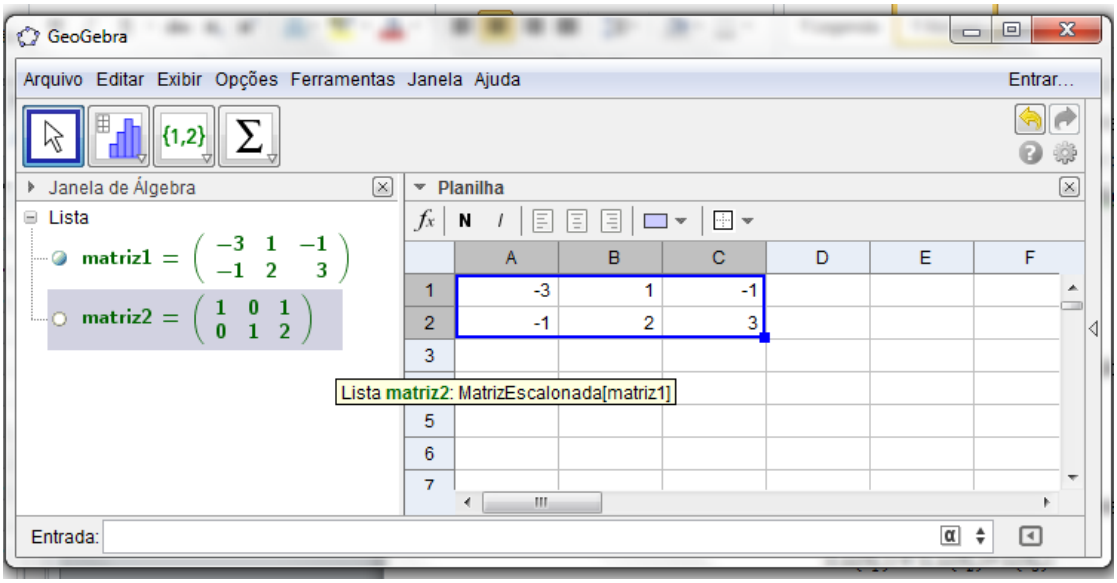
$$1.\mathrm{V}_1 + 2.V_2 = V_3$$

Ao calcular os devidos vetores $L(V_1)$, $L(V_2)$ e $L(V_3)$, ele deve obter a seguinte relação entre eles:

$$1.L(\mathrm{V}_1) + 2.L(V_2) = L(V_3)$$

Ao analisar estas relações, o aluno deverá observar que a estrutura da combinação é preservada pela aplicação L. Nesse momento, o aluno, possivelmente, deverá realizar a construção relativa à Figura 13 no GeoGebra 5.

Figura 14- Interface do GeoGebra 5 referente ao final da Atividade 1



Fonte: Elaborado pela autora

Neste momento, deve-se observar se o aluno obteve sucesso em notar a preservação da estrutura de combinação linear pela aplicação. Caso isto não tenha ocorrido, pode-se convidar o estudante a repetir o processo com outros vetores, de modo que venha a fazer outras comparações. Outra possibilidade seria solicitar que os estudantes trocassem os resultados, pois, é muito provável que eles tenham obtido combinações lineares (vetores) diferentes uns dos outros. Este procedimento contribuirá para que os alunos tenham uma quantidade maior de elementos observáveis, o que pode colaborar para o momento de validação de suas estratégias. Este procedimento também é favorecido pelo dinamismo da interface e suas possibilidades no campo da experimentação e da visualização.

No que diz respeito à segunda questão da atividade, o aluno deverá fazer uso de seus conhecimentos, que podem, inclusive, ter sido construídos durante o processo que culminou na resolução da primeira atividade, para determinar/decidir qual a natureza de cada aplicação apresentada, ou seja, deverá dizer se esta aplicação satisfaz ou não à característica observada na outra aplicação abordada na primeira questão. Para que o aluno inicie a dialética de formulação, deverá considerar vetores nos espaços envolvidos pela aplicação, como, por exemplo, a aplicação $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $L(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$. Nestas condições, o aluno poderá tomar os três vetores do $\mathbb{R}^2$, e, muito, provavelmente, utilizando os mesmos mecanismos tecnológicos da questão anterior, estabelecer a combinação linear entre os vetores. Por exemplo, tomando os vetores

$$V_1=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}, \quad V_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

o aluno poderá considerar um vetor $V_3=\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$ e chegar a relação

$$2\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

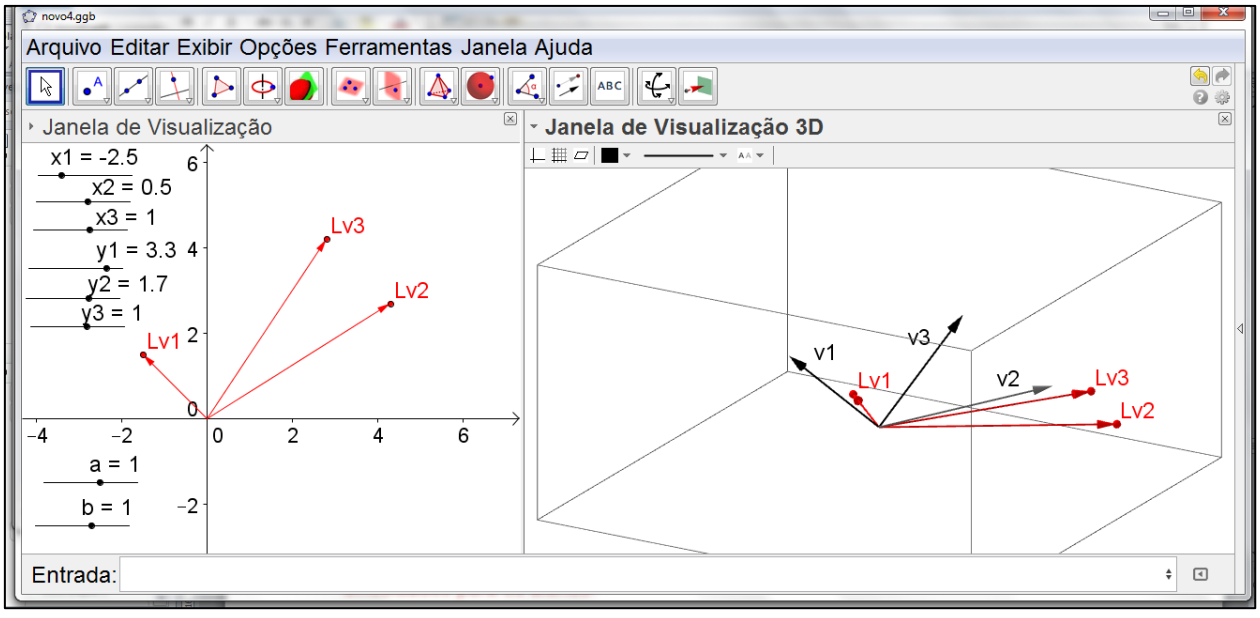
E, do mesmo modo, podendo encontrar a seguinte relação:

$$2.L(V_1)+1.L(V_2)=L(V_3)$$

Aqui, o aluno deveria concluir que a aplicação é linear, por preservar a mesma estrutura de combinação linear. Pode ocorrer de o estudante não chegar à conclusão correta. Uma possibilidade de erro, neste ponto, repousa no fato de o aluno, eventualmente, confundir a ordem na qual os vetores estejam combinados, isto é, tomar o vetor V_1 em função de V_2 e V_3, mas, ao considerar a aplicação atuando nos vetores, tomar a combinação de $L(V_3)$ em função de $L(V_2)$ e $L(V_1)$.

No que diz respeito ao ambiente GeoGebra 5, o mesmo possibilita que o aluno visualize a representação geométrica, como na Figura 14. Desta forma, os alunos poderão observar, desde outra perspectiva, a combinação linear dos vetores em diversas situações, nas quais poderá constatar a ação da transformação L sobre os vetores. Consequentemente, o aluno poderá associar tal visualização à da combinação linear entre os vetores, de modo a validar suas conjecturas.

Figura 15 - Visualização geométrica da atividade 1



Fonte: Elaborado pela autora

De um modo geral, no estágio de validação desta situação, espera-se que o aluno articule seus conhecimentos, no intuito de justificar, e eventualmente provar seus argumentos, o que caracterizaria a construção dos conhecimentos em certa medida. Do ponto de vista da TSD, o professor espera que as ações dos alunos venham a contribuir diretamente para a aprendizagem, por meio das observações e estratégias construídas para resoluções das atividades durante todas as fases anteriores, e, ainda, que as aprendizagens ocorram, primordialmente, por meio de retroações com o meio. Neste sentido, as questões foram construídas de modo a servir de base para a realização das fases seguintes do estudo, a fim de ajudar a dar significado às ações dos alunos, em cada etapa de suas resoluções.

Em um momento seguinte, o da institucionalização, o professor (no caso, a pesquisadora) se responsabiliza pela generalização da definição de transformação linear, juntamente com suas propriedades, tomando por base o trabalho realizado pelos sujeitos. Este deve ser o momento no qual o aluno se apropria do conhecimento envolvido na situação de aprendizagem, do ponto de vista do estatuto formal do conhecimento matemático. Evidentemente, o êxito em semelhante apropriação depende de toda a trajetória, e não apenas da vontade da pesquisadora.

3.4.2 Descrição da atividade 2

As etapas desta atividade foram construídas com o intuito de explorar as propriedades das transformações lineares. Durante a atividade, as duplas, inicialmente, deveriam construir, no ambiente GeoGebra 5, um quadrado a partir de seus vértices. Por meio de multiplicações matriciais e dos movimentos produzidos no *software*, os alunos deveriam determinar as transformações envolvidas.

Atividade 2

a) Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde -5 ≤ α ≤ 5, B = $\begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde 0 ≤ α ≤1 80, C = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde -4 ≤ c, b ≤ 4 e $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Construa, no ambiente GeoGebra 5, três arquivos diferentes, nos quais:

a) Em cada arquivo, construa a matriz M e a figura cujos vértices são formados pelas colunas de M. Determine e descreva esta figura;
b) No primeiro arquivo, construa as matrizes A e AM, no segundo B e BM e no terceiro C e CM;
c) No ambiente GeoGebra 5, em cada um dos arquivos criados, construa a figura cujos vértices são formados pelas colunas das matrizes de AM, BM e CM. Descreva, com suas palavras, o que cada matriz A, B e C faz com relação à figura construída a partir das colunas de matriz M, no âmbito da álgebra linear;
d) Com relação às matrizes A, B e C, escreva AX, BX e CX, com X=$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e escreva as funções que podem ser representadas por AX, BX, CX.
e) Responda: as funções acima descritas preservam a combinação linear?

3.4.2.1 Análise da segunda atividade

Esperava-se, ao observar as ações realizadas pelas duplas ao montarem suas estratégias para resolver a atividade, que os alunos entendessem a representação matricial de uma transformação linear por meio de atividades simples no GeoGebra 5. Seria importante, deste modo, que os alunos associassem as representações matricial e geométrica para a construção deste conceito.

O primeiro passo da questão possui um caráter meramente organizacional, por meio do qual as duplas deveriam criar arquivos distintos que permitissem responder aos questionamentos dos itens posteriores.

Construídos os arquivos, o item (a) determina que as duplas, em cada um deles, construam uma figura por meio da matriz M, figura esta que, se adequadamente feita, deve corresponder a um quadrado. Dando continuidade à atividade, no item (b), em cada um dos arquivos, as duplas deveriam adicionar duas novas matrizes, sendo que uma delas deveria ser uma entre as matrizes A, B ou C, e a outra corresponderia ao resultado do produto de uma destas últimas matrizes pela matriz M. Este momento tem por objetivo principal proporcionar ao aluno realizar o confronto com aplicações lineares mais comuns do seu meio acadêmico, por meio de uma estrutura matricial. Na verdade, neste momento, esperava-se que o

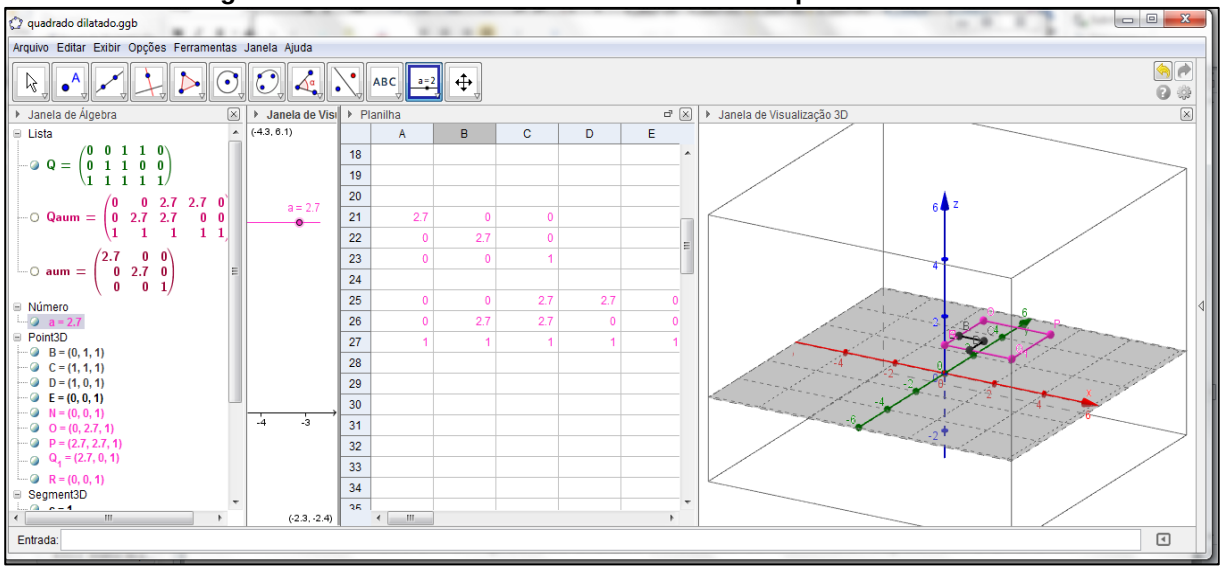
aluno alcançasse, de modo autônomo, a compreensão da relação entre uma transformação linear e sua representação matricial.

No que diz respeito à matriz,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ao realizar a multiplicação AM, os alunos são levados também a esboçar este resultado no espaço $\mathbb{R}^3$, e, desta forma, devem observar que o quadrado original é transformado em um quadrado dilatado de acordo com um valor *a* específico. O ambiente GeoGebra 5, neste momento, tem especial relevância, pois possibilita ao aluno fazer uso do comando “Controle Deslizante” (ou “Seletor”) para uma variável *a*, vista aqui como um coeficiente de dilatação do quadrado original, o que permitirá que o mesmo realize uma animação da figura obtida pela multiplicação matricial AM, ou seja, na medida em que aumenta ou diminui o valor de *a*, também aumentam ou diminuem as dimensões do quadrado. Consequentemente, esta ação permite que o aluno tenha uma visão mais geral, dinâmica e múltipla do efeito criado pela ação da matriz A sobre os vetores provenientes das colunas da matriz M, como se pode observar na Figura 15. Destarte, o propósito maior deste procedimento é construir um ambiente no qual o aluno possa criar inferências e interpretações acerca das ações da matriz A sobre os vetores colunas de M, proporcionando experimentações múltiplas e visualizações dinâmicas neste sentido.

Figura 16- Interface do GeoGebra referente ao quadrado dilatado



Fonte: Elaborado pela autora

Para que os alunos tenham uma melhor percepção de suas construções, o

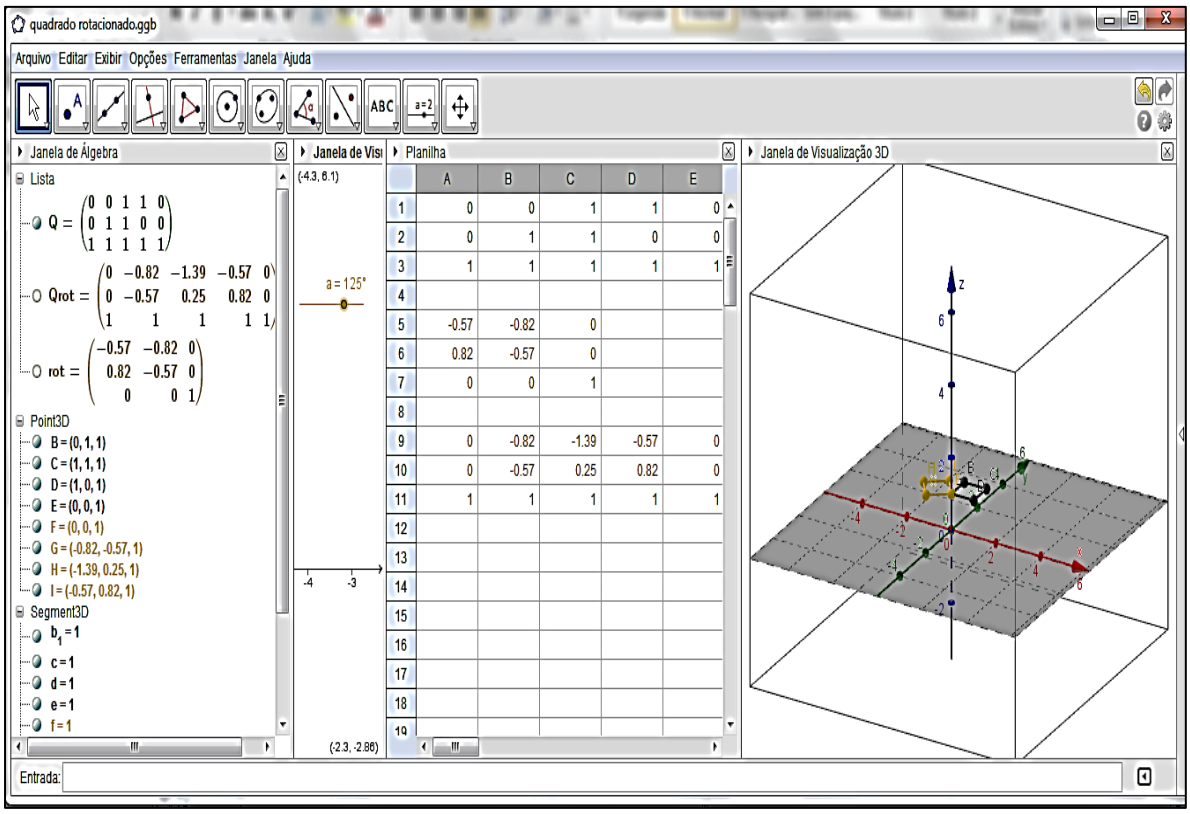
ambiente GeoGebra 5 permite que os resultados correlacionados sejam marcados com o mesmo tom de cores nas diferentes janelas, o que possibilita uma melhor visualização do objeto, como é possível perceber na Figura 15, na qual a matriz que corresponde à dilatação do quadrado possui a mesma cor do quadrado dilatado construído na janela 3D.

Já no arquivo construído para a matriz B, que corresponde à estrutura,

$$\begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } 0 \leq \alpha \leq 180$$

assim como no arquivo anterior, a utilização do seletor pelo alunos servirá para fornecer-lhes condições de montagem de estratégias que contribuam para validação de suas concepções e formulações, acerca da transformação linear de rotação em torno do eixo *z*. Neste momento, os alunos deverão construir no arquivo a matriz BM, que, com auxílio do seletor *a* criado, permitirá observar que, a cada mudança de "*a*" corresponde uma transformação linear de rotação diferente, constituindo, assim, uma gama múltipla de possibilidades de visualizações constituídas em torno de distintos exemplos, o que pode ser observado na Figura 16. Deve-se enfatizar, ainda, que essa característica seria muito difícil de se obter em um ambiente que contasse apenas com lápis e papel.

Figura 17 - Interface do GeoGebra 5 referente ao quadrado rotacionado



Fonte: Elaborado pela autora

No terceiro e último arquivo criado, os alunos deverão acrescentar a estrutura matricial assim definida:

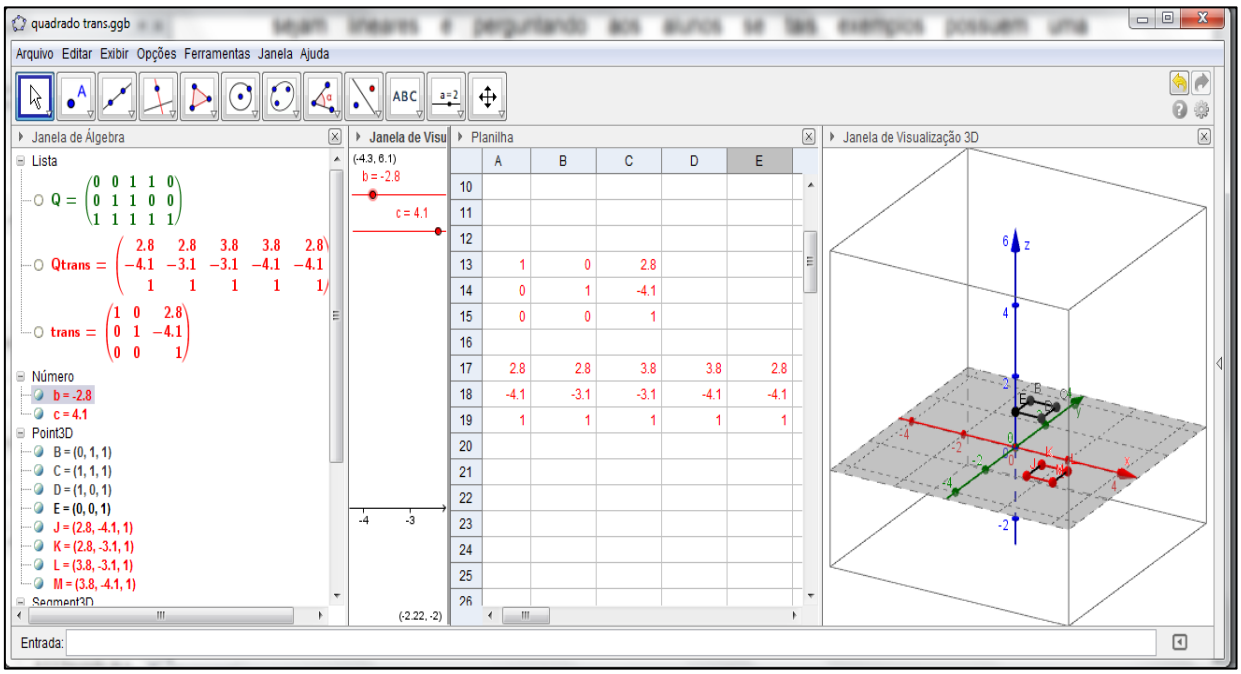
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } -4 \leq c,b \leq 4.$$

Da mesma forma que nas construções anteriores, os alunos devem constituir a matriz CM, de modo a constatar, no ambiente GeoGebra 5, a partir da figura proveniente das colunas desta mesma matriz CM, que a ação de C em M é a de transladar a figura descrita por M, a partir de um ponto determinado. Consequentemente, a partir destas construções, o professor espera que o aluno associe a ação da matriz C sobre a matriz M como a ação de uma transformação linear responsável pela transladação de vetores no espaço. Além disso, com respeito a este momento, o professor espera que, no instante da institucionalização, surjam discussões acerca do fato da translação descrita no plano não descrever uma transformação linear, observando que o uso de coordenadas homogêneas influencia na construção da linearidade desta estrutura. Particularmente, se

necessário, devem ser propostos questionamentos que levem os alunos a concluírem que a translação no plano não possui uma representação matricial.

A figura 17 mostra a interface do GeoGebra 5 relacionada à construção de um quadrado, juntamente com sua rotação e translação. O *software* possibilita observar um objeto bem como acompanhar sua evolução, no caso das transformações mencionadas, de modo dinâmico. Esta característica permite ter uma visão de como o produto matricial age sobre um determinado objeto. Além disto, esta construção possibilita que sejam reforçadas as ideias intuitivas construídas pelos alunos, de modo a estabilizar o conhecimento algébrico relativo ao conceito de transformação linear, como defendido por Molina e Oktaç (2007), quando tratam sobre o entendimento de modelos intuitivos que os alunos utilizam para a construção do conceito de transformação linear, em um contexto geométrico.

Figura 18- Interface do GeoGebra 5 referente à translação do quadrado



Fonte: Elaborado pela autora

Pode-se constatar, na Figura 17, que neste ponto, por meio do ambiente GeoGebra 5, o aluno tem a possibilidade de observar, de modo simultâneo, as construções em distintas representações, bem como intervir nas mesmas, em caráter experimental. Esta possibilidade pode servir de base a conjecturas acerca da translação do quadrado.

Posteriormente, no decorrer da questão, espera-se que aluno, no item (d),

consiga descrever algebricamente, por exemplo, a transformação de dilatação. Neste caso, os alunos deverão contar apenas com a atuação da matriz sobre um vetor arbitrário do espaço. Isto é, os alunos, fazendo uso de um ponto arbitrário do espaço, como (x,y,z), para realizar a multiplicação matricial, obterão, idealmente

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ z \end{bmatrix}$$

descrevendo, assim, a transformação de dilatação T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde $T(x, y, z) = (ax, ay, z)$. Consequentemente, o intuito deste item é fazer com que os alunos possam comparar a estrutura algébrica da transformação linear de dilatação com a dilatação construída a partir de uma estrutura matricial, agindo de modo análogo com relação às matrizes B e C.

Para concluir a atividade, no item (e), as expressões descritas no item (c) deverão ser indicadas como lineares. Aqui, espera-se que as conclusões do aluno sejam justificadas, utilizando os conhecimentos anteriormente mobilizados sobre matrizes, e, em particular, a propriedade distributiva das matrizes. Desta maneira, o aluno pode concluir que uma transformação que possui uma representação matricial é sempre linear. No entanto, caso o aluno conclua que as transformações por ele descritas na atividade são lineares por outros meios, como por exemplo, o conhecimento adquirido na atividade anterior, tal conclusão também será considerada válida.

No momento correspondente à fase de institucionalização da atividade, na qual se espera que o aluno consolide o saber trabalhado na situação de aprendizagem, a pesquisadora levanta discussões sobre a importância da existência da estrutura matricial para transformações descritas por eles na atividade, por meio de exemplos que não sejam lineares e perguntando aos alunos se tais exemplos possuem uma representação matricial. Outro conhecimento que se espera consolidar consiste no fato da propriedade distributiva ser inerente à estrutura matricial, o que confere à aplicação representada um caráter de linearidade. Isto é, o aluno deverá evidenciar que uma transformação que pode ser descrita matricialmente é linear. Além disso, o professor, neste contexto, se responsabiliza pela sistematização e generalização das propriedades envolvidas nesta atividade.

3.4.3 Descrição da terceira atividade

Esta atividade tem o objetivo de fazer com que cada dupla de alunos explore a importância da relação entre uma transformação linear e uma dada base. As duplas devem fazer uso de modificações dos valores que uma transformação linear assume em uma base – tomada como canônica – e, desse modo, observar e questionar sobre o que ocorre com a expressão da transformação para, consequentemente, concluir que a mesma depende dos valores assumidos nessa base. Deste modo, espera-se que a interface mediadora provida pelo GeoGebra 5 componha o espaço crítico de discussões por meio das quais as duplas tenham uma visão mais abrangente desta mudança da expressão da transformação em suas ações, de modo que, no momento da institucionalização, eles tenham uma compreensão mais fundamentada desta relação da base no âmbito de uma transformação linear, quanto à sua expressão propriamente dita.

Atividade 3

Sejam $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,1,0)$. Considere a transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = (a_1x + b_1y + c_1z,\ a_2x + b_2y + c_2z)$.

No ambiente GeoGebra 5, construa:

a) Os seletores $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$.
b) A expressão $T(x,y,z) = (a_1x + b_1y + c_1z,\ a_2x + b_2y + c_2z)$.
c) O vetor u_1 = T(e_1) utilizando os seletores construídos.
d) O vetor u_2 = T(e_2) utilizando os seletores construídos.
e) O vetor u_3 = T(e_3) utilizando os seletores construídos.

Em seguida:

a) Modifique os valores apenas de $u_1 = T(e_1)$ e explique o que ocorre com os parâmetros $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ na expressão de $T(x,y,z)$;
b) Modifique os valores apenas de $u_2 = T(e_2)$ e explique o que ocorre com os parâmetros $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ na expressão $T(x,y,z)$;
c) Modifique os valores apenas de $u_3 = T(e_3)$ e explique o que ocorre com os parâmetros $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ na expressão $T(x,y,z)$;
d) Determine uma matriz A de ordem 3 x 2, tal que:

a. $Ae_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $Ae_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $Ae_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

e) Determine uma matriz 3x2, tal que: $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \end{bmatrix}$.

f) Qual a relação entre as matrizes A e T? Justifique sua resposta.

g) Com base nos itens anteriores, explique qual a relação existe entre a transformação linear T e os vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, e_3=(0,0,1).

3.4.3.1 Analise da terceira atividade

Esta terceira atividade tem por objetivo que o aluno observe que uma transformação linear fica completamente determinada por seus valores em uma dada base, ou seja, ao modificar os valores da base, a expressão da transformação também será modificada. Para isto ele, inicialmente, considera a transformação linear:

$$T(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z,\ a_2x + b_2y + c_2z) \qquad (1)$$

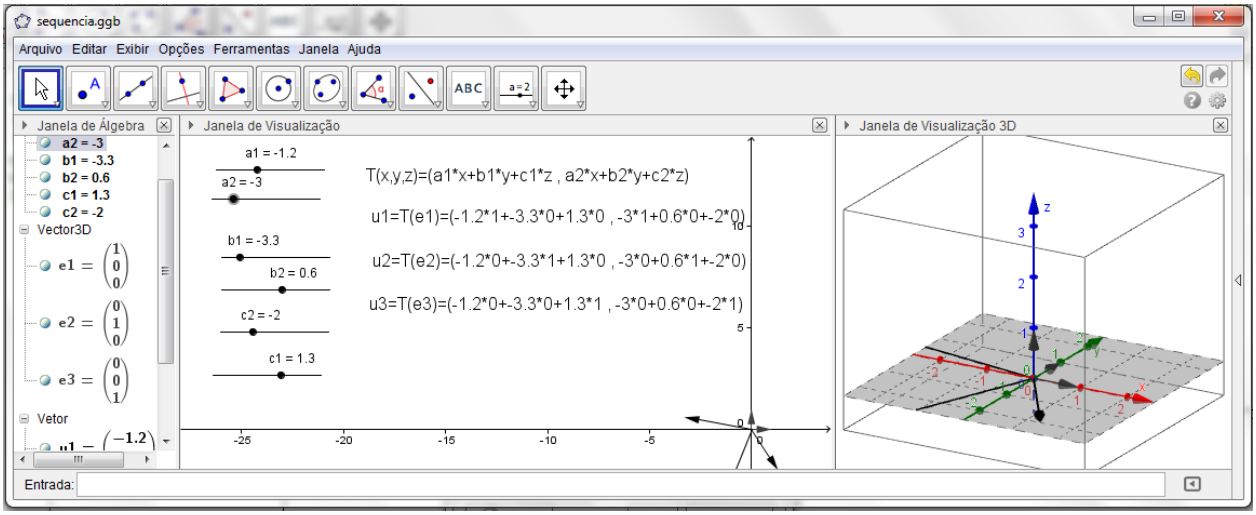
Nessa primeira construção, para que tenham uma percepção adequada, os alunos são levados a executá-la fazendo uso, no GeoGebra 5, da barra de fórmulas, por meio da qual constroem a expressão (1), em conjunto com a utilização de seletores para os coeficientes a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Também devem ser construídos seletores para os vetores $u_1 = T(e_1)$, $u_2 = T(e_2)$, $u_3 = T(e_3)$.

Portanto, em relação à transformação mencionada no item 1, o aluno deve obter o valor $(a_1,\ a_2)$ para $T(e_1)$ e concluir que o valor $T(e_1)$ dependerá dos valores dos coeficientes da variável x e que, ao modificar o valor $T(e_1)$, por exemplo para o vetor (2,5), os coeficientes a_1, a_2 de x são modificados também, o que servirá para confirmar eventuais conjecturas. Consequentemente, será possível perceber que os demais coeficientes não serão influenciados por essa modificação. Espera-se que, de igual forma, o aluno venha a constatar, no item (2), que o vetor e_2 deverá atribuir o valor $(b_1,\ b_2)$ para $T(e_2)$, do que poderá concluir que seu valor dependerá do valor dos coeficientes que acompanham a variável y e que os valores dos parâmetros a_1, c_1, a_2, c_2 não influenciaram neste resultado; ao modificar o valor $T(e_2)$ para (0,3), por exemplo, terá a expressão T modificada. Do mesmo modo, o aluno, no item (3), considerando o vetor e_3, deverá obter o valor $(c_1,\ c_2)$ para $T(e_3)$, de forma

a poder concluir que seu valor dependerá do valor assumido para os coeficientes c_1, c_2 da variável z. De um modo geral, nos três primeiros itens da atividade 3, o aluno deverá observar que a transformação linear T depende, exclusivamente, dos valores assumidos por ela na base canônica $\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$.

Pode-se observar, na Figura 18, uma possível construção desta atividade na interface do GeoGebra 5: uma importante característica está na possibilidade de se construírem os parâmetros utilizando seletores. Apenas para destacar, um seletor é uma ferramenta que possibilita ao usuário modificar os valores dos vetores, bastando arrastar o controle dentro de um determinado limite, o qual também pode variar de acordo com a atividade. Essa possibilidade é importante, pois permite ao aluno observar vários exemplos da mesma construção (experimentação e visualização); além disso, poderá observar a mudança na expressão algébrica equivalente, fator este que pode ser importante para a montagem de suas conjecturas. De forma geral, não seria possível observar tais aspectos com dinamismo equivalente em um ambiente tradicional de sala de aula.

Figura 19 - Interface do GeoGebra 5 referente a terceira atividade



Fonte: Elaborado pela autora

Na questão 4, o professor espera que o aluno, por meio de observações, monte conjecturas e estratégias coerentes e responda que a definição da transformação linear T dependerá dos valores atribuídos aos vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, e_3=(0,0,1). Além disso, espera que o aluno, dentro de suas observações, atente para o fato de que os vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, e_3=(0,0,1) compõem uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$, ou seja, que qualquer

vetor do espaço pode ser descrito como combinação linear deles, e, deste modo, fortalecer suas argumentações.

