PONTIFÍCIA UNIVESIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

ANDREZA MARTINS ANTUNES GOULART

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Mestrado em Educação Matemática

São Paulo
2014

PONTIFÍCIA UNIVESIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

ANDREZA MARTINS ANTUNES GOULART

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob a orientação do **Professor Doutor Benedito Antonio da Silva**.

São Paulo
2014

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ___________________________________ **Local e Data:** __________________

Dedicatória

Aos meus pais, pela minha existência

e pelo sentido que trazem a minha vida.

A minha avó Thereza (*in memorian*), pelo que me ensinou

e pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação representa o fim de uma importante etapa da minha vida. E não foi fácil chegar até aqui. Do processo seletivo até a conclusão do Mestrado, foi um longo caminho percorrido. Nada foi fácil, tampouco tranquilo. Quero agradecer a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, acreditaram em mim e contribuíram de forma decisiva para a sua concretização.

Aos meus pais, que muitas vezes renunciaram aos seus sonhos para que eu e meus irmãos pudéssemos realizar os nossos. Obrigada por sempre acreditar em minha capacidade e pela criação baseada em amor e valores. A minha amada avó Thereza (*in memoriam*), que, onde quer que esteja, nunca deixou de me amar nem de confiar em mim. Ao meu marido Carlos e minha irmã Alessandra, que diretamente me incentivaram e tanto auxiliaram na concretização desta pesquisa.

Ao prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, meu orientador e exemplo profissional, por tudo que me ensinou nos momentos de orientação e por acreditar em meu potencial. Esta dissertação é resultado de horas de dedicação e paciência desse grande orientador e educador matemático. Às professoras Barbara Lutaif Bianchini e Norma Suely Gomes Allevato, que aceitaram compor minha banca de qualificação e de defesa, pelas sugestões significativas às quais tentarei atender na versão definitiva do texto.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À direção e orientadora Cristiane Akemi, do colégio em que atuo, por acreditarem no meu trabalho e contribuírem para meu crescimento profissional.

Aos professores Manuel Edson e Maria Aparecida, do Centro Universitário Estácio de São Paulo, por terem encaminhado a inscrição para o Mestrado. Se hoje essa dissertação existe, é graças a vocês que me incentivaram e insistiram para que eu voltasse a estudar.

A todos que de alguma forma me auxiliaram na elaboração e desenvolvimento deste trabalho, minha eterna gratidão.

E a Deus, por ter me dado forças para finalizar esta dissertação, que é parte da realização de um sonho.

Educação é aquilo que fica depois que você
esquece o que a escola ensinou.
Albert Einsten

RESUMO

Esse estudo tem por objetivo investigar se o ensino e a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, por meio de resolução de problemas aliada aos princípios da aprendizagem significativa, podem contribuir para uma eficaz construção de conhecimento. Trata-se de uma pesquisa do tipo qualitativa, realizada por meio de uma intervenção de ensino em que foi proposta uma sequência de atividades, e os dados foram coletados por meio de observação e anotações em sala de aula e análise de protocolos de alunos. A pesquisa foi realizada com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma instituição privada da cidade de São Paulo, na qual a pesquisadora é professora. O conteúdo que na época estava sendo desenvolvido era Sistemas de Equações do 1º grau com duas incógnitas, e a metodologia de ensino adotada pelo professor era focada no ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. A proposta didática para este trabalho era introduzir o conteúdo de sistema de equações por meio de uma sequência de atividades, todas desenvolvidas nas aulas de Matemática. A partir do que já era de conhecimento dos alunos, estes resolveram as questões propostas em diferentes situações, representando-as por meio de equações com duas incógnitas e adotando dois métodos distintos para obter a solução: da adição e da substituição. A análise dos protocolos dos alunos e das anotações realizadas durante o desenvolvimento das atividades indica que os alunos notaram que, nas situações propostas, seria necessário o uso de equações com duas incógnitas, diferente do que ocorre em uma equação do 1º grau, e que, ao utilizar as letras iniciais das palavras que correspondiam à incógnita, facilitaria esse processo. Ao serem desenvolvidos os dois métodos de resolução, da adição e da substituição, os alunos, apesar de apresentaram certa resistência pelo segundo método, ao final perceberam que, para diferentes situações, um dos métodos poderia facilitar a resolução da questão proposta. Após a realização e análise da sequência didática, pode-se concluir que o ensino por meio da resolução de problemas contribui para maior compreensão do que está sendo feito e que esse tipo de abordagem permite que os alunos compreendam o porquê da necessidade de utilizar o sistema de equações do 1º grau para resolver determinadas situações. O uso de cada uma das incógnitas, desse modo, bem como a importância de conhecer dois métodos de resolução, torna sua aprendizagem significativa.

PALAVRAS-CHAVE: resolução de problemas; sistemas de equações do 1º grau; Ensino Fundamental; aprendizagem significativa.

ABSTRACT

This study aims to investigate whether the teaching and learning of equations of the 1st grade students from the 8th grade of elementary school systems, by means of solving problems allied to the principles of meaningful learning can contribute to an effective knowledge construction. This is a qualitative study, conducted by a teaching intervention has been proposed in which a sequence of activities, and data were collected through observation and classroom notes and analysis of students' protocols. The survey was conducted with students from the 8th grade of Elementary School from a private institution in the city of São Paulo, in which the researcher is a teacher. The content that was being developed at that time was the 1st degree equations systems with two unknowns, and the teaching methodology adopted by the teacher was focused on teaching mathematics through problem solving. The didactic proposal for this work was to introduce the contents of the system of equations by means of a sequence of activities, all developed in mathematics classrooms. From what was already known by the students, they solve the issues proposed in different situations, representing them by means of equations with two unknowns and adopting two different methods for the solution: the addition and replacement. The analysis of the protocols of students and notes taken during development activities indicates that students have noted that the proposals situations, the use of equations with two unknowns would require, unlike what happens in an equation of the 1st degree, and that when using the initial letters of words that correspond to the unknown, would facilitate this process. To be developed both methods of resolution, addition and substitution, students, despite some resistance presented by the second method, the end realized that, for different situations, one of the methods could facilitate the resolution of the proposed issue. After the completion and analysis of the instructional sequence , it can be concluded that teaching through problem solving contributes to greater understanding of what is being done and that this approach allows students to understand why the need to use the system equations of the 1st grade to solve certain situations . The use of each of the unknowns, thereby, as well as the importance of knowing two methods of resolution makes its meaningful learning.

KEYWORDS: problem solving; systems of equations of the 1st degree; Elementary School; meaningful learning

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Introdução

Durante o meu curso básico, as aulas de Matemática eram baseadas em grande parte na resolução de listas de exercícios, com expressões numéricas, memorização e chamada oral de produtos notáveis. Naquela época, acreditava que isso era fazer matemática. Os problemas cujos enunciados não indicavam diretamente o algoritmo a ser aplicado eram esporadicamente apresentados. Resolvê-los representava para mim um desafio.

Já na faculdade, comecei a lecionar logo no primeiro ano do curso e percebi que as dificuldades que eu tivera na minha época de estudante eram parecidas com as de meus alunos. Durante a especialização em Matemática Educacional, em 2004, fiz uma revisão bibliográfica sobre as diferentes heurísticas em resolução de problemas. Notei que, no final de cada capítulo da maioria dos livros didáticos, os problemas tinham a função de fixar o aprendizado de um conteúdo. Percebi que o grande problema não era somente como ensinar a resolver problemas, mas especialmente quando trabalhar com esse tipo de método.

No Mestrado em Educação Matemática, na PUC-SP, durante as reuniões do grupo de discussão coordenado pelo prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, tive contato com as três abordagens de resolução de problemas em Matemática de Schroeder e Lester (1989): ensino sobre resolução de problemas, ensino para resolução de problemas e ensino por meio da resolução de problemas, sendo que a última concepção foi a que chamou a minha atenção.

Levando em conta toda dificuldade encontrada por mim e por meus alunos durante as aulas no colégio, alguns questionamentos motivaram minha pesquisa sobre resolução de problemas, tema central de minha dissertação: por que os alunos, mesmo com o passar do tempo e o estudo de novas metodologias, ainda continuam apresentando as mesmas dificuldades que eu tive na época de escola? Em que momentos o uso de problemas deve surgir dentro de uma aula de Matemática? Como deve ser feito o trabalho com resolução de problemas em relação à interpretação dos enunciados? Que cuidados o professor precisa ter ao elaborar atividades que utilizem a resolução de problemas para introduzir um novo conteúdo?

Mediante todos esses questionamentos, busquei novos artigos, trabalhos e livros que tratassem desse assunto. Ao ler os trabalhos do grupo de pesquisa da professora pesquisadora Lourdes de la Rosa Onuchic (1999, 2005, 2008a, 2008b e 2011) e a obra de Van de Walle (2001, 2009), percebi que, para esses autores, o ensino via resolução de problemas é algo que contribui para o aprendizado. Fixou-se, assim, o ponto de partida teórico da pesquisa que realizaria para investigar se a estratégia de resolução de problemas pode auxiliar os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na aquisição de uma aprendizagem significativa de sistemas de equações.

É notória a dificuldade enfrentada pelo aluno em aprender e pelo professor em buscar estratégias para ensinar sistemas de equações do 1º grau, nos 7os e 8os anos do Ensino Fundamental. É possível notar a tentativa de alguns livros didáticos em introduzir esses conteúdos por meio de situações-problema. Isso, contudo, não tem se configurado como estratégia para construir o novo conceito pelo aluno. Em muitos dos casos, a situação é proposta apenas para instigar a curiosidade do aluno e sua resolução ocorre somente após a apresentação e o treino por meio de lista de exercícios do algoritmo do conteúdo trabalho.

Tendo em mente essas percepções, resolvi embasar minha pesquisa em sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, no 8º ano do Ensino Fundamental, em princípios presentes nos trabalhos de Onuchic e Van de Walle.

Por outro lado, a estratégia de ensino por meio da resolução de problemas envolve conhecimentos prévios dos alunos. A partir dessa constatação, busquei elementos nos princípios da aprendizagem significativa de Ausubel, teoria cognitivista e construtivista sobre o processo de aquisição do conhecimento que, aliada à resolução de problemas, pode fornecer um caminho eficaz para que o aluno, partindo de conhecimentos prévios, possa construir conhecimento com significado.

Como tudo, Matemática surgiu da necessidade do homem em resolver problemas do cotidiano, da própria Matemática ou de outras Ciências. O ensino por meio de situações-problema, nas quais se detecta a necessidade de utilização de um novo conceito ou algoritmo matemático para a sua solução, pode gerar melhor compreensão e aprendizado mais significativo do conteúdo explorado, no caso sistemas de equações do 1º grau.

Estabelece-se, a partir dessa abordagem, a seguinte questão de pesquisa: o ensino e a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, por meio de resolução de problemas aliados aos princípios da aprendizagem significativa, podem contribuir para uma eficaz construção de conhecimento?

Para responder a essa pergunta, elaborei uma intervenção de ensino com o intuito de analisar as reações dos alunos do 8º ano frente ao estudo de sistemas de equações do 1º grau via resolução de problemas.

Com o objetivo de realizar tal intervenção, busquei subsídios em trabalhos envolvendo a resolução de problemas no ensino. Para isso, iniciei realizando uma singela revisão de literatura.

Revisão bibliográfica

Para a revisão bibliográfica, foram pesquisadas dissertações e teses em Educação Matemática no banco de teses da Capes. Para o nosso trabalho foram selecionadas aquelas que foram defendidas nos últimos 10 anos (de 2003 a 2012). A escolha do período ocorreu devido à diversidade de trabalhos relacionados aos dois eixos principais da pesquisa em andamento: a resolução de problemas como estratégia de ensino e a aprendizagem significativa segundo David Ausubel.

A respeito da resolução de problemas, foram localizadas no site da Capes 4 999 trabalhos. Como a nossa pesquisa é voltada aos anos finais do Ensino Fundamental II, foram considerados somente os trabalhos relacionados ao ensino da Matemática no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, totalizando 24 dissertações e duas teses. Cinco desses trabalhos focavam suas pesquisas no ensino de resolução de problemas, e sete, no ensino para resolver problemas. Já em relação ao ensino por meio da resolução de problemas, 12 dissertações foram encontradas. Como a última forma de trabalhar a resolução de problemas é a estratégia que adotamos em nossa pesquisa, selecionamos somente os sete trabalhos voltados ao ensino via resolução de problemas que acreditamos ser mais relevantes para a nossa pesquisa e apresentaremos uma breve análise de cada um deles.

Em relação ao ensino via resolução de problemas, primeiramente apresentamos a análise de três dissertações do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, da UNESP/Rio Claro e, posteriormente, outros quatro trabalhos, de outros grupos de pesquisas.

Os três trabalhos orientados por Onuchic adotaram a metodologia baseada no Modelo de Romberg (in HUAMAN HUANCA, 2006, p. 49), por “orientar o pesquisador no que se refere a planejar, investigar e desenvolver seu trabalho”. As pesquisas foram elaboradas por meio de projeto composto por uma sequência de atividades relacionadas entre si e distribuídas em três blocos: identificação do problema, resolução do problema de pesquisa e coleta de evidências, análise e conclusões.

Cada atividade da sequência foi desenvolvida seguindo um roteiro elaborado por Onuchic (1999), para a implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula: 1) a formação de grupos e a entrega da atividade; 2) o papel do professor como mediador nas atividades; 3) os resultados dos alunos na lousa e a plenária na qual eles discutiam e defendiam suas resoluções e respostas; 4) a análise dos resultados, em que as dificuldades encontradas pelos alunos são novamente trabalhadas; 5) o consenso, quando se busca concordância sobre o resultado pretendido; 6) a formalização, quando é feita uma síntese do que se pretendia aprender com o problema dado e colocam-se as devidas definições, identificam-se as propriedades e fazem-se as demonstrações . Em 2011, após o desenvolvimento de pesquisas e o contato com professores em experiências com formação, Onuchic e Allevato realizaram algumas mudanças no roteiro existente, dando origem a um Segundo Roteiro, que é referência para a análise das atividades do atual trabalho. Tal roteiro será apresentado posteriormente no capítulo do Referencial Teórico.

Podemos notar que o roteiro elaborado por Onuchic (1999) e utilizado nas três dissertações analisadas a seguir apresenta semelhanças às três fases para ensinar pela resolução de problemas de Van de Walle (2009), que faz parte do referencial teórico de nossa pesquisa: **preparando os alunos**, verificando se eles compreenderam o problema; **alunos trabalhando**, permitindo que construam seus conhecimentos; e **alunos debatendo**, encorajando a interação na sala no momento da apresentação das diferentes formulações das soluções e formas de validação.

A primeira dissertação de mestrado analisada é intitulada “O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental.”, de Mariangela Pereira (2004), que teve como objetivo principal verificar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental.

A autora considera o ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas uma metodologia alternativa na Educação Matemática, por visar ao trabalho centrado no aluno. Ela iniciou sua pesquisa com um projeto sobre os tópicos de Divisibilidade e Números Racionais com alunos do 3º ciclo do Ensino Fundamental, de uma escola estadual, onde a pesquisadora era professora. A busca de outras metodologias de ensino pela pesquisadora ocorreu por ela notar que a abordagem tradicional não motivava a aprendizagem por parte dos alunos. Segundo Pereira (2004, p. 1), “o relacionamento com eles não era bom, pois o comportamento deles em sala de aula era difícil e a forma de ensino tradicional parecia não ser a mais adequada ao trabalho daquela sala”.

A pesquisadora fundamentou sua investigação em elementos teóricos propostos por Van de Walle (2009), Viktor (2002), Polya (1995), Onuchic (1998) e Pironel (2002) e nas ideias do NCTM (1989, 2003), relacionados ao ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.

Ao analisar os resultados das situações propostas no projeto, Pereira (2004) observou que alguns alunos ficaram chocados com o trabalho em grupo, por estarem acostumados a trabalhar individualmente nas aulas, e a pesquisadora sentiu certa resistência dos alunos em aceitar as mudanças. Inicialmente os alunos sentiram dificuldade em buscar as respostas sem a ajuda do professor e mostraram-se muito preocupados em apresentar a resposta correta, por acreditarem que a resposta certa era o único caminho de obter notas melhores.

Porém, dentro de certas limitações, a pesquisadora observou que os alunos conseguiram relacionar os conteúdos que eram trabalhados com conteúdos trabalhados pelo professor anteriormente, que era um dos objetivos da pesquisadora. É justamente essa questão que pretendemos verificar com nossa pesquisa.

Ao analisar os resultados, Pereira (2004) afirmou que acredita na necessidade do trabalho com a autoestima do aluno, por meio da valorização dos acertos, dos diferentes caminhos escolhidos para a resolução de um problema e da ideia de que o erro é uma oportunidade para aprendizagem. A autora concluiu que a metodologia adotada contribuiu para uma melhora no ensino-aprendizagem de Matemática e fez com que os alunos pensassem, refletissem e até gostassem de fazer Matemática ao visualizar que essa disciplina pode ser utilizada para interpretar problemas do cotidiano. Para ela (ibidem, p. 247), “essa metodologia permitiu que fossem trabalhadas as dificuldades enfrentadas pelos alunos, vistas como problemas secundários, ao invés de se fazer revisões cansativas e desinteressantes”; a dúvida do aluno era trabalhada no momento em que surgia, pois, com ela, não seria possível resolver o problema em questão.

Embora Pereira (2004) tenha elaborado e desenvolvido o projeto utilizando o objeto matemático e o público-alvo diferentes do que utilizamos em nossa pesquisa, tanto os referenciais teóricos quanto as observações realizadas pela pesquisadora têm grande relevância na elaboração e desenvolvimento da nossa sequência didática.

A escolha da dissertação “A Resolução de Problemas no processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da Sala de Aula.”, de Roger Ruben Huaman Huanca (2006), não ocorreu ao acaso. Sua dissertação já foi utilizada no trabalho de conclusão de curso dessa pesquisadora, intitulada “A resolução de problemas como metodologia no ensino da Matemática” (2004), para obtenção do título de especialista em Matemática Educacional, por apresentar as perspectivas históricas sobre Resolução de Problemas e as mudanças no ensino de Matemática no século XX, que evidenciou o ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas como um caminho alternativo na construção de conceitos matemáticos pelos alunos. Sua pesquisa foi novamente de grande relevância na elaboração da sequência didática e análise dos dados da pesquisa atual.

Em sua pesquisa, Huaman Huanca (2006) pretendia verificar se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constituía em num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio. Para isso o autor realizou sua pesquisa com 27 alunos do 2º ano do Ensino Médio, mais o professor da turma, de uma escola da rede pública do estado de São Paulo.

O pesquisador elaborou uma sequência de atividades propostas para 40 aulas de 45 minutos cada, e alguns problemas que já haviam sido escolhidos pelo professor da turma, durante o planejamento anual, foram incluídos no projeto.

O autor explicita que sua pesquisa se fundamenta em elementos teóricos propostos por Van de Walle (2001) e Onuchic (1999, 2003, 2004), relacionados ao ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. O trabalho de Stanic & Kilpatrick (1989) também fundamentou sua pesquisa, por descreverem o papel da resolução de problemas matemáticos desde a antiguidade e colocarem os três temas gerais que têm caracterizado o papel dessa estratégia no currículo da matemática escolar: resolução de problemas em contexto, resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte. Já em relação ao ensino da trigonometria, Huaman Huanca (2006) baseou sua pesquisa em uma publicação de Kennedy (1993), intitulada “Trigonometria”, e nos *Standards* 2000 do NCTM.

Para o Huaman Huanca (2006, p. 246), os alunos

> [...] resolveram problemas, raciocinaram matematicamente, compartilharam ideias e desenvolveram sua própria compreensão na construção de conhecimentos matemáticos, fizeram conexões entre ideias matemáticas, tornando sua compreensão mais profunda e mais duradoura e utilizaram representações matemáticas.

Também concluiu que ensinar a partir de problemas não é fácil e que todas as atividades devem ser elaboradas considerando a compreensão atual do aluno. Por falta de tempo, alguns problemas planejados não foram aplicados. Mas, apesar dos problemas encontrados, Huaman Huanca (2006), tal como ocorreu com Pereira (2004), constatou que o trabalho com o ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas levou a um aumento na motivação dos alunos e do professor e que foi possível observar os alunos relacionando suas atividades com alguns tópicos trabalhados anteriormente.

A terceira dissertação de Mestrado sob orientação da professora Onuchic é de Paulo Henrique Herminio, publicada em 2008 e intitulada “Matemática Financeira – Um Enfoque da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e Aprendizagem.”.

O autor iniciou o projeto em uma classe do 2º ano do Ensino Médio. Por questões administrativas, foi obrigado a interromper o trabalho por um semestre. Ao voltar, o projeto teve continuidade com os alunos cursando o 3º ano de Ensino

Médio. O pesquisador era o professor da turma e, durante o projeto, 15 estudantes resolveram problemas de matemática financeira relacionados a questões do cotidiano.

O objetivo dessa pesquisa era verificar quais reflexões sociais os professores podem levar seus alunos a fazer quando é feito um estudo introdutório de Matemática Financeira no Ensino Médio, em que há a construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos através da Resolução de Problemas.

O autor fundamentou-se em elementos teóricos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática, através da Resolução de Problemas segundo Varizo (1993), Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004) e Van de Walle e Lovin (2001) e alguns aspectos da História da Matemática Financeira.

Ao analisar os resultados, Herminio observou que o ensino-aprendizagem através da resolução de problemas pode ser positivo com a participação efetiva dos alunos no processo de construção de seu próprio conhecimento. Ele constatou que existe a necessidade de mudança de postura do professor, devido à falta de incentivo e interesse, por parte dos mesmos, ao não permitir aos alunos desenvolver iniciativas para a construção e a reflexão sobre os conceitos que estão aprendendo.

Os três trabalhos do grupo de pesquisa coordenado por Onuchic analisados se assemelham à nossa pesquisa por utilizar, como referencial teórico, os trabalhos da Onuchic (1999) e Van de Walle (2001, 2009). Esses trabalhos são voltados ao ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas e enfatizam a importância da postura do professor como incentivador no processo de ensino-aprendizagem-avaliação e da aprendizagem com significado, em que relaciona o novo conceito a conhecimentos anteriormente adquiridos pelos estudantes. Porém se diferem deste estudo, entre outros, pelo objeto matemático e pela metodologia de pesquisa adotada.

Três outras dissertações despertaram interesse inicial da pesquisadora, mas, após a leitura, percebemos que não seriam tão relevantes para a pesquisa em andamento. O primeiro foi a dissertação de Denise Di Giovanni Lamberti (2003), intitulada “O ensino de matemática através da resolução de problemas.”, que traz um levantamento histórico da resolução de problemas como metodologia e reforça que o ensino da matemática por meio dessa metodologia proporciona o desenvolvimento de competências e habilidades dos alunos. Apesar de o trabalho de Lamberti (2003) apresentar resultados significativos, é um trabalho teórico, que se diferencia da nossa proposta de pesquisa.

Já a dissertação de Carlos Alberto Miranda Pinheiro (2008), da Universidade do Estado do Pará, intitulada “Ensino de análise combinatória a partir de situações-problema”, teve como objetivo verificar se uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise Combinatória. A sequência foi desenvolvida com 15 alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola pública. O pesquisador constatou que a resolução de problemas como ponto de partida viabiliza condições favoráveis para a introdução de conceitos básicos da análise combinatória, mas que, para um melhor resultado, seria necessário acrescentar algumas aulas de exercícios para minimizar a quantidade de erros cometidos pelos alunos na resolução dos problemas. O trabalho chamou a atenção devido aos resultados e por alertar sobre a necessidade das aulas de exercícios durante as atividades da sequência, mas diferencia de nossa pesquisa quanto à metodologia e ao referencial teórico adotados. Para a pesquisa, Pinheiro (2008) teve a metodologia da pesquisa fundamentada nos Princípios da Engenharia Didática de Artigue (1996) e teve como referencial teórico a utilização da resolução de problemas como ponto de partida, extraído de Sá (2005) e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986).

O último trabalho foi a dissertação de Rosilda dos Santos Morais (2008) — "A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado" —, da UNESP de Rio Claro, que tinha como objetivo principal desenvolver o conteúdo de Polinômios na 7ª série e o de Funções na 8ª, partindo da construção de caixas de papelão. A pesquisadora buscou proporcionar aos alunos o “fazer matemática com as mãos”, ou seja, desenvolver o conteúdo de modo que eles pudessem coletar, experimentar e analisar, em um contexto do mundo real, padrões matemáticos subjacentes. Analisando o trabalho realizado, constatou-se que o desenvolvimento do conceito de Polinômio seguido do conceito de Função, por meio da manipulação de material concreto, resultou numa aprendizagem mais significativa para os alunos, pois puderam, durante todo o trabalho, estabelecer relações entre os temas abordados, dentro de um sistema mais amplo, onde significados e convenções foram sendo estabelecidos.

Em comparação com a nossa pesquisa, podemos observar que a dissertação de Morais (2008) apresenta o mesmo público-alvo e a mesma metodologia, o ensino por meio da resolução de problemas. Mas é diferenciada por enfatizar o uso do material concreto na formação do conceito e em relação ao objeto matemático.

A respeito de sistemas de equações do 1º grau, foram localizadas apenas três dissertações no site da Capes que foram defendidas nos últimos 10 anos. Essas três pesquisas utilizaram o objeto matemático escolhido, e apenas duas utilizaram a metodologia da resolução de problemas. Embora apresentem o mesmo objeto matemático, nenhuma das três dissertações focou a aprendizagem significativa.

A dissertação defendida em 2010 por Florisvaldo de Oliveira Rocha, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, com o título "Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental", teve como objetivo a análise do processo de aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau resolvidos pelo método da substituição por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações-problema, em ambiente papel e lápis e com o *software* Aplusix. A metodologia dessa pesquisa foi fundamentada nos Princípios da Engenharia Didática de Artigue (1996), e o pesquisador elaborou uma sequência didática baseada na teoria das situações didáticas de Brousseau (1986), sendo que as atividades visavam à aparição de momentos adidáticos. Para a construção do meio adidático, Rocha (2010) utilizou atividades impressas em algumas sessões e em outras, o *software* Aplusix, sendo que este foi escolhido por oferecer situações de efeito retroativo, consideradas pelo pesquisador como importantes para o desenvolvimento do trabalho dos alunos. A sequência de atividades foi realizada por um grupo de 10 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, na sala de tecnologia de uma escola pública do município de Nova Alvorado dos Sul, no Mato Grosso do Sul. Para a análise dos dados, foram considerados os registros escritos nas folhas entregues pelos 10 estudantes, gravações de áudio e as resoluções gravadas por meio da ferramenta videocassete do *Aplusix.* A partir da análise dos dados coletados, o pesquisador apontou que, devido ao fato das atividades terem sido resolvidas de forma autônoma pelos alunos, pode-se concluir que houve aprendizagem. Por meio da análise das gravações da ferramenta videocassete, percebeu-se que as diferentes situações de efeito retroativo oferecidas pelo *Aplusix* contribuíram para as reflexões dos alunos sobre as operações efetuadas, o que levou à diminuição da frequência dos erros à medida que os sujeitos foram progredindo na realização da sequência didática.

Danilo Eudes Pimentel, da Universidade Federal de São Claro, apresentou em 2010 a dissertação “Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da aritmética para a álgebra”, cujo objetivo era identificar e explorar as possíveis causas das dificuldades na transição da aritmética para a álgebra, que deveriam ser trabalhadas em todas as séries do Ensino Fundamental II, mas que ocorre com maior destaque no oitavo ano/sétima série. Para a pesquisa, Pimentel (2010) utilizou como estratégia a resolução de problemas, sendo que diferentes atividades envolvendo a modelagem de problemas com equações do primeiro grau, sistemas lineares, geometria e contagem foram planejadas e aplicadas. O pesquisador, a partir da análise dessas atividades, detectou que as maiores dificuldades estavam relacionadas à percepção do papel das incógnitas na resolução de equações, ao significado das letras utilizadas como variáveis na modelagem de problemas e à forte tendência de resolver exercícios apenas pela aritmética, especialmente pelo método da tentativa e erro.

Enquanto o trabalho de Pimentel (2010) teve como foco a conversão de linguagens de situações envolvendo diferentes conteúdos matemáticos e as diferentes formas de resolução utilizadas pelos alunos para as situações apresentadas, Rocha (2010) preocupou-se principalmente com o processo de resolução de um único objeto matemático, sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, por um único método: o da substituição. Como a nossa pesquisa envolve parte dos processos analisados nas duas dissertações citadas (a conversão de linguagens e a resolução de sistemas de equações), os resultados obtidos nessas pesquisas foram úteis tanto na elaboração das atividades da sequência didática quanto na análise dos nossos resultados.

A terceira dissertação analisada sobre sistemas de equações lineares é da PUC de Minas Gerais e foi defendida em 2012 por Flávia Cristina de Faria Almeida, com o título “Abordagem dos sistemas de equações do 1º grau no 7º ano do Ensino Fundamental: uma perspectiva de resolução de problemas na prática investigativa em Belo Horizonte”. A pesquisadora, por meio de uma sequência de atividades envolvendo a resolução de problemas e o uso do *software Winplot*, teve como intenção elaborar situações que levassem a uma prática pedagógica aliada a ações que conduziriam os estudantes a analisar e resolver diferentes sistemas de equações. O uso do *software* na sequência de atividades foi sugerido por facilitar a visão geométrica da solução e, a partir daí, tirar conclusões pertinentes.

A nossa pesquisa em muito se assemelha ao trabalho de Almeida (2012) por apresentar diferentes situações com o intuito de levar os alunos a investigar, problematizar, sistematizar e produzir conhecimento. Algumas diferenças, contudo, foram identificadas: não existe referência sobre o uso da teoria da aprendizagem significativa no trabalho e a pesquisadora optou pelo uso da informática como instrumento, não presente em nossa pesquisa. Por não termos acesso ao trabalho finalizado (somente ao produto e ao resumo), não foi possível enumerar outras semelhanças ou mesmo diferenças em relação a nossa pesquisa.

