PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

ELIEDETE PINHEIRO LINO

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM UM JOGO INTERATIVO ENTRE QUADROS: UM ESTUDO TEÓRICO

Doutorado em Educação Matemática

São Paulo
2014

ELIEDETE PINHEIRO LINO

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM UM JOGO INTERATIVO ENTRE QUADROS: UM ESTUDO TEÓRICO

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva

PUC/SP
2014

Banca Examinadora

Aos meus anjos do Senhor.

Sempre comigo. Pela força e proteção.

Aos também anjos

Pedro Henrique

Antonio

Marina

Marcela

Meu amado pai (in memorian): pessoa de grande sabedoria sem ter tido estudo acadêmico. Dele herdei a curiosidade pelas coisas do mundo. Sendo sua herança maior os valores morais, a honestidade e o respeito às pessoas.

Minha querida mãe (in memorian): a quem nem as grandes perdas que a vida lhe impôs não a fizeram perder a doçura, o afeto e o amor materno. Dela herdei a rebeldia contra o comodismo e a manter sempre a fé.

Saudades.

À Renata (Reca), Claudinir (Dinho) e Douglas (Dodô)

Minha motivação maior. Meu porto seguro. Farol que não me faz perder a direção.

Acompanharam minhas dificuldades, participaram de minhas conquistas e compreenderam minha ausência.

AGRADECIMENTOS

A todos que contribuíram, na concepção, na evolução e desenvolvimento deste trabalho, o meu reconhecimento e agradecimento.

Agradeço em especial

Aos meus filhos, Renata, Claudinir e Douglas, pelo amor, carinho, estímulo e apoio em tantos momentos. Com uma verdadeira inversão de papéis, me acariciaram, protegeram e zelaram por minha tranquilidade. Aqui também estão Eduardo e Silvana.

As minhas amadas irmãs *Cida* e *Sonia* que não mediram esforços, na minha ausência, nos cuidados com nossa mãe. Tenho muito orgulho e grande admiração. Em vocês eu me espelho. Aqui também está Dado (Felizardo Traversim Filho).

A Renata e Eduardo que me acolheram e, muito mais que ajudar, fui ajudada, amparada, mimada num tsunami de carinhos e cuidados. Proporcionaram-me alegrias e tantos e tão bons momentos jamais imaginados e eternamente lembrados.

A Carla Carolina por bons e inesquecíveis momentos e por estar sempre à disposição. Aqui também Raphael que sempre torceu e acreditou.

A Clarinha e sua família que acolheu e adotou meu filho na minha ausência.

A Patrícia, seus os inúmeros cafezinhos e cuidados comigo. Sempre tão atenciosa

A minha orientadora Maria José Ferreira da Silva (Zezé) pela paciência em esperar meu tempo de amadurecimento, pela enorme generosidade em compartilhar seus materiais e seu conhecimento das coisas da Matemática, da Educação Matemática e da vida. Pela firme e sábia orientação.

Aos professores doutores Jesus Victoria Flores Salazar, Fumikazu Saito, Méricles Thadeu Moretti, Saddo Ag Almouloud, pelas valiosas sugestões, comentários e importantes críticas para o desenvolvimento da tese.

Aos professores doutores Bárbara Lutaif Bianchini e Gilson Bispo de Jesus, por aceitarem participar da equipe de suplentes da banca avaliadora.

Aos professores do grupo PEAMAT em especial aos professores doutores, Cileda sempre um sorriso reconfortante e Saddo sempre me chamando para o FOCO e me acolhendo com carinho e ajuda inestimável.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelos ensinamentos e contribuições. Grande privilégio.

Aos amigos que conquistei nesta caminhada, aos companheiros de turma, que de muitas formas me ajudaram neste trabalho. Aos mais próximos e também com quem ultimamente convivi, muitos foram os estímulos, incentivos Joelma, Cíntia, Kátia, Jacinto, Antônio.

A Universidade Federal de Mato Grosso do Sul por autorizarem meu afastamento.

Aos colegas de departamento por facilitarem a minha ausência.

A todos serei para sempre grata.

RESUMO

Esta pesquisa trata das transformações geométricas com objetivo de apresentar uma concepção ampla desse conteúdo, uma visão de geometria com uma nova organização destas transformações e dar mais significado ao seu estudo. Em função desse objetivo utilizamos como referencial teórico para a pesquisa, a noção de quadro evidenciado por Douady como constituído por objetos de um campo da matemática e de suas possíveis relação e, ainda, da ideia de mudança de quadro que um sujeito pode mobilizar na busca da solução de um problema. Para a autora traduzir um problema de um quadro para outro tem a finalidade específica de permitir a mobilização de outras ferramentas, que não as inicialmente utilizadas para a resolução de um problema. Utilizamos também a noção de ponto de vista de Rogalski pois ela permite que possamos abordar um problema por pontos de vista diferentes em um mesmo quadro. Assim, focamos nossas análises em pontos de vista que podem ser mobilizados no quadro da geometria, no quadro da geometria analítica e no quadro da álgebra, isto é, a partir da escolha de um quadro da Matemática em que se estuda as transformações geométricas buscamos identificar os diversos pontos de vista possíveis. Recorremos ainda aos Registros de Representação Semiótica de Duval que são utilizados para representar as transformações geométricas e ainda para as possíveis transformações desses registros a partir do tratamento e da conversão. Para o autor os conhecimentos a respeito de um objeto matemático podem ser apreendidos a partir de pelo menos dois registros e que a conversão de registros permite desenvolver a coordenação desses diversos registros. Essas ações permitirão ao aluno a compreensão, a descoberta e o desenvolvimento de conhecimentos. A metodologia usada foi a pesquisa bibliográfica baseada em documentos de domínio científico tais como livros, artigos, dissertações e teses que tratavam de nosso objeto de estudo. Essa escolha metodológica contribuiu para o alcance de nosso objetivo uma vez que nos permitiu "olhar" as transformações geométricas e apresentá-las em um estudo desde as séries iniciais com dobraduras até o ensino superior abordando-as no quadro da Álgebra, no quadro da Geometria Analítica e no quadro da Geometria

Palavras-Chave: Transformações Geométricas. Pontos de Vista. Quadro e Mudança de Quadro. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This research deals with the geometric transformations in order to present a broader view of this content, a vision of geometry with a new organization of these changes and give more meaning to their study. Due to this objective we used as a theoretical framework for the research, the notion of context evidenced by Douady as consisted by objects in a field of mathematics and its possible relationships and also the context of the change of the idea that a subject can mobilize in the search of the solution of a problem. For the author to translate a problem from a frame to another is specifically intended to enable the deployment of other tools, other than those initially used for solving a problem. We also used the concept of Rogalski´s point of view because it allows us to approach a problem from different points of view within the same framework. Thus, we focused our analysis on views that can be mobilized within the geometry framework in the context of analytic geometry and algebra framework, that is, from the choice of a mathematics framework in which it is studied the geometric transformations we seek to identify the various possible points of view. We still appealed to Duval´s Semiotics Representation Registers which are used to represent geometric transformations and also to the possible transformations of these records as from the treatment and conversion. To the author the knowledge about a mathematical object can be seized from at least two records and that the conversion of records allows to develop the coordination of these various records. These actions will allow the students the understanding of the discovery and the development of the knowledge. The methodology used was based on scientific literature domain documents such as books, articles, dissertations and theses that addressed our object of study. This methodological choice contributed to the achievement of our goal since it allowed us to "look" geometric transformations and present them in a study from the early series with folding to the higher education addressing them in the context of Algebra, Analytical Geometry and Geometry frameworks

Keywords: Geometric Transformations. Viewpoints. Table and Change Table. Semiotics Representation Registers

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nosso interesse por geometria vem desde 1993, quando começamos a ministrar essa disciplina no ensino superior, para um curso de licenciatura em Matemática. Percebemos a dificuldade dos alunos, futuros professores de Matemática, no trato com conteúdo de geometria. Dificuldade relatada e constatada por diversos pesquisadores que apontaram causas tais como o despreparo e falta de conhecimento de quem ensina em razão de também não ter aprendido e, portanto não dominar os conteúdos de geometria.

O ensino de Geometria na formação do professor ocorre, ou em forma de disciplina oferecida na grade curricular de maneira isolada, sem conexão com outras disciplinas, ou esse conhecimento é adquirido em processos de formação continuada, que acarretam um conhecimento geométrico sem unidade, limitado e sem significado. Nossa prática profissional nos capacita a dizer que entre os conteúdos de geometria, as transformações geométricas se apresentam como um conteúdo não somente mais atraente, mas também mais acessível por encontrarmos no cotidiano muitas referências que nos remetem à elas e que oportunizam uma interdisciplinaridade na licenciatura em Matemática.

Nesse sentido nossa atenção voltou-se para ampliar subsídios para esta reflexão propondo um estudo das transformações geométricas, conteúdo normalmente presente do ensino básico ao ensino superior em uma concepção mais ampla, uma visão de geometria com uma nova organização destas transformações.

Com objetivo de apresentar essa concepção ampla das transformações geométricas mostramos que considerar diferentes pontos de vista pode corresponder ou não a uma mudança de quadros e a conversão da representação em determinado registro para uma representação em outro registro possibilitarão desencadear um novo conhecimento considerando o conhecimento anterior.

Em função deste objetivo utilizamos como referencial teórico a noção de ponto de vista de acordo com Rogalski (2001), em especial, os pontos de vista apresentados no quadro da Geometria, no quadro da Geometria Analítica e no quadro da Álgebra, isto é, os pontos de vista em função da escolha do quadro em que se aplicam as transformações geométricas. Isto nos conduziu a estudar as transformações geométricas de acordo com a noção de quadro introduzida por Douady (1984) que consiste em organizar situações de aprendizagem, privilegiando a diversidade de formas de representação de um mesmo conteúdo. Portanto, recorremos ainda aos estudos de Duval (1995, 2000, 2003) a respeito de registros de representação semiótica em que se destaca a importância de considerar, sob o ponto de vista do ensino e aprendizagem matemática, no que concerne às especificidades inerentes a cada registro, bem como a coordenação dos diferentes registros de representação e os tipos de transformação existentes na passagem de uma representação para outra.

Esta tese está configurada em cinco capítulos, além das considerações finais. No primeiro capítulo, construímos a problemática apresentando resultados de pesquisas, relevantes para nosso trabalho. Procuramos pesquisas que tratam de transformações geométricas a partir de quadros (de acordo com Douady), de conversão de registro (de acordo com Duval) e de ponto de vista (de acordo com Rogalski), como intuito de verificar a relevância de nosso trabalho e vislumbrarmos possibilidades de agregar conhecimentos à área de Educação Matemática. Para essa concepção ampla das transformações geométricas apresentamos também no primeiro capítulo o referencial teórico da nossa pesquisa que são os estudos de Rogalski (2001) a respeito da noção de ponto de vista de um objeto matemático que, para o pesquisador, são maneiras diferentes de olhá-lo, de fazê-lo funcionar, eventualmente de defini-lo, portanto uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Geometria, pois permite olhar um objeto ou uma situação matemática de diferentes maneiras permitindo com as conclusões obtidas extrair novos resultados.

Consideramos, ainda a noção de quadro e mudança de quadro introduzido por Douady (1984). A definição da noção de quadro, para a pesquisadora, permite transpor por meio de mudanças de quadros e por iniciativa do professor obter diferentes formulações para um mesmo problema utilizando ferramentas e técnicas não pertinentes na primeira formulação. Duval (1995, 2003, 2009) observa a importância da análise do papel das representações quando se considera um objeto matemático. Salienta que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação.

Assim, com o estudo da teoria de Duval, Douady e os estudos de Rogalski, construímos nossa questão de pesquisa. Fizemos ainda, neste capítulo, as opções metodológicas.

No segundo capítulo, destacamos a importância do estudo de geometria e de que forma as transformações geométricas contribuem para que os alunos desenvolvam habilidades de conjecturar, explorar, experimentar, intuir, organizar e sistematizar resultados.

Apresentamos também o movimento implícito quando se aplica uma transformação a uma figura sem alterar suas medidas tanto de lados quanto de ângulos. Denominamos como sendo uma questão de terminologia quando buscamos esclarecer os diversos nomes dados à simetria e, por consequência, adotar e assumir nossa posição como pesquisadora.

No terceiro capítulo, tratamos da análise das simetrias axial e central. O detalhamento desse estudo envolve trabalhar as simetrias nos quadros da geometria, da geometria analítica e no quadro da álgebra. No quadro da geometria estudamos as simetrias do ponto de vista intuitivo, do ponto de vista do desenho geométrico e do ponto de vista funcional buscando, para cada um deles os registros de representação semiótica possíveis, bem como seus tratamentos e conversões. No quadro da geometria analítica estudamos o ponto de vista funcional nos registros algébrico e gráfico. Realizamos ainda o estudo das simetrias no quadro da álgebra.

No quarto capítulo realizamos a análise da translação no quadro da geometria e nesse quadro, o ponto de vista intuitivo com o registro material e o registro da língua natural; o ponto de vista do desenho geométrico com o registro figural e estudamos no quadro da geometria, o ponto de vista funcional com os registros algébrico e gráfico. Analisamos ainda a translação no quadro da geometria analítica no ponto de vista funcional com os registros algébrico e funcional e, ainda no quadro da álgebra.

No quinto capítulo, tratamos da análise da rotação no quadro da geometria, no quadro da geometria analítica e no quadro da álgebra. O estudo da rotação no quadro da geometria foi do ponto de vista intuitivo com o registro material e o registro da língua natural. Do ponto de vista do desenho geométrico trabalhamos o registro figural e do ponto de vista funcional o registro algébrico e o registro figural. O estudo da rotação realizado no quadro da geometria analítica foi sob o ponto de funcional com o registro algébrico e registro gráfico e, ainda no quadro da álgebra.

Por fim, elaboramos nossas considerações finais sobre a tese, destacando algumas contribuições para a área de Educação Matemática. Deixamos, ainda, sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO I - CONSTRUINDO A PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos os estudos realizados a respeito de transformações geométricas. Também apresentaremos os fundamentos teóricos, a justificativa, a delimitação do problema e os aspectos metodológicos desta pesquisa.

1.1 PESQUISAS A RESPEITO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Diversos pesquisadores têm se dedicado ao estudo das transformações geométricas e os resultados de suas pesquisas muito tem contribuído, tanto para o estudo de geometria, quanto para a valorização deste conteúdo. São valiosas suas contribuições e experiências e apresentamos no que segue resultados dessas investigações.

Destacamos pesquisas realizadas na França, na Espanha, na Inglaterra, Estados Unidos, Portugal, África e pesquisas realizadas no Brasil. Dos estudos realizados na França destacamos Grenier, (1988), Jahn (1998) e Miyakawa (2005). Na Espanha as relevantes pesquisas de Jaime e Gutiérrez (1996). Importantes também são as pesquisas realizadas na Inglaterra por Küchemann (1981) e Healy (2001). Nos Estados Unidos temos os estudos de Shah (1969) e Moyer (1978), em Portugal, Matos (2011), na África, em Mali, os estudos de Sangaré (2006). No Brasil diversos pesquisadores se debruçaram sobre o assunto: Mabuchi (2000), Mega (2001), Vaz (2004), Alves(2005), Cerqueira (2005), Mongelli (2005), Ripplinger (2006), Luz (2007) Bilac (2008), Lage (2008), Freitas (2010), Silva (2010).

Trabalhos importantes que analisam as dificuldades de aprendizagem das isometrias no plano, envolvendo crianças com idades inferiores a 10 anos, são de Moyer (1978), Schultz (1978) e Shah (1969).

Moyer (1978), com o trabalho Uma investigação no desenvolvimento cognitivo das transformações euclidianas em crianças pequenas, pesquisou as transformações geométricas: translação, rotação e simetria, entrevistando crianças de 4 a 8 anos de idade. A proposta de seu trabalho foi utilizar pares de discos plásticos de 30cm de diâmetro, alguns discos transparentes, outros com metade do disco pintado de vermelho e marcado com diâmetro e raio e ainda discos pintados somente com marca de raio. Realizando ou não movimentos com os discos correspondentes à simetria, translação e rotação, foram avaliados os tipos de discos utilizados e a influência da isometria com as figuras apresentadas.

Schultz (1978) trabalhou com alunos entre 06 e 10 anos de idade em seu estudo de isometrias (translação, rotação e simetria) em que utilizou um número maior de variáveis tais como a direção do movimento (diagonal ou horizontal), a amplitude do movimento (grande, pequena ou média), o tipo de figura usada (com significado ou não) e a medida da figura (pequeno, de 8cm, ou grande, de 80cm). Schultz (1978) e Moyer (1978) chegaram a conclusões muito parecidas, como as destacadas:-as translações apresentaram menor grau de dificuldade que as reflexões e as rotações, e estas últimas apresentaram grau de dificuldade equivalente; nas três transformações geométricas estudadas, os movimentos horizontais foram mais fáceis de serem executados que os diagonais; -as figuras de maior tamanho facilitaram a resolução dos exercícios, assim como as figurativas (borboleta, foguete, flor etc.) levaram mais acertos do que as abstratas.

Shah (1969) pesquisou as transformações geométricas translação, simetria e rotação em um trabalho desenvolvido com crianças com idade inferior a 11 anos, constatando resultados semelhantes aos posteriormente observados por Moyer (1978) e Schultz (1978). Para Shah (1969), os desempenhos por faixa etária, foram satisfatórios, uma vez que, os resultados tornavam melhores quando a idade dos alunos pesquisados aumentava. Considera que, as isometrias podem ser estudadas com sucesso por crianças de idades diferentes.

Optamos em apresentar primeiro, pesquisas que consideramos clássicas por serem sempre uma referência para estudos a respeito de transformações geométricas citadas com frequência em pesquisas em Educação Matemática.

Temos os trabalhos de Küchemann (1981), Grenier (1988), os estudos de Jaime e Gutiérrez (1996), Jahn (1998) e trabalhos mais recentes de Miyakawa (2005), e Sangaré (2006).

Küchemann (1981) coordenou uma pesquisa no projeto inglês *Concepts in Secondary Mathematics and Science* – CSMS, com crianças de 11 a 16 anos de idade, com o objetivo de investigar 11 temas matemáticos. Em 1985, neste mesmo projeto, realizou uma pesquisa com 1026 estudantes com idades entre 13 e 15 anos que responderam questões a respeito de reflexões[1] e rotação.

Em relação à reflexão foram considerados os seguintes fatores: complexidade da figura (ponto, segmento de reta); presença ou ausência de malha quadriculada; posição do eixo de simetria (horizontal ou vertical); distância entre a figura dada e o eixo de simetria. A autora concluiu, em relação à reflexão, que as respostas foram influenciadas de acordo com a posição/inclinação do eixo sendo que o desempenho dos alunos foi melhor quando o eixo era vertical ou horizontal; também os resultados foram melhores quanto menos complexas eram as figuras, isto é, figuras mais simples, como pontos ou segmentos tiveram melhores resultados.

Em relação à rotação Küchemann (1981) trabalhou construções a mão livre e análise de construções, utilizando em sua maioria ilustração de bandeirinhas em rotações de 90º, alternando o uso de papel liso e quadriculado. Concluiu a pesquisadora, que a posição do centro de rotação e inclinação do objeto é mais relevante para o sucesso na realização da tarefa do que o papel utilizado ser quadriculado ou não.

Realizada na França, a pesquisa de Grenier (1988) com alunos de 13 a 14 anos de idade, procurou comparar suas percepções a respeito da simetria antes e após a aprendizagem em sala de aula. Grenier analisou as mesmas variáveis utilizadas por Küchemann (1981), no projeto inglês CSMS, porém com objetivos mais específicos e com a inclusão de uma quantidade maior de variáveis tais como a intersecção da figura inicial com o eixo de simetria, as direções do eixo e dos elementos que compõe a figura, a posição da figura em relação aos limites da folha e o uso ou não da malha quadriculada e com variedades de detalhes aumentando a confiança nas conclusões.

---

[1] Reflexão foi o termo usado por Küchemann (1981).

A autora teve como objetivo geral estudar as causas da permanência de concepções erradas de simetria axial e elaborar atividades para desestabilizar tais dificuldades

Jaime e Gutiérrez (1996) também elaboraram os testes de suas pesquisas de acordo com as variáveis utilizadas no projeto CSMS, porém com objetivos mais específicos centrados no estudo da noção de simetria, aplicados a 289 alunos dos cursos 1º a 8º de E.G.B.[2] e estudantes da Escola de Magistério de Valência. O teste foi elaborado com 38 itens com desenhos de figuras, desenho de eixos de simetria e cálculo das coordenadas de figuras.

O estudo de Jahn (1998), realizado na França, investigou o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas por meio de uma sequência de ensino com o Cabri-Géomètre II analisando as dificuldades enfrentadas pelos alunos quanto à mudança de tratamento a ser dado a uma transformação – de transformações geométricas que operam sobre figuras abordadas no Ensino Fundamental, para transformação como função que age sobre pontos do plano (global/pontual), no Ensino Médio A autora observa que a abordagem dinâmica que o software proporciona, minimiza dificuldades enfrentadas em situação lápis-papel e analisa em seu estudo condições de modo favorecer a passagem de uma concepção a outra, e a possibilidade de que, em um trabalho proposto no nível pontual, permitir o aluno encontrar imagens de figuras recorrendo à concepção global (JAHN, 1998, p.74).

Sangaré (2006) realizou sua pesquisa em Mali, centrada na construção de um modelo do objeto “transformações geométricas”, modelo que, segundo o autor, deve ser, ao mesmo tempo, correto do ponto de vista teórico e pertinente do ponto de vista didático. O autor estudou, em primeiro lugar, as respostas apresentadas por alunos no início do ensino médio que trabalham com diferentes modos de correspondência entre figuras-objeto e imagem e utilizam traçar um segmento de reta entre um ponto da figura objeto e o ponto correspondente de sua imagem obtida por transformações geométricas. Analisa,

---

[2]No sistema de ensino de Valência a escolaridade obrigatória (escolaridad obligatoria), denominado educação básica geral (Educação Geral Básica/ EGB), começa aos seis anos de idade em uma escola primária (escuela primaria) e dura oito anos. Na idade de 14 (equivalente à oitava série) os alunos recebem um certificado de ensino secundário, que determina o curso da sua educação futura.

essencialmente, as significações e os estatutos dados a estes traços e propõe uma modelagem das transformações geométricas a partir deles. Suas conclusões mostram que a utilização de “traços” ou marcas desempenham papéis importantes na resolução de problemas e os alunos souberam construir conhecimentos ao redor dessa noção permitindo-lhes consolidar e reorganizar suas concepções sobre transformações geométricas.

Miyakawa (2005) teve como foco, um estudo da relação entre a evidência e o conhecimento de um conceito. Argumentou que na maioria dos trabalhos, até então, o conhecimento de um conceito matemático é adquirido em um contexto que não a evidência. Escolheu a simetria ortogonal, tanto por ser este conceito abordado a partir da escola primária e ocupar um lugar de destaque no ensino secundário na França, como por ter encontrado um número limitado de pesquisas conduzidas a esse respeito.

No Brasil, diversos pesquisadores em Educação Matemática se dedicaram ao estudo de transformações geométricas. Cerqueira (2005), Luz (2007) e Mabuchi (2000) conduziram suas pesquisas para o estudo das transformações isométricas (simetria, rotação e translação). Rotação foi pesquisada por Mega (2001), Ripplinger (2006) teve como objeto de pesquisa a simetria e Mongelli (2005) pesquisou a simetria axial.

O objetivo de pesquisa de Cerqueira (2005) foi investigar a inserção das isometrias no currículo de matemática, tanto do ponto de vista oficial quanto do da prática. A pesquisadora observou que as isometrias estão presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e a inclusão deste tópico não se encontra explícita nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Em relação aos Livros Didáticos do Ensino Fundamental, por ela examinados, a incorporação das noções das isometrias em algumas coleções não estava presente em todos os volumes, enquanto em outras, este conteúdo foi citado em todas as séries.

Luz (2007) fez um estudo sobre transformações geométricas: da reforma da matemática moderna aos dias atuais. Concluiu a partir das obras analisadas, que no período correspondentes ao movimento de reforma da Matemática Moderna, ênfase maior foi dado ao aspecto estrutural da matemática. Segundo a autora, a ausência das transformações geométricas nos programas de ensino, por um tempo relativamente longo, pode ter ocasionado o descompasso desse assunto em relação às mudanças pelas quais passou o ensino da geometria.

Mabuchi (2000), em sua pesquisa, organizou um estudo sobre transformações geométricas com um grupo de professores participantes de um curso promovido pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP, para professores com licenciatura curta em Ciências a fim de complementarem sua formação em Matemática. O objetivo da pesquisadora era mostrar a necessidade de incorporar o tema transformações geométricas em cursos de formação de professores. Observou que a posição do eixo de simetria, a complexidade da figura, o tipo de papel, foram fatores de dificuldades mesmo para estes professores com experiência no ensino de matemática.

A transformação rotação foi objeto de investigação para Mega (2001). O pesquisador analisou as diferenças e dificuldades na aplicação de duas sequências para o ensino de rotação e a comparação dos resultados obtidos na aprendizagem do conceito, nos dois enfoques. Em uma das sequências fez uso de régua e compasso e na outra usou materiais manipulativos, como papel transparente, cordões, palitos. Concluiu que os conjuntos de materiais utilizados podem contribuir para uma ampliação das experiências dos estudantes e da sua compreensão do campo conceitual da rotação.

