

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**JOELMA IAMAC NOMURA**

**Esquemas Cognitivos e *Mente Matemática* inerentes ao  
objeto matemático autovalor e autovetor:  
traçando diferenciais na formação do engenheiro**

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**São Paulo**

**2014**



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**JOELMA IAMAC NOMURA**

**Esquemas Cognitivos e *Mente Matemática* inerentes ao  
objeto matemático autovalor e autovetor:  
traçando diferenciais na formação do engenheiro**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia  
Universidade Católica de São Paulo, como exigência  
parcial para obtenção do título de Doutor em  
Educação Matemática sob orientação da Professora  
Doutora Barbara Lutaif Bianchini.*

**São Paulo**

**2014**



Banca Examinadora

---

---

---

---

---



Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: \_\_\_\_\_ Local e Data: \_\_\_\_\_



## *AGRADECIMENTOS*

---

A minha orientadora, Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini, por acreditar no meu trabalho e empenho, e por mais esses anos de constantes incentivos e orientações repletas de bom humor.

Aos professores participantes da banca examinadora, Professora Doutora Leila Zardo Puga, Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Iglioni, Professor Doutora Sônia Pitta Coelho e Professora Doutora Helena Noronha Cury.

Ao Professor Doutor Fabio Gerab, pela inestimável atenção na busca dos alunos participantes da pesquisa.

Aos meus professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

Aos alunos participantes dos estudos de caso, devido às suas reais motivações e vontades em sempre aprender.

Aos meus colegas do Doutorado e Mestrado, em especial aos integrantes do grupo GPEA, pelas contribuições durante as reuniões do grupo.

A CAPES, pela bolsa de estudo, que permitiu maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

A todos, cada qual com sua particularidade, que de alguma forma me auxiliaram para o desenvolvimento desta tese, expresse minha gratidão.

Em especial, ao meu marido Moacyr e aos meus filhos Giovanna, Victor e Juliana, que sempre estiveram ligados a cada etapa de minha vida acadêmica e que sempre persistiram na sua continuidade.

Aos meus pais Issame e Nancy por dedicarem esforços para que eu colhesse sempre o melhor dos estudos desde criança.



*De todos os modos de escapar da realidade, a Matemática é o que teve maior êxito até hoje. É uma fantasia que se torna ainda mais viciante porque ela trabalha para melhorar a mesma realidade da qual estamos tentando escapar. Todos os outros escapismos - amor, drogas, passatempos, o que quer que seja - são efêmeros, em comparação com a Matemática. O sentimento de triunfo do matemático, enquanto ele força o mundo a obedecer às leis que sua imaginação criou, livremente, realimenta seu próprio sucesso. O mundo é permanentemente transformado por ação de sua mente, e a certeza de que suas criações serão perenes renova sua confiança como nenhum outro objetivo consegue fazer.*

*Gián-Carlo Rota*



## RESUMO

---

O objetivo desta pesquisa atrela-se aos resultados obtidos na Dissertação de Mestrado defendida em setembro de 2008 no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Nesta mesma dissertação, questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear buscaram responder e encontrar novas formas de direcionamento e perspectivas de ensino em uma graduação em Engenharia Elétrica, indagando *Por que e Como deve ser lecionada a disciplina de Álgebra Linear em um curso com este perfil?* Dentre os resultados obtidos, identificou-se que a interdisciplinaridade inerente aos tópicos de Álgebra Linear e conteúdos específicos ou aplicados da Engenharia constituiu-se de fatores imprescindíveis para ao reconhecimento das disciplinas matemáticas, como base teórica e conceitual. A interdisciplinaridade refletida em objetos matemáticos específicos da Álgebra Linear e situações práticas da Engenharia prima pela formação do engenheiro conceitual e generalista que busca na fundamentação teórica e básica a justificativa para o aprimoramento tecnológico de sua área. Com base no cenário e resultados vislumbrados na defesa da dissertação, propusemos investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação do aluno dos cursos de Engenharia, evidenciando os esquemas cognitivos e a *mente matemática* dos estudantes, sujeitos de nossa investigação. Para tanto, as seguintes questões são destacadas: (1) Quais concepções (ação-processo-objeto-esquema) são evidenciadas nos alunos, após o estudo do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de sua formação acadêmica em cursos de Engenharia?; e (2) Nessas mesmas fases, quais conceitos imagem e definição são evidenciados no estudo do objeto matemático autovalor e autovetor? Fundamentados pelos aportes teóricos de Dubinsky (1991), sobre a Teoria APOS, e Vinner (1991) nos conceitos imagem e definição, foram considerados os processos cognitivos envolvidos na construção do objeto matemático, identificando a natureza de suas entidades cognitivas retratadas na *mente matemática*. A discussão sobre *mente matemática* foca-se tanto na estrutura matemática que é concebida e compartilhada pela comunidade como no delineamento em que cada estrutura biológica mental trata essas mesmas ideias. Para tanto, considerou-se a relação entre as ideias que constituem a Teoria APOS, os conceitos imagem e definição e alguns aspectos da Neurociência Cognitiva. A pesquisa caracterizada como estudos de caso múltiplos, identificou os dados a partir do discurso dos estudantes dos cursos de Engenharia em contextos diversos de formação, estabelecidos pelas instituições de ensino. A análise do conceito matemático específico levou à chamada decomposição genética desse conceito, que foi proposto pelo problema de Sistema Dinâmico Discreto, descrito pela equação de diferença  $x_{k+1} = A.x_k$  ( $k=0,1,2,\dots$ ). Com base nas ideias de Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012), foi possível identificar algumas características que evidenciassem as diferentes concepções dos estudantes. Além disso, foram consideradas algumas ideias que caracterizam o conceito imagem e definição de acordo com Vinner (1991) e Domingos (2003). Como resultado desta investigação, identificou-se que os alunos do primeiro estudo de caso, em fases distintas de formação, apresentam a concepção processo e o conceito imagem em nível instrumental do objeto matemático autovalor e autovetor. Já os alunos do segundo de caso, particularmente, todos os da primeira fase, e dois da segunda apresentaram indícios da concepção ação e conceito imagem em nível incipiente.

Apenas um aluno da segunda fase também evidenciou ter a concepção processo e o conceito imagem em nível instrumental, como os sujeitos do primeiro estudo de caso. Portanto, constatou-se que não houve evolução significativa entre as concepções inerentes à Teoria APOS e os conceitos imagem do objeto de estudo. Evidenciou-se que todos os alunos apresentaram em seus discursos relações existentes entre a disciplina Álgebra Linear e demais disciplinas do curso, como Cálculo Numérico, Circuitos Elétricos, Computação Gráfica e Sistemas de Controle, com menor ou maior grau de profundidade e conhecimento. Percebe-se que os alunos atribuem relevância às disciplinas matemáticas em suas formações e buscam por um novo enfoque de ensino que contemple as relações entre as mesmas e as disciplinas da Engenharia.

Palavras-chave: Autovalor e Autovetor, Engenharia, Teoria APOS, Conceito Imagem e Definição; Mente Matemática.

