

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

SANDRA PEREIRA LOPES

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE
PARÁBOLA ENQUANTO LUGAR GEOMÉTRICO**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2014**

SANDRA PEREIRA LOPES

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PARÁBOLA
ENQUANTO LUGAR GEOMÉTRICO**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Profa., Doutora Maria José Ferreira da Silva.

**PUC-SP
2014**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadora ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

Pensamento

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”. (Martin Luther King)

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, da inteligência por ter-me dado saúde e inspiração para concluir este trabalho e amparo nos momentos mais difíceis desse percurso.

À minha querida Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva (Zezé) pela sua orientação, por confiar em mim e respeitar meu tempo para realização desta pesquisa. Mas acima de tudo, agradeço sua amizade.

Aos professores doutores Saddo Ag Almouloud e Gilson Bispo de Jesus pelas sugestões, comentários e importantes críticas na elaboração e enriquecimento desta dissertação.

Aos companheiros de Turma e colegas do grupo PEAMAT que, de alguma forma, me ajudaram neste trabalho.

Ao Corpo Docente do Programa de Estudo Pós-graduado em Educação Matemática da PUC-SP, com o qual tive o privilégio de conviver e aprender.

Ao diretor presidente do Colégio Bandeirantes Ltda. por permitir aos alunos voluntários participarem da pesquisa.

Aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Bandeirantes Ltda., que colaboraram para o desenvolvimento da pesquisa e trouxeram discussões muito ricas para a conclusão do trabalho.

À minha amiga Rosa Aluotto pelo incentivo e apoio nos momentos mais difíceis.

Ao amigo Carlos Nely Clementino de Oliveira, sua contribuição foi fundamental para a elaboração do Abstract.

Aos amigos e companheiros de trabalho da Secretaria de Educação de Embu das Artes, especialmente, Luciane Cavallieri, Marli Cunha, Nilza Dias e Rogério Bernardo pelo incentivo e amizade.

Aos meus amados pais, Cândida e Antonio, por incentivarem a continuidade dos meus estudos.

Ao meu querido companheiro José Ivan, que compreendeu a minha ausência e dedicação a este trabalho foi a minha maior fonte de inspiração para concluí-lo e principal incentivador para que eu pudesse terminar o Mestrado.

À minha irmã Rita e minha sobrinha Amanda

À CAPES, pela concessão da bolsa, permitindo-me maior dedicação aos estudos.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar a apropriação das definições de parábola como lugar geométrico por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência didática, na qual os sujeitos de pesquisa realizam tratamentos e conversões dos Registros de Representação Semiótica pertinentes ao objeto matemático parábola. Nesse sentido, buscamos responder a seguinte questão de pesquisa: Uma sequência de ensino que articula a conversão de registros a partir da noção de lugar geométrico resulta na apropriação por parte do aluno de conhecimentos sobre parábola? Aplicamos a sequência de ensino a cinco alunos do Ensino Médio e, como fundamentação teórica da pesquisa, embasamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. A abordagem dessa investigação foi qualitativa e, como metodologia, adotamos os pressupostos da Engenharia Didática. Observando as produções dos sujeitos de pesquisa no decorrer das atividades da sequência, constatamos que eles se apropriaram das definições de parábola a partir da noção de lugar geométrico no domínio da Geometria Plana e da Geometria Analítica, realizaram as conversões e os tratamentos nos registros e, ao final do estudo, puderam perceber que o objeto matemático parábola não é limitado à representação gráfica de uma função quadrática.

Palavras-chave: Parábola. Lugar geométrico. Registro de Representação Semiótica.

ABSTRACT

The goal of this study is to investigate the comprehension of the definitions of parabola as locus by second year high school students based on an instructional sequence in which the research subjects would produce treatments and conversions of Registers of Semiotic Representations, concerning the mathematical object parabola. In this sense, we seek to answer the following research question: Does a teaching sequence which articulates the conversion of registers, from the notion of locus results in ownership by the student's knowledge of the parabola? We applied the teaching sequence to five high school students and, as a theoretical foundation for the research, we adopted the Registers of Semiotic Representation of Raymond Duval and the Theory of Didactic Situations of Guy Brousseau. The approach of this research was qualitative and, as a methodology, we followed the assumptions of Engineering Curriculum. Observing the productions of the subjects in the course of the activities of the sequence, we found that they have appropriated the definition of parabola from the notion of locus in the domain of plane and analytic geometries, they performed the conversions and treatments in the registers and, at the end of the study, they could recognize that the mathematical object parabola is not only the graphic representation of a quadratic function.

Keywords: Parabola. Locus. Registers of Semiotic Representation.

LISTA DE FIGURA

FIGURA 1: REGISTRO FIGURAL DE UMA PARÁBOLA	24
FIGURA 2: PARÁBOLA A PARTIR DA SECÇÃO DE UM CONE RETO	33
FIGURA 3: PARÁBOLA A PARTIR DA SECÇÃO DE UM CONE OBLÍQUO DEFINIDA POR APOLÔNIO	34
FIGURA 4: PARÁBOLA A PARTIR DA SECÇÃO DE UM CONE	35
FIGURA 5: PARÁBOLA A PARTIR DA SECÇÃO PLANA	36
FIGURA 6: <i>LATUS RECTUM</i>	37
FIGURA 7: PARÁBOLA – PROPRIEDADE FOCO-DIRETRIZ	38
FIGURA 8: PARÁBOLA DETERMINADA PELA SECÇÃO DE UM CONE	38
FIGURA 9: REGISTRO FIGURAL DE UMA PARÁBOLA A PARTIR DA DEFINIÇÃO (1).....	40
FIGURA 10: REGISTRO FIGURAL DE UMA PARÁBOLA A PARTIR DA DEFINIÇÃO (2).....	40
FIGURA 11: REGISTRO FIGURAL DO EIXO DE SIMETRIA DA PARÁBOLA	41
FIGURA 12: REGISTRO FIGURAL DE UMA PARÁBOLA A PARTIR DO SEU VÉRTICE	42
FIGURA 13: REGISTRO GRÁFICO DE UMA PARÁBOLA NO PLANO CARTESIANO.....	43
FIGURA 14: TELA INICIAL DO GEOGEBRA	47
FIGURA 15: BARRA DE FERRAMENTAS DO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA	48
FIGURA 15: ESBOÇO DA PARÁBOLA NO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA FERRAMENTA RASTRO.....	49
FIGURA 16: ESBOÇO DA PARÁBOLA NO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA FERRAMENTA LUGAR GEOMÉTRICO	49
FIGURA 17: ÍCONES DAS FERRAMENTAS CÔNICAS.....	50
FIGURA 18: ESBOÇO DA PARÁBOLA NO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA FERRAMENTA CÔNICA	50
FIGURA 19: ESBOÇO DA PARÁBOLA NO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA	51
FIGURA 20: ESBOÇO DA RETA M OBTIDA A PARTIR DA DOBRA.....	56
FIGURA 21: ESBOÇO DE UMA PARÁBOLA POR DOBRADURA EM PAPEL VEGETAL.....	56
FIGURA 22: ESBOÇO DO SEGMENTO QR PERPENDICULAR À RETA D E O PONTO R.....	58
FIGURA 23: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 1 - ATIVIDADE 1	60
FIGURA 24: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 1 - ATIVIDADE 1 (A)	61
FIGURA 25: PROTOCOLO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	62
FIGURA 26: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 1 - ATIVIDADE 2 (A)	63
FIGURA 27: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 1 - ATIVIDADE 2 (B)	63
FIGURA 28: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 1 - ATIVIDADE 2 (C)	64
FIGURA 29: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 2.....	67
FIGURA 30: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 2	68
FIGURA 31: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 3 – ATIVIDADE 1.....	72
FIGURA 32: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 3 – ATIVIDADE 1.....	72
FIGURA 33: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 - SITUAÇÃO 3 – ATIVIDADE 2.....	73
FIGURA 34: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 - SITUAÇÃO 3 – ATIVIDADE 2.....	74
FIGURA 35: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 E 2 - SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 1	79

FIGURA 36: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 1	79
FIGURA 37: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 1	79
FIGURA 38: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 2	80
FIGURA 39: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 2	81
FIGURA 40: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 2	81
FIGURA 41: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 3	82
FIGURA 42: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO A – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 2.....	82
FIGURA 43: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 2	83
FIGURA 44: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 2	83
FIGURA 45: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 4	84
FIGURA 46: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 4	84
FIGURA 47: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 4	85
FIGURA 48: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 4 – ATIVIDADE 4	85
FIGURA 49: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 5 – ATIVIDADE 1 – (A) E (B).....	88
FIGURA 50: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 5 – ATIVIDADE 1 – (A) E (B).....	89
FIGURA 51: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1	93
FIGURA 52: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1	93
FIGURA 53: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (A).....	94
FIGURA 54: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (A).....	94
FIGURA 55: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (B).....	95
FIGURA 56: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (B).....	95
FIGURA 57: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (C).....	96
FIGURA 58: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (C).....	97
FIGURA 59: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (A).....	99
FIGURA 60: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 1 (A).....	99
FIGURA 61: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 2 (B).....	100
FIGURA 62: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 6 – ATIVIDADE 2 (B).....	101
FIGURA 63: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1(A).....	104
FIGURA 64: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1(A).....	105
FIGURA 65: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (A).....	105
FIGURA 66: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (A).....	105
FIGURA 67: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (B).....	106
FIGURA 68: PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (B).....	106
FIGURA 69: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (B).....	107
FIGURA 70: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (B).....	107
FIGURA 71: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (C).....	107
FIGURA 72: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 7 – ATIVIDADE 1 (C).....	108
FIGURA 73: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 8 – ATIVIDADE 1	111

FIGURA 74: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 8 – ATIVIDADE 1	111
FIGURA 75: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 1	116
FIGURA 76: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 1	116
FIGURA 77: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 2	117
FIGURA 78: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 2	117
FIGURA 79: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 3 (A).....	118
FIGURA 80: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 3 (A).....	119
FIGURA 81: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 3 (B).....	119
FIGURA 82: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 3 (B).....	119
FIGURA 83: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 4	120
FIGURA 84: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 4	120
FIGURA 85: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 1 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 5	121
FIGURA 86: PROTOCOLO DE RESPOSTA DO GRUPO 2 – SITUAÇÃO 9 – ATIVIDADE 5	122

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE UMA PARÁBOLA.....	25
QUADRO 2: CLASSES DE PARÁBOLAS A PARTIR DA POSIÇÃO RETA DIRETRIZ.....	45

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA.....	15
1.1 PESQUISAS REFERENTES ÀS CÔNICAS	15
1.2 REFERENCIAL TEÓRICO	19
1.2.1 Teoria das Situações Didáticas	19
1.2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica	22
1.3 JUSTIFICATIVA	27
1.4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS.....	30
CAPÍTULO 2: ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO	33
2.1 ESTUDO DA PARÁBOLA A PARTIR DA SECÇÃO DE UM CONE.....	33
2.2 ESTUDO DA PARÁBOLA ENQUANTO LUGAR GEOMÉTRICO	39
2.3 ESTUDO DA PARÁBOLA EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA	46
CAPÍTULO 3: A PESQUISA.....	53
3.1 PERFIL DOS SUJEITOS.....	53
3.2 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	53
3.3 A SEQUÊNCIA	54
3.4 ANÁLISE DAS SITUAÇÕES	54
3.4.1 Análise da situação 1 – Estudo da Parábola por meio de dobradura	54
3.4.2 Análise da situação 2 – Estudo da Parábola no Ambiente da Geometria Dinâmica.....	65
3.4.3 Análise da situação 3 – Estudo da Parábola no Domínio da Geometria	70
3.4.4 Análise da situação 4 – Estudo da Parábola a partir de Construções Geométricas.....	76
3.4.5 Análise da situação 5 – Estudo da Distância entre Dois Pontos no Plano Cartesiano.....	86
3.4.6 Análise da situação 6 – Estudo da Parábola no Domínio da Geometria Analítica.....	90
3.4.7 Análise da situação 7 – Estudo das variáveis pertinentes da Equação da Parábola.....	102
3.4.8 Análise da situação 8 – Estudo da Equação de uma Parábola.....	109
3.4.9 Análise da situação 9 – Estudo da Parábola: Significados, Equações e Gráficos.	112
3.5 CONSIDERAÇÕES DAS ANÁLISES	124
CONSIDERAÇÕES FINAIS	127
REFERÊNCIAS	130
APÊNDICE A – A SEQUÊNCIA DE ENSINO	132
ANEXO A – MODELO DE AUTORIZAÇÃO.....	145
ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	146

INTRODUÇÃO

Esta dissertação, que está relacionada às Cônicas, priorizou o estudo da parábola enquanto lugar geométrico. Primeiramente, ao atuarmos como professores, no Ensino Fundamental e Médio, percebemos que das cônicas a parábola é a curva mais estudada pelos alunos, como representação gráfica do comportamento de uma função quadrática no plano cartesiano, tanto em Matemática quanto em Física, desde o final do ensino fundamental (9º ano ou 8ª série); em segundo lugar, a experiência revelou-nos que os alunos do Ensino Médio, geralmente, têm a falsa ideia de ser a parábola uma função quadrática.

No Ensino Fundamental (9º ano) e o no Ensino Médio (1º ano), o objeto matemático de discussão é a função quadrática acompanhada de diferentes formas de representação do objeto, tais como: expressão algébrica, gráficos cartesianos e tabelas. Nessa perspectiva, acreditamos que o fato dos alunos conhecerem a representação gráfica da função quadrática não significa apropriação das definições e obtenção da parábola.

No terceiro ano do Ensino Médio, o ensino de parábola é vinculado ao estudo das cônicas e desvinculado da função quadrática. Em decorrência da mudança de contexto, os manuais didáticos passaram a tratar a parábola como objeto matemático. Bongiovanni (2006) afirma que nessa fase do ensino, especificamente, “a parábola é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de uma reta e de um ponto fora dela”, a partir de que é estabelecida sua equação. O autor defende um ensino que priorize construções geométricas, sua utilização na resolução de problemas e situações em que as cônicas apareçam como ferramentas na resolução de problemas geométricos.

Neto (2008) e Bordallo (2011) revelaram em suas pesquisas sobre manuais didáticos que a parábola é introduzida frequentemente em sequências de ensino como uma curva proveniente da secção de um cone circular reto seccionado por um plano paralelo à geratriz. Bordallo (2011) afirma que se trata de um artifício ilustrativo de um recorte histórico empobrecido a partir do surgimento das secções cônicas, justificando assim o surgimento da curva e de sua denominação “cônica”, por ser proveniente da secção do cone.

Na sequência, os estudos do objeto matemático parábola são incorporados na Geometria Analítica. Lopes (2011) constatou que os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio apresentam um estudo de parábola apenas sob o ponto de vista de equações algébricas, em detrimento das construções geométricas. Lima (1999) e Silva (2011) revelaram a necessidade de estudar as cônicas a partir da noção de lugar geométrico no domínio da

Geometria Analítica, privilegiando as equações algébricas e os gráficos cartesianos, por meio de sequências ensino e uso de *software* de matemática como recurso didático.

Nesse contexto, optamos pelo estudo do objeto matemático parábola como noção de lugar geométrico para apropriação de suas diferentes definições, no âmbito da Geometria e da Geometria Analítica. Definimos nossa pesquisa a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009)¹ e da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986)². Dessa forma, escolhemos os princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988)³, para elaborar e aplicar uma sequência com o objetivo de ensinar conteúdos de parábola para alunos do Ensino Médio, que propiciou a coleta de dados desta pesquisa. No que se segue, apresentaremos a estrutura do trabalho.

No primeiro capítulo, mostraremos pesquisas realizadas sobre as Cônicas e apresentaremos os referenciais teóricos que darão suporte à nossa pesquisa: a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Ainda neste capítulo, apresentaremos nossa questão de pesquisa, os objetivos e a metodologia adotada.

No segundo capítulo, abordaremos o estudo do objeto matemático parábola enquanto secção de um cone e lugar geométrico. Ademais, apresentaremos algumas definições matemáticas e um recorte histórico de seu surgimento.

No terceiro capítulo, abordaremos a aplicação e análise da sequência de ensino para alunos do 2º ano do Ensino Médio, à luz de nossa fundamentação teórica.

Por fim, apresentaremos nossas considerações finais, buscando responder nossa questão norteadora da pesquisa, constatar se os objetivos foram atingidos e, finalmente, estabelecer perspectivas para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

¹ Teoria desenvolvida por Raymond Duval, que será abordada no capítulo 1.

² Teoria desenvolvida por Guy Brousseau, que será abordada no capítulo 1.

³ Teoria desenvolvida por Michèle Artigue, que será abordada no capítulo 1.

Capítulo 1: PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos nossa trajetória de estudos que, em nosso entender, está relacionado à temática desta pesquisa. Além disso, apresentamos uma revisão de literatura de trabalhos afins, que contribuíram com a justificativa. Fizemos a opção de apresentar o referencial teórico, visto que nossa questão de pesquisa e os objetivos destacados tinham estreita relação com esse referencial. Ao final, evidenciamos a questão de pesquisa e os objetivos almejados.

1.1 PESQUISAS REFERENTES ÀS CÔNICAS

Apresentaremos uma síntese dos principais aspectos e resultados apontados em alguns trabalhos sobre as Cônicas. Para isso, consultamos os trabalhos de Lima (1999), Macena (2007), Oliveira (2011), Lopes (2011), Silva (2011) e Bordallo (2011).

Macena (2007) desenvolveu sua pesquisa utilizando modelos concretos de representação, enquanto Lima (1999), Silva (2011), Oliveira (2011) e Lopes (2011) fizeram uso de recursos computacionais para auxiliar no desenvolvimento de uma sequência de ensino. Já Bordallo (2011), a fim de compreender os entraves para o ensino de Cônicas no Ensino Médio, realizou um trabalho de resgate histórico do surgimento das Cônicas.

O trabalho de Lima (1999) tinha como objetivo empregar as cônicas como ferramentas para a resolução de equações de terceiro grau. Para isso, priorizou o estudo das cônicas enquanto lugar geométrico e utilizou como recurso didático o *software* de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre* que, segundo a autora, contribui para compreensão pelos sujeitos de pesquisa dos conceitos geométricos das curvas cônicas, colaborando na apreensão do que os livros didáticos intitulam de conjunto de pontos com uma mesma propriedade.

Concordamos em ensinar as cônicas enquanto lugar geométrico e apoiamo-nos na utilização de um *software* ligado à concepção de geometria dinâmica, o que nos permitiu um estudo por meio de manipulações e conjecturas dos conceitos geométricos e algébricos.

Macena (2007) analisou as possibilidades didáticas do uso da investigação em sala de aula, a partir de atividades matemáticas organizadas para instaurar conflitos, insatisfações, curiosidades e dúvidas. Além disso, priorizou o estudo das secções cônicas na geometria analítica em conexão com a história da matemática. Os sujeitos envolvidos na pesquisa construíram e manipularam tabuleiros de bilar elíptico, parabólico e hiperbólico. Para alcançar

o objetivo de analisar e gerar possibilidades de uso da investigação em sala de aula, a autora buscou aporte teórico nas concepções referentes à aprendizagem significativa em conexão com a investigação em história da matemática.

Segundo a autora, a pesquisa foi fundamentada em três pontos pedagógicos: a investigação em sala de aula, a aprendizagem com significado e a história da matemática. Os resultados das atividades propostas e postas em prática mostraram a eficácia e a eficiência da metodologia na construção do conhecimento. Também mostraram que a investigação em sala de aula conduz os envolvidos a olhar de forma mais globalizante as origens e os métodos, além das várias representações da matemática, conduzindo-os a uma aprendizagem significativa.

Concordamos com a concepção de investigação em sala de aula e acrescentamos a necessidade de ampliar o estudo das cônicas no domínio da geometria, por meio de construções geométricas.

Oliveira (2011) tinha como objetivo construir Objetos de Aprendizagem e analisar como, ao usá-los, os estudantes identificam e conceituam uma cônica (Elipse, Hipérbole e Parábola). Segundo Wiley, citado por Souza et al. (2007, p.59-60), os Objetos de Aprendizagem (AO) são “definidos como qualquer entidade, digital ou não digital, que pode ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o aprendizado apoiado pela tecnologia” (OLIVEIRA, 2011, p.18).

Para isso, contou com a utilização do *software* dinâmico GeoGebra no processo de construção e reconhecimento de cada cônica. Analisou e validou os resultados apoiados na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), a partir do conceito das cônicas (Elipse, Hipérbole e Parábola). Sem antecipar sua definição, permitiu os estudantes trabalhar num processo de exploração. Ao final, o autor concluiu que, no Ensino Médio, pode-se privilegiar o estudo de conceitos sobre cônica, permitindo o estudante analisar e identificá-la sem a necessidade de chegar à sua equação.

Aproximamo-nos do trabalho de Oliveira (2011) no que se refere à proposição de situações didáticas baseadas em Brousseau, no entanto enquanto o autor trata de cônicas, optamos por trabalhar apenas com a parábola. Outro ponto de aproximação foi a escolha do mesmo software: Geogebra. Ambos temos como objetivo conduzir o aluno a ser agente da construção de seus conhecimentos como sugere a Teoria das Situações Didáticas.

Já Lopes (2011) tinha como objetivo apresentar um texto didático com inovações para o ensino das cônicas no nível universitário. O trabalho apresenta uma investigação histórica sobre as cônicas e um estudo destas curvas no plano sob três aspectos: o geométrico, o analítico e o da definição unificada através da propriedade foco-diretriz. Nas três abordagens, os principais resultados são analisados computacionalmente por meio do programa Geogebra.

Nas considerações finais, há contribuições, exposição sobre as origens históricas, tratamento das cônicas do ponto de vista geométrico, análise do conceito de excentricidade através da definição foco-diretriz e de sua relação com as formas destas curvas, definição das cônicas em coordenadas polares, abordagem computacional dos principais resultados da teoria das cônicas e importantes aplicações do tema. Em relação ao tratamento computacional, a escolha do *software* gratuito possibilita sua utilização nas instituições de ensino. De fato, o trabalho de Lopes (2011) é uma fonte rica de consulta para elaboração de sequências de ensino que utilizam o recurso didático do *software* Geogebra.

Já Bordallo (2011) teve como objetivo contribuir com o estudo da história do ensino de matemática no Brasil, especialmente no Ensino Médio. A autora investigou as seções cônicas na matemática escolar e suas transformações nos programas de ensino e nos livros didáticos desde 1892 até os dias de hoje. Objetivou-se, assim, encontrar unidade em sua trajetória na história do ensino. Nas considerações finais, mostra que, historicamente, as cônicas surgiram com tratamento sintético de forma fragmentada, obtidas individualmente de um cone diferente.

Por fim, Silva (2011) propõe aos professores da rede estadual de São Paulo uma sequência de atividades, em um curso de formação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no primeiro semestre de 2011, no qual o pesquisador foi responsável pelas aulas sobre seções cônicas. As atividades foram baseadas no currículo de Matemática do Estado de São Paulo, intituladas Atividades complementares ao material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Elaboraram-se oito atividades sobre seções cônicas, acompanhadas de perguntas reflexivas, enfatizando seu aspecto de lugar geométrico.

O autor afirma que o material distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo parece fazer uma abordagem das seções cônicas do ponto de vista algébrico. Na primeira atividade, abordou-se a construção das cônicas por meio de dobraduras feitas em papel vegetal, e nas demais o uso de tecnologias digitais. Ao final da pesquisa, concluiu-se que os professores possuem uma visão cartesiana da aprendizagem dos alunos, eles de construção linear, ordenados e hierarquizados, aprendem e ensinam aos seus alunos e

carregam implicitamente a ideia de “pré-requisitos”, sem a qual os alunos não podem aprendê-las.

Após a leitura do trabalho de Silva (2011), consultamos materiais elaborados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, “Caderno do Professor” e “Caderno do Aluno”, a partir dos quais constatamos a limitação do ensino de cônicas às equações das curvas, especialmente no estudo de parábola, observamos na definição uma ênfase na representação gráfica. Notamos também a ausência de menção ao estudo das cônicas enquanto lugar geométrico, “Parábola: Em geral, quando representamos graficamente pares (x, y) de grandezas tais que y é diretamente proporcional ao quadrado de x ($y = kx^2$, k constante), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola”. (SÃO PAULO, 2014, p. 48).

Concordamos com Silva (2011) em partir de uma atividade de construção das cônicas por meio de dobraduras em papel vegetal. Entendemos ser uma atividade sem intenções claras para o aluno, mas possibilita a discussão, ao final, de propriedades matemáticas implícitas ao procedimento das dobras que, se bem exploradas, podem render bons conhecimentos sobre os objetos matemáticos parábola, elipse e hipérbole. Gardner (2002) sugere como obter uma parábola “muito bonita” por intermédio de dobra no papel.

Marcamos num papel translúcido um foco num ponto qualquer e uma diretriz. Dobramos o papel várias vezes, de forma que, ao dobrá-lo, a reta passe pelo ponto. Cada vinco será tangente à mesma parábola. Se o papel for opaco, podemos usar a sua borda para diretriz, dobrando-a de cada vez de maneira a encontrar o foco. (GARDNER, 2002, p.253)

Aproximamo-nos de Silva (2011) quando propõe a construção de cônicas por meio de dobraduras em papel vegetal, definindo assim as cônicas como lugar geométrico dos pontos que obedecem a uma determinada propriedade. Em nossa pesquisa, enfatizaremos a parábola, mas iremos além da definição por lugar geométrico, trabalhando também com um referencial cartesiano.

A dobradura propicia o levantamento de questões a respeito do reconhecimento da curva e da propriedade matemática de equidistância implícita durante todo processo de dobras no papel, até a formação da curva, que contribuirá para a transposição desse processo de construção para o ambiente da geometria dinâmica.

Nesse contexto, propiciaremos a apreensão de diferentes definições para parábola a partir da noção de lugar geométrico, cujo início se dá com a construção no registro figural de uma parábola por meio de dobraduras, seguindo-se ao ambiente de geometria dinâmica com

auxílio do *software* Geogebra, e por fim ao domínio da Geometria Analítica com o registro gráfico e o registro algébrico. Ademais, buscamos aportes teóricos na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009).

A partir da teoria de Duval (2009), analisaremos e validaremos a influência da articulação entre diferentes tipos de registros de representação semiótica do objeto matemático parábola: os registros figurais, algébricos, gráficos cartesianos e a língua materna. Na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), com aportes teóricos para análise e validação do estudo da situação didática, serão observadas as interações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber matemático.

Assim, a relevância de nossa pesquisa para área de Educação Matemática está em buscar avançar nas discussões sobre ensino e aprendizagem de Cônicas, o que nos leva a estudar esses teóricos.

1.2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste item, apresentaremos as teorias que darão suporte para nossa pesquisa: a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009).

1.2.1 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas foi elaborada por Guy Brousseau (1986, apud ALMOULOU, 2007) como um modelo teórico para construção, análise e experimentação de situações didáticas. O seu objetivo é estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem, tendo como objeto central a situação didática em que são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber.

Almouloud (2007, p.33), tomando como referência Brousseau (1986), afirma que três hipóteses fundamentam a Teoria das Situações Didáticas. Na primeira hipótese, destaca que “a aprendizagem do aluno decorre de processos de adaptação, desequilíbrios, contradições, mediante situações problemas”. O aluno aprende adaptando-se a um meio, no qual o saber se manifesta pelas novas respostas. Na segunda hipótese, em que “a aquisição do conhecimento matemático pelo aluno ocorrerá se houver intenção didática”, o professor deverá criar e organizar um meio que proporcione a aprendizagem do conhecimento matemático. Já na terceira hipótese: “o meio e as situações didáticas precisam estar engajadas com os saberes

matemáticos presentes no processo de ensino e de aprendizagem”, nota-se que o meio sem intenções didáticas não é suficiente para permitir a aquisição do conhecimento pelo aluno.

Almouloud (2007, p.33) acrescenta uma quarta hipótese, tomando como referência Bachelard (1938, p.17), “no fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior”. Logo, um novo conhecimento constrói-se a partir de conhecimentos antigos e também contra estes mesmos.

Brousseau (2008, p.19) define **situação** como “o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável”. Aqui, a situação didática é caracterizada por um jogo de interações entre professor e problema proposto, tendo a aprendizagem como objetivo. Para isso, o professor deve fazer a *devolução*⁴ ao aluno de uma **situação adidática**, que segundo Almouloud (2007), como parte essencial da **situação didática**, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas é planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis à apropriação do novo saber a se ensinar.

Almouloud (2007), tomando como referência Brousseau (1986) ressalta as seguintes características para uma situação “adidática”:

O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria; o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às *razões didáticas*; o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s). (ALMOULOU, 2007, p.33, *itálico do autor*)

Na situação “adidática”, o aluno aceita o problema e produz sua resposta, o professor não interfere e nem sugere o conteúdo. Por sua vez, o aluno adquire novos conhecimentos, justificados pela lógica interna da situação e construídos sem ter como recurso razões didáticas.

Para Brousseau (2008) a situação “adidática” existirá quando:

[...] o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica

⁴ Segundo Almouloud (2007, p.35) a noção de *devolução* é definida “como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência”.

interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (BROUSSEAU, 2008, p.35)

A elaboração da situação demanda preparação do professor que deverá ter clareza nos objetivos do ensino, no conteúdo e nas variáveis didáticas, segundo Almouloud (2007, p.36), as variáveis didáticas são “aquelas para as quais as escolhas de determinados valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas”. Para o autor a determinação dessas variáveis são pontos importantes para a construção das situações. Para isso, o professor formulará uma situação-problema, considerando os conhecimentos prévios do aluno: os saberes que os alunos já possuem e aos quais poderá recorrer a fim de resolver a situação-problema.

De acordo com Almouloud (2007, p.37 e 38), para analisar o processo da aprendizagem, na Teoria das Situações Didáticas, observa-se e decompõe-se esse processo em quatro dialéticas interligadas, quando o saber assume funções diferentes e o aluno não tem a mesma relação com o saber.

Na dialética da ação, o professor propõe uma situação ao aluno de modo que este possa agir e refletir sobre o resultado obtido e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do professor. Dessa maneira, o aluno interage com a situação por meio de uma ação de caráter experimental sem se preocupar com a teoria que justifique o resultado.

Na dialética de formulação, o professor espera que o aluno, em linguagem comum ou matemática, elabore uma comunicação oral ou escrita das estratégias utilizadas para encontrar a solução, mas sem a intenção de justificar a validade de sua resposta.

Já na dialética de validação, o aluno deve mostrar a validade do modelo por ele criado a partir de justificativas em linguagem natural ou simbólica dos resultados encontrados. O professor organiza e promove a socialização do saber, mediando os debates entre os alunos e fazendo-os refletir sobre a certeza das afirmações formuladas no momento da ação e da formulação.

E por fim, na dialética da institucionalização, o professor revela aos alunos os saberes matemáticos envolvidos e o objeto de estudo, explicitando definições, linguagem, notações, teoremas, utilização e funcionamento desse saber, ao possibilitar a resolução de problemas em outras situações.

Nos parágrafos anteriores, apresentamos os aspectos relevantes da teoria para embasar as análises *a priori* e *a posteriori* da sequência didática elaborada.

Na sequência, faremos um estudo da Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, para quem, estudar os fenômenos relativos ao conhecimento matemático, torna-se impossível sem recorrer à noção de representação desse conhecimento.

1.2.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica tem cunho cognitivo e originou-se nos trabalhos do filósofo e psicólogo Raymond Duval. Surgiu em pesquisas relativas à aquisição da cultura matemática e à organização de situações de aprendizagem.

O modelo teórico desenvolvido por Duval (2009) está baseado no funcionamento cognitivo do pensamento, em termos da mudança de registros de representação semiótica, em que a análise do conhecimento matemático é essencialmente uma análise das produções referentes às suas representações semióticas.

O funcionamento cognitivo do pensamento, segundo Duval (2009, p.15), está apoiado em dois elementos: a *sémiosis* – “apreensão ou produção de uma representação semiótica” – e a *noésis* – “atos cognitivos, como apreensão conceitual de um objeto, discriminação de uma diferença ou compreensão de uma inferência, etc.” Dessa forma, Duval (2009) afirma que a *noésis* (formação do conceito) só acontece quando há a *semiósisis* (representação com diferentes sistemas semióticos).

As representações semióticas, segundo Duval (1993, p.39 apud DAMM, 2002, p.143), “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento”. Nota-se, assim, a importância da pluralidade de sistemas semióticos para um mesmo objeto matemático.

Duval (2009, p.40-41) afirma que alguns autores caracterizam as representações recorrendo a uma das duas oposições clássicas, ora a oposição externa/interna: “a oposição entre aquilo que, de um indivíduo, de um organismo, ou de um sistema, diretamente visível e observável e aquilo que, ao contrário não é”; ora a oposição consciente/não-consciente: “a oposição entre o que, de uma parte, aparece a um sujeito e que ele nota, e, de outra parte, o que lhe escapa completamente e que ele não pode notar”.

As representações externas “são representações semióticas, que preenchem uma função de comunicação”, e “uma representação interna pode ser consciente ou não-

consciente, enquanto que uma representação consciente pode ser, ou não exteriorizada” (DUVAL, 2009, p.43).

A noção de representação semiótica refere-se a diferentes sistemas semióticos, que devem permitir o cumprimento de três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação:

Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma *representação de alguma coisa* em um sistema determinado. Em seguida transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que essas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p.36-37, *italico do autor*).

Nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades fundamentais, e os que permitem são chamados de registros de representação semiótica. Nesse sentido, Duval (1999, apud ALMOULOU, 2007, p.71) define esse registro como “um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente”.

Duval (2009) defende que não se pode ter compreensão em matemática se não distinguirmos um objeto de sua representação, principalmente porque os objetos matemáticos são abstratos, portanto, para se falar deles e estabelecer uma comunicação em Matemática, é necessário usar:

[...] representações através de símbolos, signos códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo **registros de representação** diferentes de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 2002, p. 137, grifo nosso).

A pluralidade dos sistemas semióticos permite uma diversificação de representações de um mesmo objeto e ressalta a importância da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano (DUVAL, 2009).

Segundo o autor, para que ocorra a compreensão de um objeto matemático é necessária a coordenação de ao menos dois registros, sendo que para a análise do funcionamento cognitivo da compreensão existem dois tipos diferentes de transformações de representações semióticas: a **conversão** e o **tratamento**.

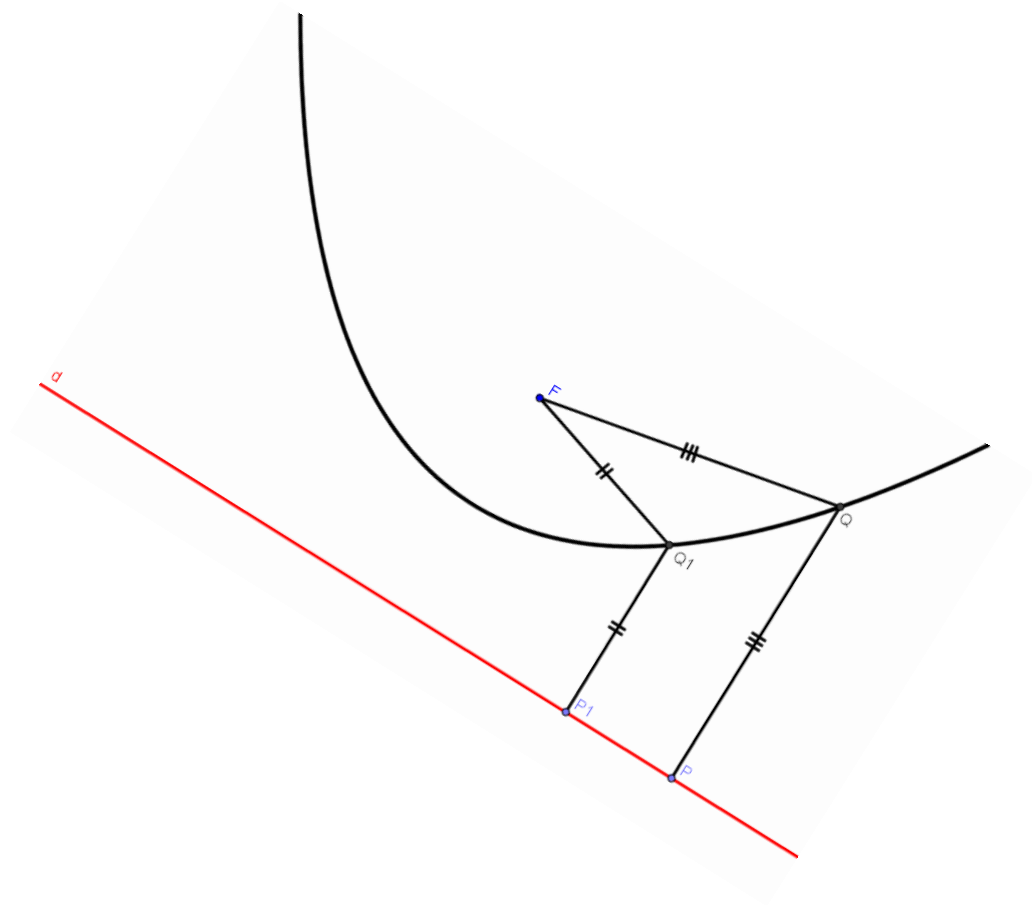
Um **tratamento** é a transformação de uma representação em uma outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados. Uma **conversão** é a transformação de uma representação de um registro D em uma outra representação de um registro A, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas

mudando, de fato, o conteúdo da representação (DUVAL, 1999, p.30, apud ALMOULOU, 2007, p.72, grifo nosso).

O tratamento de uma representação é a transformação da representação em outra equivalente, mas no mesmo registro, ao passo que a conversão é a transformação da representação em outra equivalente, mas em outro registro. Como exemplo de tratamento em nosso trabalho, apresentamos: $P(x, -2)$, $F(2,3)$ e $Q(x,y)$, para estabelecer a relação e a partir dessa relação escrever a expressão algébrica $d(P,Q) = d(Q,F) \Rightarrow \sqrt{(x - x)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} \Rightarrow 4y = x^2 - 4x - 6y + 9 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 4x + 9}{10}$ que foi transformada na representação $y = \frac{x^2 - 4x + 9}{10}$, isto é, mudou-se a representação, mas esta permaneceu no mesmo registro: o registro algébrico.

Agora, analisaremos uma situação de conversão: a figura 1 representa o registro figural da parábola (partida) e o registro de linguagem natural (chegada): “O lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta d , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz e chamado foco é uma parábola”.

Figura 1: Registro Figural de uma parábola

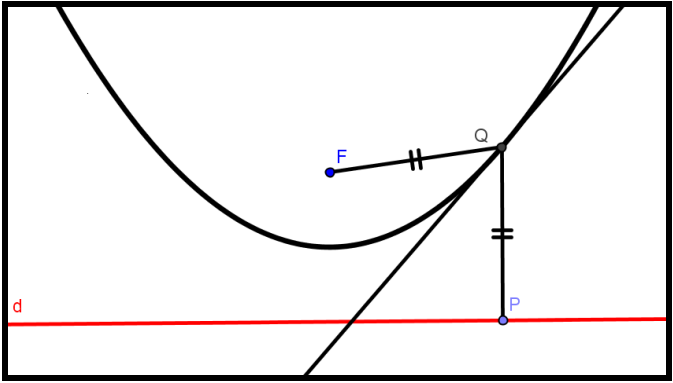
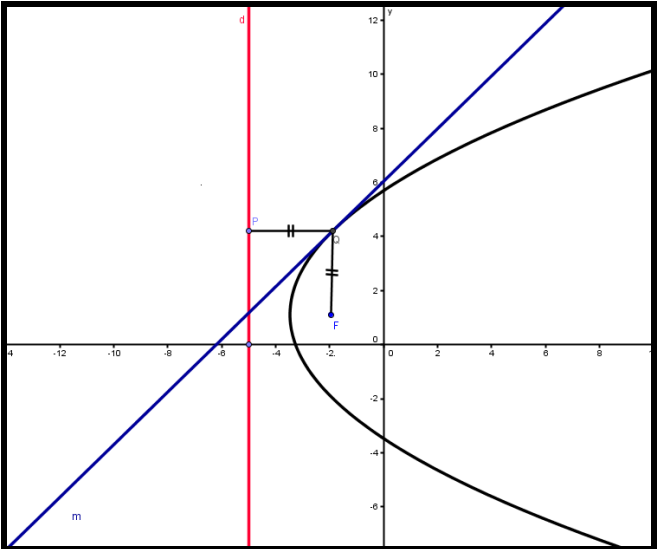


Fonte: Produção do autor

A conversão ocorreu, pois a representação do registro figural foi transformada na representação do registro de linguagem natural, isto é, houve uma mudança de representações, com troca de registros: do registro figural passou para o registro de linguagem natural.