Com relação ao item 5, o aluno deve apresentar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Nesta sequência, deve obter $Ae_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $Ae_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $Ae_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, o que o levará a notar que as colunas da matriz A correspondem exatamente ao valor da transformação linear T na base $\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$, o que contribuirá, também, para obtenção de uma representação matricial de uma transformação linear.

No item 6, o aluno deverá, por meio da simples observação de operações matriciais, apresentar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

a qual, como se viu anteriormente, corresponde à representação matricial da transformação linear T.

Concluída a apresentação referente às atividades da sequência, resta descrever o processo ligado ao trabalho dos sujeitos da pesquisa, por meio das análises.

CAPÍTULO QUATRO

ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo é dedicado à análise das atividades, ao longo das quais os alunos, de modo a formarem conjecturas e estratégias para obterem respostas para os problemas inseridos nas sequências didáticas, trabalharam em duplas ao longo das sessões estruturadas na forma já explicitada no capítulo anterior.

Em relação aos conhecimentos necessários para consecução das atividades, o quadro 2 indica quais seriam e em que momento os sujeitos teriam contato com eles em suas trajetórias escolares. Vale lembrar, conforme já se indicou ao longo deste trabalho, que alguns conhecimentos poderiam ter sido consolidados no Ensino Médio e os licenciandos, potenciais futuros professores de Matemática, poderão ser responsáveis pelos processos de ensino que os contemplem. No caso daqueles conteúdos não arrolados no currículo da escola básica, entende-se que o conhecimento relativo a eles é útil quando se pensa que o professor, mesmo não o abordando diretamente, deve conhece-lo para melhor trabalhar com os conteúdos que lhe sirvam de base, como bem lembraram Machado e Bianchini (2010).

Quadro 2 - Elementos básicos que servem de base ao conceito de transformação linear

	Ensino Médio	Geometria Analítica	Parte inicial de Álgebra Linear
Matrizes	• Introdução e notação geral; • Denominações especiais (matriz linha, matriz coluna, matriz quadrada, matriz nula, matriz diagonal, matriz identidade, matriz transposta, etc.); • Igualdade de matrizes; • Operações envolvendo matrizes (adição, subtração, multiplicação de um número real por uma matriz, multiplicação de matrizes); • Propriedades das operações, matriz inversa.		• Revisão e generalização conhecimento adquirido no ensino médio.
Vetores	• Reta orientada, segmento orientado, segmento nulo, segmentos opostos, medida de um segmento; • Direção e sentido, segmentos equipolentes, propriedades da equipolência; • Vetor, vetores iguais, vetor nulo, vetores opostos; • Vetor unitário, versor, vetores colineares, vetores coplanares; • Soma de vetores, propriedades da soma de vetores, diferença de vetores, produto de um escalar por um vetor, módulo de um vetor, vetor unitário; • Produto escalar, propriedades do produto escalar, ângulo entre dois vetores, vetores ortogonais.	• Vetores: • Operações Vetoriais; • Sistemas de Coordenadas; • Produto Interno e Vetorial; • Produto Misto.	• Conhecimentos anteriores obtidos no ensino médio e na geometria analítica, de modo mais geral, acrescidos dos assuntos espaços vetoriais e subespaços.
Base e dimensão de um espaço vetorial			• Conceito Base e dimensão; • Base ordenada; • Mudança de base; • Coordenadas homogêneas.
Sistemas Lineares			• Sistemas de equações lineares; • Operações elementares; • Redução à forma escada; • Método de Gauss-Jordan.
Combinação linear de vetores			• Combinação linear de vetores.

Fonte: Elaborado pela autora

Esta pesquisa apresenta uma proposta de abordagem didática para o conceito de transformação linear, e propõe estratégias que permitam um diagnóstico acerca da aprendizagem do tema, tendo como base a modificação no contrato didático usual e o uso de tecnologias digitais (o GeoGebra 5, em particular). Do ponto de vista deste estudo, o contrato vigente consiste no fato de o aluno ir à sala de aula ouvir a fala do professor e reproduzir aquilo que é exposto, sem questionamentos e ou críticas construtivas que possam ajudá-los na aquisição e retenção do conhecimento. Portanto, propõem-se modificações que consistem no professor possibilitar ao aluno buscar a construção do conceito de transformações lineares, adequando-se, no âmbito das situações didáticas propostas, às novas regras vinculadas ao trabalho investigativo mediado por meio de tecnologias digitais. Esse novo contrato didático requer uma mudança na postura do professor/pesquisador, no que diz respeito às suas estratégias e no modo como ele aborda o conhecimento, organizando o meio e delegando ao aluno a responsabilidade das aquisições (Brousseau, 2008).

Recapitulando, neste contexto, em cada etapa da aplicação da sequência, o professor tem a responsabilidade de iniciar a sessão, estabelecendo algumas regras aos alunos. Primeiramente, para a realização das atividades, os alunos que se propuseram a participar da pesquisa foram agrupados em duplas, sem que houvesse comunicação entre elas. No decorrer dos procedimentos, todas as duplas registraram suas respostas nas folhas que foram distribuídas. Ao final do tempo de cada sessão (100 minutos), os protocolos foram recolhidos para posterior discussão de suas respostas com a pesquisadora, realizando o fechamento da atividade, no momento de institucionalização do conhecimento.

As duas primeiras sessões foram destinadas a avaliar e, se possível, ampliar a fluência dos sujeitos em relação às ferramentas necessárias às atividades no *software* GeoGebra 5. Foram atividades do tipo “seguir roteiros”, que priorizavam duas frentes, já destacadas por Oliveira (2013): a exploração dos elementos da interface e a apropriação da lógica relativa ao uso do *software*. Delas, se pode perceber que os sujeitos não tiveram dificuldades em compreender o uso técnico das funcionalidades, bem como a lógica de correlação entre o conhecimento matemático necessário e as ferramentas[9].

[9] Atividades semelhantes às propostas nestas sessões foram explicadas no capítulo um deste trabalho.

Com relação aos sujeitos da pesquisa, foram observadas quatro duplas dentro de um universo de 20 alunos. Tais duplas foram analisadas por terem sido as únicas que participaram integralmente de todas as atividades aplicadas em sessões distintas (cinco ao todo). Ainda, no intuito de realizar uma análise mais pertinente, em relação aos objetivos estabelecidos para esta investigação, foram instituídas as seguintes categorias:

a) Correlação entre a fluência no uso da interface provida pelo GeoGebra 5, as possibilidades de experimentação/visualização/dinamismo e a produção de aprendizagens sobre o tema “transformações lineares”;
b) Correlação entre a organização didática por meio de sequências planejadas, a partir da lógica da TSD e a produção das aprendizagens sobre o tema “transformações lineares”.

4.1 Análise da atividade 1

Essa atividade deveria possibilitar que o aluno utilizasse vetores diferentes que fossem ou não escritos como combinações lineares de outros dois, mobilizando, assim, conhecimentos anteriores para a construção de um novo conhecimento. Além disso, a atividade possibilitaria que o aluno observasse a importância da utilização da tecnologia digital, por meio de características como visualização e experimentação. A ideia de usar a tecnologia como ferramenta de ensino para a aprendizagem de transformações lineares pode ser encontrada, por exemplo em trabalhos como os de Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1999); Rosa et al., (2009); Gutiérrez e Lara (2006); e Sierpinska (2000).

Outra peculiaridade desta atividade diz respeito ao fato de que a mesma prioriza a abordagem do conceito de transformações lineares entre espaços de dimensões diferentes, como o recomendado por Molina e Oktaç (2007), autores que concordam com o fato de que esta atitude contribui para que os alunos percebam que as transformações lineares podem representar situações diferentes daquelas que ocorrem com movimentos simples.

Ressalta-se que esta pesquisa se utilizou da dinâmica que ocorre a partir de uma proposta de desenvolvimento diferenciado da atividade, ou seja, da simulação de um processo investigativo, no qual se institui um contrato didático diferente daquele que encaminha as aulas tradicionais para a apresentação do conteúdo de

modo pronto e acabado.

Assim, a sequência didática tem por objetivo fornecer subsídios para que os alunos formulem conjecturas que encaminhem a concepção do conceito de transformação linear, com o auxílio do software Geogebra 5, tomando por base seus conhecimentos prévios acerca de resolução de sistemas e combinação linear de vetores. A análise desta atividade, assim como a das demais, é realizada por duplas, como se vê a seguir.

4.1.1 Dupla A

Esta dupla, inicialmente, utilizou o Geogebra 5 para encontrar a relação entre os vetores $V_1=\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}$, $V_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$, V_3, o que gerou o protocolo de construção especificado na Figura 19.

Figura 20- Protocolo de construção da primeira parte da atividade (Dupla A)

N.	Nome	Definição	Comando	Valor
1	Número A2			A2 = 2
2	Número A1			A1 = 0
3	Número A3			A3 = -3
4	Número B1			B1 = -1
5	Número B2			B2 = 0
6	Número B3			B3 = 2
7	Número C1			C1 = 3
8	Número C2			C2 = 2
9	Número A9			A9 = 0
10	Número A10			A10 = 2
11	Número A11			A11 = -3
12	Número C9			C9 = -1
13	Número C10			C10 = 0
14	Número C11			C11 = 2
15	Lista V2	{{C9}, {C10}, {C11}}	{{C9}, {C10}, {C11}}	V2 = {{-1}, {0}, {2}}
16	Lista V1	{{A9}, {A10}, {A11}}	{{A9}, {A10}, {A11}}	V1 = {{0}, {2}, {-3}}
17	Número A15			A15 = 2
18	Número A16			A16 = 0
19	Número A14			A14 = 3
20	Número C3			C3 = -9
21	Lista M	{{A1, B1, C1}, {A2, B2, C2}, {A3, B3, C3}}	{{A1, B1, C1}, {A2, B2, C2}, {A3, B3, C3}}	M = {{0, -1, 3}, {2, 0, 2}, {-3, 2, -9}}
22	Lista Mescalonada	MatrizEscalonada[M]	MatrizEscalonada[M]	Mescalonada = {{1, 0, 1}, {0, 1, -3}, {0, 0, 0}}
23	Número C14			C14 = 3
24	Número C15			C15 = 2
25	Número C16			C16 = -9
26	Lista V3	{{C14}, {C15}, {C16}}	{{C14}, {C15}, {C16}}	V3 = {{3}, {2}, {-9}}
27	Texto texto1			"O sistema AX=B tem solução"

Fonte: Dados da pesquisa

O acerto parcial nas repostas apresentadas por esta dupla, conforme relato a seguir, revelou a importância do planejamento das atividades a partir da dinâmica proposta pela TSD. Ainda que o problema proposto representasse uma abordagem inédita para os estudantes, característica de um *milieu* antagônico, em diversos momentos foi possível observar que as discussões ao longo das dialéticas eram guiadas pelas intervenções feitas a partir da interface do *software.* Os alunos admitiram dificuldades em responder aos questionamentos feitos, ainda que de forma limitada, sem a manipulação dos elementos, a partir das entradas de comando e da visualização dos resultados na janela de álgebra do programa. Da mesma forma, o conhecimento prévio relativo aos sistemas lineares e combinação linear de vetores foi mobilizado, também em razão das características dadas à atividade pela intermediação proporcionada pelo GeoGebra 5. O Quadro 3 destaca as correlações entre os elementos destacados.

Quadro 3- Análise esquemática da primeira atividade - Dupla A

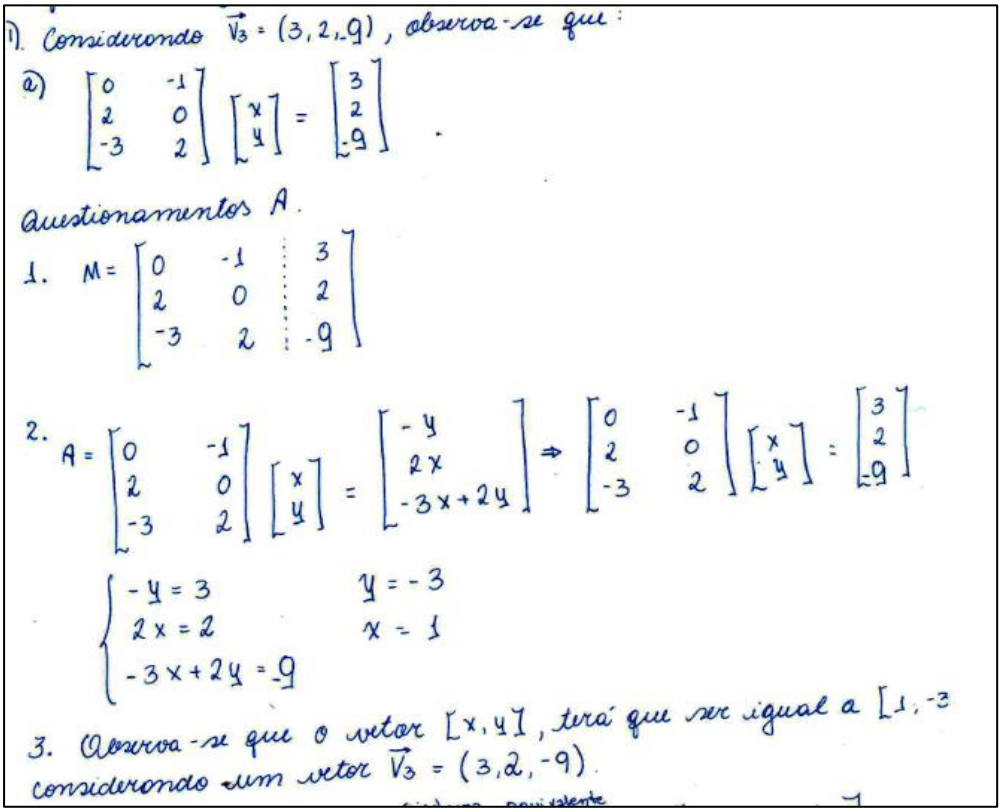
Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Tentativas de operacionalizar propostas de resolução: rascunhos de possíveis matrizes e vetores.	*Ação*	Experimentações com uso da interface que permitissem mobilizar o conhecimento prévio (sistemas lineares, combinação linear de vetores). Observação das tentativas com diferentes valores e os efeitos no GeoGebra 5. Debates a partir da visualização dos efeitos na janela algébrica do *software*.
Decisão pela constituição específica das matrizes e dos vetores; proposta de respostas às questões que pediam conceitos e relações entre conceitos.	*Formulação*	
Verificação do que chamaram de "coerência das respostas", por meio do que consideraram saber consolidado sobre o tema.	*Validação*	Visualização das construções, permitindo que a interface do GeoGebra 5 fosse utilizada para verificar e certificar as propostas da dupla.

Fonte: Dados da pesquisa

Em que pesem os progressos apresentados pela dupla na construção de respostas às atividades e do uso adequado do *software*, de acordo com o exposto na Figura 20, as respostas mostraram que os alunos se preocuparam mais com o valor numérico que deveriam apresentar, do que com o que tal valor realmente significava. Ou seja, na resolução da questão, quer nos debates ou nos registros escritos, pode-se observar que os sujeitos encontram o valor dos coeficientes

procurados, referentes à combinação linear entre os vetores, mas, em momento algum da questão, ficou evidente que estes valores encontrados fazem referência a tal combinação, isto é, não fica explícito se o vetor V_3 é escrito ou não em função dos outros dois vetores – resultados semelhantes, relacionados à linguagem algébrica e do chamado "discurso de prática" também foram descritos em Sierpinska (2000). Outro fator que pode também ter contribuído para esta limitação é a própria desorganização que a dupla apresenta em sua escrita, que pode ser observada nos protocolos relativos às Figuras de 20, 21, 23 e 24, nos quais fica claro que a dupla confunde as notações de matriz e sistema, tornando difícil a compreensão de seus resultados. Como se pode observar, os alunos encontraram os valores x = 1 e y =-3, mas não especificam a estrutura $V_3 = xV_1 + yV_2$, isto é, $V_3 = V_1 - 3V_2$.

Figura 21- Resposta da primeira parte da atividade – Dupla A

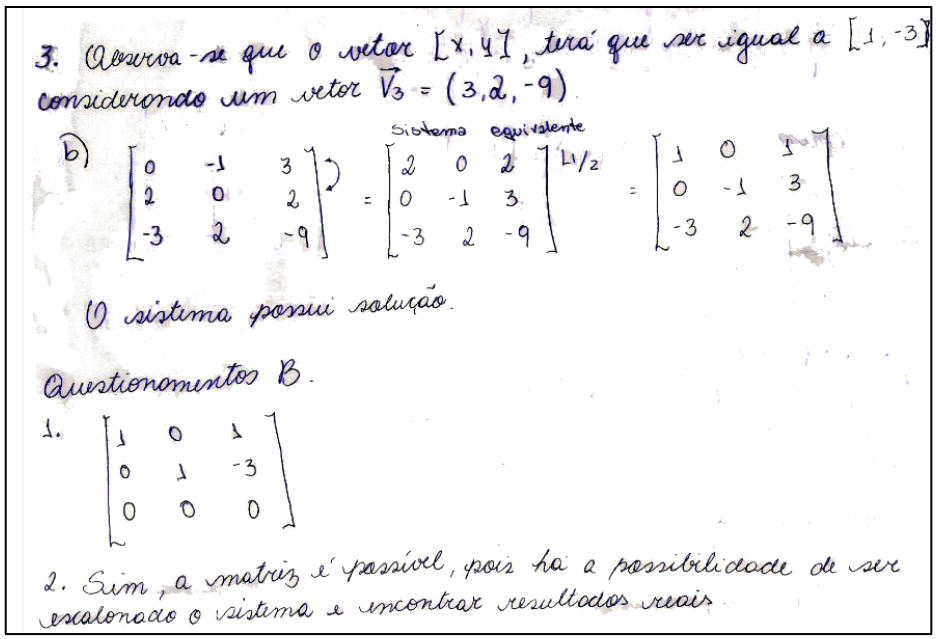


Fonte: Dados da pesquisa

Como já mencionado, pode-se observar na Figura 20 que os sujeitos apresentam certo descuido em desmembrar o sistema linear, como na tentativa de estabelecer um modelo intuitivo (Molina e Oktaç, 2007). No entanto, conseguem descrever corretamente o sistema proveniente da matriz aumentada M. Não fica claro, porém, se a dupla percebeu que a solução do sistema descreve uma relação

de combinação linear entre os vetores V_1, V_2 e V_3, como exposto na Figura 21. Para enfatizar este fato, chama a atenção a resposta dada pela dupla: "– Observa-se que o vetor [x,y] terá que ser igual a [1,-3]". Neste caso, a dupla confunde a solução com um vetor, ou seja, mostra uma dificuldade conceitual. Isto pode ocorrer, pois os alunos da dupla A, em sua descrição, apresentam uma maior preocupação por verificar as questões numéricas que envolvem a atividade, justamente como indicado por Molina e Oktaç (2007). Esta observação também indica que os sujeitos, aparentemente, se preocupam mais em dar uma resposta, do que entender o que ela realmente representa. Isso também pode ser evidenciado quando a dupla responde o item b da primeira atividade (Figura 21), onde descreve os passos do escalonamento. É possível perceber que os alunos envolvidos apresentam certa dificuldade conceitual com relação a combinação linear, ainda que tenham conseguido, em sua trajetória investigativa, atingir, com auxílio do GeoGebra 5, alguma fluência em relação aos cálculos empregados. Tal fato, consequentemente, impede a conclusão correta na resposta final.

Figura 22– Resposta do item b, primeira atividade – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Continuando a atividade, a dupla construiu outro arquivo no GeoGebra 5 que gerou, obviamente, outro protocolo de construção. Este novo protocolo, como mostra a Figura 22, diz respeito à construção do sistema relacionado à matriz aumentada [C|D] = [L(V_1), L(V_2), L(V_3)], cujas colunas dizem respeito aos valores obtidos por meio da aplicação L dos vetores V_1, V_2, V_3, que geraram um sistema possível na

primeira parte da atividade.

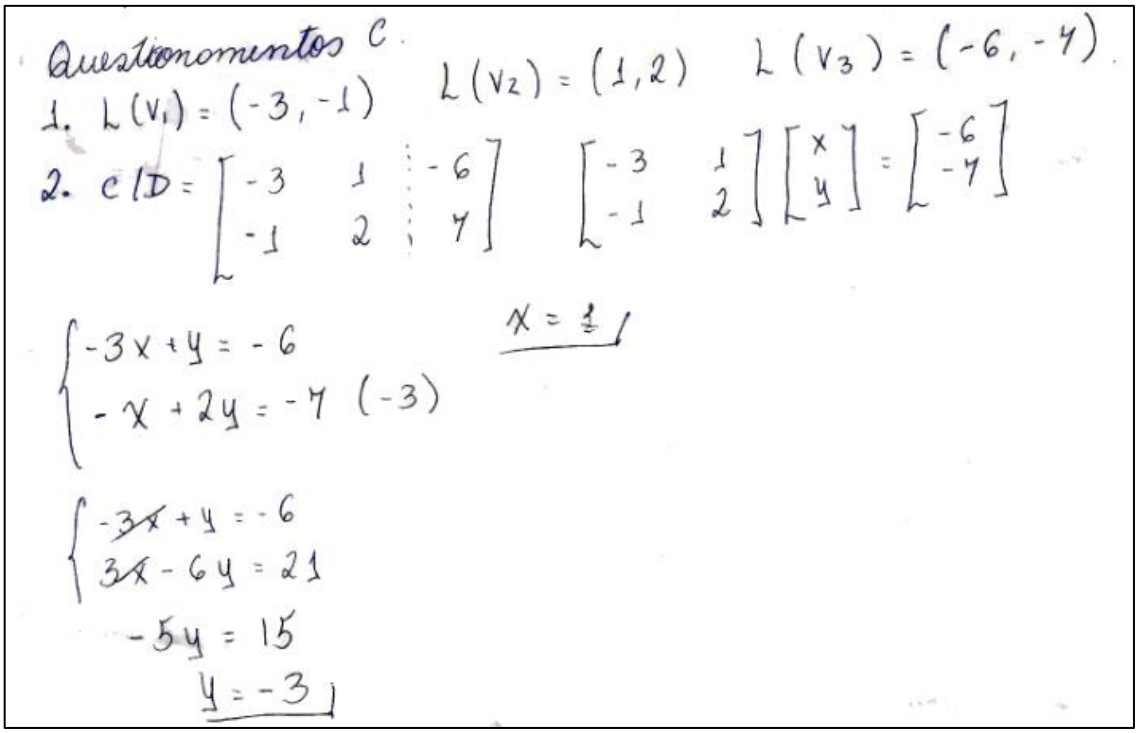
Figura 23 - Protocolo de construção da segunda parte da atividade 1 – Dupla A

N.	Nome	Definição	Valor
1	Número D12		D12 = 3
2	Número D13		D13 = 5
3	Número A1		A1 = -3
4	Número A2		A2 = -1
5	Lista Lv1	{{A1}, {A2}}	Lv1 = {{-3}, {-1}}
6	Número A4		A4 = 1
7	Número A5		A5 = 2
8	Lista Lv2	{{A4}, {A5}}	Lv2 = {{1}, {2}}
9	Número A8		A8 = -6
10	Número A9		A9 = -7
11	Lista Lv3	{{A8}, {A9}}	Lv3 = {{-6}, {-7}}
12	Número A12		A12 = -3
13	Número A13		A13 = -1
14	Número B12		B12 = 1
15	Número B13		B13 = 2
16	Número C12		C12 = -6
17	Número C13		C13 = -7
18	Lista CD	{{A12, B12, C12}, {A13, B13, C13}}	CD = {{-3, 1, -6}, {-1, 2, -7}}
19	Lista EscAD	MatrizEscalonada[CD]	EscAD = {{1, 0, 1}, {0, 1, -3}}

Fonte: Dados da pesquisa

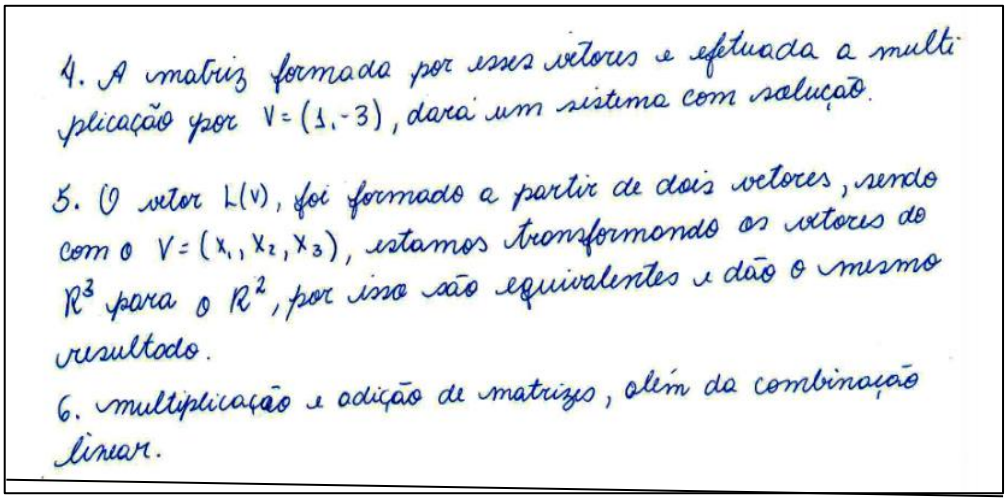
Em relação à segunda questão, os sujeitos, apesar de ainda apresentarem notável desorganização, ao assinalarem as respostas no papel, obtiveram respostas corretas, como pode ser visto na Figura 23. A dupla, no fechamento da atividade, teve, inclusive, a oportunidade de defender suas respostas, justificando os valores x = 1 e y = -3, conforme assinalaram no protocolo exposto na Figura 24.

Figura 24 – Resposta da segunda parte da atividade 1 – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 25– Resposta final da atividade 1 – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Nas questões cujas respostas se encontram na Figura 24, esperava-se que os alunos ampliassem sua autonomia com respeito ao conceito de combinação linear entre vetores. Algum avanço neste sentido pode ser identificado, quando a dupla expõe sua resolução do item 5, respondendo que são obtidas as mesmas soluções para o sistema gerado pelos vetores V_1, V_2 e V_3 e para o sistema gerado pelos vetores $L(V_1)$, $L(V_2)$ e $L(V_3)$, mas sem especificar claramente que a

característica preservada pela aplicação L é a de combinação linear entre os vetores. No item 6, a dupla indica que as operações que envolvem a característica preservada por L são “multiplicação e adição, além da combinação linear”. Esta última análise pode fortalecer, ainda mais, a inferência feita anteriormente, com respeito às dificuldades conceituais acerca da combinação linear, pois, como se pode observar nessa última resposta, a dupla a considera como uma operação matemática.

Noutro contexto, esta analise pode se reportar às descrições feitas por Sierpinska (2000), com relação ao uso de interfaces digitais. Os resultados obtidos aqui, à semelhança daqueles exibidos pela pesquisadora mencionada, indicam progresso na construção do conhecimento, mas que se limitou à produção de respostas locais às questões, sem aprofundamento conceitual e sem mesmo evidenciar o caráter sistêmico do conhecimento necessário (matrizes, combinações lineares, transformações, etc.). A dupla A obteve um avanço limitado em relação à aprendizagem, na medida em que não apresentou uma utilização adequada do conceito de combinação linear para sustentar suas ideias.

4.1.2 Dupla B

Em sua utilização do *software* GeoGebra 5, a dupla B produziu um protocolo mais sucinto, se comparado com aquele apresentado inicialmente pela dupla A, conforme exposto na Figura 25.

Figura 26 - Protocolo de construção da primeira parte da atividade – Dupla B

N.	Nome	Definição	Valor	Legenda
1	Número A1		A1 = 0	
2	Número A2		A2 = 2	
3	Número A3		A3 = -3	
4	Número B1		B1 = -1	
5	Número B2		B2 = 0	
6	Número B3		B3 = 2	
7	Número C1		C1 = 2	
8	Número C2		C2 = -2	
9	Número C3		C3 = -1	
10	Lista M	{{A1, B1, C1}, {A2, B2, C2}, {A3, B3, C3}}	M = {{0, -1, 2}, {2, 0, -2}, {-3, 2, -1}}	
11	Lista M_1	MatrizEscalonada[M]	M_1 = {{1, 0, -1}, {0, 1, -2}, {0, 0, 0}}	

Fonte: Dados da pesquisa

Ainda que utilizando um número menor de comandos, a dupla B obteve um resultado equivalente à dupla A, o que demonstra maior fluência no uso da tecnologia em questão. Isso, porque os comandos adicionais empregados pelos colegas da dupla anterior apenas representaram uma forma menos “direta”, por assim dizer, para a construção de uma proposta de resolução – os elementos empregados são equivalentes.

O acerto nas respostas dadas pela dupla B também serve para indicar a relevância da dinâmica construída, a partir da proposta de que as atividades tivessem caráter investigativo. Também para estes estudantes o *milieu* apresentou características antagônicas. O GeoGebra 5 foi rapidamente apropriado pela dupla de estudantes em suas funções principais para a atividade, servindo de base material para a trajetória ao longo das interações discursivas que surgiram, durante as dialéticas típicas de uma situação didática. Os alunos deram grande destaque, em seu discurso, à possibilidade de manipular, experimentar e visualizar, aberta pelo GeoGebra 5. Também, com relação a esta dupla, foi possível perceber que recorreram ao patrimônio cognitivo armazenado anteriormente, no que se refere aos sistemas lineares e à combinação linear de vetores. O Quadro 4 indica as correlações entre os princípios teóricos assumidos nesta investigação, em relação à trajetória da dupla B.

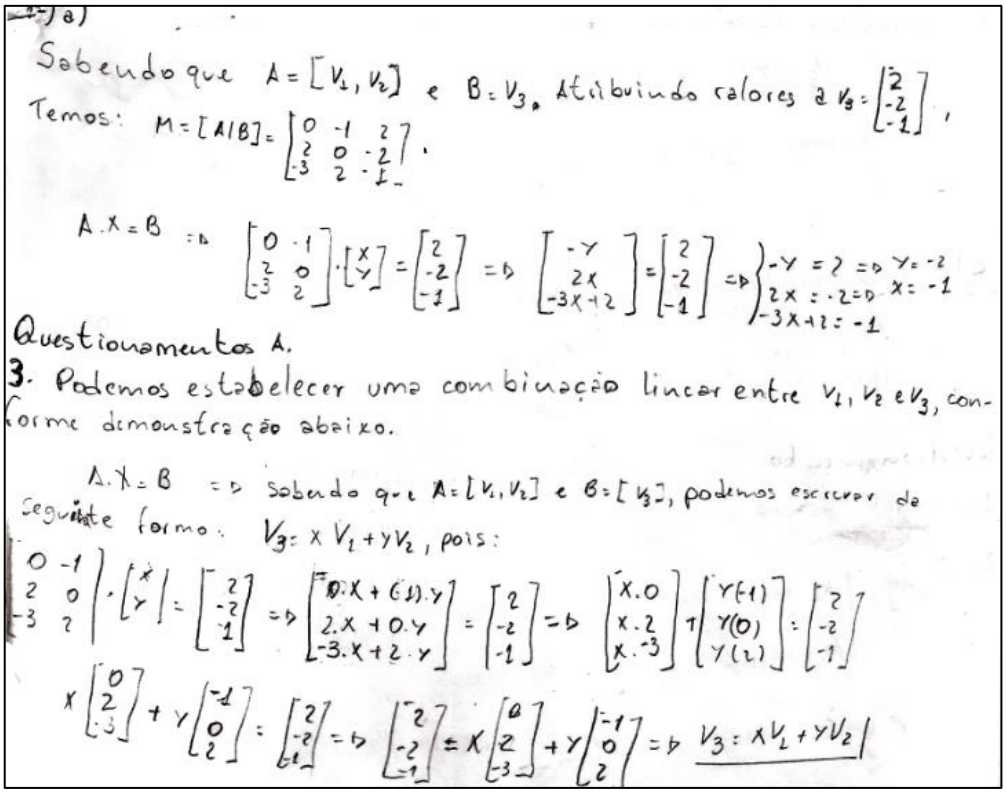
Quadro 4 - Análise esquemática da primeira atividade - Dupla B

<table>
<tr><th>Movimento dos sujeitos da pesquisa</th><th>Dialética (TSD)</th><th>Uso do GeoGebra 5</th></tr>
<tr><td>Construção ágil de propostas de resolução diretamente no software; propostas de resolução, com diferentes valores, são inseridas por meio da interface do GeoGebra 5.</td><td>Ação</td><td rowspan="2">Uso intensivo de experimentações e visualizações com o software. Exploração do caráter dinâmico da interface por meio de inúmeros exemplos (manipulação de parâmetros), o que permitiu mobilizar o conhecimento prévio (sistemas lineares, combinação linear de vetores). Debates a partir da visualização dos efeitos na janela algébrica do software.</td></tr>
<tr><td>Construção de matrizes e vetores de acordo com o conhecimento mobilizado; discussão e formulação de propostas de acordo com os conceitos, ainda que de forma incompleta.</td><td>Formulação</td></tr>
<tr><td>A interface do GeoGebra 5 é utilizada para verificar e certificar as propostas da dupla e refazê-las, retornando à formulação, quando necessário.</td><td>Validação</td><td>Mudança de valores e manipulação de construções.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora

Com relação ao estatuto do conhecimento matemático formal, pode-se dizer que as respostas apresentadas estão corretas e organizadas de forma mais coerente do que aquelas apresentadas pela dupla anterior. As respostas foram produzidas de forma mais rápida, também, o que indica um componente de segurança mais amplo em relação ao conhecimento do que nas respostas dos colegas da dupla A, e também maior fluência do uso da tecnologia, já que a quantidade de experimentações foi ainda maior do que aquela feita pelos colegas. A figura Figura 26 traz as considerações da dupla B.