# ABSTRACT

---

The objective of this research harnesses to the results obtained in the Master's Dissertation defended in September 2008 in Postgraduate Studies Program in Mathematics Education at PUC - SP. In this same essay, issues related to teaching and learning of linear algebra sought to answer and find new ways of targeting and perspectives of students in a graduate in Electrical Engineering, asking Why and How should it be taught the discipline of linear algebra on a course with this profile? Among the results, we identified that the interdisciplinarity inherent to the topics of Linear Algebra and specific content of engineering or applied constituted an essential factor for the recognition of mathematical disciplines as theoretical and conceptual basis. Interdisciplinarity reflected in specific mathematical objects of linear algebra and practical situations of engineering materials for the formation of conceptual and general engineer seeking the theoretical foundation and basic justification for the technological improvement of its area. Based on a scenario and results envisioned in the dissertation we propose to investigate the cognitive structures involved in the construction of mathematical object eigenvalue and eigenvector in the initial and final student education phases in Engineering courses, showing the cognitive schemes in their mathematical minds. For this, the following issues are highlighted: ( 1 ) What conceptions (action - process -object- schema ) are evidenced in students after studying the mathematical object eigenvalue and eigenvector in the initial and final phases of their academic training courses in Engineering? and ( 2 ) these same phases, which concept image and concept definition are highlighted in the study of eigenvalue and eigenvector mathematical object? Substantiated by the theoretical contributions of Dubinsky (1991), on the APOS Theory and Vinner (1991), about the concept image and concept definition, we consider the cognitive processes involved in the construction of mathematical object, identifying the nature of their cognitive entities portrayed in mathematical mind. The discussion focuses on mathematical mind both the mathematical structure that is designed and shared by the community as the design in which each mental biological framework handles such ideas. To do so, we consider the relationship between the ideas which constitute the APOS theory, concepts image and definition and some aspects of Cognitive Neuroscience. Characterized as multiple case studies, data collection covered the speech of students in engineering courses in various training contexts, established by the institutions. The analysis of the specific mathematical concept called genetic decomposition led to this concept, which was proposed by System Dynamic Discrete problem, described by the difference equation  $x_{K+1} = A.x_K$ , ( $K = 0,1,2, \dots$ ) . Based on the ideas of Stewart (2008) and Trigueros *et al.* (2012) it was possible to us to identify some characteristics of showing the different conceptions of the students. Moreover, we consider some ideas that characterize the concept image and concept definition according Vinner (1991) and Domingos (2003). As a result of our investigation, we identified that the students of the first case study, at different stages of training, present the design process and the concept image on an instrumental level mathematical object eigenvalue and eigenvector. Have students in the second case, particularly, all of the first phase, and two of the second, showed signs of action and concept image incipient level. As a student of the second phase, have also highlighted the design process and the concept image on an instrumental level as the subject of the first case study. Therefore, we find no significant evolution between the inherent APOS Theory concepts and the concepts image of the object of study. We

show that all students presented their speeches in relations between the Linear Algebra course and other courses in the program, such as Numerical Calculation, Electrical Circuits , Computer Graphics and Control Systems, with lesser or greater degree of depth and knowledge. We realize that students attach importance to mathematical disciplines in its formations and seek for a new approach to teaching that address the relationships between them and the disciplines of Engineering.

Keywords: Eigenvalue and Eigenvector, Engineering, APOS Theory, Concept Image and Concept Definition; Mathematical Mind.

# SUMÁRIO

---

INTRODUÇÃO	27
Capítulo 1 - Revisão da Literatura	43
1.1. A contribuição do trabalho de Pedersen (2006)	43
1.2. A contribuição do trabalho de Silva e Velozo (2003)	46
1.3. A contribuição do trabalho de Silva, Bernarden; Reck (2010)	47
1.4. A contribuição do trabalho de Romo e Oktaç (2007)	49
1.5. A contribuição do trabalho de Camarena (2011)	55
1.6. A contribuição do trabalho de Nomura (2008)	58
1.7. Resumo e Conjecturas	60
Capítulo 2 - Fundamentação Teórica	63
2.1. Teoria APOS	63
2.1.1. Resumo e Conjecturas	74
2.2. Pensamento Matemático Avançado (PMA)	75
2.2.1. O Conceito Imagem e Conceito Definição na concepção de Vinner (1991)	85
2.2.1.1. Os diferentes níveis de conceitos imagem	91
2.2.2. Resumo e Conjecturas	101
2.3. A base biológica do processo ação-objeto-esquema – perspectivas das contribuições de aspectos da Neurociência Cognitiva	104
2.3.1. Uma breve descrição da Neurociência Cognitiva	107
2.3.2. A respeito da anatomia do sistema nervoso	109
2.3.3. As concepções opostas de Piaget e da Neurociência	112
2.3.4. Contribuições da Neurociência Cognitiva no Pensamento Matemático Avançado e na Educação Matemática	116
2.3.5. As contribuições de Keith Devlin	121
2.3.6. Resumo e Conjecturas	129
Capítulo 3 - Procedimentos Metodológicos	133
3.1. A metodologia de investigação	133
3.1.1. O estudo de caso como metodologia de investigação	134

3.2.	Os passos percorridos e o cenário da investigação	139
3.3.	Resumo e Conjecturas	141
Capítulo 4 - A formação do profissional de Engenharia orientada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais		
	Curriculares Nacionais	145
4.1.	As contribuições de Rugarcia, Woods; Stice (2000)	146
4.1.1.	Componentes da Educação em Engenharia	147
4.1.2.	Aprendizado Independente, Interdependente e ao longo da vida	148
4.1.3.	Resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade	149
4.1.4.	Obstáculos à mudança	149
4.2.	Resumo e Conjecturas	155
Capítulo 5 - A descrição dos livros de Álgebra Linear		
		157
5.1.	O livro: Álgebra Linear de David Poole (2004)	157
5.1.1.	Resumo e Conjecturas	165
5.2.	O livro: Álgebra Linear e suas aplicações de David C. Lay (1999)	167
5.2.1.	Resumo e Conjecturas	183
5.3.	Considerações a respeito de ambos os livros e as recomendações destacadas pelo LACSG, para um primeiro curso de Algebra Linear	186
Capítulo 6 - A investigação		
		193
6.1.	Apresentação do problema	193
6.2.	A Investigação Piloto	195
6.2.1.	Os Conceitos Imagem e Definição na concepção de Vinner (1991), e Domingos (2003)	200
6.3.	A reformulação da investigação piloto	204
6.4.	As concepções (ação-processo-objeto-esquema) de acordo com Stewart (2008)	204
6.5.	As concepções (ação-processo-objeto-esquema) de acordo com Trigueros <i>et al.</i> (2012)	216
6.6.	A decomposição genética do objeto matemático autovalor e autovetor de nossa tese	225

6.6.1.	Questões trabalhadas e seus objetivos	225
6.6.2.	Construção da solução geral do problema	226
6.6.2.1.	A solução	226
Capítulo 7 - Análise da investigação		229
7.1.	Estudo de caso I - Primeira fase	229
7.1.1.	Resumo e Conjecturas - Fase I - Entrevistas com alunos do 3º ciclo de um curso de Engenharia (Estudo de caso I)	251
7.2.	Estudo de caso I - Segunda fase - Aluno do 10º semestre de um curso de Engenharia	255
7.2.1.	O discurso e desenvolvimento do problema pelo aluno entrevistado	255
7.2.2.	Resumo e Conjecturas	265
7.3.	Estudo de caso II - Primeira fase - Alunos do 4º semestre de um curso de Engenharia	268
7.3.1.	Resumo e Conjecturas	278
7.4.	Estudo de caso II - Segunda fase - Entrevistas com alunos do 10º semestre de um curso de Engenharia	280
7.4.1.	O discurso e desenvolvimento do problema pelos alunos entrevistados	280
7.4.2.	Resumo e Conjecturas	295
CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES		301
REFERÊNCIAS		313
ANEXO A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido		319
ANEXO B - Dissertações do GPEA - PUC-SP		321
ANEXO C - Teoremas do Capítulo Valores e Vetores Próprios - David Poole		327
ANEXO D - Teoremas do Capítulo Autovalores e Autovetores - David Lay		333

ANEXO E - Comentários Numéricos	339
ANEXO F - Plano de Ensino - Investigação Piloto	341
ANEXO G - Plano de Ensino - Estudo de Caso I	343
ANEXO H - Plano de Ensino - Estudo de Caso II	345
ANEXO I - Exemplos do Livro <i>Introdução aos Sistemas Dinâmicos</i>	346
ANEXO J – Valores Próprios e Vetores Próprios de acordo com Loreto; Loreto Jr.; Silva (2011)	349