A respeito da aprendizagem significativa de David Ausubel em Matemática, foram localizadas no banco de teses da Capes 82 trabalhos. Como a nossa pesquisa é voltada a Educação Básica, só foram considerados os trabalhos relacionados ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio, totalizando 10 dissertações e duas teses. Após análise, selecionamos dois trabalhos por considerarmo–los diretamente relacionados ao nosso foco de pesquisa.

A primeira dissertação selecionada foi de Aroldo César Steinhorst, que em 2011 defendeu a dissertação “O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a planilha como recurso: um estudo comparativo”, pela PUC do Rio Grande do Sul. A pesquisa teve por objetivo verificar como a planilha do Excel pode contribuir para o melhor entendimento de matrizes, determinantes e sistemas lineares, com alunos de Ensino Médio, utilizando-se de uma abordagem de resolução de problemas interdisciplinares, fundamentada na teoria da aprendizagem por descoberta significativa de Ausubel e na metodologia de ensino baseada na resolução de problemas de Polya. O pesquisador optou pela aprendizagem por descoberta significativa, pois

> representa um outro emprego cognitivo de um repertório de conceitos existentes no aluno. É exemplificada pelos (1) tipos mais simples de operações de solução de problema, onde a solução de problema imediato requer que o aluno seja capaz de formulá-lo como um caso especial de um conceito ou proposição já significativos e mais gerais e (2) os tipos mais complexos de solução de problema, onde os conceitos e proposições existentes podem ser desdobrados, elaborados, qualificados ou reorganizados de modo a satisfazer as exigências particulares das relações entre meios e fins que o aluno é

> obrigado a descobrir. (AUSUBEL, 1980, p.79 apud STEINHORST, 2011, p. 30).

Para o desenvolvimento da investigação, que aconteceu em 2010, o pesquisador selecionou duas turmas de alunos do Ensino Médio de uma escola particular de Porto Alegre. Por meio de um estudo comparativo, utilizou o recurso da planilha de forma diferenciada nas duas turmas para a resolução de problemas matemáticos e de situações reais envolvendo matrizes, determinantes e sistemas lineares. A partir da análise dos resultados, Steinhorst (2011) verificou que a abordagem de resolução de problemas aliada ao uso da planilha favoreceu a aprendizagem por permitir que os alunos avançassem para estágios dos conteúdos que antes não atingiam e que erros de operações aritméticas, fator que levava o aluno a desistir da resolução de um problema, fossem facilmente superados. Ainda para o pesquisador, o uso de situações reais despertou o interesse pelo assunto até daqueles que apresentavam certa resistência à Matemática, por se sentirem provocados a descobrir meios para solucionar problemas, a partir da interação do que já conheciam e do que estavam vendo de "novo", tornando a aprendizagem mais significativa para eles.

A segunda dissertação selecionada foi de Helaine Maria de Souza Pontes, com o título "A Educação Matemática à luz de princípios da aprendizagem significativa e de suas implicações na interação professor-aluno-conhecimento matemático em aula", defendida em 2011, pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. A pesquisadora tinha como objetivo principal conhecer e compreender as implicações dos princípios da Aprendizagem Significativa de Ausubel no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, no contexto da segunda fase do ensino fundamental. Uma sequência de atividades, baseadas na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e elaboradas a partir do que já era de conhecimento dos alunos, foi realizada com 84 alunos de diferentes anos Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Araucária, no Paraná. Após análise das atividades e dos relatos dos alunos, a pesquisadora constatou que os resultados da investigação indicaram ganhos na aprendizagem dos alunos com a utilização de metodologias de ensino baseadas nos princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa.

A dissertação de Steinhorst (2011) foi selecionada por utilizar a mesma estratégia de ensino de nossa pesquisa: a abordagem de resolução de problemas com o intuito de provocar no aluno a necessidade de descobrir meios de solucionar as situações apresentadas a partir do que já é de seu conhecimento e como forma de tornar a aprendizagem mais significativa. Já o trabalho de Pontes (2011) foi selecionado por apresentar as atividades elaboradas a partir do conhecimento prévio do aluno e baseadas na aprendizagem significativa de Ausubel. Mas é importante destacar que tanto o público-alvo quanto os objetos matemáticos e ferramentas utilizadas nos trabalhos acima diferem dos da nossa pesquisa.

A partir da análise das dissertações e teses pesquisadas, pudemos constatar que nenhum trabalho similar à nossa pesquisa foi encontrado, ou seja, que envolvesse o ensino e a aprendizagem de sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas por meio de resolução de problemas com o intuito de favorecer uma aprendizagem significativa em alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma instituição particular de São Paulo.

Na presente dissertação, a metodologia constitui-se em desenvolver uma sequência de atividades, com a elaboração de uma sondagem para verificar os conhecimentos prévios dos alunos referentes à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita e conversões da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Para a seleção e a elaboração das atividades da sequência, considerou-se que as primeiras atividades tenham como propósito principal criar situações em que o aluno sinta a necessidade de um novo objeto matemático, no caso sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, e, que após a realização de diferentes tarefas envolvendo a conversão da linguagem natural para a algébrica e vice-versa, sejam apresentadas diferentes formas de resolução.

Para finalizar, a última atividade da sequência objetivou verificar se a aprendizagem do objeto matemático fora realmente significativa.

A organização da dissertação

O relato dessa pesquisa está organizado em cinco partes, além das referências e anexos.

Introdução

Nesta parte, onde está inserida a presente seção, apresento minha trajetória acadêmica e motivação para pesquisa seguida da literatura de pesquisa relacionada à resolução de problemas e a aprendizagem significativa, além do objetivo. Em seguida, descrevo a pergunta de pesquisa e revisão bibliográfica, em que constatei que não existe trabalho com todos os elementos de minha pesquisa.

Capítulo 1 – Referencial teórico

Neste capítulo apresentamos alguns elementos de pesquisas já desenvolvidas no âmbito da resolução de problemas e aprendizagem significativa. Para isso, começo abordando a importância dos problemas como mola propulsora do desenvolvimento de conhecimento em diferentes áreas, seguido das diferentes visões sobre o que é um problema e sobre a resolução de problemas na Educação Matemática. Em seguida, analisamos algumas diferentes concepções sobre resolução de problemas, em especial o ensino por meio da resolução de problemas. Sobre aprendizagem significativa, buscamos na teoria de Ausubel (1968) a relação entre aprendizagem significativa e conhecimento prévio. Terminamos o capítulo buscando, nas pesquisas, de que forma o ensino por meio da resolução de problema permite a aprendizagem significativa.

Capítulo 2 – Metodologia da pesquisa e procedimentos metodológicos

Iniciamos o capítulo 2 elencando as características da pesquisa qualitativa e justificando a escolha dessa abordagem para o nosso trabalho. Já nos procedimentos metodológicos, apresentamos a instituição em que foi realizada a parte empírica, os sujeitos que dela participaram e descrevemos a sequência de ensino composta de oito atividades, instrumento de coleta de dados de nossa pesquisa.

Capítulo 3 – Desenvolvimento da sequência e análise de dados

Neste capítulo, descrevemos o desenvolvimento de cada uma das atividades, traçando a relação entre os dados e o referencial teórico de pesquisa, apresentado e discutido no capítulo 1, isto é, aquele que trata de resolução de problemas e da aprendizagem significativa. Para finalizarmos, apresentamos algumas conclusões sobre os dados coletados e resultados.

Considerações finais

Para finalizar, nesta última parte, retomo minha pergunta de pesquisa a fim de tecer algumas conclusões referentes à análise dos dados realizados à luz do referencial teórico utilizado.

Esperamos que este trabalho contribua para que os professores do Ensino Fundamental II valorizem os conhecimentos prévios de seus alunos em relação aos diversos temas de matemática, não somente o ensino de Sistemas de Equações do 1º grau com duas incógnitas. Acreditamos que uma das metodologias que favorece a aprendizagem significativa seja a focada no ensino por meio da resolução de problemas, pois, de acordo com essa estratégia de ensino, é a partir do conhecimento que o aluno já possui que os conteúdos podem ser desenvolvidos em sala de aula.

CAPÍTULO 1: Referencial teórico

As dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática têm sido amplamente analisadas em diversas pesquisas na área da Educação Matemática. Inúmeras propostas já foram elaboradas buscando situações em sala de aula que permitam promover o ensino-aprendizagem por meio de processos de pensamento sempre buscando inovações e mudanças nas práticas baseadas na repetição e nas técnicas de algoritmos ainda existentes nas escolas atuais.

O interesse principal deste trabalho é investigar o ensino por meio da resolução de problemas e as suas potencialidades no que diz respeito à aprendizagem significativa dos alunos. Pretende-se buscar evidências de uma aprendizagem significativa a partir de atividades propostas na forma de uma sequência didática, envolvendo o aluno durante o desenvolvimento das atividades propostas e permitindo a construção de aprendizagem que o leve à aquisição de significados corretos.

Para que isso seja possível, é necessário conhecer as condições em que a aprendizagem significativa acontece e, com isso, organizar atividades de aprendizagem que levem a esse fim. É partindo desse ponto de vista que introduzimos as atividades relacionadas ao ensino de sistemas de equações por meio da resolução de problemas. Desse modo, inicialmente fizemos algumas considerações sobre o ensino por meio da resolução de problemas como estratégia de ensino e sobre a aprendizagem significativa. Apresentamos, a seguir, alguns aspectos relativos ao ensino por meio da resolução de problemas do ponto de vista de Van de Walle e de Onuchic e à aprendizagem significativa como caracterizada por Ausubel (1968) e amplamente estudada por Moreira (1997).

1.1 Resolução de problemas

Antes de analisarmos a resolução de problemas como uma das metodologias de ensino da Matemática, é preciso compreender o que é um *problema*. Termo comum a muitas áreas do conhecimento, *problema* geralmente está relacionado a situações em que a solução não é obtida de forma simples, há desafios que exigem do sujeito envolvido a busca de diferentes estratégias para a sua solução.

Em Educação, muitas são as definições para o termo *problema*. Para Dante (2000, p. 9), um problema é "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la" e um problema é matemático quando exige para a sua solução “a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos". Para Itacarambi (2010), geralmente um problema é toda situação em que não há solução evidente. Itacarambi parece concordar com Lester (1983 apud POZO e ECHEVERRIA, 1998, p. 15), que define *problema* como “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução”. Partindo desses pressupostos, podemos afirmar que um *problema* representa toda situação em que os sujeitos envolvidos não possuem procedimentos automáticos para obter sua solução.

Onuchic (1999) compreende que um problema vai além do que não se sabe fazer; para a pesquisadora, só temos um problema quando o indivíduo, além de não saber fazer, está interessado em resolver o que está sendo proposto. Allevato (2005, p. 41), que compartilha de semelhante visão, afirma que “uma questão será um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la”.

Mas foi Polya, em 1945, um dos primeiros matemáticos a escrever sobre o que é e como resolver um problema. Krulik e Reys (1997, p.131), no livro “A resolução de problemas na matemática escolar”, apresentaram uma definição mais atual das compreensões de Polya, para quem “um problema é uma situação, quantitativa ou não, que pede uma solução para a qual os indivíduos implicados não conhecem meios ou caminhos evidentes para obtê-la”.

Vendo dessa forma, podemos concluir que o termo *problema* pode estar ligado a situações muito distintas, pois dependem do contexto em que acontecem e das particularidades e expectativas dos sujeitos envolvidos. Desse ponto de vista, resolver problemas

> [...] pode significar diferentes coisas para diferentes pessoas ao mesmo tempo e diferentes ocasiões. As três interpretações mais comuns de resolução de problemas são: 1) como uma meta, 2) como

> um processo e 3) como uma habilidade básica. (BRANCA, 1997 apud FRANCISCO at al, 2013)

Pensando na resolução de problemas como estratégia de ensino, podemos ter como meta a utilização da Resolução de Problemas como um meio para se aprender a resolver problemas. Além disso, podemos ter, como processos, as heurísticas e estratégias utilizadas pelos alunos para obter a solução e, como uma habilidade básica, a capacidade de resolver problemas a partir do que já é de conhecimento do aluno.

1.1.1 Resolução de problemas como estratégia de ensino

A resolução de problemas faz parte do cotidiano do homem desde o início de sua história. Foram as diversas situações encontradas pelo homem que levaram ao desenvolvimento e à evolução das diversas áreas do conhecimento, inclusive da Matemática. Muitos dos conhecimentos matemáticos surgiram como resposta a perguntas provenientes de diferentes contextos, motivadas por problemas de ordem prática – divisão de terras e construções de tonéis para transporte de azeite e vinho, por exemplo –, por problemas vinculados a outras ciências, como Física e Astronomia, bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 1998)

Todos os métodos desenvolvidos para a resolução de problemas eram voltados para aplicações no dia-a-dia. Já o ensino baseado nessa metodologia é algo recente, não superando um século de existência.

> [...] a resolução de problemas aparece na história através de documentos desde muito cedo, como é o caso do Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., e de muitos outros registros de Egípcios, Chineses e Gregos. Para os autores, até meados do século XX, a Resolução de Problemas consiste basicamente em resolver problemas, mas não como metodologia de ensino. (STANIC e KILPATRICK, 1990 *apud* HUAMÁN HUANCA, 2008, p.1)

Segundo Onuchic (1999 apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2005), no início do século XX, “o currículo de matemática ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria”. O professor de matemática apresentava o conteúdo, e o aluno tinha que prestar atenção para memorizar, escrever e repetir o que acabara de "aprender" por meio de exercícios rotineiros.

Mas com o passar dos anos, uma nova orientação tomou conta do ensino-aprendizagem em matemática: a compreensão dos alunos. Para que isso fosse possível, o ensino da matemática passou a ser baseado no ensino de técnicas voltadas à resolução de problemas ou para aprender novos conteúdos.

Muitas foram as idealizações sobre o melhor modo de usar a resolução de problemas como metodologia de ensino. Inicialmente, muitos a entendiam como meio de reforçar o aprendizado, sendo que sua utilização era pautada na repetição. Os problemas, portanto, eram utilizados como meros exercícios, sem que a compreensão do que estava sendo trabalhado fosse visto como algo importante para o avanço do ensino de Matemática.

Na década de 1940, George Polya escreveu o livro "How to solve it", buscando uma heurística para a resolução de problemas e descrevê-la como regras a serem seguidas por quem deseja ensinar ou mesmo resolver um problema. Para Polya (1995, p. 68), em relação ao uso da resolução de problemas em sala de aula,

> a primeira obrigação de um professor de Matemática é usar essa grande oportunidade; ele deveria fazer o máximo possível para desenvolver a habilidade de resolver problemas em seus alunos. Primeiro, ele deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais e interessantes, que desafiem sua curiosidade, adequados a seu conhecimento. [...] Depois, o professor deveria ajudar seus alunos convenientemente. Não muito pouco, senão não há progresso. Não demais, senão o aluno não terá o que fazer. Não ostensivamente, senão os alunos adquirem aversão ao problema, em cuja solução o professor ficou com a maior parte.

É possível perceber a preocupação de Polya com esse tipo de metodologia. Segundo o pesquisador, o professor não deve ter somente cuidado com a resolução, mas também com a escolha dos problemas a serem trabalhados e com a sua postura durante o auxílio ao aluno para a obtenção da solução.

Nas décadas de 1960 e 1970, o uso de problemas como metodologia era tido como algo isolado. Nessas décadas, surgiu o movimento da Matemática Moderna, que propunha o ensino da Matemática fortemente estruturado e que tinha por objetivo unificar o ensino da matemática por meio da Teoria de Conjuntos. Porém, a falta de preparo dos professores e o tratamento excessivamente abstrato acabaram levando o movimento ao fracasso.

Na década de 1980, ganha corpo a busca por novas metodologias para oferecer um ensino mais efetivo em Matemática e que pudesse preencher a lacuna deixada pelo fracasso da Matemática Moderna. Nesse sentido, o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics –, como mentor dos professores de Matemática norte-americanos, elaborou uma série de recomendações para o progresso da matemática escolar, por meio do documento “An agenda for action”. A primeira dessas recomendações enfatizava a resolução de problemas como foco da Matemática.

> A “era da resolução de problemas”, fundamentada a partir de recomendação feita no documento “Uma Agenda para a Ação”, do NCTM, em 1980, diz que Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80. No início da década de 90, a UNESCO, através da sua declaração mundial sobre Educação para todos, também declara claramente que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita e o cálculo. (HUAMÁN HUANCA, 2008, p. 2)

Contudo, essas recomendações não deixavam clara a forma pela qual o ensino de Matemática, amparado na resolução de problema, levaria a bons resultados. Onuchic (1999, p. 206) indica que provavelmente foram as diferentes concepções que as pessoas possuíam sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar” que levaram a discordâncias no encaminhado do ensino da Matemática nessa perspectiva.

A grande mudança só ocorreu no final da década de 1980 e durante a década seguinte, quando o NCTM publica uma sequência de documentos, com o intuito de auxiliar os professores, destacando os aspectos que considera essenciais para o ensino da Matemática. Na primeira publicação, de 1989, entre as recomendações indicadas no documento *“Curriculum and evaluation standards for school Mathematics”*, destaca-se o ensino por meio da resolução de problemas como uma metodologia, sendo abordada em três das principais recomendações:

> (1) conceitos e habilidades matemáticas deveriam ser aprendidos em um contexto de resolução de problemas; (2) o desenvolvimento de processos de ensino de alto nível deveria estar repleto de

> experiências de resolução de problemas, e (3) instruções matemáticas deveriam acontecer dentro de uma investigação orientada, em uma atmosfera de resolução de problemas. (*apud* ONUCHIC, 2008, p. 1)

Dois outros importantes documentos foram publicados pela NCTM na década de 1990: "*Professional Standards for School Mathematics*", em 1991, e "*Assessment Standards for School Mathematics*", em 1995. Mas foi na publicação dos Standards 2000, oficialmente chamados *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), que a resolução de problemas deixa de ser encarada como um "algoritmo" de aprendizagem; torna-se, assim, um meio relevante para fazer matemática.

> Foi, de fato, a partir dos *Standards 2000* que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática *através* da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 79-80)

Já no Brasil, foram lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), em 1997. Os volumes de Matemática, que tinham a finalidade de servir como instrumento de orientação para todos os professores que desejam combater o fracasso escolar por meio de mudanças em sua maneira de lecionar, foram elaborados por alguns dos integrantes brasileiros do Movimento de Educação Moderna.

Para os PCNs, não existe um único método para o ensino de qualquer uma das disciplinas; o mais importante é ter o conhecimento da existência de diferentes metodologias e possibilidades de trabalho, sobre as quais se deve construir a prática do professor. Entre as muitas que existem, uma das que têm grande destaque na educação atual é a resolução de problemas.

Segundo os Parâmetros (BRASIL, 1998, p.39-40), a resolução de problemas pode ser o ponto de partida da atividade matemática, pois o conhecimento referente a essa área ganha significado quando os alunos vivenciam situações desafiadoras e desenvolvem estratégias para buscar a solução. Grande parte dos professores, entretanto, apresenta dificuldade em ensinar matemática utilizando essa estratégia.

Para eles, a resolução de problemas é apenas um dos métodos disponíveis para verificar os conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos:

> O professor ensina um conceito, procedimento ou técnica e depois apresenta um problema como modo de avaliação do que foi ensinado. O professor deixa de explorar a atividade para explorar unicamente seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. Para os alunos, resolver um problema é o mesmo que fazer cálculos com os dados do enunciado ou a aplicação do que aprenderam em sala, um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. (BRASIL, 1998, p.32)

Mas a resolução de problemas é muito mais que isso. Ela deve ser vista como um dos meios de desenvolver no aluno a capacidade de administrar as informações que estão diante dele e, por meio de seus conhecimentos prévios, encontrar soluções. Com isso, o aluno teria a possibilidade de ampliar seus conhecimentos e sua visão do mundo, não somente da Matemática. Nesse sentido, encontra-se na tese de Allevato (2005, p. 38) a seguinte citação:

> Tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando, porém, para a história das ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas. Por que no ensino da Matemática especialmente, invertemos a ordem natural das coisas? (BRASIL, 1964, p.22)

É importante, contudo, que o professor compreenda que não há uma única forma de trabalhar essa metodologia. Schroeder e Lester (1989) afirmam que, na década de 1980, coexistiram três tipos de abordagens sobre resolução de problemas escolar: o ensino sobre resolução de problemas, o ensino para resolução de problemas e o ensino via resolução de problemas, que corresponde ao tipo de abordagem estudado nesse trabalho. Na realidade, observa-se ainda hoje, com maior ou menor intensidade, a presença dessas diferentes abordagens no atual contexto do ensino de Matemática.

1.1.2 Ensino sobre resolução de problemas

Na primeira abordagem sobre resolução de problemas escolar, destaca-se o ensino *sobre* resolução de problemas, para o qual se estabelece uma heurística, que constitui em ensinar a resolver problemas por meio de um elenco de estratégias.

A resolução de problemas, sob esse molde, ganhou força na década de 1980 com o livro do ano do NCTM, lançado por Krulik e Reys. Segundo Allevato (2005), o livro era dedicado quase que exclusivamente a esse tema e percebe-se grande ênfase às heurísticas como forma de orientação na resolução de problemas para alunos. Isso ocorreu devido ao insucesso da Matemática Moderna, em que o ensino era predominante estrutural, dando ênfase aos conceitos em detrimento da manipulação e aplicação.

> As heurísticas ganharam força, constituindo-se em listas de sugestões e estratégias gerais, independentes do assunto particular. Elas auxiliavam a fazer aproximações, compreender um problema e dispor, eficientemente, os recursos para resolvê-lo. Portanto, foi sedimentada a crença de que era preciso ensinar os estudantes a resolver problemas ou, o que é o mesmo, ensinar sobre resolução de problemas. (ibidem, p. 49)

É importante destacar que o uso de heurísticas não era algo novo ou recente no ensino de resolução de problemas. Nos trabalhos desse livro do NCTM da década de 1980, é possível notar a influência das ideias de Polya, um dos primeiros pesquisadores a apresentar um “roteiro” com orientações sobre como resolver um problema, particularmente no livro “How to solve it” (1945).

É importante destacar que o uso de heurísticas na resolução de problemas remonta à Idade Antiga. Antigos estudiosos, como Aristóteles, Tales, Erastóstenes, Pitágoras, Euclides, Hipócrates e Pappus, utilizaram dois processos mentais indispensáveis para o progresso da Matemática e da Geometria: a abstração e a demonstração, denominada *prova*. A combinação desses dois processos ficou conhecida como o método dos geômetras ou o método axiomático-dedutivo.

O uso do método dedutivo servia para demonstrar teoremas com o objetivo de encadeá-las logicamente e, assim, atingir raciocínios mais avançados e complexos. Dessa forma, eles utilizavam um procedimento heurístico para demonstrar teoremas ou solucionar problemas geométricos.

> Os antigos geômetras utilizavam um procedimento heurístico para solucionar seus problemas matemáticos, isto é, um modelo matemático que utilizava a *análise* para *encontrar* a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a *síntese* para *expor* o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na Matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 6-7)

O procedimento heurístico utilizado pelos antigos geômetras influenciou pesquisas e obras de grandes nomes da Matemática e de outras ciências, como Viète e Descartes. Na própria obra de Polya existem indícios da influência.

Mas antes de Polya, um livro de John Dewey — “How we think” —, publicado em 1910, apresentava etapas para solução de problemas. As etapas necessárias, segundo Dewey (1910 apud BRITO et al, 2010, p.23-24), eram:

1. reconhecimento de um problema;
2. análise, que compreenderia a percepção, a delimitação do problema e o “isolamento” das principais características do problema;
3. hipótese, quando ocorre a formulação das possíveis alternativas de solução;
4. dedução, que consiste em raciocinar sobre as várias possibilidades, buscando chegar às soluções mais prováveis;
5. verificação ou “testagem” das possibilidades de solução.

A publicação de Dewey foi a primeira a tratar da resolução de problemas como procedimento e constituiu um ponto de referência para as propostas educacionais que surgiriam a seguir.

Embora não seja o primeiro, o mais utilizado e conhecido método para resolução de problemas é a de George Polya (1945). Polya usa o termo "heurística" para denominar a investigação dos métodos e regras da descoberta e da invenção. Entre as fontes a que recorre para o estudo da heurística, Polya indica como obra fundamental a *Collectio*, do matemático grego Pappus (320 a.c.). Nessa obra, Pappus descreve detalhadamente o método da análise e da síntese utilizado pelos antigos geômetras na resolução de problemas.

Polya criou uma versão mais ampliada e refinada desse trabalho, segundo a qual a solução de um problema deve ser obtida por meio do cumprimento de quatro etapas. Na primeira etapa, é preciso compreender o problema, buscando quais são as informações realmente relevantes para solucioná-lo. Na segunda, deve-se encontrar a relação existente entre dados coletados e conceber um plano, que será executado na terceira etapa. Na quarta etapa, faz-se um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. O processo de resolução de problemas, seguindo essas estratégias, é complexo, pois as fases são interdependentes, o que pode sugerir adaptações a serem feitas pelo professor em sala de aula, dependendo do contexto em que for apresentado.

Para que cada uma das etapas sugeridas por George Polya seja cumprida, algumas questões devem ser respondidas. A tabela a seguir apresenta os passos necessários para a busca da solução de um problema:

Compreender o problema _ Qual é a incógnita? Quais são os dados? _ Qual é a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É suficiente? Redundante? Contraditória? **Conceber um plano** _ Já encontrou um problema semelhante? Ou já ouviu o mesmo problema proposto de maneira um pouco diferente? _ Conhece um problema relacionado com este? Conhece algum teorema que possa lhe ser útil? Olhe a incógnita com atenção e tente lembrar um problema que lhe seja familiar ou que tenha a mesma incógnita, ou uma incógnita similar. _ Este é um problema relacionado com o seu e que já foi resolvido. Você poderia utilizá-lo? Poderia usar o seu resultado? Poderia empregar o seu método? Considera que seria necessário introduzir algum elemento auxiliar para poder utilizá-lo? _ Poderia enunciar o problema de outra forma? Poderia apresentá-lo de forma diferente novamente? Refira-se às definições. _ Se não pode resolver o problema proposto, tente resolver primeiro algum problema semelhante. Poderia imaginar um problema análogo um pouco mais acessível? Um problema mais geral? Um problema mais específico? Pode resolver uma parte do problema? Considere somente uma parte da condição; descarte a outra parte. Em que medida a incógnita fica agora determinada? De que forma pode variar? Você pode deduzir dos dados algum elemento útil? Pode pensar em outros dados apropriados para determinar

a incógnita? Pode mudar a incógnita? Pode mudar a incógnita, os dados ou ambos, se necessário, de tal forma que a nova incógnita e os novos dados estejam mais próximos entre si?
_ Empregou todos os dados? Empregou toda a condição? Considerou todas as noções essenciais concernentes ao problema?

Execução do problema
_ Ao executar o seu plano de resolução, comprove cada um dos passos.
_ Pode ver claramente que o passo é correto? Pode demonstrá-lo?

Visão retrospectiva
_ Pode verificar o resultado? Pode verificar o raciocínio?
_ Pode obter o resultado de forma diferente? Pode vê-lo com apenas uma olhada?
_ Você pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?

Quadro 1. Passos necessários para resolver um problema, segundo Polya (Pozo e Echeverria, 1998, p.23)

Podemos perceber que, para Polya, a solução de um problema só pode ser encontrada após a compreensão do problema, ou seja, através do entendimento da situação e da busca de uma solução que satisfaça suas condições.

Após compreendê-lo, é necessária a criação de um plano, sendo preciso se preocupar com as metas a serem atingidas e com os procedimentos que deverão ser utilizados para a execução desse plano.

Já na execução do plano, faz-se necessário preocupar-se em desenvolver o que havia sido planejado na etapa anterior. Se o problema original se transformar em novo problema, deve-se traçar um novo plano na tentativa de solucionar o novo problema, ou seja, adequar o plano anterior para uma nova situação.

Na última etapa, o mais importante não é chegar à solução, mas verificar sua veracidade, checando se satisfaz todas as condições iniciais, para, enfim, poder validar a solução.

É importante salientar que muitos são os pesquisadores, autores de livros e professores que seguem ou seguiram a abordagem de Polya (ALLEVATO, 2005). Para Schroeder e Lester (1989, apud ALLEVATO, 2005), o uso de roteiros é comum àqueles que “ensinam sobre resolução de problemas”. Já Dante (2000) acredita que a adoção de estratégias é útil por oferecer orientação específica a quem resolve um problema.

Thompson (1989 apud ALLEVATO, 2005) sugere, em seu trabalho, a resolução de problemas como um conteúdo a ser ensinado. Na mesma obra, a autora vai além e afirma que “a resolução de problemas ainda era, senão a única, a melhor solução para os problemas com o ensino de Matemática”.

Stanic e Kilpatrick (1990, apud ALLEVATO e ONUCHIC, 2011, p. 75) destacam que “ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma resolução realizada a partir da aplicação de alguma técnica específica”.

Para Pozo e Echeverria (1998, p. 140), o ensino sobre resolução de problemas

> tem caráter essencialmente procedimental como conteúdo educacional, já que exige que os alunos coloquem em ação uma sequência de passos de acordo com um plano preconcebido e orientado para alcançar uma meta.

A grande questão dessa abordagem se refere ao fato que muitos entenderam a resolução de problemas como adoção e domínio de estratégias, o que exigiria do aluno o treino por meio de longas listas de problemas, semelhantes uns aos outros, visando à fixação dos procedimentos utilizados (ONUCHIC e ALLEVATO, 2005). Mas é importante ressaltar que a repetição não garante a compreensão do conteúdo matemático envolvido e que, dessa forma, os conteúdos não se tornam significativos para o aluno.

1.1.3 Ensino para a resolução de problemas

Já na segunda abordagem, o ensino *para* a resolução de problemas tem como foco o modo de ensinar matemática e o que se pode extrair deles para a sua solução. Nessa abordagem, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de aplicá-la.