Ripplinger (2006) pesquisou a simetria nas práticas escolares, com objetivo de fazer uma análise documental de registros escritos em cadernos de alunos e diários de classe de professores de 5ª a 8ª séries de uma escola da rede pública do Paraná. A pesquisadora observa como resultado que a noção de simetria consta nos cadernos e diários de classe dessa escola nas quintas e sextas séries.

A simetria axial foi objeto de estudo de Mongelli (2005) tendo como objetivo principal a identificação, análise e diagnóstico de procedimentos e invariantes operatórios mobilizados por alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental, quando colocados diante de situações-problema diversificadas envolvendo simetria axial. Segundo a pesquisadora, os procedimentos referência horizontal, vertical e diagonal, apareceram com maior frequência.

Outros estudos sobre transformações geométricas centram-se, principalmente, em experiências de ensino envolvendo o ambiente computacional. Alves (2005), Bilac (2008) e Vaz (2004) utilizaram em suas pesquisas o software Cabri-Géomètre, já os pesquisadores Lage (2008) e Silva (2010) trabalharam com o software Geogebra na realização de seus estudos.

Inserido no âmbito do ensino e da aprendizagem de geometria utilizando o Cabri-Géomètre, o estudo de Alves (2005) com alunos de 6ª série, pesquisou os efeitos de uma sequência didática a respeito do conceito de simetria axial. Por sua vez, Bilac (2008) além da simetria axial também apresentou uma sequência didática envolvendo a rotação. O trabalho de Vaz (2004) teve como objetivo investigar uma abordagem sobre o ensino e a aprendizagem da prova fazendo uso das ferramentas de transformação geométrica desse mesmo software.

Lage (2008) investigou as possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas, ao trabalhar em um ambiente computacional usando o software Geogebra. Desenvolveu seu trabalho com alunos do Ensino Médio, alunos do Ensino Superior de um Curso de Licenciatura em Matemática e de um Curso de Especialização. Utilizando este mesmo software temos a pesquisa de Silva (2010) que estudou a simetria axial e conduziu sua pesquisa a respeito do uso do erro em uma abordagem reconstrutiva a partir de estratégias pedagógicas. Apontaram o sucesso aos recursos que o software Geogebra proporciona, tanto Lage (2008) no sentido de promover a articulação entre as formas de raciocínio algébrico e geométrico quanto Silva (2010), principalmente, em relação à correção imediata e às validações e provas facilitadas por este recurso.

Voltadas para o Ensino Superior apontamos os estudos de Dias (1998) e Karrer (2006) por seus enfoques dados à teoria dos registros de representação semiótica de Duval tratando do objeto matemático: transformações lineares e, no estudo de Álgebra Linear a distinção dos quadros algébricos e geométricos; quatro registros: simbólico, representação por coordenadas, representação por equações, representação matricial e por dois pontos de vista: cartesiano e paramétrico.

Karrer (2006) realizou um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica em uma articulação entre Álgebra Linear e Geometria. Em sua pesquisa, tratou de questões relativas ao ensino e a aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear no ensino superior, explorando a conversão de registros nos ambientes Cabri-Géomètre e papel&lápis buscando investigar as trajetórias de aprendizagem de estudantes universitários e o impacto dessas escolhas na abordagem de ensino. Com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (199analisou a exploração dos registros e conversões presentes no conteúdo de transformações, tanto nos livros didáticos de Álgebra Linear quanto nos de Computação Gráfica. Para esta pesquisa aplicou ainda um questionário sobre transformações lineares a oitenta e seis (86) estudantes da área de Computação. Segundo a pesquisadora estes estudos apontaram deficiências e dificuldades com relação à exploração de diferentes registros, principalmente, o registro matricial e gráfico.

Dias (1998) realizou sua pesquisa na França com estudantes do primeiro ano em Álgebra Linear para analisar as dificuldades de estudantes na execução de atividades que necessitavam da articulação de dois pontos de vista na representação de subespaços vetoriais. Para realização de sua pesquisa, a autora distinguiu dois quadros – o algébrico e o geométrico -, quatro registros – simbólico intrínseco, representação por coordenadas, representação por equações e representação matricial - e dois pontos de vista – cartesiano e paramétrico.

Analisou livros didáticos franceses, brasileiros e anglo-saxões de Álgebra Linear para verificar se nos mesmos se estabelecia a articulação entre esses dois pontos de vista. Observou que a maioria dos livros fazia a articulação entre os dois pontos de vista somente em nível técnico, favorecendo o quadro de resolução de sistemas lineares. A análise de livros didáticos de três países diferentes proporcionou concluir que mesmo com diferentes abordagens, a forma como a articulação de pontos de vista é comum e desenvolvida de modo implícito. Dias (1998) realizou também estudo com estudantes do primeiro ano universitário (DEUG), alunos de um grupo de controle da Universidade de Paris e no Brasil com alunos do mestrado em Educação Matemática, buscando levantar dados sobre a flexibilidade entre o ponto de vista cartesiano e o ponto de vista paramétrico. Concluiu, de uma forma geral, que poucos alunos justificavam corretamente o resultado obtido, muitos estabeleciam associações erradas entre vetores e equações e a minoria apoiava–se no quadro geométrico.

A revisão das 22 pesquisas analisadas, a respeito de transformações geométricas ou transformações lineares apontou que seis delas se dedicam apenas ao estudo de simetria, uma se dedica apenas à rotação, duas apenas à simetria e rotação, duas às transformações lineares e onze às três transformações: simetria, translação e rotação. Além disso, podemos observar que a maioria usou como ferramentas o lápis e papel e apenas um apresenta a utilização de material manipulativo. Apenas cinco utilizam softwares de geometria dinâmica.

Podemos ver ainda que embora um dos autores utilize materiais manipulativos ele não trata de dobraduras em papel que entendemos seja uma boa ferramenta para alunos de séries iniciais que envolveria olhar para as transformações sob um ponto de vista diferente dos apresentados. Por outro lado, podemos observar que alguns trabalhos utilizam Registros de Representação Semiótica, mas não os relacionam com a noção de Quadros nem com a noção de Ponto de Vista. Acreditamos que relacionar esses três referenciais no estudo das transformações geométricas, em particular, das isometrias poderia ampliar a possibilidade de recursos que podem ser utilizados no ensino desse conteúdo.

Exceção encontrada nas pesquisas de Dias (1998) e Karrer (2006) que deram enfoque, em seus estudos, às articulações entre quadros registros e conversões, trabalhando respectivamente, com subespaços vetoriais e transformação linear com aplicações em Computação Gráfica.

Sendo assim, no que segue apresentaremos a justificativa para nosso estudo, bem como o referencial teórico que lhe dará suporte.

1.2 JUSTIFICATIVAS DA PESQUISA

Buscamos mostrar o quanto é importante o estudo da geometria e de que forma as transformações geométricas contribuem para que os alunos desenvolvam habilidades de conjecturar, explorar experimentar, intuir, argumentar e sistematizar resultados.

A respeito da importância da geometria há o consenso que o seu estudo tem um papel fundamental e integrador no ensino, pois a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem sua essência.

> O estudo de geometria contribui para ajudar os alunos a desenvolver as capacidades de visualização, pensamento crítico, intuição, perspectiva, resolução de problemas, conjectura, raciocínio dedutivo, argumentação lógica e prova. As representações geométricas podem ser usadas para ajudar os alunos a dar sentido a outras áreas da matemática: frações e multiplicação em aritmética, relações entre gráficos de funções (de duas e três variáveis) e representações gráficas de dados em estatística. (JONES, 2002, p.125, tradução nossa).

Além da importância inegável do ensino de Geometria, de acordo com Catunda et al (1990) a recomendação do ensino das transformações é centenária e para os PCN (BRASIL, 1998) o ensino de transformações permite o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, como veremos com mais detalhes nos estudos preliminares. Dessa forma, acreditamos na importância de um estudo teórico que aponte novos caminhos e recursos para o ensino das isometrias baseado nos estudos de Ponto de Vista de Rogalski (2001), da noção de Quadros de Douady (1992) e dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995). A articulação desses três referenciais teóricos permitirá localizar as isometrias: simetrias, translação e rotação em diferentes Quadros, áreas da Matemática, e analisa-las de acordo com os pontos de vista possíveis, bem como articulá-los com diferentes registros de representação, ampliando assim os conhecimentos a respeito desses objetos matemáticos.

Promover esta visão ampla das transformações foi nossa motivação maior quando buscamos nortear este trabalho a partir da articulação desses três referenciais sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem de Matemática. As especificidades inerentes a cada quadro, ponto de vista ou registro, bem como os tipos de transformações existentes na passagem de um quadro para outro, ou de um ponto de vista para outro no mesmo quadro, ou ainda, na conversão de uma representação para outra vislumbram conhecimentos ainda não explorados. Por outro lado, esse estudo promoveria uma visão de trabalho com as isometrias que poderia percorrer todo o Ensino Básico, partindo da utilização de dobraduras para as séries iniciais e chegando aos quadros da Geometria Analítica e da Álgebra no Ensino Médio utilizando pontos de vista intuitivos, funcional e algébrico.

Buscamos assim, oferecer um estudo que pode servir como suporte para professores trabalharem, na formação inicial ou continuada, as transformações geométricas sem, contudo, ter a pretensão de garantir que este trabalho seja suficiente para esgotar todo estudo dessas transformações.

Assim, apresentaremos na sequência o referencial teórico que deu suporte para nosso trabalho de pesquisa.

1.3 REFERENCIAL TEÓRICO

Conforme nossa proposta de estudo para as transformações geométricas, vamos descrever os aspectos mais relevantes das teorias que embasaram este trabalho. Apresentamos, primeiramente, os estudos de Rogalski (2001) que tratam de noção de ponto de vista de um objeto matemático. Citamos os aspectos *ferramenta, objeto, quadros, mudança de quadros* e *jogo de quadros* propostos por Douady (1992) em seus trabalhos; apresentamos também os pressupostos teóricos de Duval (2003) a respeito dos registros de representação semiótica.

1.3.1 A noção de Ponto de Vista

A noção de ponto de vista de um objeto matemático, para Rogalski (2001), são maneiras diferentes de olhar para esse objeto, Portanto, o pesquisador, utiliza o termo ponto de vista para designar uma forma de abordar um problema ou de olhar um objeto matemático.

Nesse sentido, para Rogalski (2001) olhar um objeto em diferentes quadros corresponde uma mudança de ponto de vista e observa que é possível mudar de ponto de vista dentro de um mesmo quadro. O pesquisador ressalta ainda que a passagem de um ponto de vista a outro não acontece por meio de uma simples tradução de um quadro para outro, mas a utilização de um teorema matemático a ser estabelecido. Muitas vezes, porem, não é necessário mudar de quadro para facilitar a resolução de um problema, basta mudar de ponto de vista. Podemos citar como exemplo a mediatriz de um segmento que pode ser mobilizada pelo sujeito pordois pontos de vista:

-um, como uma reta perpendicular a um segmento dado passando pelo seu ponto médio e,

-outro, como lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades de um segmento dado.

Pode-se olhar também a bissetriz de um ângulo, sob dois pontos de vista, como lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de duas semirretas concorrentes e como uma semirreta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes.

A partir da mobilização de um ou outro ponto de vista teremos meios diferentes para resolver problemas ou aplicar propriedades de acordo com o quadro. Assim, apresentamos no que segue essa noção.

1.3.2 A noção de Quadros

Para Douady (1992), "um quadro é constituído de objetos de um campo da matemática, de relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a esses objetos e a essas relações" (1992, p. 135)[3] e apresenta como exemplos: quadro algébrico, quadro geométrico, quadro numérico etc.. Para a pesquisadora,

> **Mudança de quadros** é um meio de obter formulações diferentes de um problema, que sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas e o funcionamento

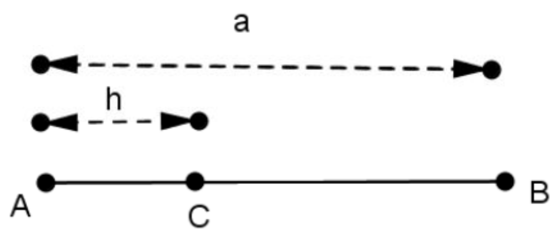
[3] DOUADY, 1992, P. 135, Traduzido por nós do original francês: un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.

> de ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. (DOUADY, 1992, p. 135)[4].

As mudanças de quadro permitem que os alunos evoluam na resolução de problema proposto. Dessa forma para fazer os alunos progredirem na busca de solução para um problema, Douady (1992) sugere um *jogo* interativo entre *quadros* que consiste em o professor organizar situações de aprendizagem, que privilegiem a diversidade de formas de representação de um mesmo conteúdo, por um procedimento que explicita características importantes da matemática como a capacidade de mudar de ponto de vista e de traduzir um problema de um quadro para outro. A finalidade específica é conduzir o aluno a mobilizar outras ferramentas para a resolução do problema, que não as inicialmente encaminhadas. Para a autora, os jogos de quadros, são mudanças de quadros provocadas por iniciativa do professor, a partir da escolha de problemas pertinentes para fazer avançar as buscas de soluções e evoluir a compreensão dos alunos.

Considere o problema proposto como exemplo de uma possível mudança de quadro para o aluno ou como um jogo de quadros proposto pelo professor.

Dado um segmento AB, obter um ponto C pertencente a esse segmento tal que o quadrado de lado AC seja equivalente ao retângulo de lados AB e BC



O problema está enunciado no *quadro geométrico*, mas o sujeito que irá resolvê-lo pode fazer uma mudança para o *quadro algébrico* a fim de obter novas ferramentas. Assim, mudar para o quadro algébrico é uma estratégia que pode ser decisiva para resolver o problema embora tenha sido enunciado no

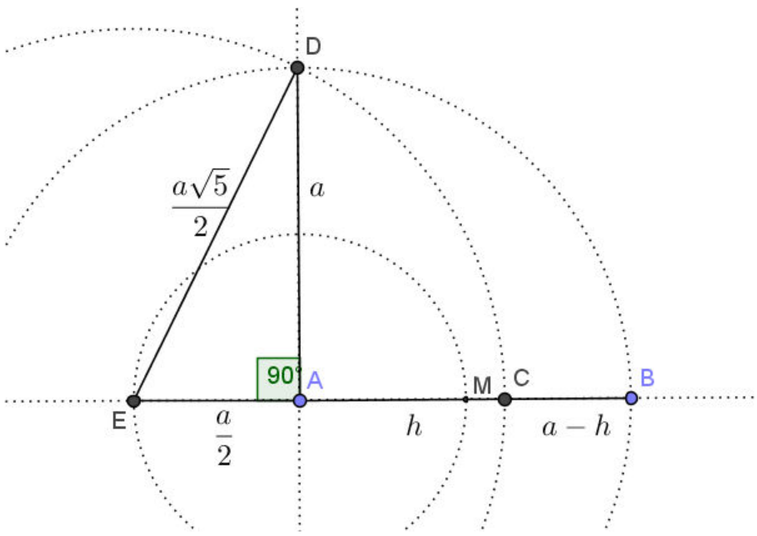
[4] DOUADY, 1992, P. 135, Traduzido por nós do original francês: **Le changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différents d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés recontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pás dans la première formulation.

quadro geométrico. No quadro algébrico a solução de uma equação resolve o problema como mostramos no que segue.

Considerando que o segmento AB tenha media a e que o segmento AC tenha medida h podemos dizer que a medida da área do quadrado de lado AC pode ser representada por h^2 e que a medida da área do retângulo de lados AB e BC será $h(a-h)$. O problema nos diz que $h^2 = h(a-h)$ que é uma equação de segundo grau que permite determinar o valor de h em função da medida a. Voltando ao quadro geométrico podemos entender que h é a média geométrica das medidas h e a-h. No entanto isso não nos permite determinar o ponto C na figura apresentada.

Resolvendo a equação obtemos como solução positiva que $h = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$ que poderá ser determinada geometricamente com uma construção.

Figura 1 - Construção do ponto C do exemplo



Fonte: Produção da autora adaptado de Bongiovanni[5]

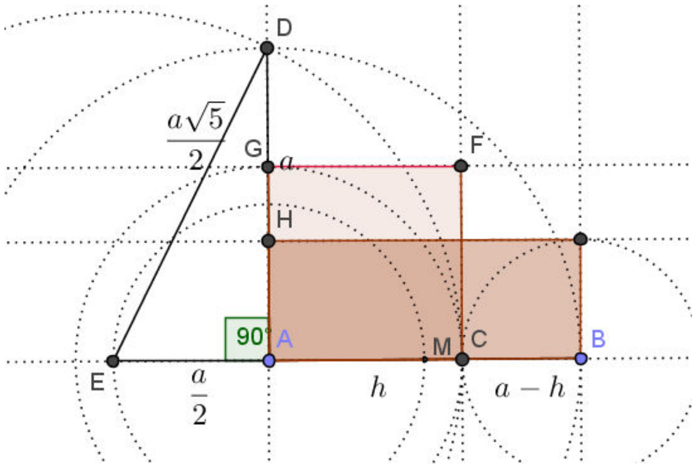
Na figura 1 tomamos o ponto E na reta AB de tal forma que o segmento AE meça $\frac{a}{2}$ e determinamos na perpendicular ao segmento AB pelo ponto A o ponto D de tal forma que o segmento AD meça a. No triângulo retângulo ADE

[5] Retirado de apontamentos de aulas do Prof. Vincenzo Bongiovanni ministradas na PUC-SP.

temos então que sua hipotenusa mede $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. A partir da circunferência de centro em E e raio ED obtemos o procurado ponto C.

Determinado o ponto C, figura 2, podemos agora determinar o quadrado e o retângulo equivalentes solicitados no problema.

Figura 2 - Construção do quadrado e do retângulo do exemplo



Fonte: produção da autora

Como pudemos ver, nesse exemplo, o problema é apresentado no quadro geométrico, mas o quadro algébrico é que permite iniciar a procura de uma solução para o problema, mas que não é suficiente para apresentar a solução que é obtida com a volta para o quadro geométrico com a construção de uma figura a partir da solução de uma equação. A mudança de quadros forneceu uma nova forma de acesso ao problema a partir de equações algébricas e depois uma nova mudança permite a conclusão do problema a partir de propriedades do triângulo retângulo e da utilização de noções de desenho geométrico.

Assim buscaremos com a noção de quadros a distinção e a articulação do quadro da geometria euclidiana, quadro da geometria analítica e quadro da álgebra para o estudo das isometrias que pretendemos associar à noção de ponto de vista e de Registros de Representação Semiótica que apresentaremos no que segue.

1.3.3 Registros de Representação Semiótica

Duval (2004) afirma que um registro de representação semiótica deve permitir três atividades cognitivas que são fundamentais: a primeira, constituir um traço ou um conjunto de traços que sejam perceptíveis e que representem alguma coisa, em nosso caso, as isometrias. A segunda seria produzir novas representações dos mesmos objetos segundo regras próprias do sistema em que as representações foram criadas. A esta atividade o autor chama de tratamento. A terceira atividade seria converter as representações produzidas em um outro sistema de representação a fim de obter outras significações do que está sendo representado. A esta atividade o autor chama de conversão.

Assim, os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro:

> por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. (DUVAL, 2003, p.16).

Já as conversões são transformações:

> de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16).

Para Duval (2004) a análise tanto do desenvolvimento de conhecimentos, quanto dos obstáculos à aprendizagem passa por três fenômenos: a diversidade de registros de representação semiótica, a diferença entre representante e representado e a coordenação entre diferentes registros. A respeito do primeiro afirma a importância de perceber as diferenças entre os sistemas de representação. Cada um carrega informações a respeito do representado que nem sempre são as mesmas. Por exemplo, uma dobradura que representa o simétrico de um ponto em relação à uma reta, não apresenta as mesmas informações que a representação por pares ordenados (a, b) → (a, -b). A respeito do segundo alerta para a não confusão entre a representação e o objeto representado. Em nosso caso dada uma figura que representa uma simetria em relação à uma reta não podemos nos referir à ela como a própria simetria. Temos que entender que essa figura é uma das representações possíveis para essa simetria. O terceiro fenômeno é a coordenação entre diferentes registros de representação que nos leva à ideia de congruência e não congruência nas conversões. Para o autor a congruência entre duas representações semióticas diferentes acontece quando, pelo menos parcialmente, elas representam o mesmo conteúdo. É na conversão não congruente que o estudante apresenta maior dificuldade como aponta Duval (2003) quando ressalta que o ensino de Matemática deve se procupar em explorar atividades de conversão, principalmente, as de conversões não-congruentes sob pena de ocasionar prejuízo para a compreensão do conceito estudado.

O autor aponta que uma das características que diferencia a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida por outros domínios do conhecimento é a variedade de representações semióticas utilizadas para representar o mesmo objeto matemático. Acrescenta que “a diversificação dos registros de representação semiótica é a constante do desenvolvimento dos conhecimentos, tanto do ponto de vista individual quanto científico ou cultural” (Ibid, p. 62) e acrescenta que “um registro pode permitir efetuar certos tratamentos de uma maneira muito mais econômica e mais potente que outro registro”.

Duval (2003) ressalta que, nos diferentes níveis de ensino, pode-se observar que os fracassos ou os bloqueios dos alunos são muito maiores quando uma mudança de registro é necessária ou quando se faz necessária a mobilização simultânea de dois registros. O pesquisador sustenta que a articulação dos registros desempenha uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, que caracteriza o “enclausuramento”.

> Existe como que um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (DUVAL, 2003, p. 21).

Afirma que o reconhecimento de um objeto matemático por meio de múltiplas representações é condição essencial para que um aluno possa, por si só, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problemas O autor postula que, a pluralidade de registros de representação semiótica, utilizados na Matemática, permite uma diversificação de representações de um mesmo objeto. Assim, com relação ao objeto matemático de nossa pesquisa, tomamos a rotação como exemplo para mostrar algumas conversões de registros.

Em nosso trabalho utilizaremos diversas representações para os objetos matemáticos simetria axial, simetria central, rotação e translação que apresentaremos no que segue.

Trataremos em primeiro lugar do registro material. Jesus (2008) identificou a manipulação de papel por meio de dobras, como **registro material**. Justificou em sua pesquisa que mesmo não encontrando nos trabalhos de Duval, informações sobre a existência de tal registro, notou que este possui as características que um registro de representação semiótica exige, pois ao fazer as dobraduras se constitui uma representação que podem ser transformada em outra representação a partir de novas dobraduras e, mais pode ser convertida em representação em outro sistema de representação. Acrescenta que mesmo tendo uma figura construída por dobradura ela possui outras potencialidades que o registro figural, propriamente dito, construído em lápis e papel.

Utilizaremos também em nosso trabalho o **registro da língua natural** que será utilizada por exemplo, para definir as isometrias e enunciar suas propriedades. Além disso, veremos que esse registro é fundamental nos processos de geometria para a coordenação entre as figuras e os discursos teóricos em língua natural.

O próximo registro é fundamental para o ensino e a aprendizagem de Geometria: **o registro figural.** Para Duval (2004) os cursos de geometria se realizam em dois registros: o das figuras e o da língua natural, mas não se trata de uma conversão de um para outro, e sim de tratamentos figurais e discursivos efetuados simultaneamente. Para o autor uma figura representa uma situação geométrica em que a significação de certas unidades figuras e relações entre elas sejam fixadas inicialmente, isto é, não há desenho que represente algum objeto por si mesmo, é necessária uma legenda. Uma figura geométrica é necessariamente discursiva.

Por outro lado, o autor afirma que uma figura é uma combinação de variações visuais dos tipos dimensional e qualitativo. O primeiro está ligado ao número de dimensões: 0 (ponto), 1 (uma linha) ou 2 (uma área). A segunda refere-se às variações de forma, de orientação, de contorno etc. Assim, “uma figura geométrica é sempre uma configuração de pelo menos duas unidades figurais elementares”. Para o autor há dois níveis na apreensão das figuras geométricas: O primeiro é o reconhecimento das diferentes unidades figurais que está ligado à percepção e, o segundo, compreende as modificações possíveis das relações das partes com o todo (visuais ou posicionais) que corresponde à uma apreensão operatória das figuras.

Para Duval (2012a, p. 120)):

> Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se, geralmente, em conflito, porque a **figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados o enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente.**

Assim, para o autor “é preciso considerar não mais a apreensão perceptiva da figura, mas sua apreensão operatória (p. 125).

Duval (2004) afirma que há diversas maneiras de uma figura ser modificada, podendo separar-se as unidades figurais de dimensão 2 que a compõem em outras também de dimensão 2, ou ampliar ou reduzir a figura ou desloca-la por translação ou rotação etc. alertando que essas modificações não são de mesma natureza. As apreensões em Geometria podem ser perceptivas, operatórias, sequenciais ou discursivas.