De acordo com Duval (2009), os registros de representação na matemática podem ser: língua natural, sistemas de escritas numéricas e algébricas, figurais e gráficos, os quais serão trabalhados mais adiante. Focaremos nosso trabalho, em quatro tipos de registros de representação semiótica, o registro em língua natural, o registro figural, o registro algébrico e o registro gráfico. No quadro 1, apresentamos representações para o objeto matemático parábola, nesses diferentes registros.

Quadro 1: Registro de Representação Semiótica de uma parábola

Registro figural	
Registro da língua natural	O lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta d, chamada diretriz, e de um ponto F, não pertencente à diretriz e chamado foco é uma parábola.
Registro gráfico	
Registro algébrico	$d(F, Q) = d(Q, P)$ ou $y^2 = 6x + 2y + 20$

Fonte: Elaborado pelo autor

Caracterizamos em nosso trabalho o registro figural de uma parábola como a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto, construídos seja com régua e compasso, ou com um *software*, considerando em ambos as unidades significantes (uma reta e um ponto qualquer não pertencente à ela) do objeto.

No que se refere ao registro em língua natural Duval (2009) defende que se trata “de um registro à parte” e explica que:

Não somente em razão de sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela oferece, mas também em razão de sua prioridade genética sobre os outros registros e de seu papel único em relação à função meta-discursiva de comunicação. (DUVAL, 2009, p.105).

Nesse sentido, reconhecemos um registro em língua natural para uma parábola a partir do vocabulário utilizado para definir esse objeto de maneira que permita explicar outras significações do que é representado.

O registro algébrico para uma parábola deve permitir a identificação desse objeto a partir de equações, tais como as que identifiquem suas propriedades, quanto as que identifiquem sua curva. E por fim, o registro gráfico de uma parábola que permite representar por meio de pares ordenados (a, b) sua curva.

A importância da compreensão e diferenciação entre **tratamento e conversão** implica na compreensão da análise cognitiva em investigação na didática da matemática. De acordo com Duval (2009), a passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação não tem nada de evidente e espontâneo para a maior parte dos alunos. Nesse sentido, Damm (2002) explica que:

No ensino de matemática, o problema se estabelece justamente porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis, mas sim a *coordenação entre estes vários registros de representação*. (DAMM, 2002, p.147).

Para Duval (2009), a existência de problemas é específica às mudanças de registro entre eles, visto que a possibilidade de não-congruência entre as representações de um mesmo objeto enfatiza sistemas semióticos diferentes.

[...] a passagem de uma representação a uma outra se faz espontaneamente quando elas são congruentes, quer dizer, quando as três condições seguintes são preenchidas: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significativa da representação de partida em uma só unidade significativa na representação de chegada. (DUVAL, 2009, p.18).

Para determinar se duas representações são congruentes ou não de acordo com Duval (2009)

[...] é preciso começar por segmentá-las em suas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondência. Ao final dessa segmentação comparativa, pode-se então ver se as unidades significantes são, em cada um dos dois registros, unidades significantes simples ou combinações de unidades simples. (DUVAL, 2009, p.66).

Essa citação auxilia-nos a compreender a utilização dos registros frente ao problema da aprendizagem, considerando que certas mudanças de registros são mais fáceis comparadas a outras. A conversão de registro, segundo Almouloud (2007, p.79), “permite definir variáveis dentro de um registro, com objetivo de tornar visíveis as unidades pertinentes dentro de uma representação semiótica pertencente a esse registro, tornando-se, então, um instrumento de análise do funcionamento representacional de um registro”.

Frequentemente, os alunos não reconhecem o mesmo objeto de representações em sistemas semióticos diferentes, mesmo após, no processo de ensino, terem sido bastante utilizados. Assim, essas transformações têm revelado uma tarefa difícil para muitos alunos em diversos níveis de ensino, e, às vezes, até impossível (DUVAL, 2009).

Uma vez conhecido nosso referencial teórico, apresentaremos a justificativa de nossa pesquisa.

1.3 JUSTIFICATIVA

Escolhemos a parábola por já ser conhecida pelo aluno desde o Ensino Fundamental como representação gráfica de uma função quadrática, a qual está presente na totalidade dos livros didáticos, mas pouca atenção é dada aos métodos de como obtê-la. Nessa fase do ensino, o objeto de estudo matemático é a função quadrática e sua representação gráfica é dada por uma curva chamada de parábola, que representa o comportamento da função no plano cartesiano.

É evidente a contribuição dos trabalhos consultados e comentados na sessão 1.1, para nossa pesquisa, principalmente quanto: à definição dos sujeitos de pesquisa, devido à importância e pertinência do tema Cônicas no currículo do Ensino Médio, e à elaboração de uma sequência de ensino que prioriza o estudo das cônicas como lugar geométrico, focalizando especialmente a parábola. Além de sua importância histórica, o estudo das seções cônicas é bastante interessante, uma vez que suas propriedades permitem não só uma

abordagem do ponto de vista algébrico, como é visto mais comumente, mas também através de construções geométricas e de resultados decorrentes da geometria euclidiana.

Salientamos que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) faz menção à necessidade de caracterizar e distinguir o objeto de suas representações:

Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Baskara) e a **identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz)**. (BRASIL, 2006, p. 73, grifo nosso).

Nessa perspectiva, temos a hipótese: o aluno do Ensino Médio cria a falsa ideia de que o objeto matemático parábola limita-se à representação gráfica de uma função quadrática. Acreditamos nesse fato, porque o estudo das Cônicas, quando ocorre, é iniciado somente no terceiro ano do Ensino Médio e, geralmente, é limitado a uma ou duas semanas de estudo.

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa, a opção adequada é o estudo das definições de parábola a partir da noção de lugar geométrico. A caracterização dessa curva está baseada em duas definições: Definição 1 - “O lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta d , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz, chamado foco é uma parábola”, e Definição 2 - “lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r é uma parábola”.

A opção de caracterizar a parábola por meio das definições 1 e 2 vem ao encontro das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002, p.92) de Matemática, que também apontam, entre os objetivos do pensamento geométrico, a exploração de situações de aprendizagem, e levam o aluno a resolver situações de representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

[...] representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras. Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos; reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características; Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa; Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles (BRASIL, 2002, p.125).

Complementamos e associamos a essa ideia o domínio da geometria e da geometria analítica, e entendemos que o aluno deve perceber as possibilidades de abordagem de um mesmo problema através de diferentes domínios da matemática, de acordo com suas características.

Nessa perspectiva de estudo, utilizaremos o recurso didático pedagógico do *software* Geogebra, o que dentro da concepção de geometria dinâmica permite o estudo de diferentes conteúdos matemáticos abordados através de manipulações e conjecturas, proporcionando maior visualização e compreensão dos conceitos geométricos e algébricos. Optamos por esse *software* por reunir recursos de geometria e álgebra, além de oferecer livre acesso ao público.

Nosso objetivo é mediar a apropriação pelo aluno das definições de parábola enquanto lugar geométrico, a partir de uma sequência de ensino, e permitir que, ao resolver as atividades propostas, os alunos realizem os tratamentos e conversões dos Registros de Representação Semiótica pertinentes ao objeto a ser estudado. Esperamos ainda que os alunos atuem no processo de construção de novos conhecimentos matemáticos e articulem os Registros de Representação Semiótica, pois compreensão em Matemática, segundo Duval (2009), supõe a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica.

Orientados pela leitura de Duval (2009), em concordância com as suas ideias sobre a necessidade dos alunos desenvolverem a aprendizagem, em pelo menos dois diferentes registros de representação semiótica, e saberem coordenar a mudança entre estes registros, proporemos algumas situações que contemplem essas condições e permitam alcançar os objetivos específicos:

- a) Fazer com que os alunos representem a parábola em diferentes registros de representação semiótica.
- b) Fazer com que efetuem tratamentos e conversões nos registros de representação semiótica.

Dessa maneira, procuramos responder a seguinte questão:

Uma sequência de ensino que articula a conversão de registros a partir da noção de lugar geométrico resulta na apropriação por parte do aluno de conhecimentos sobre parábola?

Para respondê-la, partimos do pressuposto de que a sequência didática contribuirá para a apreensão das diferentes definições de parábola como mostraremos neste trabalho.

Para responder nossa questão de pesquisa, bem como atingir nossos objetivos, apresentaremos a seguir a metodologia e os procedimentos. Uma vez conhecido nosso referencial teórico, o problema de pesquisa e os objetivos, apresentaremos a metodologia e os procedimentos.

1.4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Nossa proposta de pesquisa tem como instrumento uma sequência didática envolvendo as definições de parábola a partir da noção de lugar geométrico no domínio da Geometria e da Geometria Analítica. A construção e análise das atividades nesse trabalho terão por base os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1988 apud ALMOULOU, 2007, p. 171) que, segundo a autora:

é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.

A Engenharia Didática possibilita investigar aspectos do processo de aprendizagem de matemática, interessando-se pela concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. Segundo Almouloud (2007, p. 171), a Engenharia Didática é caracterizada como “pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados”.

Na Engenharia Didática, sua validação está associada à comparação entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*, que segundo Almouloud (2007, p.171) “é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste”.

Segundo Artigue (1988, apud ALMOULOU, 2007, p.174), a Engenharia Didática tem quatro fases distintas: análises prévias ou preliminares; construção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia; experimentação, e análise *a posteriori* – validação, que explicaremos nos parágrafos em consonância com nosso trabalho.

Para a autora segundo Almouloud (2007), a fase das análises prévias ou preliminares apoia-se em três dimensões: a didática relacionada ao sistema de ensino e pontos de vista, que em nossa pesquisa está contemplada na análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e publicações acerca do tema Cônicas, como dissertações na área da Educação Matemática, com o objetivo de obter subsídios para a elaboração da sequência didática; a epistemológica que visa à análise histórica e epistemológica dos conteúdos, abordados na parte de recorte histórico sobre as Cônicas, e, por fim, a dimensão cognitiva associada a características cognitivas dos alunos, tais como: dificuldades, procedimentos e concepção dos alunos.

Na fase seguinte a construção e análise *a priori* do conjunto de atividades, que compõe as situações, esclarece o objetivo da atividade, a análise dos conhecimentos necessários para a resolução da atividade, as possíveis estratégias esperadas dos alunos na resolução da atividade e as possíveis dificuldades.

Na fase de experimentação a autora defende segundo Almouloud (2007) a importância respeitar as escolhas feitas na análise *a priori*, a fim de evitar o fracasso da engenharia. Assim, aplicamos a sequência didática que concebemos aos alunos e, após cada sessão, pudemos revisar e corrigir as escolhas feitas, a partir de uma breve análise *a posteriori*. A aplicação da sequência e a correspondente observação dos sujeitos envolvidos estão apoiadas em tudo o que foi planejado e elaborado na análise *a priori*.

A análise *a posteriori* e validação, última fase da Engenharia Didática, segundo Artigue (1988, apud ALMOULOU, 2007), depende da interpretação dos dados e das informações coletadas durante a experimentação, que será analisada pelo pesquisador e confrontada com a análise *a priori*. Em nossa pesquisa, a análise é baseada nos protocolos de observação, na análise *a priori*, feita para vincular os fatos observados aos objetivos definidos *a priori*, a partir do referencial teórico.

Nosso procedimento metodológico baseia-se na aplicação da sequência didática para alunos do segundo ano do Ensino Médio, que foram organizados em duplas e trios para estabelecer troca de informações. O experimento foi realizado em uma sala com computadores. Os dados foram coletados mediante observações gravadas em áudio e vídeo, realizadas durante os encontros, com a intenção de suprir possíveis dúvidas. Realizaram-se também protocolos, em que os alunos anotaram suas resoluções e conclusões.

Conhecido nosso problema de pesquisa e a metodologia adotada, apresentaremos os estudos sobre parábola que nos auxiliaram na elaboração da sequência didática.

Capítulo 2: Estudo do Objeto Matemático

Neste capítulo, apresentaremos um estudo da parábola, a partir das contribuições dadas pelo geômetra grego Apolônio de Perga em um breve resgate histórico e a parábola enquanto lugar geométrico no ambiente da geometria dinâmica.

2.1 Estudo da parábola a partir da secção de um cone.

O interesse pelo estudo das cônicas, provavelmente, surgiu por volta do século IV a.C. e muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo destas curvas no decorrer dos séculos. Dentre os matemáticos que se dedicaram às Cônicas está Apolônio de Perga, que viveu por volta do século III a.C.

Boyer (1996) e Bongiovanni (2001) consideram que as cônicas de Apolônio constituem um trabalho amplo e extraordinário e afirmam que antes de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções a partir de três tipos de cone, conforme o ângulo no vértice (agudo, reto ou obtuso). De acordo com os autores, Apolônio atribuiu novos nomes às curvas, tomando como base a interpretação geométrica das expressões matemáticas obtidas para cada curva em um cone duplo.

Bongiovanni (2001) afirma que Apolônio concebe as cônicas como secções de um cone reto ou oblíquo por um plano secante (figura 2) de acordo com a inclinação do plano obtém-se uma curva denominada elipse, parábola ou hipérbole, isto é, se o plano é paralelo a uma geratriz do cone temos uma parábola.

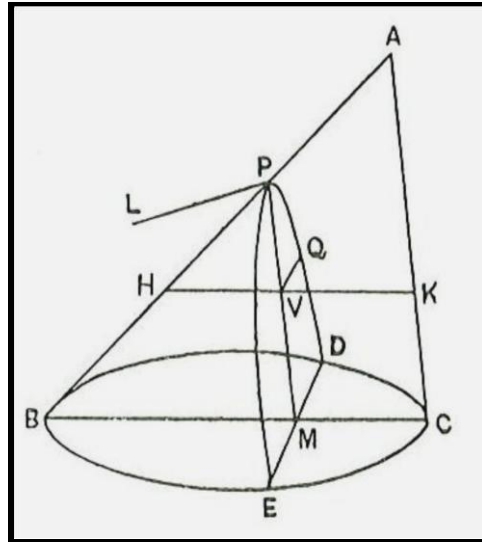
Figura 2: Parábola a partir da secção de um cone reto



Fonte: Bongiovanni (2001, p.34)

Lopes (2011) apresentou a demonstração e as conclusões de Apolônio a partir da secção de um cone oblíquo (figura 3) que:

Figura 3: Parábola a partir da secção de um cone oblíquo definida por Apolônio



Fonte: Lopes (2011, p.42)

(a) O segmento BC é base do triângulo axial $\triangle ABC$. **(b)** O segmento DE no plano da base é perpendicular a BC ou ao prolongamento de BC. **(c)** O segmento PM é a interseção da seção plana com o triângulo $\triangle ABC$. **(d)** O segmento AF para os dois últimos casos é paralelo a PM e encontra com BC ou com um prolongamento de BC. **(e)** O ponto Q é um ponto qualquer pertencente a curva com o segmento QV perpendicular ao plano do triângulo axial. Assim, QV é perpendicular PM no ponto V. **(f)** O segmento HK é o diâmetro da seção circular determinada por um plano que contém o segmento QV sendo este plano paralelo a base BC. O segmento HK intercepta o lado AB em H e AC em K. QV é perpendicular HK no ponto V. **(g)** P ou P' é interseção da curva com um dos lados do triângulo $\triangle ABC$. **(h)** PL é um segmento perpendicular a PM. PL está contido no plano perpendicular a seção cônica que passa por P e seu comprimento será posteriormente definido. **(i)** O retângulo PVSL está situado num plano perpendicular ao plano da seção cônica. **(j)** R é o ponto de interseção dos segmentos V S e P'L ou dos prolongamentos destes dois segmentos. O segmento PL é de extrema importância para caracterização das curvas. É um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial $\triangle ABC$ e dos segmentos AP e AF da seguinte forma: **(1)** Quando a secção for parábola, $\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$. (LOPES, 2011, p.42)

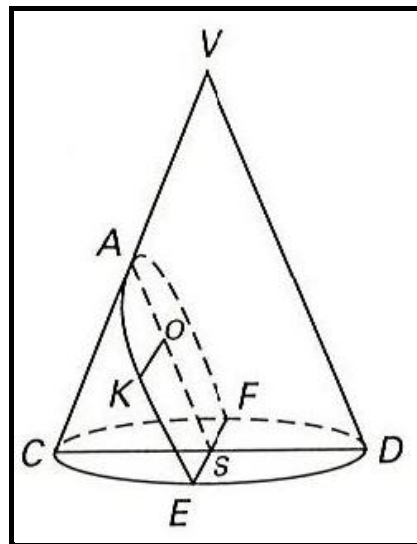
O autor complementa a demonstração enunciando “Seja Q um ponto qualquer da curva gerada por uma das três secções. Sabe-se que HK é o diâmetro da circunferência que passa pelo ponto Q e o segmento QV é perpendicular a HK no ponto V então tem-se que $QV^2 = HV \cdot VK$ ”. Essa relação é válida para qualquer uma das três curvas. Tomemos especificamente o caso da parábola a partir da relação $QV^2 = HV \cdot VK$. Lopes (2011) apresentou a seguinte demonstração:

Se PM for paralelo (notação $\parallel$) ao lado AC do triângulo axial, como $PM \parallel AC$ e $HK \parallel BC$, então, os triângulo $\triangle ABC$, $\triangle HPV$ e $\triangle AHK$ são semelhantes. Daí tem-se que $\frac{HV}{PV} = \frac{BC}{AC}$ (3) e $\frac{VK}{PA} = \frac{BC}{BA}$ (4) Dividindo ambos os membros da equação $QV^2 = HV \cdot VK$ por $PV \cdot PA$ obtém-se, $\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{HV \cdot VK}{PV \cdot PA}$ (5) substituindo (1) e (4) em (5) encontra-se $\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC} = \frac{PL}{PA}$. Logo $Q^2 = PL \cdot PV$ que interpretando geometricamente pode-se dizer que a área do quadrado de lado QV é igual a área do retângulo de lados PL e PV. Disso, a curva EPD é denominada de parábola que vem do grego *paraboli*, ou seja, aplicação sem falta ou excesso. (LOPES, 2011, p.44).

Lopes (2011) afirma que Apolônio mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares à geratriz de um cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas variando a inclinação do plano de secção. Assim, Apolônio provou uma importante generalização: que o cone não precisa ser necessariamente reto, mas pode ser também oblíquo ou escaleno.

Segundo Lopes (2011) para definir as três curvas, parábola, elipse e hipérbole, Apolônio primeiro cortou o cone por um plano através do eixo. A interseção desse plano com a base do cone é o diâmetro CD, conforme a figura 4.

Figura 4: Parábola a partir da secção de um cone



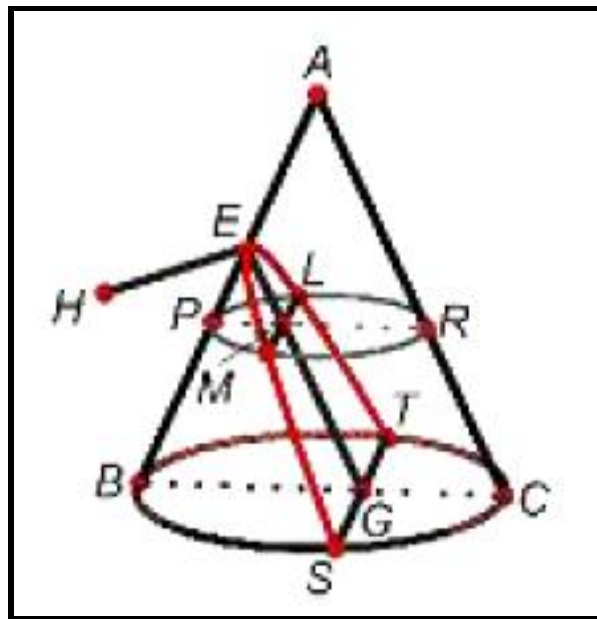
Fonte: Lopes (2011, p. 41)

O triângulo resultante $\triangle VCD$ é chamado de triângulo axial. A parábola, a elipse e a hipérbole são então definidas como as interseções deste cone por determinados planos que cortam o segmento CD ou o prolongamento de CD sobre uma reta EF. A reta AS é a interseção dos cortes planos com o triângulo axial. Assim, as cônicas são definidas da seguinte forma: Se AS é paralelo ao lado do triângulo axial, a secção é uma parábola; Se AS interceptar ambos os lados do triângulo axial, a secção é uma elipse; Se AS interceptar um dos lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado dado além de V, a secção é uma hipérbole. Nesta situação, existem dois

ramos da curva, ao contrário da hipérbole gerada pelo cone de ângulo obtuso. (LOPES, 2011, p. 41).

Piza (2009) examinou, mais atentamente, como Apolônio determinou a parábola obtida a partir de uma secção plana e deduziu a propriedade fundamental da parábola, chamada de *symptome* da parábola. A figura 5 foi utilizada pela autora para deduzir a *symptome* da parábola. Seja o plano que contém os pontos E, M e L paralelo ao plano que contém a geratriz AC, então a intersecção do plano que contém os pontos E, M e L com o cone é uma curva chamada parábola.

Figura 5: Parábola a partir da secção plana

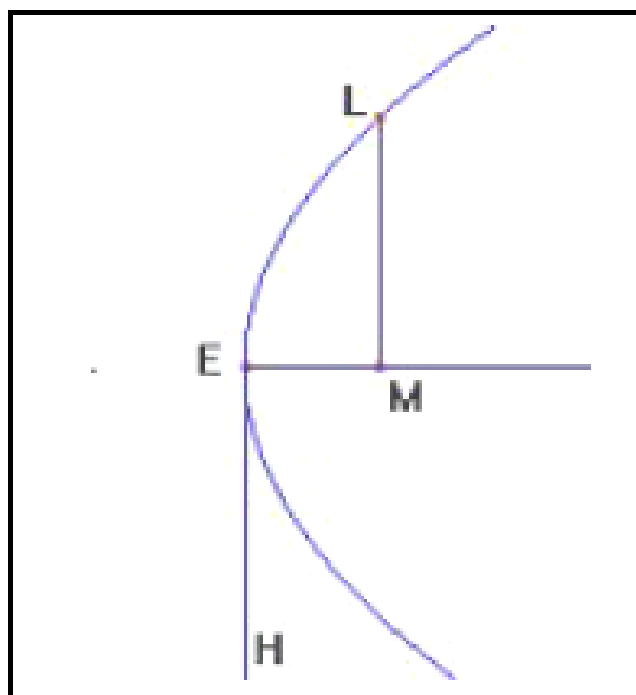


Fonte: Piza (2009, p.31)

Para deduzir a *symptome* da parábola, segundo Piza (2009) Apolônio começa tomando um ponto arbitrário L na secção (figura 5), passando por L um plano paralelo à base circular. A secção do cone obtida por esse plano é um círculo com diâmetro PR. Seja M a intersecção deste plano com o segmento EG. Então LM é perpendicular a PR, e, portanto, $LM^2 = PM \cdot MR$. Se EG é paralelo a AC, um lado do triângulo axial, Apolônio deriva a *symptome* da parábola, ou seja, a relação entre EM e LM, a abscissa e a ordenada, respectivamente, do ponto L da curva. Para isso, ele desenha EH (*latus rectum*) perpendicular a EM, conforme figura 6, e a relação estabelecida $\frac{EH}{EA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$ que é equivalente a: $\frac{EH}{EA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BC}{AC}$. Por semelhança de triângulos, temos: $\frac{BC}{BA} = \frac{PR}{PA} = \frac{PM}{EP} = \frac{MR}{EA} = \frac{BC}{AC} = \frac{PR}{AR} = \frac{PM}{EM}$. Segue que, $\frac{EH}{EA} = \frac{MR \cdot PM}{EA \cdot EM}$. Mas, também: $\frac{EH}{EA} = \frac{EH}{EA} \cdot \frac{EM}{EM}$. Assim, $MR \cdot PM = EH \cdot EM$. Lembrando que $LM^2 = PM \cdot MR$, logo $LM^2 = EH \cdot EM$ que representa *symptome* da parábola.

Piza (2009, p.35) demonstrou em seu trabalho a equivalência entre *symptome* da parábola encontrada por Apolônio relacionando-a com o que a autora chama de “nova definição”, isto é, “Parábola: é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d , chamada diretriz, e de um ponto fixo F , não pertencente à diretriz, chamado foco. À distância do vértice ao foco chamamos p ”.

Figura 6: *Latus rectum*

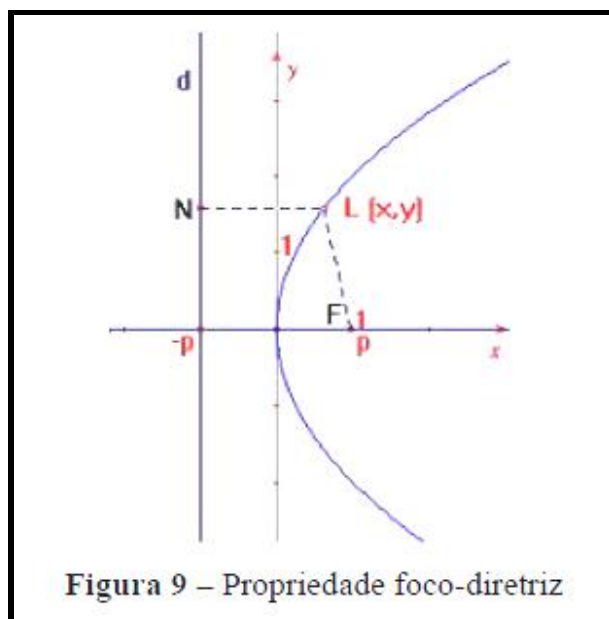


Fonte: Piza (2009, p.32)

Para estabelecer a relação entre *symptome* da parábola e a parábola enquanto lugar geométrico, a autora apoia-se na figura 7 denominada “Propriedade foco-diretriz”. Para deduzir a equação considera um sistema de coordenadas, $L(x, y)$ um ponto da curva e $F(p, 0)$ o foco. Pela definição enunciada pela autora da parábola como lugar geométrico foi possível escrever a relação $\overline{LN} = \overline{LF}$ e, portanto escrever: $p + x = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \Rightarrow y^2 = 4px$

A partir do resultado encontrado, Piza (2009) considerou outro sistema de coordenadas conveniente, conforme figura 8. Representou neste sistema os pontos L , M , E e H da figura 5 que chamamos de “Parábola a partir da secção plana”. Determinou $LM = y$ e $EM = x$. Sabendo que $LM^2 = EH \cdot EM$ (*symptome*), teremos $y^2 = EH \cdot x$, mas $y^2 = 4px$, logo $4p = EH$. Isto significa que o valor $4p$ do parâmetro da parábola definida como lugar geométrico corresponde ao *latus rectum* da parábola definida a partir da secção de um cone.

Figura 7: Parábola – Propriedade foco-diretriz

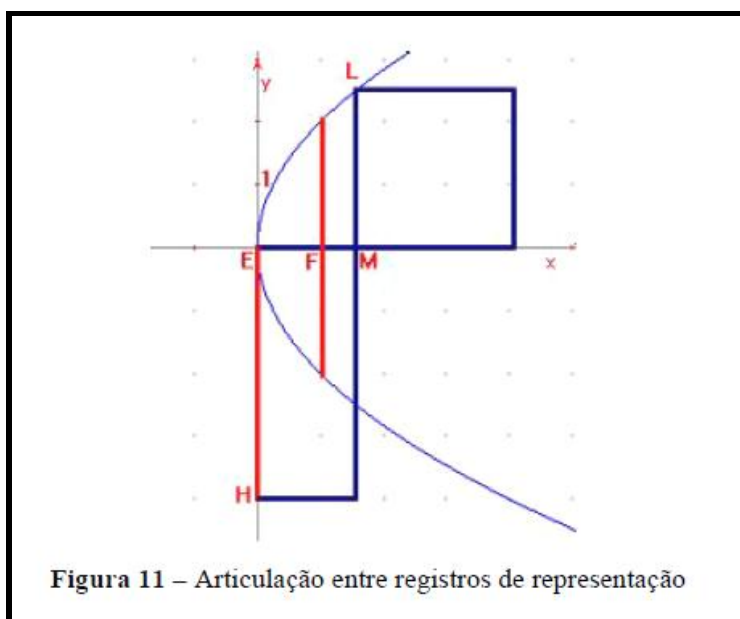


Fonte: Piza (2009, p.35)

Demonstrou que $y^2 = 4px$ é equivalente com a *symptome* $L^2 = EH$. EM, ou seja, ambas representam a mesma curva, conforme figura 8. Assim, Piza (2009) concluiu que:

[...] tanto numa definição quanto na outra, para qualquer ponto da parábola representada no plano cartesiano ou no cone, o quadrado da ordenada desse ponto é igual à área do retângulo formado pela abscissa do mesmo ponto e pelo valor do parâmetro ou do *latus rectum* da curva. (PIZA, 2009, p, 36)

Figura 8: Parábola determinada pela secção de um cone



Fonte: Piza (2009, p. 36)

Incorporando os resultados desse estudo inicial daremos continuidade ao estudo do objeto matemático parábola focando suas definições.

2.2 Estudo da parábola enquanto lugar geométrico

Durante o século XVII, as Cônicas passam a ter um novo tratamento matemático dado por Pierre Fermat (1601-1665), segundo Eves (2004) Fermat foi um dos precursores da Geometria Analítica e descreveu as equações mais simples da elipse, parábola e hipérbole, pois antes disso, não se dispunha de uma notação algébrica adequada. O tratamento dado por Fermat consiste em definir Cônica como lugar geométrico “de todos os pontos de uma região (plana) que satisfazem uma determinada propriedade”. É possível descrever este tratamento para a elipse e hipérbole, mas aqui nos deteremos apenas à parábola.

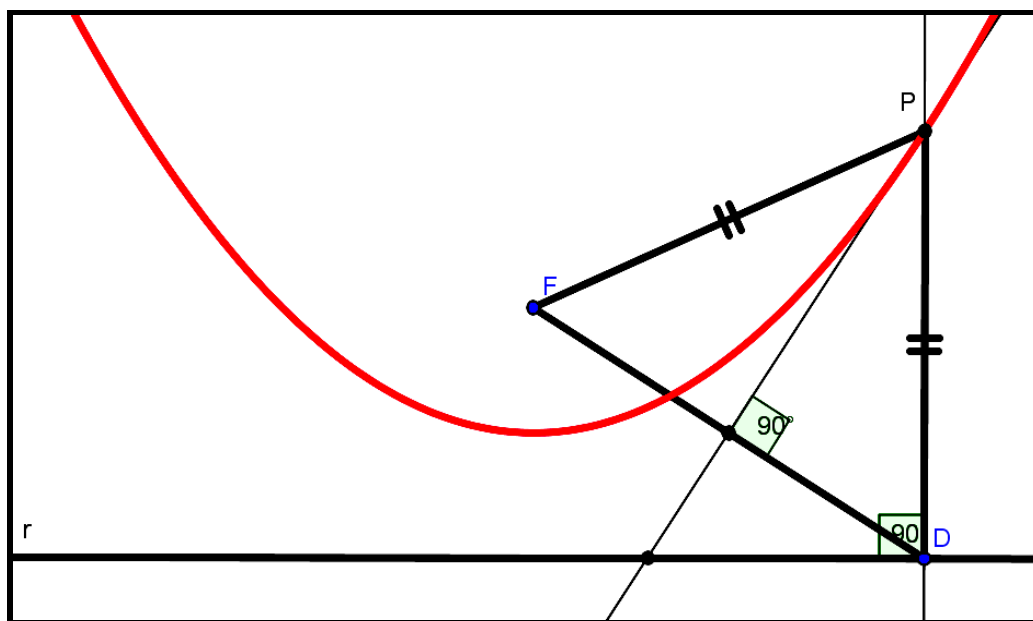
Adotamos duas definições para a parábola enquanto lugar geométrico: Definição (1): “lugar geométrico dos pontos de um plano é uma parábola se, e só se, esses pontos são equidistantes de uma reta e de um ponto, não pertencente a essa reta” e Definição (2) “O lugar geométrico dos pontos de um plano é uma parábola se, e só se, os centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r ”.

Para o estudo do objeto matemático parábola faremos uso da mediatriz e a simetria de um ponto em relação a uma reta. Além disso, o uso dos registros de representação semiótica para representar a parábola a partir da caracterização dada nas definições; tais registros como: figural, gráfico, linguagem natural e algébrico. Mostraremos as conversões entre os registros de representação semióticos e os tratamentos necessários dentro de um mesmo registro. Segundo Duval (2009) defende:

Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação”, “codificação”, etc. são operações que a uma representação de um registro dado fazem corresponder uma outra representação num registro. (DUVAL, 2009, p. 58)

As figuras 9 e 10 são os resultados das conversões dos registros em língua materna das definições (1) e (2) para os registros figurais.

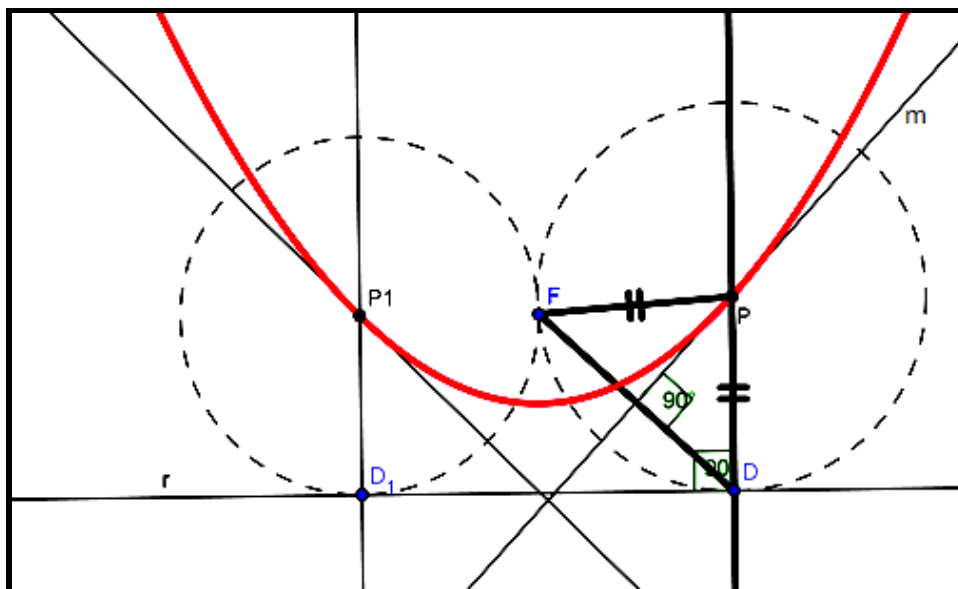
Figura 9: Registro figural de uma parábola a partir da definição (1)



Fonte: Produção do autor

A partir das figuras 9 e 10 faremos a demonstração matemática que justifica que P é um ponto da parábola. Para isso, nos apoiamos na mediatriz.

Figura 10: Registro figural de uma parábola a partir da definição (2)



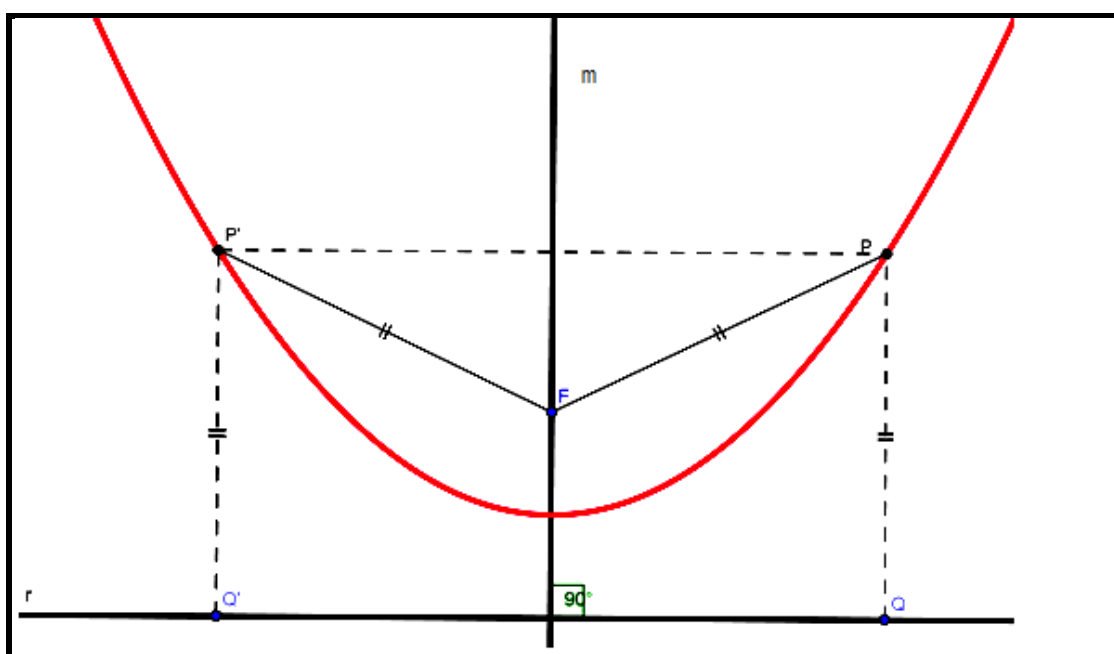
Fonte: Produção do autor

Sejam F e D dois pontos distintos de um plano. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e D é denominado mediatriz do segmento $\overline{FD}$. Então, se m é mediatriz do segmento $\overline{FD}$, para todo ponto P pertencente a m temos a igualdade entre as distâncias, $\overline{PD} = \overline{PF}$.

De fato, tem-se que P pertence à reta s que é perpendicular à diretriz r no ponto D . Então, a distância de P para a reta r é dada pelo segmento $\overline{PD}$. Tem-se ainda que P pertence à mediatriz do segmento $\overline{FD}$. Logo, $\overline{PF} = \overline{PD}$. Assim, P é equidistante do ponto F e da reta r . Portanto, P pertence à parábola de foco F e diretriz r .

Para que possamos continuar nosso estudo do objeto matemático parábola é necessário estudar a simetria da parábola. Para isso, consideramos dois pontos P e P' simétricos em relação a uma reta m , que não os contém se, e somente se, a reta m seja mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. A reta perpendicular à diretriz da parábola e que passa pelo foco é o eixo de simetria dessa curva, conforme figura 11.

Figura 11: Registro figural do eixo de simetria da parábola

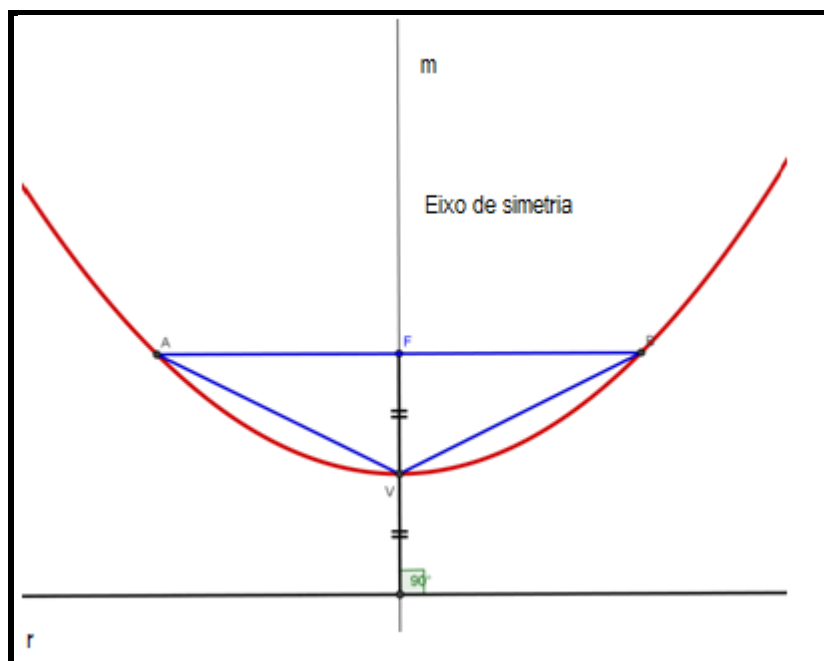


Fonte: Produção do autor

Sejam r a reta diretriz da parábola e m a reta perpendicular a r e que passa pelo foco F . Seja P um ponto pertencente à parábola e P' o simétrico de P em relação à reta m ; tem-se que m é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Como F pertence a m , tem-se: $\overline{FP} = \overline{FP'}$, conforme mostra a figura 11. O ponto Q é a projeção ortogonal de P sobre a reta r e Q' projeção ortogonal de P' sobre a mesma reta. Então, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ uma vez que P pertence à parábola, então, tem-se que, $\overline{FP} = \overline{P'Q'}$. Obtém-se $\overline{FP'} = \overline{P'Q'}$, ou seja, P' é equidistante da reta r e do foco F . Portanto, P' pertence à parábola dada.