Esse tipo de abordagem pode gerar a ideia errônea de que o uso da resolução de problemas nas aulas de Matemática só pode ocorrer após um novo conceito ter sido introduzido ou como ferramenta para o treino de algoritmos. Para

Allevato (2005, p. 53), essa estratégia pode levar à visão de que "a Matemática frequentemente é ensinada separada de suas aplicações".

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 79), a partir das recomendações da NCTM, muitos que a interpretaram acreditavam que "o professor deveria apresentar a matemática formal para, depois, oferecer aos alunos o problema como aplicação dessa matemática construída, acreditando que deveriam ensinar matemática *para* resolver problemas". Assim, os alunos teriam contato com muitos exemplos sobre aquilo que estão estudando, e o professor ofereceria muitas chances aos alunos de aplicarem essa matemática ao resolverem os problemas.

> A prática mais frequente na Resolução de Problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas. Desse modo o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998, p. 40)

Para Van de Walle (2009), nesse tipo de abordagem é clara a separação entre o que é ensinar Matemática e o que é resolver problemas, o que sempre é realizado nessa ordem. O professor geralmente começa apresentando um novo conteúdo seguido de algumas aplicações, que ele frequentemente chama de "exemplos". Para verificar se o aluno "aprendeu" o novo conteúdo e sabe aplicar a teoria ou até mesmo para a "fixação da aprendizagem", ele deverá resolver uma lista de exercícios e problemas.

Para Allevato (2005, p. 53), o ensino por meio de estratégia é considerado simplista, por não permitir a resolução de situações não rotineiras, que "exigem mais do que um único conceito, operação ou estratégia para a sua resolução". A autora ainda reforça que esse tipo de situação exige "interpretação, transferência de conhecimentos e elaboração de conjecturas".

O ensino para resolver problemas é muito comum em sala de aula e é adotado por muitos livros atuais de Matemática. Os livros que tratam do conteúdo de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas geralmente focam primeiramente o ensino de algoritmos de resolução de sistemas de equações por dois diferentes métodos (adição e substituição) e a resolução de problemas surge apenas no final do capítulo, como exercícios de aplicação.

Esse tipo de abordagem limita o aluno à resolução de problemas rotineiros, como mera aplicação dos conteúdos matemáticos já “aprendidos” pelos alunos, e ignora a capacidade dos alunos de abstrair, relacionar, representar e tomar decisões.

Segundo Onuchic (1999), o ensino de matemática não deveria ter como foco principal a busca da solução de problemas. A resolução de problemas como metodologia de ensino deveria servir para a aquisição e a compreensão de novos conhecimentos e deveria ter o papel principal em um processo no qual tudo o que o aluno já havia previamente construído poderia ser aplicado.

1.1.4 Ensino através da resolução de problemas

Como já citado anteriormente, educadores passaram a pensar no ensino da Matemática através da resolução de problemas a partir dos *Standards 2000*. Nessa abordagem, a proposta é colocar situações para os alunos a partir das quais um novo conteúdo possa ser desenvolvido de forma a gerar melhor compreensão de conceitos, procedimentos e algoritmos. Dessa forma, os estudantes passam a ser coconstrutores de seu próprio conhecimento e os professores, os responsáveis por conduzir esse processo.

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática. (ONUCHIC, 1999, p. 208)

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 39-40), os educadores matemáticos indicam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática em contraposição à memorização e reprodução de procedimentos. Nesse tipo de abordagem, subentende-se que o conhecimento matemático ganha significado por trabalhar com situações desafiadoras e devido à necessidade de desenvolver estratégias de resolução.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (SCHOENFELD, 1985 apud BRASIL, 1998, p. 40)

A proposta do ensino via resolução de problemas não visa ao fim das demais metodologias de ensino. Ela tem como ideia principal a utilização dos problemas como meio de ensinar matemática, agregando o que as outras estratégias de ensino oferecem de melhor. Nessa perspectiva, o ensino de matemática via resolução de problemas é uma importante metodologia de ensino dentre as demais, devido ao fato de que o aluno aprende matemática resolvendo problemas, como aprende matemática para resolvê-los.

> A metodologia de 'Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas" constitui-se num caminho para se ensinar matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. Numa sala de aula onde o trabalho é feito com a abordagem de ensino de matemática através da resolução de problemas, busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, o uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos, resolver problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional. (ONUCHIC, 1999, p.211)

Para Van de Walle (2009, p. 57), "a maioria, senão todos os conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas." Nesse tipo de abordagem, "os alunos devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática" (ibidem, p. 57). Para ele, a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino e todo o trabalho de ensinar deve ter como ponto de partida o aluno e o que ele traz consigo para a sala de aula. Desse ponto de vista, o processo de resolução de problemas terá como resultado a aprendizagem.

Para Onuchic (1999, p. 215), a concepção de *problema* é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver", ou seja, toda situação que leve o aluno a pensar, que lhe seja desafiadora e interessante. Igualmente é importante que a situação represente a realidade do aluno a que se propõe. No processo de aprendizagem por meio da resolução de problemas, pode-se estimular o aluno à compreensão dos dados de um problema, à tomada de decisões para resolvê-lo, à busca por relações, à capacidade de saber comunicar resultados e de usar técnicas conhecidas, sem que seja direcionado para o que fazer ou o que pensar. O papel do professor é de mediador, conduzindo o aluno somente quando ele não sabe como agir, em situações nas quais apresentarem maior dificuldade. É durante esse processo, somente após a resolução trabalhada, que é feita a introdução da formalização, do simbolismo e das técnicas matemáticas adequados.

Nesse tipo de abordagem, é importante considerar que um problema é uma atividade para a qual não existem regras ou métodos pré-estabelecidos. Dessa forma, não existe apenas um único método considerado como “correto” para se obter a solução.

Reunindo as principais ideias de autores que abordam o tema, Onuchic e Allevato (2011, p. 82) destacaram que a resolução de problemas

> coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
> • [...] desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> • [...] desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
> •[...] fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Mas, para que a aprendizagem ocorra, é necessário que o professor proponha aos alunos tarefas bem selecionadas e que ofereça condições para que eles encontrem novas compreensões, que estavam embutidas na atividade e a partir do conhecimento adquirido por eles. Para Van de Walle (2001, p. 44), é de responsabilidade do professor criar esse ambiente, pois

> ensinar matemática através da resolução de problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer.

A seleção das tarefas não é feita somente levando em conta o assunto que será trabalhado, mas principalmente a compreensão atual do aluno. Segundo Onuchic (1999), essa metodologia de ensino não se restringe às peculiaridades técnicas e aos conceitos, ela requer um amplo repertório de conhecimentos. O ensino via resolução de problemas estende-se às relações entre técnica e conceitos e aos princípios que os unem: “O problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da matemática, assim como seus usos e aplicações”. (ZUFFI e ONUCHIC, 2007)

Nessa situação, a responsabilidade do aluno irá além daquela de determinar a solução para o problema proposto; ele será responsável por determinar se a resposta encontrada é a correta e justificar o porquê daquela resposta. Dessa forma, o professor deve lembrar que, ao ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas, o foco é quase todo centrado no aluno e é desejável esperar que todos os alunos consigam relacionar diferentes ideias envolvidas na atividade de resolução de um problema. (VAN de VALLE, 2009, p.58)

Unicamente após o envolvimento significativo do aluno com essas tarefas e a síntese das respostas encontradas por ele, é que o professor deve sistematizar os novos conhecimentos obtidos durante as discussões e pesquisas ocorridas no processo de busca das soluções. Depois desse processo é que se deve retomá-los por meio de outros problemas e exercícios.

A resolução de problemas como metodologia de ensino exige do professor muito planejamento, dedicação e avaliação contínua. É preciso que ocorra a escolha de tarefas que instiguem a curiosidade do aluno e mantenham constantemente a motivação do grupo.

Para Onuchic e Allevato (2011, p. 83), “não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática”, porém Onuchic (1999, 2011), Allevato (2005) e Van de Walle (2009) propuseram diferentes “roteiros”, com o intuito de auxiliar o professor que optar pelo uso dessa metodologia.

Para Van de Walle (2009), durante o desenvolvimento das atividades, é preciso analisar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações propostas, levando em conta as três fases para ensinar pela resolução de problemas: preparação, trabalho dos estudantes e discussão. Para o autor, essas fases se caracterizam como o referenciado a seguir:

Fase	Objetivo	Procedimento
Antes	Preparação	• Preparar mentalmente os estudantes para trabalhar no problema. • Certificar-se de que os estudantes entenderam a tarefa. • Certificar-se de que os estudantes entenderam suas responsabilidades.
Durante	Trabalho dos Estudantes	• Deixar os alunos trabalharem sozinhos demonstrando respeito e confiança em suas habilidades. • Ouvir ativa e cuidadosamente. • Observar e avaliar o trabalho dos alunos. • Encorajá-los a testar suas ideias. • Fornecer apenas dicas e sugestões. • Não corrigir erros.
Depois	Discussão com a classe	• Aceitar as sugestões dos alunos sem avaliá-las. • Conduzir as discussões à medida que os estudantes justificam e avaliam seus resultados e métodos.

Quadro 2. Fases para ensinar pela resolução de problemas, segundo Van de Walle (2009, p. 56)

Em 1998, Onuchic (1999) criou um Roteiro de Atividades, com a participação de 45 professores de um Programa de Educação Continuada. A versão inicial, que tinha entre os objetivos principais gerar mais entusiasmo em salas de aula e fazer com que os alunos vissem a Matemática com um olhar mais confiante, era composta das seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização.

Porém, após o desenvolvimento de pesquisas e o contato com professores em experiências com formação, Onuchic e Allevato (2011) identificaram que muitos desses professores tinham dificuldade para trabalhar matemática com seus alunos, algumas vezes por falta de conhecimentos prévios, outras pela aversão dos alunos aos conteúdos trabalhados ou à metodologia utilizada. Para auxiliar esses e outros professores, realizaram algumas mudanças no Primeiro Roteiro (1999), incluindo novos elementos, e criaram o Segundo Roteiro: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjuntos, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo.

Nessa metodologia, o conteúdo matemático só é apresentado formalmente após os problemas serem propostos e resolvidos pelos alunos. O ensino e a aprendizagem de um novo conteúdo partem de um problema que fornecerá os elementos essenciais e técnicas matemáticas necessários na busca de respostas razoáveis ao problema proposto. Já a avaliação é feita continuamente, quando for possível verificar o crescimento dos alunos durante a resolução do problema.

Mas como toda metodologia, sabemos que o ensino por meio da resolução de problemas pode se deparar com algumas dificuldades durante implementação em sala de aula. Thompson (1989 apud ALLEVATO, 2005) cita que, em pesquisa realizada com alguns professores, eles relataram que problemas como a limitação do tempo de aula, os currículos pré-estabelecidos, a diversidade de alunos e a resistência a novas metodologias surgem como obstáculos para a utilização da metodologia citada.

Já em relação aos professores, Van de Walle (2009) enumera alguns dos dilemas enfrentados por aqueles que optam por adotar a resolução de problemas como meio de ensinar matemática. Dois desses dilemas estão relacionados ao quanto dizer no momento em que um aluno solicita a ajuda do professor e a como não manifestar sua preferência por determinado método de resolução. O professor não pode se exceder nas informações fornecidas sobre o problema, para não tirar do aluno a necessidade de buscar a solução a partir do que já é de seu conhecimento. Van de Walle reforça que, quando o professor manifesta sua preferência por determinada estratégia, leva os alunos a optarem por aquela que ele considera melhor e dificilmente utilizarão suas próprias estratégias para resolver o problema.

Nesse trabalho, apresentamos uma sequência de atividades envolvendo o conteúdo de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, que foi elaborada pela pesquisadora e desenvolvida nas quatro turmas do 8º ano em que esta é professora. Para a elaboração e desenvolvimento das atividades, foram levadas em contar as três etapas para ensinar pela resolução de problemas de Van de Walle (2009) e detalhamentos apresentados no Segundo Roteiro desenvolvido pelas pesquisadoras Onuchic e Allevato (2011).

Em nossa análise, realizada por atividade, descrevemos de que forma cada uma das etapas sugeridas por Van de Walle, Onuchic e Allevato ocorreram. Como a realização das atividades depende de diferentes fatores, como a resistência dos alunos à nova estratégia de ensino e ao tempo limitado em sala de aula, nem todas as etapas sugeridas ocorreram e uma ou mais etapas não estiveram explicitamente presentes em cada uma delas.

1.2 Aprendizagem significativa

Todos nós, ao nos depararmos com situações-problema em nosso dia-a-dia, usamos nossos conhecimentos existentes para resolver os problemas. E esse processo não é diferente do que ocorre no ensino por meio da resolução de problemas, no qual o aluno constrói um novo conhecimento e uma nova compreensão a partir do que já é de seu conhecimento.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p. 37),

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano. Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas. O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos.

Para entender melhor esse processo, é preciso compreender o processo de aprendizagem, segundo o ponto de vista cognitivista. David Ausubel (1968 apud MOREIRA e MASINI, 2001, p. 3), um dos representantes da psicologia cognitiva, encara a aprendizagem como “um processo de armazenamento de informações, condensação em classes mais genéricas de conhecimentos, que são incorporados a uma estrutura do cérebro do individuo, de modo que esta possa ser manipulada e utilizada no futuro”.

Quando Ausubel apresentou sua teoria, em 1963, as ideias que predominavam eram as behavioristas, que acreditavam na influência do meio sobre o sujeito. Os behavioristas desconsideravam o que os alunos já sabiam e defendiam que eles só aprenderiam algo se fosse ensinado por alguém.

Já a ideia central da teoria de Ausubel é que o fator mais importante na aprendizagem corresponde àquilo que o aluno já sabe. Para ele, aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva, na qual novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas a partir do momento em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para as novas ideias e conceitos.

1.2.1 Psicologia cognitivista e a teoria de David Ausubel

A aprendizagem significativa é um dos conceitos mais importantes da teoria de David Ausubel (1968). Ele é um dos representantes do cognitivismo, que tem como principal foco a busca por uma explicação teórica do processo de aprendizagem do ponto de vista da psicologia cognitivista.

Para a psicologia cognitivista, o processo de compreensão, transformação, armazenamento e uso das informações envolvidas na cognição é a maior preocupação e tem como objetivo principal identificar os padrões estruturados dessas transformações. Do ponto de vista cognitivista, a aprendizagem é vista como um processo no qual a informação é armazenada e em que a habilidade de organização das informações deve ser desenvolvida.

A cognição é um processo por meio do qual o mundo dos significados tem origem e os significados são atributos à medida que o individuo se situa no mundo, estando relacionados à realidade em que ele se encontra. No processo de cognição, esses significados servem de ponto de partida para a atribuição de outros significados, dando origem à estrutura cognitiva. A origem da estrutura cognitiva é composta pelos pontos básicos da ancoragem, dos quais surgem os novos significados. Portanto, a aprendizagem é um processo que permitiria ao aluno relacionar uma nova informação com um aspecto relevante de sua estrutura cognitivista."

Na teoria de Ausubel (1968 in da COSTA e MOREIRA, 2000), a aprendizagem significativa é o conceito mais importante e corresponde ao processo por meio do qual uma nova informação interage de forma substantiva e não arbitrária com subsunçores específicos existentes na estrutura cognitiva do indivíduo.

A não-arbitrariedade e a substantividade são as características básicas da aprendizagem significativa. Segundo Moreira (1997, p. 20),

> **Não-arbitrariedade** quer dizer que o material potencialmente significativo se relaciona de maneira não-arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Ou seja, o relacionamento não é com qualquer aspecto da estrutura cognitiva, mas sim com conhecimentos especificamente relevantes, os quais Ausubel chama subsunçores. O conhecimento prévio serve de matriz ideacional e organizacional para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos quando estes "se ancoram" em conhecimentos especificamente relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva.
> Novas ideias, conceitos, proposições, podem ser aprendidos significativamente (e retidos) na medida em que outras idéias, conceitos, proposições, especificamente relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do sujeito e funcionem como pontos de "ancoragem" aos primeiros.
> **Substantividade** significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva é a **substância** do novo conhecimento, das novas idéias, não as palavras precisas usadas para expressá-las. O mesmo conceito ou a mesma proposição podem ser expressos de diferentes maneiras, através de distintos signos ou grupos de signos, equivalentes em termos de significados. Assim, uma aprendizagem significativa não pode depender do uso **exclusivo** de determinados signos **em particular**.

Para Ausubel, a aprendizagem só ocorre a partir do momento em que existam informações anteriores que servirão "de âncora" para que uma nova informação seja adquirida. Portanto, para que isso ocorra, é preciso que o professor analise se a estrutura cognitiva do aluno já possui as informações necessárias para se relacionar aos novos conhecimentos, pois a aprendizagem só será significativa a partir do momento em que as informações importantes que já são do conhecimento do aluno se interacionarem com as novas informações a serem adquiridas.

> “Se quiséssemos reduzir a psicologia educacional em um único princípio este seria: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que sabe e baseie nisso seus ensinamentos.” (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p 137)

Outro fator importante é que a aprendizagem significativa depende do resultado da interação que tem lugar entre a nova informação a ser aprendida e a estrutura cognitiva existente, ou seja, a assimilação entre os velhos e novos significados, formando uma estrutura de conhecimento altamente diferenciada.

1.2.2 A aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica

Para Ausubel, a aprendizagem é significativa quando ela ocorre a partir do que já é de conhecimento dos alunos (subsunçores) e servirá de “âncora” para que uma nova informação seja adquirida. Esse tipo de aprendizagem se opõe à aprendizagem mecânica, que é definida por Ausubel (1968, apud da COSTA e MOREIRA, 2000, p. 8-9) “como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva”.

Nesse tipo de aprendizagem, não ocorre interação entre o que já está armazenado na estrutura cognitiva do aluno e a nova informação. O novo conhecimento é armazenado de forma arbitrária na estrutura cognitiva do aluno, e não há ligação com os conceitos subsunçores existentes.

1.2.3 Tipos de aprendizagens significativas

Diferentes tipos de aprendizagem podem ser considerados significativos. O tipo mais básico é a aprendizagem do significado de símbolos individuais, que é denominada por Ausubel (1968) como “aprendizagem representacional”. Na “aprendizagem conceitual”, caso especial da aprendizagem representacional, “os conceitos também são representados por símbolos individuais, porém, neste caso são representações genéricas ou categoriais” (MOREIRA, 1997, p. 20). Já a “aprendizagem proposicional” refere-se aos significados de ideias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou sentenças (ibidem, p. 21).

A aprendizagem significativa subordinada é a forma mais comum no processo de assimilação cognitiva. Segundo Ausubel (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN,1980, p. 52), nesse tipo de aprendizagem, “conceitos e proposições potencialmente significativos ficam subordinados, são ‘subsumidos’ sob ideias mais abstratas, gerais e inclusivas (os ‘subsunçores’)”. Existem dois tipos de aprendizagem subordinada: a derivativa, se o novo conceito ou proposição tem caráter de exemplo dos já existentes, e a correlativa, presente em nossa pesquisa, se o novo conceito é “uma extensão, elaboração, modificação ou quantificação de conceitos ou proposições previamente aprendidos significativamente” (ibidem, p. 52).

Na aprendizagem supraordenada, também presente em nossa pesquisa, o novo conceito ou proposição apresenta uma relação de superordenação à estrutura cognitiva do sujeito. Esse tipo de aprendizagem ocorre quando o aluno integra conceitos já aprendidos a um novo conceito mais amplo.

> O sujeito aprende um novo conceito ou proposição mais abrangente que passa a subordinar, ou “subsumir”, conceitos ou proposições já existentes na sua estrutura de conhecimento. É muito importante na formação de conceitos e na unificação e reconciliação integradora de proposições aparentemente não relacionadas ou conflitivas. (MOREIRA, 1997, p. 21)

Existem situações em que a aprendizagem de conceitos ou proposições não pode ser relacionada a algum conceito ou proposição já existente na estrutura cognitiva. Esse tipo de aprendizagem recebe o nome de “aprendizagem significativa combinatória” (MADRUGA, 1996, p. 72).

1.2.4 Condições para a aprendizagem significativa

Para ocorrer a aprendizagem significativa, são necessárias três condições, sendo que duas delas são referentes ao sujeito e apenas uma é atinente aos novos conhecimentos que serão adquiridos. (MADRUGA, 1996)

Em relação ao sujeito, a primeira condição está relacionada à disposição em aprender. Se o aluno não estabelecer uma atitude ativa em sala de aula, o que depende de fatores como atenção e motivação, a aprendizagem ocorrerá de forma mecânica. Como segunda condição, é preciso que a estrutura cognitiva do aluno já possua as ideias relevantes necessárias para que ocorra a "ancoragem" com os novos conhecimentos. A partir dessas duas condições, é possível concluir que cada aluno faz uma filtragem das informações que têm ou não significado para si próprio.

Quanto aos novos conhecimentos a serem adquiridos, é preciso que esses sejam potencialmente significativos. Isso só ocorrerá quando os conhecimentos forem substanciais e não-arbitrários, para somente assim se relacionarem com as ideias relevantes que o sujeito já possui.

Tendo como referência essas três condições necessárias para a aprendizagem significativa, a teoria de Ausubel tem como ponto de partida a ideia de que o sujeito apresenta uma organização cognitiva interna fundamentada em conhecimentos de caráter conceitual, na qual a relação que os conceitos já existentes estabelecem entre si apresenta um grau maior de complexidade do que o número de conceitos presentes. Percebe-se que existe um caráter hierárquico nessas relações, de modo que a estrutura cognitiva é vista como uma rede de conceitos organizados de acordo com o grau de abstração e de generalização.

1.3 Resolução de problemas e a aprendizagem significativa

A teoria cognitivista de Ausubel confere à abordagem de ensino de resolução de problemas o *status* de "qualquer atividade na qual a representação cognitiva de experiência prévia e os componentes de uma situação problemática apresentada são reorganizados a fim de atingir um determinado objetivo". (AUSUBEL, 1968, p. 533 apud DA COSTA e MOREIRA, 2000, p. 263)

Na abordagem de ensino por meio da resolução de problemas, a estrutura cognitiva já existente exerce papel relevante, pois a busca pela solução de qualquer problema envolve a adaptação do conhecimento prévio às demandas da nova situação a ser solucionada. Para Costa e Moreira (ibidem, p. 264), "se a estrutura cognitiva já possui as subsunções adequadas para permitir a reorganização do conhecimento, a resolução do problema terá cumprido o seu papel para a aprendizagem significativa".

Para que isso ocorra, é preciso que, nas aulas de Matemática, o professor promova situações que levem os estudantes a estabelecer relações entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos, sendo que, quanto maior for a quantidade de relações estabelecidas, mais significativa será a aprendizagem

Assim, nosso objetivo é investigar se o ensino e a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, por meio de resolução de problemas aliados aos princípios da aprendizagem significativa, podem contribuir para uma eficaz construção de conhecimento.

CAPÍTULO 2: Metodologia

Em uma pesquisa, podem-se adotar, grosso modo, duas abordagens: qualitativa ou quantitativa. Segundo Severino (2007, p.119),

> Quando se fala de pesquisa quantitativa ou qualitativa, e mesmo quando se fala de metodologia quantitativa ou qualitativa, apesar da liberdade de linguagem consagrada pelo uso acadêmico, não se está referindo a uma modalidade de metodologia em particular. Daí ser preferível falar-se de *abordagem quantitativa*, de *abordagem qualitativa*, pois, com estas designações, cabe referir-se a conjuntos de metodologias, envolvendo, eventualmente, diversas referências epistemológicas. São várias metodologias de pesquisa que podem adotar uma abordagem qualitativa, modo de dizer que faz referência mais a seus fundamentos epistemológicos do que propriamente a especificidades metodológicas.

Para Moreira e Caleffe (2008, p.73), essas duas abordagens “não são dicotômicas, mas se colocam nos extremos opostos de um contínuo”. Os dois autores ainda afirmam que a maior diferença existente entre essas duas abordagens é que, na qualitativa, exploram-se as características dos indivíduos e situações em que não são possíveis serem numericamente descritas com facilidade, enquanto na abordagem quantitativa são exploradas as características e situações em que dados numéricos podem ser obtidos e são utilizadas mensuração e estatísticas. (ibidem, p. 73)

A presente pesquisa foi realizada segundo a abordagem qualitativa, pois sua elaboração levou em conta as quatro características-chaves que, para Merriam (2002 apud GODOY, 2005), devem estar presentes em estudos qualitativos: a compreensão dos significados que os participantes da pesquisa atribuíram à situação estudada, o pesquisador como principal instrumento de coleta, a análise de dados como um processo basicamente indutivo e a apresentação dos resultados por meio de um relato referenciado pelo aporte teórico que estruturou a pesquisa.

> [...] o pesquisador está interessado em compreender quais os significados que os participantes atribuem ao fenômeno ou situação que está sendo estudada. Busca-se <u>compreender os significados</u> que as pessoas constroem sobre seu mundo e as experiências nele vividas, tendo o <u>pesquisador como principal instrumento de coleta e análise de dados</u>. Para coletar os dados são feitas entrevistas, realizadas observações ou analisados documentos. O <u>processo de</u>

> condução da pesquisa é essencialmente indutivo, isto é, o pesquisador coleta e organiza os dados com o objetivo de construir conceitos, pressuposições ou teorias, ao invés de, dedutivamente, derivar hipóteses a serem testadas. A análise indutiva dos dados leva a identificação de padrões recorrentes, temas comuns e categorias. O resultado da pesquisa é expresso por meio de um relato descritivo – detalhado – a respeito do que o pesquisador apreendeu sobre o fenômeno. Tais resultados são apresentados e discutidos usando-se as referências da literatura especializada a partir das quais o estudo se estruturou. (ibidem, p. 88)

Esta pesquisa ainda se configura como sendo de abordagem qualitativa pelo fato de ter levado a pesquisadora a participar do universo em que ela ocorreu, o que corrobora com a afirmação de Chizzotti (2006, p. 28): “o termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível”.

Com esses pressupostos, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados na investigação.

2.1 O contexto, os sujeitos e as atividades

Visando responder à questão de pesquisa: “O ensino e a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, por meio de resolução de problemas aliados aos princípios da aprendizagem significativa, podem contribuir para uma eficaz construção de conhecimento?”, realizamos uma intervenção de ensino do 8º ano do Ensino Fundamental de uma instituição privada da cidade de São Paulo.

2.1.1 A instituição

A instituição escolhida para a realização da intervenção de ensino foi um tradicional colégio localizado em um bairro de classe média alta da zona Sul de São Paulo.

Para a proposta pedagógica do colégio (ACF, 2006, p. 65), o conhecer “é compreendido como um processo constante de transformações e atribuição de significado a objetos, ideias, fatos e o estabelecimento de relações entre esses significados". Assim, para cada interação com os objetos de conhecimento, um novo significado se altera, novas relações se estabelecem e novas possibilidades de compreensão são criadas. A partir desse pressuposto, a instituição toma como fundamento que o conhecimento é resultado da rede de relações que o estudante faz entre os diferentes significados de um mesmo conhecimento.

Para que a aprendizagem seja relevante, a proposta pedagógica indica que é necessário que esteja relacionada ao mundo dos conhecimentos e vivências do estudante e que seja significativa, no sentido de se opor à memorização de novas informações ou à repetição correta de uma habilidade. A aprendizagem significativa ocorre

> [...] quando o educando tentar reter a nova informação ou habilidade, relacionando-a com algo que sabe e dando-lhe um lugar dentro de um todo mais amplo. Isso traz implicações imediatas, ao ensino, pois essa aprendizagem exige ação por parte do educando ao descobrir princípios que fundamentam cada nova informação, associando-os a situações concretas ou a outros conceitos que aprendeu antes. (ACF, 2006, p. 66)

Para que a aprendizagem seja significativa, os professores junto com os orientadores de área discutem a utilização de diferentes procedimentos metodológicos para cada um dos conteúdos a serem trabalhos. Trimestralmente, cada professor escolhe um conteúdo específico para a elaboração de uma sequência didática. A partir dos objetivos e habilidades do conteúdo selecionado, o professor elabora uma sequência de atividades que tem por objetivo introduzir, desenvolver e avaliar o conteúdo indicado.

Ancorados na proposta pedagógica da escola e na metodologia de ensino por ela adotada, entramos em contato com a direção e com a orientação do grupo de Matemática do colégio, apresentamos a proposta desta pesquisa e fomos autorizados a desenvolver a intervenção nas turmas dos 8os anos do Ensino Fundamental.

Dessa forma, ficou definido que o desenvolvido do projeto ocorreria nas quatro turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, no período matutino, do colégio em que a pesquisadora é também professora. As atividades ocorreriam no final do 1º trimestre, no mês de abril de 2013, durante as aulas de Matemática.

2.1.2 Os sujeitos da pesquisa

A intervenção foi desenvolvida nas quatro classes do 8º ano do Ensino Fundamental, num total de 120 alunos, sendo que, para a análise dos dados, foram selecionadas as atividades de cinco alunos por sala, com o seguinte critério: na turma A, foram escolhidas as atividades dos alunos cujos números de chamada iam de 1 a 5; na turma B, de 6 ao 10; na turma C, os alunos de 11 a 15; e finalmente na turma D, de 16 a 20. Dos 20 sujeitos que iniciaram a intervenção, somente 14 alunos participaram de todas as sessões. Na análise dos dados foram considerados os protocolos desses 14 alunos.

Nas classes nas quais as atividades foram desenvolvidas, os alunos estavam na faixa etária de 12 a 14 anos e eram oriundos das classes média e alta de São Paulo. Eles, na sua maioria, moravam próximos à instituição e as famílias optaram pelo colégio pela história e qualidade do ensino no bairro.

Nessa instituição, o tema sistema de equações do 1º grau é trabalhado somente no 8º ano, embora alguns livros e outras instituições desenvolvam o assunto com os alunos do 7º ano. Alguns estudantes, provenientes de outras instituições, já estudaram o conteúdo no ano anterior. Mesmo assim, eles foram incluídos na pesquisa e a eles foi solicitado que não auxiliassem os outros alunos na resolução das atividades propostas e que não respondessem em voz alta as situações que eram apresentadas. Após a resolução das situações, deveriam apresentar as soluções somente à professora.