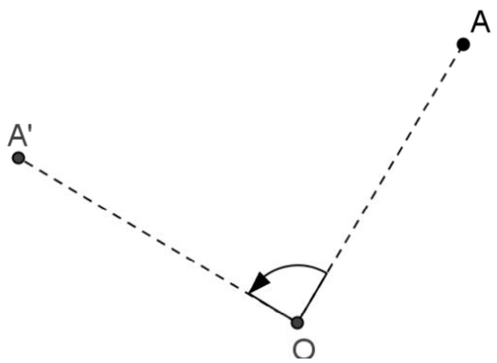
Duval (1994) afirma que a apreensão perceptiva permite identificar ou reconhecer uma forma ou um objeto matemático e tem como função epistemológica de identificação dos objetos. A apreensão discursiva de uma figura é de natureza dedutiva e explicita propriedades matemáticas dessa figura explicitadas por uma legenda ou pelas hipóteses e tem como função a demonstração. A apreensão sequencial trata da ordem de construção de uma figura e não depende apenas das propriedades matemáticas da figura, mas também das ferramentas utilizadas e é requisitada sempre que se deseja construir uma figura ou descrever sua construção. A apreensão operatória transforma ou modifica uma figura inicial em outras figuras para dar a ideia de uma solução para um determinado problema. Essa apreensão tem três tipos de modificações possíveis: óticas (mantem a forma e orientação, mas alteram as medidas); posicionais (mantem medidas e forma, mas varia a orientação – rotação, translação); mereológicas (decomposição e recomposição).

No entanto, para Duval (2012b, p. 286) é a denotação que importa e não as apreensões perceptiva ou operatória, pois:

> a construção de figuras são atividades que privilegiam a formação de representação de um objeto matemático ou de uma situação matemática no registro figural que são subordinadas aos elementos conceituais presentes na definição dos objetos.

Em nosso caso, no estudo das isometrias, utilizamos a apreensão posicional (ver figura 3) pois ela mantém as medidas e forma embora tenha variação de orientação e a apreensão sequencial porque em alguns casos serão explicitados os passos de construção das isometrias e ainda a percepção discursiva porque a partir de figuras serão determinadas definições e propriedades.

Figura 3 - Registro figural



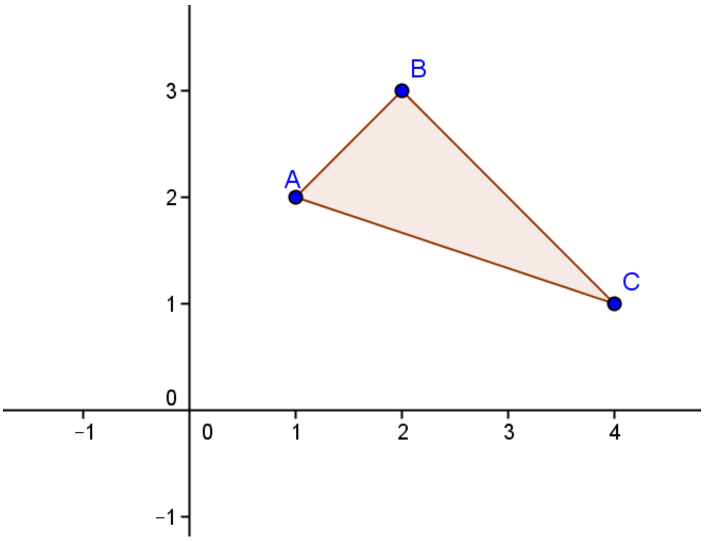
Fonte: Produção da Autora.

Outro registro que trataremos é o **registro dos pares ordenados** que é denotado, em nosso trabalho, por $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Os tratamentos neste registro são a adição definida por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e a multiplicação por escalar definida por: sendo $\mathcal{B} \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}(a, b) = (\mathcal{B}a, \mathcal{B}b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Nesse registro dada uma lei, por exemplo, $(a, b) \rightarrow (a, -b)$ que no registro gráfico representa uma simetria em relação ao eixo y, ela pode ser aplicada aos pares ordenados dos vértices de uma figura. Sendo um triângulo representado pelos seus vértices: A(1,2); B(2,3) e C(4,1) pela lei dada teríamos A´(1,-2); B´(2,-3) e C´(4,-1). Assim, podemos dar ao aluno uma figura qualquer representada por seus vértices, a lei que será aplicada a cada um deles que requer um tratamento desses pares ordenados para então solicitar sua representação gráfica.

Podemos representar tais pares ordenados em um referencial cartesiano e fazer então um **registro gráfico** das figuras. Neste registro teremos então a associação do registro figural e dos pares ordenados à um referencial cartesiano. Neste caso teríamos então a representação do triângulo do exemplo anterior como uma figura no plano cartesiano, como mostra a figura 4.

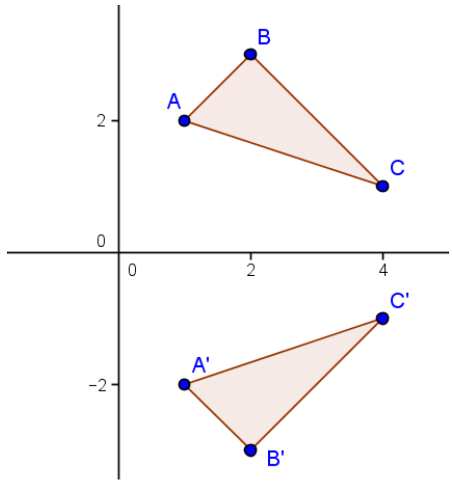
Figura 4 - Registro gráfico de um triângulo



Fonte: Produção da Autora

A aplicação da lei pode ser representada então nesse referencial, como mostra a figura 5.

Figura 5 - simetria axial de um triângulo



Fonte: produção da autora

Um registro para as transformações muito utilizado em Álgebra Linear para computação gráfica é o **registro matricial**. Os tratamentos são a adição, a multiplicação e a multiplicação por escalar já conhecidos e podemos representar então, por conversão, os vértices do triângulo do exemplo por uma matriz M e os vértices da figura transformada pela matriz M´:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Segundo Duval (2003) as conversões podem ser congruentes ou não congruentes. Comparando a representação do registro de partida com a representação final no registro de chegada, se a transformação estiver mais próxima de uma situação de simples codificação, isto é, se a passagem de uma representação para outra se fizer de maneira espontânea, a conversão é tida como congruente, o contrário é classificada como não-congruente.

A teoria de Duval a respeito de Registros de Representação Semiótica nos permitiu complementar o referencial teórico de nossa pesquisa quando evidencia que a compreensão em matemática requer a capacidade de mudar de registro. Com nossa pesquisa centrada em rever as transformações geométricas segundo ponto de vista, quadro e registro, a teoria de Duval complementa o referencial teórico.

1.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Encontramos na pesquisa de trabalhos já realizados, inúmeros estudos sobre transformações geométricas no plano,todavia, encontramos também uma lacuna a respeito de pesquisas referentes ao estudo de transformações que permitisse trabalhar esse conteúdo via quadros ou conversão tanto de registro quanto de ponto de vista. Essa grande lacuna nos impulsiona e nos estimula com a convicção de que é imperativo pesquisar astransformações geométricas por este aspecto.

A importância que vemos em se ter um trabalho de transformações geométricas via quadros é que poderá servir para professores que formam professores no sentido de dar uma visão ampla dos diversos quadros, pontos de vista e registros que estão atrelados ao ensino de transformações e de isometrias no plano. Consideramos que a falta de pesquisas a respeito de transformações geométricas no plano com essa fundamentação talvez seja pela dificuldade deencontrar material que reúna esses elementos.

Diante das considerações feitas, nosso objetivo principal é estudar os conteúdos abordados em licenciaturas em Matemática, que tratam de transformações geométricas a partir das noções de quadro, ponto de vista e registros de representação semiótica.

Assim, elaboramos a seguinte questão:

- ✓ Quais saõ as potencialidades matemáticas e didáticas do estudo de diferentes pontos de vista, quadros e registros de representação semiótica para as transformações geométricas?

A seguir apresentamos a metodologia utilizada para responder nossa questão de pesquisa.

1.6 METODOLOGIA DE PESQUISA

Tudo o que já foi exposto direcionou nossa pesquisa para uma pesquisa bibliográfica, pois consultar diversos autores nos permitiu contato com aspectos conceituais a respeito do objeto matemático transformações geométricas em diversas áreas da matemática.

Embora a pesquisa bibliográfica seja considerada como a primeira etapa de toda pesquisa científica, pontua Gil (2009, p.44) “há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas”. O autor ainda acrescenta: “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente”. (GIL, 2009, p.45)

Assim para responder nossa questão de pesquisa faremos um estudo bibliográfico, com base em material já desenvolvido, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Como as transformações geométricas, da forma como propusemos, não estão presentes na literatura pesquisada julgamos necessário alguns estudos preliminares, que apresentamos no que segue.

CAPÍTULO 2 – ESTUDOS PRELIMINARES

Nesta parte da pesquisa, tratamos de tópicos pertinentes ao trabalho como situar as transformações no ensino de geometria e do que diz respeito ao movimento dito rígido que ocorre ao realizarmos as isometrias E ainda tratamos da simetria que entendemos ser mais do que uma questão de terminologia.

2.1 Geometria e o ensino das isometrias

Na geometria, há a proposição de trabalhar sob o enfoque das transformações como observa Gravina (2001, p.19)

> no caso da geometria, o tratamento via transformações só se torna relevante quando quer-se destacar outros invariantes, que não distâncias, ângulos e razões entre distâncias, estes invariantes nos grupos das isometrias e das semelhanças. É ao olhar-se para os invariantes na geometria afim e na geometria projetiva que o tratamento via transformações mostra o seu alcance teórico; mas tais invariantes não se apresentam como objeto de estudo na escola.

Some-se a isto a dificuldade que a maioria dos professores, neste período, tinha em dominar esse assunto e, portanto passaram a enfatizar nomeadamente conteúdos de álgebra em detrimento cada vez mais da geometria. Ao propormos o estudo de transformações geométricas passamos, necessariamente, pelo estudo da geometria, a importância do seu ensino e como as transformações geométricas trouxeram à geometria um aspecto mais dinâmico, com uma abordagem mais intuitiva e uma forma de melhor explorar relações entre figuras geométricas.

Nesta perspectiva, Abrantes (1999) e Lorenzato (1995), observam que a geometria torna-se um campo privilegiado de matematização da realidade e de realização de descobertas. É ainda considerada como fator altamente facilitador para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano, possibilitando uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática.

Em consonância com essa necessidade de ampliar a visão e compreensão do mundo e revalorização da geometria, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1997, 1998) para o ensino de Matemática do segundo ao quinto ano (1ª à 4ª série), sinalizam a importância da Geometria, considerando que:

> Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino da geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, arquitetura, ou, ainda, em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos e etc. (BRASIL, 1997, p. 128).

A geometria é também significativa por proporcionar o desenvolvimento de certo tipo de pensamento lógico, organizado e preciso, fundamental na resolução de problemas dos mais diversos. Para o ensino fundamental, os conceitos geométricos são parte importante do currículo de matemática porque, segundo os PCN (BRASIL1997, p.41), por meio deles, "o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive". O Guia do Livro Didático (BRASIL, 2008, p.46) afirma que situar-se, reconhecer a posição dos objetos no espaço, saber orientar-se são competências particularmente importantes da Geometria.

Tais argumentos e considerações tendem a fazer da geometria uma disciplina exigente de se ensinar e ensinar bem. No ensino da geometria, há o hábito de trabalhar com objetos geométricos considerados mais elementares e deter muito tempo, geralmente todo tempo, listando nomes, propriedades, e relações entre esses objetos, Veloso (1999, p. 31) considera que "para muitos alunos, a geometria não passa disso: pontos, retas, posições relativas das retas, ângulos, tipos de ângulos, triângulos, tipos de triângulos, igualdade de triângulos, semelhança de triângulos [...], e assim por diante [...]". Considera ainda que esse tipo de abordagem da geometria, por ele chamada de "pequena geometria", não deveria consistir, nem sequer tomar como ponto de partida, em qualquer nível de escolaridade.

Para Veloso (1999, p.31-32), há que se *inventar* uma nova abordagem para o ensino de geometria que valorize atividades de exploração e de investigação na sala de aula. Destacamos entre suas orientações gerais para essa nova abordagem da geometria: “os grandes temas da geometria – como a visualização, a representação, a simetria, a forma e a dimensão”. Orientações comungadas com outros estudiosos que destacam no estudo de geometria o estudo de transformações geométricas.

Ainda pode-se acrescentar Abrantes (l999, p.53), expondo que a riqueza e variedade da geometria constituem, de fato, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática como:

> Uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de “organização local” da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades. (ABRANTES, 1999, p.53).

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) na seção espaço e forma, ênfase para o estudo de transformações geométricas no estudo de conceitos geométricos em que:

> [...] destaca-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias) de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51).

Usar transformações geométricas no ensino de Geometria é uma recomendação centenária afirma Catunda et al. (1990). Estes autores afirmam que em 1872, para Félix Klein o conceito de transformação desempenha um vasto papel coordenador e simplificador no estudo da Geometria. Os autores relatam que a Geometria é ensinada na maioria das escolas brasileiras como foi desenvolvida por Euclides e por seus continuadores, de maneira estática. Desta forma as figuras são apresentadas e descritas como resultados de observação e acrescentam que:

> Só depois é que se consideram as transformações dessas figuras. Se o ensino da Geometria começa a partir das transformações (o que já poderá ser feito na escola primária, através de jogos) a Geometria adquirirá um aspecto dinâmico porque as figuras passarão a ser construídas por meio do uso dessas transformações. (CATUNDA et al. 1990, p.11).

É importante ressaltar o interesse e ênfase dados também por Meserve (1973), de acordo Catunda et al.(1990), à ideia de uma abordagem intuitiva e outras formas de explorar relações entre figuras geométricas, tanto que, em apresentação de um trabalho no 2º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Exeter – Inglaterra, o fez declamar a amplamente publicada declaração “abaixo Euclides” e como observa Catunda et al (1990, p.13) tal declaração “deve ser aceita não como sinônimo de ‘abaixo geometria’ mas, sobretudo, como uma forte indicação de que a geometria deve ser ensinada como uma matéria viva e em crescimento, em vez de uma coleção de regras velhas” e ainda:

> [...] Nós estamos interessados, numa abordagem intuitiva e informal da geometria e, por isso, pensamos em transformações e vetores.
> Nós gostaríamos que os nossos estudantes fossem capazes de explorar relações entre figuras geométricas usando continuidade e simetria.
> Nós gostaríamos, ainda, que os nossos estudantes fossem capazes de usar vetores e transformações que deixam invariantes os aspectos essenciais de um problema. (MESERVE, 1973 apud CATUNDA et al, 1990, p. 13).

Considerando que para ensinar geometria de forma mais eficaz e dar alguma coerência às atividades de sala de aula, Jones (2002) considera que é útil, na elaboração desse ensino, manter em mente e destacar, se for o caso, o que chamou ideias chave na geometria, que incluem: invariância, simetria e transformação:

> *Invariância*: em 1872, o matemático Felix Klein revolucionou a geometria, definindo-a como o estudo das propriedades de configuração que são invariantes sob um conjunto de transformações. Exemplos de invariância são todos os teoremas angulares planos (tais como o teorema de Thales), e os teoremas envolvendo triângulos (tais como a soma dos ângulos de um triângulo plano é de 180º). (JONES, 2002, p.131, tradução nossa).

A autora considera a simetria fundamental, não só para a geometria, como para a organização da matemática:

> a simetria, é claro, não é apenas uma idéia-chave na geometria, mas em toda a matemática, mas é a geometria que é de imediato atingida. Tecnicamente, a simetria pode ser pensada como uma transformação matemática de um objecto que deixa alguma propriedade invariante. Simetria é frequentemente usada para tornar os argumentos mais simples, e geralmente mais poderoso. Simetria também é um princípio fundamental da organização matemática. Por exemplo, provavelmente, a melhor maneira de definir quadriláteros (exceto para o trapézio), é através das suas simetrias. (JONES, 2002, p.131, tradução nossa).

Jones (2002), considera a transformação como o que chamou ideia-chave na geometria observa também sua importância na arte de muitas culturas:

> transformação permite que os alunos desenvolvam conceitos gerais de congruência e semelhança e aplicá-las a todas as figuras. Por exemplo, figuras congruentes são sempre relacionadas ou por uma reflexão, rotação, translação, ou reflexão deslizante. Transformações também desempenham um papel importante na arte de muitas culturas - por exemplo, elas aparecem em padrões de cerâmica, pavimentações e frisos. (JONES, 2002, p.131, tradução nossa).

Os conceitos de invariância e transformação estão presentes nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1998), fazendo uma inferência sobre a importância dos estudos de transformações geométricas como o apresentado em Conceitos e Procedimentos, na secção *Espaço e Forma* (BRASIL,1998, p. 43):

> Desenvolvimento do conceito de congruências de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composição destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície); desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).

Talvez, por sugestão dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) a geometria e o assunto transformações geométricas estão mais presentes nos livros didáticos e nos currículos escolares o que não garante um ensino eficaz. As transformações geométricas possibilitam imprimir um aspecto dinâmico e certamente prazeroso, pois ao aplicarmos uma transformação em uma figura ocorre um movimento opondo à forma estática como sempre foi o ensino de geometria. Esse movimento que é implícito será tratado no que segue.

2.2 O movimento no estudo de transformações geométricas

O conceito de transformação geométrica está relacionado aos movimentos rígidos de figuras geométricas do plano, isto é, as transformações isométricas tais como simetria, rotação e translação mantêm uma das características mais importante, sob o ponto de vista geométrico, não alteram medidas, nem forma.

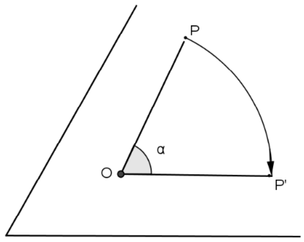
O movimento geométrico, segundo Ledergerber-Ruoff (1982) é utilizado na sobreposição de objetos. Conforme Bkouche (1991 apud SALAZAR, 2009, p.42)[6] é um movimento no qual não são consideradas as forças, nem o tempo, mas, "a trajetória descrita pelo objeto geométrico para sair de sua posição inicial e atingir a posição final, sem posições intermediárias a serem consideradas, isto é, importa apenas a posição inicial e final do objeto".

Neste sentido Ledergerber-Ruoff (1982) observa que, a Geometria, ao contrário da Cinemática, não se interessa pelo percurso e nem pela velocidade da passagem de um ponto *P* até o ponto *P'*, mas unicamente pela correspondência entre os pontos antes e depois do movimento.

Naturalmente imaginamos um "certo" movimento que leva o ponto *P* a ocupar a posição do ponto P' como mostrado na figura 6.Essa ideia de movimento é acentuada na rotação de centro *O* e ângulo φ, pois nos leva a "ver" o ponto *P* mover-se sobre uma circunferência de centro *O*, raio *OP* percorrendo o arco de ângulo φ até se transformar no ponto *P'*, embora, sabemos que, matematicamente isso não ocorra.

[6] BKOUCHE, R.. De La géométrie et des transformations. In: Repères IREM n 4, julho, p. 134 – 157,1991

Figura 6 - Rotação de um ponto, no sentido horário, sob um ângulo dado



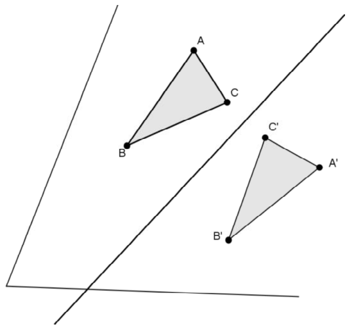
Fonte: produção da autora

No texto de apoio a professores de matemática (APM, 2008)[7] vemos que não há grande mal nisso, se ao mesmo tempo tivermos a consciência de que:

> - o movimento é apenas uma *representação* física da correspondência *P → P'*, e podem existir diferentes movimentos que definam a mesma correspondência;
> - na realidade, matematicamente, não há movimento, depois de aplicada a transformação ou a função, o ponto *P* mantém-se na sua posição inicial, apenas ficámos a saber qual é o ponto *P´* que lhe corresponde;
> - esse movimento aparente *refere-se ao plano todo e não apenas ao ponto P*, estamos apenas a mostrar o efeito da transformação em cada ponto! (APM, 2008, p.1-2).

Entendemos que, embora matematicamente não exista movimento associado a uma transformação e que apenas nos interessamos pela posição inicial e final de cada ponto após a transformação, isto é a cada ponto P do plano associamos um ponto P´, acreditamos que, independente do registro em lápis e papel não temos recursos para representar tal movimento, como podemos ver na translação de um triângulo representado na figura 7.

Figura 7 - Simetria em relação a uma reta de um triângulo



Produção da autora

[7] A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma associação portuguesa de professores ligados à educação matemática, que abrange todo território português e todos os níveis de escolaridade, do ensino pré-escolar ao Ensino Superior.

Para Bkouche (1991 apud SALAZAR, 2009) o movimento intervém nas transformações geométricas por meio da translação e rotação e afirma que:

> o apelo ao movimento do objeto geométrico é decisivo para sua compreensão. No caso da translação, um dos elementos que a caracteriza – o vetor, que é representado graficamente por um segmento orientado – já vem associado a um deslocamento cuja trajetória é um segmento de reta, pois o vetor indica a direção, sentido e o comprimento dessa trajetória, sendo um ente geométrico criado para esse fim. (BKOUCHE, 1991 apud SALAZAR, 2009, p.42)[8]

Dessa forma, entendemos que a dobradura é um meio de trazer esse movimento físico para uma melhor compreensão das transformações por alunos dos anos iniciais, pois os softwares de geometria dinâmica utilizam o paradigma do lápis e papel não explicitando o movimento físico de cada transformação, mas sim a figura e sua imagem como entendemos na Matemática.

2.3 As transformações uma questão de terminologia

Durante nosso estudo encontramos uma diversidade de nomes dados à simetria, tais como reflexão, simetria de rotação, simetria de translação etc. o que nos conduziu à necessidade de um estudo para verificarmos o porquê dessa diversidade. A esse respeito, encontramos posições diferentes, tanto de autores de livros didáticos, quanto paradidáticos, quando se trata de simetria. Achamos oportuno analisar um pouco mais a ideia de simetria, que é uma das mais ricas em matemática e, em particular, em geometria.

O uso da palavra simetria é bastante genérico e bastante expressivo no estudo das isometrias e em outras áreas do conhecimento. Intuitivamente essa palavra sempre esteve associada às ideias de medidas harmoniosas, equilíbrio, proporções bem estabelecidas, beleza, uniformidade e regularidade no espaço.

Buscamos autores que, em períodos diferentes, definiram simetria: Alves & Galvão (1996), Bastos (2006), Bigode (1994), Dienes (1975), Jaime & Gutiérrez (1996), PCN (1998), Rohde (1982), Stewart (2012), Weyl (1989).

---

[8]BKOUCHE, R.. De La géométrie et des transformations. In: Repères IREM nº 4, julho, p. 134 - 157

Dienes (1975), no livro “A Geometria Pelas Transformações”, considera que, tanto em matemática, como nas ciências, a noção de simetria é fundamental e propõe fichas para introduzir essa noção. Nelas trata das simetrias central e axial e assim as chama. Em algumas delas são estudadas as relações entre as simetrias e as rotações de figuras dando uma ideia das relações fundamentais que existem entre tais transformações.

Na coleção de livro didático “Matemática Atual”, no volume da 7ª série, Bigode (1994, p.181-182), observa que muitas vezes a palavra simetria significou proporção ou comensurável e acrescenta que o significado atual associa simetria a figuras ou objetos que apresentam partes iguais (entendemos que se refere às figuras que possuam eixos de simetria). Acrescenta que há vários tipos de simetria embora a maioria das pessoas reconheça somente as simetrias de reflexão, o que não esclarece o que entenda por simetria de reflexão e nem tão pouco explicita a que simetrias se refere.

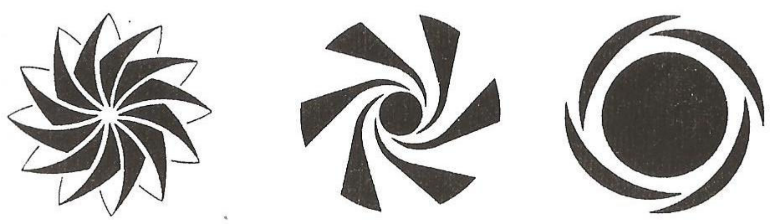
Alves e Galvão (1996) definem simetria de rotação denotando a rotação de centro *O* e ângulo α por $R_O\alpha$.

> Dizemos que um ponto *O* do plano é um **centro de simetria** de um subconjunto *A* do plano se *A* é invariante por uma rotação, distinta da transformação identidade, de centro *O*, ou seja, existe $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, tal que $R_O\alpha$ (*A*) = *A*. Neste caso, diremos ainda que *A* é **simétrico pela rotação** $R_O\alpha$. Todo ângulo α nas condições acima é dito **admissível para** ***A*** **no centro de simetria** *O*. (ALVES e GALVÃO 1996, p.88, grifo dos autores).

As imagens mostradas na figura 8 são apresentadas por Alves e Galvão por exibirem alguns subconjuntos do plano que são simétricos por rotação.

Não concordamos com os autores na colocação “simetria por rotação”, consideramos apenas o movimento de rotação.