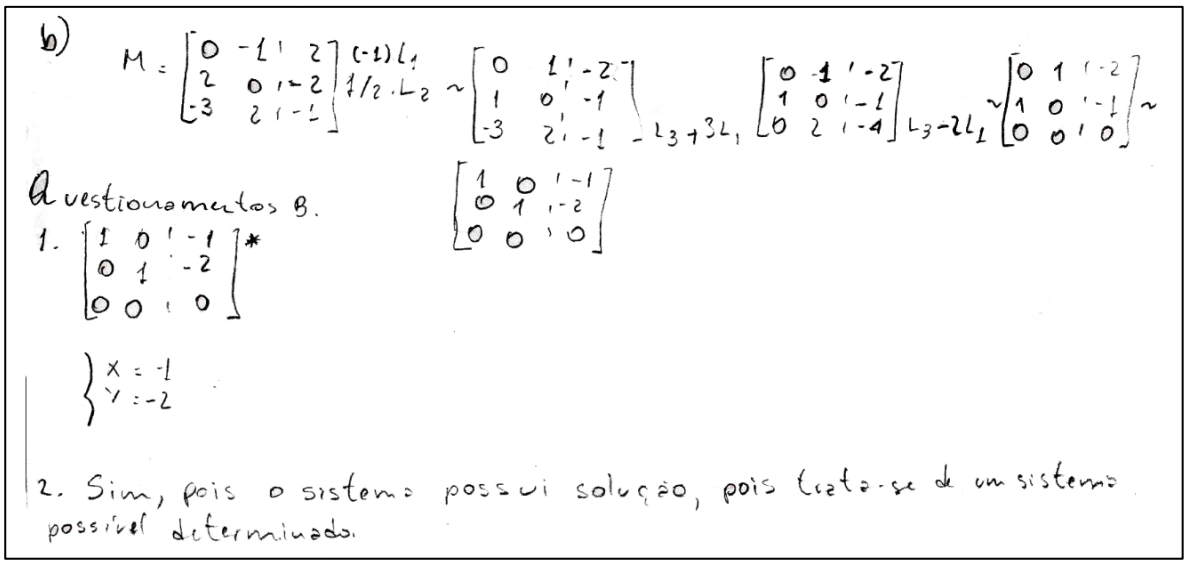
Figura 27– Resposta referente ao item a da primeira atividade – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

Desta forma, a dupla B apresenta um conhecimento prévio com relação à resolução de sistema linear bastante estruturado, o que colabora para a argumentação a respeito da relação que, possivelmente, existiria entre os vetores V_1, V_2 (fornecidos no enunciado da atividade) e o vetor V_3 determinado pela dupla. Com relação à atividade como um todo, o desempenho mais estruturado, no início das ações, colaborou para o acerto da proposta de resolução da dupla. Uma observação que ressalta do acompanhamento das anotações feitas deve ser destacada: a dupla transfere, de forma mais efetiva, a fluência adquirida em relação ao GeoGebra 5 para o papel, o que parece justificar, em grande parte, o caráter organizado e claro da exposição dos resultados, antes consolidados por meio da observação das propriedades dos objetos matemáticos disponíveis nas janelas do *software*. As Figuras 27 e 28 evidenciam as respostas.

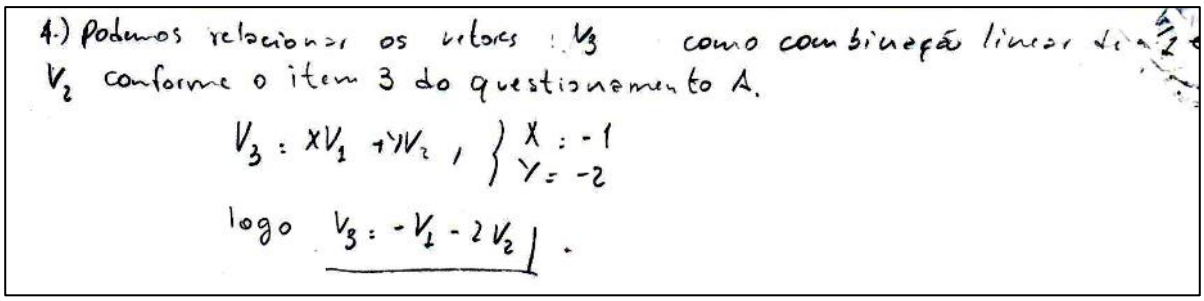
Figura 28– Resposta do item b da primeira atividade - Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

O item b, aliás, evidenciado nas mesmas figuras, indica que a dupla fez uso de seus conhecimentos prévios acerca de resolução de sistemas e de representações matriciais, permitindo que se infira sobre a existência efetiva de uma relação entre os vetores V_1, V_2 e V_3. Assim, a dupla B, com relação a este item, deu uma resposta adequada, do ponto de vista do acerto matemático.

Figura 29 - Conclusão sobre o item b da primeira atividade – Dupla B

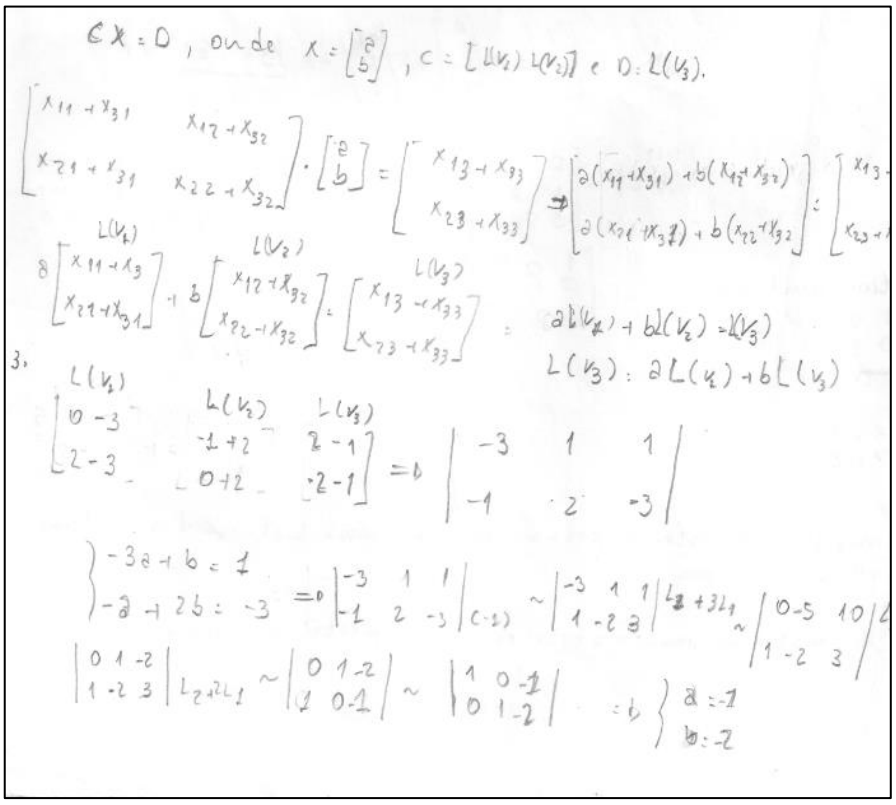


Fonte: Dados da pesquisa

Com relação à parte final da atividade, no item c, a dupla B apresentou alguma dificuldade em suas conclusões. Ainda que a dupla tivesse procurado deixar seus resultados bem documentados, como se pode observar na Figura 31, a conclusão feita sobre as operações, incluindo soma e multiplicação matricial, mas envolvendo ideias de transformações e combinação linear indevidamente, é feita de modo confuso, como mostra a Figura 29. Isto permite inferir que a dupla ainda apresenta alguma dificuldade conceitual decorrente da linguagem utilizada em álgebra linear, em consonância com as pesquisas visitadas ao longo desta

investigação, principalmente em Sierpinska (2000), Molina e Oktaç (2007) e Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1999). Ainda assim, parece claro que a maior parte da aprendizagem construída ao longo desta atividade valeu-se da trajetória investigativa apoiada pelas interações constituídas a partir de intervenções usando o *software*.

Figura 30- Resposta ao item c da primeira atividade - Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

Com respeito à utilização do ambiente GeoGebra 5 nesta atividade, a dupla B não apresentou qualquer dificuldade (Figura 30); de modo geral, foi utilizado mais efetivamente na parte inicial para obtenção de um vetor que pudesse estabelecer uma relação plausível com os vetores V_1 e V_2 fornecidos. Sem o uso deste *software*, muito provavelmente os alunos teriam desistido de continuar a atividade, em função do fato de a mesma envolver um conteúdo em termos gerais desconhecidos para os alunos e de ele ser bastante abstrato – isto pode ser apurado a partir de afirmações feitas pelos próprios estudantes.

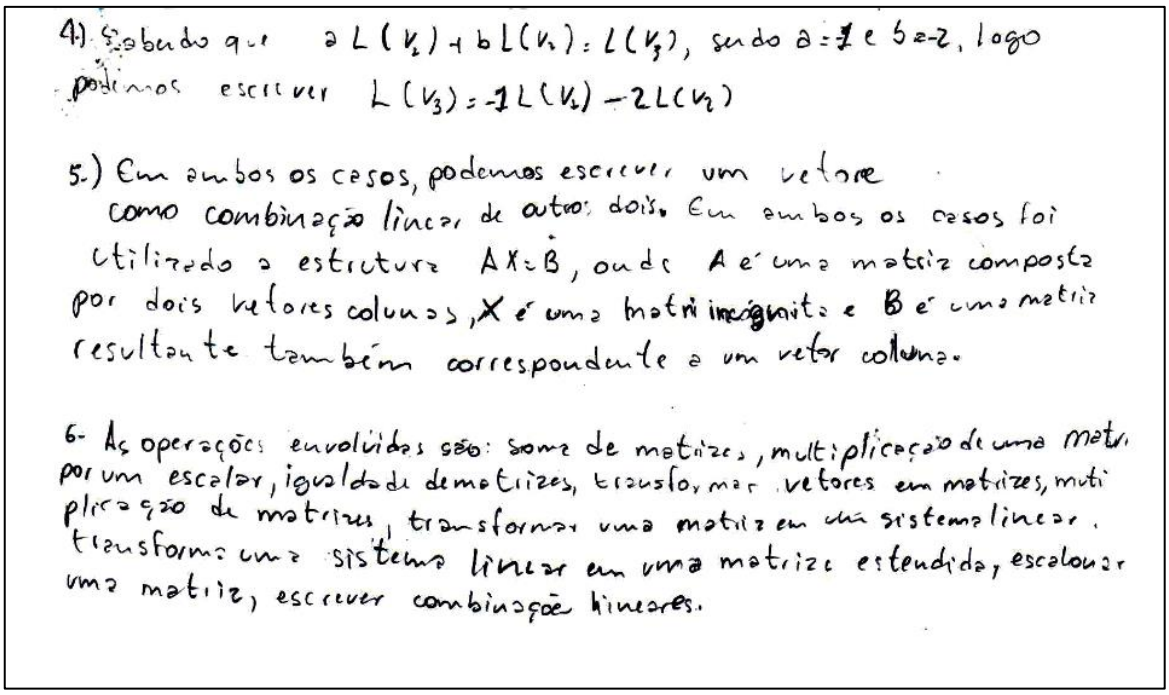
Além disso, a dupla B participou de forma bastante ativa no momento coletivo, dentro da mesma sessão, no qual se procedeu a institucionalização da atividade realizada.

Figura 31- Protocolo de construção da atividade 1 – Dupla B

N.	Nome	Definição	Valor
1	Número A1		A1 = 0
2	Número A2		A2 = 2
3	Número A3		A3 = -3
4	Número C1		C1 = -1
5	Número C2		C2 = 0
6	Número C3		C3 = 2
7	Lista V_1	{{A1}, {A2}, {A3}}	V_1 = {{0}, {2}, {-3}}
8	Lista V_2	{{C1}, {C2}, {C3}}	V_2 = {{-1}, {0}, {2}}
9	Número E1		E1 = 2
10	Número E2		E2 = -2
11	Número E3		E3 = -1
12	Lista V_3	{{E1}, {E2}, {E3}}	V_3 = {{2}, {-2}, {-1}}
13	Número A5		A5 = -3
14	Número A6		A6 = -1
15	Número C5		C5 = 1
16	Número C6		C6 = 2
17	Número E5		E5 = 1
18	Número E6		E6 = -3
19	Lista Lv_1	{{A5}, {A6}}	Lv_1 = {{-3}, {-1}}
20	Lista Lv_2	{{C5}, {C6}}	Lv_2 = {{1}, {2}}
21	Lista Lv_3	{{E5}, {E6}}	Lv_3 = {{1}, {-3}}
22	Número A8		A8 = -3
23	Número A9		A9 = -1
24	Número B8		B8 = 1
25	Número B9		B9 = 2
26	Lista C_1	{{A8, B8}, {A9, B9}}	C_1 = {{-3, 1}, {-1, 2}}
27	Lista D	{{E5}, {E6}}	D = {{1}, {-3}}
28	Número C8		C8 = 1
29	Número C9		C9 = -3
30	Lista C	{{A8, B8, C8}, {A9, B9, C9}}	C = {{-3, 1, 1}, {-1, 2, -3}}
31	Lista matriz1	MatrizEscalonada[C]	matriz1 = {{1, 0, -1}, {0, 1, -2}}

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 32- Resposta ao item c da primeira atividade – Dupla B

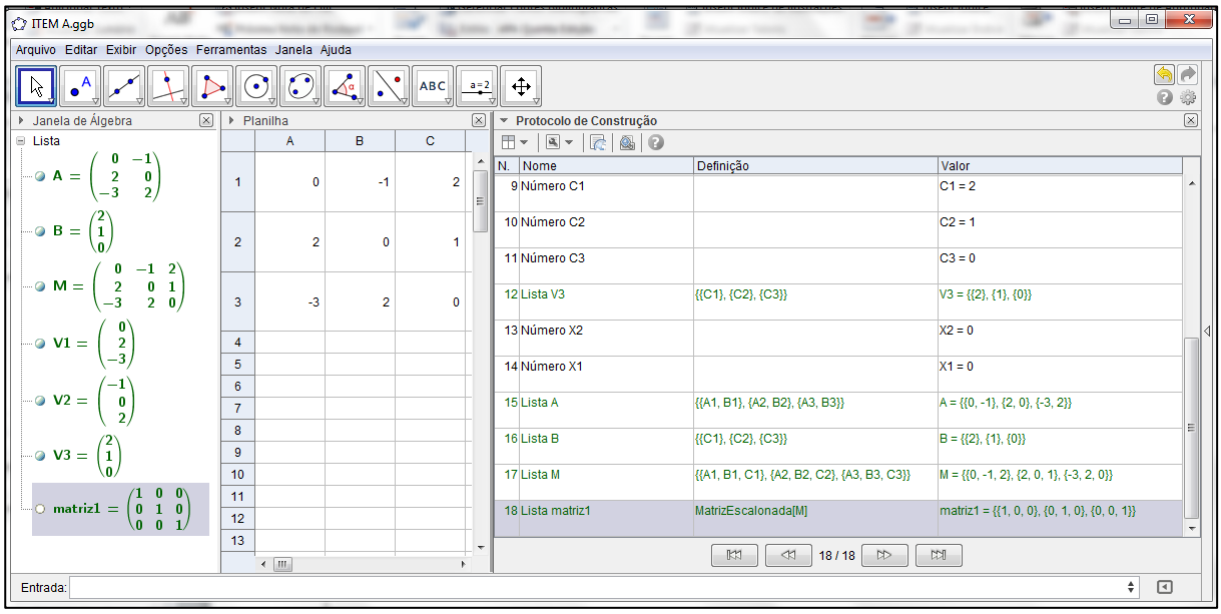


Fonte: Dados da pesquisa

4.1.3 Dupla C

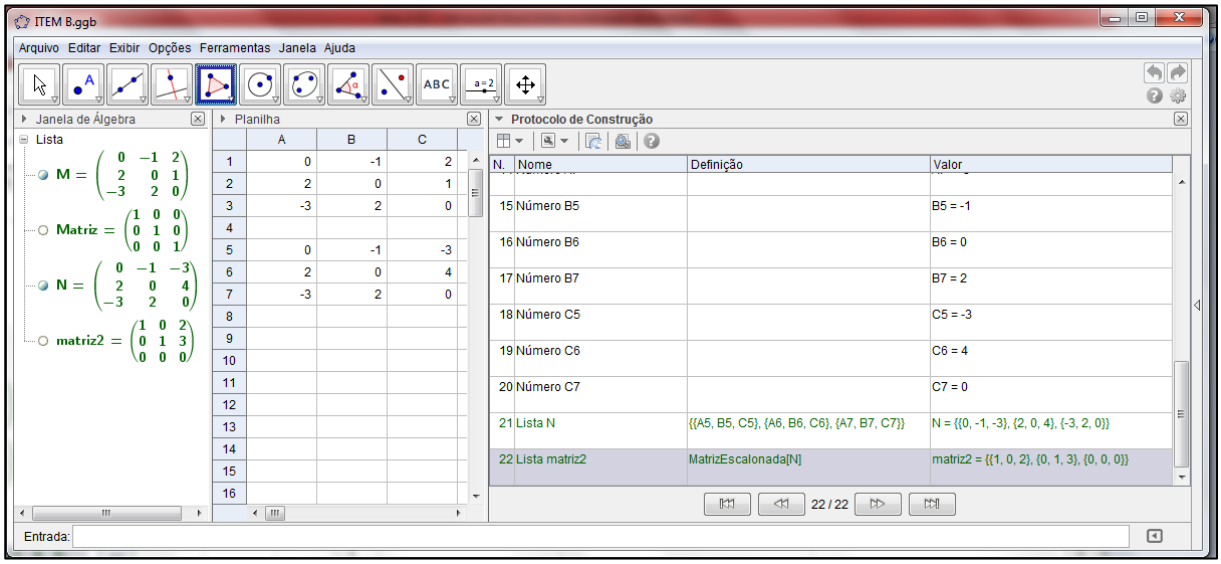
Diferentemente das duplas anteriores, na utilização do *software* GeoGebra 5, a dupla C produziu dois arquivos distintos que determinaram suas ações iniciais da atividade, como pode ser observado nas Figuras 32 e 33. Com relação a estas figuras, pode-se notar que os alunos não apresentaram muitas dificuldades no uso do programa computacional. Apesar da criação desnecessária de dois arquivos distintos, observa-se que, em suas construções, a dupla se preocupou em registrar sua escolha errada para obtenção de um sistema com solução na primeira parte da atividade. Essa ação possibilitou acompanhar melhor sua escolha para a determinação da relação de combinação linear entre os vetores v_1, v_2 e v_3. Destarte, tomando por base tais construções e os relatos produzidos por esta dupla, manifesta-se a importância do planejamento das atividades com base na TSD (quadro 5). Além disso, os erros puderam ser percebidos a partir do uso intensivo da interface do GeoGebra 5, em atividades que proporcionaram visualização e experimentação como proposto por Borba e Villarreal (2005).

Figura 33- interface do GeoGebra 5 referente à parte inicial da 1ª atividade da dupla C (parte 1)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 34 - interface do GeoGebra 5 referente a parte inicial da 1ª atividade da dupla C (parte 2)



Fonte: Dados da pesquisa

Foi possível observar, por meio dos registros produzidos pela dupla e das discussões empreendidas no decorrer das atividades, que os resultados construídos eram intermediados com base nas visualizações obtidas a partir do Geogegra 5. Os alunos, por vários momentos, ressaltaram a relevância do uso da interface do *software* e os comandos da atividade, quando enfatizaram que eles minimizam a

preocupação com os cálculos, ao mesmo tempo em que facilitam o entendimento das relações entre os vetores. Os erros cometidos, as discussões intensivas e as dificuldades superadas apenas após trabalho extenso permitem inferir, também aqui, pelo caráter antagônico do *milleu*. Entretanto, foi possível perceber que, por muitos momentos, a dupla em suas discussões lançou mão dos conhecimentos prévios relacionados aos sistemas lineares e às combinações lineares, para validar suas conjecturas.

Quadro 5 - Análise esquemática da primeira atividade – Dupla C

Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Teste operacional de valores em tentativas que produzem erros; Construção de propostas de resolução a partir de experimentações com *software*; exploração de diferentes valores e parâmetros por meio da interface do GeoGebra 5.	*Ação*	Divisão da proposta em dois arquivos, evidenciando de forma mais completa o processo de construção de respostas; grande demanda por experimentação, visualização, dinamismo.
Decisão pela constituição específica de sistemas tendo por base as matrizes obtidas no decorrer da atividade, valorizando os cálculos e a relação com conhecimentos prévios.	*Formulação*	
A validação leva em conta a discussão sobre os conceitos no âmbito da dupla; experimentações são feitas no sentido de confirmar as conjecturas.	*Validação*	Exploração da visualização de representações distintas simultaneamente por meio da interface do GeoGebra 5.

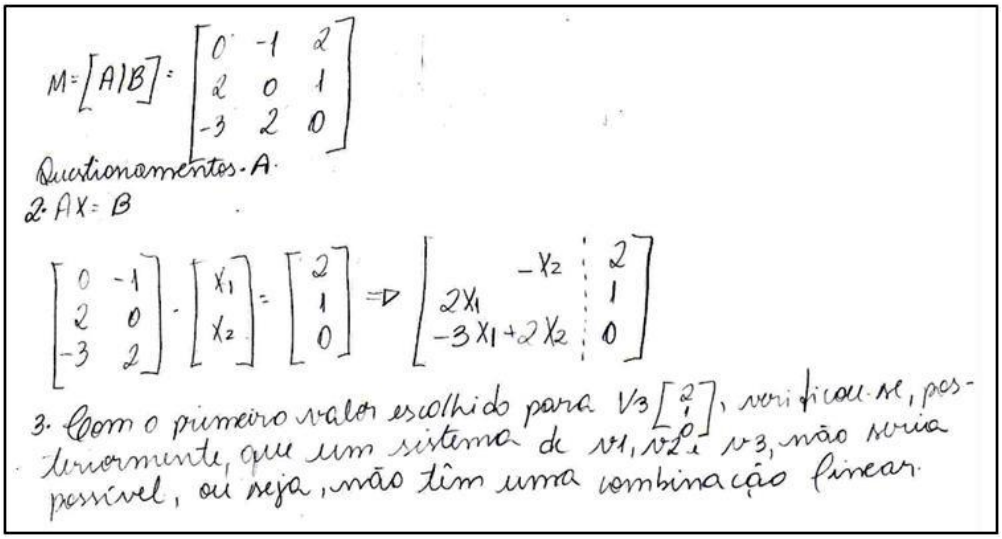
Fonte: Elaborado pela autora

As interações iniciais puderam confirmar que os alunos não apresentaram muitas dificuldades no uso do *software* GeoGebra 5, pois, como ocorreu com as demais duplas, prevaleceu um bom desenvolvimento da fluência na interface, como indicado por Oliveira (2013), que pode ser melhor consolidado nas primeiras sessões destinadas a este fim. As experimentações e visualizações decorrentes do uso do *software* permitiram testas as condições necessárias para a obtenção de um vetor adequado para o sistema descrito no item *a*. Entretanto, com relação à formalização das argumentações da dupla, nota-se algumas falhas como, por exemplo, na Figura 34, quando, em suas argumentações, a dupla concorda em

denotar o sistema linear por meio de notação de matriz, e, ainda, quando afirmam em uma de suas respostas: “- Sendo V_3 um vetor qualquer, adquiriu-se como V_1, V_2 e V_3 uma combinação linear”, em lugar de dizer, por exemplo, que “- V_3 é obtido a partir da combinação linear dos vetores V_1 e V_2”. Estas dificuldades conceituais, a exemplo do que ocorreu com as duplas anteriormente analisadas, permaneceram mesmo após as discussões provenientes da dialética de validação, o que, ainda uma vez, ressalta as indicações de Sierpinska (2000) no sentido de mostrar que, mesmo no âmbito de estratégias bem planejadas e do uso fluente de interfaces digitais dinâmicas, dificuldades conceituais persistem, muito relacionadas ao uso de um discurso prático (como se vê aqui) no lugar do discurso teórico mais pertinente e da dificuldade em perceber o caráter sistêmico deste conhecimento.

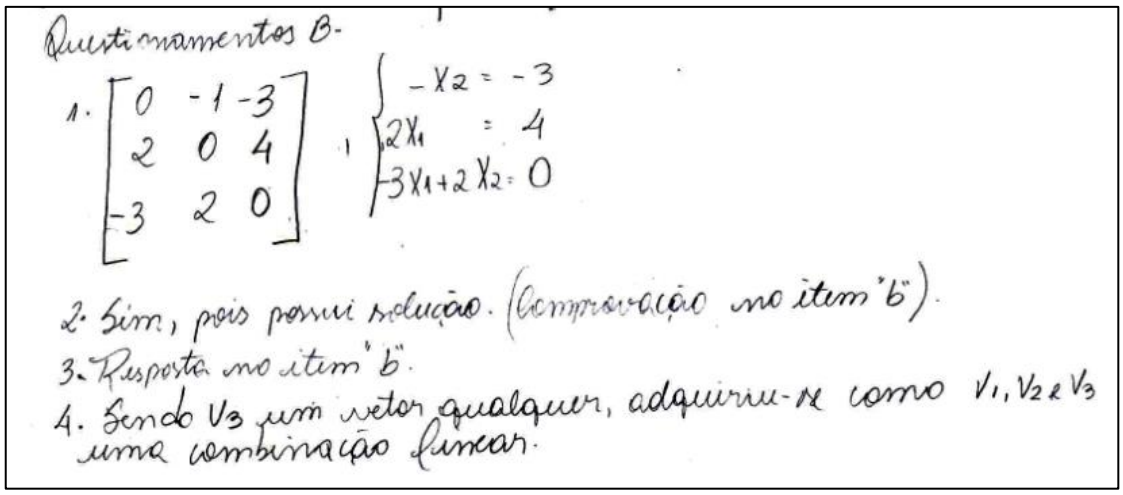
No entanto, apesar de tais entraves, a dupla conseguiu apresentar algum progresso, como se pode observar em suas respostas exibidas na Figura 35. Os alunos encontraram um novo valor que corresponde a um sistema possível e determinado para dar continuidade à atividade; a esta nova escolha corresponde o protocolo fornecido pela dupla na Figura 36. A dupla admitiu verbalmente ter usado o GeoGebra 5 para a confirmação dos resultados, bem como em inúmeras experimentações que lhes permitiram, no âmbito da dialética de formulação, descartar estratégias cujo custo seria muito alto, em termos cognitivos. Em sua resposta ao item *b* da atividade, a dupla procurou e indicou, por meio de interações verbais e com uso intensivo do GeoGebra 5, um vetor que representasse uma combinação linear dos vetores V_1 e V_2.

Figura 35 -Respostas relativas ao item a da primeira atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

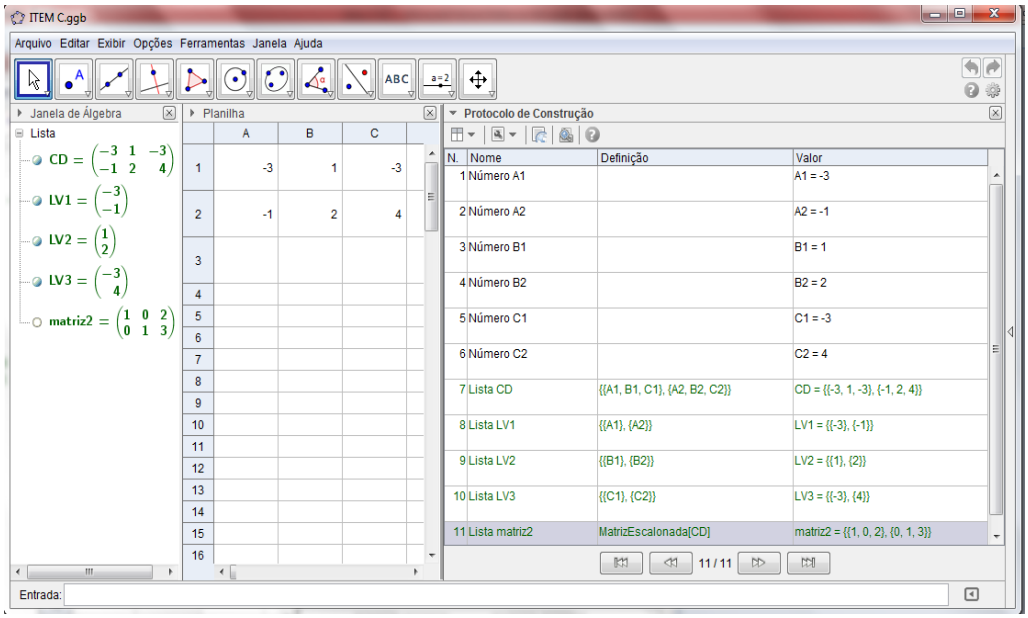
Figura 36- Respostas relativas ao item b da primeira atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

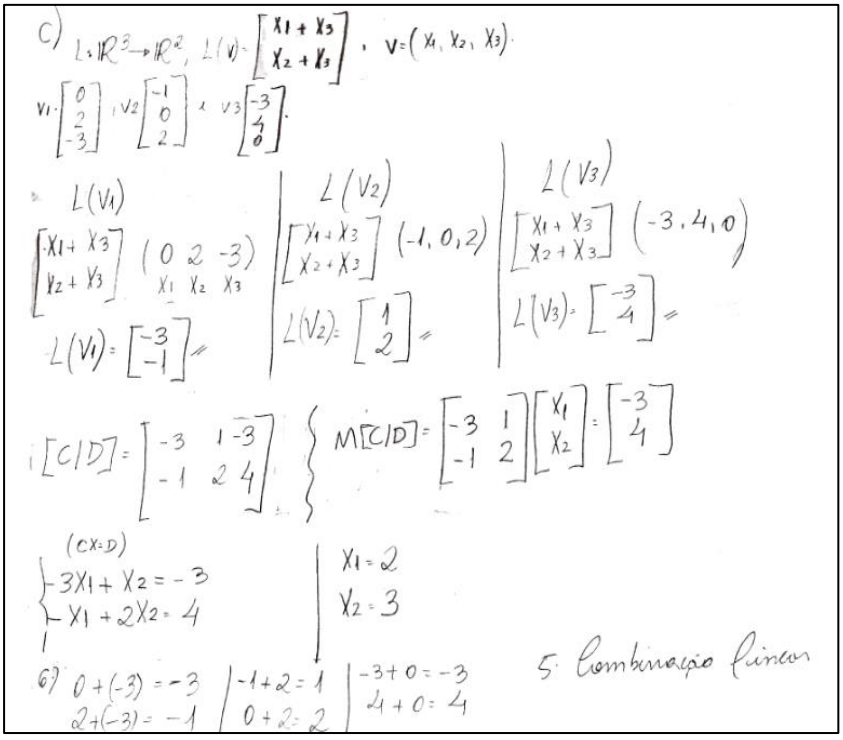
Com relação ao último item da questão, os alunos utilizaram, novamente, o ambiente GeoGebra 5, a fim de confirmar suas conjecturas, e, com base nelas, puderam registrar seus resultados, o que pode ser observado nas Figuras 37 e 38.

Figura 37- Protocolo produzido na consecução da primeira atividade – Dupla C



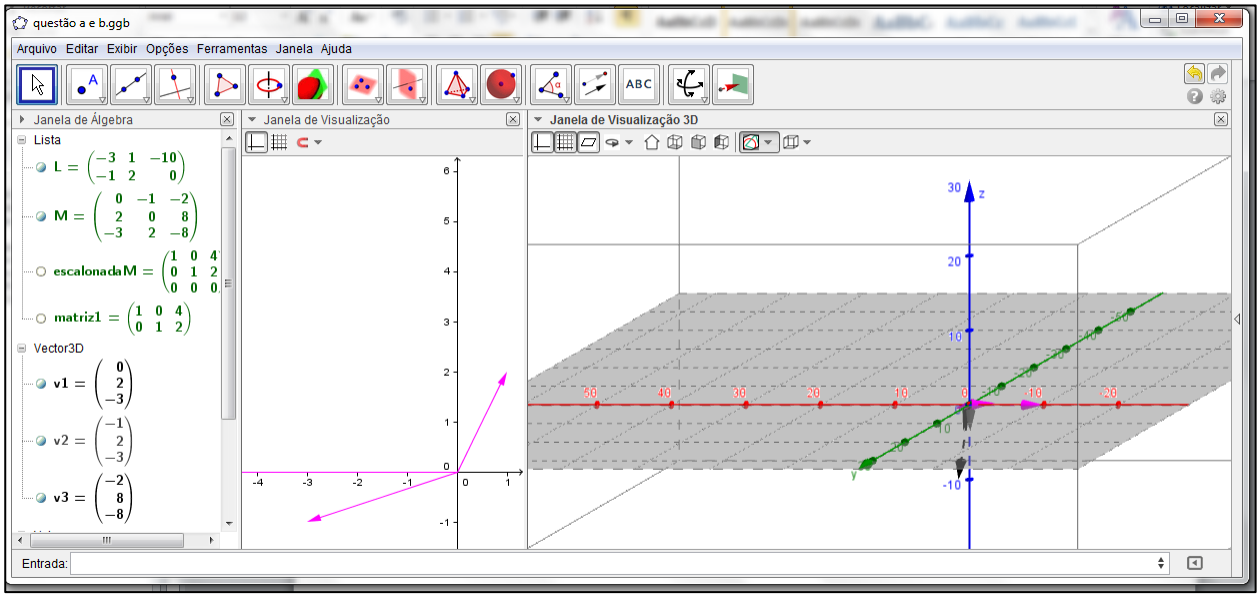
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 38- Respostas relativas ao item c da primeira atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 39 - Visualização simultânea dos vetores v1, v2, v3, lv1, lv2 e lv3 – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

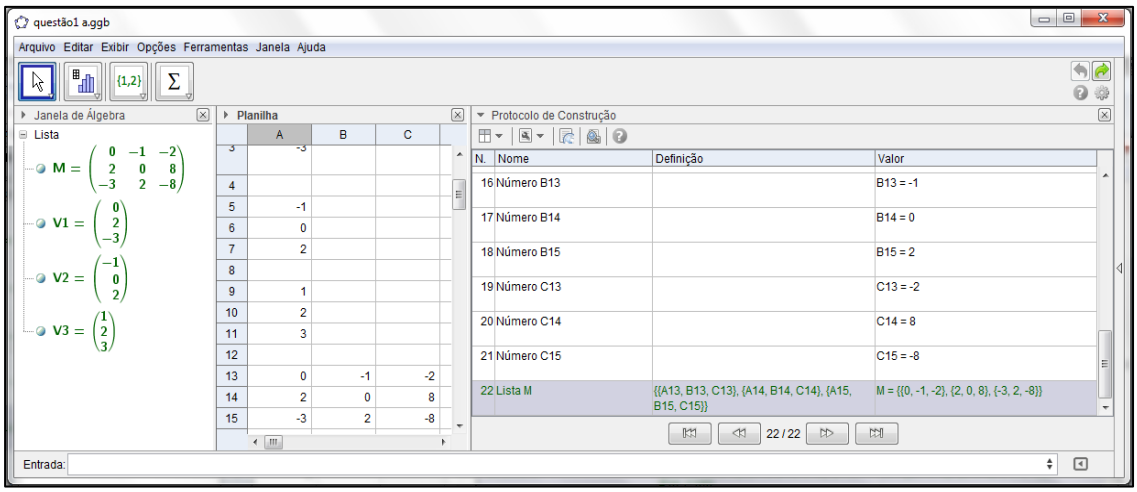
A dupla C demonstra bastante preocupação com os cálculos e com o domínio dos conhecimentos prévios, com relação ao conceito de sistemas lineares e operações matriciais, mas, apesar de responderem a todos os cincos primeiros

questionamentos referentes ao item *c*, em relação às operações envolvidas na característica mantida pela aplicação L no último questionamento, cuja resposta seria “a combinação linear entre os vetores”, a dupla não consegue especificar semelhante conclusão, ainda que tenham lançado diversas conjecturas neste sentido, inclusive com apoio na visualização de representações múltiplas fornecida pelas janelas distintas do GeoGebra 5 (Figura 38). Ou seja, para tentar confirmar suas conjecturas, a dupla tomou por base as construções feitas no programa computacional, nas quais estruturaram dos vetores no espaço e no plano, procurando estabelecer elementos que permitissem compreender a combinação linear resultante. Ao indicar apenas “combinação linear” como resposta, não é possível inferir se o envolvimento dos vetores nesta resposta foi consolidado como conceito. A dupla também não conseguiu responder ao sexto questionamento do item *c*, por não conseguir, segundo os próprios, diferenciar o que seriam operações de outros conceitos. De modo geral, as dificuldades evidenciadas podem indicar a prevalência de modelos intuitivos com base nos resultados obtidos, o que justificaria as hesitações em relação ao formalismo das argumentações, o que vem a confirmar os pressupostos dos trabalhos de Molina e Oktaç (2007), Dorier e Sierpinska (1999) e Sierpinska (2000).