Dentre os alunos que tiveram as atividades selecionadas e analisadas, somente um se encontrava nesse último caso. A pesquisadora entrevistou o aluno, e ele afirmou que tivera o conteúdo no ano anterior, quando foram desenvolvidas somente atividades algorítmicas relacionadas à resolução de sistemas, não partindo de uma situação-problema.

Esse enfoque relatado pelo aluno aguçou a curiosidade da pesquisadora, que foi instigada a entrevistar os outros dois alunos que também eram provenientes de outros colégios, todos diferentes, e já haviam estudado o tema. A partir da constatação de diferentes proveniências, a pesquisadora pediu para cada um descrever a forma como aprendera sistema de equações e como era o livro didático adotado pelo colégio. Esses dois alunos apresentaram informações semelhantes ao primeiro aluno, apenas diferenciando na resolução de problemas após o trabalho com algoritmos. Sobre o uso das letras para representar as variáveis, os dois só tiveram contato com exemplos que utilizavam as letras x e y, independente do contexto.

Esses dois estudantes apresentaram características diferentes do citado anteriormente, e, por esse motivo, seus protocolos também foram incluídos na análise, totalizando 16 sujeitos da presente pesquisa.

2.1.3 O instrumento de coleta de dados

Para a intervenção, foi elaborada uma sondagem com o intuito de investigar se os alunos mobilizavam as noções que eram necessárias como conhecimento prévio para a introdução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

No ensino baseado em resolução de problemas, a escolha das atividades deve ser feita a partir da compreensão atual do aluno, ou seja, "começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem" (VAN de WALLE, 2009, p. 58). Para que a aprendizagem seja significativa, é necessário que "o novo conteúdo seja incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquira significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio" (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN,1980).

A sondagem se constitui em uma lista de questões com a qual pretendíamos investigar que conhecimentos prévios os alunos mobilizavam relativos à equação do 1º grau e à conversão do registro da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Por meio dela, foi possível identificar as principais dúvidas e defasagens dos alunos relacionadas às ideias dos conteúdos selecionados. Em relação à equação do 1º grau, os alunos resolveram oito equações (em anexo) e parte deles apresentou certa dificuldade na resolução das equações que envolviam cálculos com números negativos e fracionários. Já em relação à conversão de representação de linguagens, a maior dificuldade dizia respeito aos termos matemáticos utilizados, como "diferença", "sexta parte" e "produto".

Após análise do planejamento apresentado pelo professor no início do ano letivo, constatamos que ocorreria a retomada dos assuntos antes do conteúdo de sistemas de equações e, durante as aulas de matemática, foram realizadas novas atividades focadas nas principais dificuldades detectadas.

A partir desses resultados, decidimos elaborar uma sequência de ensino composta por oito atividades envolvendo o tema sistemas de equações, das quais as três primeiras tiveram como foco a conversão entre as linguagens natural e algébrica. Nas atividades 4 a 7, propunham-se apresentar dois dos métodos de resolução de sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas: método da adição, nas atividades 4 e 5, e método da substituição, nas atividades 6 e 7. Para finalizar, a atividade 8 teve como proposta a resolução de quatro situações em que se pretendiam verificar o método de resolução escolhido pelo aluno e a justificativa de tal escolha.

As atividades foram desenvolvidas durante as aulas e faziam parte do planejamento da escola. Tal desenvolvimento envolveu 15 sessões em que os alunos trabalharam individualmente, com posterior discussão envolvendo toda a turma.

Durante o desenvolvimento das atividades, analisamos as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações propostas, levando em conta as três fases para ensinar pela resolução de problemas de Van de Walle (2009, p. 62): “preparando os alunos”, verificando se eles compreenderam o problema; “alunos trabalhando”, deixando os alunos construírem seus conhecimentos; e “alunos debatendo”, encorajando a interação entre os alunos da sala no momento da apresentação das diferentes formulações das soluções e formas de validação.

Atividade 1: A atividade 1 consta de duas situações expressas na linguagem natural.

Situação 1.

Num laboratório há baratas e aranhas. Foram contadas 10 cabeças e 76 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

A escolha da primeira situação foi embasada nos pressupostos da resolução de problemas como na teoria da aprendizagem significativa. Por meio dessa, pretendia-se verificar se o aluno era capaz de buscar seus conhecimentos prévios para utilizar na sua resolução: ou por meio de desenho, ou por meio de esquemas, ou por tentativas ou outras. Segundo a estratégia de ensino por meio da resolução de problemas, o aluno, mediante uma situação desconhecida, deve utilizar de seu conhecimento prévio para a busca da solução. Além disso, de acordo com Ausubel (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980), para que a aprendizagem seja significativa, o aluno precisa resolver as situações propostas a partir do que já é de seu conhecimento, por meio dos subsunçores.

Situação 2:

Em outro laboratório há também baratas e aranhas. Nesse segundo laboratório, foram contadas 50 cabeças e 344 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão nesse segundo laboratório?

Já na segunda situação, apenas os dados numéricos da questão foram alterados, para verificar se o aluno escolheria a mesma estratégia utilizada na resolução da primeira situação ou, mediante dificuldade para resolver, buscaria uma nova estratégia, visto que os dados aqui (números grandes) podem ser incompatíveis com a estratégia utilizada na situação 1. Pretendia-se verificar se o aluno era capaz de mobilizar novas estratégias que representassem um caminho mais eficiente, como, por exemplo, a utilização da álgebra para a resolução da situação, o que apresentaria um encaminhamento natural para a realização das próximas atividades.

Atividades 2 e 3: Conversões entre linguagens

A atividade 2 teve como foco a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica. Por meio de nove situações, pretendíamos verificar se os alunos compreendiam e interpretavam situações apresentadas na linguagem natural e se, a partir da leitura e interpretação, conseguiriam de representar por meio de equações com duas incógnitas cada situação.

1. Um par de tênis e um par de sandálias custam juntos 300 reais. O preço do par de tênis é 20 reais mais caro que o preço do par de sandálias.
2. Uma fazenda possui galinhas e coelhos. Sabendo que são 17 animais e a soma de suas pernas é igual a 38.
3. Uma caixa possui em seu interior um total de 30 bolinhas, entre brancas e pretas. Sabendo que se eu pegar as bolas brancas mais o dobro de bolas pretas terei 40 bolas.
4. No sitio de Julio, entre vacas e bois, há 80 animais. Sabe-se que a diferença entre o número de vacas e o dobro do número de bois é 20.
5. Uma pessoa possui entre notas de 5 reais e de 10 reais um total de 50 notas. Sabe-se que essas notas somam um montante de 450 reais.
6. Carlos foi às compras e colocou em seu carrinho, entre cachorros quentes e refrigerantes, 60 unidades. Sabe-se que cada cachorro quente custa R$ 4,50 e cada refrigerante custa R$ 3,00 e que o valor da venda do dia deu um montante de R$ 229,50.
7. A soma das idades de Bia e de Lia é igual a 31 anos, e a diferença entre suas idades é de 3 anos.
8. Boby pai e Boby filho, dois cachorros, sobem juntos em uma balança e ela marca 18,5 kg. Boby pai é mais pesado que Boby filho. Seriam necessários 4 Boby filhos para contrabalancear um Boby pai.
9. Uma lata de leite e uma de chocolate em pó custam, juntas R$ 3,80. Sabendo que duas latas de leite e uma de chocolate custam, juntas, R$ 4,80.

Fonte: http://professorclaudemirfavin.blogspot.com.br

Na atividade 3, foram propostas quatro situações nas quais um sistema de equações foi apresentado na linguagem algébrica e o aluno teria que selecionar a situação que corresponde ao sistema proposto na linguagem natural, justificando sua escolha. Pretendíamos, nessa atividade, verificar se o aluno conseguiria identificar a situação proposta a partir da representação algébrica e utilizar a argumentação para justificar o motivo da escolha.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 125 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

1. ( ) O dobro da quantidade de selos que Marcos possui somado ao quíntuplo da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. A diferença entre a quantidade de selos que eles possuem é igual a 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?	2. ( ) A diferença entre o dobro da quantidade de selos que Marcos e o quíntuplo da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. Os dois têm juntos 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?	3. ( ) A metade da quantidade de selos que Marcos possui somado a quinta parte da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. A diferença entre a quantidade de selos que eles possuem é igual a 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?

Justificativa: ____
____
____
____

Atividades 4 e 5: Sistematização do método da adição.

As duas atividades seguintes tratam exclusivamente da utilização do método da adição para a resolução dos sistemas que traduzem os problemas. Para a atividade 4, duas situações foram propostas. Na primeira situação, pretendíamos verificar se o aluno conseguiria representar, por meio de um sistema de equações, a situação dada e notar que para obter a solução, poderia somar as duas equações com o propósito de "eliminar" uma das incógnitas e obter a idade da pessoa mais velha.

1. A soma das idades de duas pessoas é 25 anos, e a diferença entre elas é de 13 anos. Quais as idades dessas pessoas?

Para a segunda situação, foi proposta a resolução do primeiro problema apresentado na Atividade 1. Pretendíamos verificar, por meio dessa situação, se os alunos perceberiam que, somando as equações, nenhuma das incógnitas "desapareceria" e se eles utilizariam algum tipo de tratamento nas equações para a solução do problema.

2. Num laboratório há baratas e aranhas. Foram contadas 10 cabeças e 76 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

Esperava-se que os alunos mobilizassem alguns conhecimentos utilizados na resolução de equações, como, por exemplo, multiplicar os membros de uma equação por um mesmo número. É possível que, nesse momento, houvesse a necessidade de uma mediação mais efetiva do professor a fim de que os alunos fizessem tratamentos nas equações, de modo a possibilitar a aplicação da estratégia utilizada na primeira situação. A partir das respostas dadas pelos alunos, o professor pôde incentivá-los a sugerirem novas estratégias de resolução.

Se necessário, o professor pode ativar o conhecimento prévio útil, sugerindo a resolução de algumas equações. Como exemplo, poderíamos utilizar as equações x + 3 = 5, 2x + 6 = 10 e – 3x – 9 = –15 e, após a resolução, questionar sobre as soluções obtidas e semelhanças e diferenças das equações. A partir dos questionamentos e da análise das equações, esperava-se que o aluno percebesse que, para resolver a segunda situação, bastava que multiplicássemos as duas equações ou apenas uma equação por números racionais para que a soma dos coeficientes fosse zero e que, após esse procedimento inicial, para finalizarmos a resolução dessa situação, utilizássemos a mesma estratégia empregada na situação 1.

A resolução desses dois problemas seria realizada pelas turmas junto com a professora, que teria o papel de mediadora nas discussões referentes à resolução. Após a finalização da Atividade 4, foi proposta a resolução da Atividade 5 e de outros exercícios do livro didático adotado, para a fixação do algoritmo da adição.

Atividade 5: Método da adição

1. Resolva os sistemas de equações a seguir:

a) $\begin{cases} 2x+5y=13 \\ -2x+7y=23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y-4x=5 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 13=3a+b \\ -5=b-3a \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x+5y=-21 \\ 7x-2y=17 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9m+6n=-12 \\ 4m-5n=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+y=3 \\ \dfrac{-x}{4}-2y=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} a+2b=0 \\ \dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}=1 \end{cases}$

2. Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva por meio do método da adição:

a) A soma de dois números é –5 e a diferença entre eles é 1. Quais são esses números?

b) Em uma sala de aula estudam 42 alunos. Sabendo que nessa sala há mais meninas do que meninos e que a diferença entre o número de meninas e meninos é 4, calcule a quantidade de meninas e de meninos há nessa sala de aula.
c) Um estacionamento cobra R$ 2,00 por moto e R$ 3,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R$ 277,00 para um total de 100 veículos. Calcule a quantidade de motos que usaram o estacionamento nesse dia.
d) Num quintal há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que há ao todo, 112 pés. Calcule a quantidade de porcos que há nesse quintal.
e) Em uma sorveteria foram fabricados picolés de leite e picolés de frutas, num total de 180. Ao fim de um dia foram vendidos metade dos picolés de leite e um terço dos picolés de frutas, restando 100 na sorveteria. Quantos picolés de leite foram fabricados?

Para a atividade 5 foram elaboradas duas tarefas, sendo a primeira composta por oito sistemas de equações, organizados por grau de dificuldade: os itens **a**, **b** e **c** permitem ser resolvidas sem nenhuma manipulação; os itens **d**, **e** e **f** exigem o preparo de pelo menos uma das equações antes da utilização do método da adição; e os dois últimos itens envolvem coeficientes fracionários, o que pode dificultar a resolução e pode exigir mais tratamento das duas equações antes da adição das mesmas.

Já para a segunda tarefa foram selecionadas cinco situações que demandam tanto a conversão para a linguagem algébrica quanto a utilização de uma estratégia para a resolução do sistema de equações obtido. A organização das situações foi similar à utilizada na primeira tarefa, partindo de situações mais simples, tanto na conversão entre linguagens quanto no desenvolvimento da estratégia para resolução, e finalizando com uma situação que exige maior atenção na conversão e mais tratamento para a sua resolução.

No momento do desenvolvimento da sequência, percebemos que talvez fosse mais apropriado inverter a ordem das tarefas 1 e 2 da Atividade 5, por ser mais coerente com a proposta do trabalho. Tendo em vista que nossa pesquisa tem por objetivo principal o ensino por meio da resolução de problemas, seria mais adequado partir de tarefas envolvendo situações contextualizadas.

Atividades 6 e 7: Sistematização do método da substituição

As atividades 6 e 7 foram destinadas à apresentação e sistematização do método da substituição para a resolução de sistemas.

A situação apresentada na atividade 6 teve como propósito verificar se os alunos são capazes de utilizar parte da estratégia de resolução do método anterior para resolver a situação proposta.

Carla e Bruna conversam despreocupadamente sobre o emprego novo delas quando chega Ana, uma senhora muito simpática e vizinha delas. Ana, que já é aposentada, percebe que as duas amigas ainda estão longe da aposentadoria. Então, ela pergunta:

- Que idade vocês têm?

Carla, a mais velha, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim:Ana - Como? Você está brincando comigo. Essa aí não passa de uma garota, e você certamente não chegou aos 50.

Carla - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Bruna, temos juntas 72 anos.

Ana - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que idades vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada uma.

Carla - É claro que não. Você tem dois dados desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.

Ana - Diga.

Carla - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Bruna. Agora, Ana, você tem dois dados desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.

Ajude a Ana a descobrir as idades de Carla e de Bruna!!!

Situação problema retirada e adaptada do site Mundo Vestibular (disponível em 15.fev.2013)

A situação pode ser expressa pelo sistema $\begin{cases} b + c = 72 \\ c = 2b \end{cases}$, no qual b corresponde à idade de Bruna e c, de Carla.

O professor pode propor aos alunos que expressem a situação dada por meio de um sistema de equações. Os estudantes podem questionar que, nessa situação, é preciso ‘arrumar’ uma das equações para resolver pelo método da adição. É possível que alguns alunos percebam que se pode substituir a incógnita c da primeira equação por 2b, que figura na segunda. Se não acontecer, poderá ser sugerida a tal substituição.

Esperava-se nessa situação que o aluno relacionesse o que já sabia sobre substituição de uma incógnita por um valor numérico para realizar a substituição da incógnita c por 2b, comum à aprendizagem supraordenada, já que, segundo Ausubel, a ideia de substituição de uma incógnita por uma expressão algébrica é de maior nível de generalidade que a substituição de uma incógnita por um valor numérico, já presente na estrutura cognitiva dos alunos.

Essa estratégia de substituição poderia gerar encaminhamentos que permitiriam a discussão da pertinência do algoritmo da substituição para a resolução de sistemas de equações em certas situações e em outras, em que o método da adição seja mais adequado.

A seguir, propusemos a atividade 7 com o intuito de explicitar a aplicação desse método em outras situações.

Atividade 7: Método da Substituição

1. Resolva os sistemas de equações a seguir por meio do método da substituição:

a) $\begin{cases} x + y = 776 \\ x = 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 125 \\ y = 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 250 \\ 2x = 3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x = 2y \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

2. Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva por meio do método da substituição:

a) Marcos e Otávio são pintores. Eles receberam R$980,00 por um trabalho que realizaram. Sabendo que Marcos recebeu R$228,00 a menos que Otávio, calcule o valor em reais que cada um recebeu.

b) A avó tem o sêxtuplo da idade da neta. A diferença entre as duas idades é de 55 anos. Determine a idade de cada uma.

c) Em certa escola estudam meninos e meninas, num total de 2500 alunos. Quantos meninos e quantas meninas estudam nessa escola, sabendo que o triplo da quantidade de meninos é igual ao dobro da quantidade de meninas?

d) Meu irmão é cinco anos mais velho do que eu. O triplo da minha idade somado ao dobro da idade dele é igual a 100 anos. Determine a idade do meu irmão.

e) A soma das idades de Carlos e Mário é 40 anos. A idade de Carlos é 3/5 da idade de Mário. Qual a idade de Mário?

f) Um terreno retangular tem 168 m de perímetro. O comprimento tem 20 m a mais que a largura. Determine as dimensões desse terreno.

Atividade 8: Consolidação dos métodos estudados (resolução dos sistemas de equações pelo método mais adequado e justificativa da escolha)

Após os alunos terem contato com dois dos métodos de resolução de sistemas de equações, o da adição e o da substituição, pretendíamos verificar se eles conseguiram frente novas situações, convertê-las para a linguagem algébrica e resolver o sistema utilizando os dois métodos. Para essa etapa, foram propostas duas atividades: na primeira, a atividade 8, pretendia-se que os alunos resolvessem as situações por meio dos dois métodos e, a partir da resolução, indicassem e justificassem o melhor método para cada situação. As argumentações seriam socializadas, e, após a discussão, montaríamos um quadro na lousa com as justificativas consideradas pelos alunos como sendo as mais relevantes.

Atividade 8: Resolução de sistemas de equações

Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva pelos dois métodos conhecidos (adição e substituição). Após a resolução, indicar o método mais adequado à situação proposta, justificando sua escolha.

a) Em outro laboratório há também baratas e aranhas. Nesse segundo laboratório, foram contadas 50 cabeças e 344 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão nesse segundo laboratório?

b) A soma de dois números é 50, e o maior deles é igual ao dobro do menor, menos 1. Quais são os números?

c) Ao organizar uma festa, Paulinho decidiu organizar os convidados em mesas com 3 e 4 cadeiras. Sabendo que existiam na festa 50 pessoas e que foram ocupadas 15 mesas, determine o número de pessoas que ocuparam mesas com 3 cadeiras.

d) Duas pessoas ganharam juntas 50 reais por um trabalho, e uma delas ganhou 25% do que a outra ganhou. Quanto ganhou cada pessoa?

Como segunda atividade, os alunos deveriam resolver os problemas propostos do livro didático, por meio de um único método, à sua escolha, e justificá-la. Pôde-se aproveitar o momento para socializar novamente as justificativas e verificar se ainda surgiriam dúvidas no momento da escolha do método e durante a resolução dos sistemas de equações.

O mais importante é que os alunos não deveriam sentir-se obrigados a utilizar o método considerado como o melhor para a situação proposta. Van de Walle (2009, p. 68) sugere que o professor registre os métodos úteis na lousa, de forma que essas estratégias estarão disponíveis para serem aplicadas em lições futuras, mas que não se deve obrigar “o uso de seus métodos ou os de outros alunos na classe”.

A seguir descrevemos como foi desenvolvida a sequência de atividades.

CAPÍTULO 3: Desenvolvimento da sequência e análise dos resultados

Com a finalidade de averiguar se a hipótese levantada em nossa pesquisa era verdadeira, apresentamos os principais resultados das atividades que propiciaram aos alunos situações de aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau e sua resolução por dois diferentes métodos: da adição e da substituição.

De modo mais específico, descrevemos o desenvolvimento de cada uma das atividades, analisando as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações propostas e levando em conta as fases para ensinar pela resolução de problemas de Van de Walle (2009) e o Segundo Roteiro de ensino através da resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2011). Do ponto de vista da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968), analisamos se os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios durante a resolução das atividades e se a aprendizagem foi significativa após a finalização da sequência.

Sobre as três fases de Van de Walle (2009), analisamos o processo de desenvolvimento de cada uma das atividades, desde a **preparação dos alunos**, quando verificamos se eles compreenderam o problema, o momento em que deixamos os **alunos trabalhando**, construindo seus conhecimentos e, finalmente, quando eles **debateram**, encorajando-os a interagir com os demais colegas, apresentando suas diferentes formulações de soluções e formas de validação.

Quanto ao Segundo Roteiro, de Onuchic e Allevato (2011), indicamos as etapas presentes em cada uma das atividades: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo. Como já foi citado anteriormente, existe a possibilidade de uma ou mais etapas não aparecerem na análise de uma atividade. Como a realização dessas atividades depende de diferentes fatores, existe a possibilidade de que nem todas as etapas sugeridas no roteiro ocorram ou de uma ou mais etapas não estarem explicitamente presentes.

O trabalho em sala de aula foi realizado em alguns momentos de forma individualizada e, em outros específicos, em grupo e com a professora-pesquisadora assumindo o papel de mediadora. Após a resolução dos problemas pelos alunos e confrontação das respostas, sintetizamos as principais ideias, formalizando a aprendizagem.

Para a análise, como já foi expresso, foram selecionados 16 protocolos. Para a coleta de dados, foram utilizadas duas formas de registros das atividades dos participantes da pesquisa: o registro escrito, por meio dos protocolos e as anotações feitas pela pesquisadora, com observações feitas pelos alunos das quatro turmas, durante a apresentação das soluções.

Para a análise, optamos por examinar questão a questão.

Atividade 1 - Situação 1

Antes de iniciarmos a primeira atividade nas quatro turmas, comunicamos aos alunos que, naquele dia, daríamos início a uma nova sequência de atividades. Foi entregue a cada aluno uma folha impressa com duas situações, uma na frente, outra no verso. Antes de iniciarmos a leitura e resolução, foi pedido que dividissem a folha em duas partes, de forma que a primeira parte seria utilizada para a resolução individual e outra, para anotações a serem feitas após a discussão com a classe toda e socialização dos resultados obtidos.

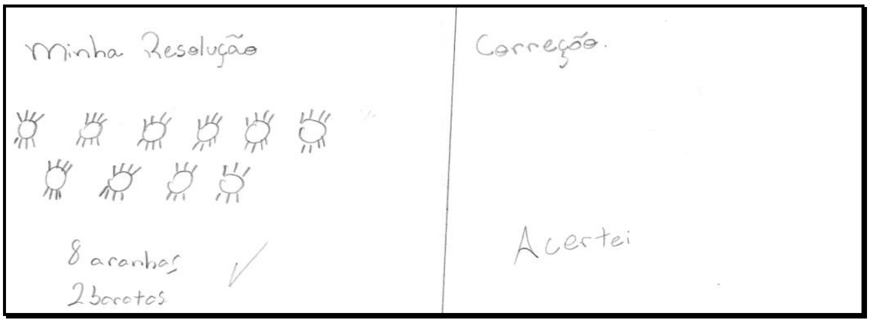
1. Num laboratório há baratas e aranhas. Foram contadas 10 cabeças e 76 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

Primeiramente, pedimos aos alunos que realizassem a leitura individual da primeira situação e, após isso, apresentassem da forma que eles acreditavam ser mais adequada a resolução da situação proposta.

Durante o processo de resolução, alguns alunos perguntaram qual era considerava a melhor estratégia para chegar à solução daquele problema e a professora-pesquisadora buscou responder sempre da mesma forma: “Não existe uma única ou a melhor estratégia. Busque você, dentre tudo o que você já aprendeu de Matemática, aquela que você acredita ser a mais adequada.”. Nesse momento, a pesquisadora enfrentou, pela primeira vez, o dilema de não saber o quanto dizer ao aluno que questionou sobre a melhor estratégia, sem interferir no desenvolvimento da atividade.

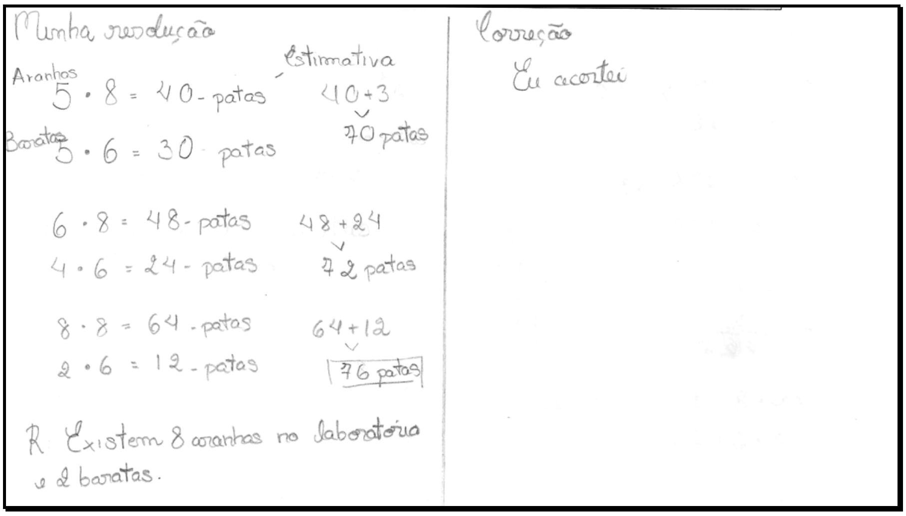
Com a finalização da resolução da primeira situação pelos alunos, foi pedido que, de forma organizada, indicassem oralmente e depois na lousa a estratégia utilizada. Para a resolução, em todas as turmas, alguns alunos recorreram ao uso de desenhos (fig. 1) e muitos resolveram por tentativas (fig. 2), encontrando a solução correta, como ilustram os protocolos a seguir:

Figura 1. Resolução do problema por meio de desenho



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 2. Resolução do problema por meio de tentativas



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos que nunca tiveram contato com o assunto sistemas de equações apresentaram resoluções como as expressas anteriormente. O protocolo da fig. 1 chamou nossa atenção pelo uso de desenhos na resolução, comum em séries do Ensino Fundamental I. Os alunos que adotaram essa estratégia diferenciaram as aranhas e as baratas pelo número de patas. Esse tipo de resolução pode ser resultado da falta de relações que o aluno fez ao utilizar o que é de seu conhecimento prévio (AUSUBEL, 1968), disponível para construir a solução.

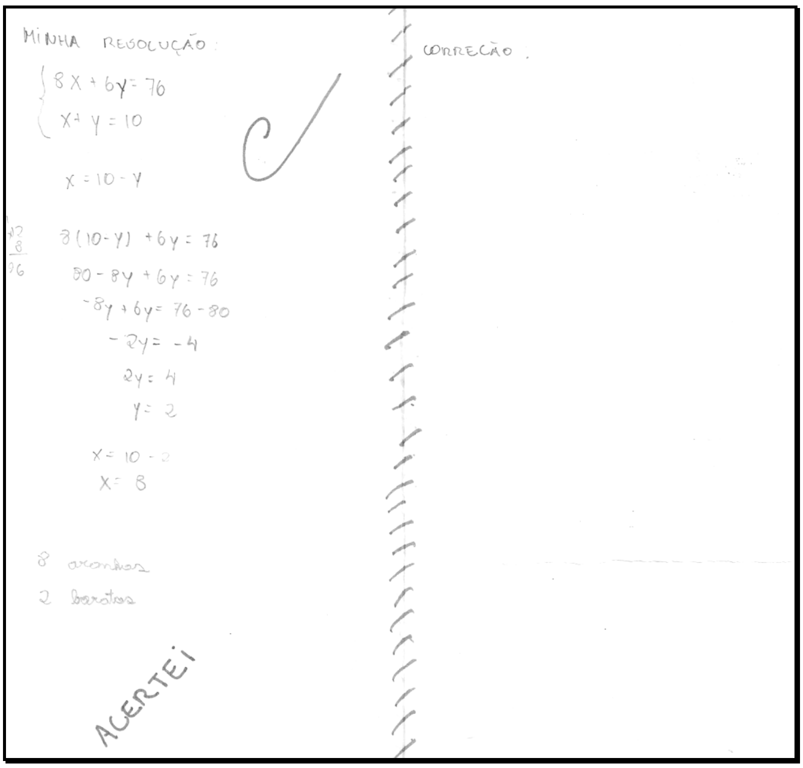
O uso de desenhos como estratégia na solução de problemas é um recurso de interpretação da situação. Alguns alunos iniciam suas soluções com desenhos para somente depois empregar números, letras e sinais. Isso ocorre principalmente em situações que exigem maior domínio do tema e dos conteúdos matemáticos envolvidos (CAVALCANTE, 2001, p. 128).

Como podemos observar no protocolo da fig. 2, entre aqueles que optaram por resolver a situação por tentativas, muitos recorreram ao uso da estimativa para facilitar os cálculos, partindo da metade de animais (5 aranhas e 5 baratas). Percebe-se, nesses casos, que o aluno estabeleceu um maior número de relações que aqueles que utilizaram o desenho como estratégia de resolução.

Para o uso dos sinais matemáticos por aqueles que resolveram por tentativa, Cavalcante (ibidem, p. 129) afirma que é possível verificar que, nessas situações, os alunos, além de perceberem as relações existentes entre as diferentes linguagens na resolução do problema proposto, conseguiram se apropriar da escrita matemática, atribuindo-lhe um significado.

Já os oriundos de outras instituições, que já conheciam técnicas de resolução de sistemas, expressaram suas respostas como a que se pode ver a seguir (fig. 3).

Figura 3. Resolução do problema por meio da conversão para a linguagem algébrica



Fonte: Dados da pesquisa

O que chamou atenção na resolução desses alunos é que todos utilizaram as incógnitas x e y para representar a situação proposta. Um desses alunos sentiu dificuldade em identificar o que cada uma delas representava no momento de responder ao problema e pediu ajuda à professora. Se observarmos a resolução desse aluno, podemos notar que, em nenhum momento, ele identificou o que cada uma das incógnitas representava. Esse caso indica que, provavelmente, para esses alunos, o importante na resolução do sistema é a obtenção dos valores de x e y, desvinculados da situação.