Figura 8 - Subconjuntos do plano simétricos por rotação



Fonte: Alves e Galvão, 1996, p. 88

Weyl (1997, p.05) em seu livro, publicado originariamente em 1952 sob o título *Symmetry*, define simetria como, "uma idéia pela qual o homem através dos tempos tem tentado compreender e criar ordem, beleza e perfeição". Do ponto de vista matemático, esse mesmo autor, se fundamenta em dois conceitos: o de isometria e o de invariância de uma figura por um grupo de isometrias.

Em geral, os livros didáticos a partir de 1998, seguindo as orientações dos PCN (BRASIL, 1998) entre seus conteúdos programáticos trazem o tema transformações geométricas por meio da exploração de objetos do mundo físico, obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato onde ocorrem tais transformações (Ibid, p.51-52), apresentam, muitas vezes, esse tema, apenas com aplicações práticas sem uma definição matemática mais rigorosa.

> À primeira vista, as transformações geométricas podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-dia, mas refletindo e observando nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de <u>simetria de reflexão</u>. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. (BRASIL, 1998, p.124, grifo nosso)

A diversidade de nomes para a simetria pode decorrer de como interpretar a própria leitura dos PCN (1998, p.124) quando diz que "as principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central)", mas na mesma página afirma que: "as <u>simetrias centrais e de rotação</u> também surgem em diversas situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram copos, pratos, bordados etc." (BRASIL, 1998, p. 124, grifo nosso).

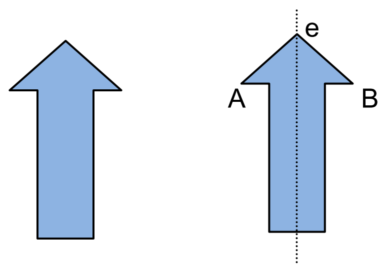
Farmer (1999) determina a rotação e a translação como tipos de simetria. O autor ilustra algumas figuras como tendo simetria de espelho, simetria de rotação e ainda de simetria de espelho e rotação. Embora não concordemos com estas nomenclaturas, estamos citando para mostrarmos a diversidade de nomes encontrados para a simetria.

Mesmo tendo, com certeza, presente a ideia de que a simetria está associada às transformações geométricas, mais especificamente às isometrias, para Bastos (2006) simetria de uma figura é mais do que uma transformação geométrica. Para a autora (2006, p.9) há uma confusão habitual, que se deve ao fato de:

> em português, se terem adoptado as designações simetria axial e simetria central para as transformações geométricas que deveriam antes chamar-se reflexões, meias voltas (no plano) ou inversões (no espaço), como é, aliás, proposto por alguns autores e pelo Grupo de Trabalho de Geometria (GTG)[9] há já alguns anos.

Segundo Bastos (2006), simetria de uma figura F é uma isometria T do plano que deixa a figura invariante, isto é, tal que T(F) = F'. A autora analisa figuras e as classifica quanto às suas simetrias.

Figura 9 - Simetria de reflexão



Fonte: Adaptado de Bastos, 2006, p. 9-11

A respeito da figura 9 Bastos (2006) pondera que a mesma:

> tem um eixo de simetria porque se fizermos uma reflexão do plano segundo esse eixo, a figura é transformada nela própria, embora cada ponto da figura seja, em geral, transformado num outro ponto. O ponto A (figura 11) é transformado no ponto B pela reflexão segundo o eixo *e,* mas o conjunto de pontos que constitui a figura fica globalmente invariante para a reflexão (do plano) segundo o eixo *e.* Dizemos então que a figura tem uma simetria de reflexão, de eixo *e,* ou que a reflexão de eixo *e* é uma simetria da figura. (BASTOS 2006, p 9-11).

Segundo essa autora, a figura 10 representa uma simetria de rotação e justifica que ela:

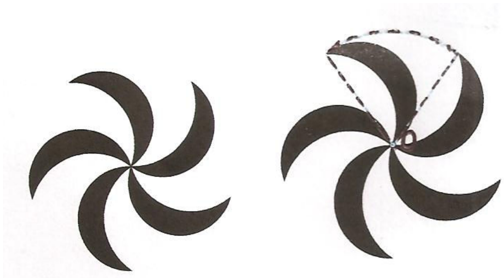
> tem simetrias de rotação, isto é, se fizermos uma rotação do plano com centro no ponto *O* e ângulo de 72º (ou 144º, ou 216º, ou 288º, ou ainda 360º), a figura transformada é exatamente a mesma que a original. Dizemos, por isso, que as rotações de

[9] Grupo de Trabalho de Geometria promove o debate de ideias e discute temas de geometria e do ensino da geometria com vista a contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática e a apoiar a intervenção da APM na política educativa. (retirado da página da APM em 02/06/2012 no endereço www.apm.pt/portal/index.php?id-91052).

> centro *O* e ângulos 72º 144º, 216º, 288º e 360º são simetrias da figura, ou que a figura tem 5 simetrias de rotação com centro em *O*, ou ainda que *O* é um centro de simetria de ordem 5. (BASTOS, 2006, p 9-11).

As figuras que Bastos (2006) atribui como simetria de reflexão e simetria de rotação comunga com Alves e Galvão (1996) quando apresentam subconjuntos do plano simétricos por rotação. Consideramos que a figura 9 apresentada por Bastos (2006) apresenta um eixo de simetria e na figura 10 uma rotação de acordo com o ângulo apontado.

Figura 10 - Simetria de rotação



Fonte: Bastos, 2006, p.9 -11

Para Stewart (2012), após Galois com sua "teoria de grupo", que descreve a simetria nas estruturas matemáticas e deduz as suas consequências, seus sucessores perceberam que a relação entre grupos e simetria é mais fácil de ser compreendida segundo um ponto de vista geométrico.

> Antes de Galois, as respostas a essa questão eram muito vagas, imprecisas, apelando para aspectos como elegância de proporção, que não é um conceito com o qual se possa fazer matemática. Depois de Galois [...] havia uma resposta simples e inequívoca. Primeiro, a palavra "simetria" deve ser reinterpretada como "uma simetria". Os objetos não apresentam só uma simetria; em geral apresentam diferentes simetrias. (STEWART, 2012, p.144).

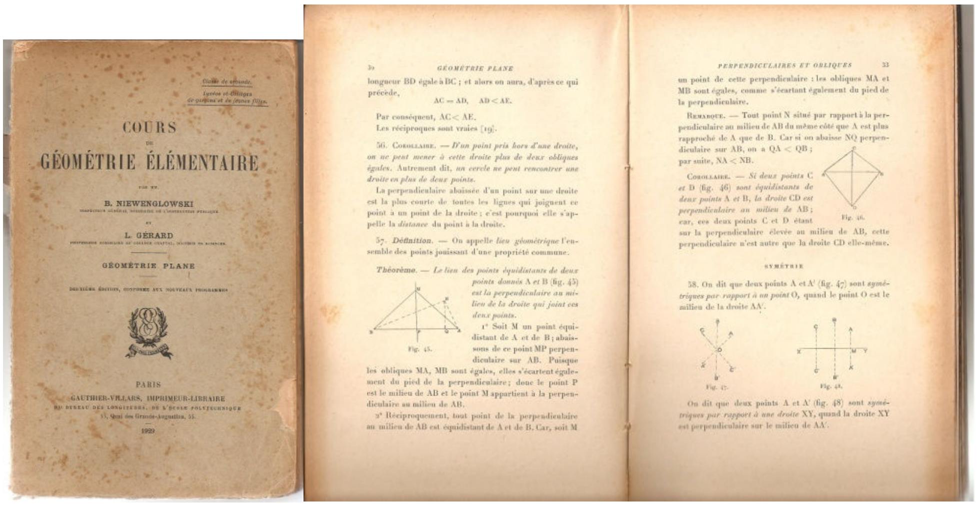
Para Stewart (2012, p.144), "uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura do objeto". Lança mão do exemplo de um triângulo equilátero para explicar as três palavras-chave existentes em suadefinição de simetria: "transformação", "estrutura" e "preservação". A escolha do triângulo equilátero é por ser uma figura que possui os três lados de mesmo comprimento e os três ângulos de mesma medida.

> *Transformação*. Podemos fazer algumas coisas no nosso triângulo. Em princípio, existem muitas coisas que podem ser feitas: torcê-lo, girar em torno de algum ângulo, amassá-lo, esticar com elástico, pintar de cor-de-rosa. Mas a nossa escolha é mais limitada, por causa da segunda palavra.
> *Estrutura*. A estrutura do nosso triângulo consiste em seus aspectos matemáticos considerados significativos. [...]
> *Preservação*. A estrutura do objeto transformado deve se conformar com a original. O triângulo transformado também deve ter três lados, por isso, não podemos dobrálo. Os lados devem permanecer retos, por isso não podemos entortá-lo. Um dos lados deve ter 18,36cm, por isso também é proibido esticar o triângulo. A localização deve ser a mesma, por isso não podemos deslocá-lo três metros para o lado. (STEWART, 2012, p.145).

Mesmo em uma literatra atual, Stewart (2012), como o livro *Uma história da Simetria na Matemática*, o autor assume ser a rotação e a translação também uma simetria ao afirmar que os objetos permacem os mesmos após um movimento, não nos deixou confortável. Buscamos então saber se havia o conteúdo simetria e como era tratada em livros mais antigos.

Verificamos que simetria é assunto pertinente ao conteúdo de matemática há algum tempo. Encontramos na literatura francesa datada de 1929,um estudo de simetria, no volume (figura 11), em que o autor trata a simetria central e a simetria axial. Para Gérard (1929) um ponto A e um ponto A' são simétricos em relação a um ponto O, quando o ponto O é ponto médio do segmento AA'. Dois pontos A e A' são simétricos em relação ao segmento XY quando o segmento XY é perpendicular sobre o ponto médio de AA'. O autor trata somente de simetria central e simetria axial. Na mesma obra não encontramos outras transformações.

Figura 11 - Livro - Curso de Geometria Elementar

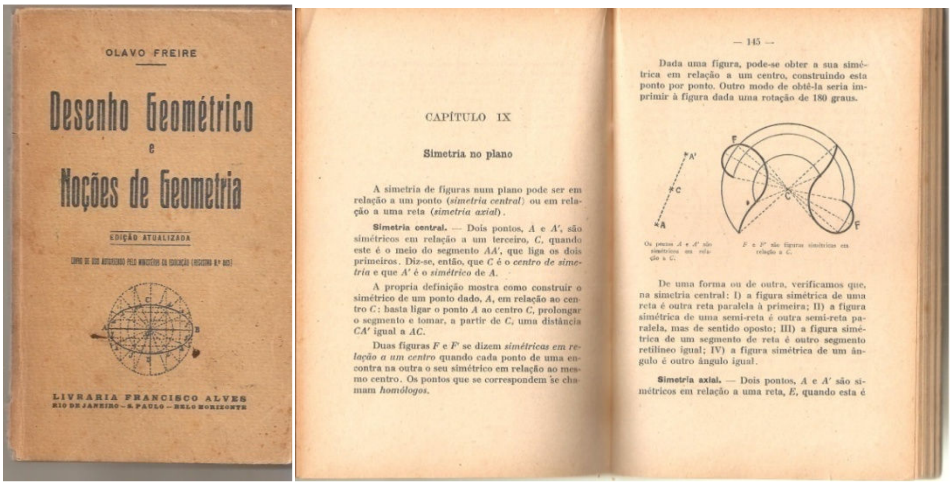


Fonte: Gerard, Paris, 1929, p.32-33

Encontramos na literatura brasileira, o livro Desenho Geométrico e Noções de Geometria (figura 12) onde Freire (1956) define simetria central e simetria axial por considerar que a simetria de figuras no plano pode ser em relação a um ponto (simetria central) ou em relação a uma reta (simetria axial). Não encontramos na mesma obra referências às outras transformações geométricas.

Os livros apresentados levam-nos a inferir que a geometria e o estudo de transformações geométricas já constam a algum tempo tanto na literatura brasileira quanto na literatura estrangeira.

Figura 12 - Livro - Desenho Geométrico e Noções de Geometria



Fonte: Freire, 1956, p.144-145

Depois de diversas posições a respeito de simetria, acreditamos residir aí a confusão que nos chamou atenção em diversos trabalhos ao fazermos a revisão bibliográfica. Confusão que tanto pode advir da alteração sofrida em um determinado período histórico como apontou Rohde (1982) ou mesmo a confusão habitual tenha sido gerado por um problema de tradução como salientou Bastos (2006), e mesmo, pode ter contribuído para esta situação, a própria redação dos Parâmetros Curriculares Nacionais quando, de maneira equivocada, mesmo depois de assumido quais as principais isometrias, fala em simetria de rotação e de reflexão, não citada anteriormente.

Muito embora tenha uma diversidade de nomes para designar simetria, para esta pesquisa, adotamos e assumimos somente a simetria axial e central e as outras isometrias tão somente denominadas como rotação e translação.

Consideraremos, portanto, neste trabalho quatro tipos de transformações geométricas consideradas isométricas: simetria em relação a uma reta (simetria axial), simetria em relação a um ponto (simetria central), translação e rotação e composição destas.

CAPÍTULO 3–ANÁLISE DAS SIMETRIAS AXIAL E CENTRAL

Neste capítulo a simetria axial (ou simetria em relação a uma reta) e a simetria central (ou simetria em relação a um ponto) serão vistas nos quadros da Geometria, da Geometria Analítica e da Álgebra. Em cada um deles apresentaremos, quando pertinente, os pontos de vista intuitivo, do desenho geométrico e funcional, bem como os registros que podem ser associados a cada um deles, tais como, o registro da língua natural, o registro material, o registro figural, o registro algébrico, o registro matricial e o registro gráfico.

3.1 QUADRO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

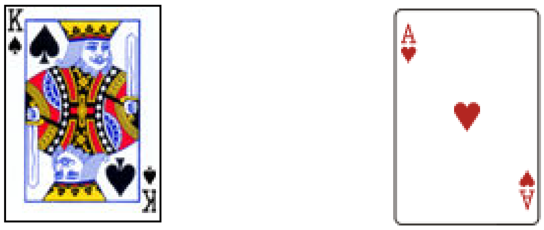
O quadro da Geometria é um vasto campo da matemática em que várias áreas são estudadas. Destacamos, como exemplo, a Geometria Euclidiana Plana, a Geometria Euclidiana Espacial, as Geometrias não Euclidianas, a Geometria Descritiva, a Geometria Diferencial etc. Neste trabalho focaremos as transformações no quadro da Geometria Euclidiana Plana e trataremos da simetria axial e da simetria central segundo os pontos de vista intuitivo, do desenho geométrico e funcional. Para cada um desses pontos de vista discutiremos os registros de representação semiótica pertinentes, bem como os tratamentos e conversões possíveis.

3.1.1 Ponto de Vista Intuitivo

Neste ponto de vista os objetos matemáticos podem ser interpretados a partir da intuição, ou seja, buscamos maneiras de olhar as simetrias a partir de recursos, geralmente, materiais a fim de que tanto suas definições, quanto algumas de suas propriedades sejam construídas a partir da observação, ou seja da apreensão discursiva da figura construída.

Para o estudo de simetria axial no plano, o uso de dobradura em folha de papel permite a superposição de figuras que, intuitivamente, nos dá ideia de simetria axial. Algumas situações do cotidiano também podem conduzir a uma observação que permita a construção de algumas ideias a respeito das simetrias. No caso da simetria central, o uso de naipes de baralho (figura 13), as pás de um ventilador, a roda da fortuna nos dão ideia de simetria central.

Figura 13 - Ideia de simetria central com naipes de um baralho



Fonte: naipes de baralho

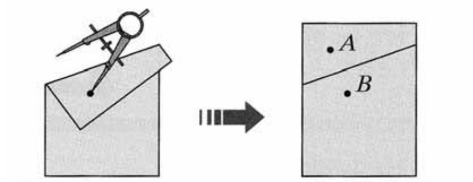
Assim, passaremos a apresentar os diversos registros associados a esse ponto de vista.

Registro material

Neste registro as simetrias podem ser representadas por dobraduras em papel. A discussão de tais representações no registro da língua natural permite a construção da ideia de simetria de uma maneira intuitiva e faz com que as crianças desenvolvam suas primeiras noções.

Considerando o **registro material** nesse processo de manipulação, por meio de dobradura e usando uma folha de papel podemos fazer uma dobra, como mostra a figura 14, com a ponta de um compasso, podemos perfurar o papel para marcar um ponto. No registro material, ao desdobrarmos a folha e passarmos um traço sobre a linha da dobra podemos nomeá-lo e considerá-lo um eixo de simetria, nomeando os pontos como A e B podemos considerá-los um simétrico ao outro em relação à reta traçada. Ligando os dois pontos por meio de um segmento de reta e medindo as distâncias desses pontos até a reta resultante da dobra do papel e os ângulos formados podemos constatar que a reta traçada é a mediatriz do segmento AB. Essas observações poderão então ser formalizadas com a conversão do registro material para o registro da língua natural.

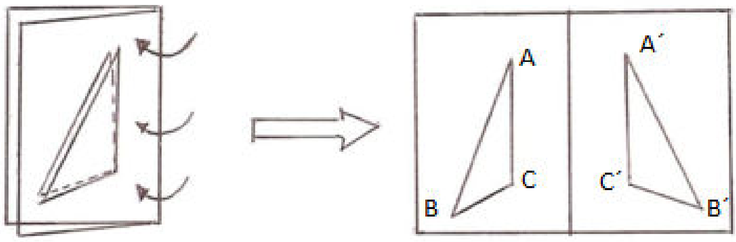
Figura 14 - Registro material - simetria axial de um ponto



Fonte: Miyakawa, 2001, p.94

Podemos utilizar também papel vegetal para reproduzir o mesmo processo agora para uma figura, no caso um triângulo. Dobrando o papel e decalcando a figura de um triângulo com um lápis e fazendo pressão (figura 15).

Figura 15 - Registro material - simetria axial de um triângulo



Fonte: produção da autora

Ao desdobrar o papel obtemos o eixo de simetria na dobra do papel e as duas figuras, uma simétrica a outra em relação a esse eixo. Podemos a partir da nomeação dos vértices dos triângulos verificar que o eixo é mediatriz dos segmentos AA’, BB’ e CC’, ou seja, as duas figuras estão a uma mesma distância do eixo de simetria, além disso, que as duas figuras são congruentes e ainda, a partir do registro da língua natural formalizar essas observações. A ação de dobrar e vincar favorece ainda a verificação da existência ou não de eixos de simetrias em figuras dadas, como nos mostram as figuras 16 e 17.

Figura 16 – figura com vários eixos de simetria

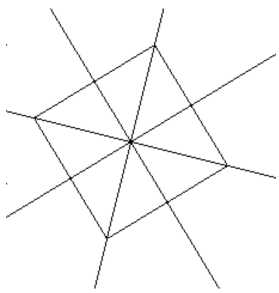
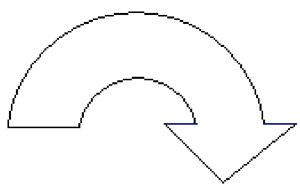


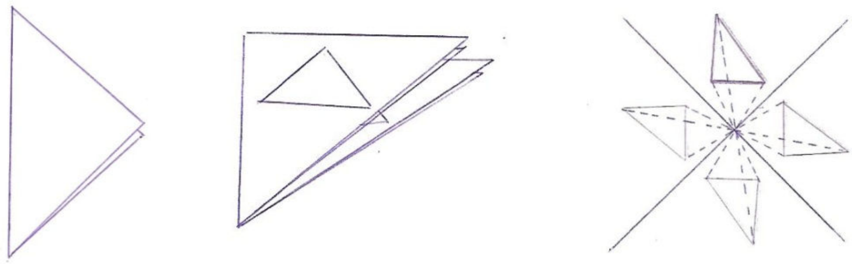
Figura 17 – figura com nenhum eixo de simetria



Fonte: produção da autora adaptado de Geometria das Transformações

Considerando ainda o registro material no processo de manipulação por meio de dobradura podemos desenvolver também a simetria central. Para tanto ao dobrarmos o papel como na figura18, ao desdobrá-lo é possível identificar esse tipo de simetria uma vez que a figura desenhada está a igual distância do ponto que é o centro de simetria, dobrado o papel uma figura sobrepõe a outra, portanto são “iguais”. É possível “enxergar”, verificar e sistematizar propriedades envolvidas na simetria central. Com essas observações poderemos formalizar a ideia de simetria central ao passar do registro material para o registro da língua natural.

Figura 18 - registro material - simetria central



Fonte: produção da autora

Destacamos que no registro material podemos identificar figuras simétricas em relação a uma reta ou um ponto por meio do tratamento dobrar e destacar a definição e propriedades dessas simetrias promovendo a conversão desse registro material para o registro em língua natural.

Registro da língua natural

O que foi percebido de forma intuitiva no registro material pode ser formalizado no registro da língua natural de forma discursiva, como dito anteriormente. Além disso, pode ser verificado no registro material e formalizado no registro da língua natural as ideias de congruência de figuras por preservação de medidas de lados e ângulos e a ideia de mediatriz de um segmento como a reta perpendicular que passa pelo ponto médio desse segmento.

Então podemos definir a simetria axial como sendo a transformação que transforma uma figura em outra congruente a ela cujos vértices estão à mesma distância da figura original em relação ao eixo de simetria. E a simetria central como sendo a transformação que transforma uma figura em outra congruente a ela cujos vértices estão à mesma distância da figura original em relação a um ponto, o centro da simetria.

Ao longo do estudo das simetrias serão destacadas e evidenciadas as propriedades:

- Uma figura e a sua imagem por um eixo de simetria são congruentes.

- Se dobrarmos a folha pelo eixo de simetria, d, a figura original e sua imagem sobrepõem-se ponto por ponto.
- A simetria muda o sentido dos ângulos mas mantém sua amplitude.

A conversão do registro material para o registro figural se dá em função da observação dos resultados da dobradura e das formalizações no registro da língua natural com a ajuda das regras do desenho geométrico. É o que passaremos a discutir no que segue.

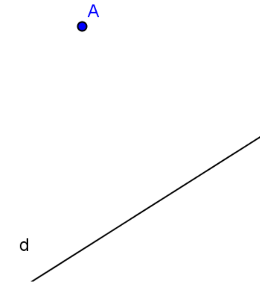
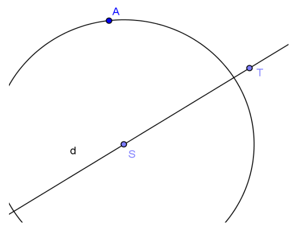
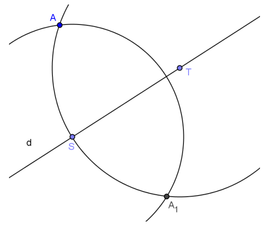
3.1.2 Ponto de Vista do Desenho Geométrico

Neste ponto de vista os objetos matemáticos são mobilizados a partir de construções próprias do desenho geométrico, ou seja, de construções feitas a partir, principalmente, de régua não graduada e compasso. Assim, neste ponto de vista os objetos serão representados no registro figural.

Registro figural

Neste registro as simetrias axial e central serão representadas por meio de figuras que serão construídas, com material de desenho, a partir da observação de suas representações no registro material associadas às definições e propriedades já verbalizadas no registro da língua natural. Promovemos então a conversão do registro material, para o da língua natural e, a seguir, para o registro figural por intervenção do desenho geométrico. No registro de representação figural podemos representar o simétrico em relação à uma reta d, de um ponto A do plano utilizando régua não milimetrada e compasso, como mostra a figura 19. As observações anteriores conduzem a entender que a simetria axial em torno de uma reta *d* faz corresponder a cada ponto *A* do plano outro ponto *A'*, do mesmo plano, simétrico de *A* em relação à *d*, chamada eixo de simetria. Assim, podemos dizer que o ponto *A'* é simétrico do ponto *A* em relação à reta *d* quando *d* é a mediatriz do segmento *AA'*, o que permite constatar que a distância do ponto A à reta *d*, é a mesma do ponto A' à reta *d*.

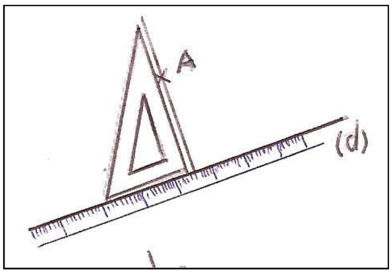
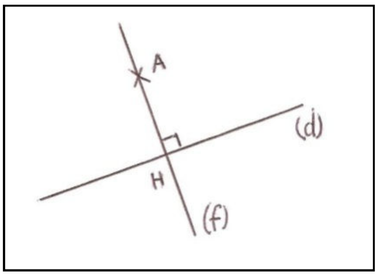
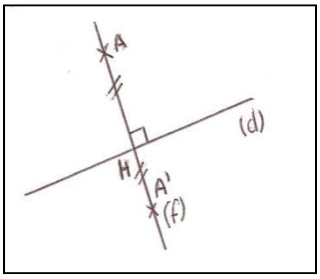
Figura 19 - Simétrico de um ponto em relação a uma reta (régua, compasso)

 Trace uma reta *d* e determine o ponto A	 Determine na reta d, os pontos S e T quaisquer. Construir um arco de centro S e raio SA.	 Construir um arco de centro T e raio TA. O ponto A_1 de intersecção dos dois arcos será o simétrico do ponto A em relação à reta d.