4.1.4 Dupla D

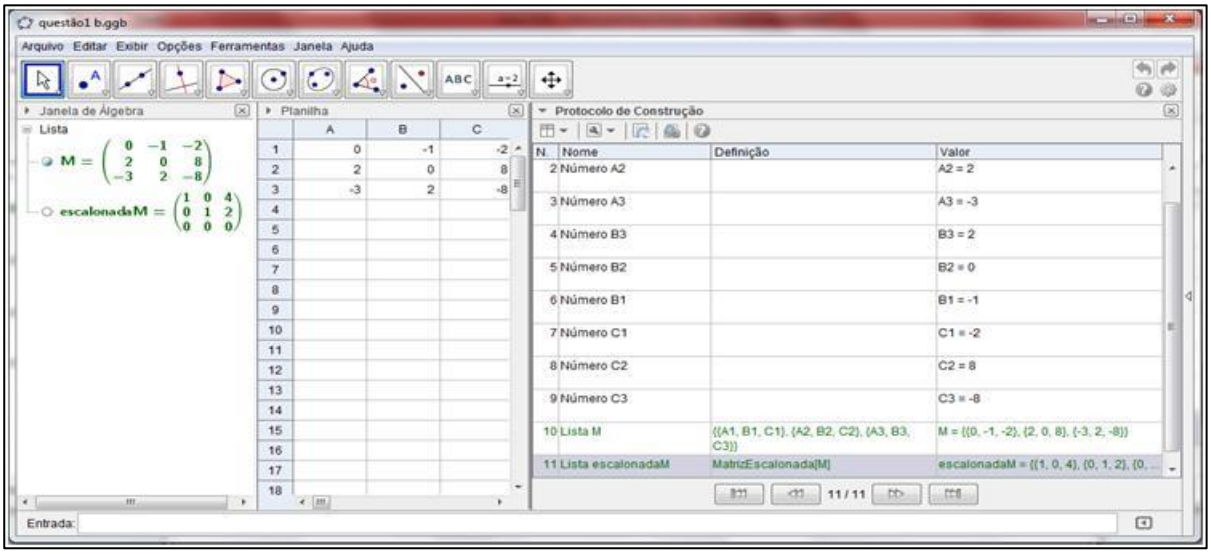
No que se refere ao item *a* da primeira atividade, a dupla D, bem como as demais, utilizou as características de experimentação e visualização do GeoGebra 5 por meio da construção de diversos exemplos, modificando valores distintos em relação ao vetor escolhido, de modo a determinar a relação entre os vetores fornecidos na questão e aquele escolhido pela dupla, após diversas intervenções operacionais características de uma dialética de ação e da formulação de conjecturas que se mostraram, mediante validação mediada pelo *software*, adequadas, de acordo com o que se vê nas Figura 39 e 40.

Figura 40– Protocolo do GeoGebra 5 para item a, primeira atividade (Dupla D, parte 1)



Fonte: Dados da pesquisa

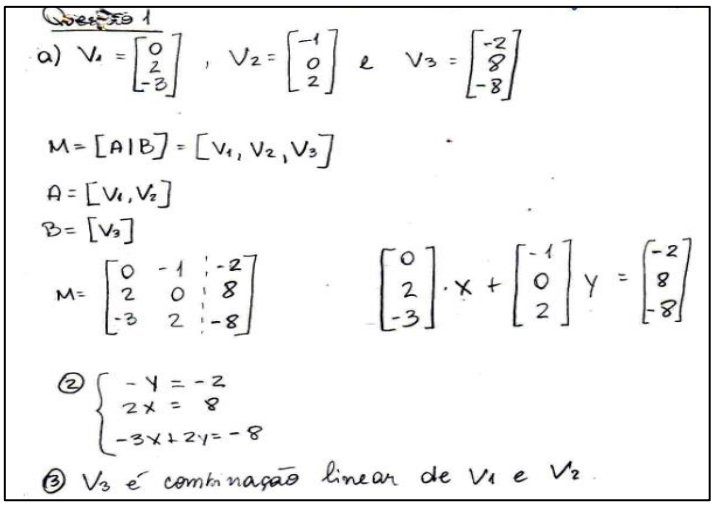
Figura 41– Protocolo do GeoGebra 5 para item a, primeira atividade (Dupla D, parte 2)



Fonte: Dados da pesquisa

Por meio das proposições testadas e validadas, do ponto de vista de Borba (2011), usando o GeoGebra 5, a dupla D constituiu suas respostas para o item *a* da primeira atividade, conforme se pode ver na figura 41.

Figura 42 - Resposta aos itens a e b da primeira atividade – Dupla D

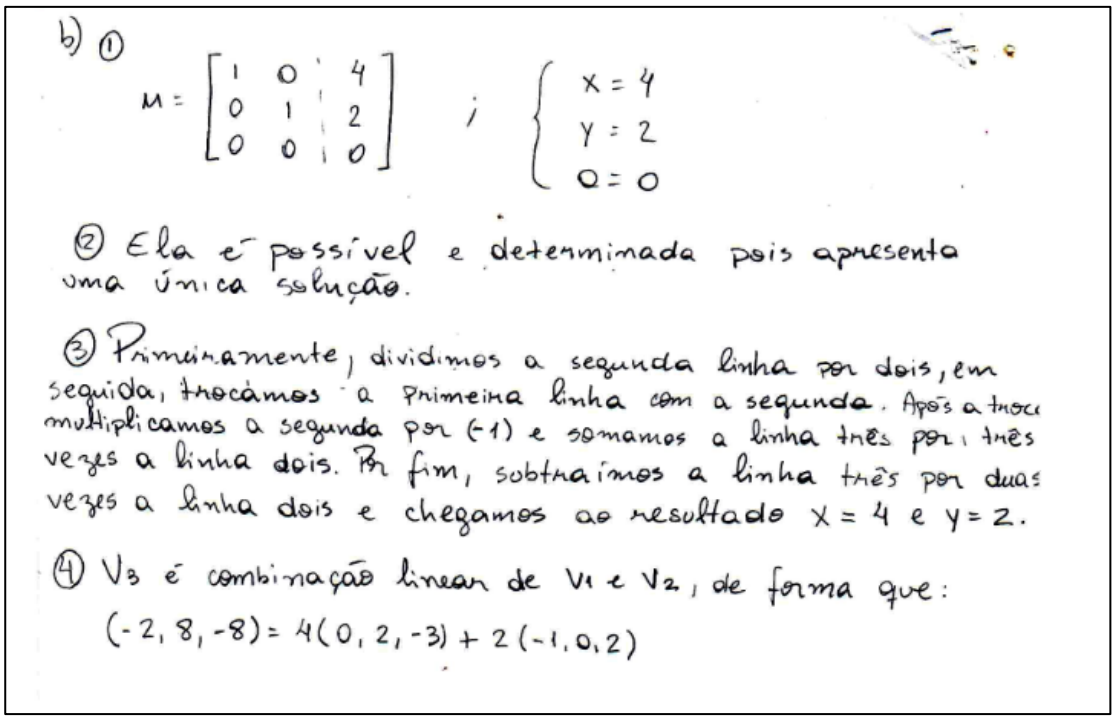


Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D, tomando por base a apresentação do protocolo nas Figuras 39 e 45, demonstram ter desenvolvido fluência suficiente em relação à tecnologia digital em um grau maior que as duplas anteriormente analisadas. Este fato pode ter contribuído para a construção de respostas mais objetivas e claras, como é possível observar nas figuras 41 e 42, nas quais os alunos indicam corretamente suas soluções para os questionamentos dos itens *a* e *b* da primeira atividade. Os componentes desta equipe interrogaram a pesquisadora, neste ponto, sobre a possibilidade de, em vez de realizar uma escolha aleatória para o vetor V_3, já o ter determinado em função dos vetores dados, pois entendiam que, com um vetor V_3 adequadamente escolhido, o sistema teria solução. A pesquisadora indicou que isto seria, justamente, uma escolha aleatória, mas que os critérios dependiam da compreensão dos conceitos envolvidos. Os alunos demonstraram, na escolha que fizeram e na intermediação obtida por meio do *software* para este fim, uma compreensão mais ampla dos conceitos envolvidos nesta parte da atividade do que os demais colegas.

No que se refere, ainda, ao momento de formulações desta parte inicial da atividade, a pesquisadora observou que a dupla D, do mesmo modo como as demais duplas, discutiu sobre os objetos construídos no ambiente GeoGebra 5, bem como sobre os resultados encontrados, para que, por meio da troca de informações, pudessem, posteriormente, registrar suas conclusões. Por conseguinte, novamente, constatou-se a importância do planejamento das atividades por meio da dinâmica proposta pela TSD.

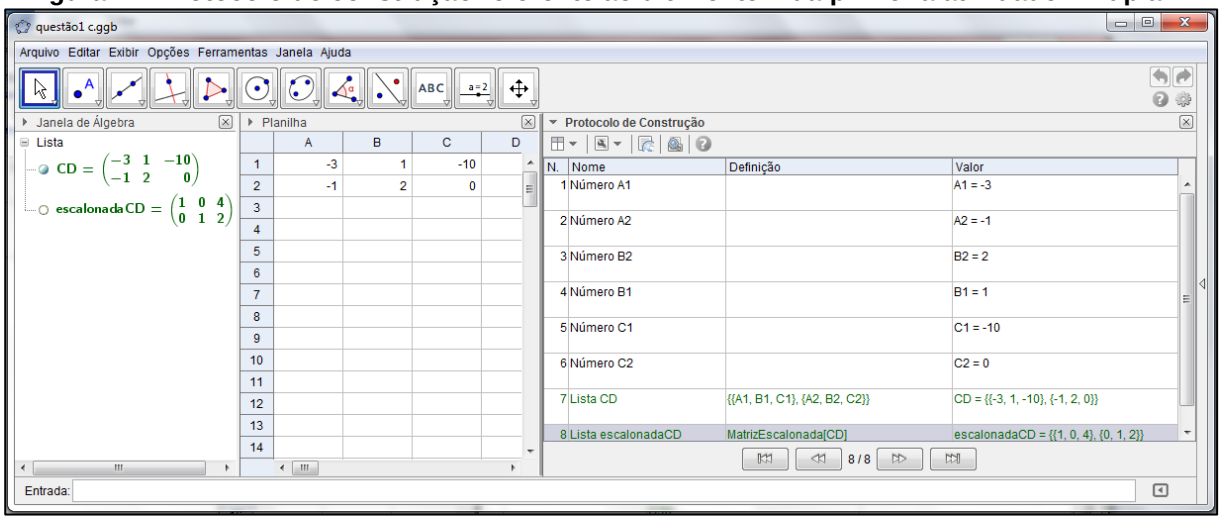
Figura 43 - Solução da primeira parte da atividade – Dupla D



Fonte: Dados da pesquisa

Quanto à última questão da atividade, a dupla D produziu o protocolo de construção exibido na figura 43, no intuito de auxiliar suas conjecturas.

Figura 44- Protocolo de construção referente ao último item da primeira atividade – Dupla D

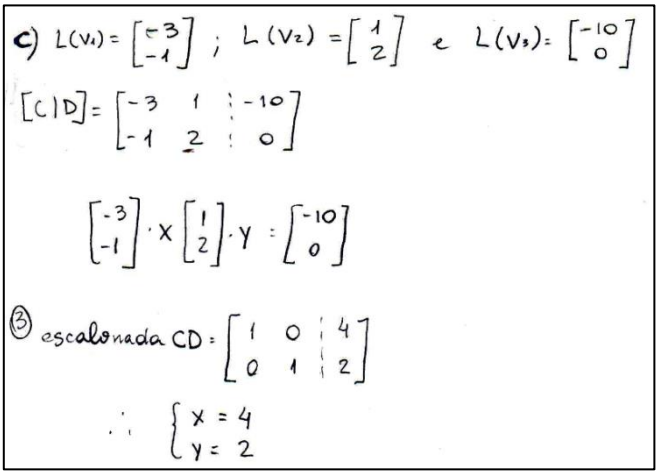


Fonte: Dados da pesquisa

Uma mobilização conceitual mais ampla era necessária neste momento e, em que pese a desenvoltura mostrada nos itens anteriores, a dupla D, em relação ao último item da questão *c*, não consegue, por meio do seu registro, demonstrar respostas corretas. A observação do trabalho destes alunos permitiu perceber em

suas discussões, no momento de formulação, que a dupla não havia entendido a relação entre os vetores na aplicação. Nesta ocasião, a pesquisadora, questionada pela dupla, pede para que observem os resultados com mais cuidado e que descrevam o que observam que acontece na aplicação de L e o que ocorre a partir da aplicação com o novo sistema. Ainda assim, não ficou demonstrado que a dupla tenha, realmente, construído a compreensão sobre os conceitos envolvidos. Apesar do seu bom desempenho com relação aos itens anteriores e do domínio do *software,* no decorrer da questão agora discutida, a dupla apresentou apenas resposta parciais e incompletas aos questionamentos feitos, indicando a adoção de modelos intuitivos e de um discurso calcado na prática, confirmando as asserções de Dorier (1997) e Sierpinska (2000). A figura 44 evidencia estas afirmações.

Figura 45- Resposta do item c da primeira atividade – Dupla D



Fonte: Dados da pesquisa

O caso protagonizado pela dupla D é emblemático: a fluência no *software*, ainda que subsidie em certa medida a construção do conhecimento matemático, não garante o desenvolvimento conceitual. Aqui, as dificuldades com o novo sistema de símbolos e com a constituição do pensamento teórico (Sierpinska, 2000) são evidentes.

O Quadro 6 estabelece a síntese das resoluções dos alunos frente às dialéticas desenvolvidas no âmbito das situações adidáticas referentes aos itens *a*, *b* e *c*, descritas por Brousseau (2008), na primeira atividade.

Quadro 6 - Análise esquemática da primeira atividade – Dupla D

<table>
<tr><th>Movimento dos sujeitos da pesquisa</th><th>Dialética (TSD)</th><th>Uso do GeoGebra 5</th></tr>
<tr><td>Construção de propostas de resolução diretamente no software, demonstrando fluência e desenvoltura; testes com diferentes valores para encontrar o vetor solicitado.</td><td>Ação</td><td rowspan="2">Uso intensivo de experimentações e visualizações com o software, de modo a mobilizar diversas representações disponíveis nas diferentes janelas. Uso do caráter dinâmico do programa, por meio da manipulação de parâmetros. Debates a partir da visualização dos efeitos nas diversas janelas do software.</td></tr>
<tr><td>Uso dos conhecimentos acerca de matrizes e sistemas lineares na produção de respostas objetivas e corretas em um primeiro momento; dificuldades na formulação de respostas que exigiam a construção conceitual acerca de combinação linear.</td><td>Formulação</td></tr>
<tr><td>As discussões relativas aos itens a e b, subsidiadas pela visualização das representações dos elementos matemáticos em jogo, permitiram validar as respostas corretas; no caso do item c, não houve como fazê-lo.</td><td>Validação</td><td>Exploração da visualização de representações distintas simultaneamente por meio da interface do GeoGebra 5.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora

4.1.5 Comentários acerca da primeira atividade

De acordo com as discussões realizadas anteriormente a respeito dos resultados obtidos pelas duplas, foi possível observar que as mesmas alcançaram certa autonomia dentro da proposta da atividade. Os alunos evidenciaram, quer por suas resoluções, quer por seus discursos, a importância da tríade visualização – experimentação – dinamismo possibilitados pela estratégia didática com o uso do GeoGebra 5. Entretanto, a efetividade da estratégia foi muito menor quando testada diante de questões conceituais, da mesma forma como indicado por Sierpinska (2000). Em alguma medida, também, a interface permitiu uma melhor organização dos resultados, permitindo, principalmente, um ganho cognitivo importante quando da formulação. A própria reorganização do pensamento surgiu como um dos principais elementos da intervenção de tecnologias informáticas na visão de Borba e Villarreal (2005).

A primeira atividade recebeu uma base importante, qual seja a fluência

adquirida pelos participantes a partir do uso feito nas duas primeiras sessões. Sobre esta particularidade, viu-se que os alunos utilizaram a planilha para a construção das estruturas matriciais, bem como os comandos necessários sem quaisquer problemas e sem auxílio da pesquisadora. Esta característica, reflexo do domínio das funcionalidades, subsidiou a escolha relativas ao vetor V_3, já que experimentações diversas podiam ser feitas nestas condições. Contudo, era esperado um uso mais intensivo das representações no plano e no espaço (visualizações geométricas em 2 e 3D, respectivamente), o que leva a pensar na necessidade de revisão do planejamento da atividade, talvez, ou de uma abordagem geométrica a partir dos enunciados.

4.1.6 Análise da institucionalização da primeira atividade

A institucionalização da primeira atividade foi realizada após a aplicação da atividade, uma vez que o tempo da sessão não foi suficiente para incluí-la. Antes da formalização do conteúdo, pediu-se que cada dupla realizasse um breve resumo das ações perpetradas durante a atividade, a fim de revisitar os procedimentos. Esta recomendação visava permitir que as experiências de cada dupla pudessem ser compartilhadas com as demais, de modo a acrescentar novas possibilidades sobre o mesmo problema, dando margem a discussões e avaliações. Também poderiam ser discutidas as falhas e incompletudes que cada dupla enxergasse em suas propostas.

Além disso, como cada dupla apresentou escolhas diferentes para o vetor inicial V_3, os alunos poderiam perceber que, apesar de opções distintas, a conclusão poderia ser a mesma: a transformação L, ao ser aplicada a uma combinação linear de vetores, mantinha a mesma estrutura entre os vetores transformados em relação aos vetores originais. Esse procedimento, em que cada dupla expõe suas ações e seus resultados, serviu, principalmente, para ampliar os exemplos que cada aluno tinha desta atividade, além de ter servido para que fossem reafirmados ou reestruturados os resultados individuais de cada dupla. De modo geral, nesse momento, esperava-se que cada dupla, ao revisitar suas ações, procedesse a reorganização de seus conhecimentos, corrigindo eventuais enganos e avançando no discurso conceitual acerca dos elementos matemáticos envolvidos.

Em relação à sessão coletiva de institucionalização, alguns questionamentos

aos alunos sobre a generalização do conceito a ser desenvolvido foram feitos, culminando na pergunta, dirigida a todos: “- Os exemplos construídos por cada dupla são suficientes para classificar se a aplicação L, fornecida na atividade, sempre apresentaria o comportamento de preservar a combinação linear entre os vetores?”. A maioria das duplas respondeu que sim, apesar de não saberem como justificar. A dupla B, por exemplo, respondeu: “- Achamos que sim, pois os vários exemplos chegaram à mesma conclusão, mas não sabemos como verificar, de modo geral”; a dupla C respondeu apenas que sim, sem que dissessem como fazê-lo. Para tratar desta dificuldade conceitual, pediu-se que cada um dos alunos considerasse os vetores genéricos no espaço, como segue:

$$V_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ V_2=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

Em seguida, solicitou-se que considerassem o vetor V_3 escrito como combinação linear de V_1 e V_2, como o suscitado na atividade, na forma

$$V_1 + k\,V_2 = V_3.$$

Cada um dos alunos, então, sem muita dificuldade, conseguiu obter

$$V_3 = (x_1 + ky_1,\ x_2 + ky_2, x_3 + ky_3)^t$$

Em seguida, pediu-se aos alunos que calculassem $L(V_3)$. Aqui, com alguma relutância e considerável dificuldade algébrica, os alunos conseguiram escrever,

$$\begin{aligned}L(V_3) &= (x_1 + x_3 + k(y_1 + y_3),\ x_2 + x_3 + k(y_2 + y_3))^t \\ &= (x_1 + x_3,\ x_2 + x_3)^t + (k(y_1 + y_3), k(y_2 + y_3))^t = L(V_1) + k\,L(V_2).\end{aligned}$$

Neste ponto, a maioria dos alunos declarou entender o conceito, fazendo a comparação com os resultados obtidos na atividade, segundo os relatos dos mesmos, como no caso da dupla C, cujos componentes afirmaram já saber o que buscar, referindo-se à combinação linear.

Com relação ao GeoGebra 5, os alunos indicaram ter a compreensão facilitada na atividade. A dupla B, por exemplo, explicou que achou muito útil, principalmente na estruturação da tarefa, uma vez que puderam fazer várias trocas

de vetores sem muita dificuldade e, assim, obterem visualizações abundantes e várias possibilidades para a atividade. Segundo os estudantes, se tivessem utilizado lápis e papel, certamente não teriam tanta disposição, ou seja, entre outras coisas, o custo cognitivo e operacional seria muito alto.

Ainda que, durante a atividade, tenha prevalecido o pensamento prático sobre o teórico, como indicou Sierpinska (2000), os alunos conseguiram, após a vivência investigativa ao longo das dialéticas completadas na institucionalização, compreender de forma mais clara o significado de suas ações, de modo a descobrirem o conceito de transformação linear. Sobre a institucionalização, aliás, sua importância resultou incontestável, já que representou a forma pela qual, de acordo com o planejamento, o *gap* conceitual pode ser superado – ou seja, a diferença entre os modelos intuitivos ensaiados no GeoGebra 5 e a compreensão conceitual. Os conceitos de matrizes e resolução de sistemas lineares foram empregados amplamente.

Ainda na discussão referente à institucionalização, novas transformações foram apresentadas. Os alunos e a pesquisadora, então, passaram a discutir amplamente, recorrendo ao GeoGebra 5 quando necessário, na tentativa de classificá-las como lineares ou não. De modo geral, todos os estudantes conseguiram classificar as transformações, verificando a preservação da combinação linear entre vetores. Com o conceito mais consolidado, pouco se recorreu ao *software*. As transformações colocadas foram as seguintes – todas eram não lineares e foram assim classificas pelos estudantes, em que pesem algumas dificuldades algébricas:

a) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por L(V) = ($-x_2.x_1$, x_1), onde V = (x_1,x_2).
b) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por L(V) = ($-x_2$, x_1,, 2), onde V = (x_1,x_2).

Há que se ressaltar aqui que os sujeitos da pesquisa não tiveram qualquer contato prévio com o conceito de transformação linear em espaços vetoriais. Deste ponto de vista, é uma investigação distinta, por exemplo, daquela apresentada por Karrer (2006), visto que os sujeitos da sua pesquisa deviam cumprir o pré-requisito de já terem cursado a disciplina de Álgebra Linear.

Além disso, a atividade permitiu que os sujeitos começassem a estruturar uma linguagem para a estrutura da álgebra linear, movimento abordado por Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1999) como ponto de dificuldade para os alunos.

Acrescente-se que a dinâmica planejada a partir dos pressupostos da TSD

possibilitou que os alunos apresentassem um desenvolvimento mais autônomo, ainda que mesclados por erros que tiveram que ser trabalhados na institucionalização. As duplas montavam suas conjecturas por meio das manipulações de vetores, faziam diversas experimentações, voltavam a discutir, procedendo a troca de ideias e informações com os seus pares, recorrendo intensamente à interface dinâmica.

4.2 Análise da segunda atividade

Durante esta atividade, os alunos deveriam analisar a multiplicação matricial, do ponto de vista geométrico, com apoio do GeoGebra 5, de modo a embasar suas conjecturas associadas aos conceitos de transformação e de combinação linear. Com isso, esperava-se que os sujeitos percebessem que as estruturas matriciais apresentadas no corpo da atividade representavam transformações que, em decorrência das propriedades matriciais, correspondem a transformações lineares. No decorrer das ações para formular e validar suas conjecturas, a professora/pesquisadora atuou majoritariamente como observadora, intervindo apenas quando havia dúvidas relativas ao enunciado da questão ou a procedimentos operacionais, como quando alguns alunos, não o entendendo as instruções, não souberam em que pasta do computador deveriam salvar a atividade feita no GeoGebra 5.

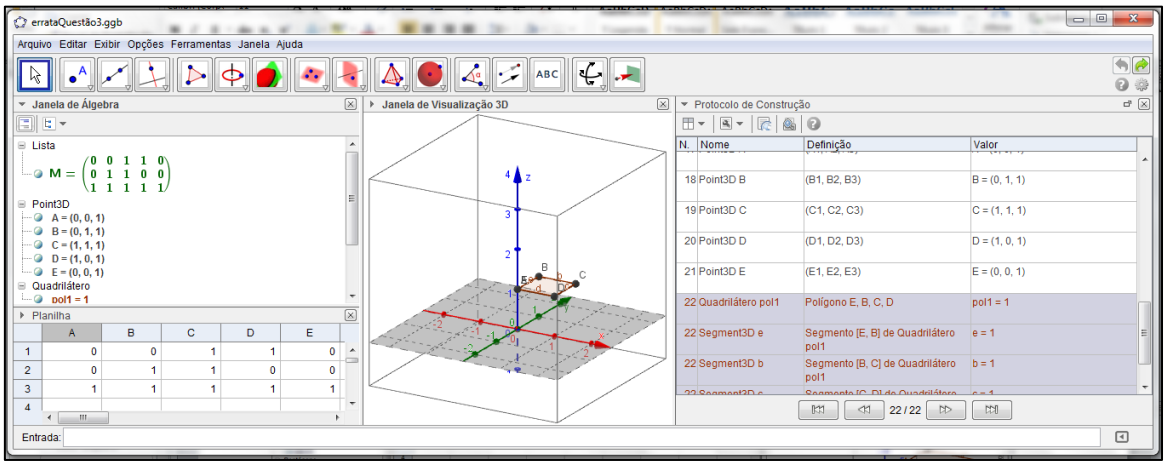
Outro aspecto importante dessa atividade diz respeito ao dinamismo que o ambiente GeoGebra 5 pode proporcionar, uma vez que se desenvolva a fluência necessária para utilizá-lo. Neste sentido, esta atividade previu o uso de seletores (controles deslizantes), que permitem a variação configurável de valores utilizados como parâmetros, o que, neste caso, abria possibilidades para que os alunos observassem vários tipos de exemplos de transformações lineares, de modo a fazer correlações entre aspectos geométricos e algébricos. Tal característica visava proporcionar a construção de um processo investigativo cuja intenção era propor o desenvolvimento autônomo da atividade, constituindo, assim, uma mudança do contrato didático usual de sala de aula.

4.2.1 Dupla A

A dupla A, no ambiente GeoGebra 5, construiu quatro arquivos nos quais ensaiaram suas conjecturas no decorrer da atividade. O primeiro foi reservado para construir a matriz M. Esta primeira aplicação, pelo que se pode inferir nas observações e diálogos entre os alunos, foi composta para que a duplas se certificassem de como deveriam proceder em relação às demais construções. Os sujeitos utilizaram as coordenadas da planilha para definir as entradas dos vértices do quadrado, o que conferiu dinamismo à construção e permitiu diversas visualizações, pois caso modificassem as entradas na planilha, os pontos seriam modificados também, assim como o polígono. Tais decisões ficaram evidentes durante as discussões constituídas após a operacionalização de propostas (dialética de ação) e posterior discussão em busca de soluções (formulação) entre as duplas.

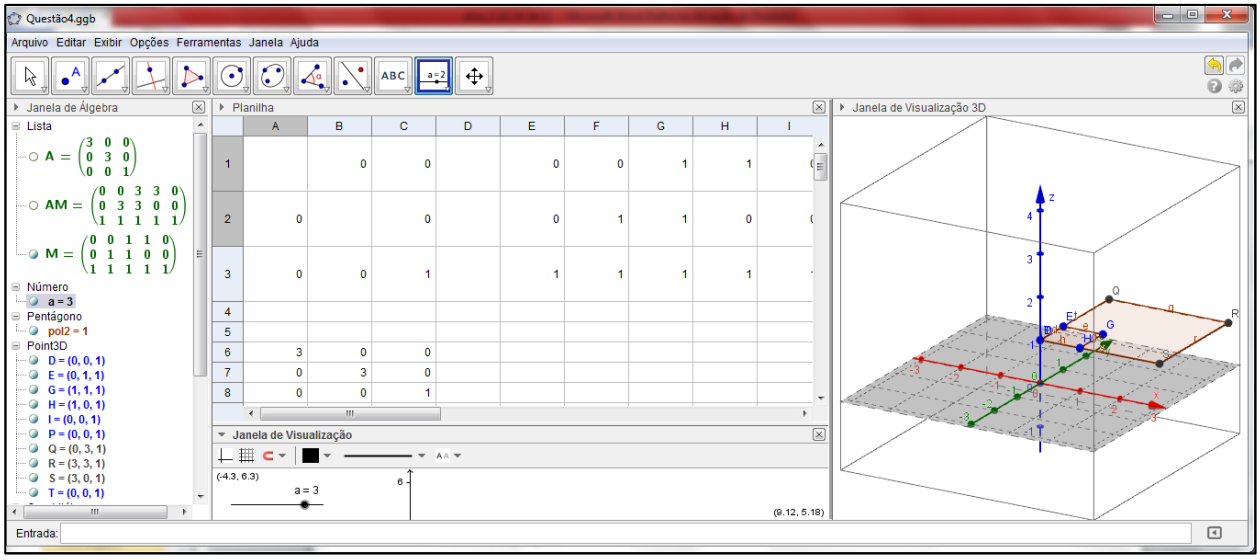
Assim, com base nessa construção evidenciada na figura 45, a dupla construiu as demais aplicações, repetindo a construção anterior nas mesmas, buscando comparar a construção original com o produto das multiplicações matriciais AM, BM e CM. A figura 46, por exemplo, refere-se à matriz AM.

Figura 46- Construção no GeoGebra 5 da matriz A – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 47- Construção no GeoGebra 5 da matriz AM – Dupla A

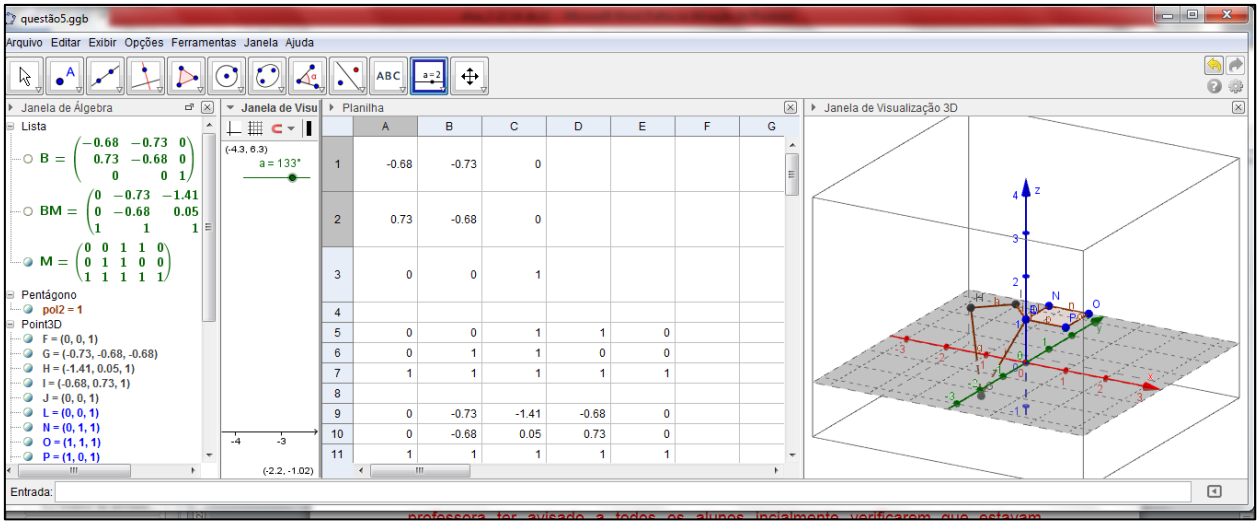


Fonte: Dados da pesquisa

Com relação às construções supramencionadas, efetuadas com apoio do *software*, a dupla A não teve dificuldades. Entretanto, como pode ser verificado na figura 49, o uso equivocado do conceito de congruência leva os alunos a não entenderem corretamente a atuação da matriz A sobre a matriz M. Some-se a isto o fato de que, no prosseguimento das atividades, diversos erros foram cometidos em relação ao uso do GeoGebra 5. Mais tarde, no decorrer das discussões entre os alunos que compuseram a dupla, pode-se constatar que os mesmos compreenderam que o quadrado daquela forma constituído aumentava ou diminuía na mesma proporção na qual o seletor era, igualmente, modificado. Esse entendimento ficaria ainda mais claro no momento da institucionalização, como mais adiante se verá. Não obstante, a maior dificuldade, mais uma vez, surgiu em relação aos conceitos envolvidos, principalmente na contradição apresentada na resposta da figura 54, o que evidencia a incompreensão do caráter sistêmico do conhecimento (Sierpinska, 2000).