As letras x e y, utilizadas pelos alunos que já estudaram sistemas de equações em outras instituições de ensino, podem estar relacionadas ao uso dessas letras para indicar as incógnitas de situações que envolvem sistemas de equações em grande parte dos livros de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. O próprio livro utilizado pela instituição em que a sequência foi realizada utiliza somente as letras x e y no capítulo em que o assunto é desenvolvido.

Na abordagem de ensino por meio da resolução de problemas, não se deve indicar estratégias de resolução. Para Van de Walle (2009, p. 70), “quando uma tarefa é apresentada, o que é dito essencialmente aos alunos é ‘Use as ideias que você possui para resolver esse problema’.”. Dessa forma, diferentes hipóteses serão apresentadas pelos estudantes devido ao alcance de suas ferramentas mentais, conceitos e ideias, como ocorreu na situação 1.

Atividade 1 – Situação 2

2. Em outro laboratório, há também baratas e aranhas. Nesse segundo laboratório, foram contadas 50 cabeças e 344 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão nesse segundo laboratório?

Para a situação 2, desenvolvida na mesma aula, foi pedido aos alunos que novamente dividissem a página em duas partes e realizassem os seus registros somente na primeira. Em todas as turmas, os alunos iniciaram a leitura individual e a resolução da segunda situação, antes mesmo de a professora finalizar as instruções.

Durante a atividade, a professora observou que os alunos optaram pela mesma estratégia de resolução utilizada na situação 1. Os alunos logo perceberam que os novos valores dificultaram a resolução da situação pelas estratégias utilizadas, e muitos expressaram certo desconforto por não conseguirem resolver a situação indicada. Os que optaram pelo desenho foram os primeiros a “reclamar” da quantidade de “bichos” que eles teriam de desenhar, e alguns optaram por utilizar a estratégia de resolução por tentativa, apresentada na lousa durante a discussão do primeiro problema. Alguns dos que utilizaram a resolução por tentativa até chegaram à solução, mas reclamaram por ter de realizar tantos cálculos e questionaram se existiam outras formas mais simples e “rápidas” para chegar à solução.

Para os alunos que já tiveram contato com sistemas de equações do 1º grau, pedimos que aguardassem, já que corrigimos as atividades desses alunos individualmente. Foi pedido a um aluno de cada turma que tinha utilizado a estratégia de resolução por tentativas registrar seu procedimento na lousa, e novamente surgiu a discussão sobre a possível existência de outras estratégias para se obter a solução. Pedimos então aos alunos que nunca tinham tido contato com sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas sugerir possíveis estratégias para encontrar a solução desse novo problema. Em cada sala, em diferentes momentos, surgiu por parte de um aluno a sugestão de resolver utilizando equação.

Descrevemos a seguir o que ocorreu na turma A. Um dos alunos relacionou a situação dada à resolução de equações do 1º grau, mas acreditava que faltava algo. Ele afirmou que a situação dada apresentava dois valores desconhecidos, quantidade de aranhas e quantidade de baratas, e que, para essa situação, seriam necessárias duas incógnitas, diferente do que ocorre em uma equação do 1º grau, a qual apresentava somente uma incógnita.

Foi pedido a esse mesmo aluno que indicasse duas incógnitas para representar os dois valores desconhecidos. Não somente ele, mas outros alunos, em coro, sugeriram as letras a e b para representarem os dois valores desconhecidos. Ao questionarmos a sala sobre a escolha dessas duas letras, uma aluna explicou que seria mais fácil para identificar cada um dos valores desconhecidos no momento de apresentar a solução, pelo fato das letras escolhidas corresponderem às primeiras letras das palavras “aranha” e “barata”.

Junto com a professora-pesquisadora, os alunos representaram o segundo problema por meio de duas equações com duas incógnitas. Eles não encontraram dificuldade para representar a primeira equação com duas variáveis, por ela representar a soma da quantidade de aranhas e baratas. Como já era previsto, os alunos apresentaram alguma dificuldade para encontrar a segunda equação com duas variáveis, por envolver a relação entre a quantidade de animais e a quantidade de patas de cada um. Os alunos que tiveram maior facilidade para encontrar a segunda equação foram aqueles que resolveram a primeira situação por meio de tentativa e erro e notaram que, para encontrar o total de patas, era necessário multiplicar a quantidade de aranhas por 8 (devido ao fato da aranha possuir 8 patas) e multiplicar a quantidade de baratas por 6 (por as baratas possuírem 6 patas).

Finalizada essa primeira etapa, os alunos questionaram como era a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas. Informei que ainda não resolveríamos o sistema proposto, o que causou desapontamento em alguns alunos por desejarem saber a quantidade de aranhas e de baratas, mas que o resolveríamos em breve, exatamente na atividade 4 da sequência didática. Pedi novamente aos alunos que já tinham visto sistema de equações do 1º grau que não revelassem o processo de resolução aos outros alunos.

Para a segunda situação, em específico, foram necessários os conhecimentos prévios relacionados à conversão de linguagens — da natural para a algébrica — e equações do 1º grau. Os alunos integraram um conceito mais amplo, equações com duas incógnitas, ao mais simples, equações com uma incógnita, já presente em sua estrutura cognitiva e comum na modalidade de aprendizagem significativa por supraordenação (MOREIRA, 1997), que ocorre quando o aluno integra conceitos já aprendidos a um novo conceito mais amplo. Nessa situação, alguns alunos apresentaram algum tipo de dificuldade na conversão para a linguagem algébrica. Tal fato pode ser atribuído à não compreensão do que foi apresentado no enunciado da situação e à dificuldade em representá-la na linguagem algébrica.

Em relação à compreensão do enunciado, é preciso lembrar que os problemas matemáticos possuem um estilo próprio de escrita, com o uso de termos específicos da matemática, muitas vezes desconhecidos por não fazerem parte do cotidiano do aluno, e que é preciso realizar um trabalho específico de leitura nas aulas de Matemática. (SMOLE e DINIZ, 2001)

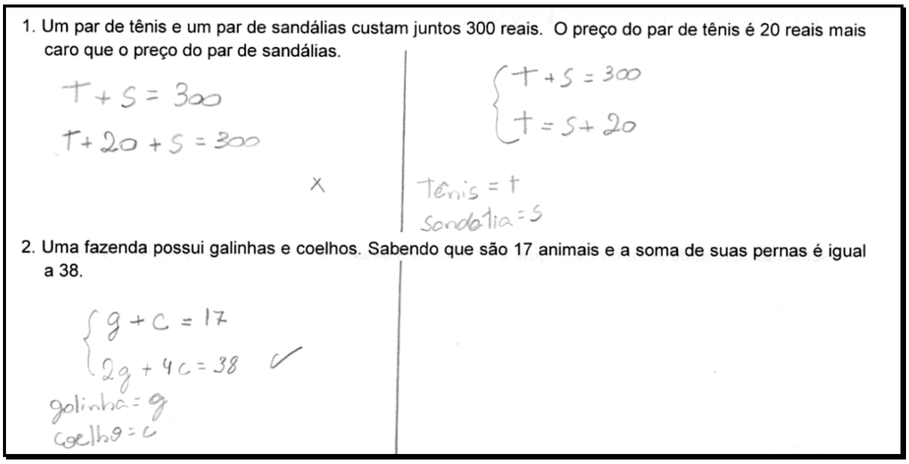
Sobre a dificuldade na escrita algébrica, SMOLE e DINIZ (ibidem, p 70) reforçam que “há uma especificidade, uma característica própria na escrita matemática que faz dela uma combinação de sinais, letras e palavras que se organizam segundo certas regras para expressar ideias”. Por ser a primeira situação em que os alunos realizaram a tradução para a linguagem algébrica e a conversão não ser algo simples de fazer, espera-se que, na segunda atividade, cujo foco é a conversão da linguagem natural para a algébrica, os alunos tenham a oportunidade de vivenciar mais situações similares à apresentada e sanar todas as dúvidas existentes.

Essa primeira atividade, que teve como objetivo introduzir o conteúdo de sistemas de equações, foi elaborada nos moldes da abordagem de resolução de problemas e desenvolvida levando em conta as três fases de lição, propostas por Van de Walle (2009). Nas duas situações, o ensino começou com as ideias que os alunos já possuíam anteriormente (VAN DE VALLE, 2009; AUSUBEL, 1980), que, para Van de Walle (ibidem, p. 58), apoia-se na “convicção de que todos eles podem criar ideias significativas sobre matemática”.

Atividade 2

Para a segunda atividade, foram propostas nove situações na linguagem natural, quatro na frente e cinco no verso, em que os alunos, individualmente, deveriam representar cada uma por meio de duas equações com duas incógnitas. Novamente foi sugerido que eles dividissem a folha em duas partes e apresentassem suas soluções na primeira parte e a correção na segunda. Nessa atividade, os alunos realizaram a leitura individual e alguns pediram ajuda principalmente para o significado de palavras relativas a operações matemáticas, tais como “soma” e “diferença”. Durante a resolução dos problemas, pudemos notar que os alunos que tiveram o primeiro contato com o assunto na atividade 1 utilizaram as letras iniciais das palavras que correspondiam às incógnitas para representar as situações (fig.4 e 5) e que os alunos que já tinham visto anteriormente continuaram a utilizar as letras x e y para representar as incógnitas (fig. 6).

Figura 4. Sistemas de equações do 1º grau do aluno que resolveu
o primeiro problema por meio de desenho



1. Um par de tênis e um par de sandálias custam juntos 300 reais. O preço do par de tênis é 20 reais mais caro que o preço do par de sandálias.

T + S = 300

T + 20 + S = 300

X

$\begin{cases} T + S = 300 \\ T = S + 20 \end{cases}$

Tênis = T
Sandália = S

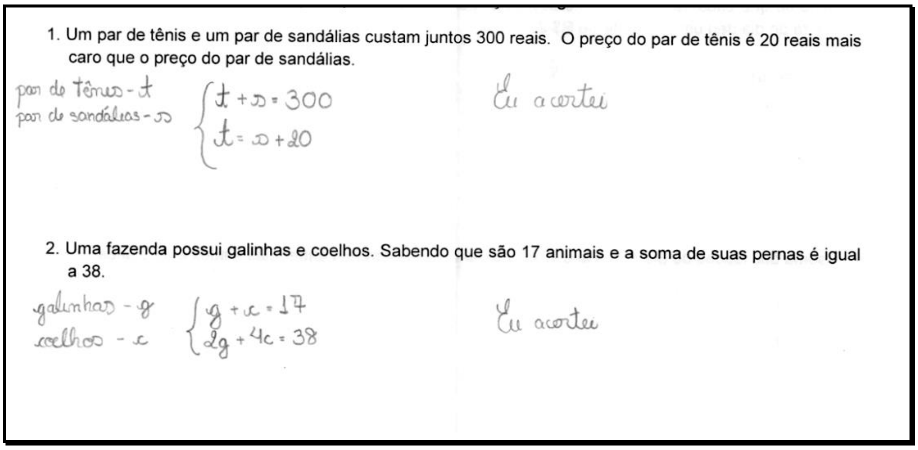
2. Uma fazenda possui galinhas e coelhos. Sabendo que são 17 animais e a soma de suas pernas é igual a 38.

$\begin{cases} g + c = 17 \\ 2g + 4c = 38 \end{cases}$

galinha = g
coelho = c

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 5. Sistemas de equações do 1º grau do aluno que resolveu
o primeiro problema por meio de tentativas.



1. Um par de tênis e um par de sandálias custam juntos 300 reais. O preço do par de tênis é 20 reais mais caro que o preço do par de sandálias.

par de tênis - t
par de sandálias - s

$\begin{cases} t + s = 300 \\ t = s + 20 \end{cases}$

Eu acertei

2. Uma fazenda possui galinhas e coelhos. Sabendo que são 17 animais e a soma de suas pernas é igual a 38.

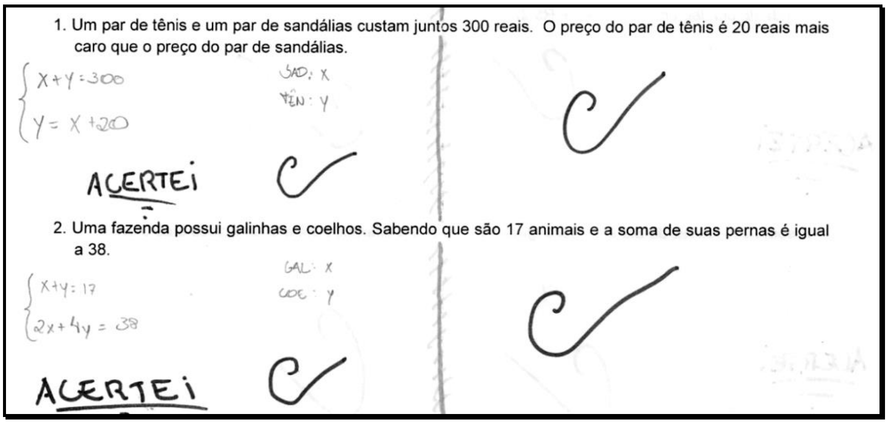
galinhas - g
coelhos - c

$\begin{cases} g + c = 17 \\ 2g + 4c = 38 \end{cases}$

Eu acertei

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6. Sistemas de equações do 1º grau do aluno que resolveu
o primeiro problema por meio da conversão para a linguagem algébrica.



1. Um par de tênis e um par de sandálias custam juntos 300 reais. O preço do par de tênis é 20 reais mais caro que o preço do par de sandálias.

$\begin{cases} X + Y = 300 \\ Y = X + 20 \end{cases}$

SAD: X
TÊN: Y

ACERTEI

2. Uma fazenda possui galinhas e coelhos. Sabendo que são 17 animais e a soma de suas pernas é igual a 38.

$\begin{cases} X + Y = 17 \\ 2x + 4y = 38 \end{cases}$

GAL: X
COE: Y

ACERTEI

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa atividade, em especial, houve um problema durante sua execução. Por motivos que não estavam relacionados à aula de Matemática, alguns alunos das turmas A e C foram convocados pela coordenação, durante a atividade. Ao retornarem a sala, retomaram a atividade, mas não conseguiram finalizar as questões antes do debate com a turma.

Durante a correção na lousa, alguns alunos novamente questionaram o motivo da escolha por aqueles que já conheciam o conteúdo e utilizaram as letras x e y para representar as incógnitas em todas as situações. Um deles disse que achava mais fácil, pois aprendera primeiro a resolver os sistemas de equações e que a maioria dos exercícios que ele tinha resolvido apresentavam as letras x e y para representar as incógnitas. Perante a resposta, um aluno complementou que acreditava que, ao usar sempre as mesmas letras, deveria dificultar na hora de finalizar o problema e apresentar a resposta final e que, ao utilizar as letras iniciais das palavras que correspondiam à incógnita, facilitaria esse processo.

É possível notar, na fala desse aluno, o quanto o ensino por meio da resolução de problemas torna o aprendizado de sistemas de equações mais significativo. Enquanto o aluno que aprendera a resolver os sistemas de equações para resolver problemas utiliza sempre as mesmas letras, quase de forma mecânica, para representar as incógnitas, percebe-se a preocupação do outro na escolha das letras de forma a facilitar o processo de resolução e encaminhamento da solução.

Outra observação a ser destacada é o fato de que os estudantes que resolveram a primeira situação da Atividade 1 por meio de desenho apresentaram maior quantidade de erros na Atividade 2 (fig. 4), demonstrando maior dificuldade em converter para a linguagem algébrica as situações indicadas. Já os alunos que resolveram por meio de tentativas ou por meio da conversão para a linguagem algébrica apresentaram menor quantidade de erros e, em muitos casos, acertaram todas as conversões entre linguagens.

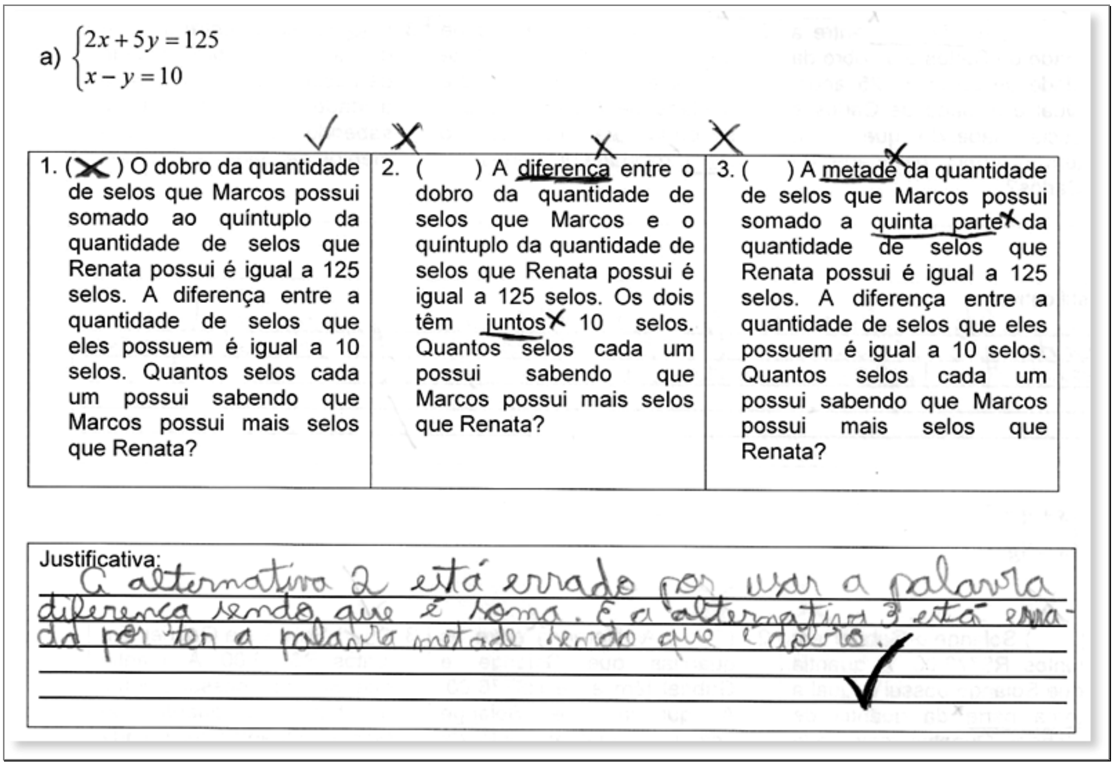
A partir dos erros dos estudantes, foi possível verificar, como era de se esperar, que as dificuldades dos alunos na conversão de linguagens são decorrentes de um primeiro contato com esse tipo de conversão envolvendo duas equações com duas incógnitas.

Atividade 3

Para a atividade 3, em que foram propostas quatro situações nas quais um sistema de equações foi apresentado na linguagem algébrica, os alunos, após leitura individual, selecionaram, sem a interferência da professora-pesquisadora, a situação que acreditavam corresponder ao sistema proposto na linguagem natural e justificaram sua escolha.

Durante a resolução, a professora observou que, para auxiliar na seleção da situação correta, a estratégia utilizada por muitos alunos foi a de destacar o que eles consideraram como sendo os termos não condizentes nas situações propostas com o sistema a ser associado. É possível notar nos protocolos a seguir que esses termos destacados foram utilizados na justificativa, como principal forma de indicar a situação correta. Esse fato pode ser resultado do tipo de ensino em que muitas vezes se solicita aos estudantes para assinalarem palavras indicativas da operação desejada, o que caracteriza a abordagem *do ensino para resolver problemas.*

Figura 7. Destaque dos termos incorretos e a utilização de tais termos na justificativa 1



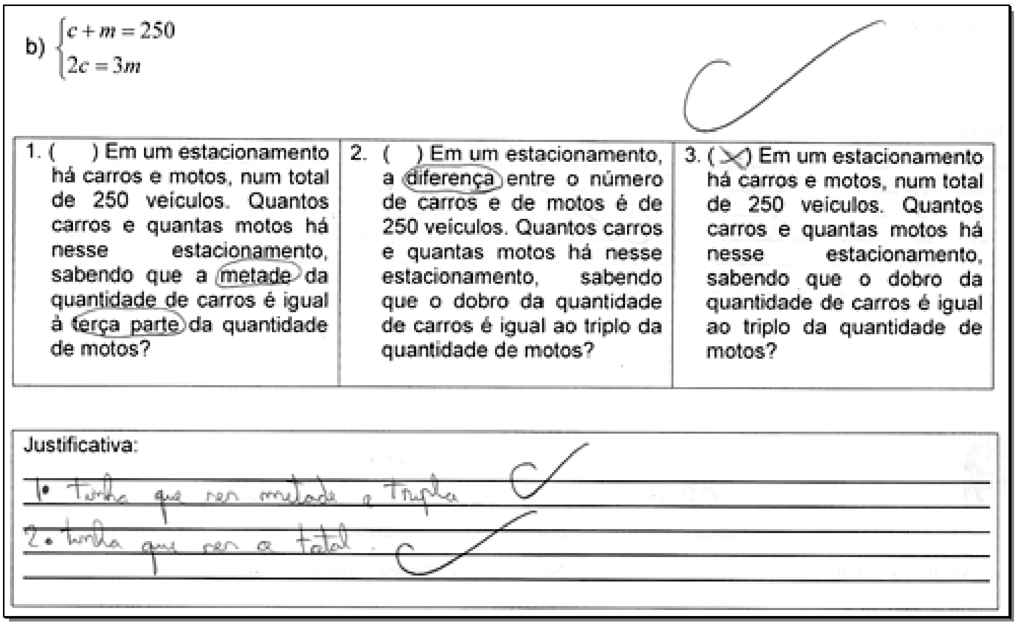
a) $\begin{cases} 2x + 5y = 125 \\ x - y = 10 \end{cases}$

1. (X) O dobro da quantidade de selos que Marcos possui somado ao quíntuplo da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. A diferença entre a quantidade de selos que eles possuem é igual a 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?	2. ( ) A diferença entre o dobro da quantidade de selos que Marcos e o quíntuplo da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. Os dois têm juntos 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?	3. ( ) A metade da quantidade de selos que Marcos possui somado a quinta parte da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. A diferença entre a quantidade de selos que eles possuem é igual a 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?

Justificativa: A alternativa 2 está errado por usar a palavra diferença sendo que é soma. E a alternativa 3 está errada por ter a palavra metade sendo que é dobro.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 8. Destaque dos termos incorretos e a utilização de tais termos na justificativa 2


b) $\begin{cases} c + m = 250 \\ 2c = 3m \end{cases}$

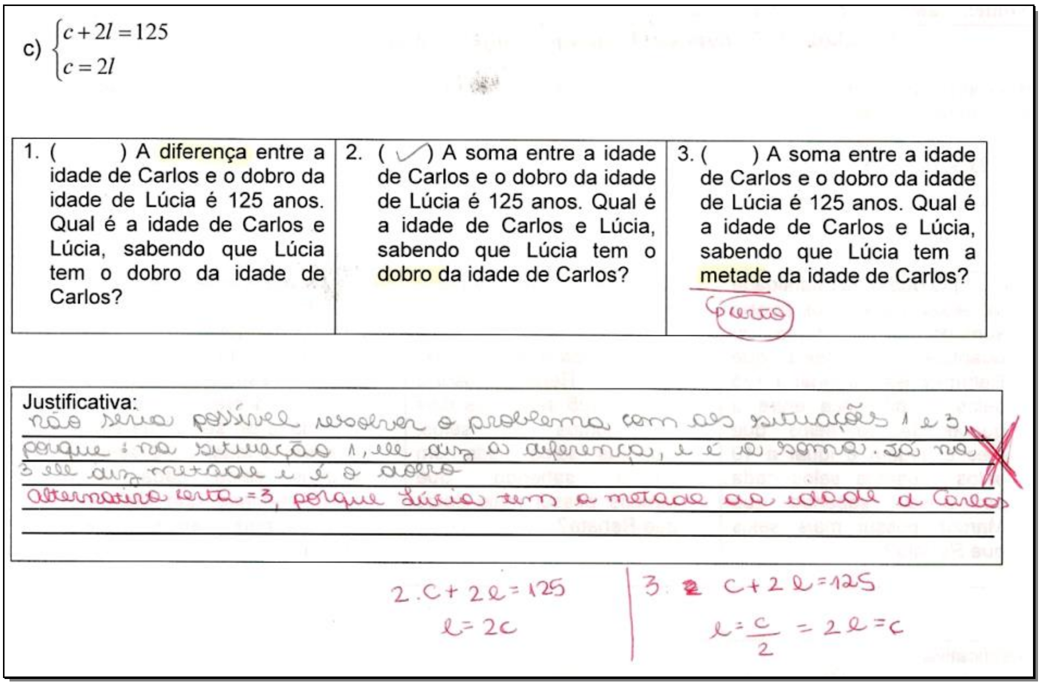
1. ( ) Em um estacionamento há carros e motos, num total de 250 veículos. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento, sabendo que a metade da quantidade de carros é igual à terça parte da quantidade de motos?	2. ( ) Em um estacionamento, a diferença entre o número de carros e de motos é de 250 veículos. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento, sabendo que o dobro da quantidade de carros é igual ao triplo da quantidade de motos?	3. (X) Em um estacionamento há carros e motos, num total de 250 veículos. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento, sabendo que o dobro da quantidade de carros é igual ao triplo da quantidade de motos?

Justificativa:
1• Tinha que ser metade e tripla
2• tinha que ser o total

Fonte: Dados da pesquisa

Mas nem sempre essa estratégia permitiu que os alunos identificassem a solução correta. No protocolo a seguir, percebe-se que o aluno não notou a troca da ordem das incógnitas e optou por uma das situações que não representava o sistema de equações proposto na linguagem algébrica.

Figura 9. Destaque dos termos incorretos e a utilização de tais termos na justificativa 3


c) $\begin{cases} c + 2l = 125 \\ c = 2l \end{cases}$

1. ( ) A diferença entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e Lúcia, sabendo que Lúcia tem o dobro da idade de Carlos?	2. (✓) A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e Lúcia, sabendo que Lúcia tem o dobro da idade de Carlos?	3. ( ) A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e Lúcia, sabendo que Lúcia tem a metade da idade de Carlos? Certo

Justificativa:
não seria possível resolver o problema com as situações 1 e 3, porque na situação 1, ele diz a diferença, e é a soma. Já na 3 ele diz metade e é o dobro
alternativa certa = 3, porque Lúcia tem a metade da idade de Carlos

2. $C + 2l = 125$
$l = 2c$

3. $C + 2l = 125$
$l = \frac{c}{2} = 2l = c$

Fonte: Dados da pesquisa

A estratégia ilustrada nos protocolos anteriores foi a mesma utilizada pelos demais sujeitos. A partir disso, foi possível verificar que tal estratégia se mostrou conveniente nas questões a, b e d, porém na c não se mostrou eficaz. Prova disso é que, dos 16 sujeitos, 10 deles erraram optando pela situação 2, em que aparecia o termo ‘soma’ e ‘dobro’.

Nessa situação, em especial, não podemos caracterizar o erro como uma limitação dos alunos na conversão da linguagem algébrica para a linguagem natural, considerando como insuficiência de conhecimentos. A escrita do problema c difere dos demais, na apresentação dos dados correspondentes à segunda equação, e isso pode ter influenciado na escolha do texto que representa o sistema de equações.

Ao apresentarmos essa situação, a intenção foi exatamente a de não explicitar ‘palavras’ ou ‘termos’ diretamente relacionados a alguma operação matemática: ao invés dos alunos expressarem “a idade de Lucia é a metade da idade de Carlos”, a expressão matemática apresentada por eles corresponderia a “a idade de Carlos é o dobro da idade de Lucia”. A utilização pelo aluno da opção que ‘sugere’ uma inversão nas incógnitas resulta em duas equações que não condizem com o que é proposto no problema.

Embora grande parte dos alunos tenha optado por essa alternativa incorreta, durante a discussão ficou explícito que o ensino por meio da resolução de problemas pode contribuir para que os alunos dessem mais significado ao aprendizado a partir do momento que eles mobilizaram conhecimentos prévios relacionados à conversão de linguagens e a equações do 1º grau, ampliando esses dois conhecimentos para um conteúdo que os contém, a saber, sistema de equações do 1º grau com duas variáveis.

Pretendíamos verificar, a partir da análise das atividades da parte 2 (Atividades 4 a 7), cujo foco foi a apresentação de dois métodos de resolução – da adição e da substituição –, se os alunos continuariam mobilizando seus conhecimentos prévios para a resolução das situações propostas e se, ao chegarem à atividade avaliativa (Atividade 8), eles apresentariam resultados significativos.

Atividade 4

Para a atividade 4, em que foram propostas duas situações na linguagem natural, pretendíamos verificar se o aluno era capaz de representar, por meio de um sistema de equações, a situação dada e obter a solução por tratamento algébrico.

1. A soma das idades de duas pessoas é 25 anos, e a diferença entre elas é de 13 anos. Quais as idades dessas pessoas?

Essa primeira atividade foi desenvolvida pela classe toda juntamente com a professora-pesquisadora e tinha por objetivo iniciar estratégias para a resolução do sistema. Para tanto, era necessário que os alunos convertessem o problema da linguagem natural para a matemática, mobilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Assim, iniciamos a atividade com um aluno realizando a leitura do problema proposto. A partir da leitura, a professora realizou alguns questionamentos, “preparando os alunos” para a resolução: O que você está procurando nesse problema? Que incógnitas você utilizará nessa situação? Quais equações podem ser escritas a partir dessa situação? O que difere a primeira da segunda equação? A partir do valor de uma das incógnitas, o que podemos fazer para obter o valor da segunda incógnita?

Como o problema seria resolvido por toda a turma, a professora optou por iniciar a resolução a partir de um questionamento, embasando-se em Van de Walle (2009), para quem é necessário verificar se os alunos compreenderam o enunciado do problema. É preciso lembrar que a perspectiva dos alunos é diferente da do professor, e é útil verificar se eles conseguem explicar o que o problema está “perguntando”.