Outro elemento a que faremos referência durante o estudo da parábola enquanto lugar geométrico é o vértice. O vértice é o único ponto de interseção da parábola com seu eixo de simetria (figura 12).

Figura 12: Registro figural de uma parábola a partir do seu vértice



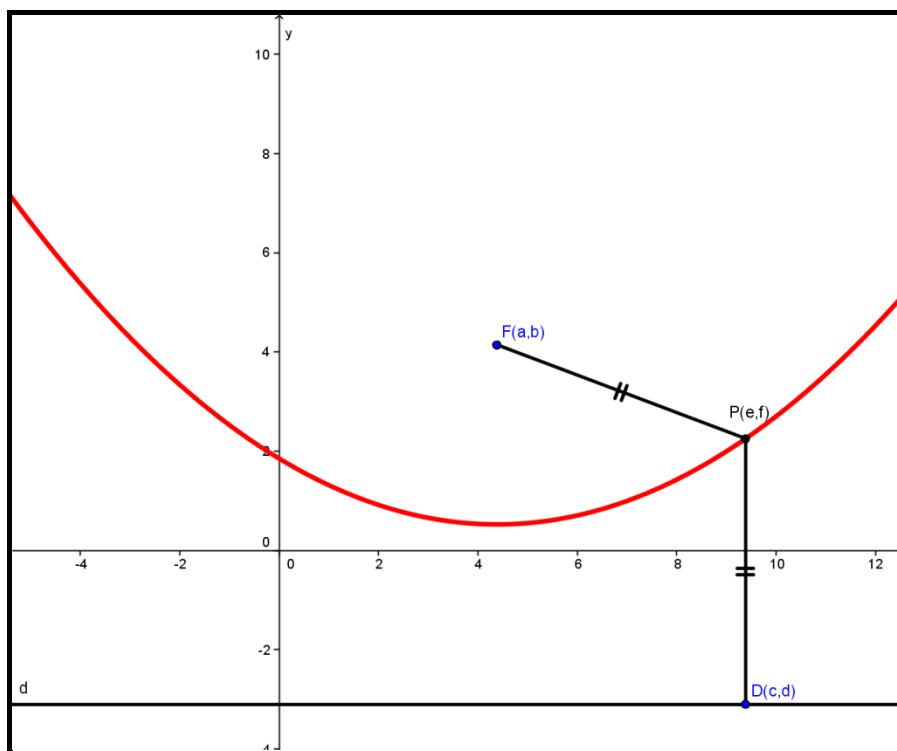
Fonte: Produção do autor

A partir da definição de parábola é possível recorrer a um tratamento analítico da definição (1) e enunciar: Sejam r uma reta e F um ponto qualquer não pertencente a r , F é chamado de foco e a reta r diretriz. O lugar geométrico dos pontos P de coordenadas cartesianas $(x; y)$ é definido por $d(F, P) = d(P, D)$. A figura 13 representa o registro gráfico da definição na geometria analítica.

O resultado é um tratamento realizado na definição (1), proveniente do que segundo Duval (2009, p.57) afirma “Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema”, ou ainda, “A *paráfrase* é uma transformação interna ao registro do discurso na língua natural: ela “reformula” um enunciado dado em outro seja para substituí-lo seja para explicá-lo”.

A necessidade de um tratamento na definição (1) em nosso estudo deve-se ao fato de buscarmos uma linguagem adequada para o estudo do objeto na geometria analítica. A reformulação da definição implica na utilização de outros sistemas semióticos, ou seja, outros registros de representação. Para ilustrar, a figura 13 representa a conversão do registro em linguagem natural da definição em um registro gráfico. Para isso, as coordenadas localizadas no plano cartesiano correspondem a $F(a, b)$, $P(e, f)$ e $D(c, d)$.

Figura 13: Registro gráfico de uma parábola no plano cartesiano



Fonte: Produção do autor

O registro gráfico da figura 13 pode ser convertido em um registro algébrico a partir do cálculo da distância entre dois pontos. A ocorrência dessa conversão parece simples, mas Almouloud (2007) defende que:

[...] em certas situações – aliás, na maioria das situações matemáticas –, que para fazer uma conversão de registros é imprescindível que o aprendiz compreenda os **conceitos e as propriedades matemáticas que permitem fazer tal conversão**. (ALMOULOU, 2007, p.79, grifo do autor).

Para isso, recorreremos ao um sistema semiótico da geometria analítica $d(D, P) = d(P, F) \Rightarrow \sqrt{(c - e)^2 + (d - f)^2} = \sqrt{(e - a)^2 + (f - b)^2}$.

[...] a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que se tende a crer. Para se ter ideia, é preciso analisar como pode se efetuar o procedimento de correspondência sobre o qual repousa toda conversão de representação. (DUVAL, 2009, p.64).

Assim, a partir da definição enunciada no domínio da Geometria Analítica faremos um estudo do objeto matemático parábola na geometria analítica priorizando o estudo de quatro situações e considerando a conversão do registro gráfico para o algébrico. Nas quatro situações, conforme quadro 2, consideramos unidades significativas do registro gráfico (registro de partida): o sistema ortogonal de coordenadas cuja origem é o vértice da parábola,

o ponto do foco pertence ao eixo de simetria perpendicular a reta diretriz, um ponto Q pertencente à reta diretriz e um ponto P qualquer pertencente à parábola.

Para o registro algébrico (registro de chegada): a correspondência associativa das unidades significativas, ou seja, $d(P, F) = d(P, Q)$. De acordo com Duval (2009) podemos compreender que:

[...] O procedimento de correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes pode ser estabelecido localmente, por uma **correspondência associativa das unidades significantes elementares constitutivas de cada um dos dois registros**. (DUVAL, 2009, p.64, grifo nosso).

Para representar a parábola no registro gráfico nas quatro situações, associamos como unidade significativa a posição da reta diretriz no plano cartesiano. Em consonância com essa escolha fundamentamos, segundo Duval (2009):

A organização de situações de aprendizagens centradas sobre a coordenação de registros requer então que tenhamos provavelmente identificadas todas as variações cognitivamente pertinentes de uma representação num registro, de forma que uma exploração conforme “método consistindo em fazer variar um só fator de cada vez, os outros todos mantidos imutáveis” possa ser colocada em prática pelos alunos. (DUVAL, 2009, p.102).

Em decorrência dessa escolha podemos observar as variações ocorridas no registro gráfico e, conseqüentemente, no registro algébrico. De acordo com Duval (2009) as variações são de naturezas diferentes como defende a seguir:

É também teoricamente interessante, pois esses dois registros são de natureza diferente: as unidades significantes do registro gráfico cartesiano não são separáveis, pois são integradas numa só forma percebida, enquanto que aquelas da escritura algébrica são discretas. (DUVAL, 2009, p.103).

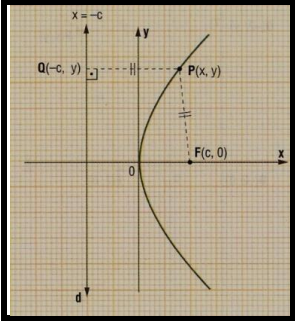
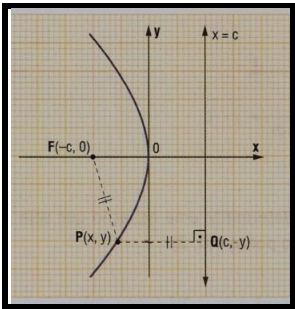
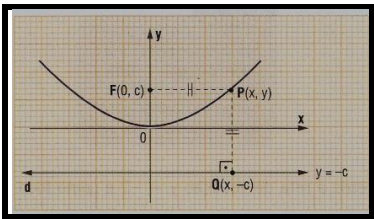
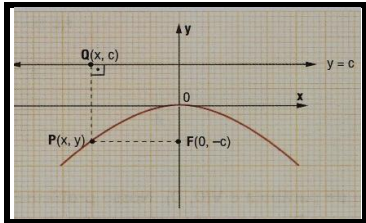
Segundo Duval (2009) as unidades significantes nos registros gráficos são determinadas por valores visuais correspondendo à associação de variáveis visuais, ou seja, permite no caso da parábola observar que a posição da reta diretriz no plano cartesiano determina a localização da coordenada do Foco nos eixos cartesianos, além de definir em quais quadrantes a parábola é esboçada.

[...] Para fazer discriminar todos esses valores visuais, é preciso então *fazer variar uma das três variáveis visuais pertinentes mantendo constantes os valores das duas outras*. A cada um dos valores qualitativos dessas três variáveis corresponde uma variação na escritura da equação [...]. (DUVAL, 2009, p. 103).

Em outra análise, a unidade significativa para o registro gráfico da parábola é a coordenada do Foco da parábola que por sua vez determina a posição da reta diretriz no plano

cartesiano e os quadrantes aos quais uma parábola pertence. Para cada variação no registro gráfico obtemos uma variação concomitante no registro de escrita algébrica.

Quadro 2⁵: Classes de parábolas a partir da posição reta diretriz

Registro Gráfico	Variáveis Visuais	Registro Algébrico
 Fonte: Dante (2004, p.68)	A reta diretriz é paralela ao eixo y passando pelos quadrantes 2º e 3º. A coordenada do Foco está localizada no eixo x entre os quadrantes 1º e 4º.	$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow$ $\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} =$ $\sqrt{(x + c)^2 + (y - y)^2} \Rightarrow (x - c)^2 +$ $y^2 = (x + c)^2 \Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 +$ $y^2 = x^2 + 2cx + c^2 \Rightarrow$ $y^2 = 4cx.$
 Fonte: Dante (2004, p.68)	A reta diretriz é paralela ao eixo y passando pelos quadrantes 1º e 4º. A coordenada do Foco está localizada no eixo x entre os quadrantes 2º e 3º.	$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow$ $\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} =$ $\sqrt{(x - c)^2 + (y - y)^2} \Rightarrow (x + c)^2 +$ $y^2 = (x - c)^2 \Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 +$ $y^2 = x^2 - 2cx + c^2 \Rightarrow$ $y^2 = -4cx$
 Fonte: Dante (2004, p.68)	A reta diretriz é paralela ao eixo x passando pelos quadrantes 3º e 4º. A coordenada do Foco está localizada no eixo y entre os quadrantes 1º e 2º.	$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow$ $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} =$ $\sqrt{(x - x)^2 + (y + c)^2} \Rightarrow x^2 +$ $(y - c)^2 = (y + c)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 -$ $2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2 \Rightarrow$ $x^2 = 4cy$
 Fonte: Dante (2004, p.68)	A reta diretriz é paralela ao eixo x passando pelos quadrantes 1º e 2º. A coordenada do Foco está localizada no eixo y entre os quadrantes 3º e 4º.	$D(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow$ $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} =$ $\sqrt{(x - x)^2 + (y + c)^2} \Rightarrow (y - c)^2 =$ $x^2 + (y + c)^2 \Rightarrow y^2 - 2cy + c^2 =$ $x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \Rightarrow$ $x^2 = -4cy$

Fonte: Produção do Autor

⁵ O Quadro 2 foi organizado e inspirado em Dante (2004, p.68).

Nas quatro situações do quadro 2 observamos que o registro gráfico é convertido para o registro algébrico, para essa conversão as unidades significativas do gráfico usadas são as coordenadas dos pontos F, Q e P. O procedimento de correspondência sobre o qual repousa a conversão da representação do registro gráfico para o registro algébrico pertence ao domínio da geometria analítica conhecida como o cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Sendo assim, na próxima sessão, apresentaremos o *software* GeoGebra que será um recurso didático pedagógico para o desenvolvimento do trabalho com os sujeitos de pesquisa.

2.3 Estudo da Parábola em Ambiente de Geometria Dinâmica

A importância do uso de novas tecnologias para o ensino da matemática tem sido citada em diversas pesquisas na área de Educação Matemática como um recurso didático que potencializa aprendizagens, se bem utilizado. Oliveira (2011) defende que:

As tecnologias podem ser ótimos suportes para a comunicação, a diversificação de pensamentos e o aprender a buscar padrões, regularidades e generalizações, com manipulação de dados, imagens, diagramas, gráficos. (OLIVEIRA, 2011, p.20)

Além disso, em consonância com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2002), o computador pode ser um excelente instrumento tecnológico que facilita a investigação no processo de aprendizagem. Para isso, é fundamental a utilização de *software* educacional adequado ao conteúdo estudado.

No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática (BRASIL, 2002, p.90).

Nessa perspectiva, a utilização de recursos tecnológicos na prática docente coloca-se como uma ferramenta potencial para facilitar o processo de aprendizado. Assim, a utilização de *software* dentro da concepção de geometria dinâmica permite que o estudo de diferentes conteúdos matemáticos possa ser abordado por meio de manipulações e conjecturas, proporcionando maior visualização e compreensão dos conceitos geométricos e algébricos envolvidos.

Optamos pelo *software* GeoGebra, porque possui ferramentas fáceis de serem manipuladas, permite uma abordagem tanto sobre os aspectos geométricos como algébricos dos diferentes objetos de construção e, ao mesmo tempo, oferece possibilidades de

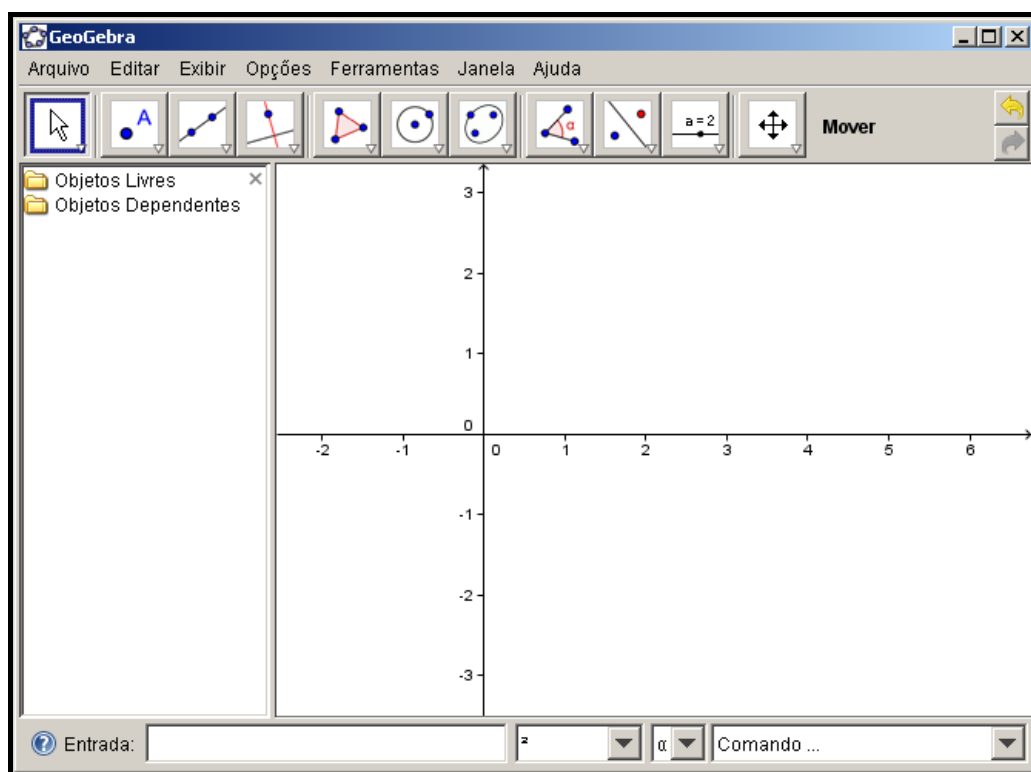
representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Ademais, contribui significativamente ao estudo da geometria e da geometria analítica, pois apresenta ferramentas dinâmicas para as construções planas, além de ser um *software* livre.

O *software* GeoGebra foi criado pelo Prof. Dr. Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University, em 2001. Trata-se de um *software* de matemática dinâmica para ser utilizado nas aulas de Matemática das escolas de Educação Básica e de Ensino Superior, reunindo geometria, álgebra e cálculo. Está disponível na rede para *download* e pode ser encontrado no site http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/ traduzido para o português por J.Geraldes.

Detalharemos as construções geométricas da parábola, enquanto lugar geométrico com auxílio das ferramentas do *software* GeoGebra, e as etapas para a construção do objeto matemático.

Ao abrir o programa, conforme a figura 14, o usuário encontrará uma tela em que poderá fazer uso ou não dos eixos cartesianos. Para as definições 1 e 2 enunciadas na seção 2.2 não utilizaremos os eixos, cuja opção de exibição encontra-se no ícone “exibir”.

Figura 14: Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra

Observamos que a janela inicial está dividida em duas: à esquerda, a parte algébrica (que pode ser fechada, se necessário); à direita, a parte geométrica. Para reativar a parte

algébrica, basta ir ao item "Exibir" do menu, e clicar em "Janela de álgebra". Neste mesmo item, podemos ativar/desativar os eixos, a malha e o protocolo de construção.

Figura 15: Barra de ferramentas do software GeoGebra



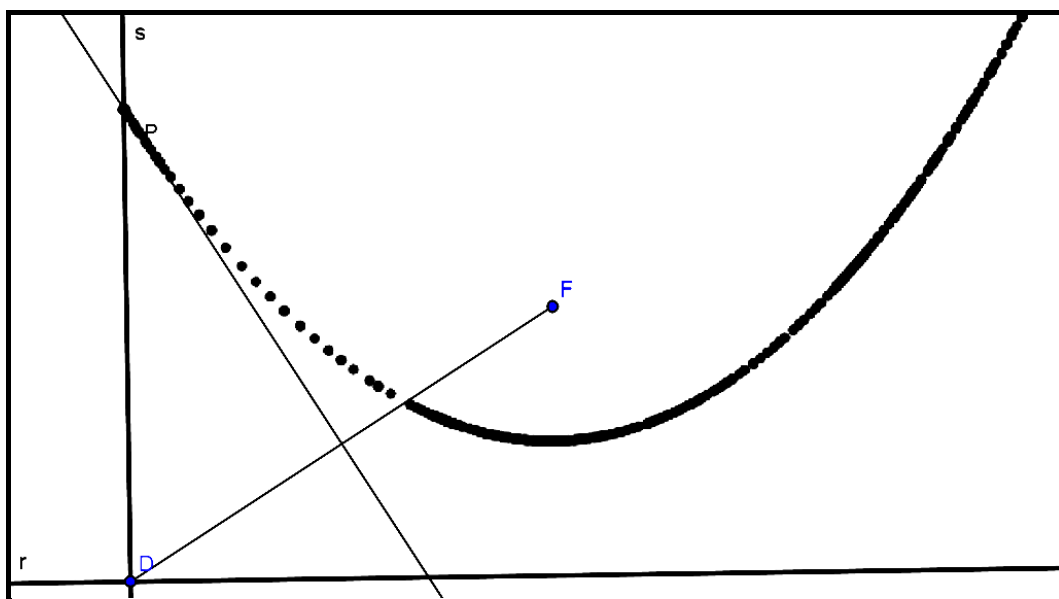
Fonte: Software GeoGebra

Os ícones desta barra têm várias opções, relacionadas com as funções descritas no desenho do ícone. Estas opções são acessadas clicando na seta do canto inferior direito de cada ícone. Faremos o uso de apenas alguns dos ícones apresentados nas etapas de construção de uma parábola.

A partir da Definição (1): “**lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta r , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz, chamado foco**” apresentamos as etapas da construção do lugar geométrico dos pontos de uma parábola com auxílio das ferramentas do *software* GeoGebra:

1. Trace uma reta r ;
2. Marque um ponto F não pertencente a r ;
3. Trace uma reta s perpendicular à reta r  passando por um ponto D qualquer de r ;
4. Trace o segmento FD ;
5. Trace a mediatriz t do segmento FD ;
6. Marque o ponto de interseção das retas t e s e chame-o de P ;
7. Clique com mouse direito sobre o ponto P e marque a opção Habilitar Rastro.
8. Arraste o ponto D sobre a reta r para obter o esboço da parábola.

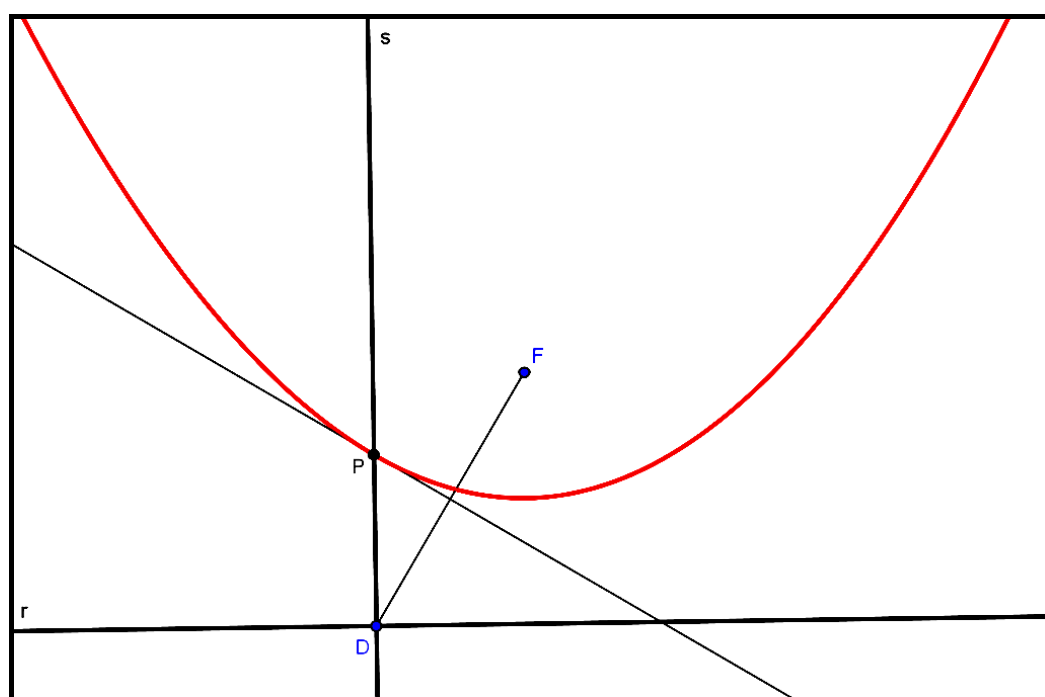
Figura 15: Esboço da parábola no *software* GeoGebra ferramenta rastro.



Fonte: Produção do autor

Para a definição 1 podemos utilizar a ferramenta do *software* lugar geométrico  e as etapas para a construção são as mesmas até o item 6. A partir desse item acrescentamos o item 7. Acione o ícone lugar geométrico  clique no ponto P e depois no ponto D, conforme a figura 16.

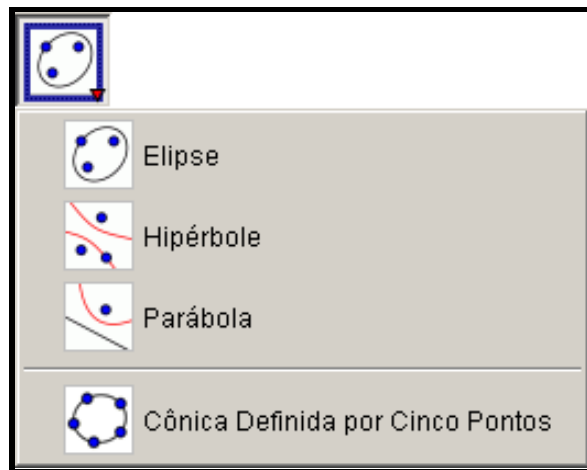
Figura 16: Esboço da parábola no *software* Geogebra ferramenta lugar geométrico



Fonte: Produção do Autor

Por fim, podemos usar a ferramenta cônicas do *software* GeoGebra, conforme figura 17 para o esboço da curva sem a necessidade de realizar uma construção geométrica.

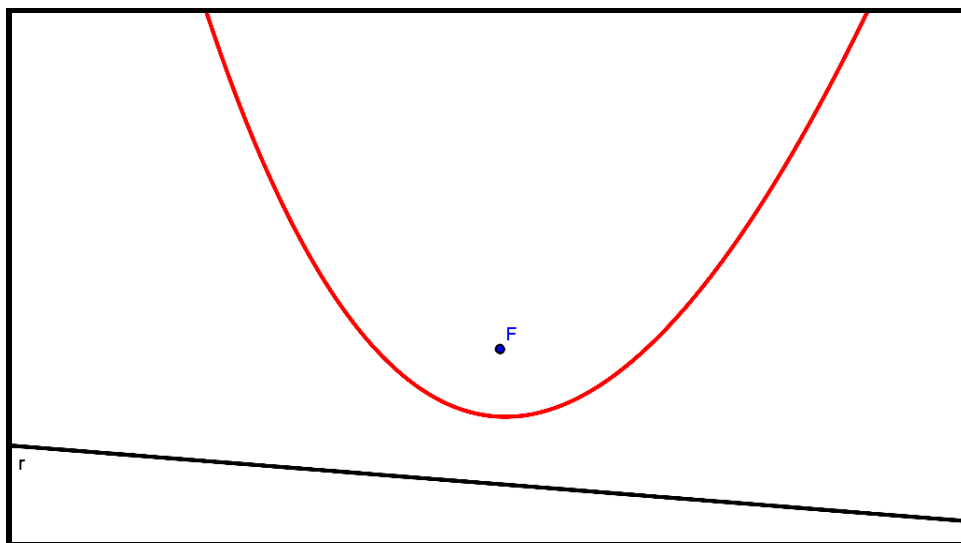
Figura 17: Ícones das ferramentas Cônicas



Fonte: *Software* GeoGebra

Para isso, é necessário marcar um ponto F e traçar uma reta r e em seguida clicar no ícone Parábola e novamente clicar no ponto F e na reta r , conforme figura 18.

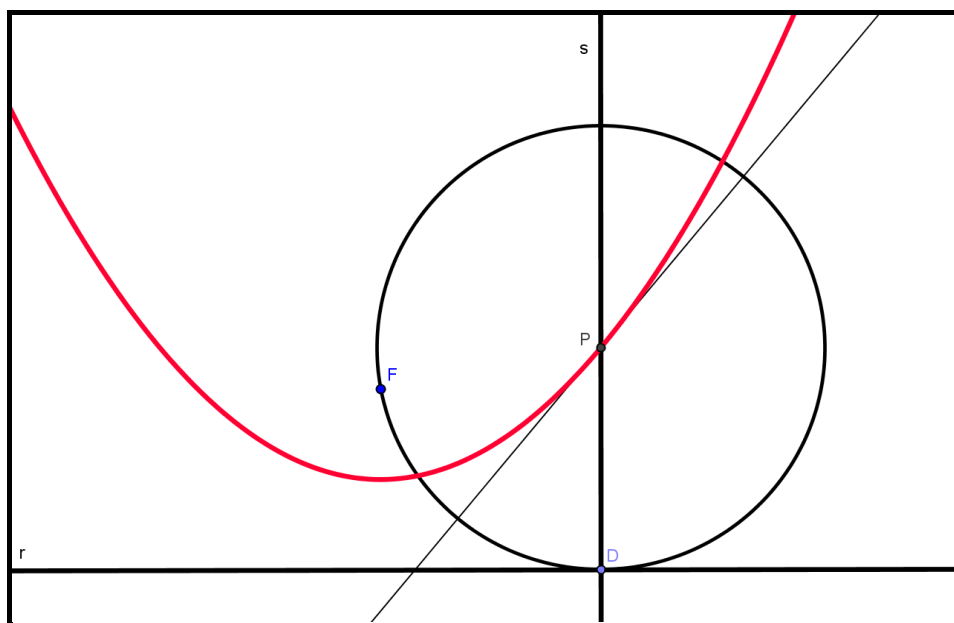
Figura 18: Esboço da parábola no *software* GeoGebra ferramenta Cônica



Fonte: Produção do autor

A Definição (2): “**lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r** ” pode ser construída por meio das etapas apresentadas anteriormente, conforme realizado na definição (1). Acrescentamos que o ponto P é o centro da circunferência de raio PD . Para desenhar essa circunferência no *software* GeoGebra é necessário clicar no ícone  circunferência, em seguida no ponto P e no ponto D , o resultado dessa construção é a figura (19).

Figura 19: Esboço da parábola no *software* GeoGebra



Fonte: Produção do autor

Com base nas definições apresentadas sobre o estudo da parábola enquanto lugar geométrico e as suas propriedades e demais análises e considerações descritas acima entendemos que os elementos necessários para o estudo foram apresentados. Sendo assim, no próximo capítulo, apresentaremos o desenvolvimento do trabalho com os sujeitos de pesquisa e os resultados obtidos.

Capítulo 3: A PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos o perfil dos sujeitos de pesquisa, descrevendo a sequência e a análise dos resultados.

3.1 Perfil dos Sujeitos

Em nosso estudo, trabalhamos com cinco voluntários da segunda série do Ensino Médio de uma escola particular de São Paulo, na faixa etária de 16 a 17 anos. Os alunos dessa escola podem escolher entre três áreas de concentração do Ensino Médio: exatas, biológicas ou humanidades. Uma das alunas escolheu biológicas e os demais estão na de exatas. Esses voluntários apresentam rendimento satisfatório em todas as disciplinas, de acordo com a classificação anual das médias obtidas, sendo assim direcionados às melhores turmas, conforme critério da escola.

A fim de resguardar a identidade de cada um dos voluntários, aqui serão identificados por aluna A, aluno B, aluna C, aluno D e aluno E. Os cinco voluntários, três meninos e duas meninas, trabalharam em duplas (aluna A e aluno B), a quem chamaremos de Grupo 1, e um trio (aluna C, aluno D, Aluno E), os quais chamaremos de Grupo 2. Em seguida, descreveremos a aplicação da sequência didática.

3.2 Descrição da Aplicação da Sequência Didática

A aplicação da sequência didática foi realizada da seguinte forma: na primeira sessão, situações 1 e 2, segunda sessão, situações 3 e 4, terceira sessão 5, 6 e 7 e, por fim, na quarta sessão, situações 8 e 9.

No primeiro encontro, os voluntários comunicaram-nos que só poderiam se dedicar em um período máximo de duas horas por encontro. Dessa forma, optamos em aplicar as situações de maneira que nenhuma atividade ficasse incompleta para o dia posterior.

Os voluntários foram observados e auxiliados em suas dúvidas pela autora desse trabalho, que teve o papel de formadora. Para auxiliar na coleta de dados, contamos também com a colaboração de uma professora de matemática, que filmou e registrou todo o processo.

A seguir, apresentaremos a análise *a priori* e *a posteriori* da sequência didática organizada para os alunos.

3.3 A Sequência

Desenvolvemos uma sequência composta por nove situações sobre Parábola, mais especificamente sobre sua caracterização enquanto lugar geométrico. Essa sequência didática contou com a utilização do *software* GeoGebra, sendo que o conhecimento necessário para sua utilização pôde ser adquirido durante a própria aplicação, sem atrapalhar seu andamento. A sequência didática consta no Apêndice A.

3.4 Análise das Situações

3.4.1 Análise da situação 1 – Estudo da Parábola por meio de dobradura

Atividade 1⁶

Usando uma folha de papel vegetal, desenhe uma reta d e marque um ponto F não pertencente à reta d . Selecione um ponto P na reta e dobre o papel-vegetal de forma a fazer coincidir os pontos P e F . Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a reta d .

a) O que você observou como resultado dessas dobras? Contorne com lápis o que você observou.

Atividade 2

a) Qual a relação entre o segmento $\overline{FP}$ e a dobra obtida a partir dele? Pode desenhar se quiser.

b) Tome um ponto Q qualquer da reta d e trace, por ele, uma reta perpendicular à reta d .

Dobre a folha de forma que o ponto Q coincida com o ponto F . Chame de R o ponto de intersecção da dobra feita com a curva que você esboçou. Verifique se a medida de $\overline{QR}$ é igual à medida de $\overline{RF}$.

c) O que você pode concluir a respeito da relação entre um ponto da curva e o ponto F e a reta d ?

Análise a priori

A situação 1 foi elaborada com o objetivo de proporcionar ao aluno condições de construir um registro figural da parábola ponto a ponto por meio da construção de mediatrizes de segmentos. Para essa situação a definição de reta mediatriz que usaremos é a de “lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades de um segmento”.

⁶ A atividade 1 foi extraída e adaptada de MELO, Fábio Silva e GALVÃO, Maria Elisa E. L. **Obtendo as cônicas com dobraduras**. Revista do Professor de Matemática nº 66, p. 29. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo, 2008.

Na atividade 1, optamos realizar a construção de um registro figural para uma parábola pelo método das dobraduras⁷, porque entendemos que a construção de um modelo concreto propicia o levantamento de questões a respeito das propriedades matemáticas que estão sendo utilizadas no processo de construção.

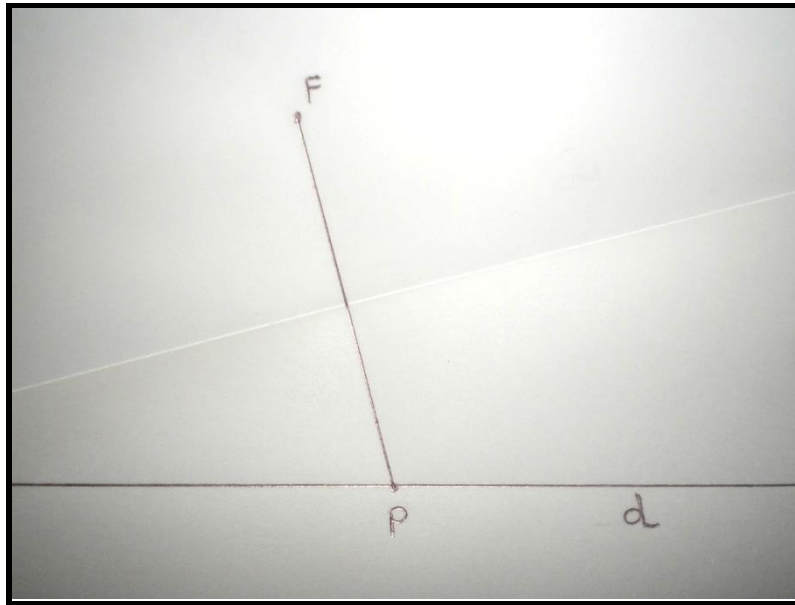
Entendemos que a construção do registro figural da parábola por meio de dobraduras possibilita aos alunos estabelecerem uma relação entre o conjunto de caracteres (o ponto fora da reta e reta) e uma regra de conformidade (dobra no papel) que, segundo Duval (2009, p.56), “permitem identificar um conjunto de elementos físicos ou traços” ou nesse caso representar a figura de uma parábola.

Para Duval (2009), a formação de representações semióticas é, com efeito, mais complexa que a aplicação de regras de conformidade e implica na seleção de certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já apresentado em função de possibilidades de representação próprias ao registro escolhido.

Para essa construção as mediatrizes são representadas por dobras, que se formam à medida que o papel é dobrado para que o ponto F coincida com um ponto qualquer da reta d. A figura 20 representa a reta mediatriz m obtida por meio da primeira dobra.

⁷ Tradicional arte oriental conhecida como “origami”. A palavra japonesa origami que dizer “dobrar papel” (ori=dobrar; Kami=papel) e se refere a uma arte hoje disseminada pelo mundo inteiro. Por meio do Origami, é possível estabelecer relações entre a confecção do material concreto e abstração de conceitos a serem estudados.

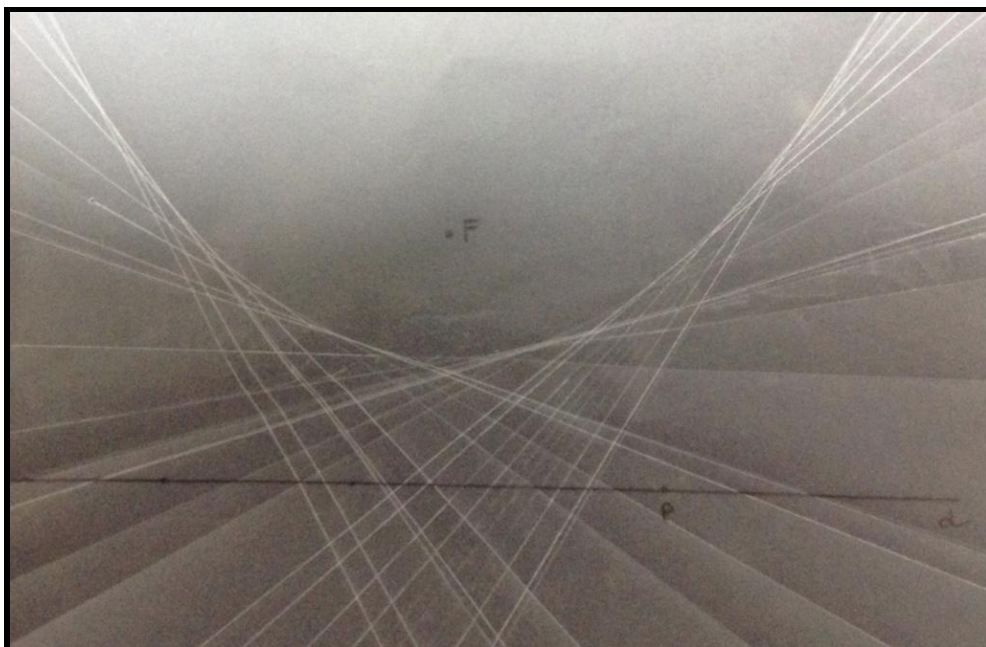
Figura 20: Esboço da reta m obtida a partir da dobra



Fonte: Produção do autor

As demais dobras serão obtidas por meio da mesma operação, ou seja, um ponto qualquer da reta d deve coincidir com o ponto F . A figura 21 representa o resultado das diversas dobras realizadas.

Figura 21: Esboço de uma Parábola por dobradura em papel vegetal



Fonte: Produção do autor

Escolhemos o papel vegetal, para realizar a atividade, em virtude de sua transparência para facilitar a sobreposição e por possibilitar uma melhor percepção das marcas formadas pelas dobras. Além disso, ele destaca a delimitação da figura formada com melhor precisão.

Para a **atividade 1** disponibilizaremos para o aluno uma folha de papel vegetal, lápis e régua, e esperamos que o aluno, ao receber a folha de papel vegetal, com o auxílio da régua e do lápis, trace uma reta d , marque um ponto F não pertencente a reta e escolha um ponto P da reta d . Dobre a folha de papel vegetal de forma que o ponto F coincida com o ponto P e repita essa operação para diferentes escolhas de pontos pertencente a reta d . Depois da dobradura feita pelo aluno, esperamos que ele perceba que o contorno das dobras resultou em um esboço de uma parábola e que responda isto.

Na **atividade 2** os objetivos são: relacionar a dobra construída na folha com a reta mediatriz que intercepta o ponto médio do segmento $\overline{FP}$, concluir que a distância dos segmentos $\overline{QR}$ e $\overline{RF}$ têm a mesma medida, descrever e perceber que a distância entre o ponto R da parábola e o ponto F é a mesma que a do Q pertencente a reta d e o ponto R .

Para alcançar esses objetivos é necessário que o aluno tenha os seguintes conhecimentos disponíveis: ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta perpendicular e mediatriz.

No **item (a)** acreditamos que o aluno responda “que a dobra passa pelo ponto médio do segmento $\overline{FP}$ ”. Apoiado no processo de construção da dobra. Podemos esperar ainda que o aluno responda que “a dobra representa a mediatriz do segmento $\overline{FP}$ ”. Nesse caso, o argumento do aluno estará apoiado na definição de mediatriz de um segmento como sendo a reta que passa pelo ponto médio desse segmento e é perpendicular a ele. Esperamos que, o aluno valide sua resposta mostrando que a dobra representa uma reta perpendicular ao segmento $\overline{FP}$.