Fonte: Adaptação de Miyakawa, 2001, p.100.

Podemos também construir a simetria axial de um ponto A em relação a uma reta d utilizando uma reta qualquer e um esquadro. Tal construção está descrita na figura 20.

Figura 20 - Construção do simétrico de um ponto em relação a uma reta

 Trace uma reta d como eixo de simetria e determine um ponto A. Deslize o esquadro, com ajuda de uma régua, sobre *d* até o ponto A e trace uma reta f perpendicular à *d*.	 Essa reta é perpendicular à reta d e a intercepta no ponto H.	 Com um compasso marque o ponto A' sobre (*f*) tal que HA' = HÁ.

Fonte: adaptação de Miyakawa, 2001, p.94

A partir da construção da simetria de um ponto em relação a uma reta, pode-se construir esse tipo de simetria para qualquer figura plana. A figura 21 mostra a construção do simétrico de um triângulo em relação a uma reta a partir da construção dos simétricos de seus vértices.

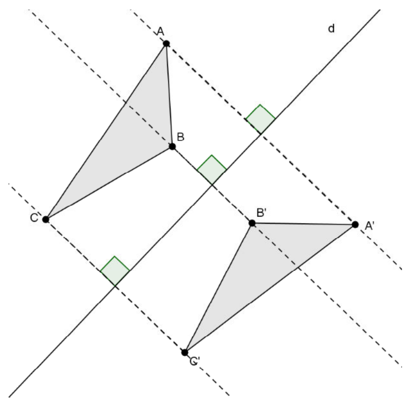
Dado um triângulo ABC e a reta d para construir *o triângulo A'B'C' simétrico do triângulo ABC em relação à reta d* temos que traçar retas perpendiculares à reta *d* passando pelos pontos *A, B* e *C* depois transportar as distâncias de cada um dos pontos *A, B* e *C* à reta *d*, para marcar os pontos *A', B'* e *C'* à mesma distância da reta *d*. Finalmente, unir os pontos *A', B'* e *C'* para formar o triângulo transformado como mostra a figura 21.

Conclusões, já observadas anteriormente, podem ser reforçadas a partir das construções geométricas, por exemplo, que a simetria axial preserva medidas de lados e ângulos o que garante a congruência das duas figuras.

Essas propriedades geométricas, são as seguintes:

- em uma simetria axial, as retas que unem pontos correspondentes cortam o eixo de simetria em ângulo reto.
- em uma simetria axial, as retas que unem os pontos correspondentes cortam o eixo de simetria em um ponto que é meio do segmento determinado por esses dois pontos.
- um ponto da figura pertencente ao eixo é transformado em si próprio.

Figura 21 - Simétrico do triângulo ABC em relação a uma reta

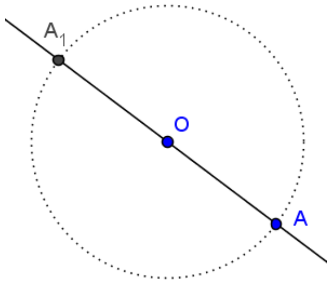


Fonte: produção da autora

Podemos observar que a simetria axial não permite que se passe, por exemplo, do triângulo ABC para o triângulo A'B'C' por um movimento no próprio plano do triângulo ABC, para "sair" de ABC e "chegar" ao triângulo A'B'C' o movimento se dá no espaço, como já vimos no movimento da dobradura no registro material.

A partir do registro material e registro da língua natural podemos representar também a simetria central no registro figural a partir de uma construção geométrica. Para construir o simétrico de um ponto A em relação ao ponto O (centro de simetria) basta traçar a reta determinada pelos pontos A e O e traçar a circunferência de centro O e raio OA como mostra a figura 22. A intersecção da reta com a circunferência nos fornece o ponto A_1 simétrico do ponto A em relação ao ponto O.

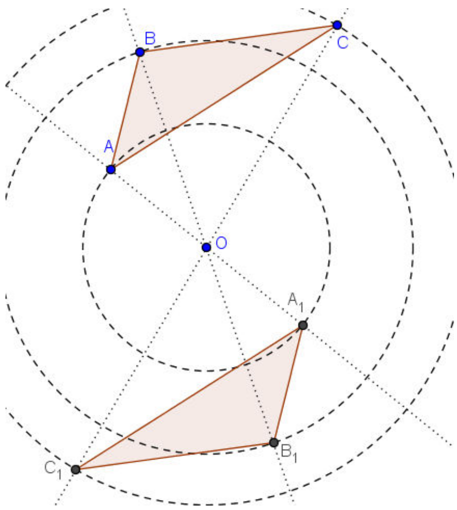
Figura 22 - Imagem de uma figura por simetria central



Fonte: Produção da autora

Podemos agora construir imagens de figuras pela simetria central a partir da construção do simétrico de seus vértices em relação a um ponto fixo. A figura 23 mostra o simétrico do triângulo ABC em relação ao ponto O após a construção.

Figura 23 - Imagem do triângulo ABC por simetria central



Fonte: produção da autora.

Para construirmos o simétrico do triângulo ABC em relação a um ponto fixo O, devemos traçar a reta AO e determinar A’, nessa reta, de forma que o segmento AO’ tenha a mesma medida de AO, isto é, determinar A’ na intersecção da reta e da circunferência de centro O e raio AO. O mesmo procedimento se adota para os vértices B e C. Podemos observar então que O é ponto médio comum dos segmentos que unem os pares de vértices correspondentes.

A partir dessas construções algumas propriedades geométricas podem ser observadas: o único ponto fixo da simetria central é o ponto O chamado de centro de simetria e, ainda, que se A_1 é o simétrico do ponto A pela simetria de centro O então este ponto é ponto médio do segmento AA_1, isto é $S_O(A) = A_1$ se, e somente se, $AO = OA_1$

3.1.3 Ponto de Vista Funcional

No ponto de vista funcional a simetria axial e simetria central são vistas como aplicações. Assim, a simetria em relação à reta m, denotada por S_m[10], é aplicada em um ponto P e produz a imagem P', que pode ser representada por, $S_m(P) = P'$. Para a simetria central, da mesma forma, temos $S_O(P) = P'$, para representar que P´ é o simétrico do ponto P em relação ao ponto O. Vemos então que neste ponto de vista tem prioridade o registro algébrico e o registro figural, que trataremos no que segue.

Registro algébrico

Neste registro as simetrias serão representadas por aplicações que determinam suas leis de funcionamento. Dada uma reta m do plano, temos que a simetria em relação a m é a aplicação que fixa todos os pontos de m e associa a cada ponto P do plano o ponto P' tal que a distância do ponto P à reta$m$ é a mesma que do ponto P' à reta m. Define-se então, neste ponto de vista que $S_m(P) = P'$ se e somente se $d(P, m) = d(P', m)$.

Analisando as simetrias, agora representadas por aplicações, podemos considerar um conjunto Σ que contenha todas as leis para as simetrias do plano, tanto axiais, quanto centrais e definir a operação de composição (°) como um tratamento nesse registro. Assim, dadas as simetrias axiais representadas por S_m e S_n podemos definir a composição da seguinte forma: $(S_m \circ S_n)(P) = S_m(S_n(P))$ para qualquer ponto P do plano.

Podemos demonstrar então que a simetria é uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do plano. Para as aplicações do conjunto Σ valem as seguintes propriedades:

[10] Em geral denotamos a simetria axial com a letra *S* e um índice com a letra que indica o eixo de simetria. Se o eixo de simetria for d, por exemplo, a notação será S_d.

i) Se S_m e S_n pertencem ao conjunto Σ então $S_m \circ S_n$ também pertence a ele. (conjunto fechado para a operação).

ii) S_m, S_n e S_q pertencem ao conjunto Σ então $(S_m \circ S_n) \circ S_q = S_m \circ (S_n \circ S_q)$. (associativa)

iii) Existe em Σ um elemento Id tal que $S_m \circ Id = S_m$ para qualquer S_m pertencente a Σ. (existência do elemento neutro).

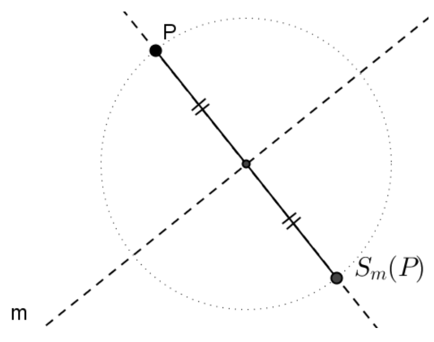
iv) Existe em Σ um elemento denotado por S_m^{-1} tal que $S_m^{-1} \circ S_m = Id$. (existência do inverso).

No registro algébrico a simetria central ou simetria em relação a um ponto é representada por uma aplicação que fixa o ponto M e associa a cada ponto P do plano, P distinto de M, o ponto P’ tal que a distância de P a M é a mesma de P’ a M, isto é, para todo ponto *P* do plano, *P* distinto de *M*, temos $R_M(P) = P'$ se e somente se d(M, P) = d(M, P’). Para a simetria central valem as mesmas propriedades já apontadas para a simetria axial. Alves e Galvão (1996) apresentam um estudo detalhado das transformações no plano neste ponto de vista.

Registro figural

Neste registro as aplicações que representam as simetrias podem ser representadas também por figuras. Assim, na figura 24 representamos o simétrico do ponto P por meio da simetria axial $S_m(P) = P'$. A construção é a mesma vista anteriormente.

Figura 24 - Simetria do ponto P em relação à reta m

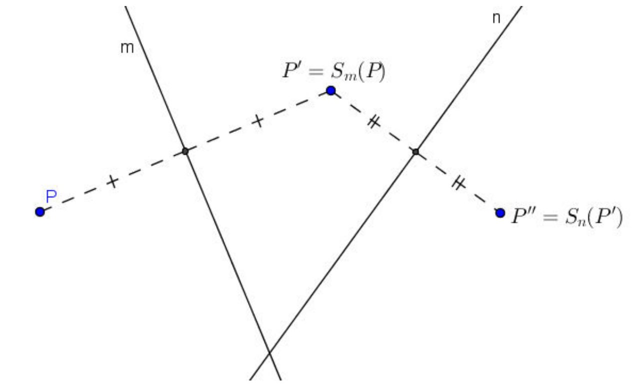


Fonte: construção da autora

As composições também podem ser representadas neste registro. Na figura 25 mostramos a composição de duas simetrias axiais com eixos concorrentes representados pelas retas m e n. Podemos observar que $P' =$

$S_m(P)$, ou seja, P´ é a imagem do ponto P pela aplicação S_m e $P'' = S_n(P')$ é a imagem de P´ pela aplicação S_n.

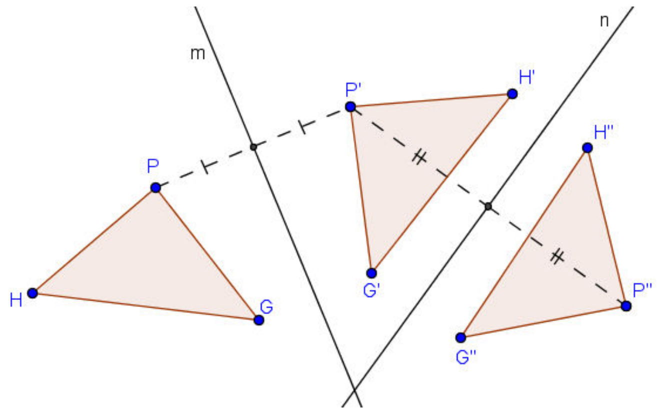
Figura 25 - Composição de simetrias axiais com eixos concorrentes



Fonte: construção da autora

Também podemos representar a composição de duas simetrias axiais de eixos concorrentes em figuras, entendendo que para todo ponto dessa figura a composição produz uma imagem que preserva a distância ao eixo. Na figura 26 podemos ver a imagem de um triângulo por essa composição.

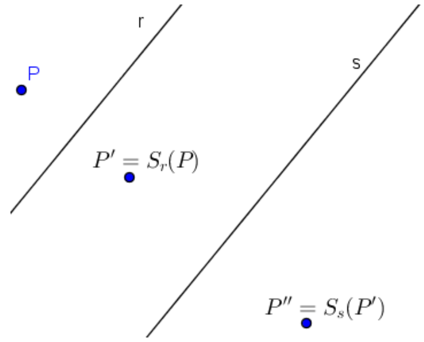
Figura 26 - Imagem de um triângulo por uma composição de simetrias axiais



Fonte: construção da autora

Podemos representar, figura 27, a composição de simetrias axiais também por eixos paralelos.

Figura 27 - Composição de simetrias axiais com eixos paralelos



Fonte: construção da autora

Da mesma forma que na composição de duas simetrias com eixos concorrentes podemos representar a imagem de um triângulo a partir da composição de duas simetrias com eixos paralelos.

Constatamos que no quadro da geometria foi possível realizar o estudo das simetrias axial e central no ponto de vista intuitivo, no ponto de vista do desenho geométrico e no ponto de vista funcional. Vemos também que neles predominam o registro material e o registro figural bem como as conversões possíveis. No que segue, buscaremos fazer o mesmo estudo agora no quadro da Geometria Analítica.

3.2 QUADRO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

No quadro da Geometria Analítica a simetria axial e simetria central serão estudadas segundo as regras desse campo da Matemática, isto é, a partir de propriedades pertinentes aos pares ordenados, equações e gráficos em planos cartesianos.

3.2.1 Ponto de Vista de Coordenadas de Pontos

Neste ponto de vista, as simetrias são representadas em função de pares ordenados e gráficos em um referencial cartesiano.

Registro de Coordenadas de ponto

O conjunto de pares ordenados se configura em um registro porque temos representações do tipo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nesse conjunto podemos definir duas operações: a adição e a multiplicação por escalar e ainda fazer a conversão desse sistema de representação para o sistema de representação gráfica e algébrica. Assim, podemos dizer que temos um registro de representação semiótica. Dessa forma, podemos representar a simetria axial em relação aos eixos *x* e *y* a partir da conversão do registro gráfico, já apresentado, para o registro de coordenadas no ponto. Assim, a simetria em relação ao eixo *x* poderia ser representada por (a, b) ↦ (-a, b) e em relação ao eixo *y* por (a, b) ↦ (a, -b).

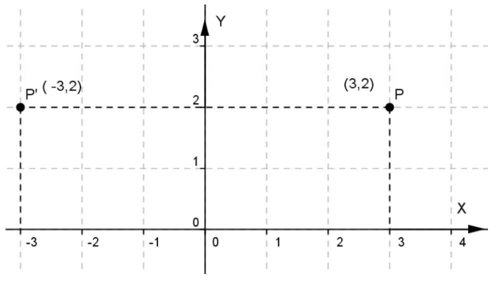
Dessa forma, dados os vértices de uma figura qualquer por suas coordenadas cartesianas podemos ter, por essa relação matemática, as coordenadas da imagem dessa figura pela simetria axial. Assim, dado o triângulo determinado por A(2, 1), B(5, 3) e C(4, 4) a imagem, por simetria axial em relação ao eixo *y*, desse triângulo ABC seria. A'(-2, 1), B'(-5, 3) e C'(-4, 4) e por simetria axial em relação ao eixo *x* seria A''(2, -1), B''(5, -3) e C''(4, -4).

A simetria central em relação à origem do plano cartesiano tem a lei $(a, b) \longmapsto (-a, -b)$ e pode ser aplicada diretamente às coordenadas dos vértices de uma figura qualquer. No exemplo anterior, dado o triângulo ABC pelas coordenadas cartesianas de seus vértices A(2, 1), B(5, 3) e C(4, 4) podemos determinar os vértices da imagem desse triângulo ABC pela simetria em relação à origem, isto é, A'(-2, -1), B'(-5, -3) e C'(-4, -4).

Registro gráfico

Neste registro os pontos e suas imagens pela simetria são representados em um plano cartesiano. Dado um referencial cartesiano de eixos x e y, cada ponto é identificado a partir de sua posição no plano a partir da origem, intersecção dos dois eixos. Assim, para um ponto (x, y) seu simétrico em relação ao eixo y é o ponto (-x, y). Na figura 28 apresentamos o ponto P (3, 2) e seu simétrico em relação a esse eixo.

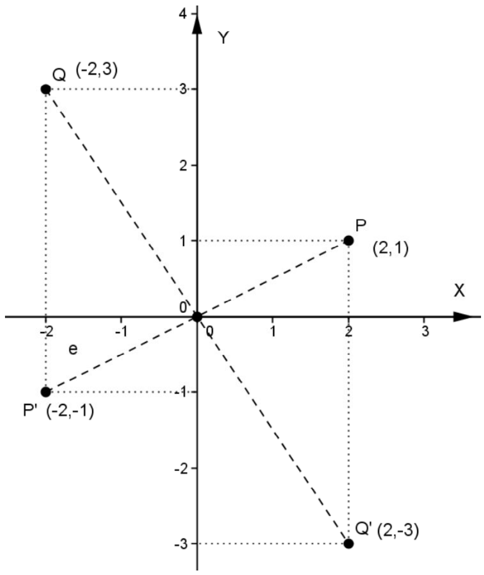
Figura 28 - Simetria em relação ao eixo y



Fonte: construção da autora

Podemos generalizar a transformação para um ponto qualquer do plano e observar que podemos representar no sistema de coordenadas a simetria em relação ao eixo y por (a, b) ↦ (-a, b) e a simetria em relação ao eixo x por (m, n) ↦ (m, -n). Para a simetria em relação à origem pode-se proceder da mesma maneira identificando um ponto, determinando seu simétrico e generalizar (x, y) ↦ (-x, -y). Da mesma forma podemos representar (ver figura 29) a simetria central de um ponto P qualquer do plano, em relação à origem do plano cartesiano.

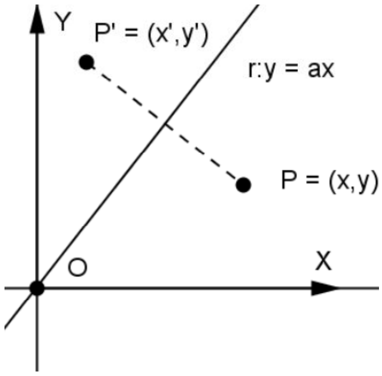
Figura 29 - Simetria central em relação à origem do plano cartesiano



Fonte: construção da autora

Além de utilizarmos os eixos do plano cartesiano como eixos de simetria, podemos ter outras retas como eixos. Suponhamos que queiramos a simetria de um ponto P em relação a uma reta *y* = *ax*, ou seja, os pontos de *r* são aqueles cujas coordenadas são (*x, ax*) como mostra a figura 30. A partir dessa construção podemos representar graficamente o simétrico de uma figura qualquer.

Figura 30 - Simétrico do ponto P em relação à reta y = x



Fonte: construção da autora

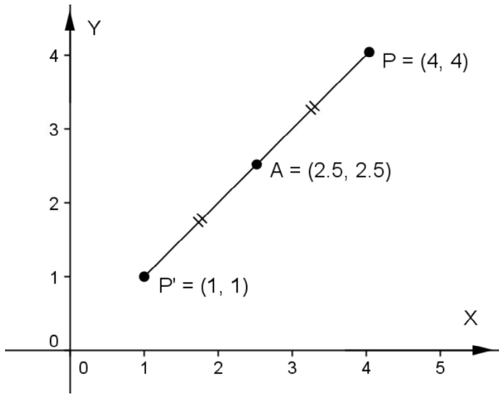
Lembramos que para determinar as coordenadas do ponto P' = S_r(P) em função das coordenadas do ponto P, temos que observar as coordenadas do ponto médio M do segmento PP'. Considerando P (x, y) e P' (x', y') teremos que M($\frac{1}{2}$ $(x+x')$, $\frac{1}{2}$ $(y+y')$) pertence à reta r. Logo, $y = y' = a(x+x')$. Observamos a seguir que o segmento PP' está contido em uma reta de inclinação $\frac{(y'-y)}{(x'-x)}$ e é perpendicular à reta *r*, que tem inclinação a.

Logo $\frac{(y'-y)}{(x'-x)} = -\frac{1}{a}$. Daí as duas equações: $\begin{cases} y+y' = a(x+x') \\ y' - y = -\frac{1}{a}(x' - x) \end{cases}$ consequência da conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Resolvendo esse sistema obtemos as expressões para x´ e y´ em função de a:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}y \\ y' = \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}y \end{cases}$$

Tais fórmulas permitem localizar o ponto P' = (x', y') = S_r(P) imagem do ponto X = (x, y) pela simetria S_r em relação à reta *r*, com equação y = ax. Da mesma forma podemos construir graficamente, como mostrado na figura 31, o simétrico de um ponto P qualquer do plano cartesiano em relação a um ponto A fixo.

Figura 31 - Simétrico de um ponto P em relação a um ponto do plano cartesiano

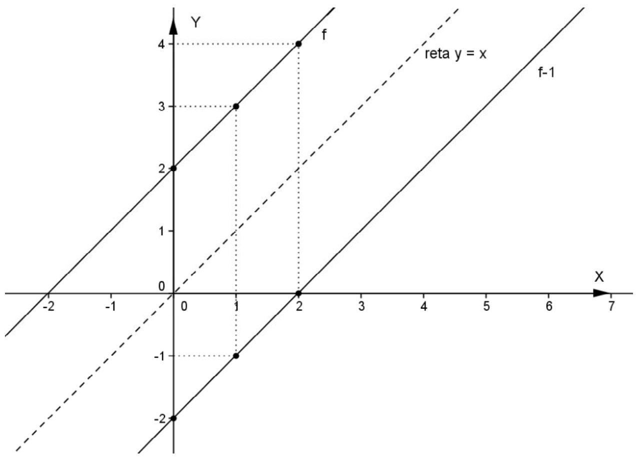


Fonte: construção da autora

3.2.2 Ponto de Vista Algébrico

Usamos as transformações geométricas no plano como auxílio na construção de gráfico de funções. A partir de um conjunto de gráficos fundamentais obtemos outros decorrentes destes aplicando transformações isométricas. A partir de uma propriedade fundamental a respeito de funções que, quando uma função tem inversa, isto é, é bijetora, seu gráfico e o gráfico de sua inversa são simétricos em relação à reta y = x. Na figura 32 temos a função f(x) = x + 2 representada graficamente pela reta de equação y = x + 2 e sua função inversa $f^{-1}(x) = x- 2$, ambas representadas no mesmo referencial cartesiano.

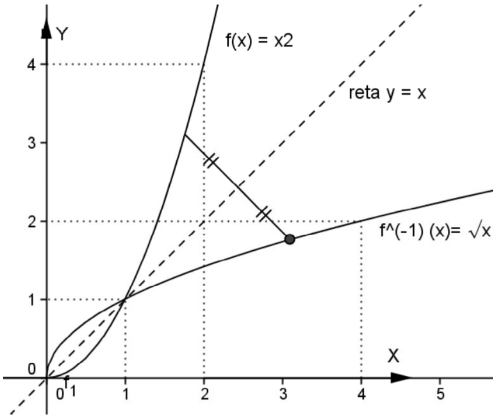
Figura 32 - Gráfico da reta que representa a função inversa $f^{-1}(x)=x-2$



Fonte: construção da autora

A figura 33 mostra o exemplo de representação da função bijetiva f: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por f(x) = x^2 e de sua função inversa: $f^{-1}\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

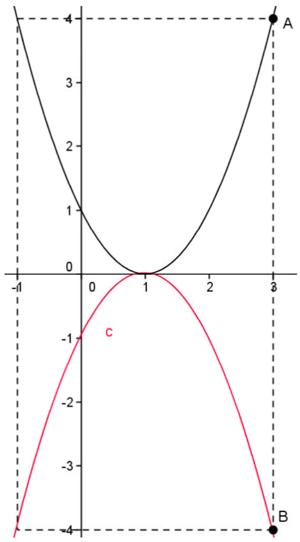
Figura 33 - Gráfico da função inversa de f(x) = x^2



Fonte: construção da autora

A simetria em torno da reta *r* é uma transformação que associa cada ponto *P* ao seu simétrico *P'* em relação a uma reta *r*. Desta forma, podemos ter a reflexão em torno do eixo *x* que associa cada ponto A(x, y) o ponto A'(x, -y), e afirmar que, uma função $f: R \longrightarrow R$, representada por $y = f(x)$, é transformada em $y = -f(x)$ por meio da simetria em torno do eixo x, ou ainda que cada ponto do gráfico de f está em correspondência biunívoca com seu simétrico em relação ao eixo das abscissas. A figura 34 mostra a representação gráfica das parábolas de equações $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -x^2 + 2x - 1$ que são as simetrias em relação ao eixo x e que podem ou não representar funções.