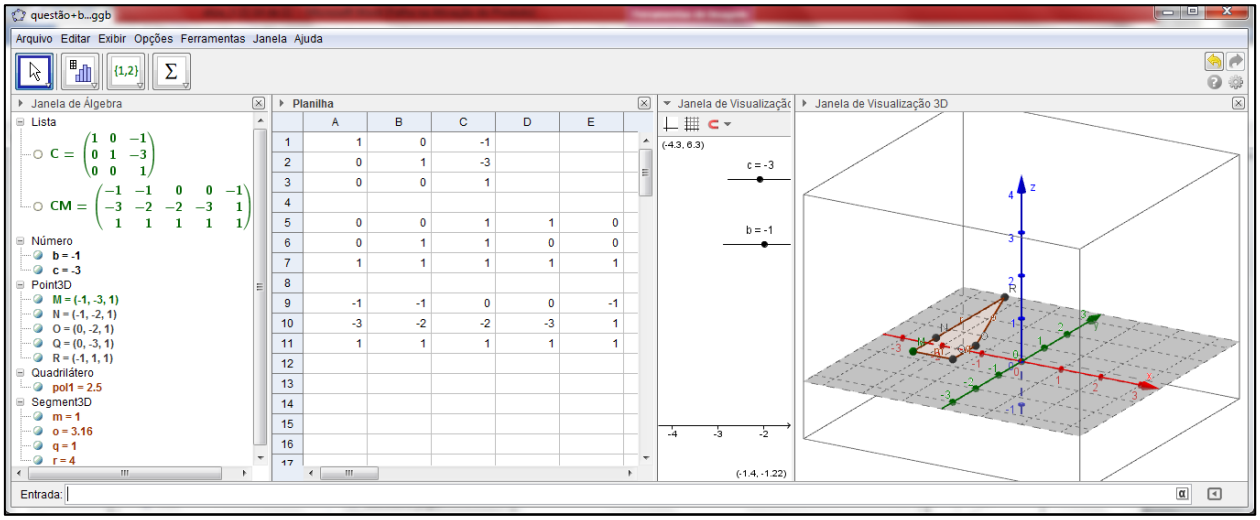
Com respeito às demais matrizes, B e C, as figuras 47 e 48 descrevem suas construções, respectivamente,

Figura 48- Construção no Geogebra 5 referente à matriz BM – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 49- Construção no GeoGebra 5 referente à matriz CM – Dupla A

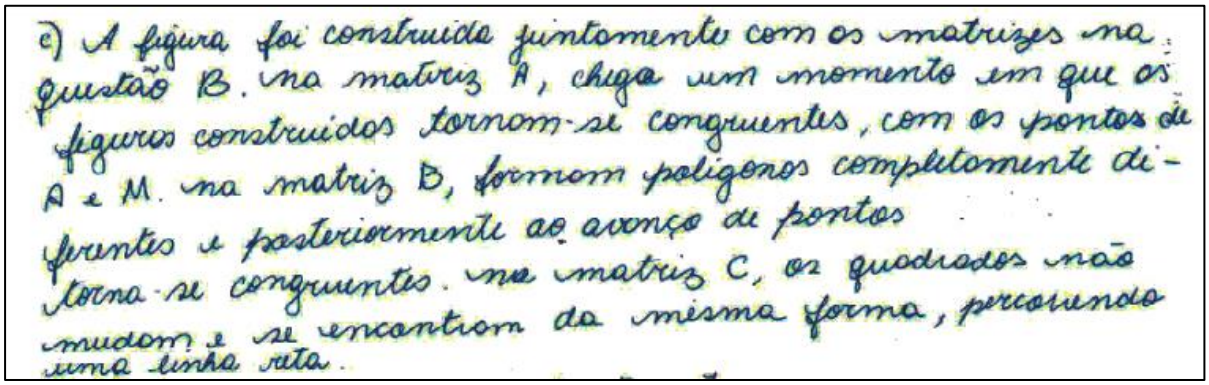


Fonte: Dados da pesquisa

As conclusões da dupla, baseadas nas construções errôneas providas pelas figuras 47 e 48, foram, evidentemente, equivocadas – ver figuras 49 e 50. Como é possível observar, a dupla A não compreendeu as ações das matrizes sobre a matriz M. Ainda que certo domínio instrumental do GeoGebra 5 pudesse ter sido evidenciado em um primeiro momento, faltou ampliar o desenvolvimento da fluência em relação ao *software* – e não se pode descartar que os problemas conceituais tenham concorrido para que os sujeitos não tivessem subsídios sequer para entender a natureza dos erros cometidos em relação ao programa. Ou seja, suas produções foram decisivas para que a dupla deixasse de construir um significado coerente para a atividade.

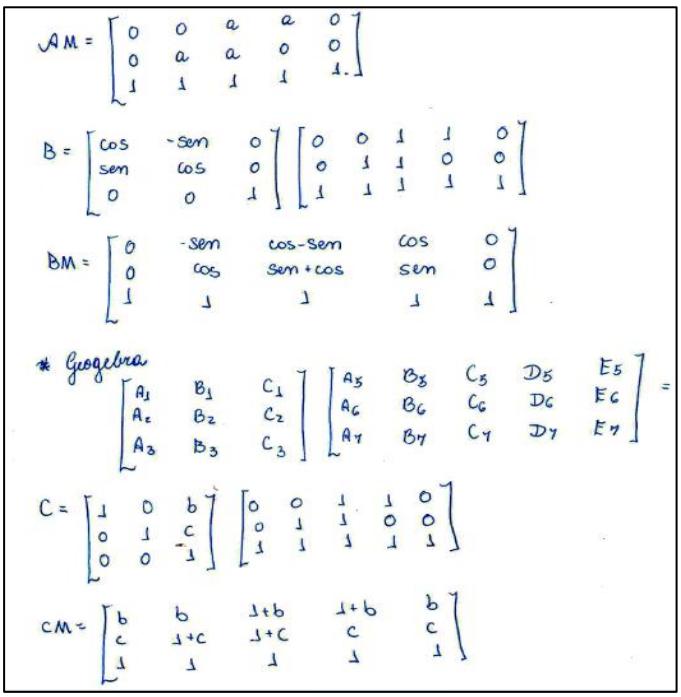
Um importante recurso do GeoGebra 5 é aquele que permite aos seus usuários que utilizem o protocolo de construção, para que cada entrada seja conferida e eventualmente refeita e, assim, permita que se verifique a consistência matemática das construções. Entretanto, apesar de lhes ter sido recomendado que usassem tal procedimento (assim como aos demais), no início da aplicação da sequência se observou que a dupla não seguiu tal recomendação. Para estes alunos, experimentar e visualizar não concorreu para ampliar as possibilidades de construção do conhecimento conceitual, uma vez que o componente 'fluência digital' não se consolidou (Oliveira, 2013).

Figura 50- Resposta ao item c da segunda atividade – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

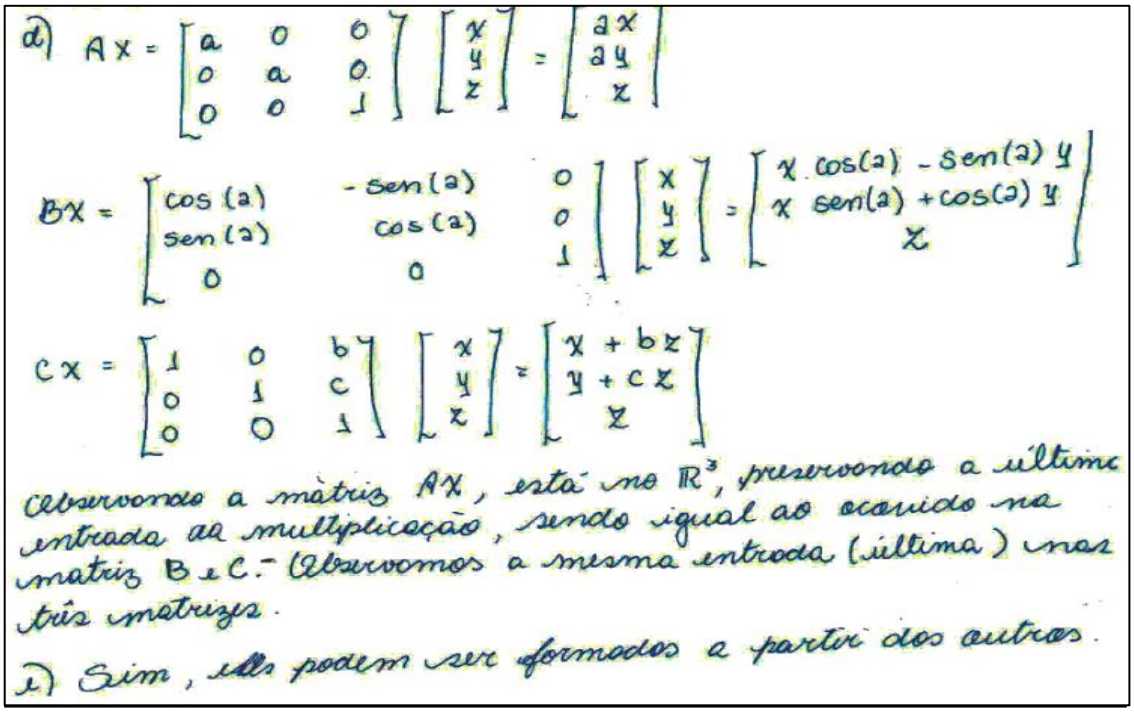
Figura 51- Resolução do item a da segunda atividade – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Surpreendentemente, no entanto, pode-se perceber que a dupla A, em relação aos termos algébricos, não apresentou tanta dificuldade. Na figura 51, os alunos expuseram a estratégia montada para a construção das matrizes BM e CM, para qual escolheram o recurso 'planilha', capaz de contribuir para a construção da figura na interface do GeoGebra 5 de modo dinâmico, isto é, à medida que se alterassem os valores dos seletores relacionados às matrizes B e C, as figuras respectivas seriam alteradas, pois suas coordenadas estavam atreladas às suas entradas na planilha – se tais valores mudassem, os pontos das novas figuras também mudariam. De qualquer forma, esta característica não foi explorada pelos estudantes que, de outra forma, poderiam perceber e corrigir seus erros. Ainda aqui, a não percepção do caráter sistêmico do conhecimento, como apontado por Sierpinska (2000) e a manutenção dos modelos intuitivos para a resolução (Molina e Oktaç, 2007) impediu uma melhor articulação entre as representações disponíveis, algébrica e geométrica.

Figura 52– Resposta aos itens d, e da segunda atividade – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

As coordenadas homogêneas, relatadas em meio às respostas (figura 51), também na forma de um discurso da prática, não foram reconhecidas como tal, ainda que tenham sido apresentadas, no curso regular, para todos os sujeitos da pesquisa. A descrição feita com relação às transformações representadas pelas

matrizes A, B e C apontou que estes alunos apresentavam várias dificuldades a respeito do conceito geral de transformações, fato este que, somado aos resultados errados obtidos na interface do GeoGebra 5, contribuiu para respostas desconexas. Não é demais apontar para as considerações de Dorier (1997; 1999) e Dreyfus, Hilel e Sierpinska (1999), acerca das dificuldades com os conceitos, notações e ideais da álgebra linear por parte de estudantes universitários iniciantes. Em relação aos erros ligados à fluência no *software*, Oliveira (2013) já indicava a necessidade de fomentá-la quando tecnologias digitais eram consideradas no processo de ensino.

Com relação à classificação das transformações construídas como 'lineares' ou 'não lineares', apesar da resposta 'sim' dada pela dupla (Figura 51), a justificativa apresentada foi totalmente inconsistente. Durante as discussões feitas pela dupla para responder a esse questionamento, houve momentos em que se pode perceber que a mesma timidamente tenta relacionar a representação matricial e o conceito de combinação linear, quando um dos integrantes da dupla menciona que, para ser considerada linear, a função deve preservar combinação linear, e ainda, que a matriz pode ser usada para tal. Esta afirmação pareceu perder a importância em meio às vimento GeoGebra 5.

O quadro 7 indica como foi o movimento dos alunos da dupla A em relação à dinâmica investigativa proposta.

Quadro 7- Análise esquemática da segunda atividade - Dupla A

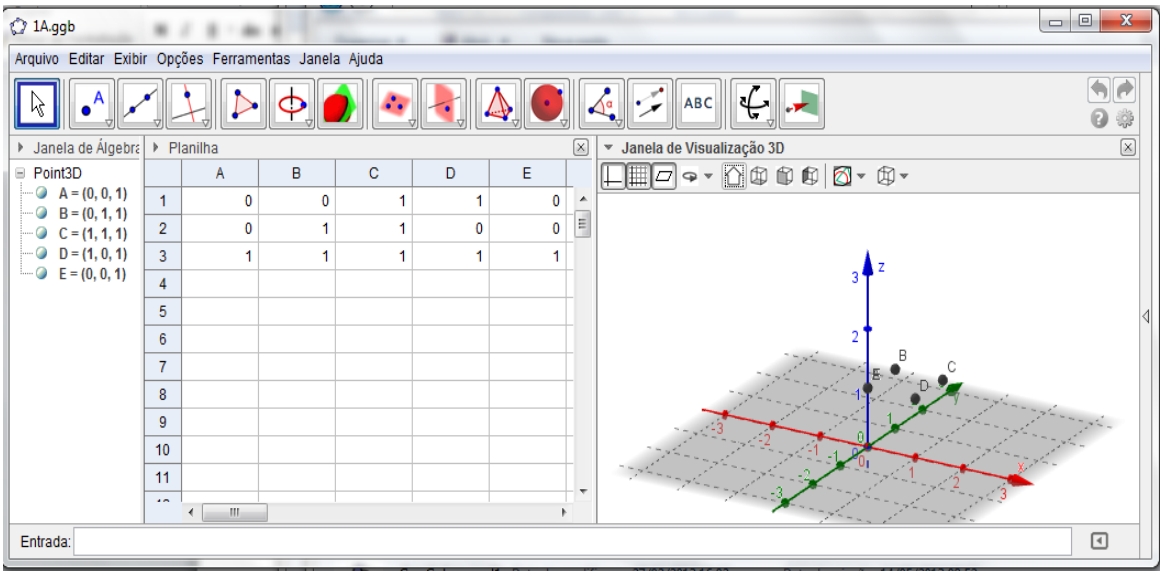
Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Construção incompleta das propostas de resolução usando o *software*; dificuldade em perceber a ação sobre os seletores.	*Ação*	Construção correta das duas primeiras aplicações, mais elementares; dificuldades em desenvolver maior fluência na interface; construções errôneas, com base em dificuldades conceituais; relutância em usar a interface para alinhar experiências e conjecturas.
Uso incorreto de conceitos ligados à congruência; a conjectura adotada como correta não corresponde à atuação da matriz M sobre as demais e não habilita à percepção das transformações.	*Formulação*	
A dupla praticamente não usou a interface do GeoGebra 5 para refutar suas conjecturas; da mesma forma, não efetivou correlações entre diversas representações.	*Validação*	Praticamente não houve.

Fonte: Elaborado pela autora

4.2.2 Dupla B

A dupla B, fazendo uso da interface do Geogebra 5 para iniciar a segunda atividade, resolve construir quatro aplicações, dentre as quais a primeira é designada como a construção determinada pela matriz M, o que foi feito por meio da planilha. Em seguida, foram marcados os pontos correspondentes às colunas da matriz mencionada, como pode ser visto na figura 52.

Figura 53– Construção do quadrado – Dupla B

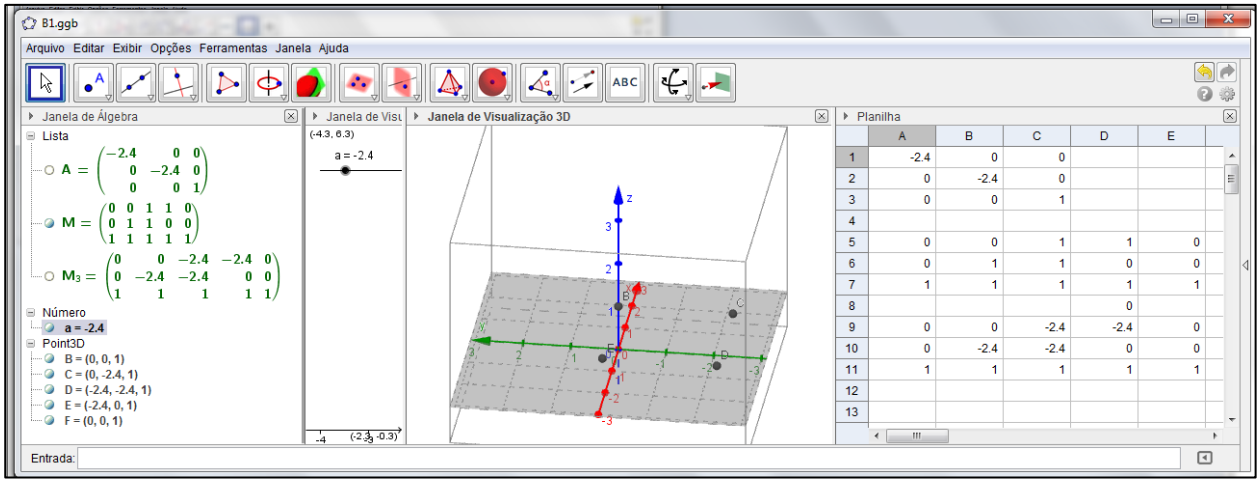


Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de ter marcado apenas os vértices relativos à figura proposta, os sujeitos conseguiram visualizar o que se esperava, um quadrado. Notou-se que esta etapa representou um caráter exploratório e operacional, tanto em relação à interface quanto ao conhecimento matemático em jogo, o que permitia inferir elementos de uma dialética de ação.

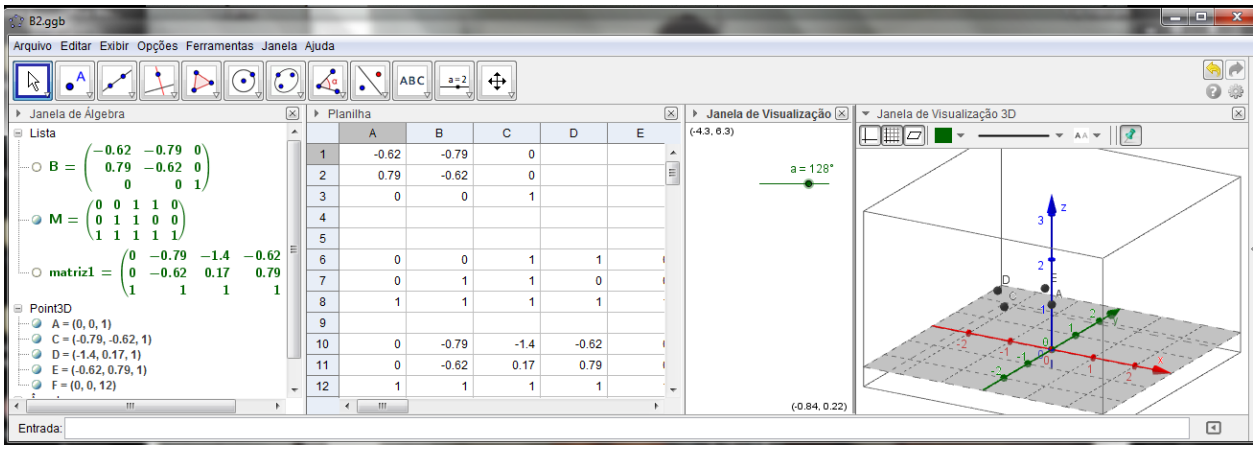
Dando continuidade a seu propósito de resolver os questionamentos da atividade, a dupla construiu mais três arquivos que podem ser observados nas figuras 53, 54 e 55.

Figura 54- Ampliação e redução das dimensões do quadrado – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 55 - Rotação do quadrado em torno do eixo Oz – Dupla B

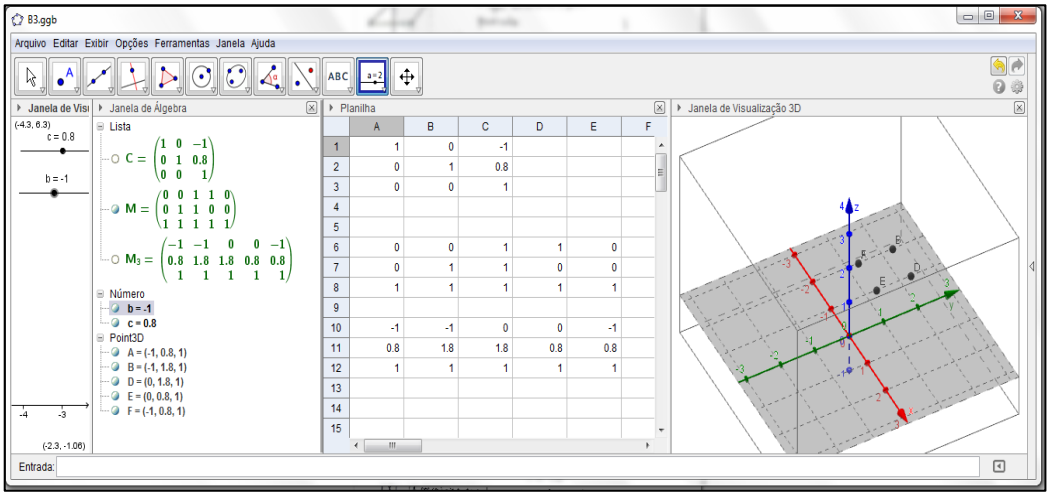


Fonte: Dados da pesquisa

Como é possível perceber, a dupla conseguiu desenvolver a proposta da atividade no ambiente GeoGebra 5 de forma correta. No decorrer desta ação, os estudantes comentaram que nunca teriam imaginado translação, rotação e mudança de dimensões de figuras pudessem ser resultantes de operações matriciais. Este fato e as discussões ao longo das dialéticas foram direcionados pelas intervenções realizadas a partir da interface do *software*. Em particular, aponta-se que, no ambiente proporcionado pelo programa, a dupla alterou diversas vezes a figura com a modificação de seletores, explorando a construção intensamente. A própria dupla indicou que seria muito difícil terem a visão dinâmica que lhes era proporcionada apenas com lápis e papel, reforçando o pressuposto em torno do valor da experimentação e da visualização como elementos da aprendizagem matemática

(Borba e Villrrreal, 2005) e a importância do planejamento da atividade, a partir da dinâmica proposta pela TSD.

Figura 56 - Translação do quadrado paralelamente ao plano xOy – Dupla B

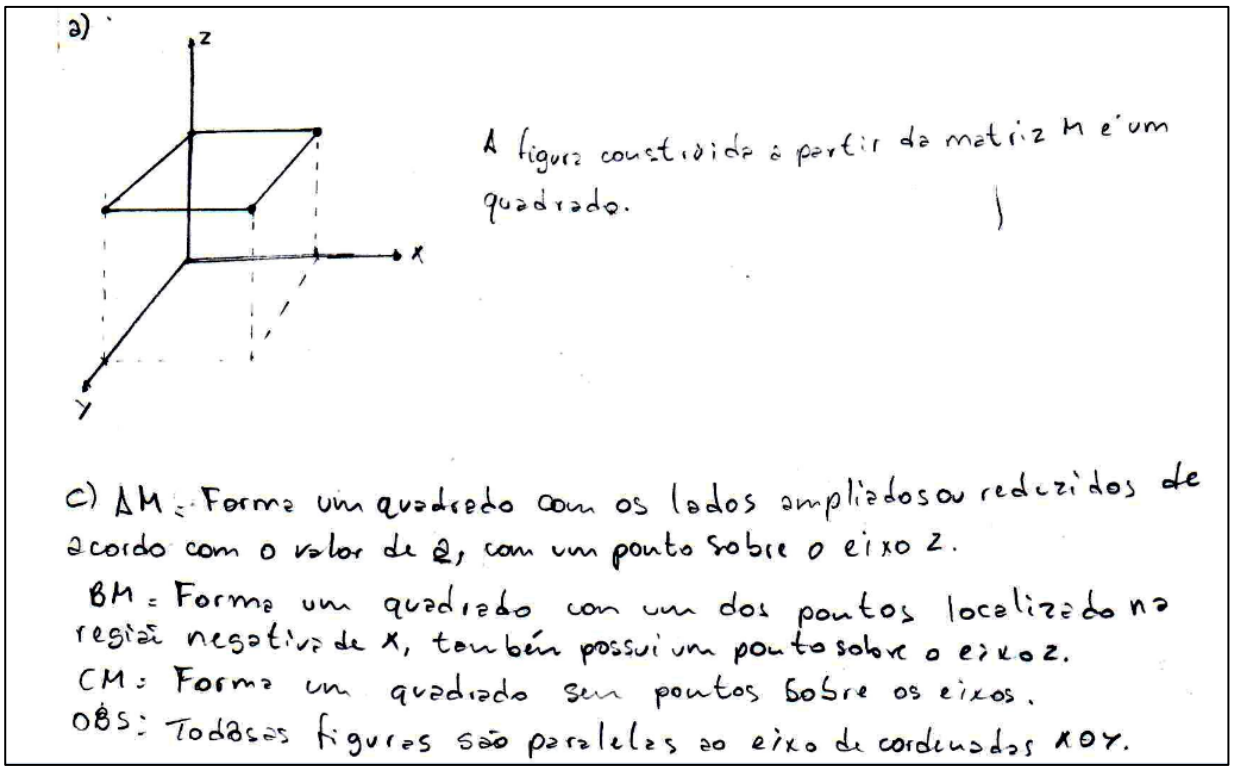


Fonte: Dados da pesquisa

Vale a pena ressaltar que, para construção M_3 (figura 55), do mesmo modo que nas demais construções, os alunos utilizaram conceito de multiplicação matricial; assim, tal conhecimento, adquirido inicialmente no Ensino Médio, serviu para encaminhar a compreensão dos conceitos envolvidos, bem como operacionalizar as soluções necessárias. Durante as discussões entre os membros da dupla, observou-se que eles poderiam construir a matriz no ambiente GeoGebra 5 de modo 'direto', usando a listagem de cada linha na janela de entrada com um comando, mas decidiram fazê-lo por meio da planilha, usando o conhecimento de multiplicação matricial e aproveitando o caráter dinâmico resultante desta decisão – mudar os valores envolvidos e visualizá-los numérica e geometricamente.

As dificuldades conceituais, entretanto, não tardaram a aparecer. Apesar de terem proporcionado a si mesmos subsídios importantes para fomentar a compreensão conceitual, os componentes da dupla B, em seguida, observaram que, em cada caso, as matrizes representavam transformações que associavam vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ a vetores no $\mathbb{R}^3$, mas não deixaram claro se entendiam se as mesmas eram ou não lineares, como podem ratificar suas respostas na figura 56.

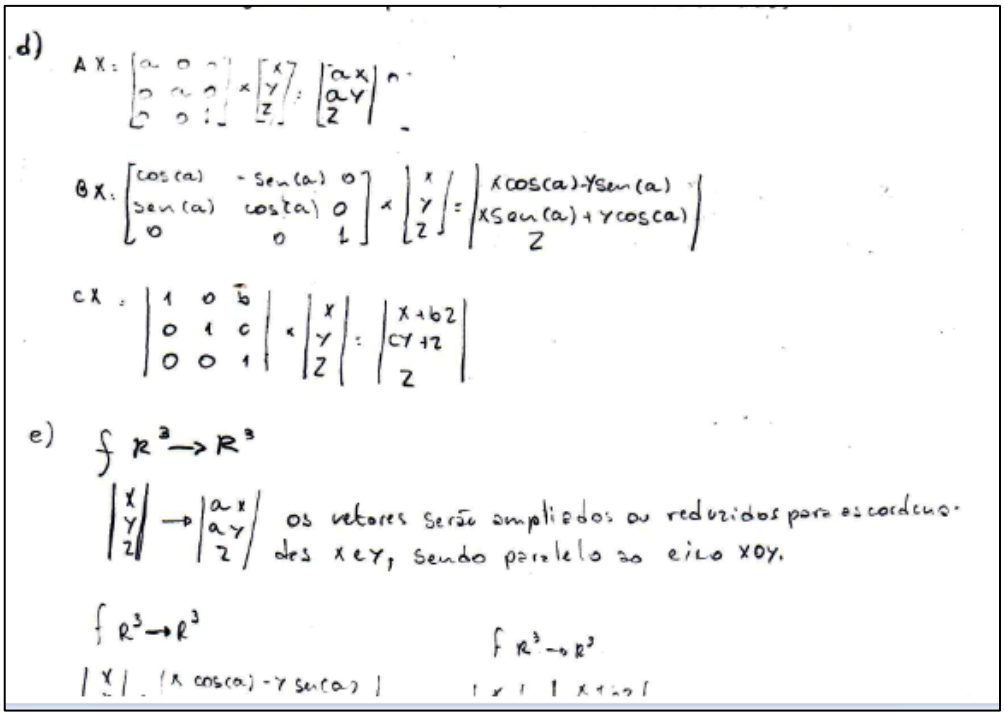
Figura 57- Resposta aos itens a, c – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

Ainda, em relação às respostas finais dadas pelos estudantes, pode-se observar que os mesmos realizaram construções corretas e revelaram fluência no uso do *software,* mas não revelaram o conhecimento esperado, que consistia em indicar se as transformações empregadas eram lineares ou não. Ou seja, não conseguiram extrair e associar tal característica das propriedades de distribuição matricial, saber este que fazia parte do conhecimento prévio da dupla, como pode ser visto na figura 57, falhando em correlacionar o conhecimento prévio como elemento constituinte da construção de novos saberes. Identificou-se, aqui, uma incapacidade, por parte dos sujeitos, em formular definições consistentes dos objetos matemáticos envolvidos, de forma a determinar completamente este objeto (Sierpinska, 2000).

Figura 58- Resposta final da segunda atividade – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 8 abaixo destaca as correlações entre os elementos da pesquisa, do ponto de vista da organização didática.

Quadro 8 - Análise esquemática da segunda atividade – Dupla B

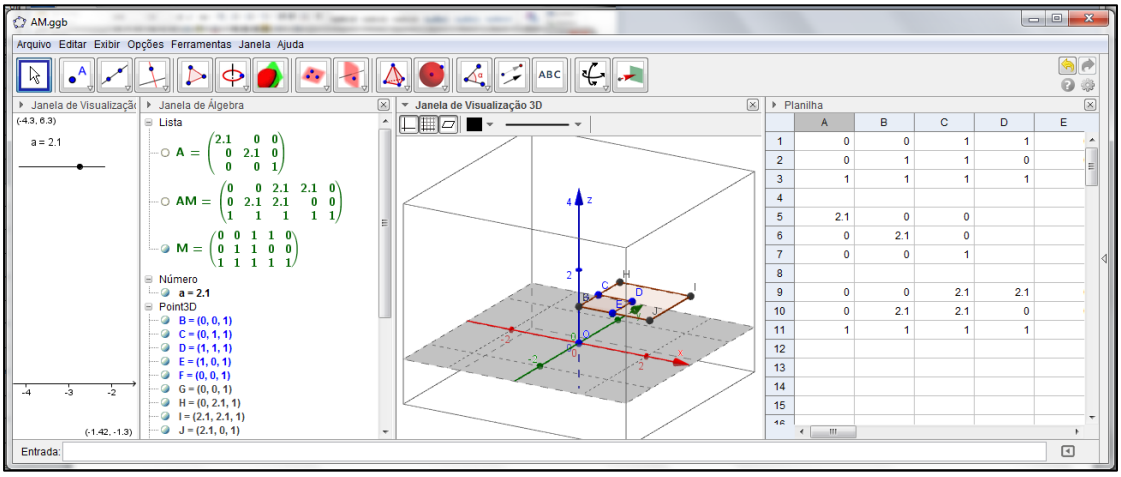
Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Uso das colunas da matriz M para criar os vértices do quadrado esperado como construção inicial; modificação de parâmetros e observação dos efeitos desta ação.	*Ação*	Opção pelo uso da planilha, no lugar do comando "pronto" para construir as matrizes e determinar os vértices do quadrado.
Conjecturas em torno das transformações de rotação, translação e dilatação, bem como a correlação das mesmas com as matrizes; porém, não indicam se as mesmas se referem a transformações lineares ou não lineares.	*Formulação*	
A interface do GeoGebra 5 é utilizada para verificar e certificar as propostas da dupla, menos no que se refere à suposta linearidade das transformações.	*Validação*	Uso dos seletores para fomentar experimentação e visualização dinâmicas.

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.3 Dupla C

Para iniciar a construção da segunda atividade, a dupla C efetuou um percurso operacional (construção da matriz, teste de valores, observação da troca de parâmetros dos objetos envolvidos) tendo por base o GeoGebra 5, para, nos momentos seguintes, formular e validar suas conjecturas. Nesta trajetória, a dupla construiu três arquivos, conforme recomendado no texto de referência.