## ***LISTA DE FIGURAS***

---

Figura 1 - Matriz de Leslie	44
Figura 2 - Representação de uma Rede Neuronal de Departamentos e Locais	54
Figura 3 - Uma terna dourada em Educação	57
Figura 4 - Esquemas e suas construções	70
Figura 5 - Inter-relação entre conceito imagem e conceito definição	87
Figura 6 - O crescimento cognitivo do conceito formal	87
Figura 7 - Inter-relação entre definição e imagem	88
Figura 8 - Dedução puramente formal	89
Figura 9 - Dedução seguida de pensamento intuitivo	89
Figura 10 - Resposta intuitiva	90
Figura 11 - Mapa de Broadmann	110
Figura 12 - A construção da memória no cérebro humano	120
Figura 13 - Parte de uma rede neural simples que lê palavras de três letras e as associa a diversas propriedades dos objetos que elas denotam	127
Figura 14 - Grafo completo	158
Figura 15 - Grafo de Petersen	159
Figura 16 - Grafo Bipartido	160
Figura 17 - Efeitos da multiplicação por $A$	169
Figura 18 - Autoespaços para $\lambda = -4$ e $\lambda = 7$	170
Figura 19 - $A$ age como expansão no autoespaço	171
Figura 20 - $A$ age como atrator	180
Figura 21 - $A$ age como repulsor	180
Figura 22 - $A$ age como ponto de sela (Exemplo 4)	181
Figura 23 - $A$ age como ponto de sela (Exemplo 5)	183
Figura 24 - Questões apresentadas sobre autovalores e autovetores	206

Figura 25 - Definição de Autovalor e Autovetor	212
Figura 26 - Mapas Conceituais de Autovalores e Autovetores dos estudantes 2 <sup>a</sup> -28 (Esquerda) e 2 <sup>a</sup> -30 (Direita)	213
Figura 27 - Representação Geométrica	220
Figura 28 - Representação Geométrica do problema proposto	227
Figura 29 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 1	235
Figura 30 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 2	236
Figura 31 - Representação matricial do sistema pelo Aluno 1	237
Figura 32 - Representação matricial do sistema pelo Aluno 2	238
Figura 33 - Resposta à intervenção da pesquisadora pelo Aluno 1	239
Figura 34 - Resposta à intervenção da pesquisadora pelo Aluno 2	240
Figura 35 - Resposta à intervenção da pesquisadora pelo Aluno 3	241
Figura 36 - Encontrando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 1	242
Figura 37 - Encontrando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 2	243
Figura 38 - Encontrando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 3	244
Figura 39 - Encontrando os autovetores pelo Aluno 1	245
Figura 40 - Encontrando os autovetores pelo Aluno 2	246
Figura 41 - Encontrando os autovetores pelo Aluno 3	247
Figura 42 - Variando o índice $k$ pelo Aluno 1	249
Figura 43 - Variando o índice $k$ pelo Aluno 2	250
Figura 44 - Variando o índice $k$ pelo Aluno 3	250
Figura 45 - A identificação dos parâmetros pelo Aluno 1	256
Figura 46 - Identificando o polinômio característico pelo Aluno 1 – Teorema de Cauley-Hamilton	257
Figura 47 - Identificando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 1	257
Figura 48 - Representação geométrica dos autovetores associados pelo Aluno 1	259
Figura 49 - Autovetores representados como trajetórias pelo Aluno 1	260

Figura 50 - Sistema de controle em malha fechada	261
Figura 51 - Solução matemática de problemas físicos	262
Figura 52 - Resposta da Questão 1 pelo Aluno 1	269
Figura 53 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 1	270
Figura 54 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 2	270
Figura 55 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 3	271
Figura 56 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 1	272
Figura 57 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 2	273
Figura 58 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 3	273
Figura 59 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 1	275
Figura 60 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 2	275
Figura 61 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 3	275
Figura 62 - Resposta à Intervenção da Pesquisadora pelo Aluno 1	277
Figura 63 - Resposta à Intervenção da Pesquisadora pelo Aluno 2	277
Figura 64 - Resposta à Intervenção da Pesquisadora pelo Aluno 3	278
Figura 65 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 1	285
Figura 66 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 2	285
Figura 67 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 3	286
Figura 68 - Notação matricial pelo Aluno 3	287
Figura 69 - Representação do sistema linear em notação matricial pelo Aluno 1	289
Figura 70 - Encontrando os autovalores e autovetores pelo Aluno 1	290
Figura 71 - A identificação do polinômio característico e suas raízes pelo Aluno 1	291
Figura 72 - A identificação dos autovetores associados a $\lambda_1 = 1,02$	292
Figura 73 - A identificação dos autovetores associados a $\lambda_2 = 0,58$	294
Figura 74 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 3	295
Figura 75 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 3	295

## LISTA DE QUADROS

---

Quadro 1 - Principais ideias apresentadas por Domingos (2003) que caracterizam o conceito imagem incipiente	94
Quadro 2 - Principais ideias apresentadas por Domingos (2003) que caracterizam o conceito imagem instrumental	96
Quadro 3 - Principais ideias apresentadas por Domingos (2003) que caracterizam o conceito imagem relacional	99
Quadro 4 - Conteúdos gerais das disciplinas básicas	153
Quadro 5 - Teoria APOS e Os Três Mundos para Autovalores e Autovetores de acordo com Stewart (2008)	215
Quadro 6 - As principais ideias a respeito das concepções ação-processo-objeto-esquema de acordo com Trigueros <i>et al.</i> (2012)	221
Quadro 7 - Dissertações do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA-PUC-SP). Projetos: Sobre a noção de base de um espaço vetorial (2002 a 2006) e Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear (2007 a 2013)	321

## LISTA DE SIGLAS

---

AHP	<i>Analytic Hierarchy Process</i>
APOS	Ação-Processo-Objeto-Esquema
GPEA	Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica
GSP	<i>Geometer's Sketch Pad</i>
IES	Instituição de Ensino Superior
LACSG	<i>Linear Algebra Curriculum Study Group</i>
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
PMA	Pensamento Matemático Avançado
PAC	<i>Problema de Alocação Quadrática</i>
RedMaCoCiencias	Rede Internacional de Investigação em Matemática no contexto das Ciências
RUMEC	<i>Research in Undergraduate Mathematics Education</i>
SPD	Sistema Possível e Determinado
SPI	Sistema Possível e Indeterminado
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido



# INTRODUÇÃO

---

A motivação deste estudo iniciou-se em 2004 em minha primeira aula de Matemática em uma instituição de ensino de nível superior do Estado de São Paulo. A oportunidade de ingressar na carreira acadêmica trouxe-me inquietações que, para uma engenheira e professora de disciplinas matemáticas, poderiam ser resolvidas ou, pelo menos, amenizadas. Mas, até hoje ainda não foram e parecem crescer cada vez mais ao longo dos anos de ensino em cursos de Engenharia.

Buscar uma maneira para que os conceitos matemáticos fossem apresentados e, ao mesmo tempo, pudessem incentivar seu estudo pelos alunos ingressantes no Ensino Superior foi um dos fatores motivadores para as investigações futuras que se sucederam em nosso grupo de pesquisa.

Em 2006, iniciei minhas pesquisas, tendo sempre como objeto de estudo conceitos matemáticos relacionados a cursos de Engenharia. Pretendia entender como as relações entre os conceitos apresentados pelas disciplinas básicas, como Cálculo, Geometria Analítica ou Álgebra Linear poderiam ser relacionadas com as disciplinas específicas da Graduação, mostrando sempre que todo conteúdo seria muito importante em toda a formação do estudante.

Assim, percebi que meu interesse nesta tese de Doutorado é dar continuidade à pesquisa do Mestrado Acadêmico intitulada *Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições*. Nossa investigação está no atual projeto denominado *Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear*<sup>1</sup> do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)<sup>2</sup>. A proposta do Grupo é ampliar o campo de investigação a todos os conceitos básicos de Álgebra Linear em cursos de Ciências Exatas, como Matemática, Ciência da Computação, Engenharia e outros.

A pesquisa de Mestrado Acadêmico teve como objetivo identificar elementos que pudessem responder à seguinte questão: *Por que e como deve ser lecionada a*

---

<sup>1</sup> O atual projeto denominado *Em busca de situações propícias para a aprendizagem de Álgebra Linear* iniciou-se em 2007, substituindo o antigo projeto finalizado em 2006, cujo título é *Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial*.

<sup>2</sup> Destacamos que todos os trabalhos do grupo de pesquisa estão listados nos dados do Quadro 7 (ANEXO B) desta tese.

*disciplina Álgebra Linear em curso de graduação de Engenharia Elétrica?* Em sua conclusão, todas as respostas foram obtidas pela análise de documentos governamentais e institucionais de três universidades brasileiras, do discurso de cinco professores do curso de graduação em Engenharia Elétrica e, por fim, de exercícios propostos em livros didáticos indicados pelos professores entrevistados.