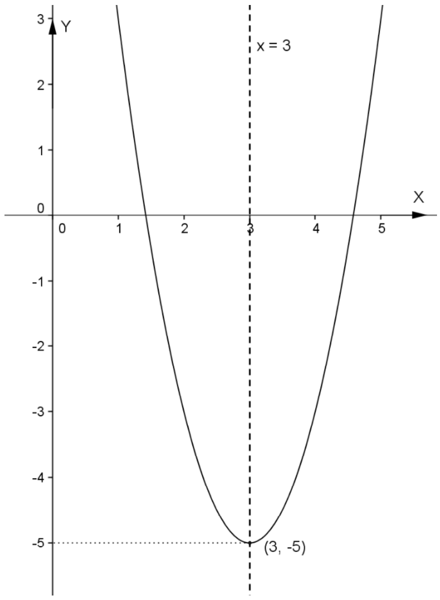
Figura 34 - Representação de parábolas simétricas em relação ao eixo x



Fonte: construção da autora

Na figura 35 temos o esboço da parábola de equação $y = 2x^2 - 12x + 13$ cujo vértice é o ponto (3, -5) e o eixo de simetria é a reta vertical de equação $x = 3$.

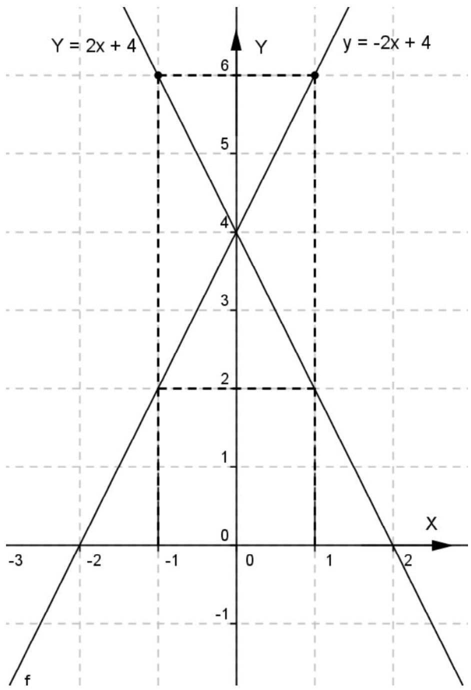
Figura 35 - Eixo de simetria da parábola



Fonte: construção da autora

Estudo similar pode ser feito para a simetria em relação ao eixo y. A figura 36 mostra as retas de equações $y = 2x + 4$ e $y = -2x + 4$ que são simétricas em relação ao eixo y.

Figura 36 - Retas simétricas em relação ao eixo x



Fonte: construção do autor

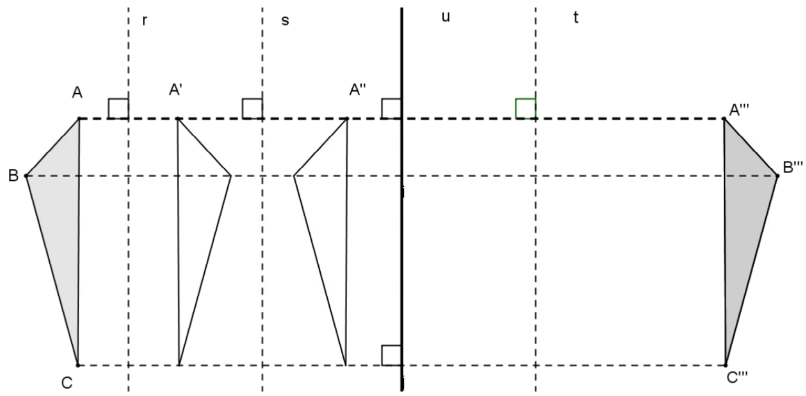
Vimos no registro figural a composição de simetrias e agora no ponto de vista algébrico é possível verificar que a composição de duas ou mais isometrias, ainda é uma isometria.

Composição de três simetrias em eixos paralelos

Sejam r, s e t três retas paralelas e considerando a simetria do triângulo ABC em relação a essas três retas (ver figura 37), queremos mostrar que a composição dessas simetrias resulta em uma simetria..

Por definição de simetria e considerando que, as retas r, s e t são paralelas, sabemos que os pontos A, A' A'' e A''' são colineares e o mesmo verifica-se para os outros vértices dos triângulos. Assim existe uma única reta u que é mediatriz dos segmentos $\overline{AA'''}, \overline{BB'''}\ e\ \overline{CC'''}$ que é eixo de simetria dos triângulos ABC e $A'''\ B'''C'''$.

Figura 37 - Composição de três simetrias com eixos paralelos



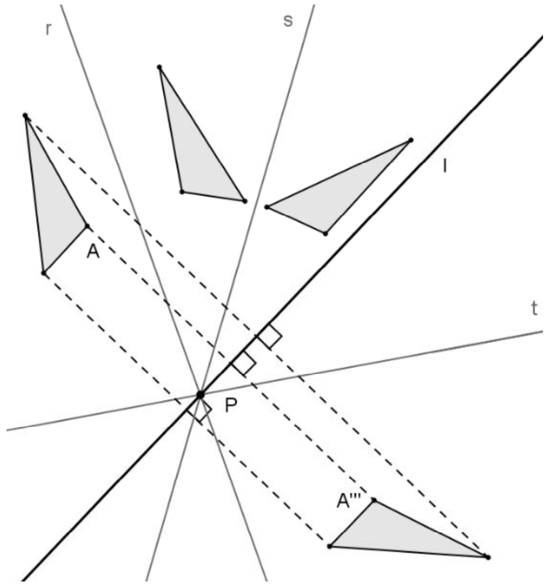
Fonte: construção da autora adaptado de Tinoco (2012)

Podemos concluir que quando se efetuam simetrias em eixos paralelos, se o número de simetrias for ímpar, a isometria obtida é uma simetria. No entanto, se o número de simetrias for par essa composição pode ser entendida por uma translação a partir de um vetor perpendicular aos eixos de simetria, como veremos no capítulo 4.

Composição de três simetrias em eixos concorrentes

Apresentarmos a composição de três simetrias em eixos concorrentes na figura 38 onde temos a representação de três retas r, s e t, concorrentes em um ponto P. Podemos mostrar que existe uma única reta l, que passa pelo ponto P, tal que o triângulo ABC é simétrico ao triângulo A'''B'''C''' em relação à reta l.

Figura 38 - Composição de três simetrias por três retas concorrentes



Fonte: construção da autora adaptado de Tinoco (2012)

Veremos no capítulo 5, na análise da rotação, que a composição de duas simetrias em eixos concorrentes, resulta em uma rotação, com centro no ponto de intersecção das duas retas.

Tanto no quadro da Geometria Analítica, quanto no quadro da Geometria Euclidiana Plana realizamos o estudo das simetrias axial e central nos pontos de vista intuitivo, do desenho geométrico e do ponto de vista funcional.

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA TRANSLAÇÃO

Neste capítulo a translação será vista em diferentes quadros tais como: o quadro da geometria, o quadro da geometria analítica e o quadro da álgebra. Serão apresentados para o mesmo objeto, os vários registros de representação e as diferentes possibilidades de conversão.

4.1 QUADRO DA GEOMETRIA

No quadro da geometria a translação será analisada segundo o ponto de vista intuitivo, o ponto de vista do desenho geométrico e do ponto de vista funcional. Dentro do ponto de vista intuitivo trataremos do registro material e do registro da língua natural realizando a conversão para o registro figural no ponto de vista do desenho geométrico. Temos no ponto de vista funcional o registro algébrico e o gráfico.

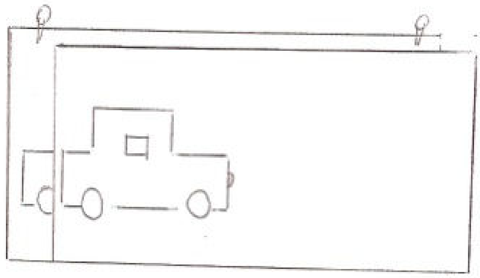
4.1.1. Ponto de Vista Intuitivo

O estudo da translação de uma figura, considerando o plano euclidiano, intuitivamente, consiste apenas em “empurrar” a figura de uma posição para outra, sem levantá-la, sem girá-la ou deformá-la durante o movimento. Durante o “trajeto” retilíneo na translação de uma figura X, cada ponto da figura descreverá uma linha reta orientada na mesma direção e o deslocamento se dá por um comprimento físico. De acordo com o dicionário Houaiss a palavra translação, significa movimento de um sistema físico no qual todos os seus componentes se deslocam paralelamente e mantêm as mesmas distâncias entre si.

Para o estudo da translação intuitivamente, podemos citar situações do cotidiano, o abrir e fechar de gaveta, elevadores, escadas rolantes e mesmo escorregadores, pois é possível observar que um mesmo objeto se desloca numa determinada direção sem nunca rodar.

Usamos material manipulativo, como sugestão para ponto de vista intuitivo e em nosso exemplo, utilizamos duas folhas de papel, pode ser papel vegetal ou acetato, uma em cima da outra, como na figura 39. Na folha de cima com uma caneta ou lápis afiado desenhe uma figura, na nossa sugestão um carro, fazendo pressão de tal maneira que a figura apareça na folha de baixo. É preciso que a folha de baixo fique bem firme, se necessário fixá-la.

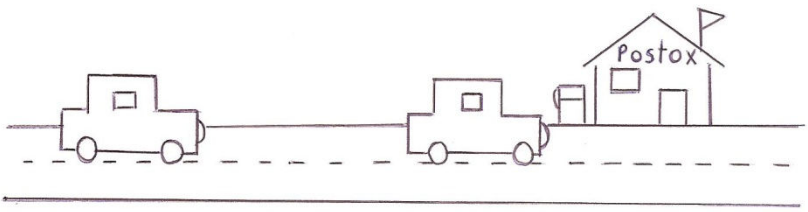
Figura 39 - Translação de uma figura no ponto de vista intuitivo



Fonte: construção do autor.

O próximo passo é deslocar a folha superior, sem fazê-la girar. Apenas, empurre-a, de modo que cada ponto da figura se desloque em linha reta. Após o deslocamento da figura superior para uma nova posição, a certa distância da primeira, volte a decalcar a figura da folha de cima na folha de baixo. Após o movimento levante a folha de cima e observe as duas figuras da folha de baixo (figura 40).

Figura 40 - Translação da figura



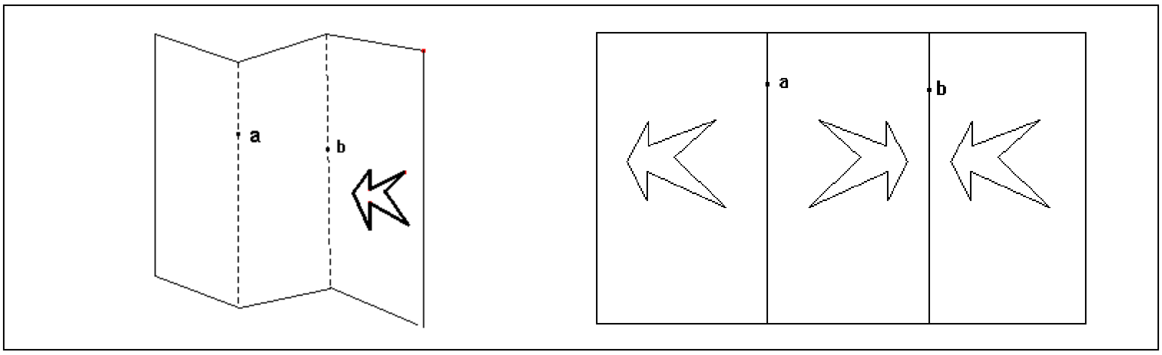
Fonte: construção do autor.

No ponto de vista intuitivo temos o registro material e o registro da língua natural que serão vistos na sequência.

Registro material

Consideramos que o registro material e a conversão para a língua natural são ideais para desenvolver as noções de translação, podemos obtê-la a partir da noção de simetria axial, no registro material, por meio de dobras no papel. A figura 41 mostra a composição de duas simetrias axiais com eixos paralelos e para construí-la basta desenhar a seta em papel vegetal e fazer uma primeira dobra identificada por *a* e decalcar a seta da figura com um lápis. A seguir, fazer uma dobra paralela à anterior, identificada por b e decalcar agora a segunda seta. Ao desdobrar o papel e comparar a primeira com a última seta será possível definir a translação, a partir de uma discussão com os alunos.

Figura 41 - Translação como composição de duas simetrias de eixos paralelos



Fonte: Adaptado do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Universidade do Minho http://sites.google.com/site/matematicasemproblemas/homeúltima consulta 01/02/2013

Registro da língua natural

No registro da língua natural formalizaremos as propriedades da translação que foram percebidas até então, como mesma direção, mesmo sentido, bem como noção de paralela. O que foi visto de forma intuitiva no registro material é agora formalizado no registro da língua natural, o que transforma o desenho em figura, de acordo com Duval.

A conversão para o registro figural se dá em função de que mesmo obtendo a imagem de uma figura por translação, por meio de tratamento dobrar e principalmente deslizar, esse registro de representação semiótica possui outras possibilidades por meio do tratamento de desenho geométrico como veremos a seguir.

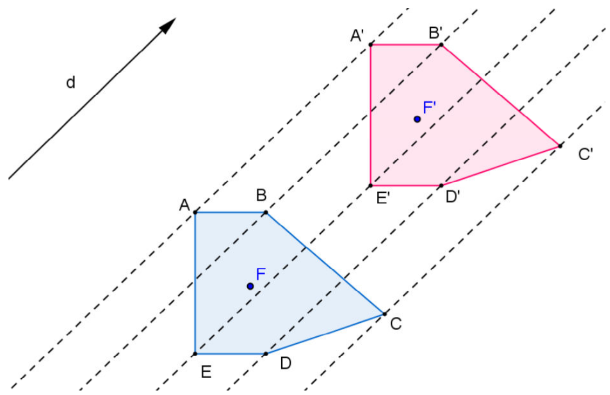
4.1.2 Ponto de Vista do Desenho Geométrico

Registro figural

Neste registro a translação será representada por meio de figuras que serão construídas a partir da observação de sua representação nos registros anteriores associado às discussões com os alunos. Realizaremos a conversão do registro material e da língua natural para o registro figural por intervenção do desenho geométrico. Neste registro de representação precisamos observar que o objeto matemático, paralela, que utilizaremos na construção da translação a seguir recebe o mesmo tratamento que demos às simetrias em seus diferentes registros.

Em uma translação efetua-se uma transformação em que todos os pontos da figura original são transformados segundo a mesma direção, o mesmo sentido e percorrendo a mesma distância. Na figura 42 temos uma figura F e a imagem dessa figura pela translação associada a um segmento orientado que tem comprimento d e determina uma direção e um sentido.

Figura 42 - Translação do polígono F na direção d



Fonte: Fonte: Produção da autora

Para essa construção basta traçar pelos vértices ABCDE do polígono, retas paralelas à direção d dada. Com o compasso transportar o comprimento d para as paralelas a partir dos vértices da figura inicial, para obter os vértices de sua imagem A’B’C’D’E’. Depois ligar os pontos A’B’C’D’E’ para construir o polígono F’ imagem do polígono F pela translação.

De modo análogo, dada uma figura qualquer, determinar sua imagem pela translação é efetuar a transformação em que todos os pontos da figura original se deslocam segundo a mesma direção, o mesmo sentido e percorrendo a mesma distância.

A seguir, no ponto de vista funcional, veremos a translação no registro algébrico e registro figural e neste ponto de vista para resolvermos a questão do sentido em que a translação acontece utilizaremos a notação de vetores.

4.1.3 Ponto de Vista Funcional

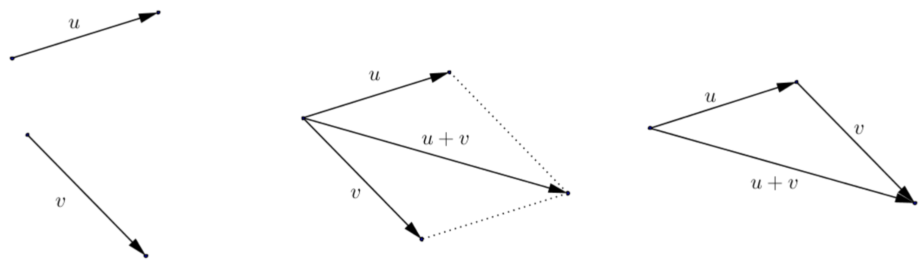
Em uma interpretação geométrica, a translação aplicada a um ponto *P* irá deslocá-lo ou mudá-lo de lugar no plano. Para definirmos bem este deslocamento, precisamos estabelecer a direção, o sentido e a medida do mesmo. Tais informações estão associadas ao conceito de vetor. Em nosso estudo trataremos os vetores como um registro.

Registro vetorial

Translação é a transformação por meio da qual todos os pontos de uma figura são transformados segundo uma mesma direção e sentido e de uma mesma distância. É o vetor que define a direção, o sentido e a medida do deslocamento.

Neste registro temos dois tratamentos, a adição e a multiplicação por escalar. Para a adição de vetores temos dois procedimentos, como mostra a figura 43, o método do paralelogramo e o do triângulo. Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podemos transportá-los de modo que ambos tenham a mesma origem para obter um paralelogramo ou transportá-los de modo que a origem de um coincida com a extremidade do outro para obter o triângulo e, em ambos o vetor $\vec{u}+\vec{v}$.

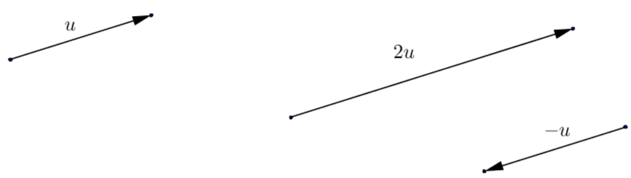
Figura 43 - Adição de vetores



Fonte: produção da autora

A multiplicação por escalar permite alterar a medida do comprimento do vetor ou seu sentido a partir de um número real, como podemos ver na figura 44.

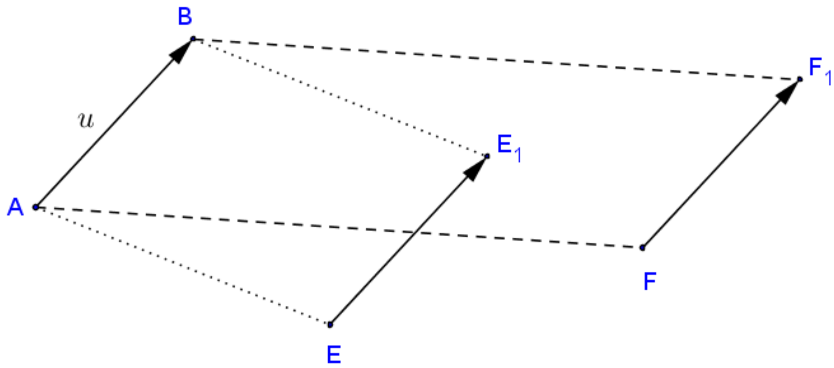
Figura 44 - Multiplicação de um vetor por um escalar



Fonte: produção da autora

Assim, se $E_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(E)$ e $F_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(F)$ então $\overrightarrow{EE_1} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FF_1}$ (ver figura 45) que mostra que os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{EE_1}$ = $\overrightarrow{FF_1}$ e que os quadriláteros formados por dois vetores iguais, EE_1AB, FF_1AB, EE_1FF_1 são paralelogramos, pois eles têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

Figura 45 - Translação de pontos pelo vetor AB



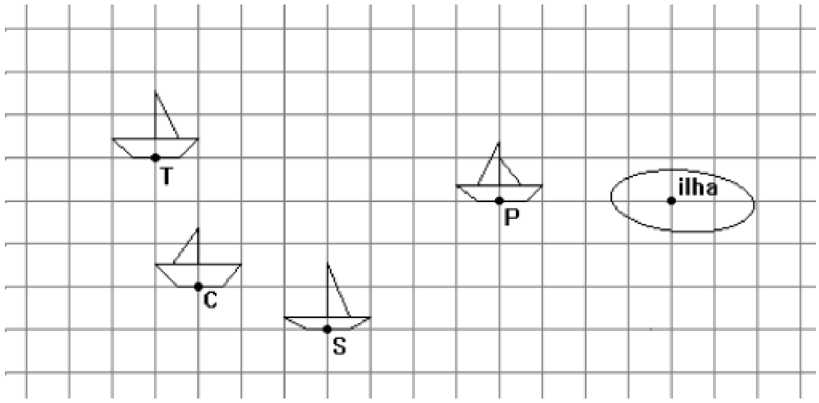
Fonte: produção da autora

Podemos então observar a propriedade que uma translação transforma um ponto em um ponto; uma reta em uma reta, uma circunferência em uma circunferência, um segmento em segmento de mesma medida; um polígono em um polígono congruente ao original. No ponto de vista funcional podemos ver a translação segundo o registro figural.

Registro figural

Neste registro as translações são representadas por figuras, como mostra a figura 46 o aluno é informado que cada barco movimenta-se de “3 quadradinhos Leste e depois 2 quadradinhos Norte”. Então é solicitado que identifique os pontos C´, T´ e P´, posições dos três primeiros barcos depois de seus deslocamentos. Solicita ainda as medidas aproximadas dos segmentos CC´, TT´ e PP´ a partir do lado dos quadradinhos da malha e ainda, que com um compasso seja determinada a posição do ponto S´. Com a tarefa cumprida temos a representação figural da translação solicitadas e a percepção da mesma distância de um ponto a outro para cada barquinho.

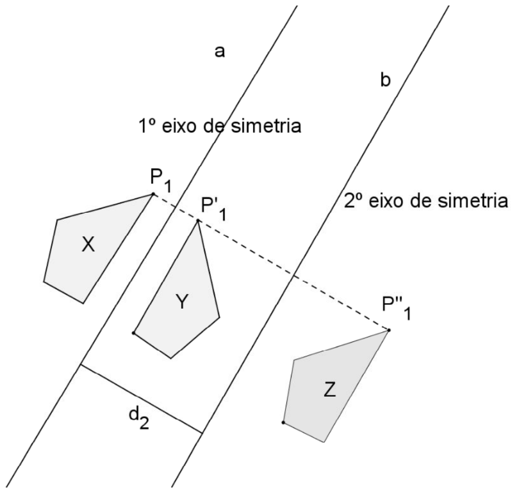
Figura 46 - Translação de figuras



Fonte: Retirado do livro *Sequencias para o ensino de geometria no ensino básico* de Almouloud e Silva, versão preliminar (2007).

As composições também podem ser representadas neste registro. Na figura 47 mostramos a composição de duas simetrias cujos eixos são paralelos, a transformação resultante é uma translação.

Figura 47 - Translação por composição de simetrias

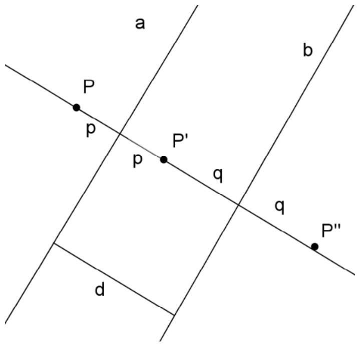


Fonte: adaptado de Dienes e Golding, 1975.

Para o registro figural (figura 47): desenhar uma figura X. Traçar uma reta *a* e usá-la como eixo de simetria, para transformar X em uma nova figura Y. Traçar depois uma linha *b*, paralela à linha *a*, empregando-a para transformar a figura Y em outra figura, Z.A translação é a transformação que nos permite passar diretamente da figura X à figura Z em “um só movimento”.

Tomamos um ponto P qualquer, sobre a figura X (ver figura 48). Chamamos P’ a sua imagem na figura Y. Chamamos P’’ a imagem do ponto P’ na figura Z Temos a distância *p*, do ponto P à linha *a*. Temos também a distância *d* entre as linhas *a* e *b* (esta deve ser a distância mais curta entre essas duas linhas).

Figura 48 - Distância entre um ponto e seu transformado



Fonte: adaptado de Dienes e Golding, 1975.

Temos, portanto que a distância entre um ponto e seu transformado por duas simetrias é sempre igual ao dobro da distância entre os eixos de simetria

PP'' = 2p + 2q

PP'' = 2(p + q)

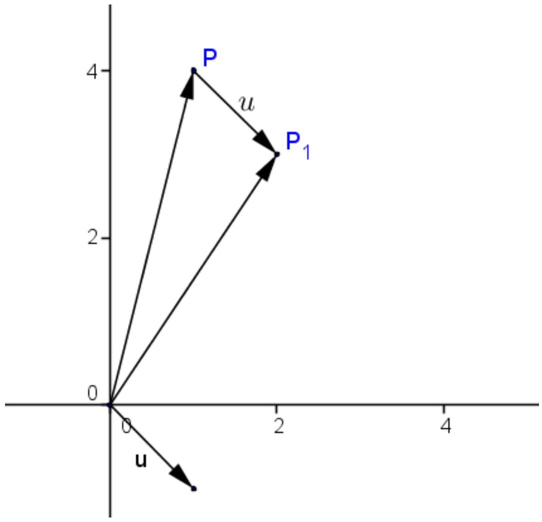
PP'' = 2d

Realizamos na análise da translação dentro do quadro da geometria as conversões propostas nos registros e pontos de vista. Na sequência, faremos essa análise no quadro da geometria analítica.