Durante esses questionamentos, a professora foi registrando na lousa as respostas dos alunos, que originou o sistema procurado, registrado pelos alunos na folha recebida. Para o próximo passo, a saber, resolver o sistema, os alunos foram instruídos a dividir a folha em duas partes e, na primeira metade, individualmente, apresentar estratégias para a solução do sistema utilizando conhecimentos já adquiridos. Para Van de Walle (2009), pedir aos alunos para sugerir uma resposta estimada e explicarem o raciocínio utilizado para obter o valor sugerido pode ativar o conhecimento prévio que será útil para a resolução da situação.

A professora-pesquisadora, sem manifestar qualquer tipo de comentário, acompanhou a resolução por parte dos alunos. Dentre os que tiveram seus protocolos analisados, nenhum utilizou estratégias relacionadas à resolução de equações para obter a solução. A maioria dos protocolos analisados apresentou como estratégia de resolução algumas tentativas, e outros não resolveram o sistema. A partir dessa constatação, a professora-pesquisadora percebeu que seria necessário intervir.

A primeira pergunta feita aos alunos foi relacionada ao nome do método de resolução, que figura na própria folha de questão. A professora-pesquisadora perguntou se alguém saberia explicar o porquê do nome “método da adição”. Em todas as classes, pelo menos um aluno respondeu acreditar que, de alguma forma, era preciso adicionar algo para encontrar a solução. A partir dessa informação, foi pedido aos alunos que reescrevessem o sistema já obtido anteriormente na segunda coluna e que tentassem novamente resolver o sistema proposto.

Após muitos alunos iniciarem a resolução somando os termos semelhantes da primeira com os da segunda equação, a professora iniciou uma discussão com todo o grupo sobre as estratégias utilizadas, e os alunos sinalizaram que esse processo permitiu encontrar rapidamente o valor correspondente à idade da pessoa mais velha. Em cada classe, foi solicitado que um aluno escrevesse na lousa os cálculos realizados até aquele momento. Após tentativa, conjecturas, cálculos mentais e algébricos, sem a ajuda da professora, os próprios alunos obtiveram o valor da segunda incógnita.

Finalizada a discussão e a formalização dos resultados, a professora propôs aos estudantes a resolução da segunda situação:

2. Num laboratório, há baratas e aranhas. Foram contadas 10 cabeças e 76 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

Antes de iniciar a conversão para a linguagem algébrica, muitos alunos indicaram que este era o mesmo problema que fora proposto na atividade 1 e não apresentaram dificuldade na conversão. A professora pediu a um aluno de cada classe que representasse na lousa o sistema de equações obtido e, em seguida, foi solicitado a todos os alunos, individualmente, que resolverem essa nova situação pelo método utilizado anteriormente.

De imediato, os alunos perceberam que, ao somar as equações, nenhuma das incógnitas “desapareceria”. A partir dessa constatação, a primeira sugestão apresentada pelos alunos nas quatro classes foi a de subtrair as equações para verificar se uma das incógnitas desapareceria. Ao observarem que a nova estratégia não funcionou, a professora pediu aos alunos que observassem novamente a resolução da primeira situação e explicassem o porquê da estratégia utilizada funcionar no primeiro problema e não funcionar no segundo.

Os alunos indicaram que a estratégia funcionou na primeira situação, pois a segunda incógnita, nas duas equações, tinha coeficientes opostos e que isso não ocorria na segunda situação. Foi pedido para que eles voltassem para o segundo problema e analisassem o que precisaria ser feito para que o mesmo ocorresse nessa nova situação.

Em três das quatro classes, pelo menos um aluno sugeriu que se multiplicassem os dois “lados” da primeira equação por – 6 ou por – 8. Ao questionar esses alunos sobre o procedimento indicado, eles afirmaram que lembraram que, por ocasião da resolução de uma equação, o procedimento utilizado era multiplicar a equação por – 1 para “trocar” o sinal do coeficiente de x e facilitar os cálculos.

A professora pediu para que cada aluno, sem se comunicar com os outros estudantes, escolhesse uma das duas estratégias e resolvesse a segunda situação. Após a resolução, a professora pediu a dois estudantes, que tinham utilizado estratégias diferentes, que apresentassem suas resoluções na lousa, e os outros alunos perceberam que, indiferente da estratégia utilizada, encontrariam a solução correta.

Na classe em que os alunos não visualizaram uma estratégia para a resolução, mesmo após diversas tentativas, como havia sido previsto, a professora propôs a resolução de algumas equações previamente escolhidas. Após a resolução de diversas equações, um dos alunos notou que, se multiplicássemos os dois “lados” de uma equação pelo mesmo número, isso não alteraria o resultado e perguntou se poderia utilizar a mesma estratégia no sistema de equações. Após a confirmação, os alunos conseguiram resolver o segundo sistema.

Com a resolução finalizada, a professora pediu aos alunos para que analisassem as diferentes estratégias utilizadas até o momento — desenho, tentativas e método da adição — e foi consenso que a melhor, para as situações dadas, seria o método da adição, talvez por ele representar um procedimento prático e seguro.

Dessa forma, a professora realizou a formalização da resolução de sistemas de equações pelo método da adição, sintetizando de maneira formal os objetivos pretendidos com o método utilizado e apresentando a notação adequada relativa ao conteúdo abordado.

Atividade 5

Na atividade 5, em que foram propostos oito sistemas de equações do 1º grau e cinco situações escritas em linguagem natural, tivemos como proposta a retomada da conversão para a linguagem algébrica das situações propostas na tarefa 2, mas como objetivo principal o de investigar se os alunos conseguiriam resolver os sistemas de equações algebricamente, utilizando o método da adição, nas duas tarefas.

Em um primeiro momento, os alunos foram orientados a resolver individualmente cada um dos sistemas propostos em seus cadernos.

Atividade 5: Método da adição

1. Resolva os sistemas de equações a seguir:

a) $\begin{cases} 2x+5y=13 \\ -2x+7y=23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y-4x=5 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 13=3a+b \\ -5=b-3a \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x+5y=-21 \\ 7x-2y=17 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9m+6n=-12 \\ 4m-5n=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+y=3 \\ \dfrac{-x}{4}-2y=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} a+2b=0 \\ \dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}=1 \end{cases}$

Os alunos não apresentaram muita dificuldade em resolver os itens a, b e c, pois, para a resolução deles, só era preciso adicionar as duas equações sem nenhum tratamento. Mesmo no sistema proposto em c, no qual as incógnitas estavam dispostas após a igualdade, os alunos resolveram com facilidade. Isso ocorreu, pois eles já estavam acostumados a resolver equações, independente do membro em que a incógnita estava indicada. A partir do item d, alguns alunos solicitaram ajuda ao professor durante a resolução. A seguir serão descritas as principais dúvidas e questionamentos apresentados pelos alunos e como estes foram trabalhados pela professora.

Para a resolução do sistema de equações d, alguns alunos questionaram se poderiam multiplicar cada uma das equações por valores distintos, pois não existia um número inteiro que permitisse “transformar” o coeficiente – 2 em – 5. Foi afirmado que essa era uma possibilidade, e os alunos utilizaram essa estratégia para resolver os sistemas d e e.

Muitos alunos perguntaram se existiria algum impedimento de se multiplicar os dois membros da segunda equação por 2,5. Quando se questionou o porquê da dúvida, eles responderam que, na atividade anterior, só utilizaram números inteiros para obter os coeficientes opostos e, na situação proposta na letra d, isso não seria possível a partir de uma única multiplicação. A professora afirmou que eles poderiam multiplicar por qualquer número real diferente de zero e que, nessa situação, o valor 2,5 seria apropriado para obter a solução. Na lousa, a professora foi registrando as duas maneiras de resolução apresentadas pelos alunos.

Na resolução do sistema do item f, poucos alunos apresentaram dificuldade e muitos dos que requisitaram a ajuda da professora só desejavam confirmar se o valor escolhido para multiplicar os “dois lados” da equação era adequado para a situação proposta.

Já nos itens g e h, muitos alunos apresentaram dúvidas para iniciar os procedimentos. Ficou constatado que a maioria dessas dificuldades residia no fato de os sistemas apresentarem coeficientes fracionários; apesar disso, alguns estudantes utilizaram o número 2 no item g, encontrando um obstáculo para somar números fracionários.

Diante disso, a professora optou por fazer uma intervenção, escrevendo o sistema do item g na lousa e questionando sobre as diferentes estratégias que eles utilizaram para tentar resolver o sistema indicado. Em cada uma das turmas, pelo menos um aluno perguntou se eles poderiam recorrer à mesma estratégia utilizada para resolver equações do 1º grau, ou seja, se eles poderiam utilizar frações equivalentes para obter o mesmo denominador em todos os termos e, assim, eliminálos. Isso indica que esses alunos recorreram a conhecimentos prévios, o que é um dos requisitos para a aprendizagem significativa. Após essa discussão, os alunos resolveram os dois últimos sistemas e, junto com a professora, socializaram as estratégias utilizadas.

Um fato chamou a atenção da professora durante a resolução da tarefa 1: muitos alunos questionaram a importância da resolução dos oitos sistemas, se eles não estavam relacionados a nenhuma situação contextualizada, fato que já referenciamos no capítulo anterior. No momento foi afirmado aos alunos que a primeira tarefa tinha como objetivo reforçar o método da adição, algo comum no ensino sempre que um novo conteúdo era desenvolvido.

Para Van de Walle (2009), existe espaço para lista de exercícios e prática na abordagem de resolução de problemas no ensino de Matemática, com o intuito de melhorar a habilidade de determinado algoritmo e não para aprender novas relações sobre os fatos. Para o pesquisador,

> [...] o erro trágico é acreditar que os exercícios são um método de desenvolver ideias. Exercícios são apropriados apenas quando
> (a) os conceitos desejados foram significativamente desenvolvidos,
> (b) foram desenvolvidos procedimentos flexíveis e úteis e
> (c) são necessárias velocidade e precisão. (ibidem, 2009, p. 77)

Mesmo com essa resposta, alguns alunos mostraram certa resistência em aceitar o que fora apresentado como justificativa. Eles afirmaram que resolver sistemas de equações sem estar relacionado a uma situação contextualizada não tinha sentido.

Percebe-se, nessa situação, que, para os alunos, somente o sistema de equações obtido a partir das situações era significativo e que, ao apresentar o sistema de equações fora de uma contextualização, apenas para o desenvolvimento dos procedimentos de resolução, não tinha sentido. Isso pode ter ocorrido, pois, no senso comum, os conteúdos de Matemática só têm significado e são “importantes” quando têm aplicação em situações do dia-a-dia, o que é contraposto pela ideia de Onuchic (1999), ao afirmar que um problema é aquilo que o aluno não consegue, mas deseja resolver. Os alunos, ao se depararem com o sistema d, estavam diante de um problema que não sabiam, mas que desejavam resolver.

Já na segunda tarefa, em que cinco diferentes situações foram propostas, os alunos apresentaram dificuldade somente na conversão para a linguagem algébrica e resolução do item e.

Atividade 5: Método da adição
2. Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva por meio do método da adição:
a) A soma de dois números é –5 e a diferença entre eles é 1. Quais são esses números?
b) Em uma sala de aula estudam 42 alunos. Sabendo que nessa sala há mais meninas do que meninos e que a diferença entre o número de meninas e meninos é 4, calcule a quantidade de meninas e de meninos que há nessa sala de aula.
c) Um estacionamento cobra R$ 2,00 por moto e R$ 3,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R$ 277,00 para um total de 100 veículos. Calcule a quantidade de motos que usaram o estacionamento nesse dia.
d) Num quintal, há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, ao todo, 112 pés. Calcule a quantidade de porcos que há nesse quintal.
e) Em uma sorveteria, foram fabricados picolés de leite e picolés de frutas, num total de 180. Ao fim de um dia foram vendidos metade dos picolés de leite e um terço dos picolés de frutas, restando 100 na sorveteria. Quantos picolés de leite foram fabricados?

Tanto na situação **a** quanto na situação **b**, muitos alunos encontraram a solução mentalmente, antes mesmo de realizar a conversão para a linguagem algébrica. Mesmo assim, a professora pediu aos alunos que representassem as duas situações por meio de sistemas de equações e que utilizassem o método da adição para verificar se os valores obtidos estavam corretos.

Nas situações **c** e **d**, muitos alunos relacionaram os problemas propostos à situação apresentada na primeira atividade, que envolvia o número de cabeças e patas de aranhas e baratas. Percebe-se que, nesse momento, os alunos relacionaram o que já tinham de conhecimento às novas situações propostas.

No entanto, na situação **e**, muitos alunos erraram na representação da segunda equação. Igualmente ao que aconteceu na atividade 3, em que muitos alunos destacaram as “palavras-chave” e apresentaram a conversão algébrica de forma incorreta, eles destacaram somente o número 100 no problema **e** e não perceberam que 100 correspondia ao número de picolés que restaram na sorveteria, enquanto o problema apresentava a quantidade vendida de cada tipo. Os alunos só notaram que algo está errado, quando, ao resolver o sistema de equações obtido, encontraram como solução 60 picolés de leite, o que era impossível.

A partir dessa constatação, esses estudantes detectaram a origem desse engano e chegaram à solução correta. Apenas uma pequena parcela não conseguiu identificar o erro, mesmo após a professora sugerir a releitura do enunciado.

Após a finalização da Atividade 5, a professora propôs aos alunos a resolução de alguns exercícios do livro didático adotado pela escola. Esses exercícios foram resolvidos em casa, e suas resoluções socializadas em sala de aula.

Atividade 6

Para a atividade 6, com que se pretendia iniciar a resolução de sistemas pelo método da substituição, foi proposta uma única situação na linguagem natural, em que o aluno deveria representar, por meio de um sistema de equações, a situação dada e obter a solução por algum tratamento algébrico.

Carla e Bruna conversam despreocupadamente sobre o emprego novo delas quando chega Ana, uma senhora muito simpática e vizinha delas. Ana, que já é aposentada, percebe que as duas amigas ainda estão longe da aposentadoria. Então, ela pergunta:

- Que idade vocês têm?

Carla, a mais velha, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim: Ana - Como? Você está brincando comigo. Essa aí não passa de uma garota, e você certamente não chegou aos 50.

Carla - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Bruna, temos juntas 72 anos.

Ana - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que idades vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada uma.

Carla - É claro que não. Você tem dois dados desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.

Ana - Diga.

Carla - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Bruna. Agora, Ana, você tem dois dados desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.

Ajude a Ana a descobrir as idades de Carla e de Bruna!!!

Situação problema retirada e adaptada do site Mundo Vestibular (disponível em 15.fev.2013)

Nessa atividade, foi sugerido aos alunos que apresentassem sua resolução na frente da folha. O verso da folha seria utilizado durante a plenária, para apontamentos que considerassem importantes, e no momento da formalização, para possíveis correções de suas resoluções.

A leitura foi realizada de forma individual, e, como ocorreu nas atividades anteriores, os alunos não apresentaram dificuldade na conversão para a linguagem algébrica da situação dada. Muitos iniciaram o processo de leitura e conversão antes mesmo das orientações sobre o uso da folha. Durante essa primeira etapa, a professora apenas observou e acompanhou os procedimentos realizados pelos alunos. Sendo o texto dessa atividade mais longo que o das situações anteriores, muitos foram os alunos que assinalaram as frases que apresentavam as informações necessárias, para facilitar a conversão, como pode se observar nos protocolos a seguir.

Figura 10. Destaque das orações

Carla e Bruna conversam despreocupadamente sobre o emprego novo delas quando chega Ana, uma senhora muito simpática e vizinha delas. Ana, que já é aposentada, percebe que as duas amigas ainda estão longe da aposentadoria. Então, ela pergunta:

- Que idade vocês têm?
Carla, a mais velha, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:
- Nós temos 72 anos.
A conversa, então, segue assim:
Ana- Como? Você está brincando comigo. Essa aí não passa de uma garota e você certamente não chegou aos 50.
Carla - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Bruna, temos juntas 72 anos.
Ana - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que idades vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada uma.
Carla - É claro que não. Você tem dois dados desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.
Ana - Diga.
Carla - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Bruna. Agora, Ana, você tem dois dados desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 11. Destaque das orações e do personagem.

Carla e Bruna conversam despreocupadamente sobre o emprego novo delas quando chega Ana, uma senhora muito simpática e vizinha delas. Ana, que já é aposentada, percebe que as duas amigas ainda estão longe da aposentadoria. Então, ela pergunta:

- Que idade vocês têm?
Carla, a mais velha, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:
- Nós temos 72 anos.
A conversa, então, segue assim:
Ana- Como? Você está brincando comigo. Essa aí não passa de uma garota e você certamente não chegou aos 50.
Carla
Carla - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Bruna, temos juntas 72 anos.
Ana - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que idades vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada uma.
Carla - É claro que não. Você tem dois dados desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.
Ana - Diga.
Carla
Carla - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Bruna. Agora, Ana, você tem dois dados desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.

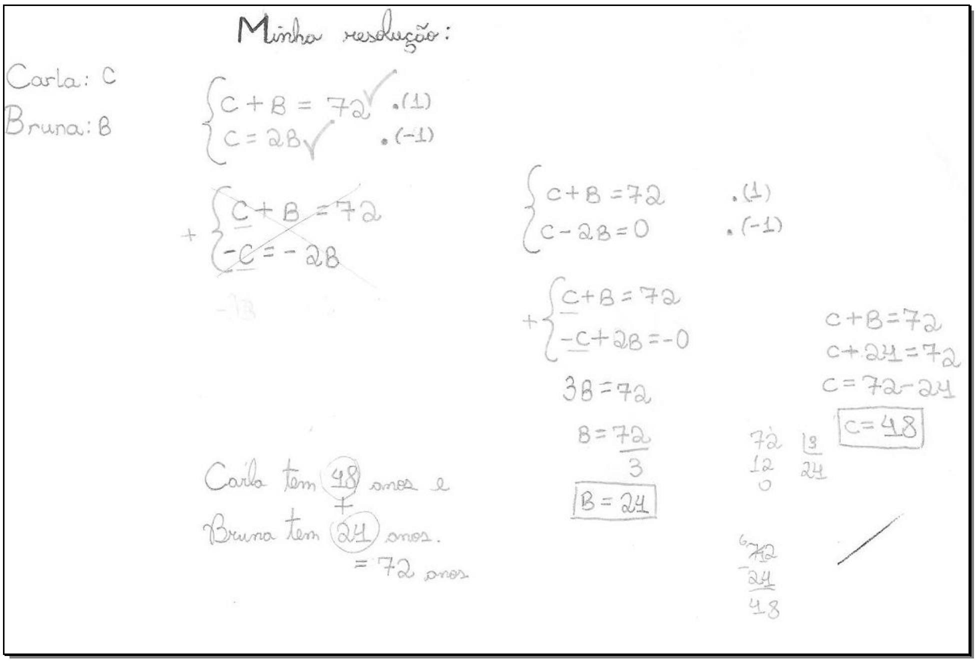
Ajude a Ana a descobrir as idades de Carla e de Bruna!!!

Fonte: Dados da pesquisa

A escolha desses protocolos se deve ao fato de os dois estudantes terem utilizado a mesma estratégia, de destacar as orações que acharam mais relevantes do texto para a resolução, de formas distintas: enquanto o primeiro só destacou as orações, o segundo optou por indicar apenas o nome de “Carla”, ausente nas frases destacadas, por sua idade corresponder a uma das incógnitas.

Após finalizarem o processo de conversão, praticamente todos os alunos optaram por resolver o sistema de equações pelo método da adição, como podemos verificar nos protocolos a seguir.

Figura 12. Resolução pelo método da adição (com manipulação da segunda equação)



Fonte: Dados da pesquisa

Embora em uma das equações uma das incógnitas estivesse “isolada”, esse aluno, assim como diversos outros, optaram por preparar essa equação de modo que permitisse o uso do método da adição, e a grande maioria encontrou a solução correta.

Percebe-se que o estudante, na primeira tentativa, se deparou com uma situação talvez desconhecida, em que a incógnita b não figurava na segunda equação explicitamente. Isto talvez indique que ele não realizou a supraordenação (MOREIRA, 1997, p. 21), quando não percebeu que o termo correspondente na segunda equação seria Ob.

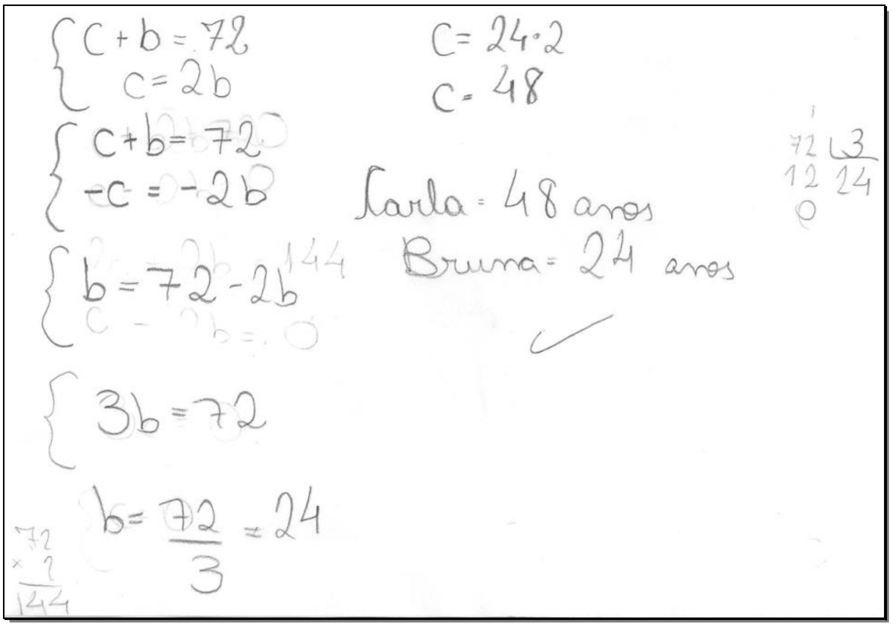
Já na segunda tentativa, desse mesmo protocolo, percebeu-se que o aluno, por meio da manipulação da segunda equação, conseguiu representar a situação por meio de um sistema similar aos que ele já tinha resolvido pelo método anterior (adição). Dessa forma, o aluno finalizou a resolução da situação e obteve as idades de Carla e Bruna.

Podemos observar, nesse caso, que o aluno utilizou seus conhecimentos prévios e realizou a supraordenação de procedimentos, quando manipulou os elementos da segunda equação resgatando seus conhecimentos de equação do 1º grau com uma incógnita e, durante a resolução de sistemas de equações, quando obteve a solução por meio do método da adição.

Outro elemento da resolução que merece destaque é a resposta. O estudante, após resolver a situação e apresentar a resposta, provavelmente realizou novamente a leitura do problema proposto e, para validar a resolução, adicionou as idades de Carla e Bruna para averiguar se a soma das mesma resultava em 72. Esse tipo de procedimento recebe grande destaque no ensino de resolução de problemas e é de grande importância em todos os tipos de resolução.

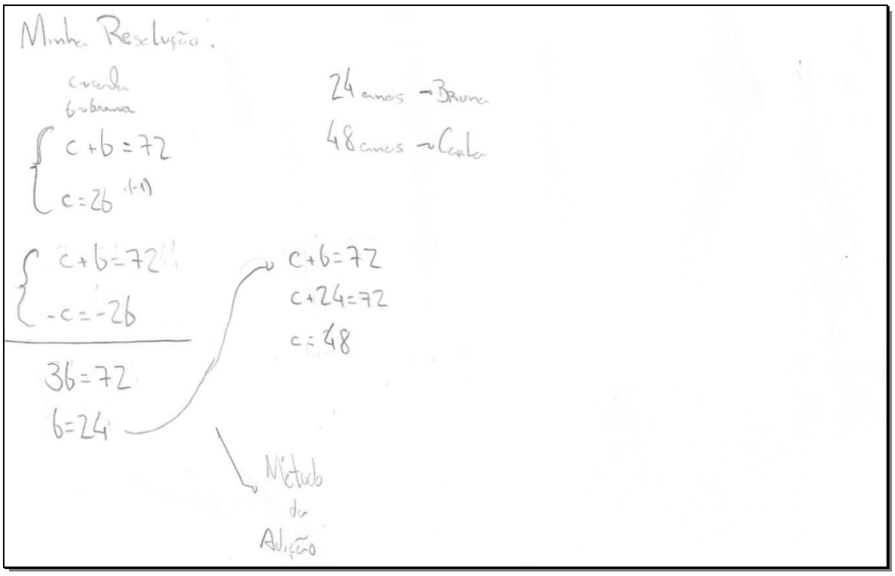
Dois alunos da mesma turma optaram por não realizar nenhum tipo de manipulação e chegaram à solução correta, utilizando diferentes estratégias de resolução, como se pode ver nos protocolos a seguir.

Figura 13. Resolução pelo método da adição (sem manipulação da segunda equação)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14. Resolução pelo método da adição (sem manipulação da segunda equação)



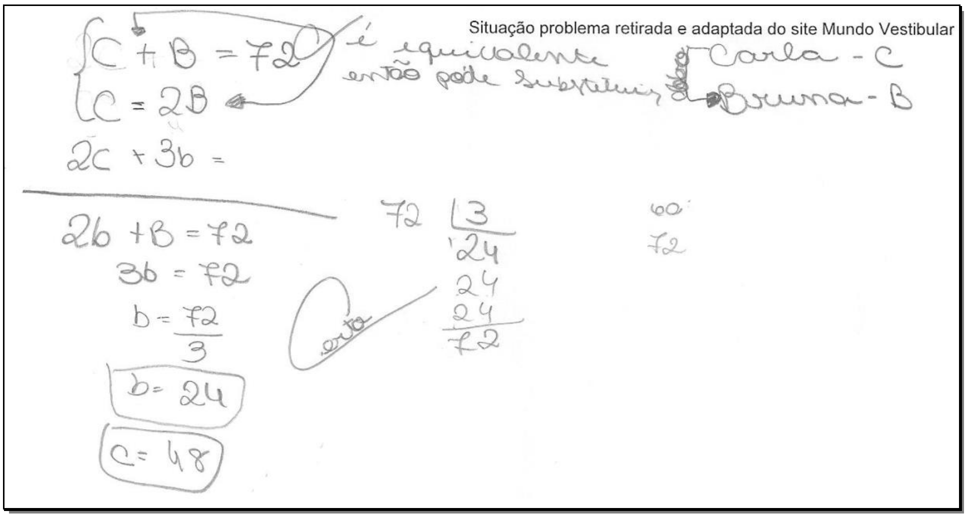
Fonte: Dados da pesquisa

O primeiro protocolo indica que o seu autor utilizou a mesma estratégia que o estudante do último protocolo destacado, sendo que, para este, a ausência da incógnita b no primeiro membro da segunda equação não representou um obstáculo para a continuação do procedimento.

Já o segundo protocolo aponta para o fato de que o aluno, utilizando a mesma estratégia, provavelmente tenha realizado mentalmente a mudança do termo contendo a incógnita '— 2b' para o primeiro termo e apresentou diretamente a soma das duas equações, expressando ainda que a estratégia utilizada foi o método da adição.

Dos 16 protocolos analisados, apenas dois recorreram ao método da substituição como estratégia para obter a solução da situação proposta. Um deles, durante a resolução, apresentou a seguinte observação: "é equivalente, então pode substituir", o que pode sugerir que ele tenha relacionado a substituição da expressão "2B" com a substituição de uma incógnita por seu valor correspondente, procedimento já familiar, presente na segunda etapa de resolução pelo método da adição, quando substituíam o valor encontrado para uma das variáveis, em uma das equações, para determinar o valor da segunda variável. Ilustramos a seguir com um dos protocolos desses alunos.

Figura 15. Resolução pelo método da substituição



Fonte: Dados da pesquisa

A partir desses primeiros resultados, inferimos que, em todos os protocolos analisados, os alunos recorreram aos conhecimentos prévios, tanto para realizar a conversão para a linguagem algébrica quanto para resolver o sistema de equações. Além disso, o último protocolo mostra que o aluno conseguiu integrar a ideia de cálculo de valor numérico, presente no método da adição, a algo mais amplo, substituição de uma incógnita por uma expressão algébrica, o que caracteriza uma aprendizagem supraordenada, na qual o novo conceito ou proposição apresenta uma relação de superordenação à estrutura cognitiva do sujeito.

Após os alunos finalizarem a conversão e a resolução por diferentes estratégias, a professora pediu em todas as turmas que um aluno fosse à lousa e apresentasse o sistema que fora obtido a partir da situação dada. Nesse momento, com o sistema de equações explicitado, a professora questionou se existia algo que diferenciasse o sistema de equações obtido na situação dada dos outros resolvidos anteriormente. Em todas as turmas, pelo menos um aluno indicou que, no sistema obtido, uma das incógnitas da segunda equação estava após o sinal de igual, o que dificultava a resolução pelo método da adição. A partir dessa observação, iniciou-se uma discussão sobre os processos de resolução utilizados.

Em todas as turmas, muitos alunos indicaram que, mesmo não sendo simples resolver pelo método da adição, eles perceberam que bastava “trocar o 2B de lado” para obter a solução pelo método já estudado. A partir dessa primeira constatação, um aluno de cada turma foi à lousa e resolveu o sistema pela estratégia indicada.

Somente em duas turmas, alguns alunos questionaram o nome da atividade “Método da Substituição”. Naquela em que o aluno resolveu pelo método da substituição (protocolo da figura 15), o mesmo pediu para mostrar à turma a estratégia utilizada. O estudante afirmou que tinha encontrado os mesmos valores do aluno que resolveu pelo método da adição, mas que, ao ver o título da atividade, concluiu que talvez fosse possível chegar à solução “substituindo” a incógnita ‘c’ da primeira equação pela expressão algébrica ‘2b’, por serem equivalentes. Isso indica que existe a possibilidade de que o título inadequado da atividade possa ter induzido para a estratégia utilizada para a resolução.