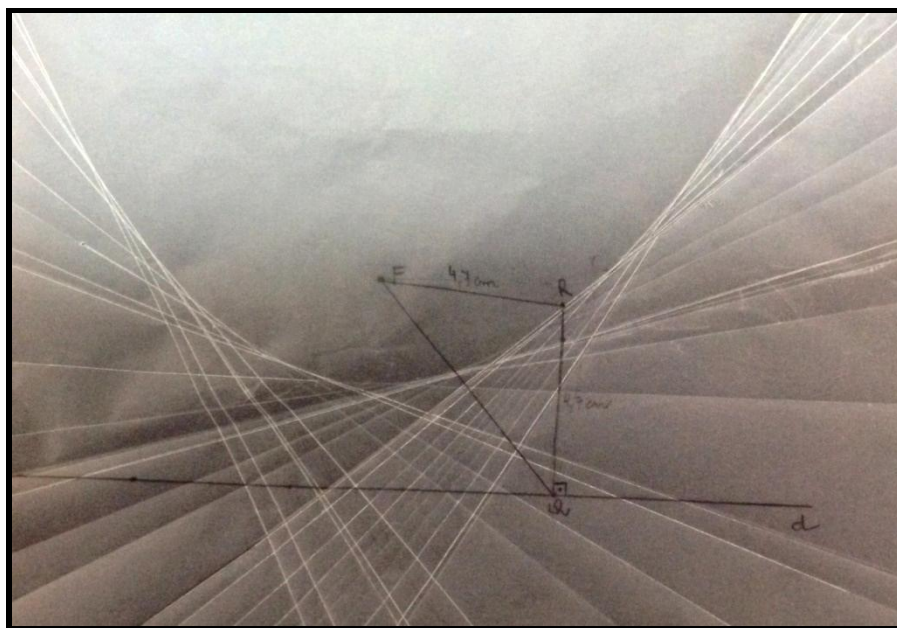
No **item (b)** disponibilizaremos para o aluno os recursos: régua e transferidor e esperamos que aluno marque o ponto Q na reta d e trace uma reta perpendicular à reta d interceptando Q com o auxílio dos recursos. Acreditamos que o aluno depois dessa ação fará a dobra de maneira que o ponto Q coincida com o ponto F e, a seguir, marque o ponto R entre a dobra e a curva esboçada por ele na atividade 1, como mostra o registro figural da figura 22. Esperamos que o aluno use a régua para traçar os segmentos $\overline{QR}$ e $\overline{RF}$ e que os meça para concluir.

Para o **item (c)** esperamos que o aluno tenha a iniciativa de seguir os mesmos passos do item (b), ou seja, escolha outro ponto na reta d , trace por esse ponto à reta d a perpendicular e dobre a folha de forma que o ponto escolhido coincida com o ponto F , e repita o processo de medição.

Esperamos então, pelo menos duas respostas em registro de linguagem natural. A primeira “que o ponto da curva está à mesma distância do ponto F e o ponto da curva está à mesma distância de um ponto da reta“, observando que o ponto R é um ponto de intersecção entre a reta mediatriz e uma reta perpendicular que intercepta um ponto na reta d. A segunda que “um ponto da curva é equidistante do ponto F e a reta d”, mobilizando conhecimentos sobre a propriedade da reta mediatriz, ou seja, um ponto pertence à mediatriz de um segmento se, e somente se, equidista das extremidades desse segmento. E por fim, que o aluno justifique sua resposta apoiando-se na construção da figura e conclua que o triângulo QRF é isósceles.

Após a conclusão da Situação1, solicitaremos ao aluno a socialização da solução encontrada. Na atividade 1 a exposição do resultado do registro figural encontrado e os demais itens da situação de forma oral por meio de debate e confronto das soluções encontradas e, a seguir, a **institucionalização**.

Figura 22: Esboço do segmento $\overline{QR}$ perpendicular à reta d e o ponto R



Fonte: Produção do autor

Faremos uma institucionalização local dos elementos de uma Parábola caracterizando e nomeando o ponto F como sendo o foco da parábola e a reta d como sendo a diretriz da parábola. Justificaremos a construção da parábola por meio de dobraduras nos apoiando em que a reta m (a dobra no papel) é a mediatriz do segmento $\overline{QF}$, portanto M é ponto médio de $\overline{QF}$ e as distâncias dos segmentos $\overline{QR}$ e $\overline{RF}$ são iguais. Então, pelo critério de congruência LAL, podemos afirmar que os triângulos QRM e FRM são congruentes. O ponto R é comum e pertence à reta mediatriz m. Dessa forma, podemos concluir que R é equidistante do ponto F e da reta d.

Análise a posteriori

A situação 1 foi realizada no primeiro encontro com duração de sessenta minutos. Iniciamos pela **atividade 1** que teve a duração de 40 minutos. Entregamos para os grupos a folha contendo a situação 1, a folha de papel vegetal, régua e lápis para iniciar. A pesquisadora solicitou aos voluntários a realização de uma leitura do enunciado da atividade 1 e, tão logo fosse possível, o início da resolução da atividade.

De início o Grupo 1 chama a pesquisadora e se dá o seguinte diálogo:

Grupo 1: Professora! Não entendemos o que é para fazer.

Pesquisadora: Vocês fizeram a leitura?

Grupo 1: Sim, mas não entendemos.

Pesquisadora: Então, vamos lá...você já traçaram a reta d no papel vegetal?

Grupo 1: Sim.

Pesquisadora: Isso mesmo! Marcaram um ponto F fora dessa reta?

Grupo 1: Sim.

Pesquisadora: Ótimo! Agora na reta d, aleatoriamente, marquem outros pontos, um de cada vez, marcou um ponto nomeie por A, B, C ou o que vocês desejarem. Depois dobrem a folha de maneira que esse ponto que vocês marcaram coincida com o ponto F fora da reta. Agora vamos lá...

Alguns minutos depois a dupla dirigiu o diálogo novamente para a pesquisadora:

Grupo 1: Assim?

Nesse instante a dupla mostrou o resultado de algumas dobras, mas sem a definição da figura esperada.

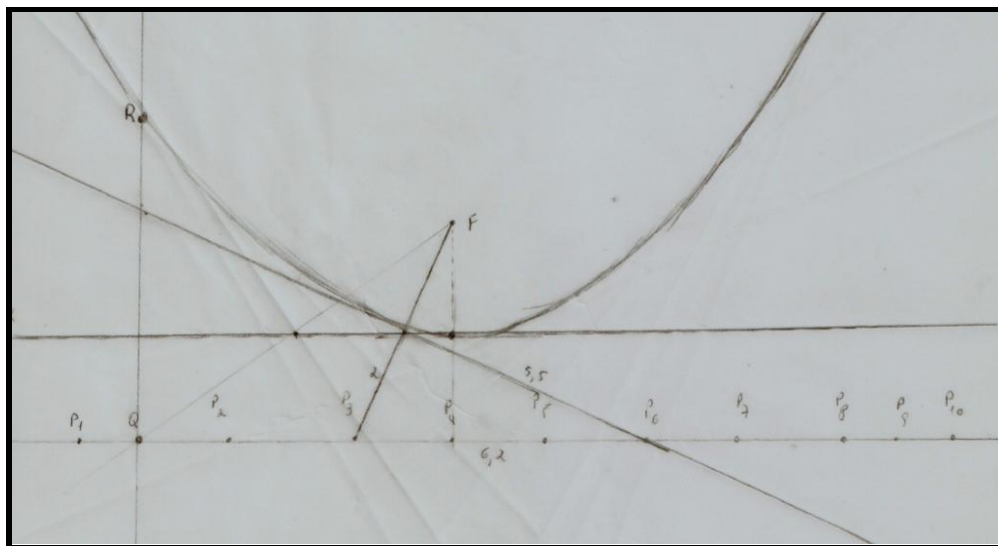
Pesquisadora: Isso mesmo! Façam esse procedimento para vários pontos.

Grupo 1: Quantas vezes teremos que fazer essa dobra?

Pesquisadora: Até o momento em que identificarem o resultado.

A dupla continuou realizando o procedimento e logo chegou ao resultado. A figura 23 é resultado da produção do Grupo 1.

Figura 23: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 1 - Atividade 1



Fonte: Produção do Aluno B

Constatamos a partir dos diálogos entre o grupo 1 e a pesquisadora que a dificuldade inicial na fase de ação foi superada a partir da mediação da pesquisadora com questionamentos e indagações sobre a leitura e interpretação do enunciado da situação. Concluimos que a dificuldade do grupo 1 não estava na interpretação do enunciado, mas no fazer a dobra no papel.

Observamos na fase de formulação que o Grupo 1, após realizar quatro dobras no papel, chegou à conclusão que essas resultavam em retas, mas que essa quantidade de dobras era insuficiente para concluir o resultado e responder a questão (a) da atividade 1. Nesse sentido, o Grupo 1 tomou a decisão de continuar a fazer a dobras o que, após concluir certo número de dobras, favoreceu o reconhecimento da figura de uma parábola.

Na fase de validação, o Grupo 1 reconheceu que a figura formada pelas dobras é uma parábola a partir da resposta em registro de língua natural (protocolo de resposta figura 24) e validou o modelo criado a partir das experiências de aprendizagens em matemática proveniente de outros contextos, assim a resposta do Grupo 1 vem ao encontro do esperado sem evidenciar nenhuma definição prévia para o objeto matemático parábola.

Figura 24: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 1 - Atividade 1 (a)

Atividade 1 Usando uma folha de papel vegetal desenhe uma reta d, numa folha de papel-vegetal e marque um ponto F não pertencente à reta d. Selecione um ponto P na reta e dobre o papel-vegetal de forma a fazer coincidir os pontos P e F. Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a reta d. a) O que você observou como resultado dessas dobras? Contorne com lápis o que você observou. <i>A formação de uma parábola.</i>
--

Fonte: Produção do Grupo 1

O Grupo 2 ao contrário do Grupo 1 na fase de ação não apresentou nenhuma dificuldade em construir o registro figural da parábola. Entretanto, na fase de formulação, o Grupo 2 chama a pesquisadora e se dá o seguinte diálogo.

Grupo 2: Professora, terminamos...

Pesquisadora: Ótimo! Deixem-me dar uma olhada no que fizeram...

Grupo 2: Professora! Achemos que esse desenho é um gráfico...

Pesquisadora: Gráfico? Como assim?

Grupo 2: Assim, professora, como esse aqui.

O aluno D representou no canto da folha de atividade, conforme figura 25 o gráfico que estava relacionando com a figura encontrada.

A pesquisadora perguntou para os demais componentes do grupo:

Pesquisadora: Vocês concordam que a figura do papel vegetal obtida é um gráfico?

Aluno E e Aluna C: Sim.

Pesquisadora: Por que vocês acreditam que essa figura encontrada por meio das dobras no papel vegetal é um gráfico?

Aluno D: Já estudamos a parábola e ela é um gráfico de função do 2º grau.

Pesquisadora: Entendo.

Pesquisadora: Bem, mas vocês acreditam que é um gráfico de uma função quadrática. Então, mostrem na figura encontrada os eixos cartesianos.

Aluno E: É verdade não temos eixos cartesianos.

Aluna C: Mas é igualzinho o gráfico da $f(x) = x^2$

Pesquisadora: Vocês lembram qual é a definição de função?

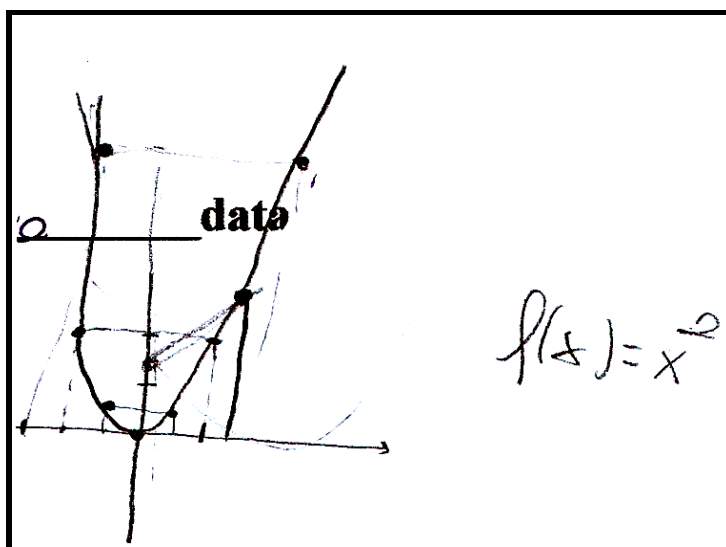
Aluno D: Um pouco, mas não tenho certeza... Acho que tem que ter uma regra, fórmula... como essa $f(x) = x^2$.

Pesquisadora: Nesse caso, temos plano cartesiano e a lei de formação $f(x) = x^2$?

Aluno D: Então essa figura é somente uma parábola?

Pesquisadora: Agora, vocês precisam chegar a uma conclusão para responder a pergunta.

Figura 25: Protocolo da representação gráfica de uma função quadrática



Fonte: Produção do aluno D

A nossa percepção no momento do diálogo foi que o grupo estava propenso a responder que o resultado das dobras é o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$. E nesse sentido, buscamos levá-los a agir, a falar e refletir entre o momento em que aceitam o problema como seu e o momento em que produzem sua resposta a partir dos questionamentos apresentados. Entendemos que esse processo de ensino apoia-se na noção de *devolução*, segundo Brousseau (2008).

Além disso, a pesquisadora não revelou informações ou indício do real objetivo da atividade. Segundo Brousseau (2008) a situação adidática, como parte essencial da situação didática, é uma situação em que a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz.

Após o diálogo, identificamos que o Grupo 2 respondeu por meio de um registro em linguagem natural na atividade 1 item (a) que “As retas formam a imagem de uma parábola a projeção do vértice coincide com a projeção ortogonal do vértice da ortogonal parábola”.

Notamos no registro em linguagem natural que o Grupo 2 ficou convencido que a figura formada é uma parábola, mas evidenciamos que o grupo procurou validar a resposta estabelecendo uma relação com a figura (parábola) formada pelas dobras e os conhecimentos de gráficos cartesianos das funções quadráticas, quando falam de projeção ortogonal.

A **atividade 2** foi concluída em vinte minutos, os grupos responderam por meio de um registro em linguagem natural a conclusão e constamos semelhança entre os dois grupos. Dessa maneira, apresentaremos os protocolos de respostas do Grupo 1 e as suas respectivas análises.

No item (a) da atividade 2 observamos que na fase de ação a iniciativa de ambos os grupos foi a de traçar o segmento de reta $\overline{FP}$ com o auxílio da régua. Em seguida, na fase de formulação com o auxílio do transferidor sobre a dobra e o segmento $\overline{FP}$, constataram que a relação entre o segmento $\overline{FP}$ e a dobra são perpendiculares.

Figura 26: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 1 - Atividade 2 (a)

Atividade 2 a) Qual a relação entre o segmento $\overline{FP}$ e a dobra obtida a partir dele. Pode desenhar se quiser. <i>O segmento $\overline{FP}$ e a dobra obtida são perpendiculares.</i>

Fonte: Produção do Grupo 1

No item (b) a resposta apresentada pelo Grupo 2 é “A medida $\overline{QR}$ é igual à medida $\overline{RF}$, sendo ambas, no caso iguais a 4 cm” semelhante ao do Grupo 1 (figura 27). Observamos que durante a fase de ação ambos os grupos usaram o instrumento régua graduada em centímetros para medir os segmentos $\overline{QR}$ e $\overline{RF}$. Na fase de formulação os grupos se apoiaram nos resultados obtidos das medidas dos segmentos para concluir e validar a resposta.

Figura 27: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 1 - Atividade 2 (b)

b) Tome um ponto Q qualquer da reta d e trace, por ele, uma reta perpendicular à reta d. Dobre a folha de forma que o ponto Q coincida com o ponto F. Chame de R o ponto de intersecção da dobra feita com a curva que você esboçou. Verifique se a medida de $\overline{QR}$ é igual à medida de $\overline{RF}$. <i>$\overline{QR} = 7\text{cm}$, $\overline{RF} = 7\text{cm}$. Portanto a medida do segmento $\overline{QR}$ é igual a do segmento $\overline{RF}$.</i>
--

Fonte: Produção do Grupo 1

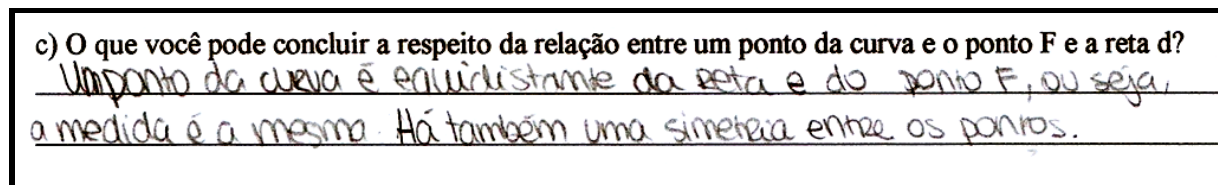
No item (c) o Grupo 2 respondeu “A distância entre qualquer ponto da curva e o ponto F é igual à distância entre esse mesmo ponto e a reta d. A reta formada pela dobra é mediatriz do segmento $\overline{FQ}$, sendo qualquer ponto dessa reta equidistante desses pontos. Porém, essa distância só será igual à distância até a reta d quando o segmento formado por um ponto da reta d e um ponto da dobra (no caso, segmento $\overline{QR}$) for perpendicular a essa reta d”.

A resposta do Grupo 1 (figura 28), assim como a resposta do Grupo 2, explicita em registro de linguagem natural que a relação entre um ponto da curva e o ponto F e a reta d é de equidistância, esperávamos que os grupos chegassem a essa conclusão.

Analisando ambas as respostas e confrontando-as com as fases de ação, formulação e validação, concluímos que a fase de ação ocorreu nos grupos no momento em que tiveram

que trocar informações e tomar decisões para descrever suas conclusões, na fase de formulação os grupos explicitaram por meio de um registro em língua natural os conhecimentos matemáticos que utilizaram para a solução encontrada, e por fim na fase de validação a propriedade de equidistância foi o argumento matemático que justificou a pertinência da conclusão.

Figura 28: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 1 - Atividade 2 (c)



Fonte: Produção do Grupo 1

No término da situação 1 a pesquisadora solicitou aos grupos que apresentassem as soluções encontradas e orientou que os alunos poderiam expor as dúvidas e dificuldades encontradas durante a apresentação das conclusões. A seguir transcrevemos alguns diálogos desse momento.

Pesquisadora: Quem começa?

Grupo 1: Bem...achamos que essa atividade de dobraduras bem diferente do que estamos acostumados a fazer nas aulas de matemática.

Pesquisadora: Diferente como?

Grupo 1: Não imaginávamos que fazendo um monte de dobras chegava no resultado de uma parábola.

Pesquisadora: E agora você compreendeu porque chegou a uma parábola?

Grupo 1: Achamos que sim...entendi que a dobra é uma reta mediatriz que passam pelo segmento $\overline{FP}$.

Pesquisadora: O que vocês acham da resposta do colega?

Grupo 1: Percebemos que esse resultado é por causa da propriedade de equidistância entre um ponto da parábola R o ponto F e o ponto P da reta.

Grupo 2: Pensamos que esse desenho fosse um gráfico da função do 2º grau $f(x) = x^2$.

Pesquisadora: E então, o que vocês do grupo A pensam sobre o que o grupo B acreditava inicialmente sobre a figura encontrada?

Grupo 1: Nossa! Nem pensamos nisso.

Grupo 2: Achamos que é muito parecido, mas a professora perguntou onde estavam os eixos cartesianos e a lei da função? E não conseguimos achar.

Pesquisadora: Isso mesmo! Precisamos estudar um pouco mais sobre as propriedades matemáticas que definem a parábola. Para fazer algumas afirmações.

Grupo 2: Mas, não foi dada nenhuma pista se essa parábola é a mesma que é estudada em função do 2º grau.

Pesquisadora: Então, pessoal, vamos caracterizar alguns elementos da parábola e depois nas próximas situações chegaremos a outras conclusões.

Em seguida, a pesquisadora solicitou aos grupos que apresentassem oralmente as conclusões obtidas em cada uma das atividades. Ficou combinado que o Grupo 1 apresentaria a resposta e o Grupo 2, com base em suas conclusões, poderia concordar ou não e apresentar

outra conclusão. Sobre esse momento observamos que as conclusões foram muito semelhantes o que não implicou em um debate entre os grupos.

No momento seguinte, a pesquisadora foi até o quadro e oralmente com a participação dos alunos realizou a institucionalização local dos elementos de uma Parábola. Esse momento foi realizado por meio de um diálogo que caracterizou e nomeou os elementos da parábola, o ponto F como sendo o foco da parábola e a reta d a diretriz da parábola.

Logo depois, a pesquisadora apresentou no quadro uma justificativa com base na construção da parábola por meio de dobraduras em que o ponto R é equidistante do ponto F e da reta d. Iniciou o diálogo supondo que a reta m (a dobra no papel) é a mediatriz do segmento $\overline{QF}$; portanto, M é ponto médio de $\overline{QF}$ e as distâncias $\overline{QR}$ e $\overline{RF}$ são iguais. Então pelo critério de congruência LAL, podemos afirmar que os triângulos QRM e FRM são congruentes. O ponto R é comum e pertence à reta mediatriz m. Dessa forma, podemos concluir que R é equidistante do ponto F e da reta d.

Confrontando os resultados da análise *a priori* com *a posteriori* da Situação 1 concluímos que o conjunto de questões elaboradas possibilitou que os grupos convertessem do registro da língua natural (enunciado atividade 1) em registro figural, e em seguida, a partir do registro figural se apropriassem da relação de equidistância entre um ponto da curva, o foco e um ponto da reta d, mas esperávamos que os grupos percebessem, apoiados na construção da figura, que o triângulo QRF é isóscele o que não ocorreu em nenhuma das soluções apresentadas pelos grupos. Além disso, pontuamos que, na análise *a priori* da situação em questão, não prevíamos que o aluno pudesse relacionar o registro figural da parábola com o registro gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$.

3.4.2 Análise da situação 2 – Estudo da Parábola no Ambiente da Geometria Dinâmica

Vamos agora construir a parábola a partir das conclusões da situação anterior. Para isso utilizaremos o *software* Geogebra. Feche a janela de álgebra e com o botão direito do mouse esconda os eixos. Determine uma reta qualquer d e um ponto F não pertencente a d. Determine um ponto P na reta e construa a mediatriz do segmento FP, habilite o rastro (botão direito do mouse) para a mediatriz e movimente o ponto P sobre a reta. O que você observa?

O objetivo da Situação 2 é mobilizar os conhecimentos desenvolvidos na situação 1, ou seja, esboçar uma parábola a partir de mediatriz do segmento $\overline{FP}$ determinada por um ponto qualquer P da reta d e um ponto F não pertencente a reta d, no ambiente de geometria dinâmica.

Para essa atividade, esperamos que o aluno utilize as ferramentas do *software* GeoGebra (Ponto, Reta, Ponto Médio, Reta Perpendicular e Rastro). As soluções esperadas do aluno são: traçar uma reta d, marcar um ponto P na reta d, selecionar um ponto F qualquer fora da reta d, em seguida, traçar o segmento $\overline{FP}$, encontrar o ponto médio do segmento $\overline{FP}$ e traçar uma reta perpendicular passando pelo ponto médio do segmento $\overline{FP}$. E por fim, habilitar o rastro para obter o contorno da parábola.

A outra solução possível é traçar uma reta d, marcar o ponto P na reta d, selecionar um ponto F qualquer fora da reta d, em seguida, traçar o segmento $\overline{FP}$ e, por fim, utilizar a ferramenta mediatriz para traçar a reta mediatriz do segmento $\overline{FP}$ e habilitar o rastro para obter o contorno da parábola.

Esperamos que o aluno observe que o resultado é o contorno de uma parábola; e que o ponto P é um representante dos infinitos pontos da reta d que, quando movimentado, mantém a relação de equidistância entre um ponto da curva, o ponto F, e o ponto P. E por fim, que o aluno relacione a construção do registro figural da parábola por meio das dobraduras com a construção do registro figural com auxílio do *software*.

Para alcançar esses objetivos são necessários que o aluno tenha os seguintes conhecimentos disponíveis: ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta perpendicular e mediatriz.

A socialização dos resultados será realizada ao término da atividade mediada pela pesquisadora. Para isso, pediremos que o aluno com o auxílio do *software* GeoGebra apresente a construção do registro figural da parábola e concomitantemente explicita verbalizando as etapas, observações e conclusões e, a seguir, a **institucionalização**.

No momento da institucionalização faremos uma comparação entre o processo de construção do registro figural da parábola por meio da dobradura e a construção do registro figural da parábola com o auxílio do *software* mostrando que em ambas as construções a relação matemática que garante que a construção da parábola é a propriedade de equidistância entre um ponto da curva, o ponto F (foco), e o ponto P pertencente à reta diretriz d. Além

disso, comentar que com o auxílio do *software* a experiência perceptiva é melhor, porque o ponto P pode ser manipulado.

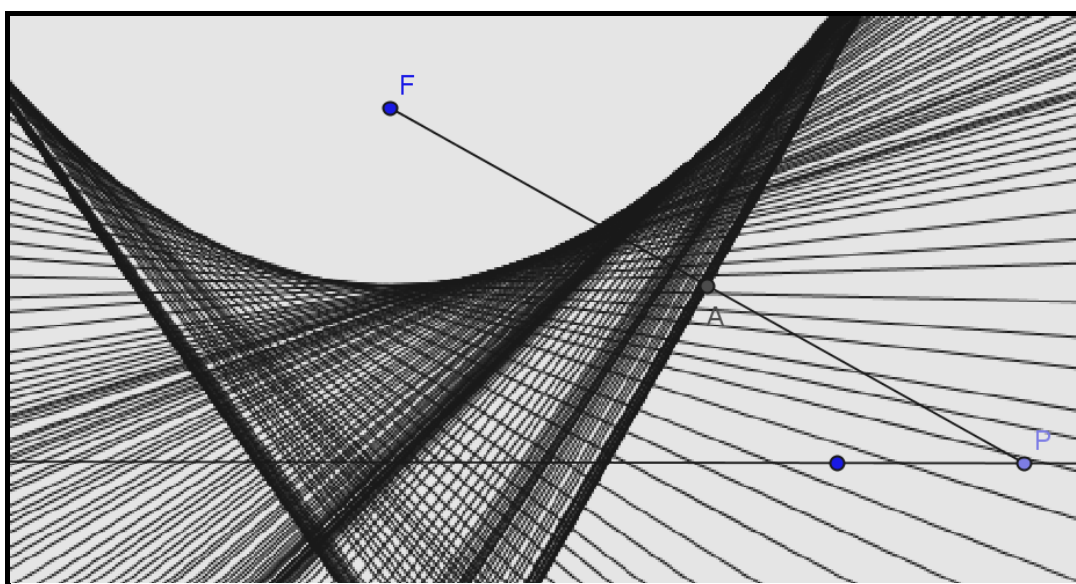
Análise a posteriori

A situação 2 ocorreu no primeiro encontro e foi concluída em aproximadamente 20 minutos. A pesquisadora entregou a folha com a situação 2 e solicitou aos grupos um momento para que pudesse apresentar o *software* GeoGebra. Nesse momento, constatamos que os alunos dos grupos conheciam as ferramentas do *software* GeoGebra e que não seria necessário realizar comentários sobre a utilização do mesmo.

Na fase de ação observamos que os grupos abriram o *software* e iniciaram a construção respeitando o enunciado. A seguir consultaram os registros da situação 1 para se apoiarem nas etapas de construção. Em seguida, na etapa de construção, com o auxílio das ferramentas do *software* para a fase de formulação elaboraram um modelo explícito (construção da figura) a partir das regras comuns observadas na construção do registro figural por meio da dobradura. E por fim, na fase de validação, habilitaram o rastro e compararam o resultado obtido com o obtido pelas dobras.

Os grupos concluíram a situação 2 e os resultados foram iguais no que se refere a construção no *software* (figura 29). O protocolo de construção refere-se à produção do Grupo 1.

Figura 29: Protocolo de construção do Grupo 1 - Situação 2



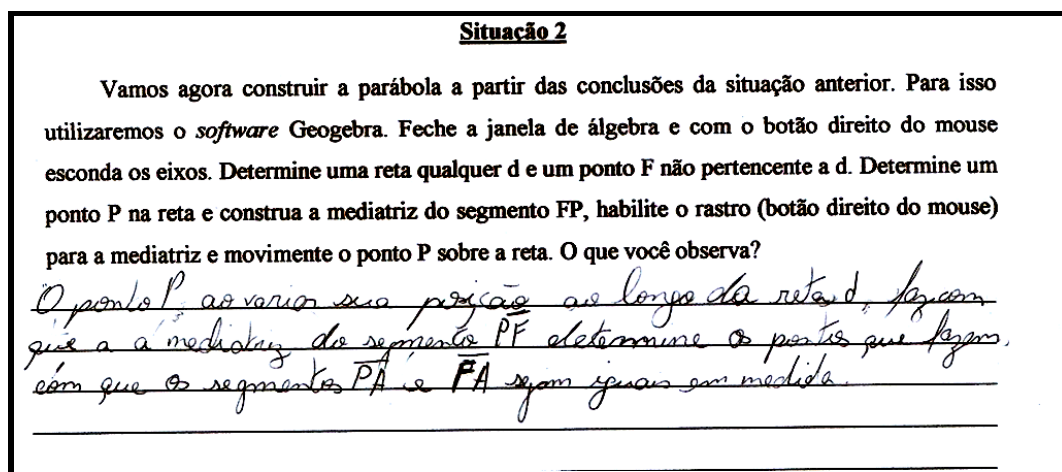
Fonte: Produção do Grupo 1

Comparamos e analisamos o protocolo de construção do Grupo 1, exibido pelo *software* Geogebra, com as respostas esperadas na análise *a priori*, e constatamos que o Grupo apresentou uma das respostas esperadas. Para chegar ao resultado, seguiu os seguintes passos:

traçou uma reta d , marcou um ponto P na reta d , selecionou um ponto F qualquer fora da reta d , em seguida, traçou o segmento $\overline{FP}$, encontrou o ponto médio do segmento $\overline{FP}$ e nomeou ponto A , traçou a reta perpendicular passando pelo ponto médio do segmento $\overline{FP}$. E por fim, habilitaram o rastro para obter o contorno da parábola.

Além disso, o Grupo 1 apresentou um registro em língua materna das observações elaboradas a partir da simulação no *software* (figura 30). Constatamos no registro do Grupo 1 semelhanças entre as etapas da construção do registro figural da parábola por meio da dobradura e no registro elaborado com o auxílio do *software* GeoGebra. O que nos leva a concluir que o grupo se apropriou das unidades significativas (foco F e reta diretriz d) e relação de equidistância entre o ponto F , um ponto da curva e o ponto P pertencente à reta d .

Figura 30: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 2



Fonte: Produção do Grupo 1

No registro em língua natural do Grupo 2 a respeito das observações “Observa-se o mesmo que foi feito no papel vegetal, ou seja, é possível observar uma parábola. As mediatrizes dos segmentos formados por um ponto da reta d e um fora formam uma parábola, uma vez que são as retas tangentes a cada ponto da parábola”.

Entendemos que os resultados obtidos por ambos os grupos é alcançado no momento em que é proporcionado ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática.

Duval (2009, p. 90) defende que parte dos **conhecimentos construídos** se dá por meio da formação e do tratamento de representação semiótica e complementa que existe parte do **funcionamento cognitivo que permite essa construção**, ou seja, implica que se mobilize ou reconheça as representações pertinentes. Para o grupo 1, a medida entre os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{FA}$

foi reconhecida como uma representação pertinente e mobilizada da situação 1 para responder a situação 2.

Após o término da situação 2, solicitamos aos grupos que apresentassem as soluções encontradas para o confronto das respostas. Organizamos os grupos de maneira que o grupo 1 apresentasse as observações e em seguida o grupo 2.

Julgamos importante transcrever alguns diálogos ocorridos durante a exposição das respostas. Iniciaremos com transcrição dos diálogos ocorridos entre a pesquisadora e os grupos, a seguir:

Pesquisadora: Gostaria de ouvir o Grupo 1 sobre o desenvolvimento da Situação 2. Pode ser?

Grupo 1: Percebemos que o ponto P, ao variar sua posição na reta d, movimentava a reta mediatriz e ela mostra o contorno da parábola.

Grupo 1: Achamos interessante comparar com as dobraduras da outra atividade... E percebemos que no software é mais rápido.

Grupo 1: Observamos que o ponto A é equidistante do ponto P e do ponto F.

Pesquisadora: Quem é o ponto A?

Grupo 1: O ponto A é um ponto da parábola.

Pesquisadora: E o Grupo B tem alguma observação para as colocações do Grupo A?

Grupo 2: É uma simulação do que foi feito no papel, onde as infinitas mediatrizes formadas que seriam as dobras, no caso da folha vegetal. Só que agora o rastro formou a parábola.

Pesquisadora: O que é esse rastro?

Grupo 2: O rastro é a marca da reta mediatriz por onde ela passou.

Grupo 2: O ponto A é intersecção da mediatriz do segmento FP com a reta perpendicular que passa pelo ponto P faz com que qualquer ponto sobre ela seja equidistante desse ponto A ... então a união desses pontos forma a parábola.

Constamos que os alunos perceberam que a simulação feita com ajuda do *software* GeoGebra possibilitou descrever a curva com precisão, agilidade e principalmente observar a propriedade de equidistância entre os pontos dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{FA}$.

Na fase de institucionalização a pesquisadora projetou a tela do *software* Geogebra para que os grupos pudessem acompanhar o processo de construção do registro figural da parábola e, durante as etapas de construção no *software*, foi oralmente relacionando com as etapas realizadas durante o processo de construção da parábola por dobraduras. Mostrou que tanto em um registro como no outro recorreu aos mesmos elementos (reta, ponto e reta perpendicular).

Confrontando a análise *a priori* com a *posteriori* da Situação 2 concluímos que os grupos converteram o registro figural da parábola por meio de dobraduras em um registro figural no ambiente da geometria dinâmica, constaram que a simulação feita pelo *software* é

semelhante ao que fizeram com o papel vegetal e que a propriedade de equidistância entre os pontos dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{FA}$ é válida para todos os pontos da curva.

3.4.3 Análise da situação 3 – Estudo da Parábola no Domínio da Geometria

Atividade 1

Abra uma nova janela no Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e vamos construir uma parábola a partir das observações das situações anteriores. Observe que deve obter um ponto da mediatriz que tenha mesma distância à reta d e ao ponto F . Explique sua construção. Use a ferramenta lugar geométrico do Geogebra para obter a parábola.

Atividade 2

Abra uma nova Janela no software Geogebra e construa uma nova parábola. O que você observa quando movimenta o ponto F ? E quando movimenta a reta d ?

Análise a priori

Os objetivos da Situação 3 são: construir a parábola a partir das conclusões obtidas nas situações 1 e 2 e observar que a movimento do ponto F e da reta d provocam modificações na “abertura” da parábola.

Para a **atividade 1** esperamos que o aluno abra uma nova janela no Geogebra e trace uma reta d qualquer, marque o ponto F fora da reta d , escolha um ponto P qualquer na reta d e trace a mediatriz entre o ponto F e o ponto P , trace uma reta perpendicular interceptando o ponto escolhido e a reta d , marque o ponto R de interseção entre a reta mediatriz e a reta perpendicular o ponto de intersecção R é um ponto pertencente à parábola e utilize a ferramenta lugar geométrico do *software* Geogebra para esboçar a parábola. Por fim, que o aluno explique por meio de um registro em língua natural a construção considerando suas etapas e a relação de equidistância entre o ponto P , pertencente a reta d , o ponto F e o ponto R , pertencente à parábola.

Na **atividade 2** esperamos que o aluno abra uma nova janela no Geogebra e construa uma nova parábola, movimente o ponto F e observe as mudanças provocadas na ‘abertura’ da parábola. As observações esperadas são: “o movimento do ponto F se distanciando da reta d provoca uma ampliação na abertura da concavidade da parábola” e “se o ponto F se aproximar da reta d a concavidade tende a ficar ‘mais fechada’”.

A atividade 2 foi organizada para estimular o campo de observação e possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação em outro registro.

Para essa atividade é necessário que o aluno tenha os seguintes conhecimentos disponíveis: ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta perpendicular e mediatriz.

Após a conclusão da Situação 3, socializaremos as soluções encontradas pelo aluno, nas atividades 1 e 2 com auxílio do *software* GeoGebra, a construção do registro figural da parábola e concomitante às etapas, observações e conclusões oralmente por debate e confronto das soluções encontradas e, a seguir, a **institucionalização**.

Na fase de institucionalização definiremos a parábola como **“lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta d , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz, chamado foco”**. E mostraremos com o auxílio do *software* que a distância entre o ponto F e a reta diretriz modifica a “abertura” da parábola independente da posição no plano.

Análise a posteriori

O desenvolvimento da situação 3 ocorreu no segundo dia de encontro com duração de aproximadamente cinquenta minutos para a conclusão das atividades 1 e 2. Sendo que a atividade 1 teve duração de aproximadamente vinte minutos e a atividade 2 aproximadamente trinta minutos.

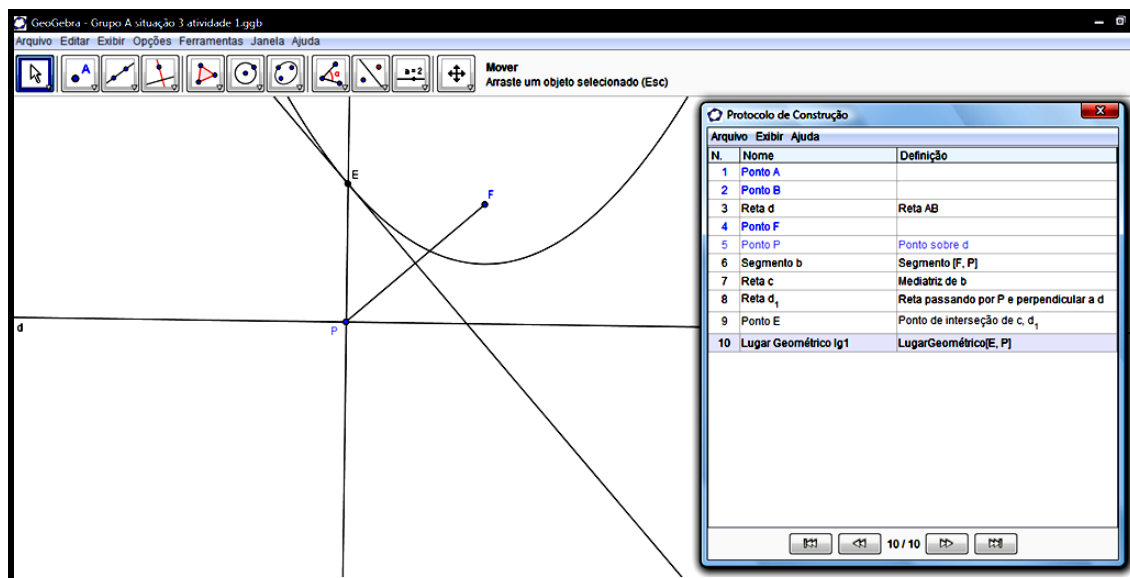
Iniciamos o encontro com a entrega das cópias das situações 1 e 2 realizados no encontro anterior. A pesquisadora solicitou que os grupos formados permanecessem os mesmos e que as situações 1 e 2 poderiam ser consultadas por eles sempre que julgassem necessário.

Assim que os grupos iniciaram foi possível observar na fase de ação que ambos recorreram aos resultados das situações 1 e 2 para iniciar a construção do registro figural da parábola com o auxílio do *software*. Os resultados das situações anteriores foram utilizados pelos grupos como fonte de consulta para a fase de formulação que resultou na construção do registro figural. E na fase de validação a confirmação foi por meio da ferramenta lugar geométrico do *software*.

Os grupos apresentaram a construção do registro figural utilizando a ferramenta lugar geométrico do *software* GeoGebra, essa constatação pode ser observada nos protocolos de construção dos grupos. A figura 31 é o resultado da produção do Grupo 1, avaliamos que o

resultado dessa construção foi possível, pois os grupos se apropriaram dos resultados das situações 1 e 2, o que possibilitou estabelecer relações entre as unidades significantes (foco e reta diretriz) no momento da construção do registro figural por meio da dobradura e a construção geométrica com o auxílio do *software*.

Figura 31: Protocolo de construção do Grupo 1 - Situação 3 – Atividade 1



Fonte: Produção do Grupo 1

Na atividade 1 (figura 32) o grupo 1 converteu o registro figural em registro de língua natural descrevendo as etapas para a construção geométrica do registro figural, mas não descreveu que o lugar geométrico que obedece a propriedade de equidistância entre os segmentos $\overline{PE}$ e $\overline{EF}$ é a parábola.