Figura 59 - Construção do quadrado – Dupla C

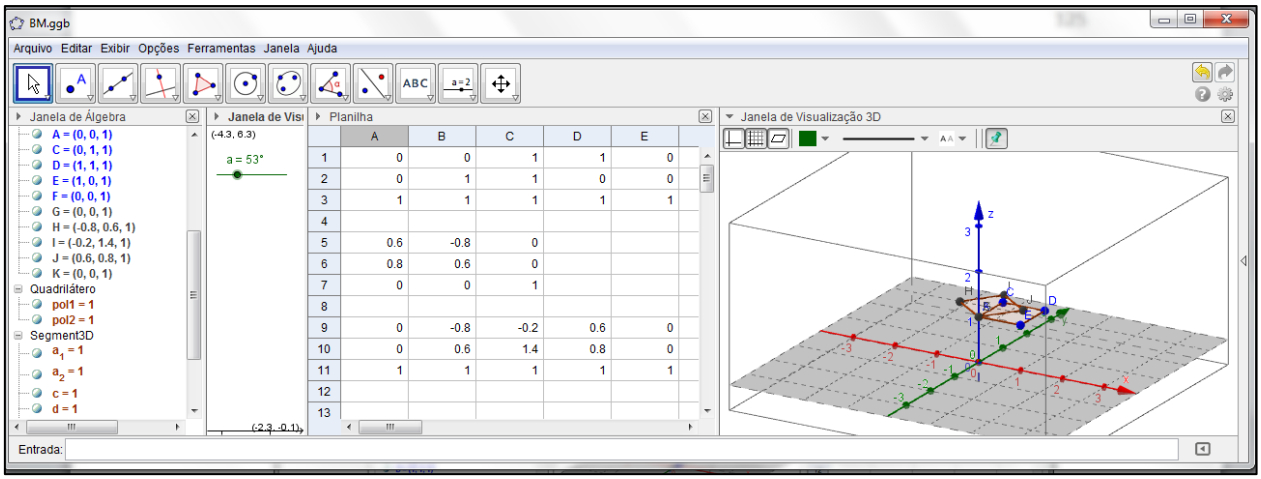


Fonte: Dados da pesquisa

Observando a figura 58, pode-se notar que a dupla obteve um quadrado, a partir dos pontos correspondentes às colunas da matriz M; além disso, a multiplicação das matrizes possibilitou observar, por meio das colunas da matriz AM, nitidamente, a transformação sofrida pelo quadrado. As discussões dos sujeitos durante a consecução das etapas da construção davam conta da compreensão que iam constituindo e da fluência que demonstravam com relação ao programa computacional.

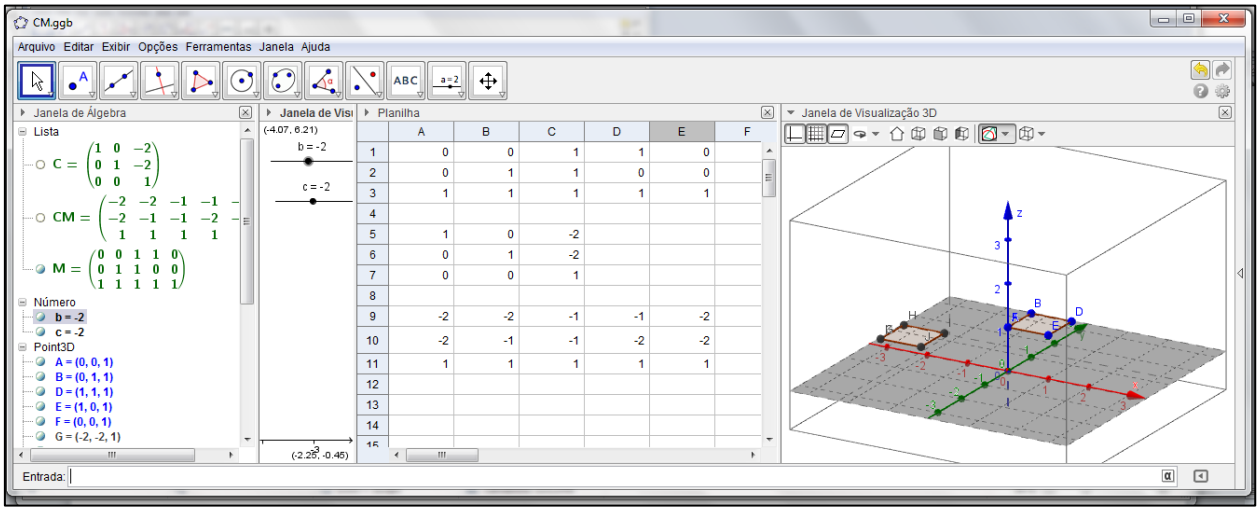
Da mesma forma, os itens que envolviam as matrizes BM e CM foram desenvolvidos (figuras 59 e 60) por meio dos comandos disponíveis na interface do *software*. Os alunos destacaram a ação dos seletores sobre os objetos, o que lhes permitiu exercer diversas experimentações, como, por exemplo, ampliar e reduzir o quadrado, o que gerou visualizações que concorreram por subsidiar suas conjecturas, o que ficou evidenciado nas respostas dadas aos itens *b* e *c* da atividade (figura 61).

Figura 60– Construção, no GeoGebra 5, do quadrado rotacionado – Dupla C



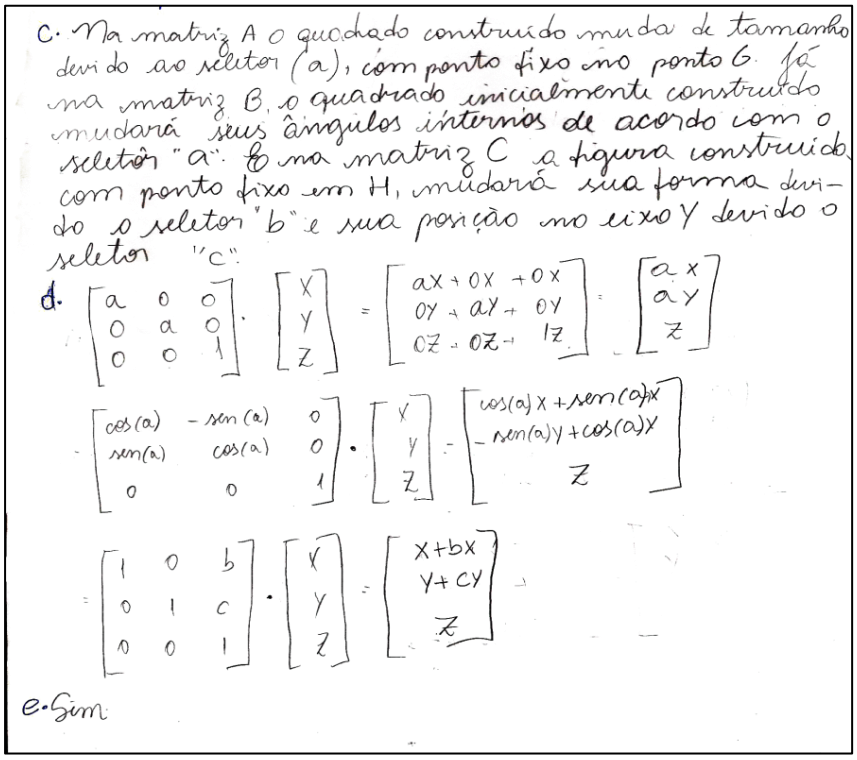
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 61– Construção, no GeoGebra 5, do quadrado transladado – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 62- Resposta final da segunda atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

A simples leitura das respostas escritas providas pela dupla permite compreender que o registro que fizeram, principalmente no item *c*, preocupou-se mais com um aspecto por assim dizer 'operacional' da atividade, quase que apenas uma descrição dos efeitos da manipulação das ferramentas do *software* sobre os objetos. Ainda que os estudantes tenham discutido sobre as transformações ao longo das dialéticas de formulação e validação pelas quais passaram, percebeu-se uma dificuldade em expressar, em termos conceituais, as ocorrências, do ponto de vista matemático. Ainda uma vez, surge o 'discurso da prática', indicado por Sierpinska (2000) – além disso, também se pode perceber que as interações com o *software*, no âmbito da estratégia provida pela situação, não foram suficientes para engajar os estudantes em uma investigação que os levasse a evidenciar a apreensão dos conceitos envolvidos em termos formais, ainda que os mesmos possam ser identificados parcialmente em seus discursos, principalmente no que se refere à relação das matrizes com as transformações. Isto pode ser percebido quando um componente da dupla diz ao outro "- Olha, a matriz está transformando o quadrado maior". Além disso, já na parte final da atividade, demonstram ter compreendido que as colunas da matriz M podem representar vetores do espaço – e

até mesmo discutem o fato de poderem usar a distributividade de matrizes numa combinação de vetores. Porém, na hora de responder ao item *e*, registram apenas "sim". Esta situação pode ser comparada com os resultados da investigação de Karrer (2006), na qual, em vários momentos, encontram-se narrativas confusas ou incompletas dos alunos.

Dito de outro modo, a dupla efetua uma multiplicação matricial, obtendo expressões algébricas; no entanto, não as caracterizam em termos de transformações. Ainda assim, não se pode dizer que não houve algum avanço em relação ao conhecimento: os estudantes evidenciam compreensões que antes não detinham e discutem que as mesmas puderam ser ampliadas a partir de intervenções no GeoGebra 5. O quadro 9 destaca as correlações existentes e a importância do planejamento das atividades à luz das propostas da TSD, bem como a utilização em relação ao uso do GeoGebra 5.

Quadro 9- Análise esquemática da segunda atividade – Dupla C

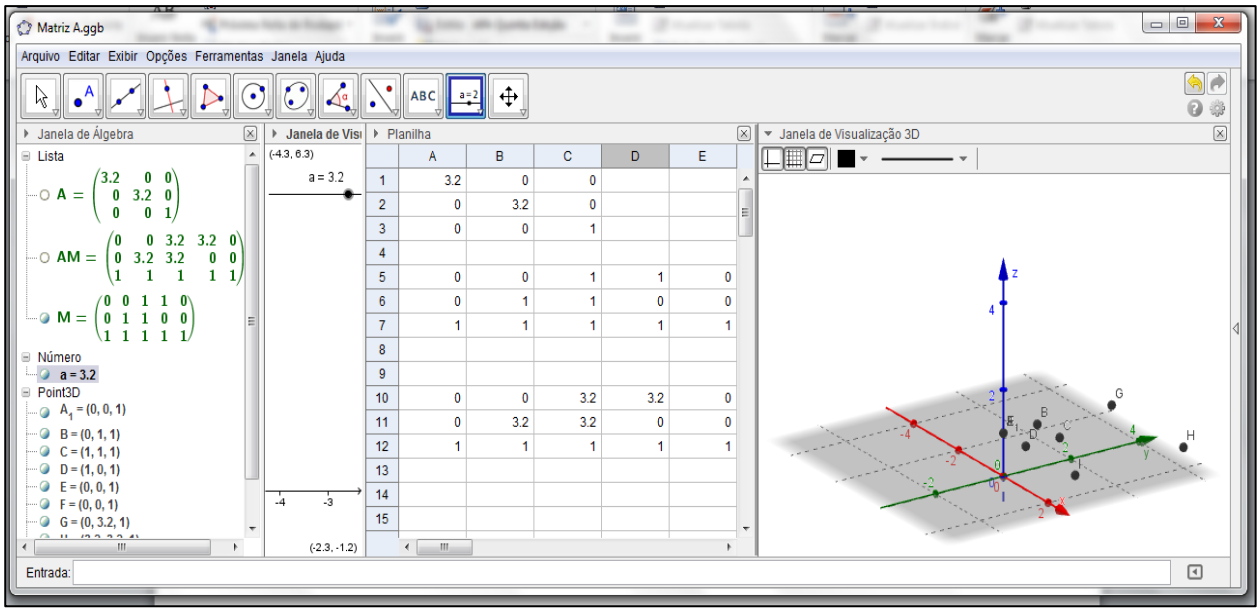
Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Construção da matriz, teste de valores, observação da troca de parâmetros dos objetos envolvidos.	*Ação*	Uso da planilha, de novos planos e das janelas de álgebra e visualização 3D. Uso do seletores em processo de experimentação.
Relacionamento das matrizes às transformações de maneira intuitiva e não formal; associação dos vetores do $\mathbb{R}^3$ a outros vetores do $\mathbb{R}^3$	*Formulação*	
A interface do GeoGebra 5 é utilizada para verificar e certificar as propostas da dupla, mas com limitações: ainda que algumas correlações tenham sido feitas, elementos conceituais importantes, como a correlação entre as matrizes e as transformações e o próprio conceito de transformação linear foram pouco explorados.	*Validação*	Consolidação dos saberes de forma mais inclusiva + experimentação e visualização das construções.

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.4 Dupla D

A Figura 62 corresponde à construção da atividade relacionada à primeira matriz A no ambiente GeoGebra 5, por meio da qual a dupla D, apesar de optar por uma construção simples[10] da atividade, apresentou um bom entendimento inicial sobre ela, como poderá ser observado mais adiante.

Figura 63- Construção no GeoGebra 5 referente às matrizes A e AM – Dupla D



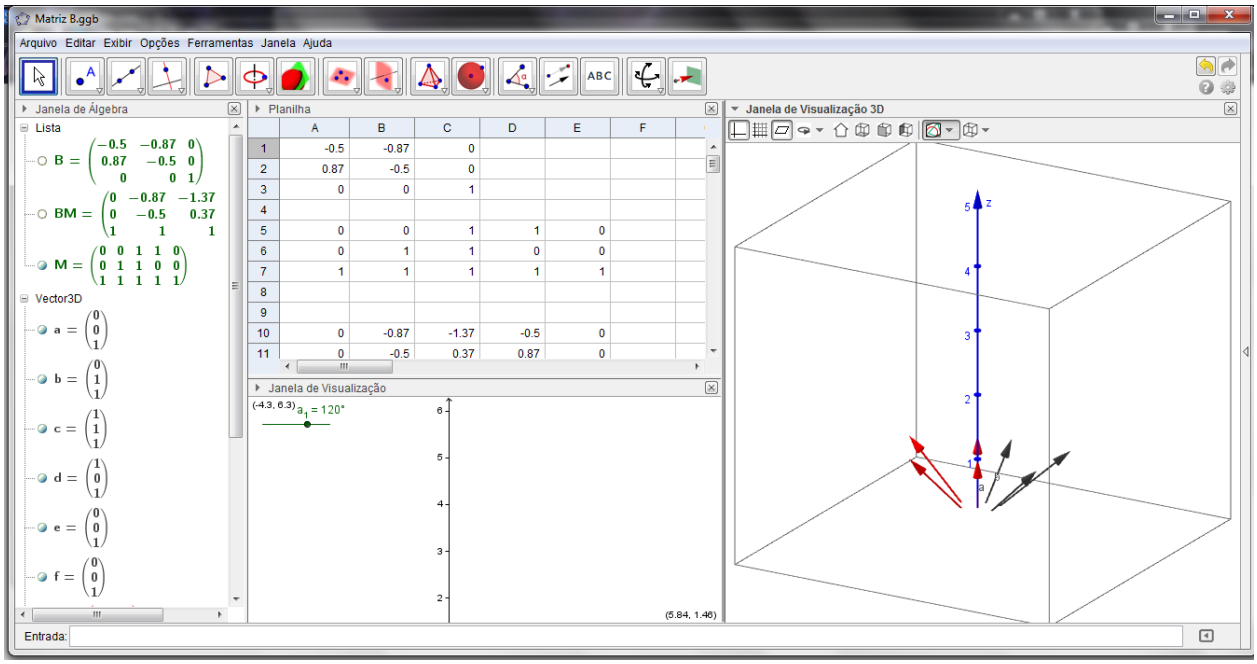
Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que a dupla não se preocupou com a evidenciação do quadrado por meio do traçado de suas arestas, mas obteve os vértices necessários e, por meio das visualizações das distintas representações, obteve construções que concorreram para subsidiar suas conjecturas. De fato, não havia a prescrição de um padrão para o trabalho com o programa, o que leva a concordância com Oliveira (2013), segundo o qual a fluência em um recurso tecnológico digital deve ser tal que permita embasar a aprendizagem matemática, não precisando, neste sentido, de intrincadas sofisticações.

Com relação às duas outras matrizes, B e C, a dupla construiu os arquivos que podem ser observados nas figuras 63 e 64, respectivamente,

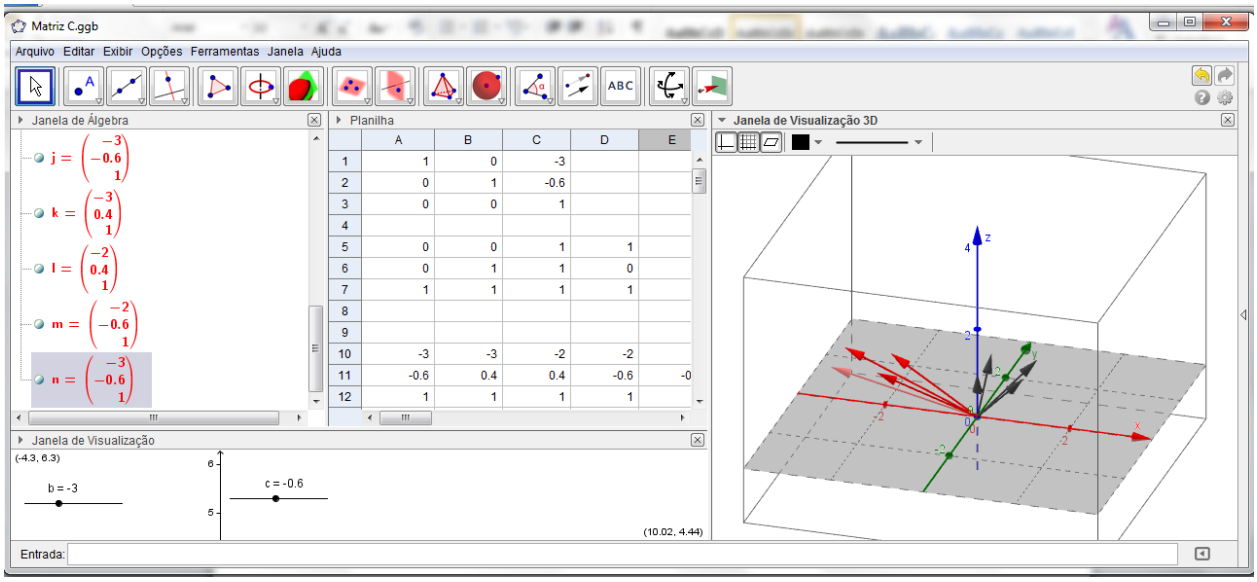
[10] Simples aqui corresponde ao fato da construção da atividade no ambiente GeoGebra 5 ser formada apenas pelos vértices da figura.

Figura 64- Construção no GeoGebra referente às matrizes B e BM – Dupla D



Fonte: Dados da pesquisa

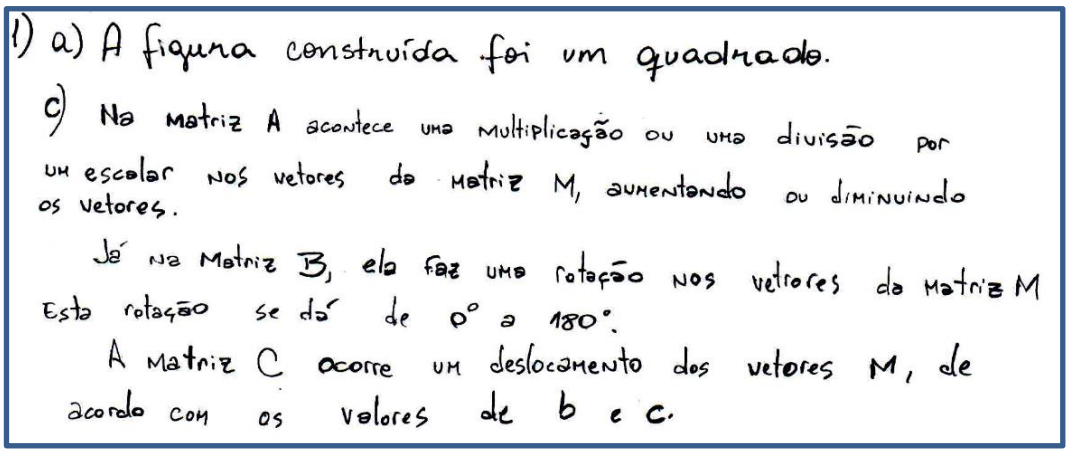
Figura 65- Construção no Geogebra 5 referente às matrizes C e CM – Dupla D



Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode observar nas duas últimas figuras, os componentes da dupla D optaram por esboçar seus resultados como vetores, escolha que nenhuma dificuldade acarretou em relação à construção do conhecimento que buscavam efetuar. Isto pode ser afirmado com base nas discussões da dupla, que evidenciaram o uso das representações vetoriais em suas conjecturas, e, também com base nos registros escritos providos pelos estudantes, conforme se encontra na figura 65.

Figura 66– Resposta final da segunda atividade – Dupla D (parte 1)


1) a) A figura construída foi um quadrado.

c) Na matriz A acontece uma multiplicação ou uma divisão por um escalar nos vetores da matriz M, aumentando ou diminuindo os vetores.

Já na Matriz B, ela faz uma rotação nos vetores da matriz M Esta rotação se dá de 0° a 180°.

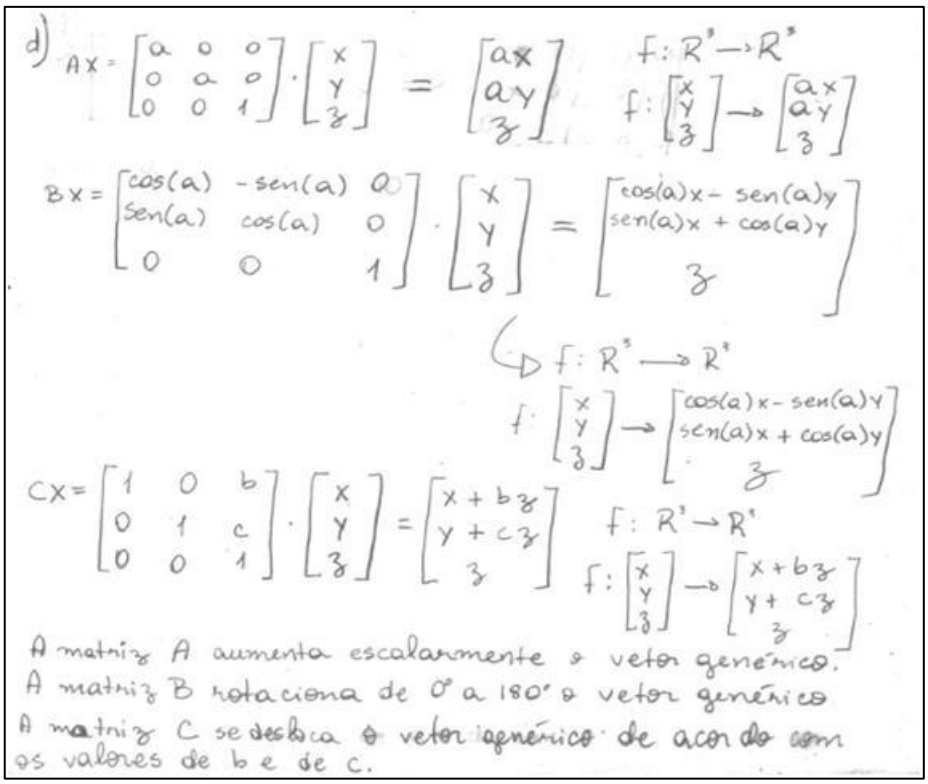
A Matriz C ocorre um deslocamento dos vetores M, de acordo com os valores de b e c.

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se observar que, para produzirem as respostas anteriores, os alunos fizeram uso constante dos seletores e observaram quais as modificações sofridas na figura e, apesar de terem visualizado a multiplicação das matrizes como vetores e não como pontos, não apresentaram dificuldade de entendimento. De modo geral, a introdução do *software* como intermediador do entendimento da representação matricial de transformações lineares foi muito importante para estes alunos: até este ponto, suas conjecturas foram se confirmando nas experimentações e visualizações produzidas, em um movimento que alternou as dialéticas de ação e formulação de maneira intensiva e que levou, inclusive, à refutação de algumas propostas. Esta intermediação, dentro da situação didática, serve para dar base à conceituação, manipulação e aplicação do conhecimento matemático envolvido, reforçando, assim, as asserções indicadas por Rosa, Goulart, Casanova, Lehmann (2009).

Com relação à parte final da atividade, as duplas apresentaram o registro constante da figura 66:

Figura 67– Resposta final da segunda atividade – Dupla D (parte 2)



Fonte: Dados da pesquisa

Em alguns momentos, os alunos discutem o fato de a matriz associar pontos do quadrado no plano z = 1 a pontos de um quadrado modificado também no plano z = 1, indicando que esse fato diz respeito a coordenadas homogêneas, o que revela certo entendimento sobre a representação matricial das transformações. Contudo, em seus registros, apesar de identificarem cada estrutura matricial como funções do espaço no espaço, os sujeitos confundiram a matriz com a função que associa um ponto genérico. Neste sentido, pode-se inferir que a existência de tal inadequação do conhecimento se deu em função do uso indiscriminado de diferentes níveis de linguagens e de descrição, como apontado por Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1999), já que os alunos mostraram entender o processo de representação nas discussões, mas não conseguiram expressá-lo de modo adequado e consistente em seus registros. Especificamente, neste caso, identificou-se uma tensão entre os que os autores mencionados chamaram de ‘modo sintético-geométrico’ e ‘modo analítico-estrutural’ do pensamento, o que levaria a dificuldades de relacionar uma linguagem geométrica de espaço de dimensão dois e três (retas, pontos, plano, transformações) à linguagem algébrica.

Além disso, a dupla não descreveu se as transformações descritas seriam ou

não lineares. Esta dificuldade conceitual, semelhante àquelas havidas com as demais duplas, foi, de certa forma, surpreendente, já que os alunos que a compunham haviam feito progresso importante, como já descrito, em relação ao conhecimento adquirido.

O quadro 10 traz as interações da dupla ao longo das dialéticas desenvolvidas na atividade.

Quadro 10- Análise esquemática da atividade 2 – Dupla D

Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Constroem e manipulam as matrizes, limitando os elementos ao estritamente necessário para subsídio às conjecturas. Usam vetores no lugar de pontos.	*Ação*	Mobilização do conhecimento prévio de translação, dilatação, e rotação como subsunçores para definir uma possível reação entre as representações funcionais e matriciais+ experimentação, visualização, dinamismo.
Realizam discussões acerca das movimentações observadas para determinar a relação entre uma possível representação funcional realizada ao considerar um vetor genérico; manipulam os seletores e anunciam as relações entre as matrizes e as transformações.	*Formulação*	
A interface do GeoGebra 5 é utilizada para verificar e certificar as propostas da dupla. A manipulação das colunas e as relações com os vetores subsidia de forma consistente as conclusões.	*Validação*	Manipulação dos seletores e das colunas das matrizes via planilha.

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.5 Análise da institucionalização da segunda atividade

Dando continuidade à investigação, e seguindo os pressupostos da TSD, após a sessão destinada ao trabalho com a segunda atividade, iniciou-se a sessão coletiva de institucionalização. Antes da mesma, pediu-se que cada dupla de alunos realizasse uma leitura de suas ações na qual, além de buscar entender como

raciocinaram para responder aos questionamentos feitos, buscou-se, também, perceber como utilizaram os conceitos básicos de matrizes, operações e propriedades matriciais, bem como de transformações para respaldar suas conjecturas. Neste momento, cada dupla teve a oportunidade de avaliar suas construções, de modo a perceber autonomamente possíveis falhas, e, assim, reordenar os conceitos.

A dupla A, por sua vez, percebeu que havia algo de errado com relação a uma das entradas das matrizes BM e CM; na discussão que se seguiu, identificaram o erro, já evidenciado nas análises, e obtiveram a construção correta das figuras resultantes das multiplicações matriciais no GeoGebra 5. Na sequência, relataram aos demais que, naquele momento, conseguiram ver a translação e a rotação da figura do quadrado, e automaticamente, também perceberam seu erro na descrição da representação funcional das matrizes B e C. Oportunamente, questionou-se a dupla A com relação às classificações das transformações como lineares ou não. A isso, responderam que era decorrência da combinação linear, pois como todas as entradas têm apenas grau um (queriam dizer que as entradas eram combinações lineares de *x*, *y* e *z*).

Tomando como base a colocação da dupla A, ao perceber a incompletude em relação à atividade, lembrou-se aos alunos a propriedade distributiva das matrizes e, utilizando-a, colocou-se no quadro o seguinte esquema:

$$M(v_1 + v_2) = Mv_1 + Mv_2$$

$$M(av_1) = aMv_{1,}$$

no qual v_1, v_2 são vetores arbitrários do espaço ou do plano e *a* é um escalar real.

Alguns alunos, como os da dupla D, revelaram que até haviam pensado em termos da propriedade, mas achavam que tinham de escrever vetores genéricos e multiplicados por escalares e isso era muito complexo. Mais uma vez, identificou-se aqui a afirmação de Sierpinska (2000) no sentido de indicar que os estudantes tendem a adotar um discurso de prática, que deve existir, também, mas não sem o discurso teórico, que acaba sendo relegado ao esquecimento.

Em seguida, a dupla A explicou que sua resposta final foi dada com base nas expressões resultantes, e que as entradas representavam combinações lineares dos vetores e que, por isso, responderam “sim”. Para os alunos, tal conclusão

representaria o resultado dos agrupamentos e operações que dependeriam uns dos outros, ou seja, na linguagem adotada pela dupla, como cada entrada da aplicação seria proveniente das combinações das entradas dos vetores genéricos, era possível agrupar termo a termo, obtendo a combinação linear. Indicaram que não existiriam termos de grau maior que 1 na atividade e nem termos independentes na expressão, logo, poderiam encontrar a combinação linear. Este posicionamento da dupla remete às conclusões feitas por Molina e Oktaç (2007), ao destacarem que, devido ao caráter abstrato da álgebra linear, os alunos tendem a buscar substitutos que lhes ajudem a converter as noções desta área em noções aceitáveis intuitivamente.

Em seguida, no que se refere à matriz C, foi colocada no quadro uma função de translação no plano:

$$T: \begin{matrix}\mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}\mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}\end{matrix}$$

Em seguida, pediu-se que os alunos encontrassem, se possível, uma representação matricial para T, como as que surgiram na atividade, e, juntamente, para que explicassem o que estaria ocorrendo com o vetor (x,y) ao ser aplicado à transformação T. Após alguns minutos, todos chegaram ao consenso de que não existiria tal representação. Concluíram que o vetor (x,y) está deslocado duas unidades “para direita” com relação ao eixo *x* e três unidades “para baixo” com relação ao eixo y. Assim, solicitou-se que os sujeitos comparassem tais assertivas com a matriz C da atividade.

Como resultado da comparação, duas duplas se manifestaram dizendo que se trataria do mesmo “comportamento” para um plano paralelo ao eixo xOy, as duplas A e D, mas só a dupla D fez menção às coordenadas homogêneas, com z = 1. Aqui, foi discutido o fato de a transformação T não ser linear, o que foi exemplificado no GeoGebra 5. Em seguida, procedeu-se à demonstração formal.

Voltando a matriz C, o conceito de coordenadas homogêneas dado no curso regular foi recordado. O fato de a transformação de translação exemplificada por T não ser linear foi indicado, ressaltando que seria possível aplicar o conceito de coordenadas homogêneas para obter uma representação matricial. Com relação a esta última abordagem, os alunos relataram que a compreensão foi ampliada a partir

do uso do GeoGebra 5, em função da possibilidade de alterar as características da matriz e por meio da visualização dos resultados a partir destas ações.

Em um último movimento, os sujeitos puderam trabalhar coletivamente com a pesquisadora em aplicações diversas e propostas semelhantes usando o GeoGebra 5, indicando compreensão ampliada dos conceitos (os erros anteriores não foram cometidos e os conceitos envolvidos foram enunciados com maior clareza).

4.3 Análise da atividade 3

Na aplicação da terceira atividade, esperava-se que os alunos obtivessem uma representação matricial da transformação linear T, de modo a estabelecer relações entre a imagem de uma base pela transformação linear, a representação algébrica e a matriz da transformação.

Inicialmente, a expectativa era que os alunos observassem que a mudança no valor de $T(e_1)$ também provocaria mudanças em a_1 e $a_{2;}$ quando mudassem o valor de $T(e_2)$, também mudariam os valores de b_1 e b_2, e, ao mudarem o valor de $T(e_3)$, também seriam alterados os valores de c_1 e c_2.

Na segunda parte da atividade tinha por objetivo que os alunos conseguissem escrever matricialmente os resultados obtidos anteriormente, para que, em seguida, escrevessem a forma matricial da transformação linear.

Durante esses processos esperava-se que os alunos observassem que a matriz de representação da transformação T é tal que suas colunas são formadas pelas imagens da transformação sobre os vetores da base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, ordenadamente. Finalmente, esperava-se que os alunos concluíssem que a transformação linear é inteiramente determinada, bastando saber os valores assumidos pelas transformações lineares T sobre a base B no espaço.

Uma importante característica do *software* GeoGebra 5 é que, neste ambiente, os alunos têm a possibilidade de perceber todas as propriedades simultaneamente, pois, por meio dos seletores, podem visualizam as representações geométricas e algébricas, e as respectivas alterações, ao mesmo tempo, característica essa que é dificultada durante uma aula tradicional, em função da indisponibilidade de um suporte dinâmico. Desta forma, em uma só atividade, os alunos podem visualizar um grande número de transformações lineares, bastando

para isso modificarem os valores atribuídos por ela aos vetores da base.