No entanto, a maioria não relacionou a estratégia procurada ao título da atividade. Nas outras turmas, foi necessária a intervenção da professora, que questionou a relação existente entre o nome da atividade e a resolução da situação proposta, o que levou os alunos a indagarem se era possível “trocar” as incógnitas da mesma forma que era feito com o valor numérico no método da adição. Somente após essa discussão, as outras duas turmas conseguiram resolver o sistema de equações pelo novo método.

Ao apresentar o método da substituição, muitos alunos ofereceram certa resistência à nova estratégia de resolução de sistema por já estarem familiarizados com o outro. A professora, ao notar certo desconforto por parte dos alunos com a nova situação, decidiu iniciar outra discussão com o intuito de levar os estudantes a identificar o motivo de esse novo método ser utilizado no sistema de equações obtido. Alguns estudantes, durante a discussão, indicaram ter percebido que o novo método tornava a resolução do sistema proposto mais ágil e que, para resolver pelo método da adição, seria necessário preparar a segunda equação, o que os tinha levado ao erro na ocasião da resolução feita antes da discussão. Outros alunos questionaram se eles poderiam continuar utilizando o outro método em todos os casos, e a professora afirmou que gostaria que eles resolvessem pelos dois métodos e que, posteriormente, teriam condições de optar por um deles.

Essa discussão nos leva a questionar se a resistência ao novo método não está relacionada ao ensino em que o aluno utiliza sempre a mesma estratégia para resolver diferentes problemas e exercícios, em que não é privilegiada a discussão de diferentes estratégias de resolução. Outra possibilidade está relacionada ao fato de que é preciso superordenar uma ideia anterior para chegar ao novo conceito, e talvez seja necessário certo tempo para que ocorra a assimilação e torne o significativo.

Atividade 7

Para a atividade 7, foram propostos 11 sistemas, sendo cinco na linguagem algébrica e seis na linguagem natural, para serem resolvidos pelo método da substituição. O objetivo principal era investigar se os alunos conseguiriam resolver os sistemas de equações algebricamente e verificar se alguns alunos iriam persistir na resolução pelo método da adição, apesar de, no enunciado, estar explícito que esta deveria ser pela substituição.

Em um primeiro momento, os alunos foram orientados a resolver individualmente cada um dos sistemas propostos no caderno de Matemática.

1. Resolva os sistemas de equações a seguir por meio do método da substituição:

a) $\begin{cases} x + y = 776 \\ x = 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 125 \\ y = 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 250 \\ 2x = 3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x = 2y \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

Como os alunos apresentaram as resoluções apenas em seus cadernos, indicaremos a seguir algumas observações realizadas a partir das anotações feitas pela professora durante a observação da resolução da atividade. No período de elaboração da atividade, a professora tinha como previsão duas aulas, tanto para a resolução por parte dos alunos quanto para a correção em lousa e discussão das diferentes resoluções. Mas a atividade durou o dobro do tempo (4 aulas), e os principais motivos foram a resistência de parte dos alunos pelo novo método e a dificuldade de alguns em manipular as equações e trabalhar com números fracionários e decimais.

Durante a tarefa 1, os alunos não apresentaram dúvidas na resolução do item a. Como já era esperado, alguns optaram por manipular a segunda equação do item a, colocando o monômio “3y” no primeiro membro para resolver pelo método da adição. Quando questionados pela professora sobre a escolha do método, mesmo com a indicação no enunciado para que a resolução fosse pelo método da substituição, eles afirmaram que achavam o método da adição mais fácil. A professora pediu para que mantivessem a resolução pelo método da adição, mas que tentassem resolver novamente pelo método da substituição.

No item b, a grande maioria "trocou" o valor de y por 2x e resolveu o sistema. Alguns, no momento da substituição, não consideraram o coeficiente 2 de y na primeira equação e resolveram o sistema de forma incorreta. O que mais chamou a atenção foram os alunos perguntarem se eles poderiam utilizar a mesma estratégia do método da adição na resolução do sistema proposto. Ao serem questionados sobre como eles fariam isso, eles perguntaram se poderiam multiplicar a segunda equação por 2 para obter "2y = 4x" e depois "trocar" o monômio 2y por 4x na primeira equação. A professora pediu para que eles utilizassem essa estratégia e que, durante a discussão e correção na lousa, a apresentassem para o restante da turma.

Foi no item c que os alunos apresentaram maior dificuldade durante a resolução. Alguns ainda insistiram em resolver pelo método da adição e não tiveram grandes problemas durante a resolução. Dentre aqueles que utilizaram a estratégia de multiplicar os termos da segunda equação por 2 no item b, alguns optaram por multiplicar a primeira equação por 2, como forma de obter "2x" e depois realizar a troca por "3y"; outros optaram por multiplicar por 3 para obter "3y" na primeira equação e depois trocar por "2x".

Dentre os que optaram pelo método da substituição, a grande maioria "trocou" o valor de y da primeira equação por 1,5x ou $\frac{3}{2}x$ e apresentou dificuldade na resolução. Alguns, perante o incentivo e o auxílio da professora, chegaram à solução utilizando uma das estratégias acima citadas. Outros, mesmo após a professora orientar e incentivar, não resolveram o sistema do item c. Preocupada com a situação, a pesquisadora resolveu questionar esses alunos e descobriu que um dos principais motivos que levou a não resolução do sistema proposto era o fato de ele envolver número fracionário.

Para o item d, a grande maioria optou por dividir os termos da primeira equação por 2 e apresentou dois tipos de resolução: ou "trocaram" o monômio 2x da segunda equação por y ou "trocaram" o y da segunda equação por 2x. Novamente, alguns outros alunos persistiram em utilizar o método da adição.

A professora não conseguiu acompanhar a resolução do sistema de equações do item e pelos alunos, pois ela estava auxiliando aqueles que apresentaram dúvidas nos itens anteriores. Ao observar que a maioria tinha finalizado a resolução da tarefa

1 e verificar que a aula estava terminando, pediu aos alunos que devolvessem a folha da Atividade 6 e indicou que a atividade continuaria na aula seguinte.

A segunda aula foi em sua totalidade utilizada para o registro das resoluções na lousa, plenária e formalização do método da substituição. Em todas as turmas, os alunos apresentaram pelo menos duas formas distintas de resolução para cada um dos sistemas propostos. Mesmo com a apresentação das resoluções e com grande parte dos alunos concordando sobre a facilidade e a agilidade para obter a solução por meio do método da substituição, alguns ainda apresentaram certa resistência em relação ao novo método e questionaram sobre a possibilidade de resolver qualquer sistema pelo método da adição, até mesmo nas avaliações.

A professora, nesse momento, respondeu que, para obter a solução de uma situação, existem diferentes estratégias, umas que permitem encontrar os valores desconhecidos de forma mais rápida, outras nem tanto. Ainda frisou que era importante lembrar que não existe uma única estratégia ou método correto. Tanto nas atividades quanto nas avaliações, eles teriam a liberdade de escolher o que eles acreditassem ser o melhor.

Thompson (1989 apud ALLEVATO, 2005) cita que, em sua pesquisa realizada com alguns professores, a resistência dos alunos a novas estratégias, como aconteceu no nosso caso para um novo método de resolução, surge como obstáculos nas aulas. Para essas situações, Van de Walle (2009, p. 68) sugere o registro dos métodos úteis na lousa, de forma que essas estratégias estejam disponíveis para serem aplicadas em lições futuras, mas que não se deve obrigar “o uso de seus métodos ou os de outros alunos na classe”.

Podemos notar que, para a resolução dos cinco sistemas de equações propostos, os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios relacionados à equação do 1º grau, operações com números racionais e até mesmo o método da adição de sistemas de equações, quando optaram por multiplicar ou dividir uma das equações, para facilitar a substituição e para chegar ao valor da segunda incógnita. Também é importante enfatizar que fatores como o tempo restrito das aulas e o interesse do aluno pelo assunto tratado interferiram no rendimento das atividades, mas que, de modo geral, não prejudicaram o desenvolvimento da primeira tarefa.

Já na segunda tarefa, em que seis diferentes situações foram propostas, os alunos apresentaram maior dificuldade na conversão para a linguagem algébrica e resolução dos itens **e** e **f**.

2. Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva por meio do método da substituição:

a) Marcos e Otávio são pintores. Eles receberam R$980,00 por um trabalho que realizaram. Sabendo que Marcos recebeu R$228,00 a menos que Otávio calcule o valor em reais que cada um recebeu.

b) A avó tem o sêxtuplo da idade da neta. A diferença entre as duas idades é de 55 anos. Determine a idade de cada uma.

c) Em certa escola estudam meninos e meninas, num total de 2500 alunos. Quantos meninos e quantas meninas estudam nessa escola, sabendo que o triplo da quantidade de meninos é igual ao dobro da quantidade de meninas?

d) Meu irmão é cinco anos mais velho do que eu. O triplo da minha idade somado ao dobro da idade dele é igual a 100 anos. Determine a idade do meu irmão.

e) A soma das idades de Carlos e Mário é 40 anos. A idade de Carlos é $\frac{3}{5}$ da idade de Mário. Qual a idade de Mário?

f) Um terreno retangular tem 168 m de perímetro. O comprimento tem 20 m a mais que a largura. Determine as dimensões desse terreno.

Como já foi citado, a atividade 7 durou o dobro do tempo previsto e a resolução das situações propostas só iniciou na terceira aula. Para a segunda tarefa, os alunos foram orientados a realizar a leitura individual de cada situação e apresentar o sistema correspondente. A professora enfatizou que, antes da resolução dos sistemas, os estudantes os registrariam na lousa.

Os alunos demoraram aproximadamente 15 minutos para realizar a leitura das seis situações e a conversão para a linguagem algébrica. Durante a conversão, a maior dificuldade apresentada foi referente aos termos matemáticos “sêxtuplo” e “perímetro”. Para auxiliar, a professora indicou o uso do dicionário, recurso que a escola disponibiliza para todos os alunos.

Durante o registro na lousa, alguns alunos demonstraram seu descontentamento com a fração que apareceu no item **e** e outros apresentaram dificuldade em representar por meio de uma equação com duas incógnitas o perímetro do retângulo do item **f**. Alguns estudantes apresentaram em seus registros a equação incorreta c + l = 168 e, para auxiliar na compreensão do erro, a professora pediu para que o aluno na lousa representasse a situação por meio de uma figura.

Após o registro na lousa e discussão dos sistemas obtidos, os alunos iniciaram a resolução individualmente, e a professora observou todo o processo e auxiliou os que apresentaram alguma dificuldade nos cálculos ou na utilização do método proposto. Como o tempo da aula não foi suficiente para a resolução de todos os sistemas, a professora sugeriu que os alunos terminassem os cálculos em casa e que realizariam a correção na aula seguinte. Na quarta aula da Atividade 7, os alunos apresentaram as resoluções na lousa. Pudemos notar que alguns alunos que apresentaram resistência ao uso do método da substituição passaram agora a utilizá-lo. Entretanto, alguns ainda continuaram a utilizar o primeiro método estudado na resolução dos sistemas. Após isso foi indicada a resolução de alguns exercícios e situações que eram propostos no livro didático adotado pelo colégio.

Com a previsão de 12 aulas para as oito atividades, a última atividade (Atividade 8) tinha como proposta inicial a conversão para a linguagem algébrica de quatro situações e a resolução de cada um dos sistemas obtidos utilizando os dois métodos estudados: da adição e da substituição. A partir das resoluções, os estudantes deveriam indicar e justificar qual eles consideravam o melhor método para cada situação, que seriam socializadas e, após a discussão, montar um quadro na lousa com as justificativas consideradas como sendo as mais relevantes.

Ao finalizarmos a Atividade 7, já tínhamos ultrapassado a nossa previsão inicial em duas aulas. Esse tipo de problema é muito comum em sala de aula, e, como constatou Thompson (1989 apud ALLEVATO, 2005, p. 65), a limitação do tempo de aula, o currículo pré-estabelecido, a diversidade de alunos e a resistência a novas metodologias foram os maiores obstáculos enfrentados por nós durante as atividades. Como o planejamento do trimestre já estava finalizado e outros conteúdos ainda seriam trabalhados, foram necessárias algumas alterações na proposta inicial.

Atividade 8

Para a Atividade 8, os alunos realizariam a conversão para a linguagem algébrica das situações, mas apresentariam apenas a resolução do sistema de equações obtido, utilizando um dos métodos estudados, e justificariam a escolha do método. Para agilizar o processo, a professora corrigiria cada uma das atividades fora do horário de aula e faria a devolutiva individual.

Como a atividade foi realizada individualmente, apresentaremos a seguir a análise de cada situação de alguns protocolos.

a) Em outro laboratório há também baratas e aranhas. Nesse segundo laboratório foram contadas 50 cabeças e 344 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão nesse segundo laboratório.

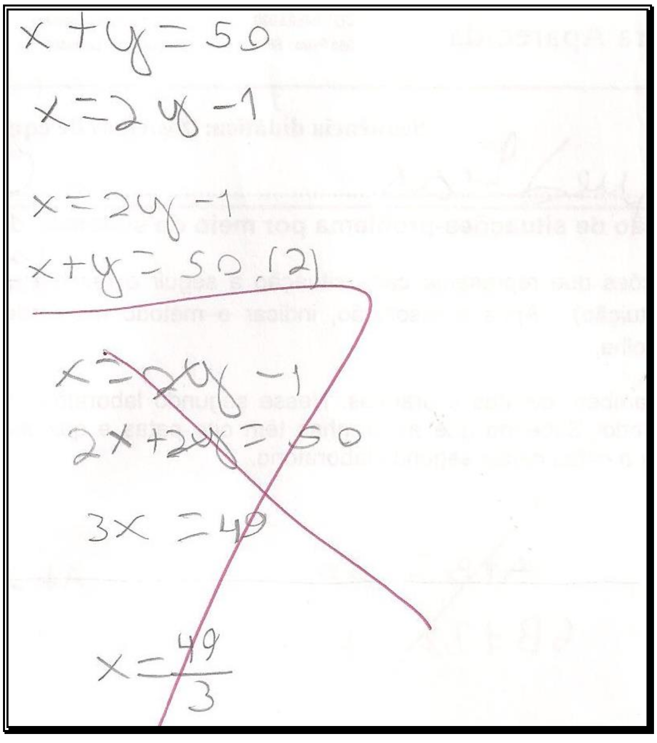
Na situação a), os 16 alunos chegaram ao sistema de equações correto, optaram por resolvê-lo pelo método da adição, justificando ser esse o mais fácil, e obtiveram a solução correta. É importante enfatizar que o problema proposto era idêntico ao da situação 2 da atividade 1, em que foi realizada a conversão para a linguagem algébrica, mas que não fora resolvida pelos alunos anteriormente.

b) A soma de dois números é 50 e o maior deles é igual ao dobro do menor, menos 1. Quais são os números?

Já na situação b), apenas dois protocolos apresentavam erro na conversão para a linguagem algébrica da segunda equação.

Dentre os 14 que realizaram a conversão de forma correta, apenas um estudante não chegou à solução correta. Nesse caso, o estudante optou pelo método da adição, e seu erro ocorreu por não ter manipulado a segunda equação corretamente antes de adicionar com a primeira.

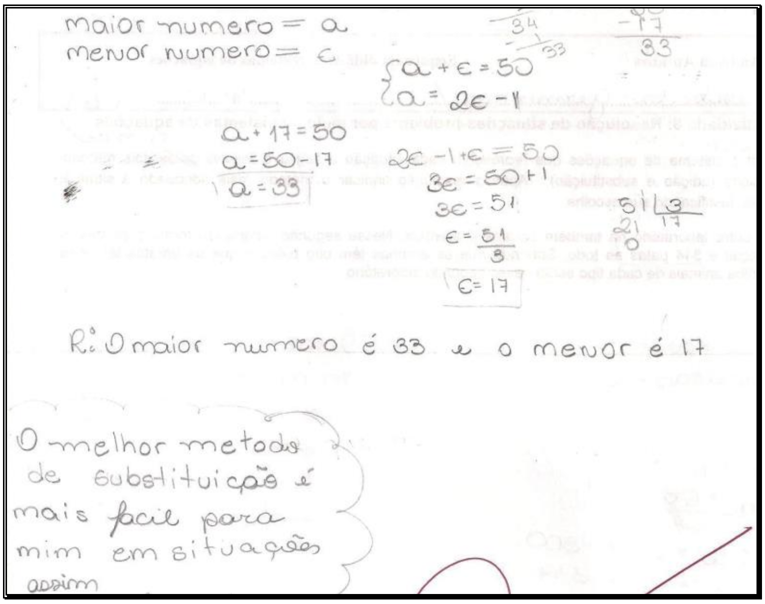
Figura 16. Utilização incorreta do método da adição



Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo em menor quantidade, ainda foi possível notar nos protocolos que alguns alunos resistem ao método da substituição, mesmo facilitando a resolução da situação dada. Dos treze alunos que encontraram a solução correta, apenas um optou por resolver a situação pelo método da substituição. Como justificativa, o estudante explicitou que utilizara o método por considerá-lo mais fácil.

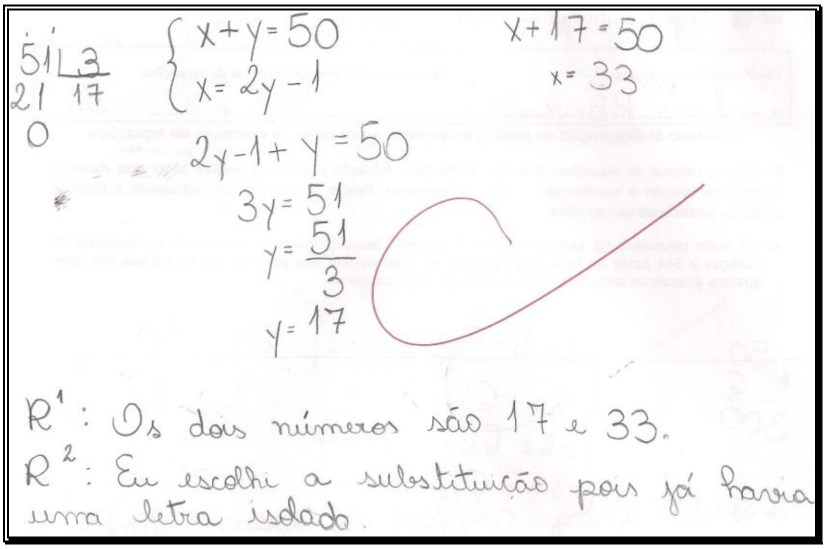
Figura 17. Justificativa escolha do método de resolução



Fonte: Dados da pesquisa

Para aqueles que optaram pelo método da substituição, a justificativa principal foi a de que já existia uma “letra isolada”.

Figura 18. Justificativa escolha do método de resolução



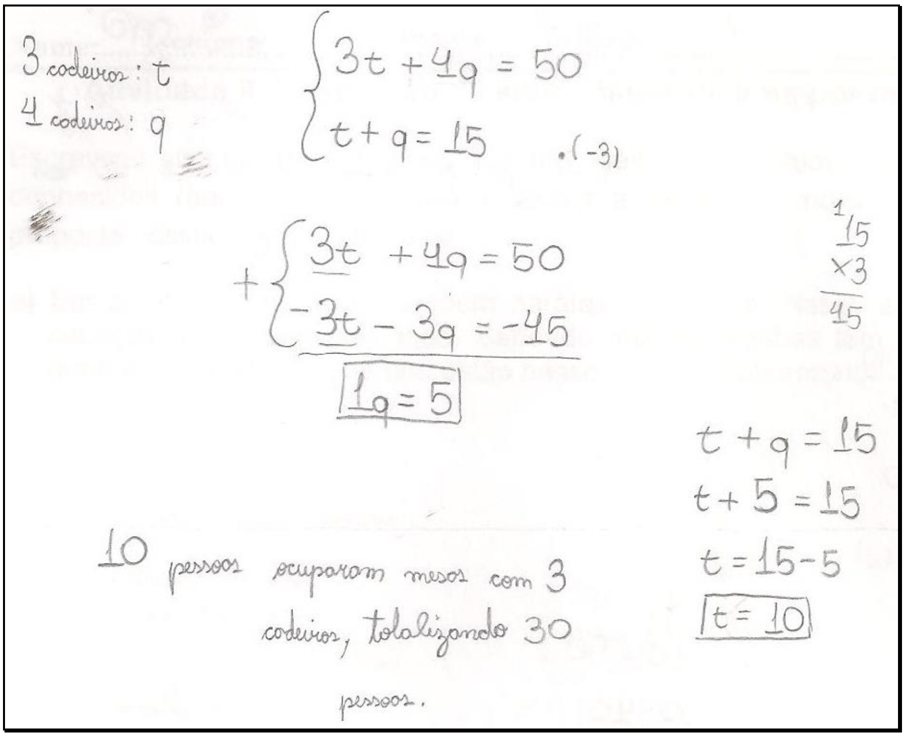
Fonte: Dados da pesquisa

Reproduzimos a seguir a situação do item c.

c) Ao organizar uma festa, Paulinho decidiu organizar os convidados em mesas com 3 e 4 cadeiras. Sabendo que existiam na festa 50 pessoas e que foram ocupadas 15 mesas, determine o número de pessoas que ocuparam mesas com 3 cadeiras.

Ao analisar a sua resolução, observamos que somente 6 alunos dos 16 que tiveram seus protocolos analisados conseguiram chegar à solução e apresentar a resposta de forma correta.

Figura 19. Solução e reposta apresentadas de forma correta


3 cadeiras: t
4 cadeiras: q

$$\begin{cases} 3t + 4q = 50 \\ t + q = 15 \quad .(-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3t + 4q = 50 \\ -3t - 3q = -45 \end{cases}$$

$$\boxed{1q = 5}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 3 \\ \hline 45 \end{array}$$

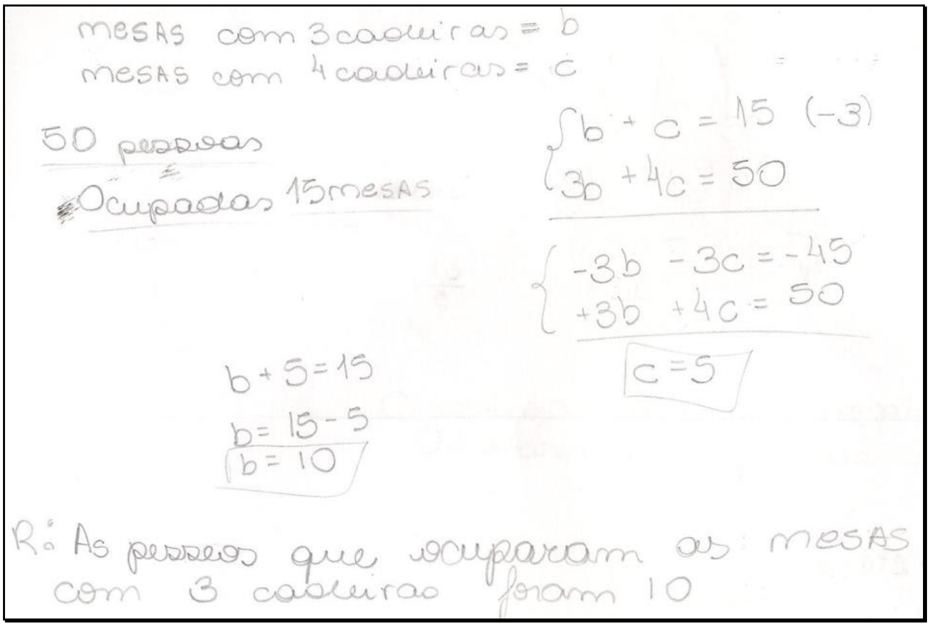
$t + q = 15$
$t + 5 = 15$
$t = 15 - 5$
$\boxed{t = 10}$

10 pessoas ocuparam mesas com 3 cadeiras, totalizando 30 pessoas.

Fonte: Dados da pesquisa

Dois estudantes conseguiram chegar à solução numérica, mas não apresentaram a resposta pertinente ao enunciado. Nessa situação, podemos constatar algo muito comum na resolução de problemas: o aluno obtém os resultados numéricos, mas não retorna ao enunciado para validar a solução encontrada. Em ambos os protocolos, na resposta, consta o número de mesas com 3 cadeiras, mas não consta o número total de pessoas que ocupam essas mesas.

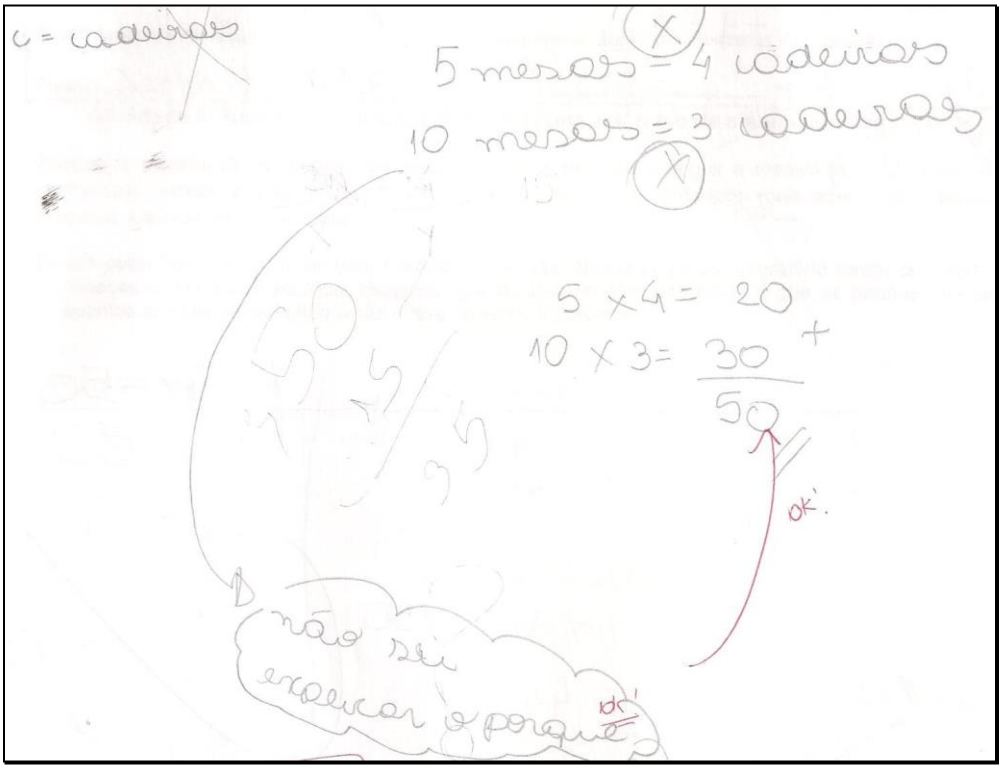
Figura 20. Erro na resposta apresentada.



Fonte: Dados da pesquisa

Um dos alunos não conseguiu representar a situação por meio de um sistema de equações, mas chegou à solução por tentativa e erro, como podemos verificar no protocolo a seguir.

Figura 21. Resolução por tentativa e erro.



Fonte: Dados da pesquisa

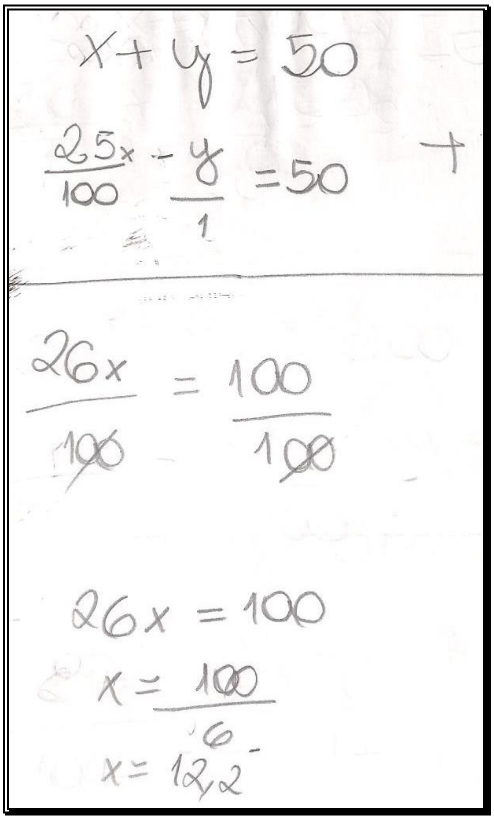
Dentre os que não encontraram a solução correta, a maioria não conseguiu realizar a conversão para a linguagem algébrica; apenas um conseguiu realizar a conversão, mas não conseguiu finalizar a resolução pelo método escolhido (adição).

Para finalizarmos a análise dessa atividade, apresentamos a seguir a situação d.

d) Duas pessoas ganharam juntas 50 reais por um trabalho e uma delas ganhou 25% do que a outra ganhou. Quanto ganhou cada pessoa?

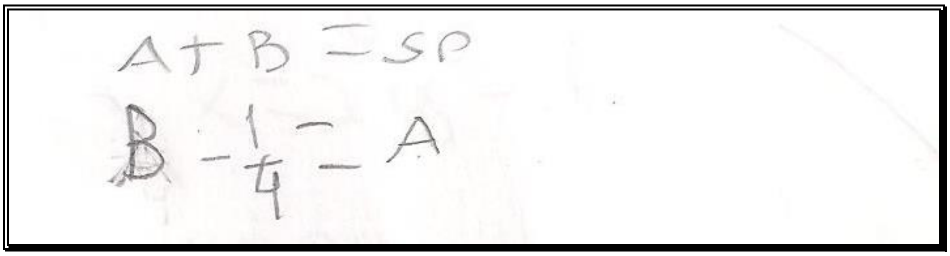
Nessa última situação, somente dois alunos não conseguiram representar o problema por meio de um sistema de equações corretamente. Um deles explicitou o sistema incorretamente e o resolveu; o outro também apresentou o sistema de forma não pertinente ao enunciado e, além disso, não resolveu o sistema. Ilustramos esse fato com os protocolos a seguir.