Figura 32: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 3 – Atividade 1

Atividade 1

Abra uma nova janela no Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e vamos construir uma parábola a partir das observações das situações anteriores. Observe que deve obter um ponto da mediatriz que tenha mesma distância à reta d e ao ponto F . Explique sua construção. Use a ferramenta lugar geométrico do Geogebra para obter a parábola.

- DETERMINAR UMCA RETA d
- NOMENCLAR UM PONTO CONTO NO RETA COMO P
- NOMENCLAR OUTRO PONTO NÃO PERTENCENTE À RETA COMO F
- UNIR AMBOS OS PONTOS P e F , CRIANDO UM SEGMENTO
- CRIAR A MEDIATRIZ DE TAL SEGMENTO
- CRIAR UMA RETA PERPENDICULAR À d QUE FOSSE POR P
- DEFINIR UM PONTO DE INTERSEÇÃO ENTRE A MEDIATRIZ E A RETA PERPENDICULAR
- DETERMINAR O LUGAR GEOMÉTRICO DE DO PONTO E e D

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 apresentou resultado semelhante ao do grupo 1 no que se refere à construção do registro figural com o auxílio do *software*. Quanto à explicação da construção

da figural o grupo 2 respondeu em registro de língua natural “Traçou-se uma reta perpendicular à reta passando por um determinado ponto. Depois, traçou-se a mediatriz entre esse ponto da reta e um ponto qualquer fora da reta. Essa mediatriz encontrou-se num ponto E com a reta perpendicular, ou seja, esse ponto E equidista da reta D e desse ponto fora da reta (o foco da parábola). Utilizando o lugar geométrico, o programa fez todos os pontos que obedecem a essa mesma propriedade: equidistar da reta e desse foco, formando a parábola” (transcrição do protocolo de resposta do grupo 2 da Situação 3 - atividade 1).

Nesse sentido compreendemos que os grupos se apropriaram do conjunto de elementos matemáticos necessários para a construção geométrica da parábola, mas somente o grupo 2 percebeu que o lugar geométrico, que obedece à propriedade de equidistância entre os segmentos $\overline{PE}$ e $\overline{EF}$, é a parábola.

Na atividade 2 constatamos que a fase de ação ocorreu no momento em que os grupos construíram o registro figural da parábola com o auxílio do *software* GeoGebra. A partir da manipulação do ponto F e da reta diretriz desencadeou a fase de formulação e validação que pudemos observar nos protocolos de respostas a partir da comunicação linguística do registro apresentado nas figuras 33 e 34.

Figura 33: Protocolo de resposta do Grupo 1 - Situação 3 – Atividade 2

Atividade 2 - OBSERVAR A FORMAÇÃO DE UMA PARÁBOLA

Abra uma nova Janela no software Geogebra e construa uma nova parábola. O que você observa quando movimenta o ponto F? E quando movimenta a reta d?

● AO MOVIMENTAR O PONTO F:

- QUANDO MAIS PRÓXIMO DA RETA d, MAIS FECHADA FICA A CONCAVIDADE DA PARÁBOLA, PORÉM QUANTO MAIS DISTANTE DA RETA d MAIS ABERTA FICA A CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

● AO MOVIMENTAR A RETA d:

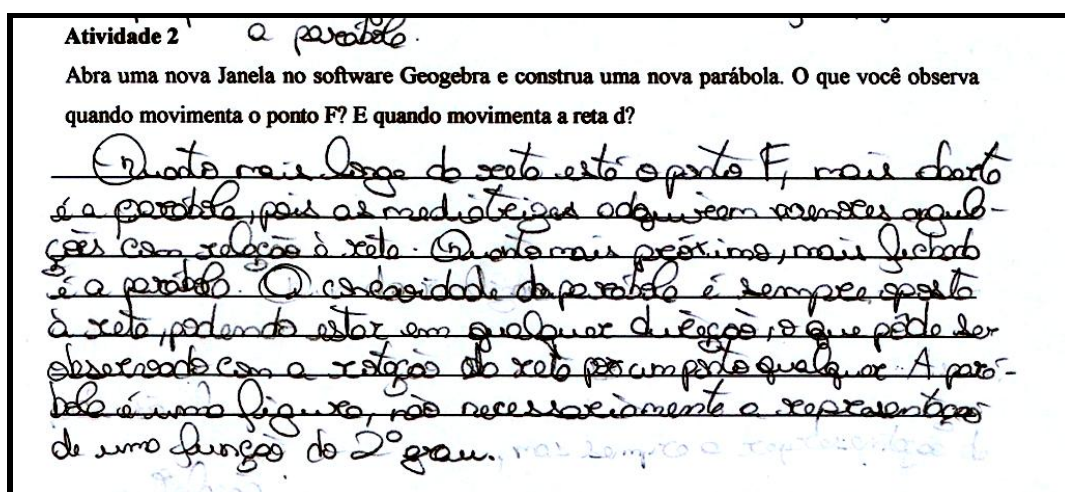
- QUANTO MAIS PRÓXIMA ESTÁ A RETA d DO PONTO F MAIS FECHADA FICA A CONCAVIDADE DA PARÁBOLA E QUANTO MAIS DISTANTE DO PONTO F MAIS ABERTA FICA A CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

Fonte: Produção do Grupo 1

Ambos os grupos apresentaram respostas semelhante a partir da manipulação do ponto F e reta d, mas um aspecto que não foi previsto nas análises *a priori* da questão apareceu na resposta do grupo 2 que nos chamou a atenção no registro em língua natural, conforme figura 34.

O grupo 2 chegou à conclusão que o objeto matemático parábola nem sempre é a representação de uma função quadrática. Nesse sentido, é possível constatar uma mudança de opinião se comparada com as indagações do grupo durante a situação 1. Naquele momento, o grupo 2 explicitou a ideia de que o registro figural da parábola é uma função quadrática da forma $f(x) = x^2$. Dessa forma, percebemos que, com essa resposta, o grupo 2 percebeu que essa ideia inicial sobre o objeto matemático parábola é falsa.

Figura 34: Protocolo de resposta do Grupo 2 - Situação 3 – Atividade 2



Fonte: Produção do Grupo 2

Para concluir, os grupos foram convidados a apresentar as soluções dadas na situação 3. Para isso, organizamos os grupos solicitando que o grupo 1 iniciasse a apresentação das respostas e, em seguida, o grupo 2 poderia confrontar as respostas apresentadas pelo grupo 1.

Procuramos nesse momento estabelecer um debate e confronto das observações dos dois grupos. Nesse sentido, apresentaremos a seguir alguns diálogos durante a exposição das respostas das atividades 1 e 2:

Iniciamos o debate com as exposições dos grupos 1 e 2:

Pesquisadora: Gostaria que o grupo 1 apresentasse os resultados da atividade 1.

Grupo 1: Fizemos a construção da parábola observando o que fizemos no papel vegetal.

Pesquisadora: Como assim?

Grupo 1: Traçamos a reta d e marcamos um ponto P, depois um ponto F fora da reta d, traçamos o segmento PF e a mediatriz desse segmento, e por último traçamos a reta perpendicular passando pelo ponto P, marcamos um ponto E na intersecção entre a reta perpendicular e a mediatriz, em seguida usamos a ferramenta lugar geométrico e encontramos a parábola.

Pesquisadora: E o grupo 2, o que fizeram?

Grupo 2: Fizemos da mesma forma.

Pesquisadora: Em algum outro momento vocês já tinham utilizado a ferramenta lugar geométrico desse software?

Grupo 1: Sim. Nas aulas de geometria plana estudando a circunferência.

Pesquisadora: Vocês podem explicar como foi essa experiência?

Grupo 1: Bem, faz um tempo... não sabemos explicar. Quando acionamos a ferramenta observamos que apareceu a parábola.

Pesquisadora: Como fizeram no software para chegar à Parábola?

Grupo 1: Ficamos testando, até que lembramos que o ponto P se movimenta, daí pedimos o lugar geométrico do ponto E e depois o P.

Pesquisadora: E o grupo 2 o que pensa à respeito do resultado do grupo 1?

Grupo 2: Nós já conhecíamos a ferramenta lugar geométrico do GeoGebra.

Pesquisadora: Então, vocês sabem o que é lugar geométrico?

Grupo 2: O lugar geométrico é lugar onde os pontos obedecem à mesma propriedade. Nesse caso, percebemos que esse lugar é uma parábola.

Pesquisadora: Então, qual é a propriedade que vocês observaram nesse caso?

Grupo 2: A propriedade de equidistância entre os segmentos PE e EF.

Após o término das apresentações das soluções da atividade 1 na fase de institucionalização, a pesquisadora projetou a tela do *software* GeoGebra e juntamente com os grupos construiu a parábola com o auxílio do *software*. Oralmente a pesquisadora comentou cada uma das etapas da construção confrontando-as com as etapas da construção da parábola por meio de dobraduras. Em seguida, utilizou a ferramenta lugar geométrico para encontrar a parábola para confirmar que o lugar geométrico é apenas os pontos que obedecem à mesma propriedade, e que no caso da parábola, a propriedade é a da equidistância entre os segmentos $\overline{PE}$ e $\overline{EF}$ que definiu um dos pontos que forma e pertence à parábola. A partir desse momento, a pesquisadora definiu a parábola como lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta d , chamada diretriz, e de um ponto F, não pertencente à diretriz, chamado foco.

No momento seguinte, a pesquisadora solicitou aos grupos que comentassem as conclusões da atividade 2.

Pesquisadora: Gostaria que o grupo 1 expusesse as observações a respeito da movimentação do ponto F e a reta d .

Grupo 1: Quando distanciamos a reta d do ponto F, a concavidade da parábola vai fechando ou aumentando a abertura.

Pesquisadora: O que o grupo 2 tem a dizer sobre essa observação?

Grupo 2: Também observamos que movimentando o ponto F, quanto maior é a distância de F até a reta d , mais aberta é a parábola, o que também se observa quando se movimenta a reta d . E observamos que a concavidade da parábola é oposta à reta diretriz.

Para concluir, a pesquisadora oralmente enfatizou que eles estavam corretos nas observações. Finalizou projetando a tela do *software* e oralmente foi mostrando que a distância entre o ponto F e a reta diretriz d determina a abertura da concavidade da parábola e que a parábola pode assumir diferentes posições no plano em relação à reta diretriz.

Confrontando a análise *a priori* com a *posteriori* foi possível constatar que os grupos na atividade 1 converteram o registro figural em língua natural e na atividade 2 identificaram as

variações pertinentes de uma representação no registro figural em relação a reta diretriz e a posição da parábola no plano.

3.4.4 Análise da situação 4⁸ – Estudo da Parábola a partir de Construções Geométricas

Atividade 1

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos). Construa uma parábola por lugar geométrico e encontre o simétrico do ponto F em relação a uma reta tangente à parábola. O que você observa?

Atividade 2

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e trace uma reta diretriz e um ponto F. Encontre o lugar geométrico dos centros de circunferências que contém F e tangenciam d. Justifique sua resposta.

Atividade 3

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos). Dados um ponto A e duas retas r e s. Obtenha os pontos de r que equidistam de A e s. O que você observa? Justifique sua resposta.

Atividade 4

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e construa uma parábola dados o foco F e o vértice V. Descreva a sua construção. Qual a relação entre o ponto V e o segmento $\overline{FF'}$ (F' é o simétrico de F).

Análise a priori

Os objetivos da situação 4 são: encontrar o ponto simétrico de F em relação a reta tangente, determinar o lugar geométrico dos centros de circunferências que contém F e tangenciam d, obter os pontos de r que equidistam de A e s e construir uma parábola dados o foco F e o vértice.

Na **atividade 1**, a solução esperada é a construção de uma parábola com auxílio do *software*. Para isso, é necessário que o aluno trace uma reta d qualquer, marque o ponto F fora

⁸As atividades da situação 4 foram inspiradas e adaptadas a partir de ALMOULOU, S. A., BONGIOVANNI, V. e CAMPOS, T. M. LES CONIQUES: Construction d'une séquence didactique avec Cabri-Géomètre. Biannual International Journal: Scientia Paedagogica Experimentalis, XXXV, 1,1998, p. 119-142.

da reta d , escolha um ponto P qualquer na reta d e trace a mediatriz entre o ponto F e o ponto P , trace uma reta perpendicular interceptando o ponto escolhido e a reta d , marque o ponto R de intersecção entre a reta mediatriz e a reta perpendicular, sendo o ponto de intersecção R um ponto pertencente à parábola, e utilize a ferramenta lugar geométrico do *software* Geogebra para esboçar a parábola. E a partir do registro figural, responda em registro de língua natural que a reta mediatriz coincide com a reta tangente e o simétrico de F são os pontos da reta d em relação à tangente.

Na **atividade 2**, a solução esperada do aluno é a construção do registro figural com o auxílio do *software* GeoGebra. Para isso, é necessário que o aluno trace uma reta d qualquer, marque o ponto F fora da reta d , escolha um ponto P qualquer na reta d e trace a mediatriz entre o ponto F e o ponto P , trace uma reta perpendicular interceptando o ponto escolhido e a reta d , marque o ponto R de intersecção entre a reta mediatriz e a reta perpendicular, trace uma circunferência de centro R e raio $\overline{RP}$ e utilize a ferramenta lugar geométrico do *software* Geogebra para esboçar a parábola. E a partir do registro figural, responda em registro de língua natural que o centro da circunferência que tangencia a reta d e passa pelo ponto F é um ponto da parábola.

Na **atividade 3**, a solução esperada do aluno é a construção do registro figural com o auxílio do *software* GeoGebra. Para isso, é necessário que o aluno trace a reta s , a reta r , marque o ponto A , escolha um ponto P qualquer na reta s , trace a mediatriz entre o ponto A e o ponto P , trace uma reta perpendicular interceptando o ponto escolhido e a reta s , marque o ponto R de intersecção entre a reta mediatriz e a reta perpendicular e utilize a ferramenta lugar geométrico do *software* GeoGebra para esboçar a parábola. Esperamos que o aluno considere duas possibilidades no que se refere à posição das retas s e r no plano: s e r paralelas ou r e s concorrentes. E a partir da construção do registro figural, responda em registro de língua natural que os pontos de r que equidistam de A e s são os pontos de intersecção entre a reta r e a parábola.

Na **atividade 4**, a solução esperada do aluno é a construção do registro figural com o auxílio do *software* GeoGebra. Para isso, é necessário que o aluno marque o ponto F , o ponto V , trace uma reta passando por FV , encontre o simétrico de F , trace uma reta pelo simétrico de F e perpendicular a reta FV , escolha um ponto P qualquer na reta perpendicular a reta FV , trace a mediatriz do segmento $\overline{FP}$ e use a ferramenta lugar geométrico do *software*. E a partir da construção do registro figural, responda em registro de língua materna que o ponto V é ponto médio do segmento $\overline{FF'}$ (F' é o simétrico de F).

Para alcançar esses objetivos, é necessário que o aluno tenha os seguintes conhecimentos disponíveis: ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta perpendicular, mediatriz, simetria, reta tangente e circunferência.

Faremos a socialização das soluções encontradas. Solicitaremos que o aluno com auxílio do *software* GeoGebra apresente o registro figural das construções e concomitantemente as etapas, observações e conclusões por meio da oralidade, e a seguir a **institucionalização**.

Na fase de institucionalização, faremos a construção do registro figural com auxílio do *software* GeoGebra e mostraremos na atividade 1 que a reta mediatriz coincide com a reta tangente e o simétrico de F são os pontos da reta d em relação à tangente. Na atividade 2 que o centro da circunferência que tangencia a reta d e passa pelo ponto F é um ponto da parábola e, assim, definir a parábola como “**lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r**”. Na atividade 3 que os pontos de r que equidistam de A e s são os pontos de intersecção entre a reta r e a parábola e na atividade 4 que o ponto V é ponto médio do segmento $\overline{FF'}$.

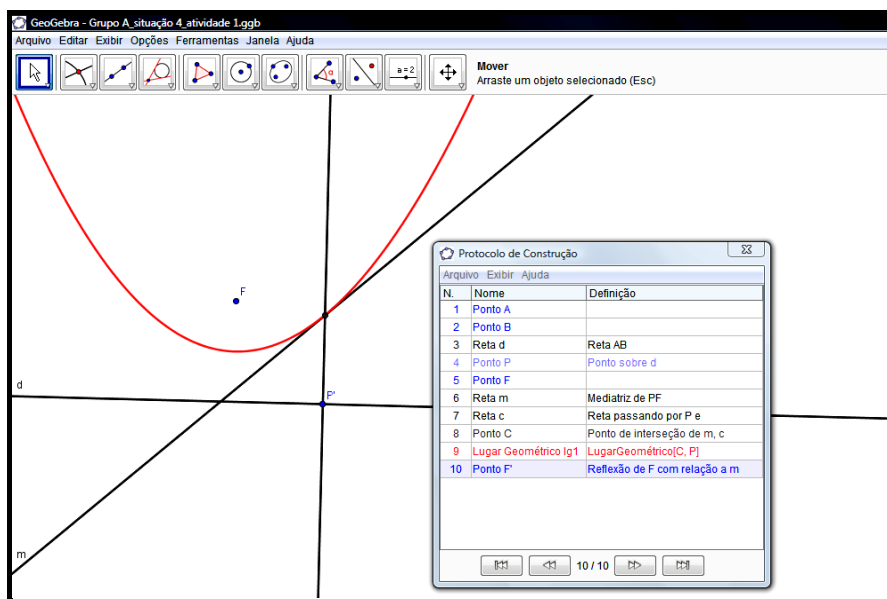
Análise a posteriori

A situação 4 foi aplicada no segundo encontro com duração de sessenta minutos; entregamos para os grupos uma folha contendo as quatro atividades e solicitamos que dessem início pela atividade 1.

Na **atividade 1**, observamos que na fase de ação os grupos abriram o *software* GeoGebra, esconderam os eixos cartesianos e a janela de álgebra, recorreram aos registros das situações anteriores para esclarecer as dúvidas no que se refere à construção da parábola por meio do lugar geométrico e buscaram interagir sobre o problema sem o auxílio ou mediação da pesquisadora. A seguir, na fase de formulação, observamos que os grupos construíram o registro figural e, na fase de validação, a respectiva observação ou justificativa para o modelo apresentado por meio de registro em língua natural.

Analisando os protocolos de construção (figura 35) verificamos que os grupos chegaram à mesma construção do registro figural. Acreditamos que essa coincidência se deve ao fato dos grupos terem associado o modelo de construção proposto nas situações 2 e 3.

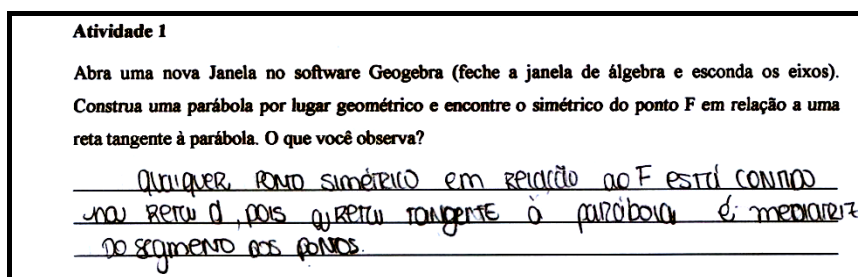
Figura 35: Protocolo de construção do Grupo 1 e 2 - Situação 4 – atividade 1



Fonte: Produção do Grupo 1

No registro em língua natural (figura 36), o grupo 1 percebeu que a reta mediatriz é a tangente e que o simétrico de F é um ponto F' pertencente à reta d.

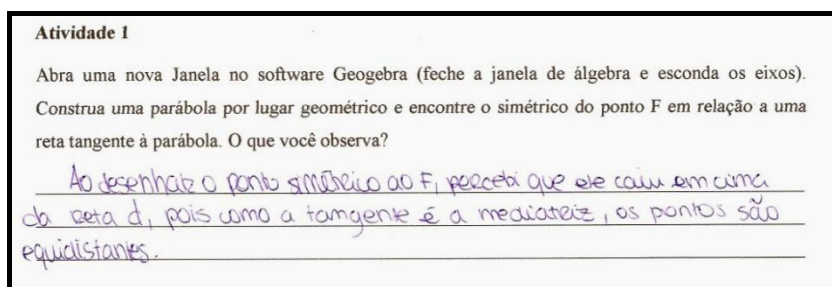
Figura 36: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 4 – atividade 1



Fonte: Produção do Grupo 1

No protocolo de resposta (figura 37), constatamos no registro em língua natural que o grupo 2 relacionou a reta mediatriz como sendo a reta tangente e o eixo de simetria para encontrar o simétrico de F.

Figura 37: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 1

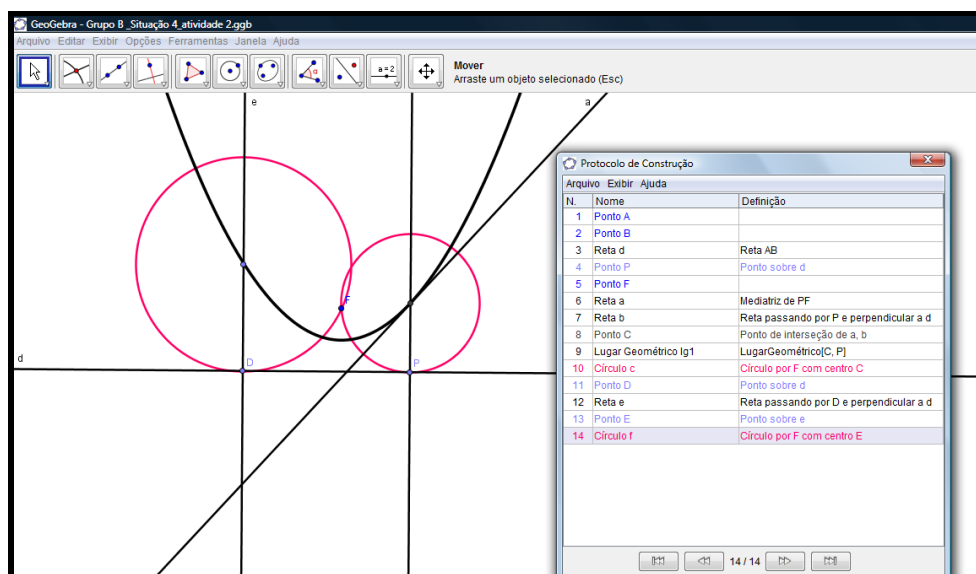


Fonte: Produção do Grupo 2

Na **atividade 2**, observamos na fase de ação que os grupos tiveram iniciativas parecidas no momento em que iniciaram o diálogo. Uma delas foi a de se apoiar nas situações anteriores e logo perceberam que o lugar geométrico que se tratava na atividade estava relacionado com a construção de uma parábola. Nesse sentido, observamos que os grupos rapidamente construíram uma parábola. Na fase de formulação, após algumas tentativas, os grupos perceberam que o centro da circunferência é um ponto da parábola. Na fase de validação construíram uma circunferência com centro no ponto da parábola tangenciando um ponto da reta d e o ponto F e repetiram a ação que tiveram para outros pontos para validar a resposta. Esse resultado causou aos grupos certo espanto no momento que concluíram que os pontos que formam a parábola são os centros de circunferências que tangenciam o ponto F e a reta d .

Nas análises dos protocolos, constatamos que as etapas de construção do registro figural dos grupos foram semelhantes, e julgamos desnecessário apresentar o resultado de ambos, uma vez que as análises serão iguais. Na figura 38 está o resultado da produção do grupo 2. Verificamos que a última ação do grupo 2 foi traçar a circunferência que tangencia F e a reta d , esperávamos que essa ação fosse logo depois, que antes encontrassem o primeiro ponto da parábola. Julgamos necessário apontar que na análise *a priori* não consideramos que o aluno pudesse elaborar o registro figural da parábola e só depois constatar que os pontos das parábolas são os centros das circunferências que tangenciam a reta d e passam pelo ponto F .

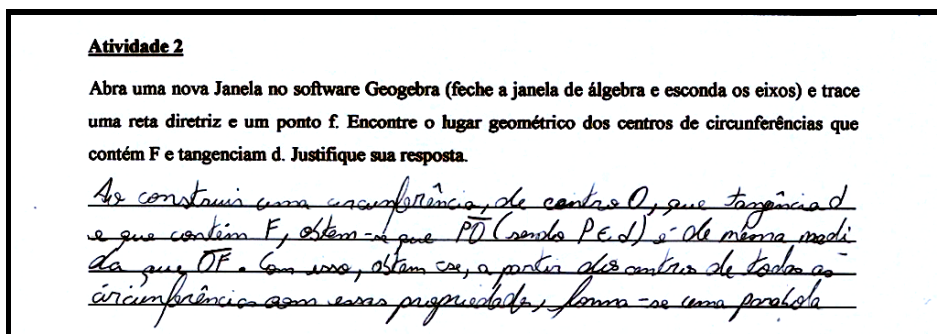
Figura 38: Protocolo de construção do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 2



Fonte: Produção do Grupo 2

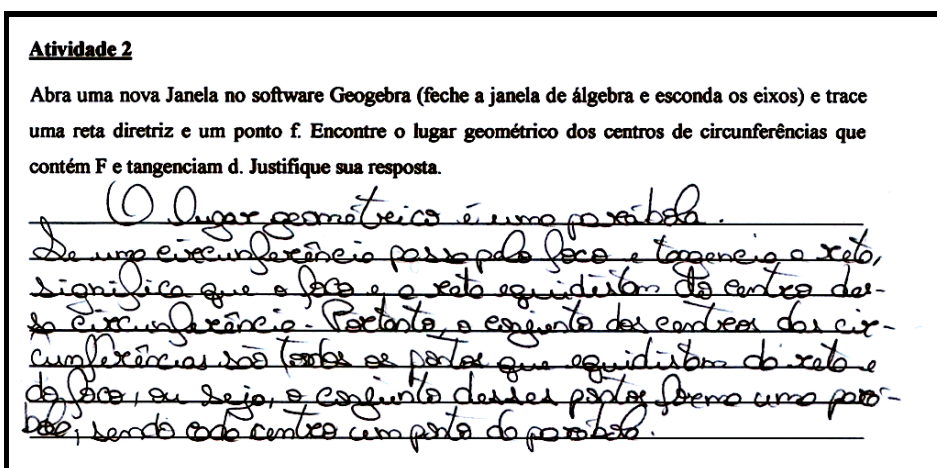
No registro em língua natural (figura 39 e 40) é possível perceber que os grupos concluíram que o lugar geométrico dos centros das circunferências é uma parábola e para essas resposta se apoiaram na propriedade de equidistância.

Figura 39: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 4 – Atividade 2



Fonte: Produção do Grupo 1

Figura 40: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 2

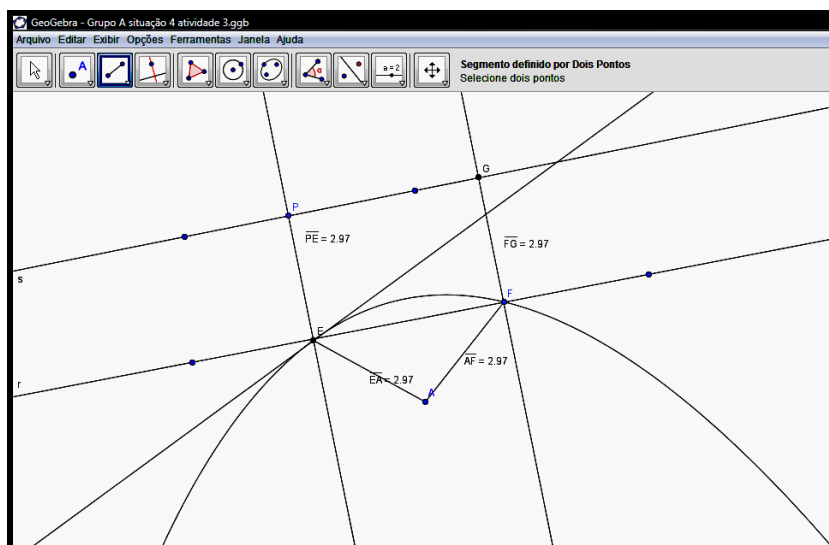


Fonte: Produção do Grupo 2

Na **atividade 3**, logo após a leitura do enunciado da questão, o grupo 1 solicitou orientação da pesquisadora para iniciar a construção. O grupo questionou se deveriam considerar as retas r e s paralelas ou concorrentes. Procuramos nesse momento devolver para o grupo a responsabilidade de investigar as formulações que o grupo elaborou. Solicitando que o grupo investigasse as duas possibilidades. Nossa postura frente ao questionamento do grupo foi devolver a responsabilidade de investigar ao grupo 1. Para Almouloud (2007) esse momento é caracterizado como *devolução*, definida como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema aceitando as consequências dessa transferência.

Constatamos que grupo 1 realizou a construção do registro figural considerando a retas r e s paralelas (figuras 41).

Figura 41: Protocolo de construção do Grupo 1 – Situação 4 – Atividade 3



Fonte: Produção do Grupo 1

Na fase de validação, o grupo 1 utilizou a ferramenta do *software* GeoGebra para medir as distâncias dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EP}$. No registro em língua natural (figura 42) constatamos que o grupo 1 confundiu o nome das retas no momento de redigir a resposta.

Figura 42: Protocolo de resposta do Grupo A – Situação 4 – Atividade 2

Atividade 3

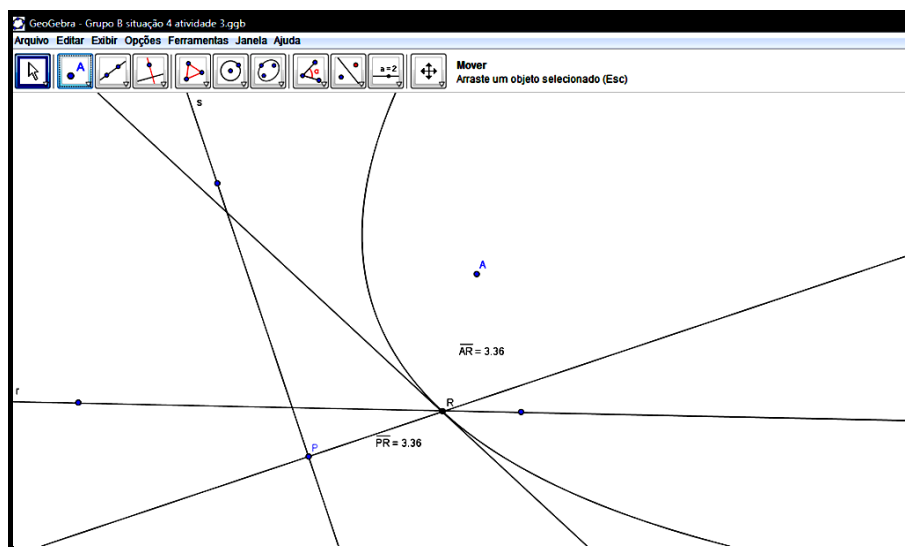
Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos). Dados um ponto A e duas retas r e s. Obtenha os pontos de r que equidistam de A e s. O que você observa? Justifique sua resposta.

os dois pontos de r que equidistam de A e s são
os dois pontos das retas s que interceptam a parábola

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 realizou a atividade 3 sem solicitar a mediação da pesquisadora e apresentou como resultado da construção a figura 43. Observamos na construção que o grupo considerou as retas r e s concorrentes e um ponto A. Evidenciamos que utilizaram a ferramenta de medidas do *software* para validar a resposta. No registro em língua natural (figura 44), o grupo 2 percebeu que para os pontos de r equidistarem de A e s é necessária a intersecção entre r e a parábola. Nesse sentido, o grupo 2 apresentou uma resposta que generaliza para os demais casos independentes da posição das retas no plano.

Figura 43: Protocolo de construção do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 2



Fonte: Produção do Grupo 2

Consideramos que as respostas dos dois grupos são adequadas e que demonstraram compreender a propriedade de equidistância.

Figura 44: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 2

Atividade 3

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos). Dados um ponto A e duas retas r e s. Obtenha os pontos de r que equidistam de A e s. O que você observa? Justifique sua resposta.

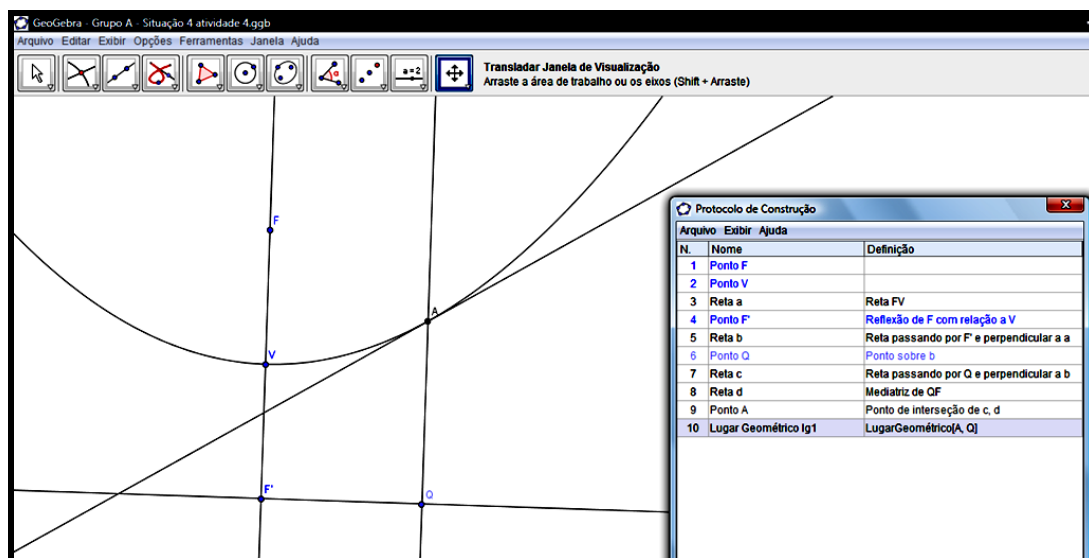
A equidistância só vai existir se os pontos que ~~fizerem~~ ^{fizerem} interseção com a reta r ~~pertencerem~~ ^{pertencerem} à parábola.

Fonte: Produção do Grupo 2

Na **atividade 4**, observamos na fase de ação que os grupos recorreram ao registro figural da parábola construído por meio de dobraduras, dobrando a folha de forma que identificaram o eixo de simetria e, em seguida, marcaram o ponto V, com o auxílio da régua mediram a distância entre a reta diretriz e o ponto F. Em seguida, constaram que V é ponto médio do segmento $\overline{FF'}$. Na fase de formulação observamos que os grupos recorreram ao *software* para construir a figura com base nas observações da fase de ação. Na fase de validação, construíram a parábola com o auxílio da ferramenta lugar geométrico e constaram que o segmento de reta $\overline{FF'}$ é o eixo de simetria da parábola e o ponto V o vértice da parábola.

No protocolo de construção (figura 45), constamos que o grupo 1 construiu o registro figural esperado.

Figura 45: Protocolo de construção do Grupo 1 – Situação 4 – atividade 4



Fonte: Produção do Grupo 1

O protocolo de resposta (figura 46) registro em língua natural vem ao encontro das etapas de construção elaboradas pelo grupo e conclusão que o ponto V é ponto médio do segmento $\overline{FF'}$.

Figura 46: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 4 – Atividade 4

Atividade 4

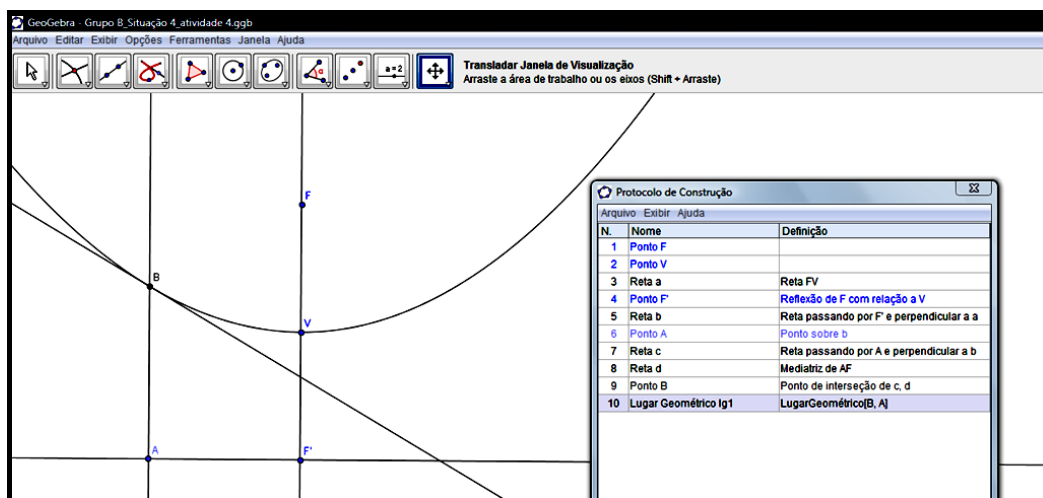
Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e construa uma parábola dados o foco F e o vértice. Descreva a sua construção. Qual a relação entre o ponto V e o segmento $\overline{FF'}$.

Antes os pontos F e V, determina-se o ponto F' que seja simétrico a F em relação a V. Traça-se uma reta d que passe por F', e que seja perpendicular ao segmento $\overline{FF'}$. Na reta d, escolhe-se um ponto qualquer (diferente de F'). Traça-se a reta b, perpendicular a d, que passe pelo ponto Q. Traça-se a mediatriz do segmento QF, encontra-se um ponto A tal que $AF = AQ$. O lugar geométrico de todos os pontos tais que obedeça a mesma propriedade de A, ao variar-se Q ao longo da reta d determina uma parábola. O ponto V é o ponto médio do segmento $\overline{FF'}$.

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 apresentou resultado semelhante ao do grupo 1 na construção do registro figural (figura 47) e no protocolo de resposta do registro em língua natural (figura 48).

Figura 47: Protocolo de construção do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 4



Fonte: Produção do Grupo 2

Na figura 48 podemos constatar as conclusões do grupo B no que se refere à relação entre o ponto V e o segmento $\overline{FF'}$ e à descrição da construção.

Figura 48: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 4 – Atividade 4

Atividade 4

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e construa uma parábola dados o foco F e o vértice. Descreva a sua construção. Qual a relação entre o ponto V e o segmento $\overline{FF'}$.

O vértice V é um ponto da parábola, logo ele equidista do foco F e da diretriz. Assim, tomamos uma reta que contenha F, V e, pelo ponto V, encontramos a simétrica a F, isto é, F'. A partir de F' traçamos a diretriz, que é perpendicular à reta que contém F e V. A partir da diretriz, tomamos o lugar geométrico dos pontos que equidistam do foco e da mediatriz, que é a parábola.

O Vértice V é o ponto médio do segmento $\overline{FF'}$, já que equidista do foco e da diretriz. No caso, $\overline{VF'}$ é a distância entre V e a diretriz.

Fonte: Produção do Grupo 2

Após o término da situação 4 e o avançar do tempo não foi possível organizar um momento para socializar as soluções encontradas pelos grupos, conforme previsto na análise *a priori*. Nesse sentido, a pesquisadora priorizou a fase de institucionalização, e para isso, oralmente e com o auxílio do software GeoGebra (projetado), construiu cada uma das figuras e comentou sobre as propriedades matemáticas envolvidas nas construções previstas na análise *a priori*. Na atividade 1 que a reta mediatriz coincide com a reta tangente e o simétrico de F são os pontos da reta d em relação à tangente, na atividade 2 que o lugar geométrico dos

centros das circunferências que tangenciam a reta d e passa pelo ponto F é uma parábola, na atividade 3 que os pontos de r que equidistam de A e s são os pontos de intersecção entre a reta r e a parábola e na atividade 4 que o ponto V é ponto médio do segmento $\overline{FF'}$.

Confrontando, a análise *a priori* com a *posteriori*, consideramos que os alunos realizaram as conversões de registro de linguagem natural (registro de partida) para o registro figural (registro de chegada) e vice-versa. Para isso, nos apoiamos no aspecto que toda conversão tem um sentido a ser considerado. O sentido considerado para a conversão nas atividades foi do registro em linguagem natural (enunciados das atividades) para os registros figurais (as construções) e dos registros figurais para o registro em linguagem natural (justificativas) em ambos os sentidos os grupos chegaram aos resultados esperados. Entendemos que se apropriaram do funcionamento representacional próprio de um registro e, por consequência, das unidades significantes do objeto representado. Além disso, o registro em língua natural constitui um registro à parte, e não somente em razão de sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela oferece, mas também em razão de sua prioridade.