Na pesquisa de Mestrado, dentre os conceitos evidenciados na análise das entrevistas realizadas com professores dessa graduação, houve destaque para o objeto matemático autovalor e autovetor, que lhes atribuiu relevância frente aos aspectos interdisciplinares em disciplinas específicas da Engenharia, dentre elas, Processamento de Sinais, Eletromagnetismo, Circuitos Elétricos ou Sistemas e Sinais (NOMURA, 2008). A relação entre os conceitos ocorre na análise de sinais, como o de um telefone ou uma televisão que, posteriormente são processados por sistemas que irão modificá-los ou extrair informação adicional (NOMURA, 2008).

As respostas nos conduziram ao papel da interdisciplinaridade inerente ao curso que o professor de Álgebra Linear pode destacar e trabalhar ao longo de toda a formação do estudante.

De acordo com Fazenda (2009), a interdisciplinaridade busca um conhecimento universal, ou seja, um conhecimento que não seja dividido em campos ou áreas específicas. Na interdisciplinaridade, os saberes científicos aproximam-se oriundos de diversos campos do conhecimento, em uma fala compreensível e audível aos diversos interlocutores.

A metodologia interdisciplinar em seu exercício requer como pressuposto uma atitude especial ante o conhecimento, que se evidencia no reconhecimento das competências, incompetências, possibilidades e limites da própria disciplina e de seus agentes, no conhecimento e na valorização suficientes das demais disciplinas e dos que a sustentam (FAZENDA, 2009, p. 69).

Destacamos o papel fundamental dos aspectos interdisciplinares da formação do profissional da Engenharia e iniciamos contemplando uma citação de Poole (2004) que evidencia tal relação:

Álgebra Linear é um assunto estimulante. Como ponto de entrada conduz aos muitos ramos da Matemática com os quais tem ligações, incluindo álgebra abstrata, matemática discreta, cálculo, equações diferenciais, geometria, estatística, métodos numéricos, pesquisa operacional e sistemas dinâmicos. Ela expõe os estudantes a aspectos teóricos, aspectos aplicados e aspectos numéricos da Matemática e tem aplicações em uma gama variada de disciplinas (POOLE, 2004, p. xii).

Em diversas situações, a Álgebra Linear é utilizada para resolver problemas, tanto na área de Matemática como nas áreas de: Física, Biologia, Química, Engenharia, Estatística, Economia, Psicologia, Sociologia, dentre outras. É possível afirmar que o curso de Álgebra Linear tem grande influência na formação acadêmica e profissional do estudante, expondo tanto professores como alunos a uma série variada de conceitos e relações entre disciplinas pertinentes à sua formação.

Para Stewart (2008), a Álgebra Linear aplica-se a uma variedade de campos como por exemplo, Química, Ciência da Computação, Engenharia Elétrica, Economia, Genética, Física, Estatística e Dinâmica Populacional. Contudo, um grupo de pesquisadores de Educação Matemática (Dorier *et al.*, 1997) relatou as dificuldades de estudantes em cursos de Álgebra Linear. Stewart (2008) considera que ensinar e aprender Álgebra Linear pode representar uma frustração, tanto aos professores como aos alunos. Acrescenta que os alunos nunca tiveram experiência com o assunto antes de ingressarem na universidade e que, posteriormente, se limitam a técnicas e determinados procedimentos de resolução em lugar de compreender os conceitos. Evidencia que muitos pesquisadores em Educação Matemática identificam a possibilidade de mudar o currículo, sugerindo novas maneiras de ensino, porém, deparam-se com a escassez de pesquisas que mostram as dificuldades dos alunos.

Dentre as pesquisas que apoiaram nosso estudo e que fazem parte do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, o doutoramento de Karrer (2006) revelou que, para os estudantes da área computacional, o tema transformação linear é considerado como pré-requisito para a disciplina de Computação Gráfica, e sua importância é atribuída à visualização em modelos geométricos e gráficos. Apoiando-se em trabalhos de Dorier *et al.* (1997) e Chartier (2004) e de maneira a considerar a relevância do ensino da Álgebra Linear com modelos geométricos e figurativos, a autora explorou a conversão de registros

em um ambiente de geometria dinâmica. Fundamentada na teoria de representação semiótica de Duval (1995; 2000; 2003), a autora citada analisou a exploração de registros e conversões explicitadas com base em um questionário aplicado a 86 estudantes da área de computação, assim como em livros de Álgebra Linear e de Computação Gráfica.

Seus estudos evidenciaram que as principais dificuldades e deficiências (palavras da própria autora) apontadas pelos alunos, sujeitos de sua investigação, foram encontradas, sobretudo, nos registros matricial e gráfico.

Acrescentamos que Karrer (2006) explorou as diversas representações de transformações lineares, no ambiente *Cabri-Géomètre* e papel&lápis, baseada na metodologia de *Design Experiments*.

Na pesquisa de Romo e Oktaç (2007), o objetivo foi observar o papel que os conceitos matemáticos desempenham em projetos de Engenharia, destacando sua necessidade teórica e os problemas de aplicação. A finalidade da investigação é saber o nível teórico dos conceitos matemáticos que são usados na resolução de um problema de Engenharia na vida real. Expõem questões, como por exemplo, (a) Que tipos de conhecimentos matemáticos são usados pelo engenheiro? e (b) Como justificar a seleção de determinada ferramenta matemática?

A abordagem metodológica está atrelada ao marco teórico dos pensamentos teóricos e práticos que permitem observar e analisar fenômenos relacionados a esses projetos. Destacamos que a investigação das autoras focou o aspecto interdisciplinar, identificando as relações inerentes entre os conceitos matemáticos e a disciplina específica Engenharia de Sistemas.

Assim, podemos entender que os aspectos interdisciplinares potencializam a relação entre os conceitos matemáticos em diversos contextos e campos do conhecimento.

Também consideramos que nossa problematização considera aspectos da pesquisa de Dorier (2002). Em sua pesquisa, o autor discute a questão da flexibilidade cognitiva como centro da problemática do ensino da Álgebra Linear. A flexibilidade cognitiva repercute a mudança do ponto de vista das representações de registros semióticos, mudança de quadros, de níveis de descrição ou modos de raciocínio. Seu estudo enfatiza a importância de repensar o ensino da Álgebra

Linear e de seu processo de aprendizagem, assim como repensar as dificuldades apresentadas pelos estudantes.

O autor faz referência ao trabalho de Guershon Harel e outros 15 membros do LACSG (*Linear Algebra Curriculum Study Group*) que iniciaram, em 1990, a reforma do currículo da Álgebra Linear no ensino universitário dos Estados Unidos da América (EUA). Como resultado dessa investigação, um documento deixou recomendações que se articularam em quatro eixos:

1) **A demonstração:** os autores citam a demonstração como desafio intelectual que acarreta o aumento da compreensão dos conceitos em estudo;

2) **Tempo suficiente para o ensino da Álgebra Linear:** o grupo reconhece que o tempo para o ensino da Álgebra Linear nas universidades é bastante curto e recomenda um segundo curso de Álgebra Linear centrado na teoria matricial, como prioridade do ensino da matemática no início da vida universitária.

3) **Novas tecnologias educacionais:** outra recomendação apresentada pelo LACSG defende o uso de novas tecnologias em um primeiro curso de Álgebra Linear. Harel sugere a incorporação do *Matlab* (ou outro *software* similar) no ensino da Álgebra Linear. Assim, o estudo do objeto matemático baseado em um *software* pode ajudar os estudantes a ter uma visão “concreta” (no sentido de serem especificadas as *n-uplas* e matrizes); e

4) **O conteúdo:** os conceitos estão limitados ao  $\mathbb{R}^n$ , tendo o método de Gauss como ferramenta fundamental para a resolução de sistemas e a triangularização que são formas reduzidas de matrizes. Os vetores formam uma coleção ordenada de números reais e uma transformação linear é uma matriz. O programa engloba os autovalores e autovetores na estrutura euclidiana do  $\mathbb{R}^n$ .