4.3.1 Dupla A

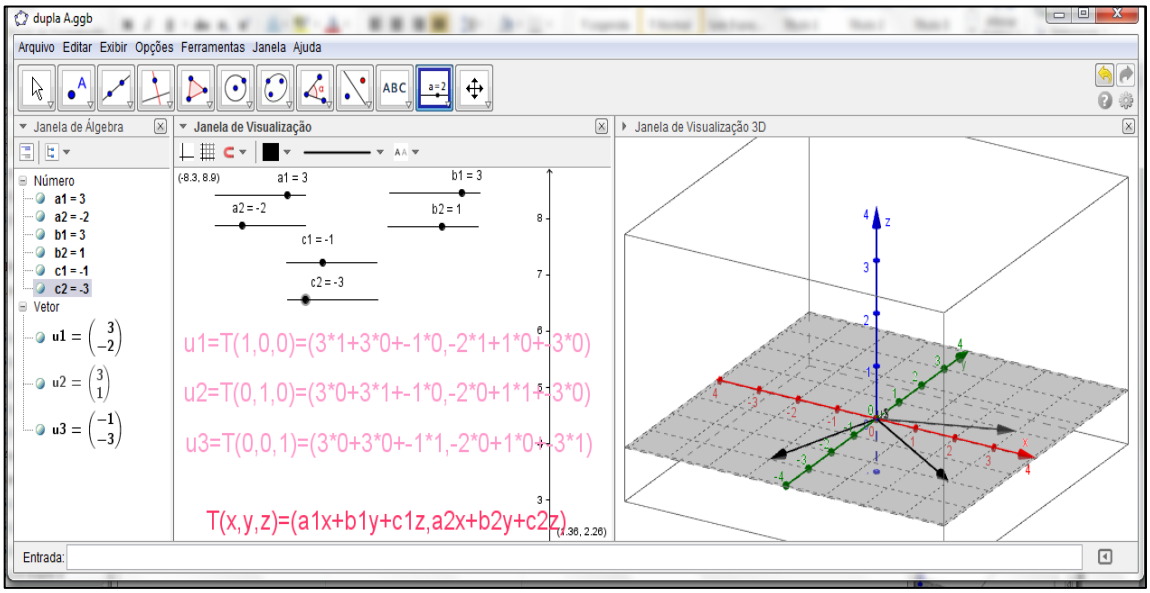
No GeoGebra 5, a dupla inicia suas ações de modo a visualizar suas construções por meio dos seletores, como exposto na figura 67, na qual a dupla, ao indicar os seletores, define a transformação de cada elemento da base em função dos mesmos. Deste modo, conseguem observar as mudanças sofridas na transformação, em função das mudanças ocorridas nas imagens $u_1 = T(e_1),\ u_2 = T(e_2),\ u_3 = T(e_3)$. No percurso das ações e discussões da dupla, observou-se que os sujeitos puderam ter uma melhor percepção da influência sofrida pela representação matricial à medida que a dupla pode visualizar várias mudanças de forma simultânea, como proposto em Borba e Villarreal (2005). Percebeu-se, também, que as experimentações e visualizações ocorridas por meio do GeoGebra 5 exerceram influência direta nas conclusões da dupla. Como é possível observar na figura 67, a dupla utilizou os seletores não somente para obter os valores dos vetores, mas também na representação funcional da transformação, o que os ajudou a obter uma visualização da influência sofrida pela representação à medida que eram mudadas as coordenadas dos vetores $u_1 = T(e_1),\ u_2 = T(e_2),\ u_3 = T(e_3)$.

A possibilidade das duplas trocarem valores da transformação de uma determinada base, e, a partir disso, levantarem questionamentos sobre as mudanças sofridas na sua representação tanto matricial quanto funcional, evidencia a importância do planejamento da atividade com base na proposta dinâmica sugerida pela TSD.

Especificamente neste ponto, reforçou-se a percepção de que o ensino com atividades baseadas na exploração dinâmica das propriedades algébricas permite novas perspectivas de apreensão acerca do conceito de transformações lineares que não eram, anteriormente, conhecidos ou percebidos. Ainda assim, até aqui, a enunciação de tais conceitos de maneira formal e o emprego dos mesmos em problematizações diversas não foi algo que se conseguiu observar.

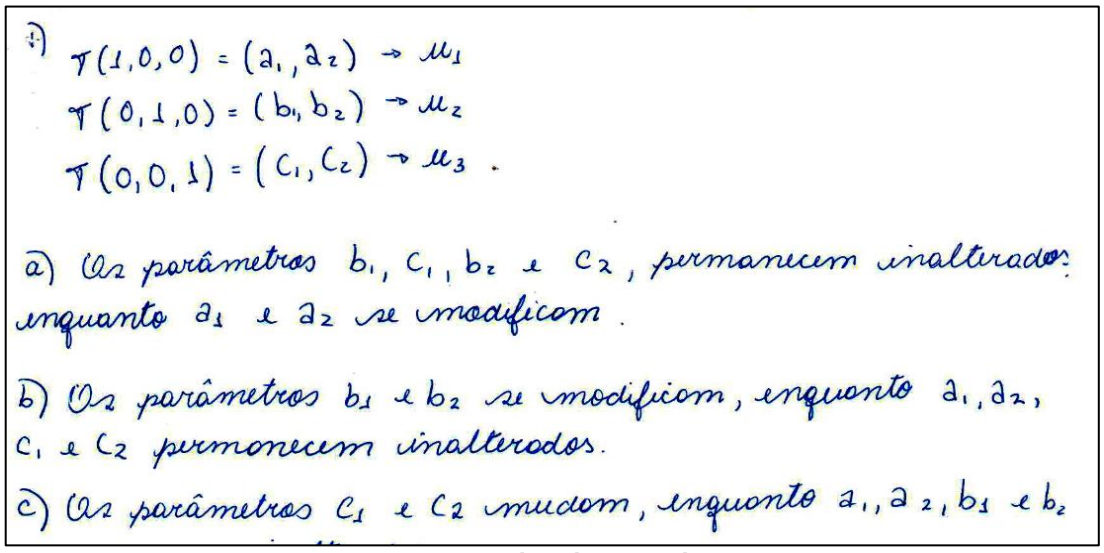
Com referência às conjecturas e formulações realizadas por meio destas construções, a dupla apresentou as respostas para os questionamentos de (a) à (c) que podem ser observadas na Figura 67.

Figura 68– Construção no ambiente Geogebra 5 da terceira atividade - Dupla A



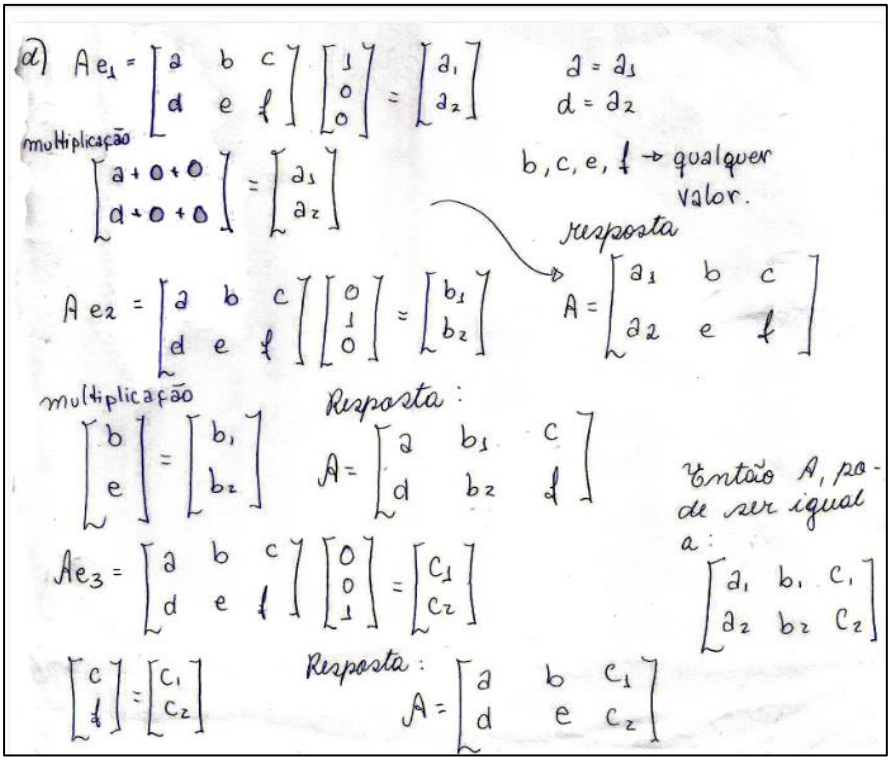
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 69– Registro da terceira atividade, itens a, b, c – Dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 70– Registro da terceira atividade referente ao item d



Fonte: Dados da pesquisa

Observando as ações e discussões realizadas durante a terceira atividade e comparando os registros disponibilizados nas figuras 68 e 69, foi possível inferir que os alunos da Dupla A confirmaram suas conjecturas não somente algebricamente, mas também por meio do uso do software GeoGebra 5. Depois de escrever a matriz A (figura 69), pode-se observar nas discussões que os alunos, à medida em que trocavam os valores dos parâmetros no GeoGebra 5, observavam as mudanças da matriz, constatando que, quando a matriz mudava, a função também mudava. Com isso, deduziram que a matriz seria uma representação da transformação linear.

Ainda que os resultados analisados anteriormente tenham apontado fortes indícios de compreensão dos fenômenos envolvidos, os estudantes não conseguiram fundamentar a definição de transformações lineares como dependente dos valores da mesma em uma base do espaço. Volta-se a aventar, como motivação para estas limitações, as dificuldades com o sistema de linguagens e símbolos providos pela álgebra linear, a tendência de preservação de um discurso prático e o apego aos modelos intuitivos (Sierpinska, 2000; Dreyfus, Hillel e Sierpinska, 1999). O quadro 11 procura evidenciar a dinâmica investigativa dos sujeitos.

Quadro 11 - Análise esquemática da segunda atividade – Dupla A

Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Busca de representações que permitam relacionar os vetores, a base e a transformação. Os sujeitos realizam diversas experimentações e as visualizam.	*Ação*	No GeoGebra 5, os alunos constroem seletores correspondente as entradas dos vetores u_1, u_2 e u_3 em função dos parametros; modificam os valores dos seletores na janela do software; constroem a representação funcional de T no GeoGebra 5.
Discutem sobre as mudanças sofridas na transformação e conjecturam que as colunas de A correspondem às imagens dos vetores da base pela transformação.	*Formulação*	
Usam a comparação dos resultados observados no GeoGebra 5 para validar suas conjecturas, juntamente com o conhecimento prévio do conceito de base de um espaço vetorial. Expressam no papel a dependência de T em função da base $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, mas não avançam às definições formais.	*Validação*	

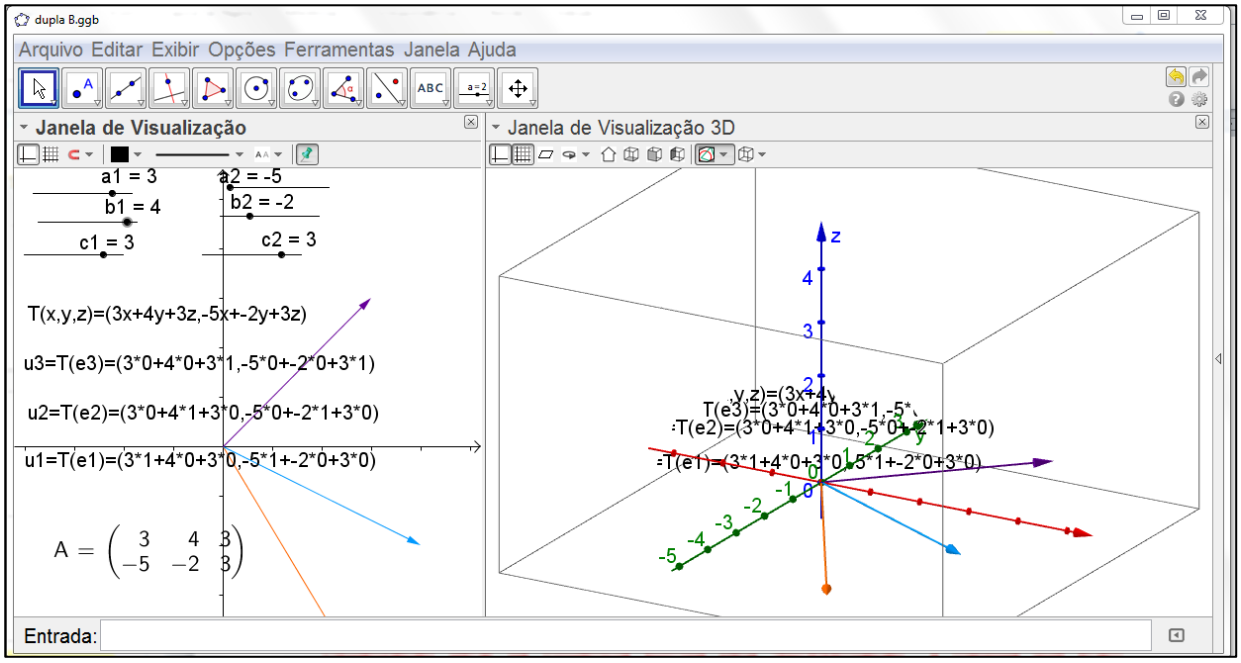
Fonte: Dados da pesquisa

4.3.2 Dupla B

A dupla, inicialmente, construiu em seu arquivo a expressão da transformação linear T, os vetores $u_1 = T(e_1)$, $u_2 = T(e_2)$, $u_3 = T(e_3)$, todos com auxílio da ferramenta seletor, como exibido na figura 70, atitude esta que possibilitou aos alunos observarem as mudanças sofridas pela transformação imediatamente quando eram alterados os valores dos parâmetros dos vetores u_1, u_2 e u_3. Nesse momento, foi possível observar os alunos no âmbito das dialética de ação e de formulação, à medida que usam o programa computacional e discutem entre si a respeito destas construções, até estabelecê-las efetivamente. As discussões se mostraram fundamentais neste ponto, evidenciando a importância das interações no âmbito da situação. Este movimento dos alunos, em meio às suas ações no ambiente informático, remete ao posicionamento de Karrer (2006), que afirma que o ambiente informatizado promove uma interação entre o usuário e o computador baseada na interação simbólica e computacional do que o estudante digita ou "clica". A autora conclui que tal processo resulta em desenvolvimentos cognitivos particulares. Este movimento e essa interação entre os alunos da dupla B e o *software* são inerentes ao caráter da dinâmica proposta pela TSD, na qual os alunos,

ao longo das dialéticas, se apropriam das possibilidades oferecidas pelo *software* GeoGebra 5 para construirem suas conjecturas.

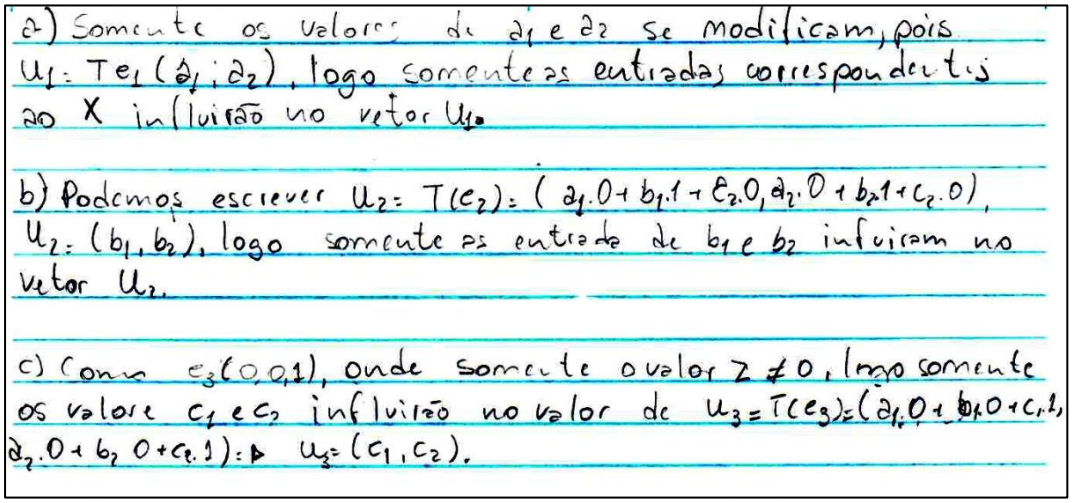
Figura 71- Visualização no GeoGebra 5 da segunda atividade – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

As primeiras respostas às questões que acompanham a segunda atividade foram registradas pela dupla B e podem ser vistas na figura 71.

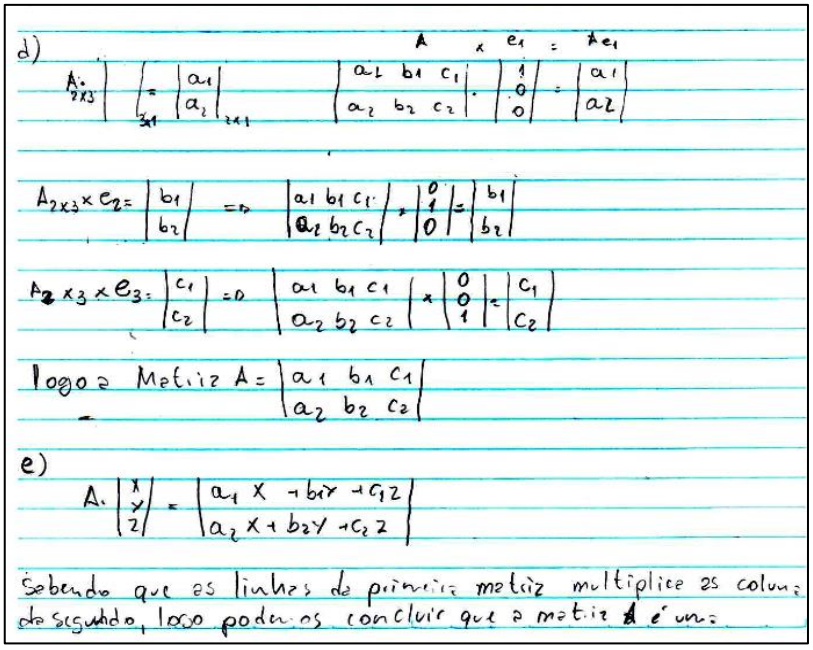
Figura 72– Respostas da terceira atividade – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de uma referência indevida a uma variável x, as respostas aos itens (a), (b) e (c) foram corretas, e demonstram a compreensão esperada, fortemente calcada nas interações, tanto humanas quanto em relação ao *software*.

Figura 73– Respostas da terceira atividade – Dupla B

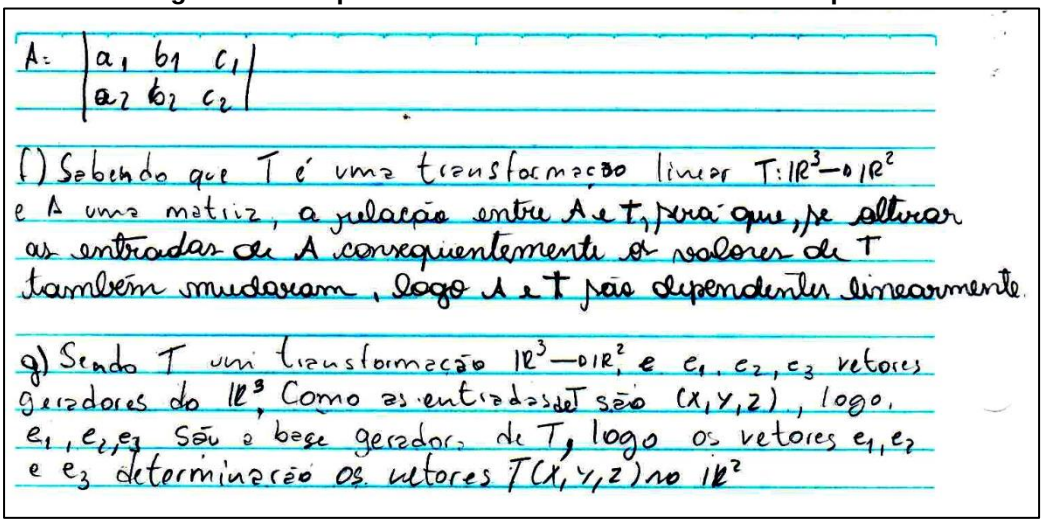


Fonte: Dados da pesquisa

A figura 72 indica que a dupla conseguiu explorar o ambiente do software GeoGebra 5 para, com o auxílio de ferramentas como os seletores, construir a matriz A e observar suas mudanças juntamente com as mudanças de T, construção que eles usaram para estabelecer a relação de dependência. Esta relação foi efetivamente observada ao longo do trabalho exercido pela dupla B.

No decorrer das justificativas da dupla aos questionamentos, fica clara a percepção, por parte dos mesmos, do que está ocorrendo. Ainda se percebe, no entanto, que os estudantes se encontram bastante confusos com relação à notação matemática, o que, a longo prazo, pode acarretar prejuízos em relação a outros conceitos, como é possível perceber na Figura 73.

Figura 74– Respostas finais da terceira atividade – Dupla B



Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, os protocolos indicam que a dupla confundiu a relação representacional da transformação com dependência linear. Apesar dessa dificuldade em se expressar, os sujeitos conseguiram perceber a importância dos valores atribuídos pela transformação aos vetores da base, a qual tentam explicar usando como referência a transformação para um vetor arbitrário (x,y,z).

A análise do desenvolvimento da atividade da dupla B, a exemplo do que se fez até agora, pode ser observada no quadro 12:

Quadro 12- Análise esquemática da segunda atividade – Dupla B

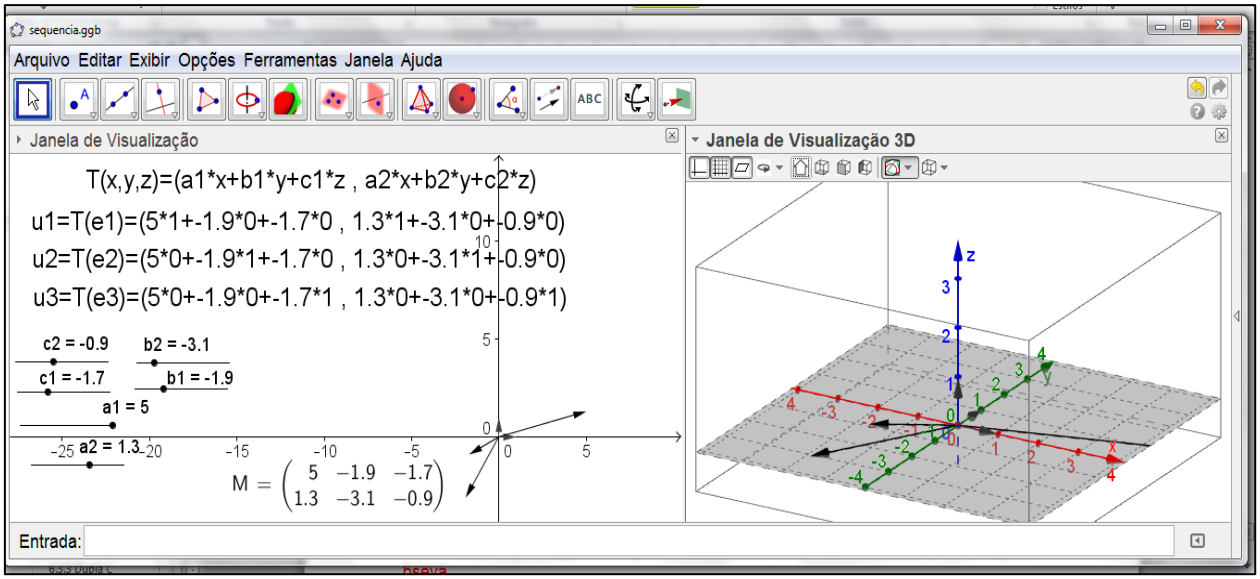
Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Experimentações e visualizações intensivas são feitas, na tentativa de compreender a relação entre os elementos envolvidos (vetores, base e transformação).	*Ação*	No GeoGebra 5, os alunos constroem seletores correspondente as entradas dos vetores u_1, u_2 e u_3 em função dos parametros; modificam os valores dos seletores na janela do software; constroem a representação funcional de T no GeoGebra 5.
Discutem a correlações existentes entre as colunas de A e as imagens dos vetores da base pela transformação; conjecturam sobre a dependência, mas a confundem com a relação representacional da transformação	*Formulação*	
Usam a comparação dos resultados observados no GeoGebra 5 para validar suas conjecturas. Expressam, com alguns erros, a dependência de T em função da base $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$.e não avançam nas definições formais.	*Validação*	

Fonte: Dados da pesquisa

4.3.3 Dupla C

A dupla C, inicialmente, utilizou o GeoGebra 5 sem dificuldades. A construção e as visualizações das janelas do programa apresentaram menor número de elementos de referência do que nos protocolos anteriores, o que não representou qualquer prejuízo ao progresso dos mesmos ao longo das dialéticas de ação e formulação (figura 74).

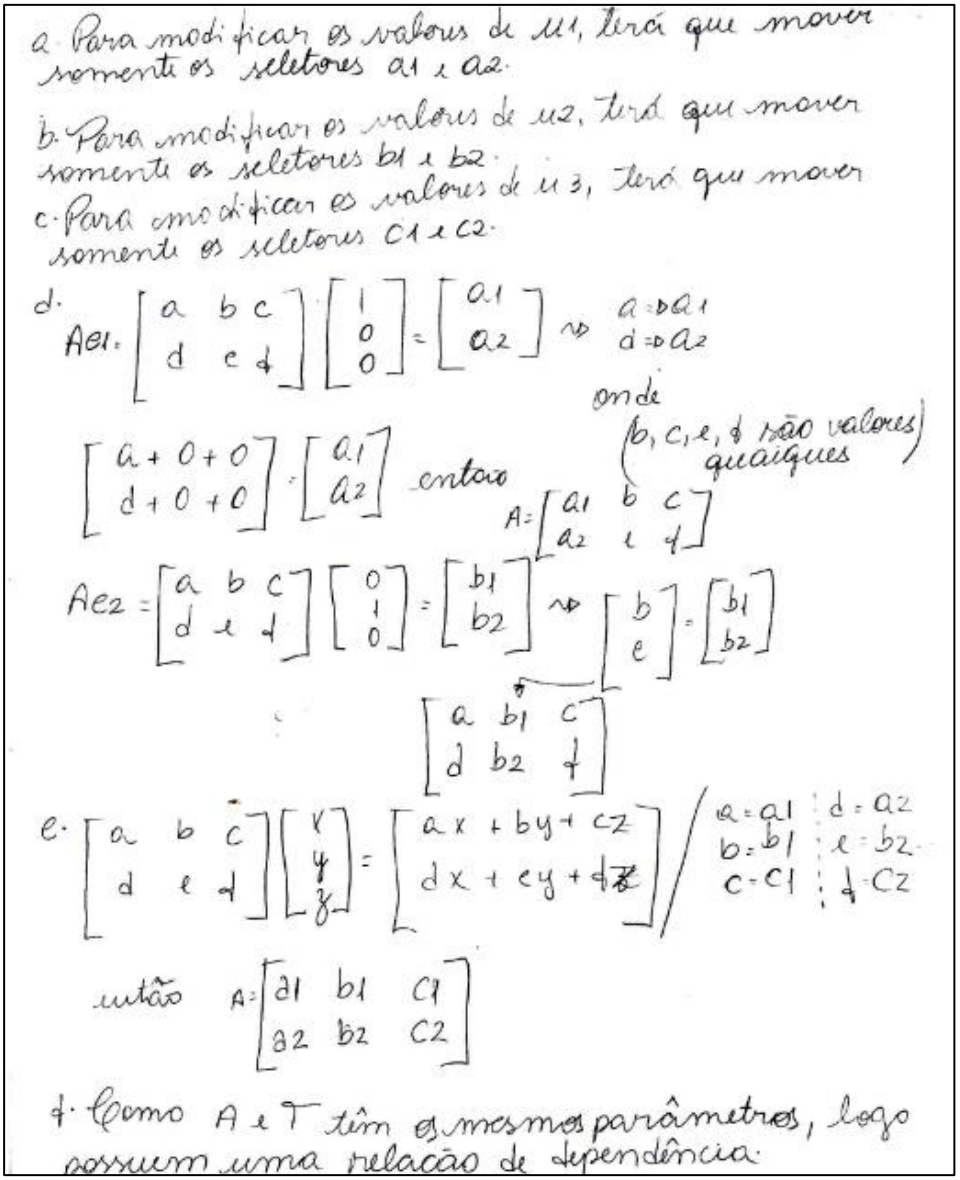
Figura 75- Construções referentes à terceira atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

Ainda sobre as construções e discussões realizadas entre membros da dupla durante o processo investigativo, nota-se que haviam percebido que, ao modificaram os valores da transformada da base de vetores e_1, e_2, e_3 obtinham, igualmente, modificações da expressão da transformação; no entanto, ao verificar os registros escritos da dupla, percebeu-se que apresentaram severas dificuldade para traduzirem este entendimento de maneira organizada e formal. Contudo, os componentes da dupla C responderam aos itens (a), (b) e (c) corretamente, uma vez que as observações na interface computacional concorreram para subsidiar suas conjecturas. Constroem a matriz A no GeoGebra 5 e a utilizam, juntamente com discussões sobre a dependência entre a matriz e a transformação, para formular propostas corretas (figura 75).

Figura 76- Resposta aos questionamentos levantados na terceira atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla C, apesar dos entendimentos mostrados com relação à representação matricial durante a sua trajetória investigativa, não conseguiu articulá-lo adequadamente com o conhecimento acerca da definição de base de um espaço vetorial, ainda que, nas discussões entre os mesmos, terem declinado que "- A atividade só depende dos valores dados para e_1, e_2, e_3, então a expressão também depende desses vetores". A resposta constante da figura 76 não indica que os mesmos reconhecem o valor exato desta afirmação – ou que não souberam formalizá-la adequadamente em um momento posterior. Ou seja, não reconheceram formalmente que, em relação à transformação linear T e os vetores e_1, e_2, e_3, e considerando a base, vale a seguinte expressão:

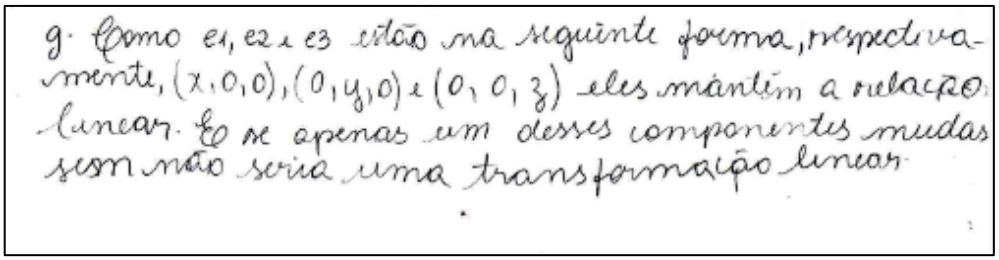
$$(x, y, z) = x\,.\,e_1 + y.\,e_2 + z.\,e_3$$

Aplicando a transformação linear T a ambos membros da equação anterior, segue:

$$T(x, y, z) = x\,T(e_1) + yT(\ e_2) + zT(e_3\,)$$

Não foi possível inferir do protocolo mencionado que os sujeitos reconhecem que a expressão de T para um vetor qualquer (x,y,z) estaria determinada, bastando que se soubesse os valores de T em uma determinada base. Ainda aqui, esta compreensão apenas açodada pelo discurso prático confirma as asserções de Sierpinska (2000) acerca da dificuldade com o formalismo da álgebra linear e a busca de um discurso prático a qualquer custo.

Figura 77- Resposta final da terceira atividade – Dupla C



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla C, levando-se em conta as dialéticas da TSD, empreendeu a trajetória investigativa relacionada no quadro 13.

Quadro 13- Análise esquemática da segunda atividade – Dupla C

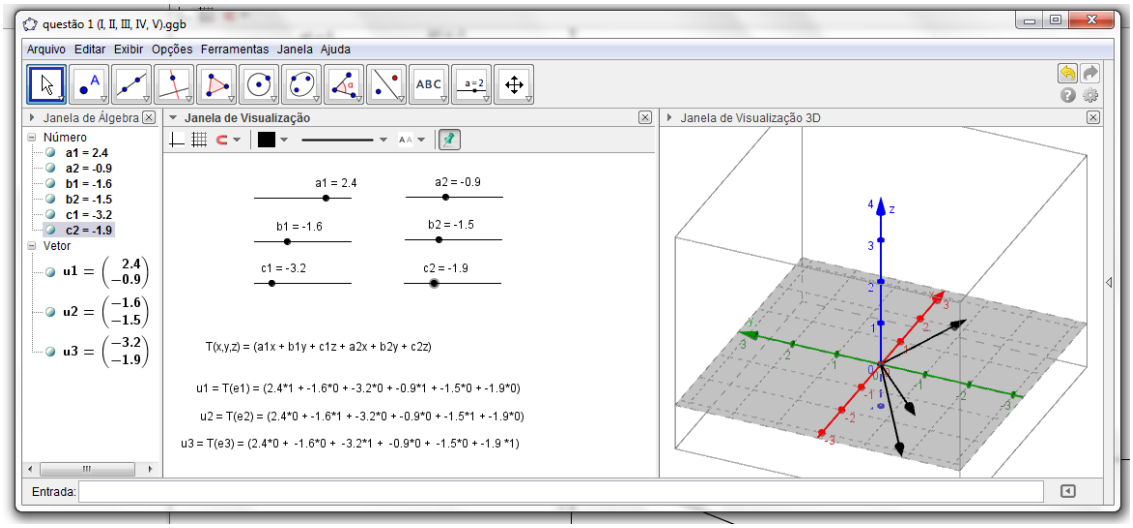
Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Valem-se do dinamismo da interface, da experimentação por meio dos dispositivos disponíveis e das visualizações para conjecturar sobre a dependência da matriz em relação à transformação. Construção da representação funcional de T.	*Ação*	No GeoGebra 5 constroem seletores correspondentes às entradas dos vetores u_1, u_2 e u_3; modificam os valores dos seletores na janela do *software*.
Discutem sobre as mudanças sofridas e concluem que as colunas de A correspondem à imagem dos vetores da base pela transformação.	*Formulação*	
Usam a comparação dos resultados observados no GeoGebra 5 para validar suas conjecturas	*Validação*	

Fonte: Dados da pesquisa

4.3.4 Dupla D

Ao iniciar a terceira atividade, a dupla D comentou a respeito daquilo que classificaram de “caráter inovador da proposta”. Ainda assim, prosseguiram utilizando o GeoGebra 5 com bastante desenvoltura, apresentando fluência suficiente para construir os vetores e lançar mão das diversas janelas disponíveis à visualização. Em pouco tempo, os alunos expuseram que, no caso, tratava-se de uma representação matricial da transformação linear T. Com isso, eles disseram ter concluído que as colunas correspondiam a imagem dos vetores.