Compreendemos que os grupos organizaram o registro em linguagem natural a partir da discriminação das unidades significantes por comparação experimental, ou seja, a construção realizada com o auxílio do *software* GeoGebra é um registro figural que representa a solicitação inicial da atividade e o registro em língua materna são os aspectos observados a partir dos significados que os grupos perceberam sobre o objeto matemático.

3.4.5 Análise da situação 5 – Estudo da Distância entre Dois Pontos no Plano Cartesiano

Atividade 1

Abra uma nova Janela no software Geogebra (exibir eixos e malha) e marque os pontos $A(4,5)$ e $B(8,2)$ e trace o segmento $\overline{AB}$.

- a) Determine a distância entre A e B sem usar a ferramenta medir do geogebra
- b) Determine uma regra para calcular a distância entre dois pontos.

Análise a priori

O objetivo da situação 5 é encontrar uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Essa situação foi organizada para introduzir o cálculo da distância entre dois pontos no domínio da Geometria Analítica uma vez que alunos do Ensino Médio geralmente tem contato com esse conteúdo somente no terceiro ano do Ensino Médio. Os conhecimentos esperados para a solução dessa situação são: triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, plano cartesiano e coordenadas cartesianas.

Na **atividade 1**, esperamos que o aluno abra a janela do Geogebra e exiba os eixos e localize os pontos A (4,5) e B(8,2). Em seguida, trace um segmento de reta $\overline{AB}$.

Para o **item (a)**, esperamos que o aluno relacione o segmento $\overline{AB}$ com a hipotenusa de um triângulo retângulo. Para isso, temos a hipótese que o aluno construa um triângulo retângulo traçando a perpendicular pelo ponto A e uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto B. Acreditamos que o aluno utilize o Teorema de Pitágoras para calcular a distância do segmento $\overline{AB}$, estabelecendo dessa forma a solução $(\overline{AB})^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow (\overline{AB})^2 = 25$, logo $AB = 5$.

No **item (b)**, esperamos que o aluno observe que o cateto paralelo ao eixo x tem medida $|8 - 4| = 4$ e o cateto paralelo ao eixo y mede $|5 - 2| = 3$ para aplicar o teorema. Nesse sentindo, esperamos que o aluno escreva uma regra para o cálculo das distâncias entre dois pontos para usar em outros pontos no plano cartesiano. A regra esperada é $d(A,B) = \sqrt{(c - a)^2 + (b - d)^2}$, onde a e c pertencem ao eixo x e b e d pertencem ao eixo y.

Faremos a socialização dos resultados encontrados para a situação 5, solicitaremos que o aluno explicita a solução encontrada no quadro por meio de registros figurais e algébricos concomitante às observações e conclusões oralmente e, posteriormente, a **institucionalização**. Institucionalização da definição de distância entre dois pontos na Geometria Analítica que será indicada por $d(A, B)$ sendo $d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (b - d)^2}$.

Análise a posteriori

A situação 5 foi aplicada no terceiro encontro com duração de aproximadamente vinte minutos. A pesquisadora entregou a folha com a situação descrita e os grupos iniciaram a resolução.

Observamos na fase de ação que os grupos iniciaram marcando os pontos A e B nos eixos cartesianos e, em seguida, traçaram o segmento $\overline{AB}$, após essa ação na fase de formulação perceberam que a medida da distância do segmento $\overline{AB}$ é calculada por meio da

relação do Teorema de Pitágoras. E por fim, na fase da validação, demonstraram a validade do modelo expressando uma regra.

Evidenciamos nos protocolos de respostas dos grupos (figura 49 e 50) que ambos concluíram que o cálculo da distância entre dois pontos no domínio da Geometria Analítica pode ser obtido por meio da relação do Teorema de Pitágoras.

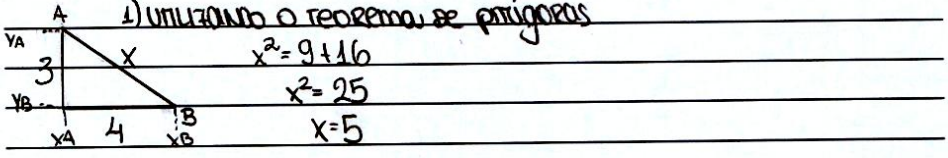
Figura 49: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 5 – Atividade 1 – (a) e (b)

Atividade 1

Abra uma nova Janela no software Geogebra e marque os pontos A (4,5) e B(8,2) e trace o segmento AB.

a) Determine a distância entre A e B sem usar a ferramenta medir do geogebra.

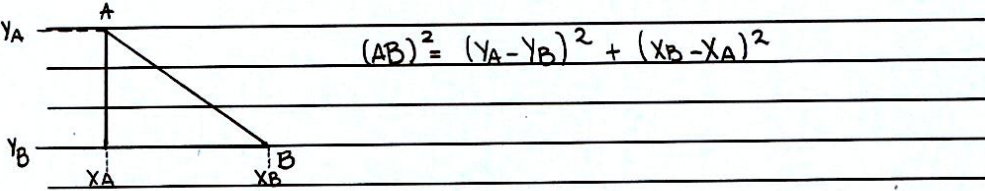
1) UTILIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS



$x^2 = 9 + 16$
 $x^2 = 25$
 $x = 5$

$(y_A - y_B) = 3$
 $(x_B - x_A) = 4$

b) Determine uma regra para calcular a distância entre dois pontos.



$(AB)^2 = (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2$

Fonte: Produção do Grupo 1

Observamos no protocolo do grupo 1 (figura 49) que se apoiaram no Teorema de Pitágoras para justificar as respostas dos itens a e b. A partir das informações do item (a) construíram um registro de representação figural do triângulo retângulo e por meio da aplicação direta do Teorema de Pitágoras encontraram a medida do segmento efetuando o tratamento na expressão algébrica.

No item (b), o grupo 1 elaborou o registro de representação figural do triângulo retângulo apoiado na relação que estabeleceram com as medidas dos catetos com os eixos cartesianos x e y, associando aos vértices variáveis para representar os valores numéricos nos eixos.

A seguir, no protocolo de resposta do grupo 2 (figura 50), a resposta está justificada por meio do Teorema de Pitágoras. As conclusões dos itens (a) e (b) por meio dos registros algébricos e linguagem natural. No item (a) o registro de partida é o algébrico e o de chegada em linguagem natural, e o item (b) registro de partida em linguagem natural e o de chegada registro algébrico.

Figura 50: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 5 – Atividade 1 – (a) e (b)

Atividade 1

Abra uma nova Janela no software Geogebra e marque os pontos A (4,5) e B(8,2) e trace o segmento AB.

a) Determine a distância entre A e B sem usar a ferramenta medir do geogebra.

$$(AB)^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow (AB)^2 = 16 + 9 \rightarrow \boxed{AB = 5}$$

→ Por pitágoras, chega-se que a distância AB os quadrados é igual a diferença lateral entre os pontos os quadrados $(8-4)^2$ mais a diferença de altura entre os pontos os quadrados $(5-2)^2$

b) Determine uma regra para calcular a distância entre dois pontos.

A distância entre dois pontos elevando os quadrados é igual à diferença lateral os quadrados mais a diferença entre as alturas os quadrados.

Dois dois pontos: A(l,m) e B(n,p)

$$(AB)^2 = (l-n)^2 + (m-p)^2$$

↓ ↓
diferença lateral diferença entre alturas, isto é, entre as ordenadas.
ou seja, entre as coordenadas de eixo x, ou seja, entre as abscissas dos 2 pontos

Fonte: Produção do Grupo 2

Para concluir, a pesquisadora solicitou aos grupos apresentação das soluções encontradas dos itens (a) e (b). A exposição das soluções foi realizada em um quadro onde puderam escrever as soluções encontradas. Durante esse momento os grupos não apresentaram dúvidas a respeito do que estava sendo apresentado, o diálogo entre os alunos girou em torno da percepção que tiveram que o segmento $\overline{AB}$ que foi comparado com a hipotenusa de um triângulo retângulo.

No momento seguinte, a pesquisadora dirigiu-se ao quadro e retomou as soluções apresentadas pelos grupos oralmente reconhecendo que estavam corretos. Por fim, no quadro,

definiu que o cálculo da distância entre dois pontos na Geometria Analítica será indicado por $d(A, B)$ sendo $d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (b - d)^2}$, sendo **a** e **c** as abscissas dos pontos e **b** e **d** as ordenadas.

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori* concluímos que os grupos se apropriaram do cálculo da distância entre dois pontos no domínio da Geometria Analítica, encontraram a regra esperada apoiados no Teorema de Pitágoras, realizaram corretamente o tratamento algoritmizável até chegarem ao registro algébrico da regra.

3.4.6 Análise da situação 6 – Estudo da Parábola no Domínio da Geometria Analítica

Atividade 1

Nas situações anteriores chegamos a uma definição matemática para Parábola que será utilizada nesta atividade. Qual é ela?

Abra uma janela no *software* Geogebra.

- Determine o ponto $F(2,3)$ e a reta d , paralela ao eixo x , que passa pelo ponto $A(0,-2)$. Considere F como o foco de uma parábola e a reta d como sua diretriz. Tome um ponto P na reta d e determine um ponto Q da parábola. Determine as coordenadas dos pontos P e Q .
- Utilizando a definição de parábola vista até agora e a situação 5, determine a equação dessa Parábola. Para certificar se a equação está correta esconda o lugar geométrico e determine no ícone “cônicas” a parábola por diretriz e foco. No ícone exibir janela de álgebra compare os resultados.
- Vamos generalizar a equação de uma parábola. Considerando que a reta diretriz tenha equação $y = c$, um ponto dessa reta é $P(x, c)$ o foco $F(0, c)$ e $Q(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à parábola. Encontre a equação geral da Parábola.

Atividade 2

- Construa no Geogebra uma parábola com a diretriz paralela ao eixo y . Movimente os pontos de base.
- Agora determine a equação de uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo y .

Análise a priori

O objetivo da Situação 6 é encontrar a expressão algébrica da parábola no domínio da Geometria Analítica.

Na **atividade 1**, esperamos que o aluno responda em registro de língua natural a partir das situações anteriores uma das definições enunciadas: “lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta r , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz, chamado foco” ou “lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r ” ou “dado uma reta d chamada diretriz e um ponto F não pertencente à reta d , a parábola é o conjunto de pontos que equidistam da reta d e o ponto F ”.

No **item (a)**, esperamos que o aluno construa um registro gráfico. Para isso, é necessário que abra a janela do *software* Geogebra, acione o ícone exibir eixos e marque os pontos $F(2,3)$ e $A(0,-2)$, trace a reta d paralela ao eixo x passando pelo ponto A e aleatoriamente escolha um ponto P na reta d , trace a mediatriz do segmento $\overline{FP}$ e, em seguida, trace uma reta perpendicular passando pelo ponto P , na intersecção entre as retas mediatriz e perpendicular o ponto Q . Por fim, acione o ícone lugar geométrico para encontrar a parábola.

As respostas esperadas do aluno em registro algébrico são os pontos $P(x, -2)$ como representante dos infinitos pontos pertencentes à reta diretriz e $Q(x, y)$ como representante dos infinitos pontos que pertencem à parábola.

No **item (b)**, esperamos que o aluno responda em registro algébrico $d(F, Q) = d(Q, P) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow 4y = x^2 - 4x - 6y + 9 \Rightarrow$
 $y = \frac{x^2 - 4x + 9}{10}$

No **item (c)**, esperamos que o aluno responda em registro algébrico $d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-x)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} \Rightarrow (y-c)^2 = x^2 + (y+c)^2 \Rightarrow$
 $y^2 - 2cy + c^2 = x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \Rightarrow x^2 = -4cy$, com equação da reta diretriz $y = c$ e
 $d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2} \Rightarrow x^2 + (y-c)^2 =$
 $(y+c)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2 \Rightarrow x^2 = 4cy$, com equação da reta diretriz $y = -c$.

Na **atividade 2**, esperamos que o aluno mobilize e relacione os resultados da atividade 1 item (c) e encontre por meio do cálculo da distância entre dois pontos a equação de parábola.

No **item (a)**, esperamos que o aluno construa a parábola e movimente os pontos de base e observe que a reta diretriz paralela ao eixo y assume a equação $x = -c$ ou $x = c$.

No **item (b)**, esperamos que o aluno responda em registro algébrico $d(F, Q) = d(Q, P) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2} \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2})^2 = (\sqrt{0 + y^2 + 2yc + c^2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2yc + c^2 \Rightarrow x^2 = 4cy$, com reta diretriz paralela ao eixo x de equação $x = -c$ e $d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-x)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} \Rightarrow (y-c)^2 = x^2 + (y+c)^2 \Rightarrow y^2 - 2cy + c^2 = x^2 + y^2 + 2cy + c^2 \Rightarrow x^2 = -4cy$, com reta diretriz paralela ao eixo x de equação $x = c$

Os conhecimentos esperados para a solução da situação são: cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano e equação da reta.

Solicitaremos ao aluno a socialização dos resultados na atividade 1, exposição oral da definição de parábola, a construção do registro figural com auxílio do *software* concomitante às etapas da construção e às conclusões por meio da oralidade e, para a atividade 2, a solução será apresentada no quadro por meio dos registros gráficos e algébricos e concomitantemente as observações e conclusões oralmente, e posteriormente a **institucionalização**.

Na fase de Institucionalização, retomaremos as definições do objeto matemático parábola enquanto lugar geométrico “lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta r , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz, chamado foco”, “lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r ” e “Dado uma reta d chamada diretriz e um ponto F não pertencente à reta d a parábola é o conjunto de pontos que equidistam da reta d e o ponto F ”. E definiremos objeto matemático parábola enquanto lugar geométrico no domínio da Geometria Analítica: “Sejam r uma reta e F um ponto qualquer não pertencente a r , F e chamado de foco e a reta r diretriz. O lugar geométrico dos pontos Q de coordenadas cartesianas $(x; y)$ é definido por $d(F, Q) = d(Q, P)$ ”. Mostraremos que as equações de parábolas encontradas são generalizações para casos em que o vértice da parábola tem coordenada $(0,0)$.

Análise a posteriori

A situação 6 foi aplicada no terceiro encontro com duração de sessenta minutos e a organização dos grupos permaneceu inalterada.

Observamos na fase de ação que os grupos para responderem a atividade 1, referente a definição de parábola, recorreram aos registros das situações anteriores. Em seguida, abriram

o *software* e acionaram o ícone eixos cartesianos e marcaram os pontos F e A. Na fase de formulação os grupos marcaram aleatoriamente o ponto P na reta d e encontraram a reta mediatriz do segmento $\overline{FP}$ e traçaram uma reta perpendicular passando pelo ponto P. Na fase de validação, acionaram a ferramenta lugar geométrico do *software* e encontraram a parábola.

Figura 51: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 1

Atividade 1

Nas situações anteriores chegamos a uma definição matemática para Parábola que será utilizada nesta atividade. Qual é ela?

A parábola é o lugar geométrico de um conjunto de pontos que o F, que é o foco, equidista da curva até um ponto na DIRETRIZ.

Fonte: Produção do Grupo 1

Nos protocolos de respostas (figura 51 e 52), os grupos em registro de língua natural definiram o objeto matemático parábola como lugar geométrico dos pontos que obedecem à propriedade de equidistância entre os elementos F (foco) e reta diretriz d.

Figura 52: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 6 – Atividade 1

Atividade 1

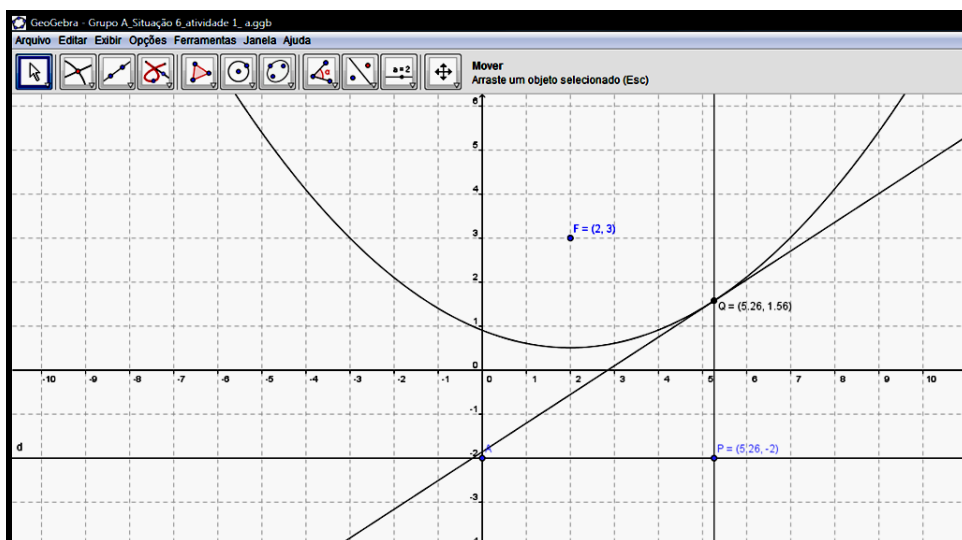
Nas situações anteriores chegamos a uma definição matemática para Parábola que será utilizada nesta atividade. Qual é ela?

A partir de uma reta diretriz e de um ponto do foco F a parábola é a união de todos os pontos equidistantes do foco e da reta.

Fonte: Produção do Grupo 2

Na atividade 1 item (a), constatamos que os grupos converteram o registro algébrico para o registro gráfico (figura 53) e perceberam que movimentando o ponto P o valor de x sofre variações e movimentando o ponto Q as variações ocorrem nos valores de x e y (figura 54).

Figura 53: Protocolo de construção do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 1 (a)



Fonte: Produção do Grupo 1

Ambos os grupos elaboraram a mesma construção com o auxílio do *software* e respostas idênticas para o item (a). Dessa forma, consideramos a mesma análise para os grupos.

Figura 54: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 1 (a)

Abra uma janela no *software* Geogebra.

a) Determine o ponto $F(2,3)$ e a reta d , paralela ao eixo x , que passa pelo ponto $A(0,-2)$. Considere F como o foco de uma parábola e a reta d como sua diretriz. Tome um ponto P na reta d e determine um ponto Q da parábola. Determine as coordenadas dos pontos P e Q .

$P(x, -2)$

$Q(x, y)$

Fonte: Produção do Grupo 1

No item (b), na fase de ação, observamos que os grupos utilizaram os resultados obtidos no item anterior das coordenadas P e Q para formular que $d(F,Q)=d(Q,P)$ e no momento da validação compararam o resultado da expressão algébrica obtida por meio do cálculo da distância com o resultado exibido pelo *software*. Converteram o registro gráfico para o registro algébrico (figura 55 e 56) relacionando a definição de parábola enquanto lugar geométrico a partir da propriedade de equidistância entre os pontos F (foco), P e Q no domínio da Geometria Analítica e utilizaram o cálculo da distância entre dois pontos como uma ferramenta para chegar ao resultado esperado.

Figura 55: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 1 (b)

b) Utilizando a definição de parábola vista até agora e a situação 5 determine a equação dessa Parábola. Para certificar se a equação está correta esconda o lugar geométrico e determine no ícone “cônicas” a parábola por diretriz e foco. No ícone exibir janela de álgebra compare os resultados.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(\hat{F}, \hat{Q}) = d(\hat{P}, \hat{Q})$$

$$\sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+2)^2}$$

$$\sqrt{4-4x+x^2+9-6y+y^2} = \sqrt{0+y^2+4y+4}$$

$$x^2-6y+x^2-4x+13 = y^2+4y+4$$

$$x^2-4x-10y = 4-13$$

$$x^2-4x-10y = -9$$

Fonte: Produção do Grupo 1

A partir do resultado apresentado pelos grupos, compreendemos que o procedimento de correspondência das duas representações pertencentes a registros diferentes foram estabelecidos localmente pelos alunos, por meio de uma correspondência associativa das unidades significantes elementares entre a distância dos pontos F, Q e P constitutivas de cada um dos dois registros.

Figura 56: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 6 – Atividade 1 (b)

b) Utilizando a definição de parábola vista até agora e a situação 5 determine a equação dessa Parábola. Para certificar se a equação está correta esconda o lugar geométrico e determine no ícone “cônicas” a parábola por diretriz e foco. No ícone exibir janela de álgebra compare os resultados.

$$d(F,Q) = d(P,Q)$$

$$\sqrt{(x_F - x_Q)^2 + (y_F - y_Q)^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

$$\sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (-2-y)^2}$$

$$4-4x+x^2+9-6y+y^2 = 4+4y+y^2$$

$$x^2-4x+9-10y = 0$$

Fonte: Produção do Grupo 2

No item (c), na fase de ação, constamos que os grupos tiveram ações diferentes para formular a solução. O grupo 1 optou por um registro gráfico e grupo 2 por justificativas a partir da percepção que o ponto do foco não pertence à reta diretriz. A partir dos modelos elaborados perceberam que a reta diretriz pode ser de equação $y = c$ ou $y = -c$ e que para generalizar a equação de uma parábola é necessário considerar cada um dos casos. Para

validar o modelo, os grupos utilizaram o cálculo da distância entre dois pontos no domínio da Geometria Analítica.

Nos protocolos de respostas (figura 57 e 58) dos grupos, verificamos que a resposta foi em registro algébrico definido a partir da relação de equidistância no domínio da geometria analítica e do cálculo da distância entre pontos.

Consideramos que o grupo 1 converteu o registro gráfico elaborado para chegar ao registro algébrico apoiando-se nas unidades significantes da definição do objeto matemático parábola (coordenada do foco e reta diretriz).

Figura 57: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 1 (c)

c) Vamos generalizar a equação de uma parábola. Considerando que a reta diretriz tenha equação $y = c$, um ponto dessa reta é $P(x, c)$ o foco $F(0, c)$ e $Q(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à parábola. Encontre a equação geral da Parábola.

$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
 $d(F, Q) = d(Q, P)$
 $F(0, c)$
 $Q(x, y)$
 $P(x, c)$
 $F(0, -c)$
 $P(x, -c)$
 $Q(x, y)$

1) $d(F, Q) = d(Q, P)$	2) $d(F, Q') = d(Q', P')$
$\sqrt{(0-x)^2 + (c-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-c)^2}$	$\sqrt{(0-x)^2 + (c-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-c)^2}$
$x^2 + c^2 + 2cy + y^2 = x^2 - 2cy + c^2$	$x^2 + c^2 - 2cy + y^2 = x^2 + 2cy + c^2$
$x^2 + 4cy = 0$	$x^2 - 4cy = 0$
$4cy = -x^2$	$-4cy = -x^2$
$y = \frac{-x^2}{4c}$	$y = \frac{x^2}{4c}$

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 observou que as equações de parábolas encontradas se referem a parábolas cujo vértice tem coordenada $(0,0)$.

Figura 58: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 6 – Atividade 1 (c)

c) Vamos generalizar a equação de uma parábola. Considerando que a reta diretriz tenha equação $y = c$, um ponto dessa reta é $P(x, c)$ o foco $F(0, c)$ e $Q(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à parábola. Encontre a equação geral da Parábola.

A diretriz não pode passar pelo foco, logo se $y = -c$, $F(0; -c)$ e se $y = c$, $F(0; c)$

$$FQ = PQ \rightarrow \sqrt{(0-x)^2 + (c-y)^2} = \frac{y-c}{PQ}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + c^2 - 2cy + y^2} = y - c \rightarrow x^2 + c^2 + 2cy + y^2 = y^2 - 2cy + c^2$$

$$\rightarrow x^2 + 4cy = 0$$

$$\rightarrow y = -\frac{x^2}{4c}$$

OU: $\sqrt{(0-x)^2 + (c-y)^2} = y + c \rightarrow \sqrt{x^2 + c^2 - 2cy + y^2} = y + c$

$$\rightarrow x^2 + c^2 - 2cy + y^2 = y^2 + 2cy + c^2$$

$$\rightarrow -4cy = 0 \rightarrow y = 0$$

Ambas as
casos: vértice é $(0; 0)$

Fonte: Produção do Grupo 2

Acreditamos que a conclusão do grupo tenha relação com a situação 4, atividade 4, que problematizou a construção da parábola no domínio da Geometria a partir dos pontos V (vértice) e F (foco). Além disso, o grupo sinalizou que por meio da expressão algébrica é possível determinar a posição da concavidade da parábola em relação à reta diretriz. Entendemos que essas respostas possam ter relação com experiências de aprendizagens anteriores, principalmente durante o estudo das funções quadráticas.

Antes de prosseguir para a atividade 2, a pesquisadora solicitou aos grupos que apresentassem os resultados encontrados na atividade 1, com a finalidade de propiciar um momento em os grupos pudesse interagir e trocar informações. Na atividade 1, no que se refere à definição matemática de parábola, ambos verbalizaram as respostas e ponderaram que as respostas foram equivalentes. Na atividade 1, item (a), projetamos a tela do *software* GeoGebra e pedimos ao grupo 1 que apresentasse a construção da parábola e as considerações das etapas da construção e conclusão por meio da oralidade e, para o grupo 2, solicitamos que observasse para poder opinar quanto à resposta. A solução apresentada pelo grupo 1 foi aceita pelo grupo 2 sem gerar debate. No item (b), a pesquisadora solicitou ao grupo 2 para apresentar a solução encontrada no quadro e, para o grupo 1, observar e opinar quanto à solução, o grupo 1 concordou com a resposta.

Para concluir, no item (c), a pesquisadora pediu para o grupo 1 apresentar a solução encontrada no quadro e, para o grupo 2, observar e opinar sobre a solução. O grupo 1 esboçou o gráfico e verbalizou que para generalizar a equação de parábola precisou considerar duas situações a partir do gráfico “a primeira com a equação da reta diretriz $y = -c$ em que as coordenadas para os pontos são $F(0, c)$, $P(x, -c)$ e $Q(x, y)$, a outra com a equação da reta diretriz $y = c$ e coordenadas $F(0, -c)$, $P(x, c)$ e $Q(x, y)$ ”, o grupo 2 verbalizou que percebeu que “existiam duas situações observando as coordenadas do enunciado do problema” e argumentou “que a coordenada do foco coincide com o valor c da equação da reta diretriz, o que nos levou a pensar em outras possibilidades, porque a coordenada do foco não pertence à reta diretriz”.

Após as apresentações, a pesquisadora comentou oralmente que as soluções encontradas pelos grupos estavam corretas. Em seguida, relembrou oralmente e registrou no quadro as definições de parábolas discutidas até o momento “lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta r , chamada diretriz, e de um ponto F , não pertencente à diretriz, chamado foco”, “lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F (foco) e tangenciam a reta diretriz r ” e “Dado uma reta d chamada diretriz e um ponto F não pertencente à reta d a parábola é o conjunto de pontos que equidistam da reta d e o ponto F ”. E por fim, definiu a parábola enquanto lugar geométrico no domínio da Geometria Analítica “Sejam r uma reta e F um ponto qualquer não pertencente a r , F é chamado de foco e a reta r diretriz. O lugar geométrico dos pontos Q de coordenadas cartesianas $(x; y)$ é definido por $d(F, Q) = d(Q, P)$ ”.

Observamos na atividade 2, item (a), que os grupos na fase de ação construíram a parábola com o auxílio do *software*, selecionaram um ponto na reta d e o movimentaram; na fase de formulação, perceberam que ao movimentar o ponto a parábola também era movimentada para a esquerda e direita e concluíram que a reta diretriz é oposta a concavidade da parábola.

No protocolo de resposta (figura 59 e 60), os grupos concluíram as observações por meio de um registro de língua natural.

Figura 59: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 1 (a)

Atividade 2

a) Construa no Geogebra uma parábola com a diretriz paralela ao eixo y. Movimente os pontos de base. O que você observa?

ao movimentar o ponto D, observei que ou a concavidade da parábola (sempre oposta à reta diretriz) está para a esquerda, ou para a direita

Fonte: Produção do Grupo 1

Durante a realização da atividade foi possível observar a expressão de surpresa dos alunos do grupo 2 no que se refere perceber que a parábola assumiu outras posições no plano, as quais os alunos desconheciam.

Figura 60: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 6 – Atividade 1 (a)

Atividade 2

a) Construa no Geogebra uma parábola com a diretriz paralela ao eixo y. Movimente os pontos de base. O que você observa?

Concavidade da parábola ficaria voltada para a esquerda ou para a direita, ao invés de para cima ou para baixo. A concavidade da parábola permaneceria voltada para o lado oposto à reta diretriz.

Fonte: Produção do Grupo 2

Ao perceber a surpresa dos alunos do grupo 2, a pesquisadora aproximou-se dos alunos e questionou:

Pesquisadora: Então, o que perceberam quando movimentaram o ponto F e o ponto da reta diretriz?

Grupo 2: Percebemos que a reta diretriz mostra o sentido da parábola, para a direita ou esquerda e a parábola fica oposta.

Pesquisadora: O que mais vocês perceberam?

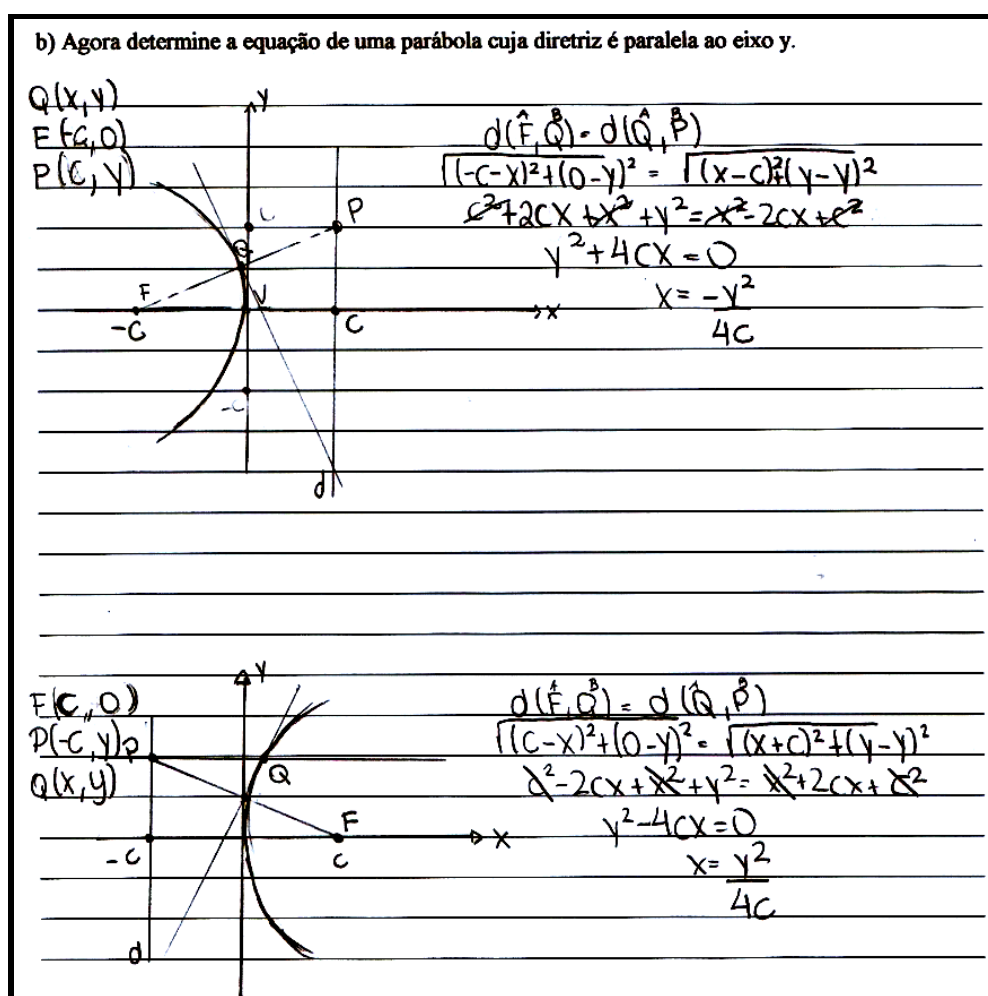
Grupo 2: Bem, nos não sabíamos que as parábolas poderiam ficar para a direita e esquerda. Achamos que era voltada para baixo ou para cima, como se estuda em função do 2º grau.

A pesquisadora procurou não emitir um parecer imediato sobre as respostas do grupo, porque entendemos que a descoberta, o repertório dos modelos de ação e o modo como se estabelecem são complexos e a aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados. Segundo Brousseau (2008, p. 29) defende: “A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico)”.

No item (b), observamos que os grupos na fase de ação construíram um registro gráfico a partir da experiência que tiveram na atividade 1 item (c). Para construir o registro gráfico, formularam duas situações possíveis, considerando a reta diretriz com a equação $x = c$ e $x = -c$. Relacionamos os resultados obtidos pelos grupos em decorrência das atividades anteriores e a partir da simulação no *software*. Na fase de validação, os grupos recorreram ao cálculo da distância entre os pontos e encontraram as equações.

Constatamos a partir dos protocolos de respostas (figura 61 e 62) que os grupos identificaram as unidades significantes do objeto matemático parábola (as coordenadas do foco, um ponto pertencente à reta d e um ponto Q pertencente à curva). Em nosso entendimento, os alunos demonstraram que se apropriaram tanto das definições pertinentes ao objeto quanto dos tipos de registros de representação semiótica e das conversões.

Figura 61: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 6 – Atividade 2 (b)

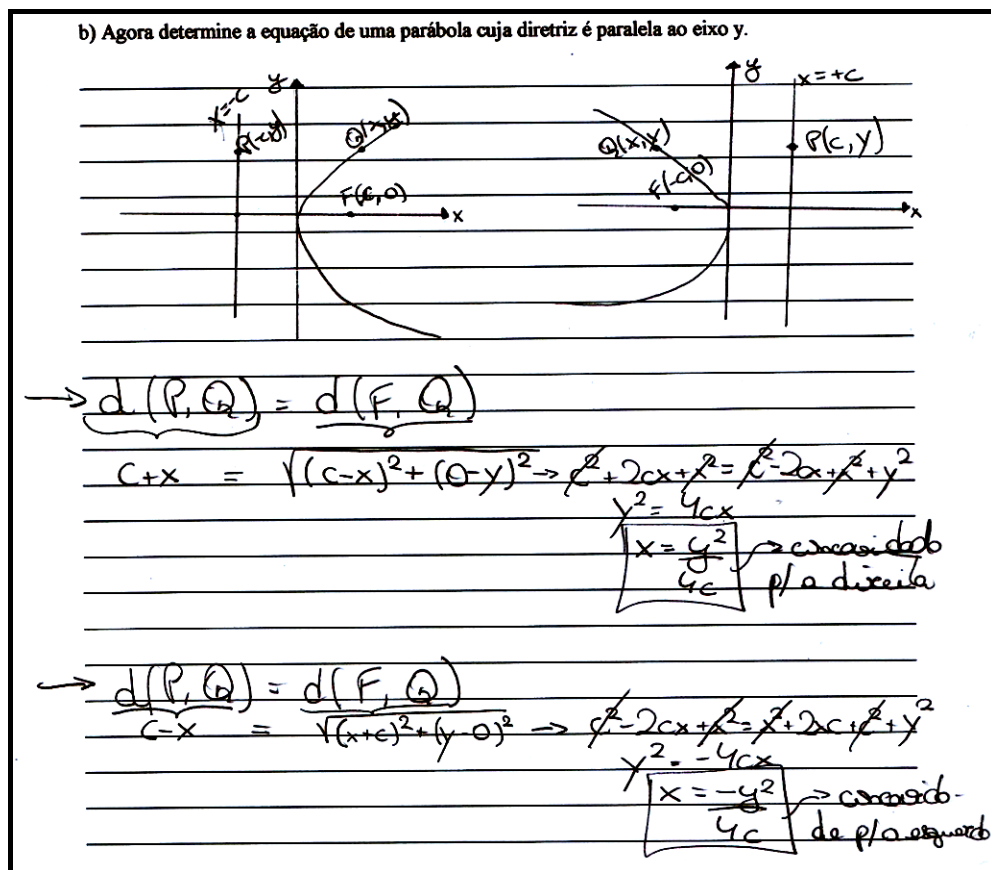


Fonte: Produção do Grupo 1

Ao encontro da defesa de Duval (2009), entendemos que discriminação de unidades significantes nos registros de representação constitui parte essencial para ocorrência da

conversão entre os registros de representação semiótica e não podem então ser apreendidos isoladamente. A discriminação das unidades significantes de uma representação, e então a possibilidade daquilo que ela representa, depende de um campo de variações possíveis relativamente à significância num registro.

Figura 62: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 6 – Atividade 2 (b)



Fonte: Produção do Grupo 2

Nesse sentido, evidenciamos no protocolo de resposta dos grupos que as variações consideradas para a resposta nos registros gráficos têm relação com a posição da parábola no plano cartesiano em função da posição da reta diretriz.

Para concluir, a pesquisadora solicitou ao grupo 1 que fosse até o quadro e apresentasse a resposta para o grupo 2, em seguida, solicitou ao grupo 2 que observasse a solução e emitisse uma opinião sobre o resultado. O resultado apresentado pelo grupo 1 não gerou debate.

Na fase de institucionalização, a pesquisadora projetou na tela do computador Quadro 2: Classes de parábolas a partir da posição reta diretriz apresentado no capítulo 2, sessão 2.2, com objetivo de mostrar uma síntese dos resultados encontrados pelos grupos. Oralmente a pesquisadora foi retomando os resultados obtidos na atividade 1 (item (c)), e na atividade 2

(item (b)) e definiu que as generalizações das equações de parábolas são para os casos em que a coordenada do vértice é (0,0).

Confrontando a análise *a priori* com a *posteriori*, constatamos que os grupos realizaram de forma adequada o tratamento algoritmizável até chegarem ao registro algébrico da equação, converteram os registros gráficos em algébricos e vice-versa e se apropriaram da definição do objeto matemático enquanto lugar geométrico no domínio da Geometria Analítica.

3.4.7 Análise da situação 7 – Estudo das variáveis pertinentes da Equação da Parábola

Atividade 1

- a) Construa, usando a ferramenta cônica, uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo x. Mostre a equação dessa parábola e observe a relação entre os coeficientes da equação e a medida entre o foco e a reta diretriz. Movimente a parábola para validar a sua resposta.
- b) Construa agora uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y. Verifique se a relação encontrada na atividade anterior também é válida nesta. Movimente a parábola.
- c) É possível generalizar esses resultados?

Análise a priori

O objetivo da situação 7 é determinar a relação entre o coeficiente das equações $x^2 = 4 \cdot cy$ ou $x^2 = -4 \cdot cy$ e $y^2 = 4 \cdot cx$ ou $y^2 = -4 \cdot cx$, com a medida da distância entre o foco e a reta diretriz de parábolas que tem o vértice na origem e as retas diretrizes paralelas ao eixo x ou y.

Na **atividade 1, item (a)**, a solução esperada do aluno é um registro figural da construção de uma parábola com auxílio da ferramenta cônica do *software* GeoGebra. Para isso, esperamos que o aluno abra uma nova janela no *software* GeoGebra exiba os eixos cartesianos, marque um ponto F qualquer no eixo y, encontre o ponto simétrico de F em relação ao eixo x, trace uma reta paralela ao eixo x passando pelo simétrico de F e acione a ferramenta cônica do *software* GeoGebra e, em seguida, o ponto F e a reta diretriz.

As conclusões esperadas dos alunos são: o coeficiente que multiplica y é quatro vezes a medida da distância entre o vértice e o foco ou duas vezes a medida da distância entre $\overline{FF'}$.

Na **atividade 1, item (b)**, a solução esperada do aluno é um registro figural da construção de uma parábola com auxílio da ferramenta cônica do *software* GeoGebra. Para isso, esperamos que o aluno abra uma nova janela no *software* GeoGebra, exiba os eixos cartesianos, marque um ponto F qualquer no eixo x, encontre o ponto simétrico de F em relação ao eixo y, trace uma reta paralela ao eixo y passando pelo simétrico de F e acione a ferramenta cônica do *software* GeoGebra e, em seguida, ponto F e reta diretriz.

As conclusões esperadas dos alunos são: o coeficiente que multiplica x é quatro vezes a medida da distância entre o vértice e o foco ou duas vezes a medida da distância entre $\overline{FF'}$.

Na **atividade 1, item (c)**, a solução esperada do aluno é em registro algébrico com as generalizações: $x^2 = 4 \cdot cy$, $x^2 = -4 \cdot cy$, $y^2 = 4 \cdot cx$ e $y^2 = -4 \cdot cx$ em que c é a distância focal, e na equação da reta diretriz $y + c = 0$, $y - c = 0$, $x + c = 0$ e $x - c = 0$.