No mesmo trabalho, Dorier (2002) cita que Harel propõe um quadro teórico pautado em três princípios gerais de ensino:

- **o da concretização:** é possível que o estudante abstraia uma estrutura matemática de um modelo dado, constituindo entidades conceituais, cujos processos são exemplos de abstração reflexionante<sup>3</sup>. Por exemplo, Harel explica as dificuldades dos estudantes em resolver exercícios de Álgebra Linear elementar em que os vetores são funções. Contudo, tanto o conceito de vetor como o de função ainda não são concretos, nem correspondem às entidades concretas formadas na

---

<sup>3</sup> O termo abstração reflexionante será discutido no Capítulo 3.

mente dos estudantes. Do mesmo modo, os estudantes não constroem o conceito de função como objeto matemático ou como uma entidade de um espaço vetorial. Em consequência, quando escrevem a igualdade:  $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$  para determinar o conjunto  $\{x, x^2, x^3, x^4\}$  não compreendem que o zero à direita da igualdade é uma função, o vetor nulo do espaço vetorial  $\mathbb{R}^4[x]$  e não o número real zero. E mais, não interpretam essa igualdade como uma equação em  $x$ .

Do mesmo modo, os estudantes não consideram as  $n$ -uplas ou matrizes, como entidades conceituais, por não terem ainda a habilidade da manipulação simbólica de tais objetos.

Uma condição prévia para a realização do princípio de concretização é que os estudantes construam a compreensão do conceito em um contexto usado para construir o conceito imagem<sup>4</sup> do objeto matemático em estudo. Essa condição preliminar é a base do programa da Álgebra Linear desenvolvido para estudantes por Harel. Sua hipótese é que a aplicação da Álgebra Linear em um contexto geométrico – em duas ou três dimensões – pode conduzir a uma melhor compreensão dos estudantes do conceito de espaço vetorial e posterior aplicação em sistema algébrico.

Assim, o programa inicia-se pelo estudo detalhado dos conceitos centrais de dependência e independência linear, de combinação linear, de base e dimensão. É importante que os estudantes visualizem os fenômenos da Álgebra Linear, ao utilizarem as representações gráficas aprendidas na fase anterior. O objetivo essencial é que os estudantes desprendam-se da ideia de que a dedução dos resultados em Álgebra Linear não depende unicamente dos oito axiomas do espaço vetorial ou das definições específicas de cada elemento:

- **o da necessidade:** para que o estudante aprenda, é preciso que ele sinta a necessidade daquilo que é ensinado. Harel considera a necessidade intelectual em oposição à necessidade social ou econômica. Para ele, o conflito cognitivo permite modificar as concepções existentes; e

- **o da generalização:** quando se trata de um modelo específico, ou seja, um modelo que atenda ao princípio da concretização, as atividades educacionais dentro desse modelo devem permitir e incentivar a generalização dos conceitos envolvidos. Este princípio visa a tornar os estudantes em condições de abstrair os conceitos e

---

<sup>4</sup> O termo conceito imagem será discutido no Capítulo 3.

aplicá-los em contextos particulares. Um exemplo apresentado é que em um espaço geométrico de três dimensões pode ser definida uma base por três vetores não coplanares. Mas esta definição é restritiva e depende do contexto, não sendo transferida para espaços vetoriais abstratos. Harel faz um estudo sobre o conceito de base, que é explorado pelos estudantes pautado no conceito de conjunto gerador minimal. Os estudantes são conduzidos a observar que o sistema gerador de coordenadas pode não ser único.

Conforme o autor citado expõe em seu artigo, muitos estudantes negam a natureza própria da Álgebra Linear, a abstração.

Isso faz com que muitos cursos tornem-se a repetição de algoritmos e tarefas que se reduzem ao tratamento de vetores no  $R^2$  e matrizes.

Estudos de Dorier (2002) e Sierpinska (2000) trazem um compilado de trabalhos de investigação relacionados ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, ao identificarem que os principais problemas estão relacionados à própria natureza da Álgebra Linear (dificuldades conceituais) e outros relacionados à determinada classe de pensamento requerido para entender a Álgebra Linear (dificuldades cognitivas).

Para Dreyfus (1991), não é suficiente, por exemplo, definir e exemplificar um conceito abstrato como espaço vetorial. Os estudantes podem construir as propriedades desse conceito, baseados nas deduções da definição, cujas atividades devem promover a abstração. Os processos abstratos envolvidos na construção de determinado conceito deverão ser analisados e discutidos com a finalidade de tornar os professores de Matemática Avançada mais conscientes do que ocorre durante tais processos.

Mas, o que torna a Álgebra Linear tão difícil para os alunos compreender?

De acordo com Stewart (2008), pesquisadores em Educação Matemática vêm procurando melhorar o currículo de Álgebra Linear com novas maneiras de ensino e gerenciamento do curso. Existem poucas pesquisas que evidenciam as dificuldades dos estudantes com os livros-texto de Álgebra Linear, apresentados pelos currículos e métodos de ensino. Mas, há questões importantes e razões suficientes para estudar esta questão. A seguir, Stewart (2008) cita algumas possíveis razões para as dificuldades dos estudantes na disciplina.

## *A natureza abstrata da Álgebra Linear*

O autor afirma haver dificuldades conceituais e cognitivas que são relacionadas ao tipo de pensamento requerido para entender a Álgebra Linear. Na maioria dos casos, as duas fontes são inseparáveis. O ensino da Álgebra Linear usando diferentes representações pode melhorar a compreensão intelectual, contudo ainda não há estudos suficientes para reduzir as dificuldades cognitivas apresentadas pelos estudantes. Os assuntos relacionados à Álgebra Linear parecem ser apresentados de forma dissociada, cujo ensino e aprendizagem são limitados à definição do conceito e a métodos específicos para a resolução de problemas.

## *Problemas não apropriados*

Observamos que nem sempre é uma tarefa fácil encontrar problemas apropriados para apresentar novos conceitos.

Stewart (2008) cita uma opinião exposta por Dubinsky (1997) que considera preocupante que algumas das recomendações apresentadas por LACSG<sup>5</sup> (*Linear Algebra Curriculum Study Group*) podem involuntariamente dar as indicações erradas aos professores que acabam caindo na armadilha de trabalhar com exercícios que envolvam manipulações técnicas, sem o uso de seu conceito.

O autor discute o papel das definições, e se a sua falta de compreensão em Álgebra Linear poderá representar uma possível contribuição para as dificuldades dos alunos.

Tendo como problemática o cenário exposto anteriormente, consideramos que ainda existem lacunas relacionadas ao estudo das estruturas cognitivas de estudantes que estudam a Álgebra Linear, considerando o aspecto da flexibilidade cognitiva exigida, além do poder de abstração de seus conceitos. Particularmente, em cursos de Engenharia, qual o papel desses conceitos na formação acadêmica e

---

<sup>5</sup> As recomendações apresentadas por esse grupo serão apresentadas no Capítulo 5.

profissional de seus estudantes? E qual o papel das instituições de ensino frente às dificuldades apresentadas por seus alunos no aprendizado de disciplinas com esse perfil?

A busca por algumas respostas nos conduziu ao estudo do conceito específico da Álgebra Linear, autovalor e autovetor, que será abordado nesta pesquisa, desde sua definição formal como objeto matemático, mediante a reflexão sobre sua natureza abstrata e suas representações.

Assim, evidenciaremos ser possível mostrar que a Álgebra Linear amplia o campo de investigação na Matemática, enfatizando e compartilhando aspectos entre pesquisadores, professores, alunos e os que têm interesse na área.

De acordo com o trabalho de Fuentes (2008), é evidente o grande obstáculo ao formalismo no ensino e aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear. A autora aponta para a discussão de trabalhos que destaquem a importância da aplicação de problemas novos que permitam estabelecer conexões com outros conceitos nos quais seus elementos encontram-se estritamente relacionados. A atitude indagadora dos estudantes a respeito dos possíveis conceitos envolvidos oferece argumentos válidos que permitem justificar a formulação de uma solução. Assim, a autora ressalta que a abstração e a prática de novos exemplos incentivam a realização de conexões entre conceitos prévios e novos. Devemos considerar o formalismo próprio dos conceitos, evitando que sejam tratados por suas características e funcionalidades.

Dubinsky (1991) estabelece que a construção de objetos matemáticos ocorre em função de situações matemáticas problemáticas, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se formam para resolver determinada situação.