Figura 78– Construções relativas à terceira atividade – Dupla D



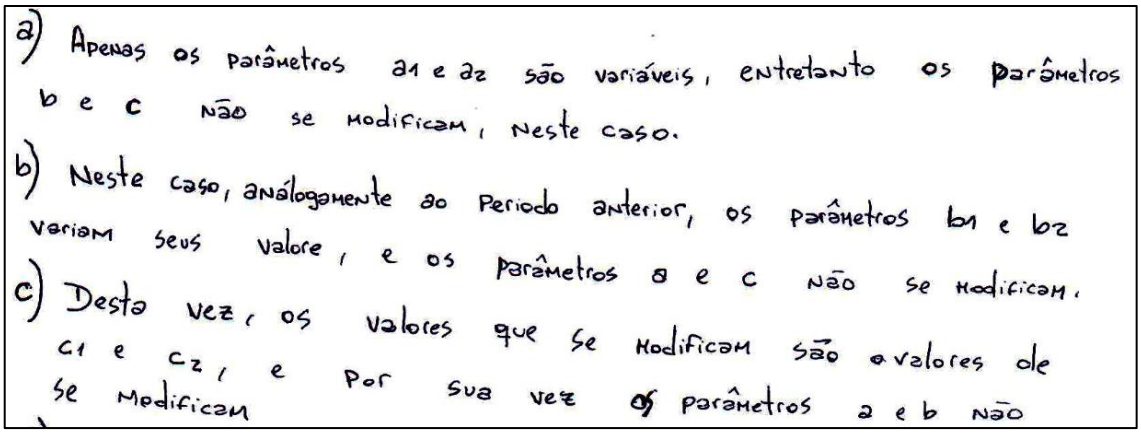
Fonte: Dados da pesquisa

A partir dessas declarações, inferiu-se que os estudantes conseguiram dar um significado para a relação de dependência da transformação, se considerados os valores atribuídos à mesma.

Com relação ao uso da interface do GeoGebra 5, inferiu-se que este ferramental foi muito importante como mediador das interações, à medida em que possibilitou à dupla a ampliação, de modo dinâmico, da representação funcional e matricial da transformação linear, o que foi confirmado nas observações dos diálogos realizados enquanto procuravam dar conta da atividade. Em relação à mesma, os alunos realizaram a construção da matriz A e observaram as mudanças relacionadas às alterações dos vetores u_1, u_2 e u_3. Um dos componentes da dupla comentou que bastava olhar para a função como na tarefa passada. A correlação feita pelo aluno indicou que, na atividade anterior, as matrizes representavam, por

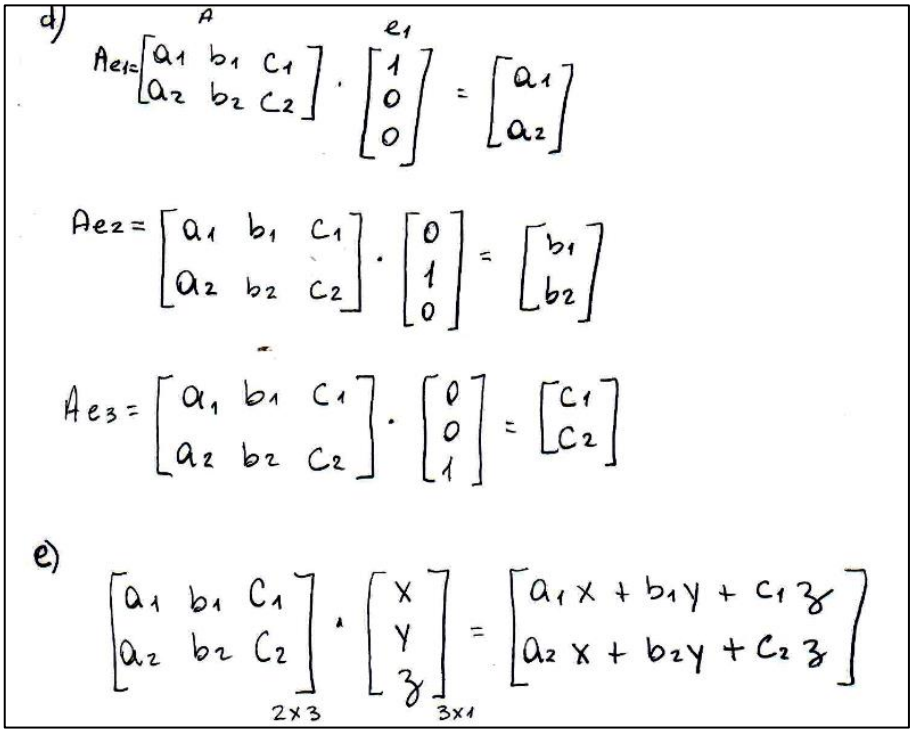
meio de operações como a multiplicação, por exemplo, transformações como a de dilatação, e que a aplicação a um vetor genérico forneceria a representação algébrica da aplicação. Para os estudantes, na atividade atual, dever-se-ia considerar os vetores e_1, e_2 e e_3. Com base nesse discurso, a dupla produziu as respostas das Figuras 78 e 79.

Figura 79– Resposta da terceira atividade – Dupla D



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 80- Resposta aos itens (d) e (e) da atividade com base na interface do GeoGebra 5

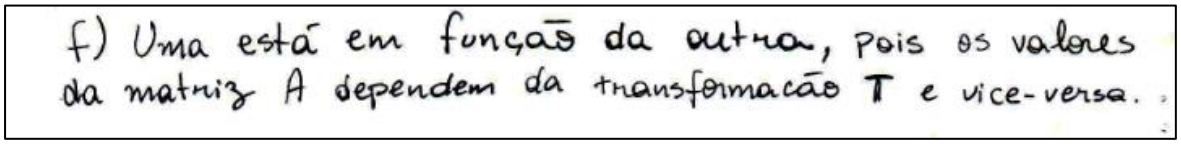


Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da coerência do discurso dos alunos enquanto discutiam, nada foi possível observar com relação à dependência da transformação linear em relação

aos vetores e_1, e_2 e e_3. Em relação ao fato de, nessariamente, fazerem parte de uma base também nada foi identificado. A resposta limitou-se a identificar a dependência já mencionada (figura 80).

Figura 81- Resposta final da dupla D



Fonte: Dados da pesquisa

Sinteticamente, pode-se dizer que os estudantes verificaram a dependência entre a matriz A e a transformação linear T, mas não fica evidente que compreenderam que ambas dependem dos valores assumidos pelos vetores e_1, e_2 e e_3 em T. A análise do desenvolvimento durante a atividade da dupla D pode ser observada no quadro 14 abaixo:

Quadro 14– Análise esquemática da segunda atividade – Dupla D

Movimento dos sujeitos da pesquisa	Dialética (TSD)	Uso do GeoGebra 5
Ainda que surpresos com as "inovações" propostas, constituem os elementos matemáticos envolvidos na atividade e exploram as características dinâmicas disponíveis no ambiente do GeoGebra 5.	*Ação*	No GeoGebra 5, constroem seletores correspondentes às entradas dos vetores u_1, u_2 e u_3; modificam os valores dos seletores na janela do *software*.
Discutem sobre as mudanças ocorridas na manipulação dos objetos representados na interface computacional; conjecturam que as colunas de A correspondem à imagem dos vetores da base pela transformação; correlacionam observações com as obtidas na atividade anterior.	*Formulação*	
Usam a comparação dos experimentos observados no GeoGebra 5 para propot a validação de suas conjecturas. Aparentemente, não relacionam às transformações e os vetores.	*Validação*	

Fonte: Dados da pesquisa

4.3.5 Análise da institucionalização da terceira atividade

A institucionalização desta atividade começou a partir de uma sessão coletiva na qual os estudantes, em um primeiro momento, foram convidados a comentar sobre seus respectivos percursos na proposição de respostas à terceira atividade.

Neste momento, todos afirmaram que a transformação proposta dependia dos valores atribuídos por T aos vetores $e_1,\ e_2\ e\ \ e_3$. Um aluno, que fazia parte da dupla D, para tentar explicar seu posicionamento, asseverou que “se os valores da base forem mudados, percebemos que muda a transformação T”.

Assim, apesar de a maioria dos sujeitos não ter conseguido evidenciar importantes elementos conceituais por meio do registro escrito, foi possivel notar, a partir de suas falas, que apresentavam um ideia intuitiva bastante consolidada acerca dos conceitos envolvidos na atividade, fenômeno este já descrito no trabalho de Molina e Oktaç (2007), pelo qual os estudantes tendem a adotar modelos intuitivos que lhes afastem dos formalismos conceituais.

Posteriormente, com base nas falas dos alunos, colocou-se no quadro um vetor genérico (x,y,z) e pediu-se que eles o descrevessem em função da base $e_1,\ e_2\ e\ \ e_3$. Como era de se esperar, os alunos não tiveram dificuldade alguma em escrever

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \ xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Pediu-se que cada um deles atribuísse um valor qualquer para os vetores $u_1,\ u_2\ e\ \ u_3$, como feito na atividade, e utilizasse, na expressão, estes valores para encontrar o valor de T. Apenas os alunos componentes das duplas B e C construiram de modo adequado e, em seguida, auxiliaram os demais colegas. A expressão esperada era

$$T(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \ xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3).$$

Neste momento, os alunos observaram com mais atenção o fato de T ser, necessariamente, uma transformação linear.

Continuando, pediu-se que cada um deles colocasse no quadro os vetores, seus valores e a expressão obtida por cada um deles. Todas as expressões foram rigorosamente diferentes para a transformção T.

A seguir, perguntou-se a um dos alunos da dupla A o que entendia acerca dos resultados obtidos; a isto, o aluno respondeu que a forma da transformação dependia dos valores atribuidos à base. Na sequência, perguntou-se se a turma concordava com ele e todos responderam afirmativamente, inclusive, um deles frisou que até tinha pensado sobre a razão de terem usado uma base, mas não tinha conseguiu associar tais elementos.

De modo geral, pode-se perceber que os alunos haviam atribuído mais significado à imagem de uma base por uma transformação para sua determinação, pois, com base nos registroa escritos, os sujeitos conseguiram estabelecer a relação entre a representação matrical e a funcional, mas não indicaram de que isso se deve, principalmente, ao fato de os vetores escolhidos serem, necessaria e suficientemente, vetores de uma base. Para finalizar este momento, definiu-se formalmente a representação matricial de uma transformação linear.

Terminadas as análises relativas à esta pesquisa, seguem as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao terminar o relato referente a uma pesquisa como esta, de caráter qualitativo, pode não ser fácil indicar em que medida a mesma cumpriu aquilo a que se propunha e de que forma respondeu à questão suscitada a partir da problematização. Isto porque o caráter processual dos fenômenos analisados, sua complexidade e características, típicas de pesquisas que envolvem interações com pessoas, acabam por alinhar novas perguntas às já existentes, e indicando caminhos a seguir que talvez não se mostrem absolutos, indiscutíveis ou infalíveis.

A questão em torno da qual se organizaram os procedimentos da investigação é "***de que forma estudantes de Licenciatura em Matemática resolvem problemas conceituais em relação ao tema 'transformações lineares' no âmbito de situações didáticas e com o uso de tecnologias digitais?"***. As análises foram direcionadas por duas categorias, tratadas no âmbito de uma abordagem qualitativa:

a) Correlação entre a fluência no uso da interface provida pelo GeoGebra 5, as possibilidades de experimentação/visualização/dinamismo e a produção de aprendizagens conceituais sobre o tema "transformações lineares";

b) Correlação entre a organização didática por meio de sequências planejadas, a partir da lógica da TSD e a produção das aprendizagens conceituais sobre o tema "transformações lineares".

Para subsidiar as reflexões em torno de tais propósitos, o presente trabalho teve como público-alvo sujeitos cursando a disciplina de Álgebra Linear em um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, aos quais aplicou-se uma sequência didática construída para, mediante gerenciamento das interações, engajar oito estudantes, divididos em quatro duplas, em uma lógica investigativa constituída em torno dos pressupostos da teoria das situações didáticas.

Neste sentido, previu-se que o trabalho de resolução das atividades constantes da sequência teria como elemento mediador o *software* GeoGebra 5, em relação ao qual se esperava estabelecer ambientação capaz de possibilitar experimentações dinâmicas e visualizações, por meio do desenvolvimento da fluência necessária. Além disso, em relação ao tema específico, "transformações

lineares", vale lembrar que os sujeitos ainda não haviam tido contato formal com o mesmo em instâncias escolares, já que o mesmo constitui-se em tópico da disciplina mencionada a ser ensinado em períodos subsequentes.

Sendo assim, o levantamento bibliográfico teve por meta trazer trabalhos que servissem de base para as discussões sobre transformações lineares, inclusive com uso de tecnologias digitais. Das asserções levantadas neste processo, destacaram-se as seguintes perspectivas:

- Os estudantes adotam um discurso de prática, o qual, muitas vezes, dificulta a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de uma argumentação teórica consistente;
- Os alunos recorrem frequentemente a definições incompletas e imprecisas, incorporando tais "ferramentas" aos procedimentos habituais de resolução de problemas em álgebra linear, o que, evidentemente, dá origem a erros e dificuldades;
- Os estudantes apresentam dificuldade em perceber o caráter sistêmico do conhecimento científico, o que faz com que contradições apareçam ao longo de um processo de resolução;
- Os alunos tendem a substituir conceitos e uso de teoremas por modelos intuitivos, de modo a tentar diminuir o nível de abstração envolvido;
- Os estudantes apresentam dificuldades em relacionar as interpretações geométricas com as representações de uma matriz de transformação linear.

Na tentativa de responder à questão de pesquisa, organizaram-se sessões de trabalho com os estudantes para que os mesmos realizassem os processos investigativos necessários à resolução de atividades que compunham uma situação didática cujo foco repousava nos elementos conceituais a serem desenvolvidos em torno das transformações lineares como tema central.

Em relação à organização didática das sessões, orientadas pelos pressupostos da TSD, percebeu-se a importância da postura orientadora e não intervencionista da pesquisadora, que teve o cuidado de responder aos questionamentos sempre com indicações em torno do enunciado das atividades, sem jamais fornecer pistas ou diminuir a complexidade do trabalho a ser realizado. A ideia de devolução, do ponto de vista do sucesso em remover a aparente

intencionalidade didática do pesquisador, pareceu, desta forma, contemplado por esta postura. Outro elemento visto como relevante para o progresso dos estudantes ao longo do processo investigativo foi o antagonismo do *milieu*, com o provimento de elementos problematizadores que representaram reais desafios para os sujeitos. Neste aspecto, apesar dos elementos materiais contarem com o *software* GeoGebra 5, não se pode atribuir ao mesmo um papel facilitador, no sentido de que o programa computacional não realizava o trabalho cognitivo que cabia aos sujeitos: experimentação e visualização, aliados ao dinamismo das construções, foram fatores que subsidiaram as reflexões dos sujeitos. A obtenção de exemplos e o teste de conjecturas foram os elementos mais valiosos oferecidos pela interface, e puderam ocorrer a partir de uma perspectiva muito clara: a fluência no uso do GeoGebra 5, proposta inicialmente nas duas sessões que começaram o processo e consolidada nas três sessões seguintes. A partir, então, desta perspectiva, os estudantes passaram a discutir e ampliar a percepção dos fenômenos em estudo, posturas fundamentais para o progresso em relação às dialéticas de ação, formulação e validação.

Foi possível observar, também, que os alunos participantes da pesquisa se sentiram motivados a participar do processo. Tal característica ficou bastante evidente nas duas últimas atividades, as quais possibilitaram aos alunos descobrir a relação entre representação matricial e transformações. As descobertas feitas pelas duplas permitiram a compreensão de que as transformações que possuem uma representação linear são classificadas como lineares, com base em propriedades inerentes a estas representações. Outra conquista, por assim dizer, foi a classificação, mesmo que de forma incipiente, do caráter linear que cada entrada de uma transformação pode apresentar, ou seja, em meio às discussões durante a atividade, alguns alunos (notadamente, os da dupla A) argumentaram sobre o fato de que, se cada entrada da representação funcional de uma dada transformação possuir uma estrutura de combinação linear entre seus componentes x, y e z, a mesma corresponde a uma transformação linear, característica esta aprendida na primeira atividade.

Entretanto, as dificuldades conceituais apontadas pelos autores tomados por base no campo da álgebra linear também surgiram aqui. A experimentação, a visualização e o dinamismo se mostraram eficientes quando se tratava de subsidiar a atividade do ponto de vista operacional e do "discurso prático", permitindo avançar

até o ponto de fomentar a compreensão, no âmbito de discussões e intervenções, de elementos relacionados ao provimento de algumas respostas, mas não foi suficiente para encaminhar a composição de um "discurso teórico" acerca do caráter sistêmico do conhecimento científico próprio ao tema. Isto levou ao êxito, na maior parte dos casos, para que se assinalassem respostas às atividades, e mesmo no que se refere à crítica a estas respostas quando as mesmas apresentavam erros, mas concorreu de forma bastante limitada para embasar a construção de conceitos. Não que não tenha havido algum avanço neste sentido: por exemplo, ao final da primeira atividade, cada dupla, ao dividir seus resultados, possibilitou às demais delinear melhor suas conjecturas, em relação à preservação da estrutura de combinação linear pela aplicação L em questão. Assim, ao apresentarem aplicações diferentes, mostraram uma maior desenvoltura para classificá-las genericamente. A formalização, entretanto, com escrita e discurso adequados, em termos da álgebra linear, não apresentou grande desenvolvimento.

Por outro lado, as dificuldades relativas a este ponto puderam ser trabalhadas na institucionalização, momento no qual foram apontadas e discutidas em sessões coletivas envolvendo a pesquisadora e os estudantes. Não foi possível, no âmbito desta investigação, apontar a eficiência deste tratamento sobre as questões conceituais, ou seja, a retomada das mesmas a partir da institucionalização. Seria importante que outros trabalhos pudessem retomar esta temática envolvendo, também, a continuidade a partir deste ponto, de modo a avaliar os possíveis progressos.

Também foi possível identificar o que se pode classificar de tensão entre as representações providas pelo *software*, o discurso dos sujeitos e a formalização dos conceitos: os alunos conseguiam ver o alcance de suas ações na interface, discutiam sobre tais intervenções, apontando um "discurso prático" consistente, mas não conseguiam chegar ao conceito, errando quando procuravam estabelecer formalizações. Eram dificuldades já mencionadas por Sierpinska (2000), por exemplo, e se referem, principalmente, à complexidade inerente ao sistema de símbolos e à linguagem adotadas na álgebra linear. Neste sentido, pode-se indicar que as estratégias aqui estruturadas promoveram com eficiência um avanço na percepção e compreensão dos fenômenos, mas tiveram menor alcance em relação à formalização de conceitos. Isto pode ser percebido durante as sessões de trabalho, quando surgiam dificuldades atreladas a um conhecimento que já havia

sido usado e discutido em atividade anterior: quando os conceitos não se estruturam, os avanços anteriores não se estabelecem. Ainda aqui, o trabalho com a institucionalização procurou servir à cobertura desta defasagem.

De outro ponto de vista, claramente, inclusive de acordo com afirmações dos sujeitos, houve uma ruptura em relação ao contrato didático vigente nas aulas de álgebra linear. O uso de processos investigativos intermediados por interfaces como o GeoGebra 5 não representa a maneira pela qual os estudantes que participaram desta investigação têm como base em seu cotidiano acadêmico. Ao contrário do que se podia pensar antes do início das sessões, não houve estranhamento nem tensões provocadas pela nova abordagem. Sobre isto, percebeu-se que os alunos, apesar de algumas dificuldades, mostraram-se muitos interessados em descobrir algo novo no decorrer das atividades. Isso fica claro nos momentos da que precederam a institucionalização, quando cada dupla compartilhou seus resultados e conclusões. Além de observarem pontos comuns de suas ações e construções, este momento possibilitou o uma crítica sobre o percurso realizado em cada dupla e colaborou para o esclarecimento de eventuais dúvidas.

Para deixar mais claro, e ainda com relação ao contrato didático, no transcurso da aplicação da sequência, foi possível perceber mudanças nos comportamentos dos alunos enquanto investigadores e aprendizes. Essas mudanças se localizavam, principalmente, como já se destacou, no momento que antecede a institucionalização do conteúdo, quando se levantavam questionamentos que os levassem a revisitarem e reverem seus modos de pensar e suas ações. As reações dos alunos indicaram que tinham exercido uma participação mais efetiva na construção do conhecimento, ao contrário do que ocorria no contexto habitual, no qual esperavam que o professor introduzisse o conceito e o fizesse seguir por exemplos; neste cenário, os estudantes apenas memorizavam alguns conteúdos e os reproduziam, em aplicações semelhantes. Ainda que tenham persistido as dificuldades em relação aos conceitos, o desenvolvimento autônomo e as discussões representaram uma forma mais efetiva de consolidação das aprendizagens, mais especificamente quando se percebeu que ocorreram usos corretos e efetivos, no sentido de subsidiar a compreensão da relação entre as transformações e as estruturas matriciais (ou em relação às combinações lineares), de conceitos prévios como resolução de sistemas lineares, operações matriciais, multiplicação vetorial, entre outros.

A autonomia apresentada pareceu poder se vincular ao tipo de atividade – ou seja, a estratégia didática – à utilização do software GeoGebra 5 como elemento mediador: esta dupla oportunizou o levantamento de conjecturas, por meio de inúmeras possibilidades suscitadas sobre uma mesma questão, procedimentos que seriam mais difíceis com a utilização apenas de lápis e papel. A dinâmica do *software* possibilitou aos alunos envolvidos uma maior interação com aspectos matriciais e suas representações funcionais, bem como com os elementos gráficos associados àqueles aspectos, nos quais se podiam perceber mudanças em cada uma das estruturas, bastando propor a modificação dos valores relacionados, o que possibilitou aos alunos testar conjecturas e formar estratégias.

Como proposta de continuidade para este trabalho, além do estudo de caráter longitudinal já mencionado, que garantiria observações estendidas além dos momentos de institucionalização, sugere-se que se desenvolvam não apenas atividades que abranjam a composição de transformações lineares, mas que também possam trabalhar a articulação dos elementos teóricos disponíveis para a introdução de outros conceitos da álgebra linear. Estes estudos poderiam prosseguir, por exemplo, avaliando a efetividade do emprego de mediações tecnológicas sobre outros objetos do domínio mencionado. Isto justamente porque, uma vez que se discutiram aqui questões que envolvem o ensino das transformações lineares por meio de uma sequência didática, pode-se afirmar que não há argumentos exaustivos e nem conclusões de caráter definitivo ao final da análise das atividades, comentários e observações dos sujeitos participantes. Assim, crê-se que esta pesquisa abre algumas perspectivas de continuidade. Admite-se, por isso, que as análises realizadas e a proposta encerram em si mesmas uma minúscula partícula de conhecimento no vastíssimo universo que o ensino da álgebra linear descortina e desafia. Porém, se tais elementos e as reflexões teóricas aqui feitas concorrerem para instigar um ponto de partida sobre o ensino dessa disciplina e para outras pesquisas, principalmente no sentido de auxiliar os docentes e alunos dos cursos de Matemática e as pessoas que trabalham nesta área, já terá cumprido honestamente seu papel.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Par: Ed. UFPR, 2007, 278 p.

AMADO, N., CARREIA, S**.** Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática: diferenças na prática da sala de aula. 2014. Disponível em: < http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2008/2008_21_NAmado.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2014.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BARIN, C.; MÜLLER, L.; ELLENSOHN, R. M. Construção de Significados e interação com, no e pelo computador: estudos problematizados no AVEA Moodle sobre uso das tecnologias da informação e comunicação . **CINTED-UFRGS** , Porto Alegre, v., 10, n.1, jul., 2012.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora,1994.

BORBA, M. C. Educação Matemática a distância online: balanços e perspectivas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011. Recife. **Anais**... Recife: CIEM, 2011. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/xiiiciem-edmatonline-balepersp.pdf>. Acesso em: 14 fev 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C. **Coletivos seres-humanos-com-midias e a produção matemática**. Curitiba-PR: Sociedade Brasileira de Psicologia da Educação Matemática, 2008.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF, 1998.

BRASIL. Parecer n° CNE/CES 1.302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 dez. 2001. Seção 1e, p.13.

BROUSSEAU, G. **Apprentissage des structures**. Conférence prononcée. Clermont-Ferrand lors des Journées de l'A.P.M, 1970b.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**: le cours de Montreal, 1997. Disponível em<http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997>. Acesso em 13/03/12.

BROUSSEAU, G. **La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.** Thèse d'état. Disponível em: http://guy-rousseau.com/46/resume-de-la-these-detat-1986/. Acesso em: 15 de fevereiro de 2012.

BROUSSEAU, G. **Le contrat didactique et le concept de milieu**: dévolution, 1990. Disponível em: http://guy-brousseau.com/2325/le-contrat-didactique-et-le-concept-de-milieu-devolution-1990/. Acesso em: 15 de fevereiro de 2012.

BROUSSEAU, G. **Education et Didactique des mathématiques** (Communication au Congrès d'Aguas Calientes, Mexico). Educacion matemática (Mexico), v. 12, n.1 abr/2000. pp. 5 – 39.

BROUSSEAU, G. **Processus de mathématisation**. 1970a. Disponível em <http://guy-brousseau.com/952/processus-de-mathematisation/> Acesso em 13 mar.2012.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da álgebra linear**: as pesquisas brasileiras na década de 90. Mestrado: Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000. 114f.

COBB, P. et al. Design experiment in Educational Research. **Educational Researcher**, v. *32, n.* 1, p. 9-13, 2003.

D'AMBRÓSIO, U.. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 4.ed.. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática:** ensino médio. São Paulo: Ática, 2008.

DORIER, J.; SIERPINSKA, A. Research into the teaching and learning of linear algebra. In: HOLTON, D. (Ed.). **The teaching and learning of mathematics at university Level**: An ICMI Study, Science & Business Media, 2001. 560p.

DORIER, J. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. Paris: La Pensée Sauvage Editions, 1997.

DORIER, J. et al. Teaching and learning linear algebra in first year of French Science University. **European Research in Mathematics Education I**: group 1. 1999. p. 103-112. Disponível em: <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2014.

DREYFUS, T.; HILLEL, J.; SIERPINSKA, A. Cabri based linear algebra: transformations. In: SCHWANK, I (Ed). **European Research in Mathematics Education I**. Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osuabrueck. 1999. v.1. Disponível em: <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings-1-v1-0-2.pdf> Acesso em: 12 mar. 2014.

DUVAL, R. Basic Issues for Research in Mathematics Education. Proceedings of Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 24. Hiroshima: Dep. of Mathematics Education, Hiroshima University, 2000. p. 55-69.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissage intellectuel, Berna: Peter Lang, 1995.

FROTA, M. C. R.; BORGES, O. Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na educação matemática. **Anais da 27ª Reunião da ANPED – GT: Educação Matemática**, 2004.

GATTASS, M. **Transformações geométricas**. Rio de Janeiro: PUC/RJ, 2005. Disponível em http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/cg/pdf/06_TransGeoQuat.pdf. Acesso em 05/10/2014.

IEZZI, Gelson et al., **Matemática:** ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

GONÇALVES, H. S. **A Importância das Matrizes e Transformações Lineares na Computação Gráfica.** Dissertação: Mestrado. Goiânia: Universidade Federal de Goiás (Instituto de Matemática e Estatística), 2013.

GUTIÉRREZ, L. E. M.; LARA, H. P. Transformaciones lineales con Cabri II Plus. In: **Actas del III Congreso Iberoamericano de Cabri – IBEROCABRI**. Funes: Bogotá, 2006.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. Tese (Doutorado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

KENSKI, V. M. **Novos processos de interação e comunicação no ensino mediado pelas tecnologias.** São Paulo: FEUSP, 2012.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber manual de metodologia da pesquisa em ciências humana**. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo. Ed. 34, 1993

LÉVY, P. **A Máquina Universo**: criação, cognição e cultura informática. Porto Alegre: Artmed, 1998.

LIMA, E.L.L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq. 1998.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por Estudantes de EAD. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 69-89, 2012.

MOLINA, J. G.; OKTAÇ A. Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** v. 10, n. 2, p. 241-273. 2007. Disponível em: <http://scielo.unam.mx/pdf/relime/v10n2/v10n2a4.pdf>. Acesso em: 26 mar 2013.

OLIVEIRA, G.P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do Superlogo e do GeoGebra. **Actas del VII CIBEM.** Disponível em: < http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/index.html>. Acesso em: 05 abr 2014.

OLIVEIRA, G. P.; ARAÚJO, P. B. Lugares geométricos: Uma abordagem com o software GeoGebra. In: **Actas do XXII SIEM** (S6.03, pp. 1-13). Lisboa: APM, 2011.

OLIVEIRA, G. P. **Avaliação em cursos on-line colaborativos**: uma abordagem multidimensional. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2007. 380 p.

OLIVEIRA, G. P. Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais**. Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 10, n. 2, p. 295-312, 2008.

OLIVEIRA, G. P. Transposição didática: aportes teóricos e novas propostas. In: WITTER, Geraldina Porto; FUJIWARA, Ricardo. (Org.). **Ensino de ciência e matemática**: analise de problemas. São Paulo: Ateliê Editorial 2009.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2005.

PERRIN-GLORIAN, M. Problèmes dárticulaton de cadres théoriques: l'exemple du concept de milieu. **Recherches en didactique des mathématiques**. v.19, n. 3, p. 279-322, 1999.

ROSA, O. S. et al. Explorando as transformações lineares no plano, através do software winplot. **Revista TECCEN**, v. 2, n. 2, set., 2009. Disponível em: <http://www.edu-doc.com/ebook/odileia.html>. Acesso em: 26 mar. 2012.

SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: DORIER, J-L (Ed.) **On the teaching of linear algebra in question**. Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 209-246.

SIERPINSKA, A.; NNADOZIE, A.; OKTAÇ, A. A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Unpublished research report. 2002. Disponível em: <http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html.> Acesso em: 10 out. 2014.

SIERPINSKA, A., HILLEL, J. Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. **Recherches en Didactique des Mathématiques** V. 19, n.1, p. 7-40, 2002.

OKTAÇ, A.; UICAB, R. Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica 1. **Relime** v. 9, n. 3, nov., 2006, p. 459-490.

YOUSSEF, A. N.; FERNANDEZ, V. P.; SOARES, E. **Matemática para o 2º grau:** curso completo. São Paulo: Scipione, 2009.

Anexo A - Parecer Consubstanciado do CEP[11]

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO- PUC/SP

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Transformações Lineares e Aprendizagem Significativa: intervenções com uso de TICs para compreensão da aplicabilidade dos conteúdos

Pesquisador: Eliza Souza da Silva

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 15534413.5.0000.5482

Instituição Proponente: Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 627.944

Data da Relatoria: 08/05/2013

Apresentação do Projeto:

Trata-se de protocolo de pesquisa para elaboração de Tese de Doutorado no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPG em EDM), vinculado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FCET) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

Projeto de pesquisa de autoria de Eliza Souza da Silva, sob a orientação do Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira.

A proposta visa "(...) elaborar uma sequência didática juntamente com a utilização de um software Livre envolvendo tópicos da Álgebra Linear que contribua para a problemática das provas e demonstrações, no que se refere ao estudo de Transformações Linear."

Objetivo da Pesquisa:

OBJETIVO

Elaborar uma sequência didática juntamente com a utilização de um software Livre envolvendo tópicos da Álgebra Linear que contribua para a problemática das provas e demonstrações, no que se refere ao estudo de Transformações Linear.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br

[11] Em virtude das mudanças no decorrer da pesquisa foi necessário algumas alterações no título da pesquisa.

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO- PUC/SP

Plataforma Brasil

Continuação do Parecer: 627.944

Com a finalidade de delimitar melhor meu objetivo geral estabeleci alguns objetivos específicos, quais sejam:

¿ Realizar um levantamento bibliográfico;

¿ Analisar o processo de absorção dos saberes matemáticos dos alunos com relação aos conteúdos de álgebra linear, em particular o conteúdo de Transformações Linear;

¿ Construir uma sequencia didática visando o ensino aprendizagem do conteúdo de Transformações Linear, propondo modificações na abordagem deste conteúdo para uma aprendizagem mais significativa baseado nesta sequencia didática;

¿ Construir atividades através de um software livre, a luz desta sequencia didática.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Os riscos são de fato baixíssimos.

Os benefícios são de grande valor científico e acadêmico.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A exposição do Projeto é clara e objetiva, feita de maneira concisa e muito bem fundamentada, permitindo-se concluir que a proposta de pesquisa em tela, possui uma linha metodológica bem definida, base da qual será possível auferir conclusões consistentes e, portanto, válidas.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Apresentados a contento, conforme orienta a Resolução CNS/MS nº 466/12, os Regimento e Regulamento Interno do Comitê de Ética em Pesquisa, campus Monte Alegre da Pontificia Universidade Católica de São Paulo - CEP-PUC/SP e o Manual Ilustrado da Plataforma Brasil, disponíveis para consulta no site: www.pucsp.br/cometica

Recomendações:

Recomendamos que o desenvolvimento da pesquisa siga os fundamentos, metodologia, proposições, pressupostos em tela, do modo em que foram apresentados e avaliados por este Comitê de Ética em Pesquisa. Qualquer alteração deve ser imediatamente informada ao CEP-PUC/SP, indicando a parte do protocolo de pesquisa modificada, acompanhada das justificativas.

Também, a pesquisadora deverá observar e cumprir os itens relacionados abaixo, conforme indicado pela Res. 466/12:

a) desenvolver o projeto conforme delineado;

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO-PUC/SP

Plataforma Brasil

Continuação do Parecer: 627.944

b) elaborar e apresentar o relatório final;

c) apresentar dados solicitados pelo CEP, a qualquer momento;

d) manter em arquivo, sob sua guarda, por um período de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa, os seus dados, em arquivo físico ou digital;

e) encaminhar os resultados para publicação, com os devidos créditos aos pesquisadores associados e ao pessoal técnico participante do projeto;

f) justificar, perante o CEP, interrupção do projeto.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Recomenda-se a aprovação na íntegra da pesquisa em tela.

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Considerações Finais a critério do CEP:

SAO PAULO, 28 de Abril de 2014

Assinador por:
Edgard de Assis Carvalho
(Coordenador)

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br

Anexo B - Modelo do termo de consentimento Livre e Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu_____, portador do RG, número_____, declaro para os devidos fins que concedo os direitos de minha narrativa, transcrita e textualizada da sequencia didática, para que Eliza Souza da Silva possa utilizá-la em sua pesquisa de Doutorado em Educação Matemática desenvolvida no Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP, sob orientação da Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira

Subscrevo o presente.

_____

Nome