As observações relacionadas às modificações são variações que ocorrem no registro algébrico à medida que se movimenta o ponto F e a reta diretriz. Para cada variação no registro gráfico obtemos uma variação concomitante de forma no registro algébrico. Toda tomada em conta dos números e todo recurso a cálculos são evidentemente excluídos de um trabalho de exploração e de observação.

A socialização dos resultados será realizada após o término da situação, para isso, solicitaremos ao aluno que com o auxílio do *software* GeoGebra apresente a figura construída e concomitantemente e oralmente as etapas da construção, as observações e generalizações encontradas, e posteriormente a **institucionalização**.

A institucionalização das generalizações das expressões algébricas $x^2 = 4 \cdot cy$, e a reta diretriz com a equação $y + c = 0$, para os casos em a reta diretriz é paralela ao eixo x, e para os casos em que a equação $y^2 = 4cx$ e a reta diretriz é expressa pela equação $x + c = 0$ paralela ao eixo y e a constatação de que c é a distância focal.

Análise a posteriori

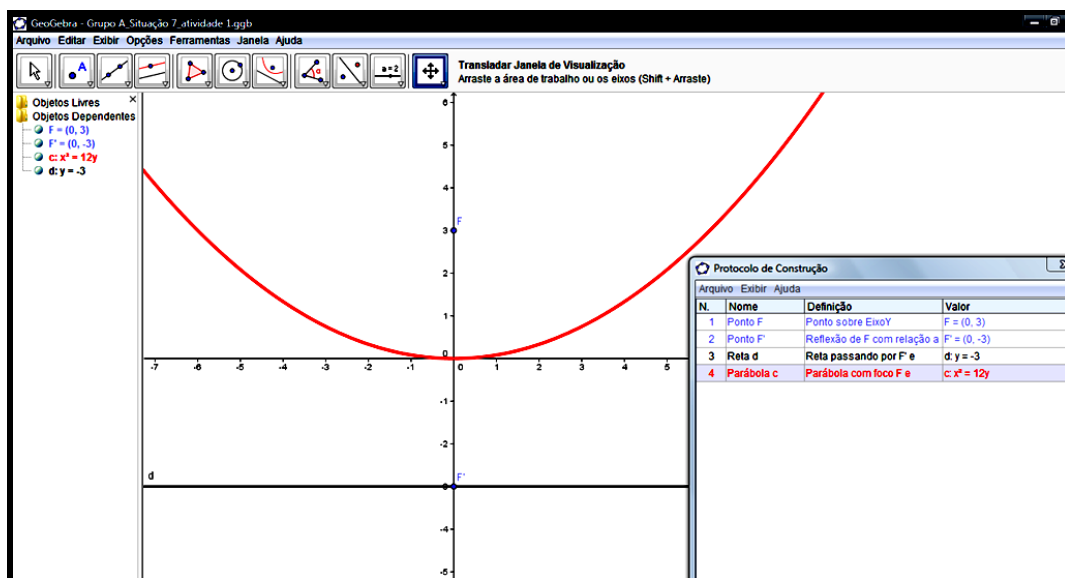
A situação 7 foi realizada no terceiro encontro com duração de trinta minutos, os grupos permaneceram inalterados e, para dar início, lhes foi entregue a folha com a situação.

Na fase de ação observamos que os grupos abriram o *software*, acionaram os eixos cartesianos e, em seguida, construíram o registro figural da parábola utilizando corretamente a ferramenta cônica. Na fase de formulação acionaram a ferramenta que exibe a janela de álgebra do *software* e passaram a movimentar o ponto F e a reta diretriz e observar as

variações entre os registros gráficos e algébricos. Na fase de validação constataram que as variações dos registros gráficos modificam os registros algébricos e concluíram que as modificações causam variações no coeficiente das expressões algébricas.

Os grupos apresentaram a construção do registro figural da parábola (figura 63 e 64) com auxílio do *software* Geogebra utilizando a ferramenta cônica.

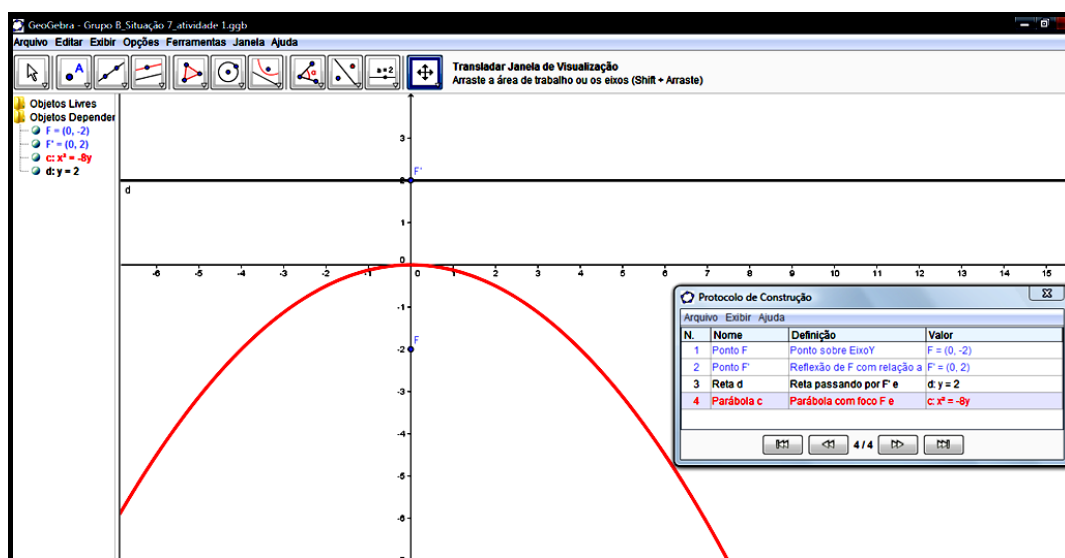
Figura 63: Protocolo de Construção do Grupo 1 – Situação 7 – Atividade 1(a)



Fonte: Produção do Grupo 1

Podemos constatar que as etapas de construção dos grupos foram idênticas, e acreditamos que o resultado esperado da construção tenha relação com atividades da situação 4 que promoveu o estudo da parábola no domínio da geometria a partir de diferentes elementos matemáticos da parábola; a construção do registro figural, nesse caso, foi fundamental para os grupos perceberem que o V (0,0) é o ponto médio do segmento $\overline{FF'}$.

Figura 64: Protocolo de Construção do Grupo 2 – Situação 7 – Atividade 1(a)



Fonte: Produção do Grupo 2

No item (a), os grupos responderam em registro de língua natural (figura 65 e 66) as conclusões que se referem às variações no coeficiente que multiplica y , mas em ambos os casos a resposta foi parcial, porque os grupos não registraram nenhuma observação a respeito das variações que ocorrem na reta diretriz.

Figura 65: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 7 – Atividade 1 (a)

Atividade 1

a) Construa, usando a ferramenta cônica, uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo x . Mostre a equação dessa parábola e observe a relação entre os coeficientes da equação e a medida entre o foco e a reta diretriz. Movimente a parábola para validar a sua resposta. O que você observa?

O coeficiente que multiplica y é quatro vezes a distância do foco ao vértice em parábola.

Fonte: Produção do Grupo 1

Figura 66: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 7 – Atividade 1 (a)

Atividade 1

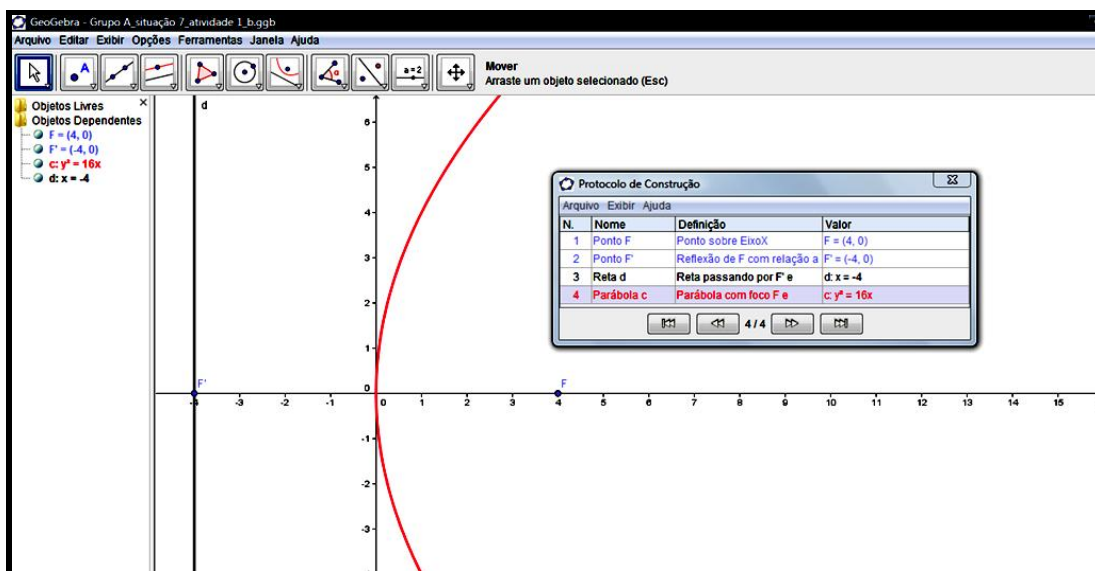
a) Construa, usando a ferramenta cônica, uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo x . Mostre a equação dessa parábola e observe a relação entre os coeficientes da equação e a medida entre o foco e a reta diretriz. Movimente a parábola para validar a sua resposta. O que você observa?

O coeficiente que multiplica y é igual a dobro da distância entre o foco e a reta diretriz.

Fonte: Produção do Grupo 2

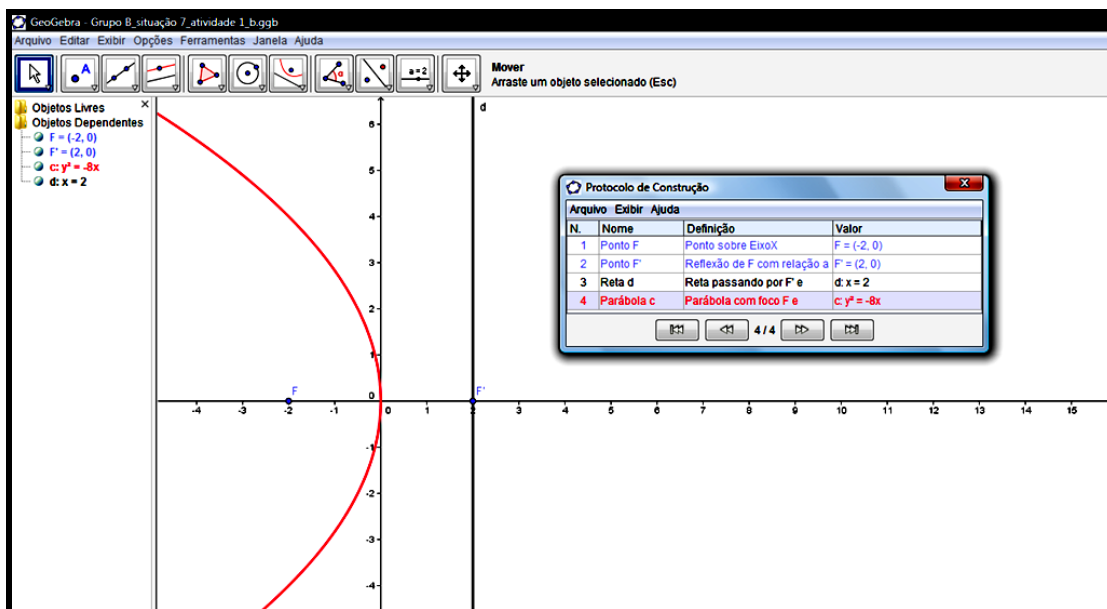
No item (b), os grupos apresentaram a solução em registro figural (figura 67 e 68) com o auxílio do *software* GeoGebra, utilizando a ferramenta cônica. Foi possível constatar que os grupos elaboraram a construção com base no item anterior.

Figura 67: Protocolo de Construção do Grupo 1 – Situação 7 – Atividade 1 (b)



Fonte: Produção do Grupo 1

Figura 68: Protocolo de Construção do Grupo 2 – Situação 7 – Atividade 1 (b)



Fonte: Produção do Grupo 2

Constatamos nos protocolos de respostas (figura 69 e 70) dos grupos em registro de língua natural o que observaram a respeito das variações no registro algébrico, mas não explicitaram nenhuma conclusão a respeito de variações no registro algébrico da equação da reta.

Figura 69: Protocolo de Resposta do Grupo 1 – Situação 7 – Atividade 1 (b)

b) Construa agora uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y. Verifique se a relação encontrada na atividade anterior também é válida nesta. Movimente a parábola. O que você observa?

a relação encontrada na atividade anterior também é válida, porque o coeficiente que multiplica x é quatro vezes a distância do foco ao vértice da parábola

Produção do Grupo 1

Figura 70: Protocolo de Resposta do Grupo 2 – Situação 7 – Atividade 1 (b)

b) Construa agora uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y. Verifique se a relação encontrada na atividade anterior também é válida nesta. Movimente a parábola. O que você observa?

O coeficiente que multiplica x é igual ao dobro da distância entre o foco e a reta diretriz.

Produção do Grupo 2

No protocolo de resposta do item (c) (figura 71 e 72), os grupos generalizaram os resultados a partir de um registro algébrico e evidenciaram que a variável “c” é a medida da distância focal.

Figura 71: Protocolo de Resposta do Grupo 1 – Situação 7 – Atividade 1 (c)

c) É possível generalizar esses resultados.

$$y = \frac{x^2}{4c} \quad \text{MC} = 2FF \quad \rightarrow \text{DISTÂNCIA DO FOCO AO VÉRTICE}$$

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 evidenciou nos registros em linguagem natural as observações que relacionaram a partir do registro gráfico e as variações na expressão algébrica da parábola com relação à distância entre o ponto V e o ponto F e, na generalização dos resultados, a conversão do registro em linguagem natural para o registro algébrico na forma de expressões que definem que o coeficiente que multiplica x e y é a medida da distância focal entre o ponto V e o ponto F.

Figura 72: Protocolo de Resposta do Grupo 2 – Situação 7 – Atividade 1 (c)

c) É possível generalizar esses resultados.

$$y = x^2 \quad c = FV = \frac{FF'}{2}$$

$$y = \frac{x^2}{24 \cdot FF'} \rightarrow x^2 = 24 \cdot FF' \cdot y$$

> determinar o coeficiente da parábola.

> coeficiente da y é o dobro do produto entre o foco e a diretriz.

Fonte: Produção do Grupo 2

Concluimos que os grupos perceberam que para cada registro gráfico da parábola é possível determinar um registro algébrico e vice-versa. Nesse sentido, entendemos que os registros gráficos e algébricos são de natureza diferente, as unidades significantes do registro gráfico cartesiano não são separáveis, pois são integradas numa só forma percebida, enquanto que as da expressão algébrica são discretas.

Concluída a situação 7, a pesquisadora solicitou aos grupos que apresentassem os resultados das observações por eles elaboradas. Para isso, a pesquisadora projetou a tela *software* GeoGebra e pediu para o grupo 1 construir o registro figural da parábola dos itens (a) e (b) e fazer oralmente comentários sobre as conclusões. O item (c) com apresentação no quadro por meio de registros que tenham sido usados para expressar as generalizações e, por fim, oralmente comentassem sobre o que observaram. Para o grupo 2, a pesquisadora solicitou que observassem as soluções e, caso não concordassem, apresentassem outra solução.

Durante a exposição do grupo 1, o grupo 2 não mencionou nenhum comentário relacionado com as alterações na expressão algébrica da reta diretriz. Logo depois da exposição dos grupos, a pesquisadora indagou:

Pesquisadora: Vocês observaram muito bem o que muda na expressão algébrica da parábola quando o gráfico cartesiano da parábola é modificado, mas não comentaram sobre o que ocorre com a expressão algébrica da reta diretriz.

Grupo 2: Acho que não percebemos essas mudanças.

Pesquisadora: E os demais?

Grupo 1: Não observamos essas modificações, mas podemos observar agora...

Pesquisadora: Tudo bem. Vamos voltar ao GeoGebra e observar.

Não tínhamos previsto na análise *a priori* que poderia ocorrer esse fato, mas entendemos que nesse momento seria importante solicitar aos grupos que retornassem ao *software* e manipulassem os pontos F e a reta diretriz para observar as variações que a expressão algébrica da reta diretriz sofre.

Após aproximadamente oito minutos de manipulação no *software*, os alunos chegaram à conclusão esperada: que a expressão algébrica da reta diretriz sofre modificações nos valores da variável “c”, conforme o valor da medida da distância entre o ponto V e ponto F.

Na fase de institucionalização, a pesquisadora comentou que as conclusões dos grupos estão corretas no que se referia à construção do registro figural da parábola utilizando a ferramenta cônica do *software*. Para concluir, a pesquisadora dirigiu-se até o quadro e oralmente mostrou aos alunos que as generalizações das expressões algébrica encontradas nas atividades são $x^2 = 4.cy$ e diretriz de equação $y = -c$ ou $x^2 = -4.cy$ e diretriz de equação $y = c$, para os casos em que a reta diretriz é paralela ao eixo x. Para os casos em que a equação $y^2 = 4.cx$, diretriz de equação $x = -c$ ou $y^2 = -4.cx$, diretriz de equação $x = c$, casos em que a reta diretriz é paralela ao eixo y, e por fim que o valor da variável c é a medida da distância focal.

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori* concluímos que os grupos converteram os registros em língua natural (enunciado das atividades) em registro gráfico com auxílio do *software* GeoGebra e constaram que a variável “c” do registro algébrico da parábola é o valor da medida da distância focal.

3.4.8 Análise da situação 8 – Estudo da Equação de uma Parábola

Atividade 1⁹

Determine a equação da curva que tem seus pontos equidistantes do ponto A(-1,3) e da reta representada por $y + 3 = 0$. Justifique sua resposta.

Análise a priori

O objetivo da situação 8 é determinar a equação de uma parábola a partir do ponto A e da equação da reta diretriz, por meio da definição de parábola.

Na atividade 1 esperamos que o aluno, considerando as atividades anteriores, relacione o ponto A com o foco e a equação da reta enunciada na atividade com reta diretriz de uma parábola. A partir dessa conclusão, relacione com as conclusões obtidas nas atividades anteriores que “um ponto da parábola é equidistante entre o ponto F e a reta d” para escrever a

⁹A situação 8 foi adaptada a partir de WINTERLE (2000, p. 174)

relação $d(A, Q) = d(Q, P)$, em que o ponto Q tem coordenada (x, y) pertencente à parábola e P $(x, -3)$ um ponto qualquer da reta. A equação esperada é de uma parábola. Para isso, é necessário ter os conhecimentos: cálculo da distância entre pontos no plano cartesiano e propriedade de equidistância, definição de parábola por lugar geométrico.

A conclusão dessa atividade consiste em resolver a expressão algébrica $\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+3)^2} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 12y = 0$. Dessa forma, esperamos que o aluno encontre a solução em registro algébrico $x^2 + 2x + 1 - 12y = 0$ ou $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{12}$ ou $x^2 = 12y - 2x - 1$.

A socialização dos resultados será realizada após o término da situação, para isso, solicitaremos ao aluno que exponha a solução encontrada no quadro e oralmente comente o resultado, e posteriormente a **institucionalização**.

Na fase de institucionalização, no quadro, a partir do registro algébrico, mostraremos outras formas de registros algébricos para representar a equação da parábola em questão.

Análise a posteriori

A situação 8 foi aplicada no quarto encontro com duração aproximada de 15 minutos, os grupos permaneceram inalterados, a pesquisadora orientou os grupos a não utilizarem o *software* GeoGebra e que procurassem resolver a questão com base nas discussões e nos registros das situações anteriores.

Na fase de ação, observamos que os grupos recorreram aos registros das situações anteriores e procuram comparar o enunciado com o que tinham estudado. Durante a fase de formulação, recorreram à definição de parábola enquanto lugar geométrico e a propriedade de equidistância. Na fase de validação por meio do cálculo da distância entre dois pontos com base na propriedade de equidistância, validaram o modelo.

No protocolo de resposta do grupo 1 (figura 73), verificamos que a solução encontrada está em registro algébrico e para encontrá-la o grupo usou a propriedade de equidistância e, em seguida, realizou o tratamento algoritmizável até chegar ao registro algébrico da equação.

Figura 73: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 8 – Atividade 1

Atividade 1

Determine a equação da curva que tem seus pontos equidistantes do ponto A(-1,3) e da reta $y + 3 = 0$. Justifique sua resposta.

$P(x, -3)$, $Q(x, y)$ e $F(-1, 3)$

$PQ = QF$

$(-3-y)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2$

$x^2 + 6y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$

$x^2 + 2x + 1 = 12y$

$y = (x^2 + 2x + 1)/12$

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 apoiou-se para resolver a atividade em um registro gráfico e o converteu para o algébrico alcançando o resultado esperado. Relacionou as unidades significativas da definição de parábola no domínio da geometria analítica em dois registros: o gráfico e o algébrico. Além disso, o grupo evidenciou no resultado encontrado (registro algébrico) que o denominador da expressão é o quádruplo da distância entre o foco e o vértice, relação esta estabelecida com o resultado da expressão geral $y = \frac{x^2}{4c}$.

Figura 74: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 8 – Atividade 1

Atividade 1

Determine a equação da curva que tem seus pontos equidistantes do ponto A(-1,3) e da reta $y + 3 = 0$. Justifique sua resposta.

$y + 3 = 0$

$y = -3$

$Q(x, y)$

$P(x, -3)$

$d(P, Q) = d(Q, A)$

$y + 3 = \sqrt{(-1-x)^2 + (3-y)^2}$

$y^2 + 6y + 9 = 1 + 2x + x^2 + y^2 - 6y + 9$

$x^2 + 2x - 12y + 1 = 0$

$12y = x^2 + 2x + 1 \rightarrow y = \frac{x^2 + 2x + 1}{12}$

$\rightarrow$ quádruplo da distância entre foco e vértice.

Fonte: Produção do Grupo 2

No momento da socialização da solução, a pesquisadora solicitou ao grupo 2 se dirigir ao quadro e registrar a resposta encontrada, e para o grupo 1 validar ou não a resposta apresentada pelo grupo 2. O grupo 2 representou no quadro o registro gráfico e detalhou o que o grupo levou em consideração para esboçar o gráfico. Destacou que o ponto A é foco da parábola, o ponto P (x,-3) um representante da reta diretriz e o ponto Q (x,y) um ponto

qualquer da parábola. O grupo 1 aceitou a solução e informou que “não fizeram o gráfico, porque a questão solicitou apenas a equação”.

Na fase de institucionalização, a pesquisadora projetou a tela do *software* e construiu o registro gráfico da parábola, e mostrou que o gráfico da equação de parábola em questão pode ser comparado com a família de gráficos gerados a partir da equação $x^2 = 12y$, em que ambas têm a mesma medida na distância focal e é 3 unidades. No caso da equação $x^2 = 12y$, a coordenada do ponto do vértice é (0,0), e que, em decorrência do deslocamento no eixo vertical e horizontal, a parábola sofreu alterações na equação, passando a ser escrita por $x^2 + 2x + 1 - 12y = 0$ e a coordenada do V(-1,0).

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori* constatamos que os grupos encontraram a solução esperada no registro algébrico, realizaram corretamente o tratamento algoritmizável e relacionaram o registro algébrico da parábola encontrado com a equação geral da parábola $y = \frac{x^2}{4c}$.

3.4.9 Análise da situação 9¹⁰ – Estudo da Parábola: Significados, Equações e Gráficos.

Atividade 1

Obtenha a equação da parábola cuja diretriz é representada pela reta $y=-2$ e cujo foco é o ponto F(0,2).

Atividade 2

Obtenha a equação da parábola que tem como diretriz a reta representada por $x=-2$ e como foco o ponto F(2,0).

Atividade 3

Determine o foco, o vértice e a diretriz de cada uma das equações parábolas representadas:

a) $y^2 = 28x$

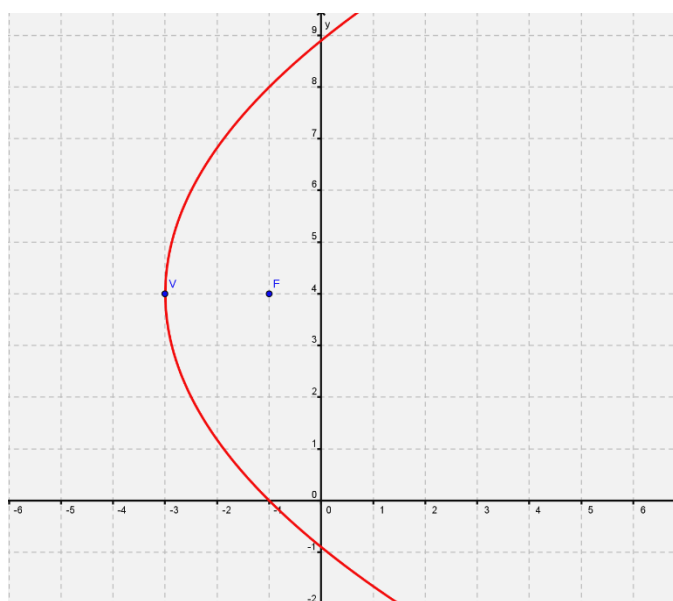
b) $x^2 = -4y$

¹⁰ A situação 9 foi adaptada a partir de BONGIOVANNI,V.; LEITE, O. R. V.; LAUREANO, J. L. T.. **Matemática e Vida**. V.3. 2.ed. 3ª série. 2º Grau. São Paulo: Editora Ática,1993.

Atividade 4

Esboce o gráfico representado pela equação de parábola $y^2 = 2x$. Por que esse gráfico não representa uma função?

Atividade 5 Determine a equação da parábola representada no gráfico abaixo e a equação de sua diretriz:

**Análise a priori**

O objetivo da situação 9 é encontrar o registro algébrico e gráfico da parábola a partir dos elementos (foco, reta diretriz e vértice) que caracterizam o objeto matemático e vice-versa.

Os conhecimentos esperados para as soluções são: cálculo da distância entre pontos no plano cartesiano, propriedade de equidistância, coordenadas cartesianas, equação da reta, definição de função e definição da parábola enquanto lugar geométrico.

Na **atividade 1**, esperamos que o aluno, a partir da generalização da equação de parábola (estudada na situação 7), relacione a expressão dada com a equação $x^2 = 4 \cdot cy$, onde c é igual a 4 vezes a medida da distância focal e a partir dessas conclusões encontre a solução em registro algébrico $x^2 = 4 \cdot 2y$ ou $x^2 = 8y$.

Na **atividade 2**, esperamos que o aluno, a partir da generalização da equação de parábola (estudada na situação 7), relacione a equação dada com $y^2 = 4 \cdot cx$, onde c é igual a 4 vezes a medida da distância focal e a partir dessas conclusões encontre a solução em registro algébrico $y^2 = 4 \cdot 2x$ ou $y^2 = 8x$.

Na **atividade 3, itens (a) e (b)**, esperamos que o aluno encontre as coordenadas do vértice, a coordenada do Foco e a reta diretriz a partir da expressão algébrica. Para isso, esperamos que o aluno observe na equação da parábola enunciada $y^2 = 28x$, que a constante que multiplica x é igual a 28, logo $c=7$ (c é a medida da distância focal). No item em que a equação é $x^2 = -4y$, a constante que multiplica x é igual a 4, logo $c=1$ (c é a medida da distância focal). A partir da conclusão dos valores de “ c ” e a partir dos estudos realizados em outras situações, o aluno poderá fazer um registro gráfico e validar a solução.

No **item (a)**, esperamos que o aluno responda em registro algébrico que a coordenada do foco $F(7,0)$, a equação da reta diretriz: $y=-7$ e a coordenada do vértice é $V(0,0)$.

No **item (b)**, esperamos que o aluno responda em registro algébrico que a coordenada $F(0,-1)$, a equação da reta diretriz: $y = 1$ e a coordenada do vértice é $V(0,0)$.

Na **atividade 4**, esperamos que o aluno esboce o gráfico que representa a equação $y^2 = 2x$, o registro gráfico esperado é de uma parábola com a concavidade voltada para a direita de coordenadas $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, o $V(0,0)$ e a reta diretriz paralela ao eixo y interceptando o ponto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. A partir da representação do registro gráfico, esperamos que o aluno, por meio de um registro em língua natural, argumente que a equação não é uma função, porque para cada valor da variável x é possível encontrar dois valores para a variável y .

Para a **atividade 5**, esperamos que o aluno identifique no esboço gráfico os elementos: coordenada do foco $(-1,4)$, coordenada do vértice $(-3,4)$, a equação da reta diretriz de equação $x + 5 = 0$, e, a seguir, determine um ponto $Q(x, y)$ pertencente à parábola, $P(-5, y)$ pertencente à reta diretriz e, por fim, estabeleça a relação $d(P, Q)=d(Q, F)$ e encontre o registro algébrico $y^2 - 8x - 8y = 8$ ou $y^2 = 8x + 8y + 8$ ou $x = \frac{y^2 - 8y - 8}{8}$

Faremos a socialização dos resultados encontrados para a situação 9 solicitando para o aluno o registro no quadro das soluções encontradas e, posteriormente, a **institucionalização**.

Na fase de institucionalização, mostraremos nas atividades 1 e 3 que, a partir da coordenada do foco e da equação da reta diretriz, podemos concluir a distância focal “ c ” e a posição da parábola nos quadrantes do plano cartesiano e, a seguir, comparar com a equação geral da parábola estudada nas atividades anteriores, a que tipo ela corresponde. Para isso, faremos no quadro o registro gráfico e oralmente faremos os apontamentos relativos à medida da distância entre o vértice e foco, a localização da reta diretriz e a posição da parábola no

plano cartesiano. E por fim, uma comparação com as generalizações das equações de parábola estudadas até o momento.

Na atividade 3, no quadro e oralmente, mostraremos ao aluno que a partir da equação da parábola podemos determinar a distância focal dividindo o coeficiente que multiplica a variável x ou y por 4. O resultado é o valor de “ c ”, medida da distância focal, por meio de comparação com as equações generalizadas concluímos a posição da reta diretriz e da parábola no plano cartesiano.

Na atividade 4, no quadro, faremos o registro gráfico e oralmente mostraremos que para cada valor da variável x temos dois valores correspondentes da variável y e, que pela definição de função, isso não é possível. Dessa maneira, mostraremos para o aluno que o objeto matemático parábola não pode ser confundido com a representação gráfica da função quadrática.

Na atividade 5, no quadro e oralmente, mostraremos que a equação de parábola procurada pode ser escrita em registro algébrico nas formas $y^2 - 8x - 8y = 8$ ou $y^2 = 8x + 8y + 8$ ou $x = \frac{y^2 - 8y - 8}{8}$

Análise a posteriori

A situação 9 foi realizada no quarto encontro com duração aproximada de quarenta minutos. A pesquisadora entregou a folha com a situação 9 aos grupos e solicitou que iniciassem a resolução das atividades sem o auxílio do *software* GeoGebra.

Observamos que durante a resolução das atividades 1 e 2, os grupos na fase de ação identificaram no enunciado das atividades as unidades significativas da definição do objeto matemático parábola (coordenadas do foco, da reta diretriz e da parábola), na fase de formulação o registro gráfico e na fase de validação a propriedade de equidistância e o cálculo da distância entre pontos no domínio da Geometria Analítica.

O grupo 1 demonstrou a solução (figura 75) em língua natural para o registro gráfico e o converteu para o registro algébrico. Embora a atividade 1 não evidenciasse em seu enunciado a necessidade de um registro gráfico, entendemos que o grupo 1 usou o registro gráfico como registro de partida e o registro algébrico de chegada.

Figura 75: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 9 – Atividade 1

Atividade 1

Obtenha a equação da parábola que tem diretriz $y=-2$ e foco $F(0,2)$.

$F(0,2)$

$Q = (x, y)$

$P = (x, -2)$

$d(\hat{PQ}) = d(QF)$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (-2-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

$$\cancel{4} + 4y + \cancel{y^2} = x^2 + \cancel{x^2} - 4y + \cancel{4}$$

$$x^2 - 8y$$

Fonte: Produção do Grupo 1

O grupo 2 converteu o enunciado em língua natural para o registro algébrico do objeto matemático a partir do enunciado, sem recorrer a outro registro de representação, conforme protocolo de resposta (figura 68).

Figura 76: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 9 – Atividade 1

Atividade 1

Obtenha a equação da parábola que tem diretriz $y=-2$ e foco $F(0,2)$.

$F(0,2), P(x,-2), Q(x,y)$

$d(F,Q) = d(P,Q)$

$$\sqrt{(-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-2-y)^2}$$

$$x^2 + 4 - 4y + y^2 = 4 + 4y + y^2$$

$$x^2 - 8y = 0$$

$$y = \frac{x^2}{8}$$

Fonte: Produção do Grupo 2

Compreendemos que a resposta do grupo 2 demonstrou que a coordenação dos registros se encontra suficientemente desenvolvida atendo-se a representação de um só registro, nesse caso o registro algébrico.

Além disso, os grupos demonstraram nos protocolos de resposta conhecimentos matemáticos suficientes para efetuar a transformação interna no registro algébrico. Segundo Duval (2009), o tratamento de uma representação semiótica corresponde à sua expansão informacional. Nesse sentido, observamos que o grupo 1 chegou no registro algébrico da equação da parábola $x^2 = 8y$ e o grupo 2 no registro algébrico $y = \frac{x^2}{8}$; ambos os registros são correspondentes.

Para resolver a atividade 2, os grupos, conforme protocolos de respostas respectivamente (figuras 77 e 78), utilizaram a mesma estratégia de resolução, identificaram as unidades significativas a partir do enunciado da atividade relacionando-as com a definição do objeto matemático parábola.

Figura 77: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 9 – Atividade 2

Atividade 2

Obtenha a equação da parábola que tem como diretriz a reta $x=-2$ e como foco o ponto $F(2,0)$.

$F(2,0)$ $P(-2,y)$ $Q(x,y)$ $d(P,Q) = d(Q,F)$

$$\sqrt{(-2-x)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$

$$4 + 4x + x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$y^2 = 8x$$

Fonte: Produção do Grupo 1

Evidenciamos que o grupo 1 usou a informação da equação da reta diretriz observando que a reta diretriz é paralela ao eixo y, concluindo que a parábola pertence ao primeiro e quarto quadrantes do plano cartesiano. Concluimos, nesse sentido, que o grupo mobilizou resultados das situações anteriores que relacionaram as diferentes posições da parábola no plano cartesiano com a posição da reta diretriz

O grupo 2 não priorizou o registro gráfico para auxiliar na resolução da atividade, eles encontraram a equação com base na definição de equidistância entres os pontos FQP.

Figura 78: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 9 – Atividade 2

Atividade 2

Obtenha a equação da parábola que tem como diretriz a reta $x=-2$ e como foco o ponto $F(2,0)$.

$F(2,0)$, $P(-2,y)$, $Q(x,y)$

$$d(F,Q) = d(P,Q)$$

$$(2-x)^2 + (-y)^2 = (-2-x)^2 + (0)^2$$

$$4 - 4x + x^2 + y^2 = 4 + 4x + x^2$$

$$y^2 = 8x$$

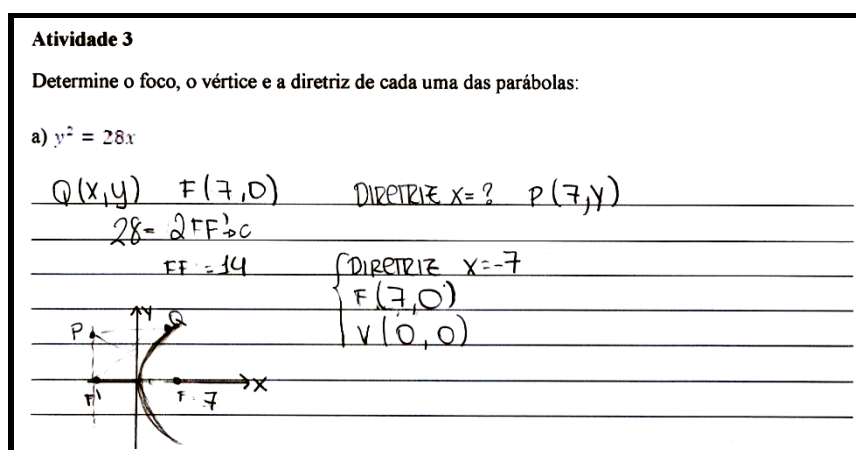
$$x = \frac{y^2}{8}$$

Fonte: Produção do Grupo 2

Na atividade 3, itens (a) e (b), observamos que os grupos na fase de ação mobilizaram as situações anteriores que relacionaram as diferentes posições da parábola no plano cartesiano com relação à posição da reta diretriz, além disso, que a distância focal é o quádruplo da medida da distância do vértice até o foco. Na fase de formulação, ambos optaram por fazer um registro gráfico com base no enunciado da questão. Na fase de validação, uma comparação entre o registro gráfico com as coordenadas cartesianas encontradas para cada uma das questões.

Nos protocolos de respostas (figura 79 e 80) evidenciamos que os grupos se apoiaram nas unidades significativas da equação a partir da definição do objeto matemático parábola para determinar a coordenada do foco, o vértice e a equação da reta diretriz em registro algébrico.

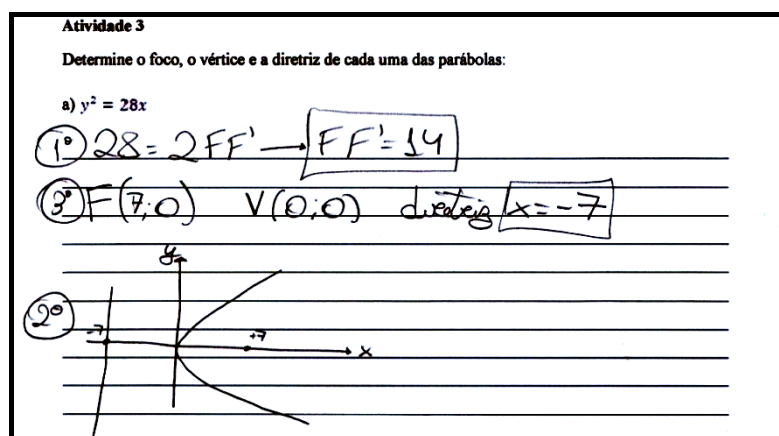
Figura 79: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 9 – Atividade 3 (a)



Fonte: Produção do Grupo 1

Entendemos que nessa atividade os grupos apresentaram resultados de uma coordenação de registro suficientemente desenvolvida em relação direta entre representante e representado. Concluimos, a partir da defesa de Duval (2009, p. 91), que “essa coordenação lhe dá, com respeito a representações semióticas que ele utiliza, esse grau de liberdade permitindo ter estratégias heurísticas, conduzir bem os tratamentos escolhidos e controlar a sua pertinência”.

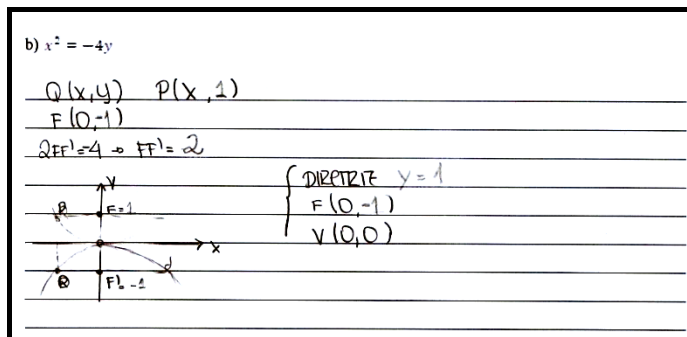
Figura 80: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 9 – Atividade 3 (a)



Fonte: Produção do Grupo 2

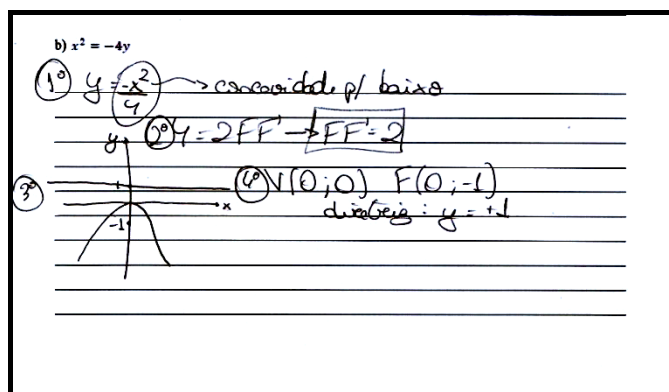
No item (b), os grupos encontraram a solução (figuras 81 e 82) usando a mesma estratégia do item (a) e, no nosso entendimento, a resposta vem ao encontro do que Duval (2009, p. 92) defende: “que as aquisições não sejam mais estimadas apenas sobre os critérios de sucesso (obtenção de uma “boa” resposta), mas sobre critérios de “maturidade”: rapidez de tratamento, espontaneidade das conversões, potência das transferências”.