O autor supracitado acrescenta que o estudo da Álgebra Linear pode acarretar o Pensamento Matemático Avançado<sup>6</sup> atuante na Engenharia, na Ciência, Economia e outras áreas e que, por sua vez, é caracterizado pela abstração. Prossegue com a afirmação de que os elementos da Álgebra Linear são caracterizados como abstratos (transformações lineares sobre espaços vetoriais) e concretos (matrizes e vetores) e que são aplicados, conforme o tipo de curso que

---

<sup>6</sup> Apresentamos o conceito de Pensamento Matemático Avançado no Capítulo 2.

será criado. Mas, há divergências entre determinados conceitos que podem ser concretos para uns e abstratos para outros.

Para Dreyfus (1991), o Pensamento Matemático Avançado envolve a representação, a visualização, generalização, assim como a classificação, conjectura, indução, análise, síntese, abstração e formalismo.

Com base no cenário anterior de nossa pesquisa de mestrado e da problemática exposta frente ao estudo da disciplina Álgebra Linear, a proposta desta pesquisa de doutoramento é investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação do aluno dos cursos de Engenharia. Para tanto, evidenciaremos as concepções (ações, processos, objetos e esquemas), conforme expõe a Teoria APOS de Ed Dubinsky (1991).

Esta descrição sistemática é apresentada, mediante uma decomposição genética que representa um modelo cognitivo no qual o resultado da aplicação é composto pelos componentes: análise teórica, desenho e aplicação de instrumentos (corresponde ao problema aplicado) e análise e verificação ou refutação dos dados. Citamos que o desenvolvimento da decomposição genética baseou-se nas ideias dos trabalhos de Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012).

Também serão considerados os conceitos imagem e definição, de acordo com os estudos de Vinner (1991) e Domingos (2003).

Como sujeitos de nossa pesquisa consideramos os estudantes de cursos de Engenharia nas seguintes fases de formação acadêmica: (a) após concluírem a disciplina de Álgebra Linear<sup>7</sup> e (b) após a conclusão de disciplinas específicas que contemplem a interdisciplinaridade entre os conceitos aplicados da Engenharia e os conceitos do objeto matemático em estudo<sup>8</sup>.

Para tanto, assumimos como questões de nossa investigação:

- (1) Quais concepções (ação-processo-objeto-esquema) são evidenciadas nos alunos, após o estudo do objeto matemático autovalor e autovetor nas

---

<sup>7</sup> Nessa fase, a pesquisa foi realizada com estudantes do 3º. e 4º. semestres de um curso de Engenharia de duas instituições de ensino superior do Estado de São Paulo.

<sup>8</sup> Nessa fase, a pesquisa foi realizada com estudantes do 10º. semestre de cursos de Engenharia de duas instituições de ensino superior do Estado de São Paulo.

fases inicial e final de sua formação acadêmica em cursos de Engenharia?

- (2) Nessas mesmas fases, quais conceitos imagem e definição são evidenciados no estudo do objeto matemático autovalor e autovetor?

Como hipótese, admitimos que as estruturas cognitivas presentes nos alunos em fase final de formação expõem aspectos que evidenciam relações presentes em disciplinas específicas do curso com as disciplinas matemáticas, contrariamente do que é exposto nas mentes matemáticas dos alunos que iniciam o curso de Engenharia. Compreender as estruturas cognitivas e as mentes matemáticas que se formam nas fases inicial e final da formação do estudante, poderão destacar evidências de diferentes esquemas mentais.

### *Um panorama geral da Tese*

A seguir, apresentaremos uma breve descrição dos capítulos que compõem a tese:

No Capítulo 1, discorreremos sobre a revisão da literatura que consideramos para justificar nossas escolhas e motivações pela pesquisa. Nesse capítulo, serão apresentadas pesquisas que destacam o papel do objeto matemático autovalor e autovetor na Engenharia, dentre elas, a Engenharia de pontes e de energia. Também ressaltaremos a importância do trabalho do pesquisador dinamarquês Pedersen que apresenta um modelo de crescimento populacional para o estudo do objeto matemático autovalor e autovetor. Ressaltamos que o modelo proposto por Pedersen constituiu parte da reforma educacional realizada em outubro de 2005 na Real Universidade de Veterinária e Agricultura de Copenhague e nos conduziu à escolha de nosso instrumento diagnóstico.

Nesse capítulo, ainda apresentaremos textos que discutem o papel que os conceitos matemáticos desempenham em projetos de Engenharia, apontando para questões sobre quais conhecimentos matemáticos são necessários para tais profissionais, ou ainda, como são estabelecidas as relações entre os conceitos matemáticos evidenciados e as especificidades da Engenharia? Em todo o discurso

dos trabalhos listados, serão apresentados exemplos específicos de aplicações que poderão nortear os estudos dos interessados na área.

No Capítulo 2, discutiremos a Fundamentação Teórica que nos orientou na análise das informações obtidas na aplicação do instrumento diagnóstico e nas entrevistas realizadas com os estudantes voluntários.

Apresentaremos também a Teoria APOS (Ação-Processo-Objeto-Esquema) de Dubinsky (2001), e as ideias relacionadas ao conceito imagem e conceito definição de Vinner (1991) e Domingos (2003), como integrantes do Pensamento Matemático Avançado, para nortear a presente análise.

Ressaltamos que o estudo das estruturas cognitivas dos estudantes participantes da pesquisa foi realizado com base nas diferentes concepções estabelecidas pela Teoria APOS. Conforme expõe Dubinsky (2001), as ações são interiorizadas em processos e, então, encapsuladas em objetos mentais situados em esquemas cognitivos mais sofisticados, pensados como atividades dinâmicas e em constante mudança.

Esses novos esquemas serão acomodados a novos fenômenos, e o ciclo recomeçará sempre em busca de esquemas mais sofisticados.

No mesmo capítulo, estenderemos a Teoria APOS a domínios mais amplos da aprendizagem matemática, em particular, a do Pensamento Matemático Avançado. É possível evidenciar nas leituras expostas que a Teoria APOS foi desenvolvida no seio do Pensamento Matemático Avançado, envolvendo transformações dos conceitos em estudo.

É importante que os pesquisadores em Educação Matemática tenham consciência dos processos mentais que se interagem para a construção do conhecimento, com imagens mentais, visuais ou a linguagem matemática. Apresentaremos a contribuição de Dreyfus (1991), que discute a abstração, como a mais importante capacidade desenvolvida no Pensamento Matemático Avançado com expressiva exigência cognitiva.

Como parte integrante do Pensamento Matemático Avançado, apresentaremos os conceito imagem e definição, de acordo com Vinner (1991) e Domingos (2003). Nesse estudo, Vinner (1991) discute o papel das impressões e experiências associadas às imagens visuais. Também é destacado o papel dos

conceitos imagem e definição nos contextos do cotidiano técnico (termos usados pelo autor). Ambos os conceitos interagem, sendo possível também que cada um se constitua de modo independente. Conforme as leituras expostas, será possível ativar as células dos conceitos definição e imagem, de acordo com o perfil dos exercícios ou problemas desenvolvidos em aula, permitindo que se construa um fluxo contínuo de estímulo-resposta. Outro autor destacado em nossas leituras com significativa importância em nossa análise foi Domingos (2003). Em sua investigação, caracteriza a compreensão dos conceitos matemáticos avançados, como sucessões, funções e outros conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral no início do ensino superior. Assim, destaca três níveis de conceito imagem: incipiente, instrumental e relacional, caracterizando-os, de acordo com as ações realizadas pelos alunos.