Figura 22. Erro na representação da situação na linguagem algébrica



Fonte: Dados da pesquisa

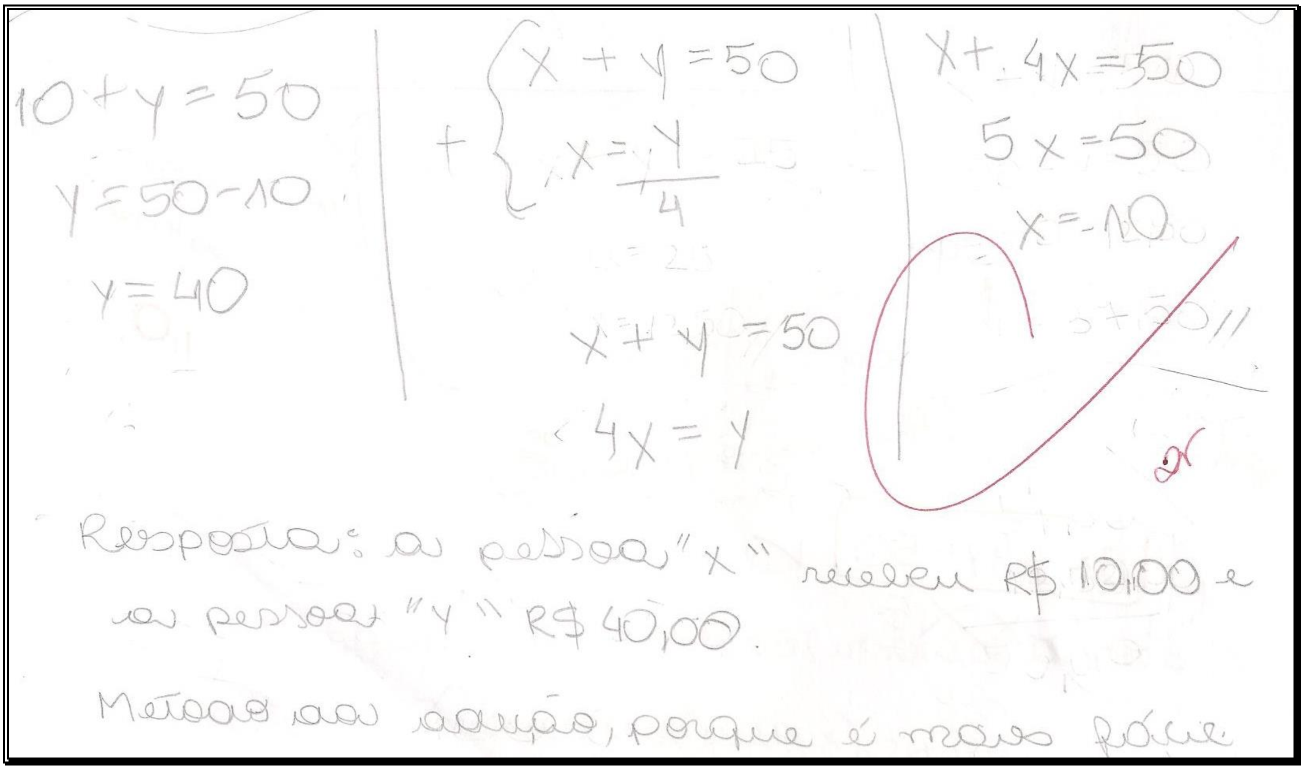
Figura 23. Erro na representação da situação na linguagem algébrica



Fonte: Dados da pesquisa

Os outros alunos conseguiram representar a situação por meio de um sistema de equações e chegaram à solução correta. O que chamou a atenção da professora durante a correção e análise é que todos os estudantes indicaram 25% por meio da fração ¼, e nenhum utilizou a forma decimal 0,25. Para a resolução, todos optaram pelo método da substituição para obter a solução. Em um dos protocolos, o aluno indica na justificativa que o método utilizado é do a adição, porém, durante a resolução, utilizou o processo da substituição.

Figura 24: Erro na justificativa da escolha do método utilizado



Fonte: Dados da pesquisa

Conclusão

Após análise dos protocolos, além das observações e das anotações realizadas durante o desenvolvimento das atividades, é possível constatar que a sequência permitiu o ensino de sistemas de equações por meio da resolução de problemas e que, segundo as manifestações da maioria dos alunos, as atividades permitiram a aprendizagem significativa.

A escolha das atividades e a sequência em que elas foram desenvolvidas mostraram-se adequadas e eficazes para a proposta da pesquisa. A estratégia de ensino escolhida, ensino por meio da resolução de problemas, também se mostrou adequada para introduzir o estudo de sistemas de equações e os dois métodos de resolução de sistemas, adição e substituição, contribuindo para a aprendizagem significativa.

A opção por iniciar pelo método da adição foi provavelmente induzida pelo tratamento desse conteúdo em livros didáticos e pelo fato desse método poder ser aplicado para a resolução de um grande número de problemas. Como esse foi o primeiro método que os alunos tiveram contato, isso ocasionou certa resistência para a introdução do método da substituição e houve questionamentos sobre se existia ou não um único método para resolver todas as situações. Com o decorrer do processo, a grande maioria foi percebendo que determinados sistemas são resolvidos com mais facilidade e rapidez por um ou por outro método.

A partir do desenvolvimento das atividades, os estudantes puderam vivenciar situações em que o sistema de equações se mostrou uma estratégia eficaz para a resolução de determinados tipos de problemas. A efetiva participação dos alunos foi extremamente importante para o desenvolvimento das atividades, pois foram os diferentes questionamentos e observações realizados por eles, juntos com as atividades e metodologia proposta, que permitiram que a aprendizagem do novo conteúdo fosse realmente significativa.

Os alunos que já tinham visto o conteúdo de sistemas de equações em outros colégios, mesmo com as atividades, continuaram a utilizar somente as letras x e y para a resolução das situações. O que foi possível notar é que alguns erros cometidos nas primeiras atividades foram diminuindo durante a sequência.

Já os alunos que não tinham visto esse conteúdo demonstraram, na última atividade, domínio na conversão de linguagens e na resolução de sistemas de equações pelos dois métodos. Embora alguns alunos terminassem a atividade apresentando certa resistência ao segundo método apresentado, mostraram domínio na manipulação das equações de forma a permitir a resolução de qualquer situação pelo método da adição.

A fundamentação teórico-metodológica utilizada se mostrou adequada para o desenvolvimento e análise das atividades. A metodologia de Resolução de Problemas utilizada contribuiu para explicitar que o ensino por meio dela contribui para o aprendizado com significado, no sentido de Ausubel.

A grande maioria dos alunos reagiu bem à estratégia utilizada durante a sequência de atividades. Em muitos momentos, o livro adotado e as sequências usualmente elaboradas e desenvolvidas pelos professores da instituição apresentam algumas atividades similares às propostas no ensino por meio da resolução de problemas. Mesmo não sendo algo totalmente novo para os alunos, alguns estudantes manifestaram sua preferência pelo método ‘tradicional’ de aprendizagem.

Considerações finais

Nesta parte final, retomamos a questão de pesquisa como ponto de partida para as nossas considerações:

O ensino e a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, por meio de resolução de problemas, aliados aos princípios da aprendizagem significativa, podem contribuir para uma eficaz construção de conhecimento?

A partir de todas as ponderações que explicitamos na análise dos dados tendo essa pergunta como referência, reportamo-nos aos referenciais teóricos utilizados, às situações em que foram desenvolvidas as atividades e aos dados coletados e percebemos que eles se encaixam, como peças de um quebra-cabeça. Partindo da premissa que, tanto para a Teoria da Aprendizagem Significativa quanto para a Metodologia focada no ensino por meio da resolução de problemas, um dos fatores externos mais relevantes é considerar o que o aluno já sabe, apresentaremos a seguir nossas conclusões.

Ficou evidenciado que a atividade de sondagem realizada antes da elaboração da sequência de atividades mostrou ser algo extremamente importante, pois a pesquisadora teve a oportunidade de retomar alguns conceitos e procedimentos considerados relevantes para uma eficaz construção do conhecimento com significado. Como Ausubel (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980) enfatiza, é necessário que "o novo conteúdo seja incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquira significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio".

Durante a primeira aula com a estratégia de ensino por meio da resolução de problemas, já foi notória a mudança dos alunos perante o novo conteúdo matemático. Os efeitos dessa mudança foram sentidos tanto pela professora quanto pelos alunos, quando, depois de algum tempo, eles já mostraram interesse em resolver as duas primeiras situações propostas sem a preocupação de utilizar o método "preferido" da professora e mostraram, mesmo de forma muito simples, como o uso de desenhos, ter recorrido a conhecimentos anteriores para obter as soluções. Durante o registro das resoluções na lousa, o que chamou mais atenção foi o fato de que, para alguns estudantes, o uso de desenho como estratégia não era considerado válido como processo de resolução. Para eles, a resolução de qualquer problema matemático está ligada a "fazer contas", e somente essa forma de registro era considerada como correta.

Nas atividades seguintes foi possível notar que os alunos já requisitavam menos o auxílio da professora para a resolução das tarefas propostas e demonstravam maior capacidade de relacionar os conhecimentos prévios aos novos, que estavam sendo desenvolvidos naquele momento. Muitas foram as ocasiões em que emergiram evidências mostrando que os alunos estavam relacionando conhecimentos e procedimentos adotados quando resolviam os problemas propostos, com os utilizados em outros conteúdos matemáticos anteriormente desenvolvidos, principalmente alguns aspectos relacionados à utilização de conhecimentos relativos a conteúdos de Aritmética e Álgebra, em especial equação e expressões algébricas.

A prática docente tem mostrado que, geralmente, quando um novo conteúdo ou uma nova estratégia são desenvolvidos em sala, alguns alunos mostram certa resistência à metodologia desenvolvida durante as atividades. Esse fenômeno se revelou no desenvolvimento dessa pesquisa e, mesmo externando esse sentimento, esses estudantes participaram de todas as tarefas, apresentando suas ideias durante as plenárias e se oferecendo para apresentar seus registros na lousa. Mas foi na atividade em que foi trabalhada pela primeira vez a resolução de sistemas de equações pelo método da substituição que a professora notou maior resistência por parte dos alunos. Muitos questionaram a necessidade de um segundo método de resolução e foi somente na última atividade que muitos deles perceberam que, em algumas situações, esse método facilitava obter a solução.

É importante enfatizar que muitos foram os momentos difíceis enfrentados durante a pesquisa e que o resultado aqui apresentado é fruto de um processo de dedicação, longos períodos de estudo e, principalmente, quebra de paradigmas.

Tendo toda nossa educação embasada no senso comum, conhecido como “ensino tradicional”, focado na memorização de regras e procedimentos, em muitos momentos encontramos barreiras em nossas próprias crenças. Foram em dois momentos distintos, na elaboração da sequência de atividades e no desenvolvimento das atividades em sala de aula, que encontramos nossas maiores limitações e dificuldades.

A elaboração das atividades da sequência demandou muito tempo e dedicação. Muitas foram as vezes em que precisamos retomar os referenciais teóricos para verificar se elas eram adequadas para o tipo de metodologia que estava propondo e se estavam organizadas de forma a permitir que um novo conhecimento estivesse interligado aos outros, já desenvolvidos nas atividades anteriores.

O rico material utilizado como fonte de pesquisa e a constatação de que a instituição em que a sequência de ensino foi desenvolvida é partidária do ensino com significado, partindo de problemas, permitiram-nos ter certeza de estar desenvolvendo uma sequência de atividades que seria realmente eficaz na construção do novo conhecimento.

O fato de a instituição ter como fundamento que a aprendizagem é resultado da rede de relações que o estudante faz entre os diferentes significados de um mesmo conteúdo e que, para ser relevante, é necessário que esteja relacionada ao mundo dos conhecimentos e vivências do estudante e que seja significativa foi essencial para atingirmos o objetivo de nossa pesquisa.

O desenvolvimento da sequência de atividades em sala de aula foi outro grande desafio de nossa pesquisa. Embora tendo sido cogitada a possibilidade de desenvolver a sequência em outra instituição de ensino, optamos por realizá-la na escola em que estávamos lecionando, por ter a oportunidade de trabalhar um conteúdo que fazia parte do planejamento de aulas, nos próprios horários das aulas de Matemática.

O nosso grande limitador foi o tempo. A constatação de que já tinha ultrapassado duas aulas do cronograma original, faltando uma atividade para finalizarmos a sequência, influenciou não só a forma de a professora desenvolver a atividade com os alunos, mas a devolutiva da mesma. Para isso, optamos por readequar a última atividade e corrigir os protocolos de aluno por aluno, de forma a realizar a devolutiva individualizada. Dessa forma, perdeu-se muito desta atividade, que era extremamente importante, por não ter ocorrido a plenária e a busca do consenso sobre as diferentes utilizações dos dois métodos de resolução desenvolvidos.

É relevante destacar que, por inexperiência, não planejamos previamente a participação de um observador para acompanhar as aulas e realizar as anotações relativas a seu desenvolvimento nem a utilização de um gravador de áudio durante as atividades. Tivemos a falsa convicção de que somente as anotações da pesquisadora e as atividades desenvolvidas apresentariam todos os detalhes e resultados relevantes. Acreditamos que, se tivéssemos utilizado uma das duas estratégias citadas, nossa pesquisa poderia apresentar dados mais detalhados e importantes para a compreensão de alguns fatos que ocorreram durante as atividades.

Com as análises das atividades e das anotações realizadas pela professora, foi possível verificar que a metodologia escolhida, aliada aos princípios da aprendizagem significativa, mostrou ser capaz de contribuir para uma eficaz construção de conhecimento de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, uma vez que os estudantes foram capazes de resolver, em momentos posteriores às atividades, situações diversas em que, para a sua resolução, era necessário utilizar sistemas de equações.

Tendo alcançado tais respostas à nossa questão de pesquisa, acrescentamos que a experiência vivenciada pelos alunos que dela participaram foi realmente muito importante, no sentido da aprendizagem matemática. Para muitos, a Matemática tornou-se algo prazeroso, no sentido de permitir resolver diferentes situações a partir do que já é de seu conhecimento. As tarefas propostas durante as atividades permitiram que eles externassem suas ideias e questionamentos, sem o medo de “errar”, o que levou à aprendizagem eficaz de sistema de equações.

É importante enfatizar que o contexto encontrado pela pesquisadora nesse colégio e nessa turma, em especial, pode não ser a realidade dos alunos que encontraremos em outras turmas ou outros colégios em nosso país. Para verificarmos, indico a aplicação dessa sequência de atividades em outros contextos, com o intuito de avaliar se tais questões e aspectos também se fazem presentes, embora de outras formas.

Outra sugestão seria a elaboração de novas sequências de atividades envolvendo outros conteúdos matemáticos com o intuito de desenvolvê-los sobre a estratégia de ensino por meio da resolução de problemas aliada aos princípios da aprendizagem significativa. Dentre os trabalhos de pesquisadores, não encontramos outro trabalho de pesquisa com esse enfoque.

Referências

_________. Associação Cultura Franciscana. Diretrizes Pedagógicas. São Paulo: ACF, 2006

ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP – São Paulo, Rio Claro, 2005.

ALMEIDA, C. de F. Abordagem dos sistemas de equações do 1º grau no 7º ano do Ensino Fundamental: uma perspectiva de resolução de problemas na prática investigativa. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

AUSUBEL, D. P. Educational psychology: a cognitive view. New York: Holt Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. Psicologia educacional. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BALIEIRO FILHO, I. F. "VESTÍGIOS DE HEURÍSTICA NO LIVRO VII DE *A COLEÇÃO MATEMÁTICA* DE PAPPUS" Anais do VII EPEM. Disponível em:<http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/Comunicacoes Orais/ co0096.doc> Acesso em: 02.março.2014. São Paulo, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, et. al. 2010 Solução de problemas e a Matemática escolar. 2. ed. Campinas: Alínea, 2010.

CAVALCANTI, C. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.). Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHIZZOTTI, A. Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais. Petrópolis: Vozes, 2006.

MADRUGA, J. A. G. Aprendizagem pela descoberta frente à aprendizagem pela recepção: a teoria da aprendizagem verbal significativa. In: COLL, C.; PALÁCIOS, J. & MARCHESI, A.(orgs.). Desenvolvimento psicológico e educação. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 1996.

da COSTA, S.S.; MOREIRA, M. A. A Resolução de problemas como um tipo especial de aprendizagem significativa. In Anais do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa, Peniche, Portugal, 11 a 15 de outubro de 2000. p. 263-277.

DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de Matemática. 12 ed. São Paulo: Ática, 2000.

FRANCISCO, B. M. at. al. Resolução de problemas: um método alternativa para o ensino de Matemática na Educação Básica. In Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, Paraná, 18 a 21 de julho de 2013. p. 1-11.

GODOY, A. S. Refletindo sobre critérios de qualidade na pesquisa qualitativa. Revista Gestão.Org, v. 3, n. 2, p. 85-94, mai/ago, 2005.

HERMINIO, P. H. Matemática Financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP – São Paulo, Rio Claro, 2008.

HUAMAN HUANCA, R. R. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP – São Paulo, Rio Claro, 2006.

HUÁMAN HUANCA, R. R. Um Olhar para a Sala de Aula a partir da Resolução de Problemas e Modelação Matemática. Rio Claro, SP. I Seminário de Resolução de Problemas, 2008.

ITACARAMBI, R. R. Resolução de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KRULIK, S.; REYS, R. E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997.

LAMBERTI, D. Di G. O ensino de matemática através da resolução de problemas. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade do Oeste Paulista, UNOESTE – São Paulo, Presidente Prudente, 2003.

MORAIS, R. dos S. A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP – São Paulo, Rio Claro, 2008.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador. 2 ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. In Moreira, M.A., Caballero, M.C. e Rodríguez, M.L. (orgs.) (1997). Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Burgos, España. p. 19-44.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

_________. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In Bicudo, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

ONUCHIC, L. de la R., coord. Justificativa: razões para esse tema. In: I Seminário em Resolução de Problemas, 2008, Rio Claro. Anais do I SERP. Rio Claro, 2008. v. único. p. 1.

ONUCHIC, L. de la R. Um História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: I Seminário em Resolução de Problemas, 2008, Rio Claro. Anais do I SERP. Rio Claro, 2008. v. único. p. 1-15.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: BOLEMA, Rio Claro, 2011. v. 25. n. 41 p. 73-98.

PEREIRA, M. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP – São Paulo, Rio Claro, 2004.

PIMENTEL, D. E. Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para transição da aritmética para a álgebra. Dissertação (Mestrado em Ensino em Ciências Exatas e Tecnologia) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – Universidade Federal de São Carlos – São Paulo, São Carlos, 2010.

PINHEIRO, C. A. M. Ensino de análise combinatória a partir de situações-problema. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências Sociais e Educação – Universidade do Estado do Pará – Pará, Belém, 2008.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

PONTES, H. M de S. A Educação Matemática à luz de princípios da aprendizagem significativa e de suas implicações na interação professor-aluno-conhecimento matemático em aula. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa – Paraná, Ponta Grossa, 2011.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. del P. P. *A Solução de Problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ROCHA, F. O. Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SCHROEDER, A. H.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in Mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. New directions for elementary school mathematics. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SEVERINO, A. J. Metodologia do trabalho científico. 23. ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

STEINHOSRT, A. C. O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a planilha como recurso: um estudo comparativo. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática.) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In ____ Elementary and Middle School Mathematics. New York, Longman, 2001.

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. / John A. Van de Walle: tradução Paulo Henrique Colones. – 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. de la R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. In: UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática - Septiembre de 2007 – n. 11, p. 79-97.

Anexos

ANEXOS: ATIVIDADES

Profª Andreza Antunes	**SONDAGEM 2 - 2013**
Nome:...	**8° ....**

Expressões algébricas e equações.

1. Escreva a expressão algébrica correspondente a cada item:
   a) O quíntuplo de um número acrescida de 4.

   b) A sexta parte de um número diminuído de 3.

   c) A diferença entre o dobro de um número e sua metade.

2. Escreva a equação que representa cada frase e calcule o valor do número desconhecido mentalmente.
   a) Um número adicionado a 24 é igual a 30.

   b) O produto de 6 por um número é igual a 180.

   c) Subtraindo 8 de um número, obtemos -3.

   d) A metade de um número acrescida de 4 é igual a 14.

3. Resolva as equações a seguir:

a) 2x + 7x – 10 = 4x + 3 – 2x

b) $5(x+1)=3(1-x)$

c) $-3(4-7x)=3(1-x)+3(5+2x)$

d) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x=6$

e) $1{,}5x-2=13$

f) $\frac{7x}{2}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}-\frac{11x}{6}$

g) $\frac{3(x+2)}{5}-2=\frac{3x+1}{4}$

h) $\frac{2x-5}{10}-\frac{1-x}{5}=0$

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 1: Transposição linguagem escrita para linguagem algébrica

Resolva as situações problema a seguir:

1. Num laboratório há baratas e aranhas. Foram contadas 10 cabeças e 76 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

2. Em outro laboratório há também baratas e aranhas. Nesse segundo laboratório foram contadas 50 cabeças e 344 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão nesse segundo laboratório.

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 2: Transposição linguagem escrita para linguagem algébrica

Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir:

1. Um par de tênis e um par de sandálias custam juntos 300 reais. O preço do par de tênis é 20 reais mais caro que o preço do par de sandálias.

2. Uma fazenda possui galinhas e coelhos. Sabendo que são 17 animais e a soma de suas pernas é igual a 38.

3. Uma caixa possui em seu interior um total de 30 bolinhas, entre brancas e pretas. Sabendo que se eu pegar as bolas brancas mais o dobro de bolas pretas terei 40 bolas.

4. No sitio de Julio, entre vacas e bois, há 80 animais. Sabe-se que a diferença entre o número de vacas e o dobro do número de bois é 20.

5. Uma pessoa possui entre notas de 5 reais e de 10 reais um total de 50 notas. Sabe-se que essas notas somam um montante de 450 reais.

6. Carlos foi às compras e colocou em seu carrinho, entre cachorros quentes e refrigerantes, 60 unidades. Sabe-se que cada cachorro quente custa R$ 4,50 e cada refrigerante custa R$ 3,00 e que o valor da venda do dia deu um montante de R$ 229,50.

7. A soma das idades de Bia e de Lia é igual a 31 anos, e a diferença entre suas idades é de 3 anos.

8. Boby pai e Boby filho, dois cachorros, sobem juntos em uma balança e ela marca 18,5 kg. Boby pai é mais pesado que Boby filho. Seriam necessários 4 Boby filhos para contrabalancear um Boby pai.

9. Uma lata de leite e uma de chocolate em pó custam, juntas R$ 3,80. Sabendo que duas latas de leite e uma de chocolate custam, juntas, R$ 4,80.

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 3: Transposição linguagem algébrica para linguagem escrita

Relacione um dos problemas ao sistema de equações que permite resolvê-lo e justique o porquê da não escolha dos outros dois problemas.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 125 \\ x - y = 10 \end{cases}$

1. ( ) O dobro da quantidade de selos que Marcos possui somado ao quíntuplo da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. A diferença entre a quantidade de selos que eles possuem é igual a 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?	2. ( ) A diferença entre o dobro da quantidade de selos que Marcos e o quíntuplo da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. Os dois têm juntos 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?	3. ( ) A metade da quantidade de selos que Marcos possui somado a quinta parte da quantidade de selos que Renata possui é igual a 125 selos. A diferença entre a quantidade de selos que eles possuem é igual a 10 selos. Quantos selos cada um possui sabendo que Marcos possui mais selos que Renata?

Justificativa:
____
____
____
____
____

b) $\begin{cases} x + y = 250 \\ 2x = 3y \end{cases}$

1. ( ) Em um estacionamento há carros e motos, num total de 250 veículos. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento, sabendo que a metade da quantidade de carros é igual à terça parte da quantidade de motos?	2. ( ) Em um estacionamento, a diferença entre o número de carros e de motos é de 250 veículos. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento, sabendo que o dobro da quantidade de carros é igual ao triplo da quantidade de motos?	3. ( ) Em um estacionamento há carros e motos, num total de 250 veículos. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento, sabendo que o dobro da quantidade de carros é igual ao triplo da quantidade de motos?

Justificativa:
____
____
____
____
____

c) $\begin{cases} x + 2y = 125 \\ y = 2x \end{cases}$

1. ( ) A diferença entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e Lúcia, sabendo que Lúcia tem o dobro da idade de Carlos?	2. ( ) A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e Lúcia, sabendo que Lúcia tem o dobro da idade de Carlos?	3. ( ) A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e Lúcia, sabendo que Lúcia tem a metade da idade de Carlos?

Justificativa:
____
____
____
____
____

d) $\begin{cases} x + y = 776 \\ x = 3y \end{cases}$

1. ( ) Solange e Gabriel têm juntos R$776,00. A quantia que Solange possui é igual a terça parte da quantia de Gabriel. Quantos reais cada um possui?	2. ( ) A diferença entre as quantias que Solange e Gabriel têm é de R$776,00. A quantia que Solange possui é igual ao triplo da quantia de Gabriel. Quantos reais cada um possui?	3. ( ) Solange e Gabriel têm juntos R$776,00. A quantia que Solange possui é igual ao triplo da quantia de Gabriel. Quantos reais cada um possui?

Justificativa:
____
____
____
____
____

Profª Andreza Antunes **Sequência didática: Sistemas de equações**

Nome:.. 8° ....

Atividade 4: Método da adição

Escreva e resolva o sistema de equações que representa cada situação a seguir:

1. A soma das idades de duas pessoas é 25 anos, e a diferença entre elas é de 13 anos. Determine as idades dessas pessoas.

2. Num laboratório há baratas e aranhas. Foram contadas 10 cabeças e 76 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 5: Método da adição

1. Resolva os sistemas de equações a seguir:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ -2x + 7y = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 5 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 13 = 3a + b \\ -5 = b - 3a \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 5y = -21 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9m + 6n = -12 \\ 4m - 5n = 10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 3 \\ \dfrac{-x}{4} - 2y = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} a + 2b = 0 \\ \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} = 1 \end{cases}$

2. Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva por meio do método da adição:

a) A soma de dois números é –5 e a diferença entre eles é 1. Quais são esses números?

b) Em uma sala de aula estudam 42 alunos. Sabendo que nessa sala há mais meninas do que meninos e que a diferença entre o número de meninas e meninos é 4, calcule a quantidade de meninas e de meninos há nessa sala de aula.

c) Um estacionamento cobra R$ 2,00 por moto e R$ 3,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R$ 277,00 para um total de 100 veículos. Calcule a quantidade de motos que usaram o estacionamento nesse dia.

d) Num quintal há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que há ao todo, 112 pés. Calcule a quantidade de porcos que há nesse quintal.

e) Em uma sorveteria foram fabricados picolés de leite e picolés de frutas, num total de 180. Ao fim de um dia foram vendidos metade dos picolés de leite e um terço dos picolés de frutas, restando 100 na sorveteria. Quantos picolés de leite foram fabricados?

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 6: Método da Substituição

Carla e Bruna conversam despreocupadamente sobre o emprego novo delas quando chega Ana, uma senhora muito simpática e vizinha delas. Ana, que já é aposentada, percebe que as duas amigas ainda estão longe da aposentadoria. Então, ela pergunta:

- Que idade vocês têm?

Carla, a mais velha, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim:

Ana - Como? Você está brincando comigo. Essa aí não passa de uma garota e você certamente não chegou aos 50.

Carla - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Bruna, temos juntas 72 anos.

Ana - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que idades vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada uma.

Carla - É claro que não. Você tem dois dados desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.

Ana - Diga.

Carla - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Bruna. Agora, Ana, você tem dois dados desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.

Ajude a Ana a descobrir as idades de Carla e de Bruna!!!

Situação problema retirada e adaptada do site Mundo Vestibular

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 7: Método da Substituição

1. Resolva os sistemas de equações a seguir por meio do método da substituição:

a) $\begin{cases} x + y = 776 \\ x = 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 125 \\ y = 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 250 \\ 2x = 3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x = 2y \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

2. Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva por meio do método da substituição:

a) Marcos e Otávio são pintores. Eles receberam R$980,00 por um trabalho que realizaram. Sabendo que Marcos recebeu R$228,00 a menos que Otávio calcule o valor em reais que cada um recebeu.

b) A avó tem o sêxtuplo da idade da neta. A diferença entre as duas idades é de 55 anos. Determine a idade de cada uma.

c) Em certa escola estudam meninos e meninas, num total de 2500 alunos. Quantos meninos e quantas meninas estudam nessa escola, sabendo que o triplo da quantidade de meninos é igual ao dobro da quantidade de meninas?

d) Meu irmão é cinco anos mais velho do que eu. O triplo da minha idade somado ao dobro da idade dele é igual a 100 anos. Determine a idade do meu irmão.

e) A soma das idades de Carlos e Mário é 40 anos. A idade de Carlos é $\frac{3}{5}$ da idade de Mário. Qual a idade de Mário?

f) Um terreno retangular tem 168 m de perímetro. O comprimento tem 20 m a mais que a largura. Determine as dimensões desse terreno.

Profª Andreza Antunes	**Sequência didática: Sistemas de equações**
Nome:...	**8° ....**

Atividade 8: Resolução de sistemas de equações

Escreva o sistema de equações que representa cada situação a seguir e resolva pelos dois métodos conhecidos (adição e substituição). Após a resolução, indicar o método mais adequado à situação proposta, justificando sua escolha.

a) Em outro laboratório há também baratas e aranhas. Nesse segundo laboratório foram contadas 50 cabeças e 344 patas ao todo. Sabendo que as aranhas têm oito patas e que as baratas têm seis, quantos animais de cada tipo estão nesse segundo laboratório.

b) A soma de dois números é 50 e o maior deles é igual ao dobro do menor, menos 1. Quais são os números?

c) Ao organizar uma festa Paulinho decidiu organizar os convidados em mesas com 3 e 4 cadeiras. Sabendo que existiam na festa 50 pessoas e que foram ocupadas 15 mesas, determine o número de pessoas que ocuparam mesas com 3 cadeiras.

d) Duas pessoas ganharam juntas 50 reais por um trabalho e uma delas ganhou 25% do que a outra. Quanto ganhou cada pessoa?