Figura 81: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 9 – Atividade 3 (b)



Fonte: Produção do Grupo 1

Figura 82: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 9 – Atividade 3 (b)

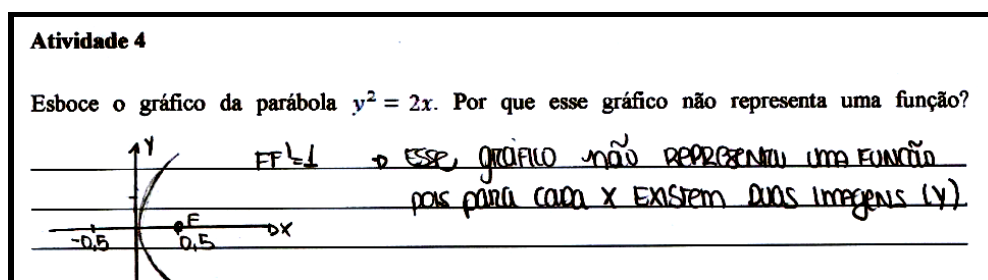


Fonte: Produção do Grupo 2

Na atividade 4, observamos que, na fase de ação, esboçaram o registro gráfico como solicitado no enunciado. Na fase de formulação, retomaram a definição de função (conhecimento disponível) e, na fase de validação, concluíram que a definição de função não corresponde ao esboço gráfico da equação de parábola em questão.

Os grupos elaboraram uma justificativa em linguagem natural para responder que a equação da parábola em questão não representa uma função quadrática e, para validar a resposta (figuras 83 e 84), se apoiaram no registro gráfico. De acordo com Duval (2009, p. 109): “O registro de chegada é uma descrição da situação apresentada pela representação intermediária e não pela representação de saída”. Entendemos que a representação intermediária nessa questão pode ser considerada o registro gráfico que possibilitou aos alunos uma comparação entre a definição do objeto matemático função com objeto matemático parábola propiciando a elaboração de uma justificativa em registro de língua natural.

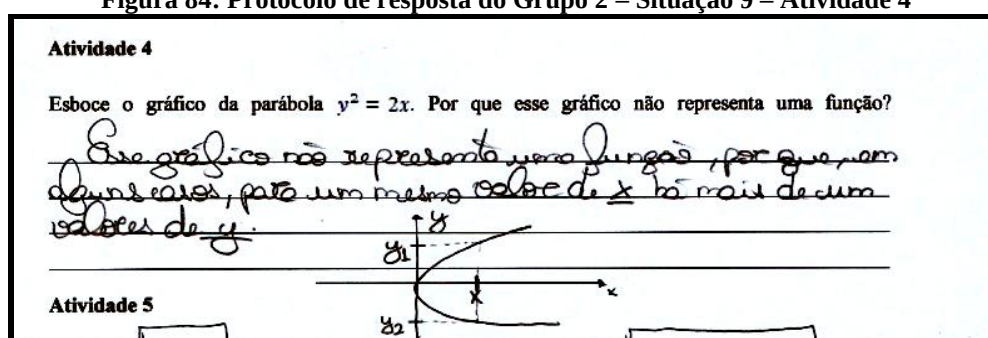
Figura 83: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 9 – Atividade 4



Fonte: Produção do Grupo 1

Os grupos, ao elaborar as respostas, consideraram a definição matemática do objeto função em relação à definição do objeto matemático parábola, o que nos leva a crer em uma ruptura entre a falsa ideia que os alunos têm de que o objeto matemático parábola é a representação de uma função quadrática.

Figura 84: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 9 – Atividade 4

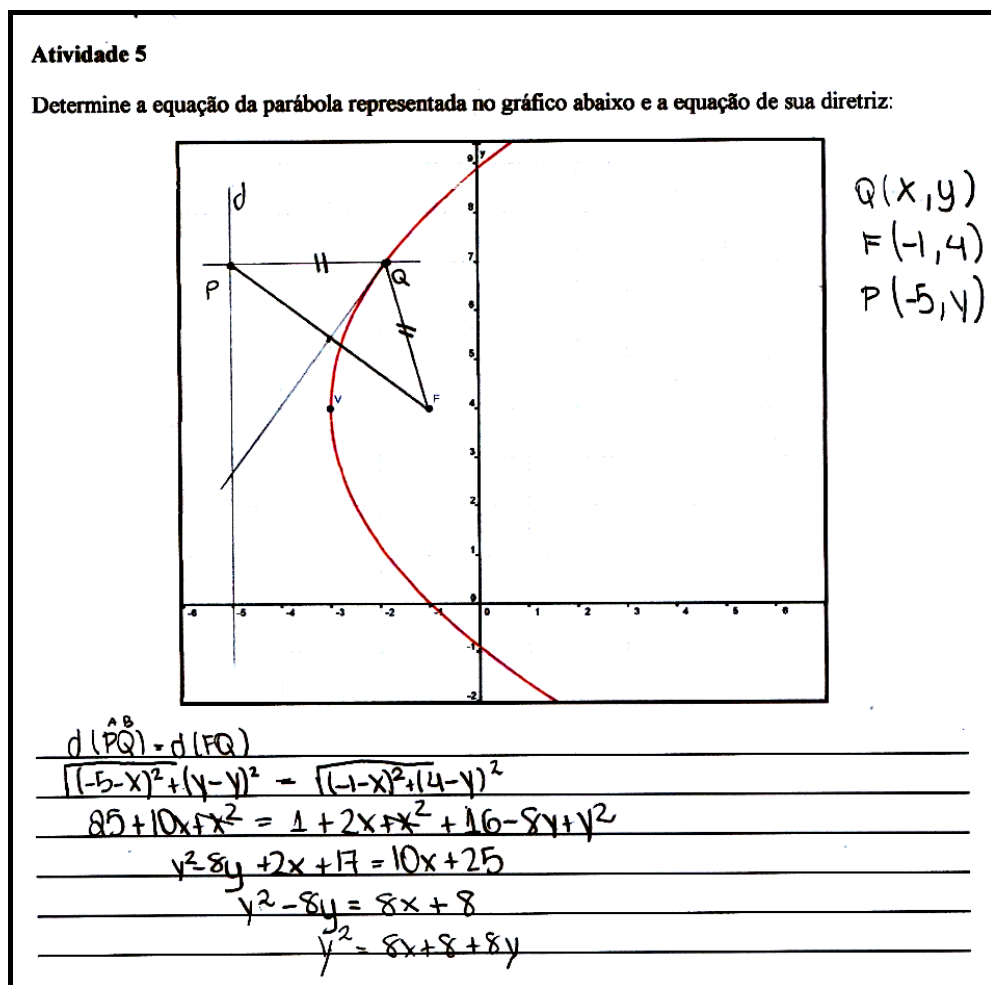


Fonte: Produção do Grupo 2

Na atividade 5, observamos que os grupos na fase de ação traçaram a reta diretriz passando pelo ponto $(-5,0)$, identificaram um ponto $Q(x,y)$ na curva, e um ponto $(-5,y)$ na reta diretriz. Na fase de formulação, estabeleceram a relação de equidistância entre as unidades significantes. E por fim, na fase de validação, por meio do cálculo da distância entre dois pontos no domínio da Geometria Analítica, encontraram o registro algébrico.

Evidenciamos no protocolo de resposta (figura 85) que o grupo 1 encontrou a equação da parábola, mas não explicitou o registro algébrico da equação da reta diretriz. Pudemos perceber que o grupo se apoiou da construção do registro figural da parábola por meio das dobraduras proposta na situação 1, pois, demonstraram no registro gráfico que a reta mediatriz que intercepta o ponto Q na parábola é a formação de um triângulo isóscele. Nesse sentido, concluímos que a construção do registro figural por meio de dobraduras possibilitou a compreensão do grupo para a conversão de um registro gráfico no domínio da geometria analítica.

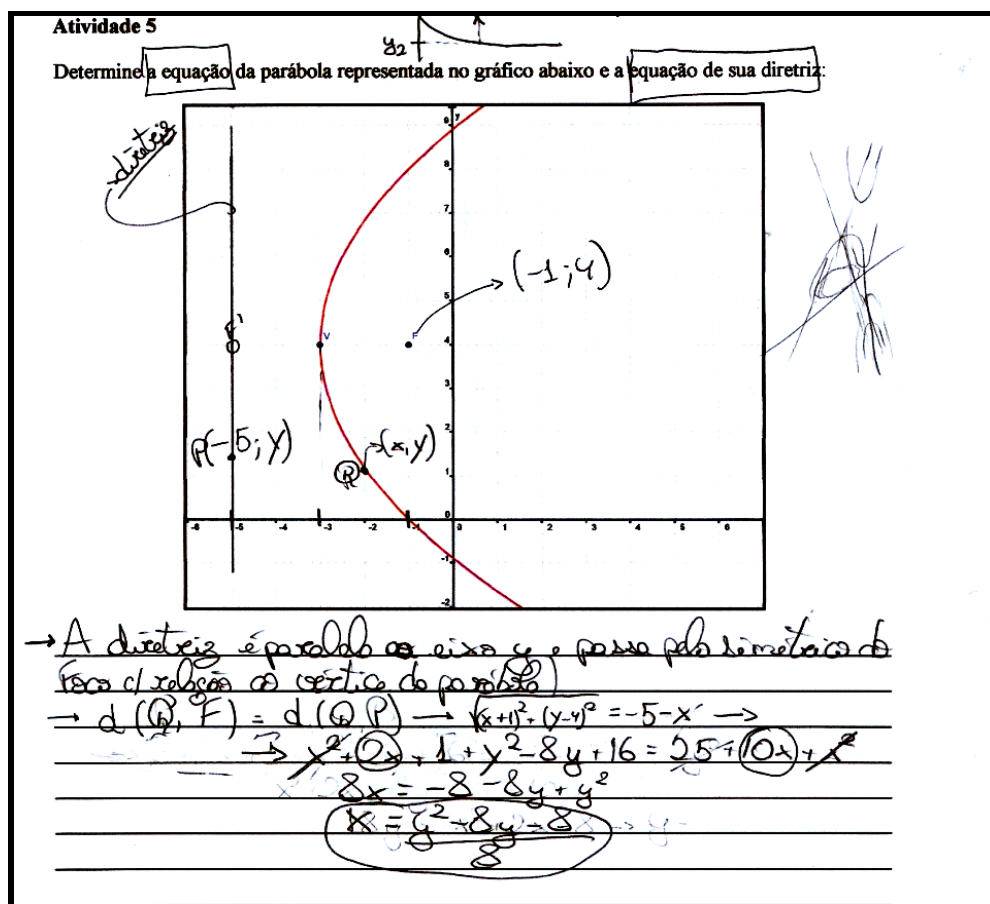
Figura 85: Protocolo de resposta do Grupo 1 – Situação 9 – Atividade 5



Por fim, observamos que o grupo 1 usou o registro gráfico (registro de partida) e o converteu no registro algébrico (registro de chegada). Nesse sentido, o resultado apresentado pelo grupo 1 vem ao encontro das nossas expectativas, ou seja, da coordenação de vários registros (pelo menos dois) ser uma condição necessária para a compreensão conceitual do objeto matemático.

No protocolo de resposta do grupo 2 (figura 86), demonstraram que encontraram a equação da parábola por meio da propriedade de equidistância entre os pontos PFQ, mas não descreveram a equação da reta diretriz como solicitado no enunciado da atividade. Embora tenham traçado a reta nomeada como diretriz cortando o eixo x no ponto (-5,0).

Figura 86: Protocolo de resposta do Grupo 2 – Situação 9 – Atividade 5



Fonte: Produção do Grupo 2

De forma geral, o grupo 2 apresentou o mesmo resultado em termos de coordenação de registro de representação semiótico que o grupo 1, o registro de partida é o gráfico e o registro de chegada é o registro algébrico. Os grupos demarcaram no registro gráfico as unidades significantes a fim de estabelecer a conversão.

Em seguida, no momento da socialização das soluções, a pesquisadora solicitou aos grupos que as soluções fossem apresentadas no quadro com os registros e comentadas oralmente. O grupo 1 ficou responsável por apresentar as atividades 1, 2 e 3, e grupo 2 as atividades 4 e 5.

No momento seguinte, o grupo 1 dirigiu-se até a lousa e apresentou a resposta das atividades 1, 2 e 3. As respostas foram bem recebidas pelo grupo 2 sem causar nenhuma discordância. O grupo 2 concordou com as respostas e informou que encontrou a equação da parábola pelo mesmo “caminho”.

Prosseguindo, o grupo 2 iniciou pela atividade 4 a solução, e para isso, esboçou no quadro o gráfico da equação e explicou oralmente a justificativa encontrada pelo grupo para concluir a questão. O grupo explicitou que “compreendeu que nem todas as parábolas podem ser o gráfico de função quadrática, e que esse é um caso”. Na solução da atividade 5, o grupo iniciou comentando que: “perceberam que o vértice da parábola não estava na origem do plano cartesiano” e então, “marcaram a coordenada do foco e em seguida traçaram a reta diretriz, já sabíamos que a reta diretriz passaria pelo eixo x pela coordenada $(-5,0)$, porque o vértice da parábola é o ponto médio entre a reta diretriz e o ponto do foco”. O grupo 2 conclui a atividade apresentando o resultado da equação da parábola. O grupo 1 não questionou a solução dada pelo grupo 2 e acrescentou que “realizaram a atividade pensando na atividade de dobradura, e que perceberam que poderiam fazer no plano cartesiano”.

No final das apresentações, a pesquisadora retornou a atividade 4 e perguntou: “O que vocês pensam a respeito do estudo de parábola realizado até o momento e a resposta que vocês deram para a atividade 4”?

Grupo 2: O que vimos foi parábola de diversas formas e em alguns momentos ela aparece na função do 2º grau como gráfico.

Pesquisadora: O que você quer dizer com diversas formas?

Grupo 2: Bem, diversas formas porque, estudamos as definições, gráficos e equações, e em alguns momentos vimos que a parábola não é o gráfico da função do segundo grau.

Pesquisadora: E o grupo 1, o que pensa a respeito do que o grupo 2 argumentou?

Grupo 1: Também concordamos que nem sempre a parábola é o gráfico de uma função do segundo grau e que estudamos outras coisas na definição da parábola que não sabíamos.

Pesquisadora: Alguém quer fazer mais alguma colocação?

Pesquisadora: Bom, pessoal tudo isso que vocês perceberam é muito importante para finalizar a atividade 4. Realmente, a expressão algébrica não representa uma função quadrática e todos vocês chegaram a essa conclusão. Inclusive, fizeram um gráfico para representar e argumentar a solução. Além disso, tiveram um argumento muito forte, que foi usar a definição matemática de função para justificar a resposta. Assim, chegamos à conclusão que a parábola representa o comportamento gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano, e que objeto matemático parábola não é uma função.

Em seguida, a pesquisadora dirigiu-se ao quadro e comentou oralmente as soluções encontradas nas atividades 1 e 2 que a partir da coordenada do foco e da equação da reta diretriz podemos concluir a distância focal “c” e a posição da parábola nos quadrantes do plano cartesiano.

Na atividade 3, a partir da equação da parábola, pudemos determinar a distância focal dividindo o coeficiente que multiplica a variável x ou y por 4, o resultado é o valor de “c” medida da distância focal, por meio de comparação com as equações generalizadas concluímos a posição da reta diretriz e da parábola no plano cartesiano.

Na atividade 5, no quadro, mostramos que os registros algébricos encontrados na solução são equivalentes e que a equação de parábola procurada pode ser escrita em registro algébrico nas formas $y^2 - 8x - 8y = 8$ ou $y^2 = 8x + 8y + 8$ ou $x = \frac{y^2 - 8y - 8}{8}$

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori* da situação 9, concluímos que os grupos articularam o registro em língua natural do enunciado para os registros gráficos e algébricos e vice-versa, resignificaram a parábola como objeto matemático e o uso das suas representações em outros contextos da matemática, como por exemplo: representar o comportamento dos pontos no plano cartesiano de uma função quadrática, e realizaram corretamente o tratamento algoritmizável no registro algébrico.

3.5 Considerações das análises

As situações 1, 2, 3 e 4 possibilitaram aos sujeitos de pesquisa aprendizagem e reflexões sobre as diferentes formas de se obter a curva no domínio da geometria, propiciando a coordenação entre dois registros, da língua materna para o registro figural. A construção do registro figural da parábola, por meio de dobraduras, demonstrou ser uma atividade que possibilita perceber os elementos matemáticos e as propriedades envolvidos na definição do objeto. Logo, notamos que a compreensão das unidades significativas essenciais para a conversão dos registros de representação, proposta por Duval (2009), foi potencializada inicialmente a partir do registro figural da parábola por meio de dobraduras, o que ajudou, no ambiente da geometria dinâmica, a construir o registro figural do objeto matemático com outros elementos da definição.

A situação 5 foi fundamental para a realização da transição entre o domínio da Geometria para Geometria Analítica, no que se refere à introdução dos eixos cartesianos, coordenadas cartesianas e o cálculo da distância entre pontos.

Nas situações 6, 7, 8 e 9, os sujeitos da pesquisa apropriaram-se da definição de parábola enquanto lugar geométrico, no domínio da Geometria Analítica e da coordenação de ao menos dois registros de representação do objeto matemático.

Um dos principais resultados apontados nas análises dos protocolos de respostas e diálogos com os sujeitos de pesquisa tem relação com a nossa hipótese inicial: o aluno do Ensino Médio tem a falsa ideia de limitar o objeto matemático parábola à representação gráfica de uma função quadrática. De fato, constamos, pelas respostas e questionamentos dos sujeitos de pesquisa durante os encontros, que essa ideia foi recorrente. Assim, a Situação 9, atividade 4, possibilitou-nos observar, ao final das Situações propostas, uma ruptura entre o objeto matemático parábola e a representação gráfica da função quadrática.

Concluimos a partir das análises *a priori* e *a posteriori* que os sujeitos de pesquisa apropriaram-se de conhecimentos de parábola a partir da noção de lugar geométrico e de sua conversão do registro figural para o gráfico e o algébrico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aqui, faremos uma reflexão dos aspectos que consideramos importantes na pesquisa. Para isso, destacaremos os aspectos metodológicos, a fundamentação teórica e suas contribuições para a área de Educação Matemática e, por fim, as novas perspectivas para investigação.

Os aspectos metodológicos escolhidos contribuíram para que a experimentação com os sujeitos de pesquisa se desenvolvesse de maneira efetiva e atendesse ao nosso objetivo de mediar a apropriação pelo aluno das definições de parábola enquanto lugar geométrico, por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência didática. Partimos do pressuposto de que a sequência pudesse contribuir para a apreensão, por parte dos alunos, e permitisse, ao resolver as situações propostas, a realização dos tratamentos e conversões propostos por Duval (2009), pertinentes ao objeto estudado.

Os pressupostos da Engenharia Didática favoreceram a elaboração, aplicação e análise da sequência de Situações, que foram analisadas com base na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) e na Teoria dos Registros de Representação Semióticas de Duval (2009).

Avaliamos que a fundamentação teórica proposta na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) evidenciou sua potencialidade durante a pesquisa, pois a todo o momento trabalhamos com, pelo menos, dois registros de representação, a partir dos quais os sujeitos de pesquisa efetuaram conversões.

Ao observar as produções dos sujeitos de pesquisa no decorrer das Situações da sequência, também constatamos que esses realizaram as conversões e os tratamentos dos registros de representação semiótica, quando fizeram a conversão do registro em língua natural (enunciado das situações) para registro figural (parábola por meio de dobraduras), dos registros gráficos para o algébrico e vice-versa, o que os levou a resolver a situação e a compreender a definição de parábola.

Nas situações em que o domínio da geometria analítica foi predominante, a conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa ocorreu de forma satisfatória. Logo, nosso objetivo foi alcançado, já que os sujeitos apropriaram-se da definição de parábola enquanto lugar geométrico no domínio da geometria e da geometria analítica.

A Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (2008) forneceu subsídios para o desenvolvimento da pesquisa. Na elaboração da sequência didática, foram propostas situações que exigiram dos sujeitos de pesquisa discussões a respeito do que aprenderam,

promovendo o estímulo de novas ideias e favorecendo o desenvolvimento de um ambiente de reflexão.

Quanto ao ensino atual das cônicas, observamos que a parábola, por sua vez, é introduzida como gráfico representativo da função quadrática na maioria dos manuais didáticos. Em geral, o aluno do Ensino Médio desconhece totalmente a propriedade geométrica que a caracteriza. Posteriormente, o estudo é complementado, mas tardiamente.

Para que um conceito seja incorporado, não deve aparecer uma só vez durante o curso e apenas num único momento da vida escolar do aluno. Dessa forma, consideramos a possibilidade de que o estudo de parábola enquanto lugar geométrico no domínio da Geometria e Geometria Analítica pode ser introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental, quando os alunos têm contato com o plano cartesiano, coordenadas e o Teorema de Pitágoras, antecidos pelo estudo de funções. Apoiamo-nos nessa possibilidade, porque os conhecimentos esperados nessas situações propostas são os de oitava série ou nono ano do ensino fundamental.

Consideramos que outros aprofundamentos matemáticos possam ser feitos a partir das situações 8 e 9 (atividade 5) em futuras pesquisas. É possível ampliar a discussão para questões que envolvam coordenação e conversão entre os registros gráficos e algébricos com a translação da parábola nos eixos vertical e horizontal, e com o vértice deslocado da origem $V(h,k) \neq (0,0)$. Apoiamos-nos em Gardner (2002) que sugere estudos da parábola a partir da propriedade “Todas as parábolas são semelhantes porque todos os pares formados por uma reta e um ponto fora dela são semelhantes”. Em outras palavras, segundo o mesmo autor: “Todo o par diretriz-foco só pode coincidir com qualquer outro mediante dilatações, translações e rotações apropriadas”.

Além disso, sugerimos um aprofundamento do estudo do objeto matemático parábola em contextos mais amplos, por meio de situações de aprendizagens que envolvam descobertas realizadas por engenheiros, matemáticos, físicos e astrônomos. Com efeito, Bongiovanni (2001) e Gardner (2002) colaboram com exemplos de descobertas que envolvem a parábola nos contextos já citados.

Os autores afirmam que um dos primeiros problemas sobre parábolas foi o da “quadratura” de uma secção limitada por uma corda. O problema foi resolvido, em primeiro lugar, por Arquimedes no seu famoso tratado *Quadrature of the Parabola*, por intermédio de um engenhoso método de limites, que antecipou o cálculo integral. Desse modo, conseguiu provar que, ao circunscrevermos um paralelogramo, com dois lados paralelos ao eixo da

parábola, a área do segmento da parábola é $\frac{2}{3}$ da área do paralelogramo. Outra descoberta feita por Arquimedes foi a utilização da parábola na construção do heptágono regular. Por fim, o estudo da parábola por meio do problema clássico da duplicação do cubo, construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado.

Outros autores como Pereira e Bonfim (2013) afirmam que nos séculos XV e XVI, a presença de sistemas articulados na Geometria intensificou-se e, com o passar dos anos, surgiu uma diversidade de mecanismos capazes de traçar as mais sofisticadas curvas contribuindo para auxiliar na resolução de problemas clássicos insolúveis somente com o uso da régua e do compasso. Nesse sentido, os autores sugerem um estudo das cônicas por meio de instrumentos articulados que desenhavam cônicas, pois ao serem manipulados permitem a visualização do traçado de curvas possibilitando definir o lugar geométrico dos pontos que compõem a curva em questão. A confecção dos artefatos pode ser realizada pelos alunos em sala de aula, com a ajuda do professor, o que representa uma alternativa de uma atividade para acompanhar o estudo das cônicas na Geometria ou Geometria Analítica do Ensino Médio.

Acrescentamos ainda que as futuras pesquisas sobre as Cônicas podem se debruçar sobre as curvas elipse e hipérbole. A elipse é estudada na física quando se trabalha com as leis de Kepler. Em geral, o professor omite a sua definição geométrica, enfatizando apenas a sua forma. Mais tarde, no 3º ano, o conceito geométrico é apresentado na matemática no estudo da geometria analítica. No entanto, a definição de elipse é mostrada com o único intuito de se chegar à sua equação cartesiana. Feito isso, o desenvolvimento posterior é totalmente algébrico, a ponto de o aluno no final do curso esquecer a definição que originou todo o seu estudo.

A hipérbole equilátera surge na química e é apresentada como o gráfico representativo da função definida por $y = \frac{1}{x}$ sendo que sua propriedade geométrica nem sempre é estudada no 3º ano em geometria analítica. Mesmo assim, a visualização desse lugar geométrico é um problema para o aluno. Nesse sentido, destacamos a importância do aprofundamento de outras Cônicas enquanto lugar geométrico em trabalhos voltados para a hipérbole e a elipse.

Enfim, nossa pesquisa contribui para uma reflexão a respeito do ensino e aprendizagem das Cônicas, pois ao utilizarmos uma sequência didática, articulando diferentes registros de representação, proporcionou-se aos alunos do Ensino Médio a apropriação das definições de parábola enquanto lugar geométrico conjuntamente no domínio da geometria e da geometria analítica, com elementos e propriedades matemáticas já conhecidos por eles.

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A.. **Fundamentos da didática da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade do Paraná, 2007.

ALMOULOU, S. A.; BONGIOVANNI, V.; CAMPOS, T. M. Biannual International Journal: Scientia Paedagogica Experimentalis XXXV, 1: **LES CONIQUES: Construction d'une séquence didactique avec Cabri-Géomètre**. Belgium, 1998, p. 119-142.

BONGIOVANNI, V.. **Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument**. Tese de doutorado, Grenoble, 2001.

BONGIOVANNI, V.. As cônicas como ferramentas para resolver problemas geométricos. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 60. SBM, 2º quadrimestre (2006), p. 47-51.

BONGIOVANNI, V.; LEITE, O. R. V.; LAUREANO, J. L. T.. **Matemática e Vida**. V.3. 2.ed. 3ª série. 2º Grau. São Paulo: Editora Ática, 1993.

BORDALLO, M.. **As Cônicas na Matemática Escolar Brasileira: História, Presente e Futuro**. 2011. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – Ensino de Matemática.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Ensino Médio. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: **Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Volume 2. Brasília: MEC/SEF, 2006.

BROUSSEAU, G.. **Introdução ao estudo da teoria das situações didática: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

DAMM, R. F. Registros de representação In: **Educação matemática uma introdução**, MACHADO, Silvia D. A. (org.), São Paulo: Educ, 2002.

DANTE, L. R.. **Matemática: Ensino Médio** – Vol. 3. 1.ed. São Paulo: Ática, 2004

DUVAL, R.. **Semiósis e Pensamento Humano**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EVES, H.. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Domingues, Higyno H. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2004.

GARDNER, M. **The Last Recreations: Hydras, Eggs, and Other Mathematical Mystifications**. Nova York, Springer-Verlang, 2002.

LIMA, R. N.. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas**. 1999.

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

LOPES, J. F.. **Cônicas e Aplicações**. 2011. Dissertação (Mestrado) – Universidade Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

MACENA, M. M. M.. **Contribuições da Investigação em sala de aula para uma aprendizagem das Secções Cônicas com significado**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

MELO, F. S.; GALVÃO, M. E. E.L. Obtendo as cônicas com dobraduras. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 66. SBM, 2º quadrimestre (2008), p. 29-32.

NETO, F. Q. Tradução Comentada da Obra "**Novos Elementos das Seções Cônicas**" (Philippe de La Hire – 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática. 2008. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – Ensino de Matemática.

OLIVEIRA, A. L. de. **Objeto de aprendizagem para desenvolvimento de Habilidades de visualização e representação de Secções Cônicas: atividades para o Ensino Médio**. (2011). Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

PEREIRA, L. R.; BONFIM, V.. Artefatos: instrumentos articulados que desenharam cônicas In: **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, ano 30, número 80, 1º quadrimestre (2013), p. 10-13.

PIZA, C. A. de M.. **Registros de representação semiótica e uso didático da história da matemática: um estudo sobre parábola**. 2009. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Caderno do Professor**: matemática, ensino médio, 3ª série, volume 1. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2014.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Caderno do Aluno**: matemática, ensino médio, 3ª série, volume 1. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2014.

SILVA, M. B.. **Secções Cônicas: atividades com Geometria Dinâmica com base no Currículo do Estado de São Paulo**. 2011. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

WINTERLE, P.. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000, p.174

Apêndice A – A Sequência de Ensino

Situação 1

Atividade 1

Usando uma folha de papel vegetal desenhe uma reta d e marque um ponto F não pertencente à reta d . Selecione um ponto P na reta e dobre o papel-vegetal de forma a fazer coincidir os pontos P e F . Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a reta d .

a) O que você observou como resultado dessas dobras? Contorne com lápis o que você observou.

Atividade 2

a) Qual a relação entre o segmento $\overline{FP}$ e a dobra obtida a partir dele? Pode desenhar se quiser.

b) Tome um ponto Q qualquer da reta d e trace, por ele, uma reta perpendicular à reta d . Dobre a folha de forma que o ponto Q coincida com o ponto F . Chame de R o ponto de intersecção da dobra feita com a curva que você esboçou. Verifique se a medida de $\overline{QR}$ é igual à medida de $\overline{RF}$.

c) O que você pode concluir a respeito da relação entre um ponto da curva e o ponto F e a reta d ?

Situação 3

Atividade 1

Abra uma nova janela no Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e vamos construir uma parábola a partir das observações das situações anteriores. Observe que deve obter um ponto da mediatriz que tenha mesma distância à reta d e ao ponto F . Explique sua construção. Use a ferramenta lugar geométrico do Geogebra para obter a parábola.

[illegible]

Atividade 2

Abra uma nova Janela no software Geogebra e construa uma nova parábola. O que você observa quando movimenta o ponto F? E quando movimenta a reta d?

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Situação 4

Atividade 1

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos). Construa uma parábola por lugar geométrico e encontre o simétrico do ponto F em relação a uma reta tangente à parábola. O que você observa?

[illegible]

Atividade 2

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e trace uma reta diretriz e um ponto F. Encontre o lugar geométrico dos centros de circunferências que contém F e tangenciam d. Justifique sua resposta.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Atividade 3

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos). Dados um ponto A e duas retas r e s, obtenha os pontos de r que equidistam de A e s. O que você observa? Justifique sua resposta.

Atividade 4

Abra uma nova Janela no software Geogebra (feche a janela de álgebra e esconda os eixos) e construa uma parábola dados o foco F e o vértice. Descreva a sua construção. Qual a relação entre o ponto V e o segmento $\overline{FF'}$ (F' é simétrico F)

Situação 5

Atividade 1

Abra uma nova Janela no software Geogebra e marque os pontos A (4,5) e B(8,2) e trace o segmento $\overline{AB}$.

a) Determine a distância entre A e B sem usar a ferramenta medir do geogebra.

[illegible]

b) Determine uma regra para calcular a distância entre dois pontos.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Situação 6

Atividade 1

Nas situações anteriores chegamos a uma definição matemática para Parábola que será utilizada nesta atividade. Qual é ela?

Abra uma janela no *software* Geogebra.

a) Determine o ponto $F(2,3)$ e a reta d , paralela ao eixo x , que passa pelo ponto $A(0,-2)$. Considere F como o foco de uma parábola e a reta d como sua diretriz. Tome um ponto P na reta d e determine um ponto Q da parábola. Determine as coordenadas dos pontos P e Q .

b) Utilizando a definição de parábola vista até agora e a situação 5, determine a equação dessa Parábola. Para certificar se a equação está correta, esconda o lugar geométrico e determine no ícone “cônicas” a parábola por diretriz e foco. No ícone exibir janela de álgebra, compare os resultados.

c) Vamos generalizar a equação de uma parábola. Considerando que a reta diretriz tenha equação $y = c$, um ponto dessa reta é $P(x, c)$ o foco $F(0, c)$ e $Q(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à parábola. Encontre a equação geral da Parábola.

Atividade 2

a) Construa no Geogebra uma parábola com a diretriz paralela ao eixo y . Movimente os pontos de base. O que você observa?

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

b) Agora determine a equação de uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo y .

[illegible]

Situação 7**Atividade 1**

a) Construa, usando a ferramenta cônica, uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo x . Mostre a equação dessa parábola e observe a relação entre os coeficientes da equação e a medida entre o foco e a reta diretriz. Movimente a parábola para validar a sua resposta. O que você observa?

b) Construa agora uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y . Verifique se a relação encontrada na atividade anterior também é válida nesta. Movimente a parábola. O que você observa?

c) É possível generalizar esses resultados?

Situação 8

Atividade 1

Determine a equação da curva que tem seus pontos equidistantes do ponto A(-1,3) e da reta representada por $y + 3 = 0$. Justifique sua resposta.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Situação 9

Atividade 1

Obtenha a equação da parábola cuja diretriz é representada pela reta $y=-2$ e cujo foco é o ponto $F(0,2)$.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Atividade 2

Obtenha a equação da parábola que tem como diretriz a reta representada por $x=-2$ e como foco o ponto $F(2,0)$.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Atividade 3

Determine o foco, o vértice e a diretriz de cada uma das equações parábolas representadas:

a) $y^2 = 28x$

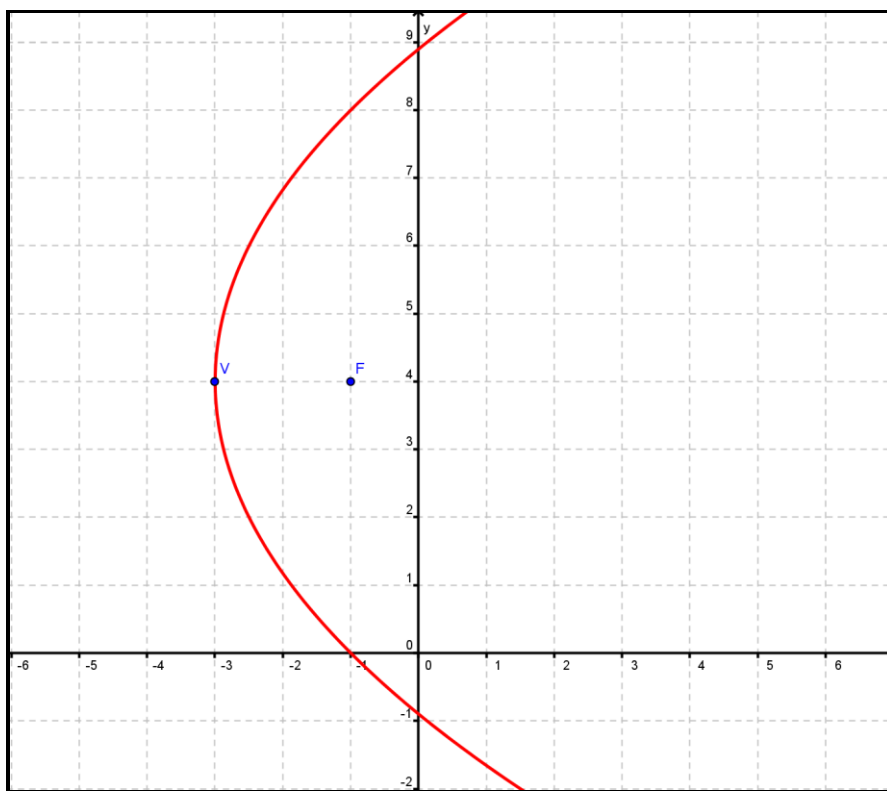
b) $x^2 = -4y$

Atividade 4

Esboce o gráfico representado pela equação de parábola $y^2 = 2x$. Por que esse gráfico não representa uma função?

Atividade 5

Determine a equação da parábola representada no gráfico abaixo e a equação de sua diretriz:



Anexo A – Modelo de autorização

Autorização para realização de pesquisa

Eu,....., diretora da, venho por meio desta informar a V.S.a que autorizo a pesquisadora Sandra Pereira Lopes aluna do curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FCET da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP a realizar a pesquisa intitulada **UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PARÁBOLA ENQUANTO LUGAR GEOMÉTRICO**, sob orientação da Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva.

Declaro conhecer e cumprir as Resoluções Éticas Brasileiras, em especial a Resolução CNS 196/96. Esta instituição está ciente de suas co-responsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo e bem estar dos sujeitos nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem estar.

Anexo B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você esta sendo convidado (a) a participar, como voluntário, de uma pesquisa. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outro é do pesquisador responsável. Em caso de recusa você não sofrerá nenhum tipo de penalidade. Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com a Comissão de Ética - Edifício Reitor Bandeira de Mello, na sala 63-C, na Rua Ministro Godói, 969 – Perdizes – São Paulo – SP – CEP: 05015-001 – Tel./FAX: (11) 3670-8466 – e-mail: cometica@pucsp.br

1. Título do Projeto: “UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PARÁBOLA ENQUANTO LUGAR GEOMÉTRICO”.

2. O objetivo desta pesquisa é investigar se uma sequência didática com atividades que contemplam conversões entre diferentes registros de representação semiótica pode favorecer a aprendizagem do objeto matemático parábola enquanto lugar geométrico.

3. Durante a pesquisa, você será solicitado a participar de alguns encontros onde realizaremos um conjunto de atividades. Estas atividades serão filmadas por um cinegrafista, a fim de subsidiar a análise que será feita posteriormente. As imagens não serão divulgadas e as identidades dos participantes serão preservadas. Cada atividade poderá envolver uma parte prática, uma resolução e/ou uma discussão de questões sobre a codificação e/ou decodificação de representação das Cônicas enquanto lugar geométrico.

4. Em cada encontro, desenvolveremos a atividade designada para ele, individualmente ou em grupos. As discussões surgidas, gerenciadas pela principal investigadora, Prof^a Sandra Pereira Lopes, serão observadas e filmadas. Os protocolos serão recolhidos e deles serão tirados os dados qualitativos.

5. Os dados analisados serão utilizados de forma sigilosa. As imagens e sons obtidos por meio da filmagem das atividades só serão utilizados pelo principal investigador para esclarecer dúvidas que possam surgir durante a análise dos protocolos e das observações.

6. Somente no final do estudo poderemos concluir a presença ou não de algum benefício, na forma de propostas de abordagens de ensino diferentes da usual, para a Matemática em geral e para o caso da codificação e da decodificação das cônicas enquanto lugar geométrico.

7. Garantia de acesso: em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas. A principal investigadora é a mestrandia Sandra Pereira Lopes, que pode ser encontrada em seu local de trabalho, Rua Silvilino Mantovanini, 300 – JD. Rivieira – CEP 04925-040 – tel. (11) 5517-6340 ou (11) 99675-8612, email sandraplopes2004@ig.com.br; e a orientadora é a Profª Dra. Maria José Ferreira da Silva, que pode ser encontrada na Pontifícia Universidade Católica São Paulo - Campus da Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação - 01303-050 - São Paulo SP - Brasil - tel.: (11) 3124.7210 - Ramal 7210, email zeze@pucsp.br. Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com a Comissão de Ética - Edifício Reitor Bandeira de Mello, na sala 63-C, na Rua Ministro Godói, 969 – Perdizes – São Paulo – SP – CEP: 05015-001 – Tel./FAX: (11) 3670-8466 – e-mail: cometica@pucsp.br

9. É garantida a liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem qualquer prejuízo à continuidade de seu vínculo com a Instituição.

10. Direito de confidencialidade – As informações obtidas, assim como as imagens e sons obtidos pela filmagem serão analisadas no conjunto de participantes, não sendo divulgada a identificação de nenhum destes.

11- Direito de ser mantido atualizado – Os resultados parciais das análises serão compartilhados, à medida que forem obtidos.

12. Despesas e compensações: não há despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo. Também não há compensação financeira relacionada à sua participação.

13. Os dados analisados serão utilizados somente para esta pesquisa.

Acredito ter sido suficientemente informado a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim, descrevendo o estudo “Uma sequência didática para o ensino de cônicas enquanto lugar geométrico”. Eu discuti com a mestrandia Sandra Pereira Lopes a minha decisão em participar desse estudo. Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que minha

participação é isenta de despesas. Concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidade ou prejuízos ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido, ou no meu atendimento nesta unidade de ensino.

São Paulo, ____/____/____

Assinatura do aluno / representante legal

(Somente para o responsável do projeto)

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste paciente ou representante legal para a participação neste estudo.

Assinatura do responsável pelo estudo