Com as leituras, será possível evidenciar a estrita relação existente entre a Teoria APOS e o Pensamento Matemático Avançado. A princípio, destacamos que encontramos a relação existente entre ambos os aportes teóricos e, mais tarde, verificaremos a relação existente com uma terceira. Tall (2000) trouxe em seu trabalho um termo que nos chamou a atenção e que, particularmente, nos instigou a estudá-lo. O termo *mente matemática* presente em nosso título propõe abrir um campo para futuras investigações em nosso grupo de pesquisa. O autor refere-se ao termo *mente matemática*, como a forma como cada processo e conceito matemático são compartilhados entre os indivíduos, focando tanto a estrutura matemática concebida pela comunidade, como a estrutura biológica mental. Estamos adentrando, portanto, no sistema multiprocessável, ativo e participante que corresponde ao cérebro humano. Dentre os autores citados, apresentamos algumas ideias de Dehaene (1997) que considera que a Matemática encontra-se limitada por nossa arquitetura cerebral, que impõe um limite sobre nossa aprendizagem e memória. Portanto, é pertinente fazer uma breve descrição sobre a Neurociência Cognitiva (Dehaene, 2008) e a anatomia do Sistema Nervoso, para que os leitores tenham uma compreensão inicial dos termos relativos à *mente matemática*. Na perspectiva biológica dos neurocientistas, as condições neuronais do indivíduo podem ser consideradas na elaboração das estratégias para a aprendizagem matemática. Contudo, deixamos claro que as análises desta tese consideraram o primeiro aspecto tratado por Tall (2000), em relação ao termo *mente matemática*, a estrutura matemática concebida pela comunidade. O segundo aspecto é deixado

como sugestão para possíveis estudos futuros de nossa comunidade de educadores matemáticos.

No Capítulo 3, apresentaremos a metodologia de investigação que norteou nosso trabalho, o estudo de caso. Em uma abordagem qualitativa de pesquisa, consideramos os estudos de caso múltiplos por se tratarem de sujeitos de duas instituições de ensino particular do Estado de São Paulo, com perfis e realidades diferentes. Consideramos que os estudos de caso múltiplos nos possibilitam revelar *como e por que* o objeto matemático autovalor e autovetor é abordado em ambas as instituições. Nesse capítulo, serão descritos os passos que seguiremos, desde a seleção das universidades e dos alunos participantes, até a realização das entrevistas.

No Capítulo 4, descreveremos a formação do profissional orientada por documentos oficiais que regem os cursos de Engenharia, dentre elas, as Diretrizes Curriculares Nacionais. É possível que percebamos o papel fundamental das instituições de ensino na formação do profissional que deverá agregar três componentes: conhecimentos, habilidades e atitudes. Destacaremos o papel da interdisciplinaridade inerente às disciplinas do curso, apontando que todas têm um importante papel a seguir.

No Capítulo 5, descreveremos a abordagem adotada pelos autores David Poole e David C. Lay, referente ao tema Autovalor e Autovetor, respectivamente, em seus livros *Álgebra Linear* e *Álgebra Linear e suas aplicações*. Ambos os livros fazem parte das referências bibliográficas das instituições de ensino apresentadas no Capítulo 3. Com base no estudo dos capítulos específicos sobre Autovalor e Autovetor, será possível estabelecer a seleção do instrumento diagnóstico que constitui nosso problema de pesquisa.

No Capítulo 6, intitulado A Investigação, apresentaremos o problema ou instrumento de investigação proposto aos alunos participantes. Inicialmente, será exposto como ocorreu a investigação piloto e sua análise e as razões que nos levaram a sua reformulação. Após expostas tais razões, serão consideradas as concepções ação-processo-objeto e esquema do estudo de autovalor e autovetor, de acordo com Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012). Stewart (2008) expõe a definição das concepções ação-processo-objeto-esquema do estudo de temas relacionados à Álgebra Linear, porém, nesse capítulo apresentaremos apenas o

relacionado ao estudo de Autovalor e Autovetor. Acrescentamos que seu objetivo será analisar os dados obtidos em entrevistas baseadas na relação entre a Teoria APOS e a visão corporificada dos Três Mundos de David Tall. Trigueros *et al.* (2012) também expõe em seu projeto o estudo de conceitos relacionados à Álgebra Linear. Todos os exemplos apresentados serão fundamentados na Teoria APOS e deverão expor suas decomposições genéticas relacionadas a modelos aplicados como: o Modelo da Teoria dos Códigos (Espaços Vetoriais), o Modelo do Ciclista (Transformações Lineares) e o Modelo de Emprego e Desemprego (Autovalor e Autovetor).

No Capítulo 7, apresentaremos a análise dos dados obtidos nas entrevistas realizadas, conforme as ideias sobre as concepções ação-processo-objeto-esquema, de acordo com Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012), e as principais ideias sobre os conceitos imagem e definição, conforme expõem Vinner (1991) e Domingos (2003). Em seguida, apresentaremos nossas considerações finais e sugestões para futuras investigações.



## *Capítulo 1 - Revisão da Literatura*

---

A seguir, destacaremos as pesquisas que nortearam nossa investigação e que exerceram significativo papel na construção da tese e justificaram nossas escolhas.

### *1.1 A contribuição do trabalho de Pedersen (2006)*

Na investigação de Pedersen (2006), o autor descreve a realização de um projeto com 250 estudantes universitários ingressantes em um curso de Matemática, cuja graduação era dirigida à Ciência dos Alimentos, Biotecnologia e Economia Agrícola.

O projeto desenvolvido foi proveniente de uma reforma educacional realizada no outono de 2005 na Real Universidade de Veterinária e Agricultura de Copenhague. Como resultado, vários programas de bacharelado foram reformulados em suas cargas horárias e em seus conteúdos curriculares. Tais reformulações permitiram que Pedersen incluísse o uso parcial do computador (20% - 25% da carga horária) em seus cursos, de modo que servisse como suporte às aulas de Matemática e, ao mesmo tempo, introduzisse os primeiros conceitos relativos à Ciência da Computação.

O autor supracitado enfatiza que a revisão do conteúdo matemático e do ensino possibilitou sua integração com outras disciplinas. Assim, as noções matemáticas passaram a ser apresentadas baseadas em exemplos e aplicações que motivaram os estudantes a desenvolver suas atividades fora do curso e, ao mesmo tempo, testar uma ampla série de competências.

Como projeto apresentado nos cursos de Matemática, o ensino de autovalor e autovetor passou a tratar dos modelos de crescimento populacional. O autor ressalta que tal conteúdo não fazia parte do antigo currículo e que, só após a reforma, o tema foi introduzido no conteúdo ministrado, tornando-se indispensável no curso.

Dessa forma, no programa vigente, o aluno que concluiu o curso de Matemática deveria estar apto a: (a) entender as definições de autovalores (e

autovetores) e como determiná-las; (b) entender os modelos matriciais  $v_{t+1} = M \cdot v_t$  para o crescimento populacional; (c) calcular algumas das iterações de  $v_t$  com o computador e a partir de então ganhar experiência e tirar suas próprias conclusões de tais experimentos matemáticos; (d) descrever o comportamento assintótico de  $v_t$  em relação ao autovalor dominante e seu autovetor associado com base no seguinte Teorema:

**Teorema:** Seja  $M$  uma matriz  $n \times n$ ,  $v_0$  um vetor  $n$ -dimensional e  $v_t = M^t \cdot v_0$  para  $t = 1, 2, \dots$ . Sob certas condições (que são usualmente satisfeitas) sobre  $M$  e  $v_0$  existe uma constante  $c$

$$\frac{v'_t}{\lambda_1^t} \rightarrow c \cdot q_1 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ onde } \lambda_1 \text{ é o autovalor dominante e } q_1 \text{ o}$$

autovetor correspondente (PEDERSEN, 2006, p. 4)

Se a população é dividida em  $n$  grupos, de acordo com a faixa etária,  $v_t$  denota o vetor populacional no instante  $t$  e  $M$  corresponde à Matriz de *Leslie* para a população, temos  $v_{t+1} = M \cdot v_t$ .

Um dos modelos mais populares de crescimento populacional é baseado em matrizes, sendo introduzido por P. H. Leslie em 1945. O modelo de Leslie descreve o crescimento de uma população em uma suposta duração de vida máxima, com base na média de nascimentos e nas probabilidades de sobrevivências das espécies em estudo. A matriz de Leslie ( $L$ ) será uma matriz  $n \times n$  com a seguinte estrutura:

Figura 1 - Matriz de Leslie.

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Adaptado de Poole (2004, p. 209)

em que  $b_1, b_2, \dots$  são os parâmetros de nascimento e  $s_1, s_2, \dots$  as probabilidades de sobrevivência da espécie em estudo.

No contexto, a interpretação do teorema é que, com o passar do tempo, a taxa de crescimento de cada faixa etária aproxima-se do autovalor dominante  $\lambda_1$  e que a distribuição entre os grupos etários, atribuída pelo autovetor  $q_1$ , torna-se assintoticamente estável.