4.2 QUADRO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

No quadro da Geometria Analítica representaremos os pontos por pares ordenados em um referencial cartesiano. Assim, a figura 49, mostra que dado o vetor $\vec{u} = (1, -1)$ temos que dado o ponto P representado pelo vetor $\overrightarrow{OP} = (1,4)$ a translação do ponto P pela translação em relação ao vetor $\vec{u}$ será $T_{\vec{u}}\,(1,4) = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = OP_1$. Neste ponto de vista coordenamos os registros de pares ordenados ao registro gráfico, assim vemos na figura a imagem P_1 do ponto P pela translação segundo o vetor $\vec{u}$.

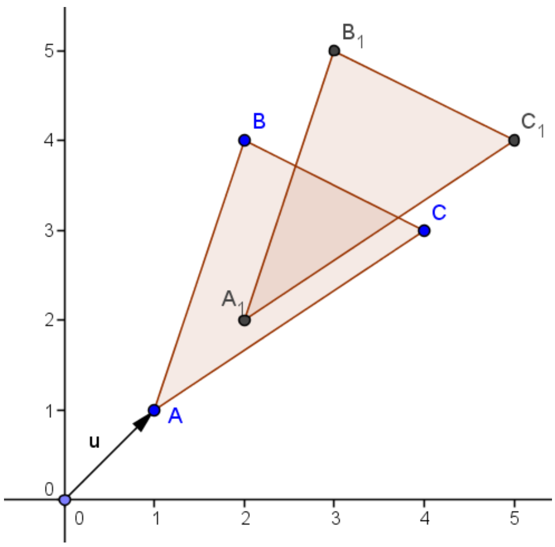
Figura 49 - Imagem de um ponto por uma translação em relação a um vetor u



Fonte: produção da autora

A partir daí podemos construir a translação de figuras, como mostra a figura 50 em que a imagem do triângulo ABC, A(1,1), B(2,4) e C(4,3) pela translação em relação ao vetor $\vec{v} = (1{,}2)$ é dada por $T_{\vec{v}}(A) = A_1$ em que $T_{\vec{v}}(A) = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = (1{,}1) + (1{,}2) = (2{,}3)$, $T_{\vec{v}}(B) = \overrightarrow{OB} + \vec{v} = (2{,}4) + (1{,}2) = (3{,}6)$ e $T_{\vec{v}}(C) = \overrightarrow{OC} + \vec{v} = (4{,}3) + (1{,}2) = (5{,}5)$.

Figura 50 - Translação de um triângulo por um vetor v



Fonte: produção da autora

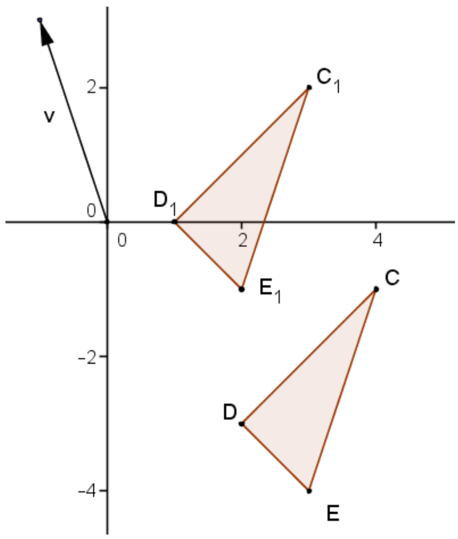
Assim podemos generalizar a translação de um ponto X(x,y) qualquer a partir do vetor $\vec{u}(a, b)$ e determinar que $X' = (x + a, y + b)$, pois $X' = \overrightarrow{OX} + \vec{u}$.

4.2.1 Ponto de Vista Geométrico

Neste ponto de vista trabalhamos com as figuras da Geometria e suas propriedades em um referencial cartesiano, ou seja, embora utilizemos um referencial e o registro gráfico nos preocupamos propriamente com as figuras e não com as equações das retas suportes de seus lados. Assim na figura 51 mostramos a translação do triângulo CDE dado pelas coordenadas de seus vértices C(4,-1), D(2,-3) e E(3,-4), em relação ao vetor $\vec{v}\,(-1{,}3)$ e sua imagem o triângulo C'D'E' com coordenadas C'(3,2), D'(1,0) e E'(2,1).

Recorremos ao sistema de eixos coordenados para analisarmos a translação, no quadro da geometria analítica sob o ponto de vista geométrico, em razão da possibilidade de indicar o deslocamento realizado sobre uma figura na direção de cada um dos eixos. A medida de cada um desses deslocamentos chamará *a* e *b* sabendo que tais deslocamentos determinam um segmento orientado de reta, o vetor translação, de coordenadas dadas por (a, b). O que vemos na figura 51 é o triângulo CDE com coordenadas C(4,-1), D(2,-3), E (3,-4) e o triângulo C'D'E' com coordenadas C'(3, 2), D'(1, 0), E'(2, -1) transladado segundo a lei: (a, b) → (a-1, b+3).

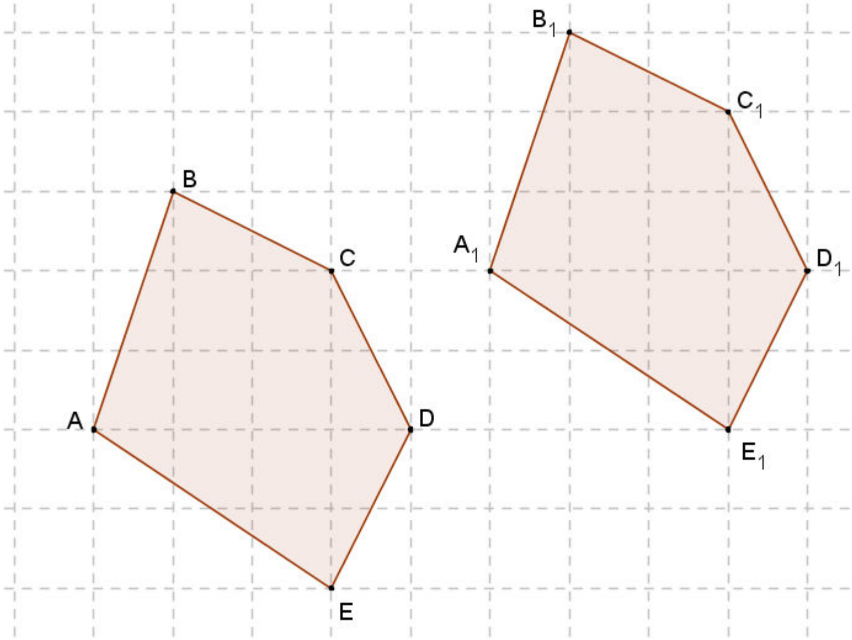
Figura 51 - Translação de figura no plano cartesiano



Fonte: Retirado do livro *Sequencias para o ensino de geometria no ensino básico* de Almouloud e Silva, versão preliminar (2007).

Em se tratando de crianças das séries iniciais poderíamos usar uma malha quadriculada e indicar o deslocamento por ordem do tipo direita/esquerda para cima/para baixo. Por exemplo, dado o polígono ABCDE, da figura 52, podemos determinar o deslocamento de 5 unidades para a direita e duas unidades para cima, o que corresponde ao vetor $\vec{v}\,(5{,}2)$ e obter a imagem A'B'C'D'E'.

Figura 52 - Translação em malha quadriculada



Fonte: produção da autora

4.2.2 Ponto de Vista Funcional

Neste ponto de vista a translação mobiliza a ideia de aplicação e a representaremos por $T_{\vec{v}}(A) = A'$ da mesma forma que fizemos para a simetria. Neste ponto de vista são priorizados o registro algébrico e o registro gráfico.

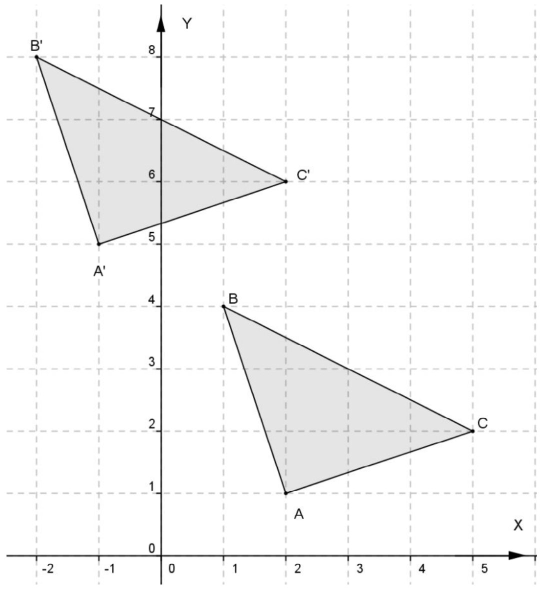
Registro algébrico

Neste registro temos a composição como tratamento e podemos então trabalhar com várias translações como por exemplo $T_{\vec{v}} \circ T_w(A) = T_{\vec{v}}\,(T_{\vec{w}}\,(A))$.

Considerando translação:T: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \longrightarrow (x + a, y + b)$ temos o vetor $\vec{v}\,(a, b)$ transformando o ponto $X(x, y)$ em sua imagem $X'(x + a, y + b)$.

A figura 53 mostra a translação do triângulo ABC, dado pelas coordenadas de seus vértices A(2,1), B(1,4) e C(5,2) a partir do vetor $\vec{v} = (4{,}3)$ que produz a imagem $T_{\vec{v}}(A), T_{\vec{v}}(B)\; e\; T_{\vec{v}}(C)$ dado pelas coordenadas $T_{\vec{v}}(A) = (6{,}4)$, $T_{\vec{v}}(B) = (5{,}7)\; e\; T_{\vec{v}}(C) = (9{,}5)$.

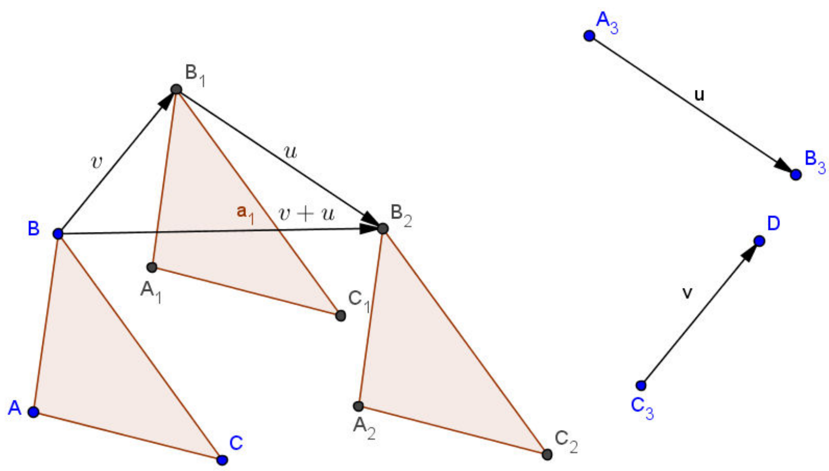
Figura 53 - Translação do triângulo ABC



Fonte: produção do autor

Podemos representar graficamente a composição de duas translações consecutivas aplicadas a uma figura (ffigura54).

Figura 54 - Composição de translações para um triângulo



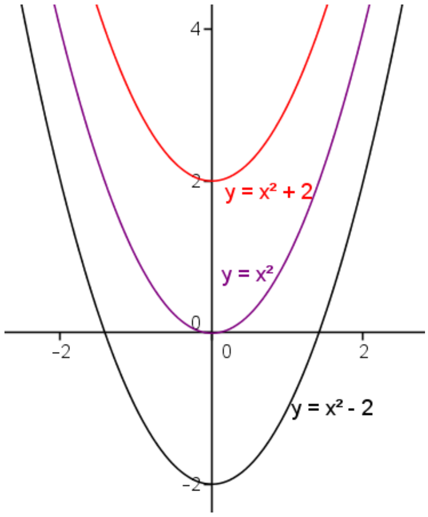
Fonte: produção da autora

Vemos que o resultado da composição poderia ser obtida a partir da translação da figura inicial com o vetor $\vec{v} + \vec{u}$.

A figura 55 mostra a parábola de equação $y = x^2$ e a parábola de equação $y = x^2 + 2$ que representa a translação da parábola inicial de duas unidades no sentido positivo na direção do eixo y e a parábola de equação

$y = x^2 - 2$ que representa a translação da parábola inicial de duas unidades no sentido negativo na direção do eixo y.

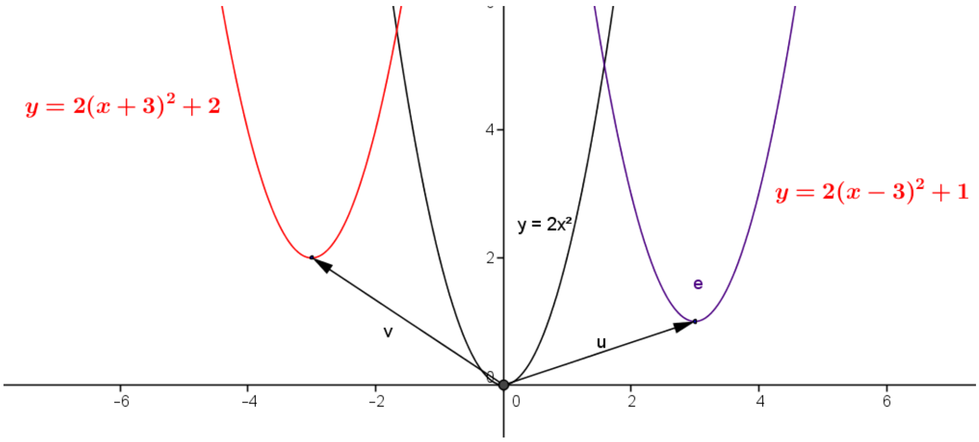
Figura 55 - Translação da parábola de equação y = x^2 na direção do eixo y



Fonte: produção da autora

Podemos ainda fazer translações similares na direção do eixo x ou ainda a partir de um vetor qualquer. A figura 56 mostra a translação da parábola de equação $y = 2x^2$ a partir do vetor $\vec{v} = (-3{,}2)$ e do vetor $\vec{u} = (3{,}1)$. No primeiro caso a nova parábola passa a ter equação $y = 2(x+3)^2 + 2$ e no segundo caso tem equação $y = 2(x-3)^2 + 1$.

Figura 56 - Translação da parábola de equação y = x^2 por um vetor qualquer



Fonte: produção do autor adaptado de Lage (2008).

Já vimos que uma translação é caracterizada por um vetor que a define. Portanto, quando se compõe duas translações, é necessário conhecer o vetor associado a cada uma delas. Fizemos o estudo do objeto matemático, translação, em diversos registros de representação semiótica.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DA ROTAÇÃO

Neste capítulo veremos a rotação em diferentes quadros tais como: quadro da geometria, quadro da geometria analítica e o quadro da álgebra. Serão apresentados para o mesmo objeto, os vários registros de representação e as diferentes possibilidades de conversão destes registros,

5.1 QUADRO DA GEOMETRIA

No quadro da geometria a rotação será analisada segundo o ponto de vista intuitivo, o ponto de vista do desenho geométrico e o ponto de vista funcional. Dentro do ponto de vista intuitivo trataremos do registro material e do registro da língua natural realizando a conversão para o registro figural no ponto de vista do desenho geométrico. e no ponto de vista funcional a prioridade é o registro algébrico.

5.1.1 Ponto de Vista Intuitivo

Para o estudo da rotação, neste ponto de vista, o uso de dobradura em folha de papel, brinquedos geralmente encontrados em parques de diversão como a roda gigante, o chapéu mexicano e também os ponteiros do relógio a girar, as pás do ventilador, intuitivamente nos dão ideia de rotação, além de outras situações do cotidiano.

A discussão de tais representações permite a construção pelas crianças das primeiras noções a respeito de rotação. Assim, no que segue, apresentaremos os registros associados a esse ponto de vista.

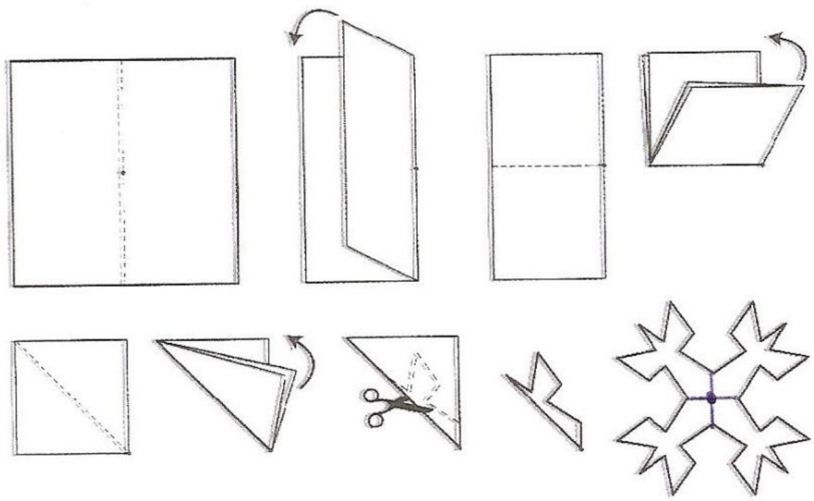
Registro material

Neste registro, a rotação pode ser apresentada por dobraduras em papel. Identificamos a rotação uma vez que, depois de dobrado e vincado o papel, ao desdobrá-lo é possível “enxergar” a rotação da figura e até mesmo medir a amplitude do ângulo formado dependendo do número de dobras realizadas o papel. Após desdobrarmos o papel é possível também “enxergar” que a figura gira em torno de um ponto fixo bem definido com a dobradura, bem como verificar que este ponto também é único. É possível ainda, fixarmos este ponto e girarmos a figura no sentido positivo ou no sentido negativo.

Neste registro associado à dobradura fizemos uso da tesoura como material manipulativo para recortar a figura e permitir que fique bem definida.

Usando uma folha de papel, como mostra a figura 57, fazemos o número de dobras e a seguir, desenhamos uma figura e a recortamos com a tesoura para retirar o excesso de papel além do contorno da figura.

Figura 57 - Rotação por meio de dobradura



Fonte: Adaptado do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Universidade do Minho

Ao desdobrarmos a folha podemos constatar que, a figura, resultado das dobras e recorte, apresenta uma rotação em torno de um ponto que pode ser determinado a partir de um transferidor Todas as observações surgidas e sugeridas neste registro poderão ser formalizadas com a conversão do registro material para o registro da língua natural.

Registro da língua natural

O que foi distinguido de forma intuitiva no registro material pode ser formalizado no registro da língua natural de forma discursiva como requer este registro. Podemos então observar a rotação como uma transformação geométrica que é obtida quando fixamos um ponto do plano e giramos a figura de um ângulo qualquer, ao redor desse ponto. Pode-se ainda discutir a medida do ângulo e os sentidos horário e anti horário.

5.1.2 Ponto de Vista do Desenho Geométrico

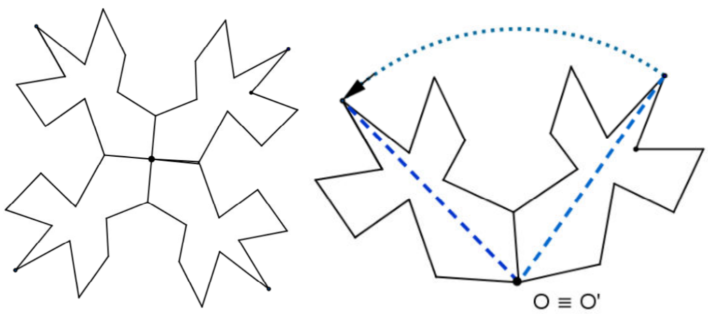
Nesse registro de representação semiótica trabalhamos o ponto de vista geométrico por meio de um registro figural.

Registro figural

Neste registro, a rotação é apresentada por intervenção do desenho geométrico. As figuras são construídas a partir de observações de suas representações no registro material associada às discussões feitas no registro da língua natural. As variáveis da rotação, já observadas, tais como: a localização do centro de rotação, o sentido anti-horário ou horário, bem como a amplitude do ângulo são agora representadas.

Na figura 58 assim como no registro material o centro de rotação pertence a um vértice da figura. No registro do desenho geométrico todos os pontos que se correspondem estão unidos por arcos concêntricos de mesma amplitude e mesmo sentido, o centro da rotação, quando transformado, permanece na mesma posição, pois é um ponto invariante.

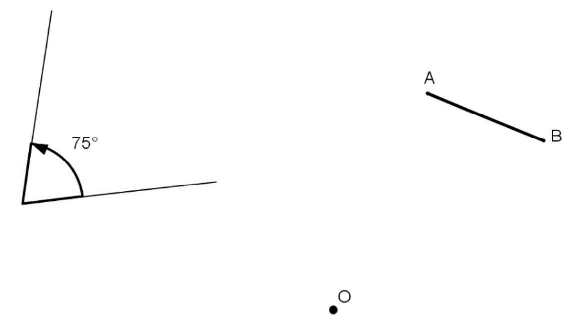
Figura 58 - Rotação com centro na figura



Fonte: produção da autora

O procedimento é análogo se o centro de rotação não pertencer à figura, como no exemplo apresentado na figura 59 em que é dado um segmento AB e um ângulo de 75º com a finalidade de construir a rotação do segmento dado, ao redor do ponto O, no sentido anti-horário.

Figura 59 - Segmento e ângulo de rotação



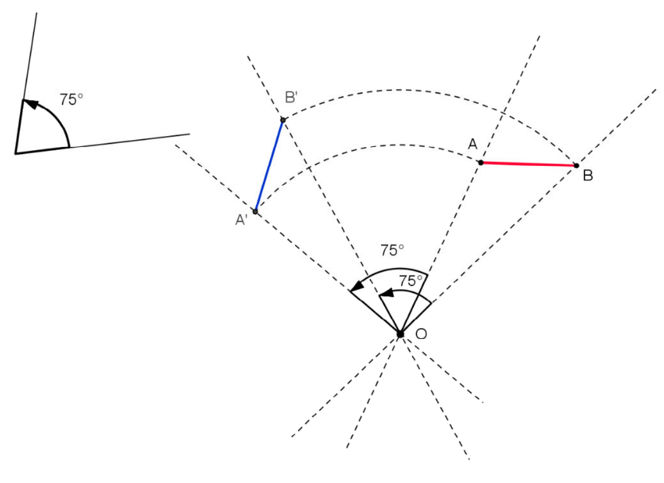
Fonte: produção da autora

Nessa operação, todos os pontos do conjunto giram em torno de um único centro segundo a amplitude do ângulo e sentido determinado.

Para realizar uma rotação é necessário traçar retas que passam pelo centro de rotação *O* e por cada um dos pontos A, B. A seguir transportar o ângulo o ângulo de 75º no sentido anti horário em relação a cada uma das retas desenhadas como na figura 60.

Figura 60 - Rotação do segmento AB

,

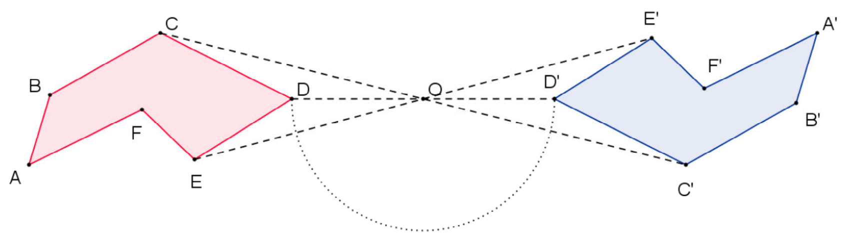


Fonte: produção da autora adaptado de Rezende e Queiroz, 2011, p. 224

Depois transportar a medida dos segmentos AO e OB essa distância nas correspondentes desenhadas e determinar os pontos A’ e B’.

O segmento A’B’ representa a rotação do segmento AB no sentido anti-horário por um ângulo de 75º. Em particular, se o ângulo é igual a 180º (raso), ou seja, quando os pares de pontos correspondentes estão em semirretas opostas, figura 61, isto é, a rotação é chamada de *meio-giro*, e é equivalente a uma *simetria em relação ao ponto fixo* O.

Figura 61 - Rotação de ângulo de 180º



Fonte: produção da autora

Após o registro material, a conversão para o registro figural se dá em função de que esse registro de representação semiótica oportuniza outras possibilidades tais como as propriedades da rotação por meio do tratamento de desenho geométrico. As propriedades geométricas no processo de construção são as seguintes:

-A figura original e o seu transformado são geometricamente congruentes.

-Um ponto e seu transformado estão à mesma distância do centro de rotação.

-Um ponto da figura pertencente ao centro de rotação é transformado em si próprio.

- A imagem de uma reta é outra reta.

- A imagem de uma semirreta é outra semirreta.

- A imagem de um segmento de reta é um segmento de reta geometricamente congruente.

- A imagem de um ângulo é outro ângulo equipolente (geometricamente igual e de mesmo sentido).

Após os registros de representação vistos para a rotação e a conversão do registro material para o registro figural passamos ao estudo da rotação do ponto de vista funcional.

5.1.3 Ponto de Vista Funcional

Registro algébrico e gráfico

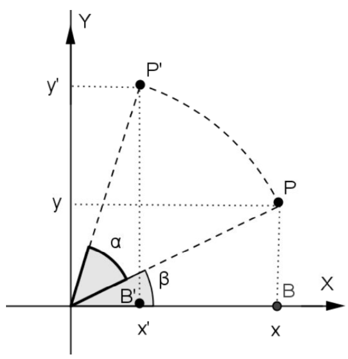
Vimos nos registros anteriores que para definirmos a rotação foi preciso indicar um ângulo α, um ponto *O*, que chamamos de centro, em torno do qual se realizou o movimento. Verificamos também que depois de definido o centro de rotação, é o único ponto que, quando aplicada a transformação, não muda de lugar, portanto é um ponto fixo da rotação.

No ponto de vista funcional, vamos coordenar o registro algébrico com o registro gráfico e considerar rotações centradas na origem do plano cartesiano (ver figura 62). Dado um sistema de coordenadas de origem *O*, a rotação de um ângulo α no sentido anti horário transforma o ponto P, no ponto P'. Essa rotação pode ser representada por $R_\theta(P) = P'$. Sendo P(x,y) e $R_\theta(P) = (x', y')$ podemos mostrar que

$$\begin{cases} x' = x.cos\alpha - y.sen\alpha \\ y' = x.se\alpha + y.cos\alpha \end{cases}$$

Para demonstrar esta afirmação, dado um ponto P(x,y) tal que o comprimento do segmento OP seja d, podemos determinar que no triângulo retângulo OPB, $x = d\,.\cos\beta$ e $y = d\,.sen\beta$. Da mesma forma, considerando o triângulo retângulo $OP'B'$, temos que $x' = d.\cos(\alpha + \beta)$ e $y' = d\,.sen(\alpha + \beta)$. Expandindo as últimas relações e substituindo as primeiras temos:

Figura 62 - Rotação



Fonte: produção da autora

$$x' = d\,.\cos(\alpha + \beta)$$

$$y' = d\,.sen(\alpha + \beta)$$

$$x' = d\,.cos\alpha\,.cos\beta - d\,.sen\alpha\,.sen\beta$$

$$y' = d\,.sen\alpha\,.cos\beta + d\,.sen\beta\,.cos\alpha$$

$$x' = (d\,.\,cos\beta).\,cos\alpha - (d\,.\,sen\beta).\,sen\alpha$$

$$y' = (d\,.\,cos\beta).\,sen\alpha + (d\,.\,sen\beta).\,cos\alpha$$

$$x' = x\,.\,cos\alpha - y\,.\,sen\alpha$$

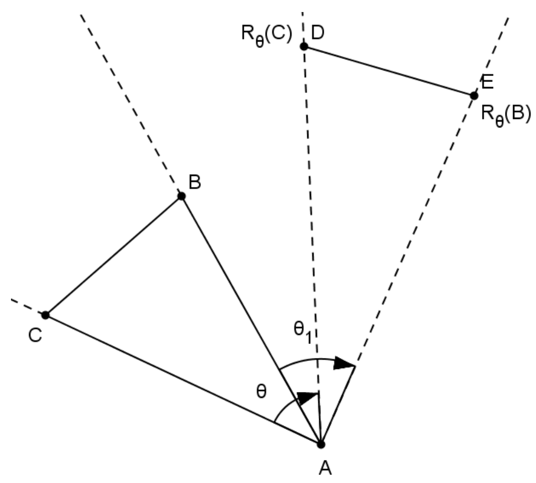
$$y' = x\,.\,sen\alpha + y\,.\,cos\alpha.$$

Dessa forma podemos então escrever que $R_\alpha(x,y) = (xcos\alpha - ysen\alpha, xsen\alpha + ycos\alpha)$.

Registro figural

Neste registro as aplicações que representam a rotação podem ser torno do ponto A no sentido horário tendo como apoio a construção já realizada no registro do desenho geométrico a rotação neste ponto de vista é representada pela aplicação $R_\theta(P) = P'$. Embora representemos a rotação por meio de uma lei as construções no registro figural permanecem as mesmas vistas no ponto de vista do desenho geométrico (figura 63)

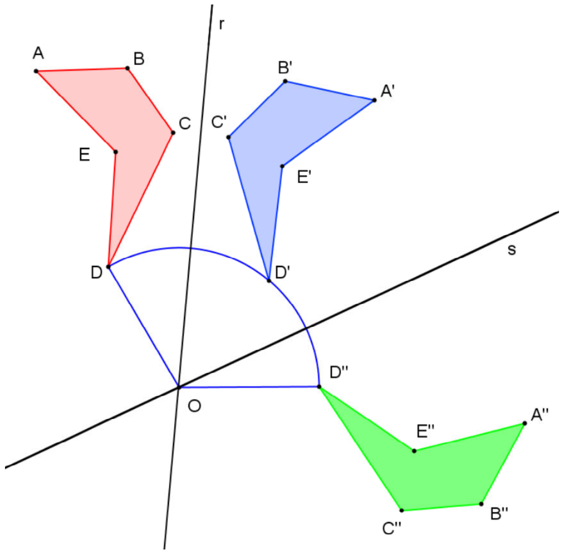
Figura 63 - Rotação



Fonte: produção da autora

As composições também podem ser representadas neste registro por meio da composição de duas simetrias em eixos concorrentes. Na figura 64 podemos ver que a rotação no sentido anti horário pode ser representada por $R_\theta(A) = S_r \circ S_s(A) = S_r(S_s(A)) = A''$.

Figura 64 - Rotação resultante da composição em eixos paralelos



Fonte: produção da autora

Constatamos que no quadro da geometria foi possível realizar o estudo de rotação no ponto de vista intuitivo, no ponto de vista do desenho geométrico e no ponto de vista funcional associando para cada um destes pontos de vista os registros pertinentes tais como: o registro material, o registro figural e o registro algébrico e as conversões possíveis. No que segue, buscaremos fazer o mesmo estudo no quadro da Geometria Analítica.

5.2 QUADRO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste quadro a rotação será estudada a partir de propriedades pertinentes a pares ordenados, equações e suas representações gráficas em planos cartesianos.

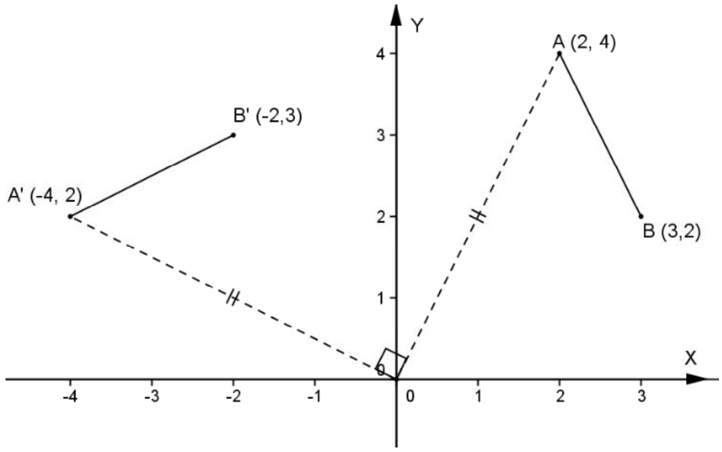
5.2.1 Ponto de Vista Funcional

Neste ponto de vista a rotação será representada no registro de pares ordenados coordenados com o registro gráfico.

Registro de pares ordenados

Podemos representar a rotação de 90º, de um ponto P(a,b) qualquer do plano pela lei (a,b) = (-b,a) e aplica-la para obter essa rotação. Dessa forma considerando o segmento AB (figura 65) e as coordenadas de suas extremidades A(2,4) e B(3,2) podemos determinar que A'(-4,2) e B'(-2,3) e representar essa rotação graficamente.

Figura 65 - Rotação dos pontos A e B



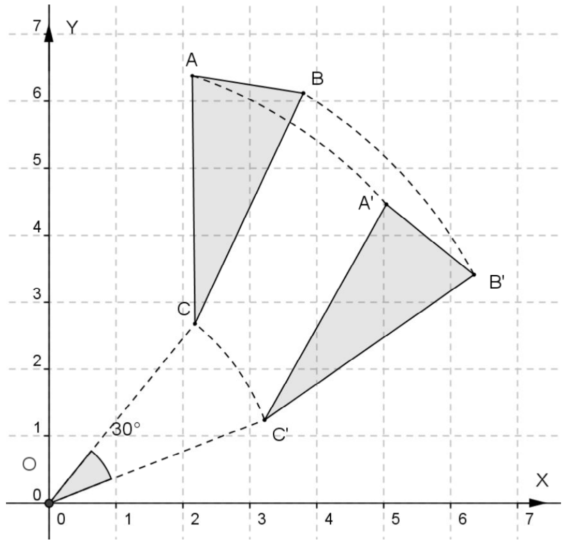
Fonte: produção da autora adaptado de Rich, 2003

Conclusão: a rotação está centrada no ponto de intersecção dos dois eixos e a sua amplitude é igual ao dobro do ângulo que os dois eixos fazem entre si.

5.4 QUADRO DA ÁLGEBRA LINEAR

No ponto de vista da Álgebra Linear dentro do quadro da Álgebra veremos o registro figural, o registro algébrico e o registro matricial. Lembramos, como já visto, que uma transformação no plano é uma função que leva pontos do plano em pontos do plano, segundo certas condições expressas algebricamente, portanto, transformação no plano é uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que transforma pontos do plano em pontos no plano. Como vemos a seguir também na representação simbólico-algébrica e simbólica matricial. (figura 66).

Figura 66 - Rotação de 30º do triângulo ABC no sentido horário



Fonte: produção da autora adaptado de Dante (2005)

O triângulo A'B'C' resultado de uma rotação do triângulo ABC por um ângulo genérico θ e centro de rotação na origem. Sejam Ox e Oy os eixos primitivos, do sistema cartesiano de eixos coordenados com origem O (0,0). Sejam Ox' e Oy' os novos eixos coordenados depois que o sistema primitivo foi rotacionado de um ângulo em torno da origem O (0,0). Logo, θ é o ângulo formado entre os eixos Ox e Ox1. Seja P(x, y) um ponto qualquer do sistema primitivo. Portanto, o mesmo ponto P terá coordenadas P(x1, y1), em relação ao novo sistema.

Registro matricial

Uma rotação de θ graus de um ponto (x, y), no sentido anti horário e em torno da origem, é feita a partir da multiplicação da matriz

$R = \left[\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right]$ pela matriz P = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, gerando uma matriz P' = $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, com a

nova posição (x', y') dos pontos após a rotação P' = RP

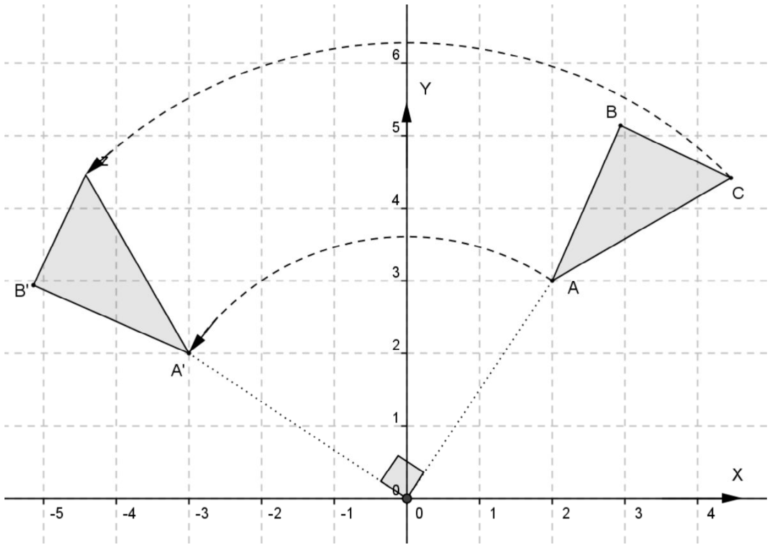
Na figura 67 temos a nova posição do ponto (2,3) após uma rotação de 90º no sentido anti-horário, em torno da origem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90º & -sen\, 90º \\ sen\, 90º & \cos 90º \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a nova posição será (-3, 2).

Figura 67 - Rotação de 90º do triângulo ABC no sentido anti-horário



Fonte: construção do autor.

A seguir apresentamos nossas considerações finais em relação ao estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, retomando aspectos abordados ao longo dos capítulos faremos nossas observações do que consideramos importante na pesquisa. Assim, destacamos a fundamentação teórica, os aspectos metodológicos e novas perspectivas para investigações futuras. Apontamos também as reais possibilidades de concretização desse estudo nas aulas de Geometria na formação inicial e continuada. É importante ressaltar que não tivemos a pretensão de apresentar um guia de como ensinar melhor a geometria e as transformações geométricas, contudo esperamos que a forma como as apresentamos contribua para que os professores de matemática trabalhem a geometria com uma interligação entre conteúdos estudados na sua formação.

Nossos estudos preliminares apontaram a importância da Geometria e como o seu estudo tem um papel integrador e fundamental no ensino, considerada como fator altamente facilitador para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Concordamos com Veloso (1999) quando aponta que há que se *inventar* uma nova abordagem para o ensino de geometria que valorize atividades de exploração e de investigação na sala de aula. Muito embora, o ensino de geometria, na formação do professor, ocorra ou em forma de disciplina oferecida na grade curricular, na maioria das vezes, apresentado de maneira isolada sem conexão com outras disciplinas ou o professor busca esse conhecimento em processo de ação continuada.

Para responder à questão de pesquisa que gerou este trabalho sobre quais as potencialidades matemáticas e didáticas do estudo de diferentes pontos de vista em diferentes quadros e registros de representação semiótica, das transformações geométricas, para servir de suporte para os professores trabalharem na formação inicial e continuada, focamos em buscar quais pontos de vista podem ser mobilizados no quadro da Geometria, no quadro da Geometria Analítica e no quadro da Álgebra, isto é, a partir da escolha de um quadro da Matemática em que se estuda as transformações geométricas buscamos identificar os diversos pontos de vista possíveis. Recorremos ainda aos Registros de Representação Semiótica de Duval que são utilizados para representar as transformações geométricas e ainda para as possíveis transformações desses registros a partir do tratamento e da conversão.

Nesse contexto que se inseriu nossa pesquisa, em que propusemos oferecer uma contribuição, apresentando possibilidades para o ensino e aprendizagem das transformações geométricas, neste trabalho, estudamos as transformações que são isométricas. Tomamos como eixo, apresentar essas transformações por meio de um estudo que começasse desde as séries iniciais em um trabalho com dobraduras de tal forma que as propriedades fundamentais do nosso objeto de estudo fossem surgindo e fossem sendo exploradas naturalmente a cada dobra, até o ensino superior com o estudo dessas transformações e as estruturas algébricas.

Seguimos, pois nesse propósito expresso no decorrer da tese, de estudar as transformações geométricas com uma interligação entre saberes e conexões entre conteúdos abordados na Licenciatura em Matemática

Os procedimentos metodológicos utilizados contribuíram para que o estudo de transformações geométricas fosse realizado. O estudo bibliográfico utilizado foi fundamental para a realização da pesquisa, uma vez que consulta a trabalhos científicos realizados, livros, dicionários e artigos científicos permitiram extrair os conteúdos necessários para a articulação entre pontos de vista, quadros e registro de representação semiótica.

Consideramos que os referenciais teóricos adotados na pesquisa, Pontos de Vista de Rogalski (2001), Quadro e Mudança de Quadro de Douady (1984) e Registro de Representação Semiótica de Duval (1995) foram pertinentes para nosso estudo, pois com os estudos de Rogalski (2001), pudemos estudar as transformações geométricas, do ponto de vista intuitivo, do ponto de vista do desenho geométrico, do ponto de vista funcional, do ponto de vista da Álgebra Linear e do ponto de vista das estruturas algébricas. Assim, foi possível distinguir e analisar os diferentes saberes envolvidos

A respeito de Quadros e Mudança de Quadros proposto por Douady (1984), foi possível, mediante articulação de pontos de vista dentro de quadros que consideramos adequados para serem estudadas as transformações geométricas, tais como Quadro da Geometria, Quadro da Geometria Analítica e

Quadro da Álgebra, uma interação entre essas áreas distintas do conhecimento matemático e integrar concretamente propriedades de simetria, rotação e translação com estruturas abstratas de grupos, ainda integração entre Álgebra e Geometria.

Ao tratarmos de registros de representação semiótica, constatamos que foi possível realizarmos o estudo das transformações geométricas mediante articulação entre o registro material, registro da língua natural, registro figural, registro gráfico e registro algébrico. Duval (2002) assinala que toda atividade geométrica requer um diálogo contínuo entre visualização (registro figural) e o discurso (registro discursivo). Em nossa pesquisa, entendemos que o discurso pode ser realizado por meio de registro de língua natural e de registro algébrico.

Assim, podemos responder nossa questão de pesquisa – Quais são as potencialidades matemáticas e didáticas do estudo de diferentes pontos de vista, quadros e registros de representação semiótica, das transformações geométricas? Diante do que foi apresentado, entendemos que as transformações geométricas estabelecem conexões entre as áreas do conhecimento matemático. Sobretudo em disciplinas não específica de geometria, mas utilizando aspectos geométricos, para construção de conceitos, tais como simetrias de triângulos para o conceito de grupos, eixo de simetria de gráficos de funções reais para o estudo de funções inversas, como a exponencial e logarítmica, para citar alguns.

Acreditamos que, o estudo de transformações geométricas merece uma pesquisa mais detalhada, sobretudo, para ampliar o trabalho que realizamos.

Acreditamos, ainda, ser necessário trabalhar as transformações geométricas no estudo da álgebra que pode e deve ser feita no estudo das estruturas algébricas, dos números complexos e como pesquisa futura a possibilidade de se fazer um estudo similar para as transformações geométricas no espaço.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. ***Investigações em geometria na sala de aula.*** In Ensino da geometria no virar do milênio. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.

ALMOULOUD, Ag Saddo. CEMA, **Caderno de Educação Matemática. Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa**. Volume III. PUC-SP, 1997.

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007

ALMOULOUD, Ag Saddo; SILVA Maria José Ferreira; LIMA, Gabriel Loureiro. **Geometria das Transformações, Educação a distância**. PUC/SP, 2012

ALVES, Sérgio; GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes**. Um estudo geométrico das transformações elementares**. São Paulo: IME/USP, 1996.

ALVES, Dayse Socorro. **Simetria Axial: uma sequencia didática para alunos da 6ª série com o uso de software de geometria dinâmica.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.

APM. ASSOCIAÇÃO DE Professores de Matemática. Escola Superior de Educação de Lisboa. Texto de apoio. Transformações Geométricas, 2008.

BASTOS, Rita**. Geometria no Currículo de Matemática**. In: Ensino de Geometria no Virar do Milênio. Ed. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 1999.

BASTOS, Rita. Notas sobre o Ensino da Geometria. Grupo de Trabalho de Geometria da APM. Educação Matemática n. 94, p. 23-24 set./out., Lisboa: APM. 2007.

BASTOS, Rita. Notas sobre o Ensino da Geometria. Grupo de Trabalho de Geometria da APM. **Simetria** Educação Matemática n. 88, p. 9-11, Lisboa: APM. 2006.

BIGODE, A. J. L. **Matemática atual.** São Paulo: Atual editora. Coleção Matemática Atual, 1994.

BILAC, Cristina Ulian. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-géomètre**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BRASIL. Lei 9394/96, de 20/12/96. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Diário Oficial da União, Brasília, n. 248, 23dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília, DF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos** PNLD 2010: Matemática. Brasília, 2010

BKOUCHE, Rudolph. **De La Geometrie et Des Transformations.**In: Repères IREM. n 4, julho, p. 134 – 157, 1991.

CATUNDA, Omar; DANTAS, Martha Maria de Souza; NOGUEIRA, Eliana Costa; SOUZA, Neide Clotilde de Pinho e; GUIMARÃES, Eunice da Conceição. **As transformações geométricas e o ensino da geometria**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1990.

CERQUEIRA, Ana Paula Ferreira de**. Isometrias: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

COXFORD, A. F. **A Transformation Approach to Geometry.** In: Geometry in the mathematics curriculum, 36º. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia, 1973.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único. 1ed. São Paulo. Editora Ática, 2005.

DIAS, Marlene A. **Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartesien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.** Thèse (Doctorat) – Université de Paris VII, Denis DIDEROT, 1998.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, Edward W**. A geometria pelas transformações, II** – Geometria Euclidiana. Trad. Maria Pia Brito de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier. São Paulo: EPU,1975.

DOUADY, Régine. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet.** Thèse d'état, Université, Paris 7, 1984.

DOUADY, Régine. **Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement**. REPÈRES-IREM nº 6, Topiques Editions, Janvier 1992.

DOUADY, Régine. "**De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle" dans les cahiers de didactique des mathématiques** nº6, IREM, Janvier 1992.

DUVAL, Raymond. **Approche cognitive des problems de geométrie en termes de congruence.** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.1, p. 57-74, IREM de Strasbourg, 1988.In Revemat, v.07, n. 1, p. 118-138,2012.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** In MACHADO, Silva Dias Alcântara. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiosis u pensamento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogia, 2004.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FARMER, David W**. Grupos e simetria: Um guia para a descoberta matemática**. Tradução: Cristina Isabel Januário. Lisboa: Gradativa, 1999.

FREIRE, Olavo. **Desenho Geométrico e Noções de Geometria.** Livraria Francisco Alves. 1956.

GERARD, L. **Cours de Géométrie Élémentaire.** Imprimeur – Libraire. Paris, 1929.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2009.

GRAVINA, M. A. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo.** Tese (doutorado em Informática na Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRENIER, Denise. ***Construction et étude du fonctionnement d'um processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième***. 1988. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 1988.

JAHN, Ana Paula**. Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre.** Thèse de Doctoral,IMAGE - Université Joseph Fourier Grenoble I, França, 1998.

JESUS, Gilson Bispo de. **Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

JONES, Keith**. Issues in the Teaching and Learning of Geometry**. In Linda Haggarty (Ed.) Aspects of Teaching Secondary Matematics: perspectives on practice, 121 – 139. London: Routledge Falmer, 2002.

KARRER, Monica. **Articulação Entre Álgebra Linear e Geometria. Um Estudo Sobre As Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KÜCHEMANN, D. **Reflection and Rotation.** In: Children's understanding of mathematics: 11 – 16, 137 – 157.London: John Murray, 1981.

LAGE, Maria Auxiliadora. **Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. **Isometrias e Ornamentos do plano Euclidiano.** São Paulo: Atual, 1982.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. Ed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1996.

LORENZATO, Sergio**. Por que não ensinar geometria?** In Educação Matemática em Revista, n. 4, Blumenau: SBEM, 1995.

LUZ, Vania de Andrade. **Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: da reforma da matemática moderna aos dias atuais.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MEGA, Élio. **Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série: um estudo comparativo em relação ao material utilizado**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MIYAKAWA, Takeshi**. Une etude du rapport entre connaissance et connaissance et prevue: le das de La notion de symétrie orthogonale**.Thèse de Doctoral, IMAG - Université Joseph Fourier Grenoble I, França, 2005.

MOYER, John C. **The relationship between the mathematical structure of euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive**

structures of young children. Journal for Research in Mathematical Education. Vol.9, Nº 2, pp. 83-92. Março 1978.

MONGELLI, Cristina Junqueira Godinho. **Um estudo sobre procedimentos e invariantes operatórios utilizados por alunos do IV ciclo do ensino fundamental na resolução de problemas de simetria axial.** Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2005.

QUEIROZ, Amelia Maria Noronha Pessoa de. **Matemática Transparente.** Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.

REZENDE, Eliane Quelho Frota, QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª edição. Editora da Unicamp, Campinas, São Paulo, 2008.

RICH, Barnett. **Teoria e problemas de Geometria.** Tradução Irineu Bicudo. 3ª ed., Coleção Schaum, Porto Alegre, 2003.

RIPPLINGER, Heliane Mariza Grzybowski. **A Simetria nas Práticas Escolares.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

ROGALSKI, Marc. **Problèmes épistémologiques et didactiques liés aux notions de cadres (ou domaines de fonctionnement), registres de representation et points de vue.** Le cas des représentations graphiques des fonctions. Xerox de transparências de seminários feitos no Centro das Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP, agosto de 1995.

ROHDE, Geraldo Mario. **Simetria.** São Paulo: Hemus, 1982.

SALAZAR, Jesus Victoria Flores. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SANGARÉ, Mamadou Souleymane. **La marque d'une transformation géométrique. Um exemple de modelisation didactique**. Educação Matemática Pesquisa, educ, V.8 n.2, p.225-266, 2006.

SCHULTZ, Karen Andrea. **Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development**, en Lesh, R.; Mierkiewicz, D.: Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts (ERIC: Columbus, USA), pp. 195-211, 1978.

SHAH, Sair Ali. **Selected geometric concepts taught to children ages seven to eleven**. Arithmetic Teacher. Vol 16, nº 2, pp 119-128, fevereiro de 1969.

SILVA, Júnior Teodoro da (2010) **O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias**. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

STEWART, Ian. **Uma história da simetria na matemática**. Trad. Claudio Carina. Rio de Janeiro, 2012.

TINOCO, Maria João. **Simetria.** Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. 2012.

VAZ, Regina de Lourdes. **O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.** Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

VELOSO, Eduardo**. Ensino da geometria: Ideias para um futuro melhor. In Ensino da geometria no virar do milênio**. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.

WEYL, Hermann. **Symmetry**. Princenton University Press, New Jersey, 1989.