Assim, tais situações, expostas por problemas, permitem que o estudante faça transições, formulações e validações que, muito provavelmente, não eram trabalhadas nas aulas.

No projeto, Pedersen conclui que a principal ideia era descobrir autovalores (e autovetores associados) com base em experimentos matemáticos que estimulassem o pensamento indutivo do estudante e acarretassem a compreensão do amplo papel que tais objetos matemáticos desempenham em modelos de crescimento populacional.

Pautados na decomposição genética do objeto matemático autovalor e autovetor, buscamos destacar as relações entre os diferentes esquemas que se formam baseados na exposição de problemas, como os apresentados por Pedersen (2006). Problemas como esse expõem conceitos de Sistemas Dinâmicos e serão melhor detalhados no Capítulo 5 desta pesquisa. Um problema com as mesmas características apresentadas pelo autor foi aplicado aos sujeitos de nossa investigação e apoiados em análise destacamos as concepções (ação-processo-objeto-esquema) dos alunos, assim como as diferentes capacidades matemáticas que definem as mentes matemáticas<sup>9</sup>, e o que consideram Vinner (1991) e Domingos (2003) sobre o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, quanto aos conceitos imagem e definição.

Consideramos que o exemplo apresentado por Pedersen e mais outros presentes nos livros didáticos (no Capítulo 5) nos forneceram informações importantes que relacionassem o aspecto interdisciplinar da formação do engenheiro às suas estruturas e capacidades cognitivas.

---

<sup>9</sup> A expressão será discutida no Capítulo 2.

## 1.2 *A contribuição do trabalho de Silva e Velozo (2003)*

A pesquisa dos autores imersa no contexto da Engenharia Civil considera como fato as dificuldades que os estudantes dos ciclos básicos da Engenharia apresentam para compreender as aplicações dos conhecimentos teóricos obtidos em disciplinas relacionadas a Cálculo, Física e Álgebra Linear. Acrescentam que os conhecimentos adquiridos nessas disciplinas

são fundamentais para a compreensão do comportamento de sistemas estruturais simples na Engenharia tais como treliças, vigas, pórticos, placas e sistemas estruturais complexos de aço de telecomunicações e de transmissão de energia, edifícios e outros (SILVA; VELOZO, 2003, p. 2).

Portanto, é importante que os alunos de graduação em Engenharia tenham uma ideia básica de suas aplicações práticas.

Em um primeiro momento, a definição do conceito de Autovalor conforme Lipschutz (1977) é apresentada. Reescrevemos a definição do conceito de acordo com Lipschutz (2002, p. 404):

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  sobre um corpo  $K$ . Diz-se que um escalar  $\lambda \in K$  é um autovalor de  $A$  se existe um vetor (coluna) não-nulo  $\mathbf{v} \in K^n$  para o qual  $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ . Todo vetor que satisfaz esta relação é então chamado de um autovetor de  $A$  pertencente ao autovalor  $\lambda$ . Observe que cada múltiplo escalar  $k \cdot \mathbf{v}$  é um desses autovetores, pois  $A(k\mathbf{v}) = k(A\mathbf{v}) = k(\lambda \cdot \mathbf{v})$ . O conjunto  $E_\lambda$  de todos os autovetores pertencentes a  $\lambda$  é um subespaço de  $K^n$ , chamado autoespaço de  $\lambda$ .

Acreditam que a apresentação de tais conceitos é baseada em métodos estritamente conceituais e matemáticos, sendo contrária ao que deveria ser informado a um futuro engenheiro, pois tais métodos de ensino não apresentam relação alguma com temas específicos, tais como espaço vetorial, corpo, etc., além de não ressaltarem onde e como o aluno de graduação poderá utilizá-los em sua vida profissional. Dessa forma, sugerem que o tema autovalor pode ser associado às frequências naturais e autovetor aos modos de vibração de um elemento ou sistema

estrutural. A análise a respeito do comportamento dinâmico da estrutura previne deflexões excessivas e mantém as condições de segurança à ruptura. As deflexões excessivas (também chamadas de deformações excessivas) podem provocar danos locais, como fissuração de elementos estruturais. Geralmente, o cálculo de deflexões é feito pautado nas equações usuais da Resistência dos Materiais.

Como sugestão para uma abordagem mais apropriada ao ensino do tema, expõem a equação matricial como:  $M.V_1 + K.V_2 = 0$ , em que  $M$  é a matriz massa,  $K$  é a matriz rigidez,  $V_1$  é o vetor das acelerações e  $V_2$  é o vetor dos deslocamentos. Na equação  $(M^{-1}K - \omega i^2.I)\phi_i = 0$  em que  $\phi_i$  é o  $i$ -ésimo modo de vibração, com  $i$  variando de 1 a  $N$ . A equação seguinte é verdadeira para qualquer  $\phi_i$ , se  $|M^{-1}K - \omega i^2.I| \phi_i = 0$  em que  $I$  representa a matriz identidade. A última equação é designada, como equação característica, e suas raízes são os valores característicos ou autovalores que correspondem às frequências naturais de um sistema estrutural. Para cada autovalor, associamos o autovetor característico ou autovetor que representa o modo de vibração do sistema.

Os autores concluem que o embasamento teórico adquirido no ciclo básico é de grande relevância para um melhor aproveitamento nos cursos de Engenharia e destacam ser importante que o enfoque didático de disciplinas básicas, como a Álgebra Linear, seja direcionado a seus problemas correntes, contribuindo para que os alunos possam desenvolver um grau de motivação e maior maturidade.

### ***1.3 A contribuição do trabalho de Silva; Bernarden; Reck (2010)***

Com o propósito de apresentar uma ferramenta de apoio à tomada de decisão no restabelecimento de energia, os autores apresentam a aplicação do método AHP (*Analytic Hierarchy Process*) em situações de contingências no restabelecimento de energia elétrica. A pesquisa reflete a necessidade de melhoria de sistemas de distribuição de energia, permitindo o restabelecimento em tempo real.

Em determinados casos, o restabelecimento de energia elétrica é alcançado por duas ou mais soluções, e o método estudado pelos autores permite que sejam avaliadas as alternativas possíveis e a melhor solução. Assim, são atribuídos graus

de importância, ou seja, graus hierárquicos a cada critério avaliado, estabelecendo prioridade entre as alternativas encontradas.

Para tanto, é importante que sejam considerados os fatores qualitativos e quantitativos guiados por uma escala de prioridades que representa *quanto um elemento é melhor que outro ou quanto um domina o outro* (SILVA; BERNARDEN; RECK, 2010, p. 3).

É possível que seja construída uma matriz de comparações baseada nas seguintes regras:

$A = w_{ij}$  é a matriz  $n \times n$

$i$  = subíndice referente à linha da matriz;

$j$  = subíndice referente à coluna da matriz;

$w$  = peso atribuído ao critério  $e$ ;

$n$  = número de critérios.

São estabelecidas comparações entre os critérios de linha ( $C_i$ ) e os critérios de coluna ( $C_j$ ) que são  $w_{ij}$ , se  $C_i$  domina  $C_j$ ,  $\frac{1}{w_{ij}}$ , se  $C_j$  domina  $C_i$  e 1, se nenhum domina o outro (SILVA; BERNARDEN; RECK, 2010, p. 3).

Considerando os critérios anteriores, os autores apresentam a seguinte matriz de comparação:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Os autores consideram os critérios  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  como:

- Restabelecer a energia para o número máximo de consumidores ( $C_1$ );
- Realizar o número mínimo de comutação para as transferências de carga ( $C_2$ );
- Minimizar o número de consumidores interrompidos por ano ( $C_3$ ) (SILVA; BERNARDEN; RECK, 2010, p. 2).

Com base na matriz de comparação apresentada, é possível que se estabeleça a seguinte estimativa:  $C_1$  possui uma forte importância sobre  $C_2$  e  $C_3$  é três vezes melhor que  $C_1$ .

De acordo com os autores, o autovetor fornece a hierarquia das características que representa o grau de importância relativa de cada critério. A partir do estabelecimento de prioridades entre os critérios são tomadas decisões para o restabelecimento da energia em uma rede de distribuição elétrica.

Assim, é possível identificarmos nesse trabalho a relevância atribuída ao objeto autovalor e autovetor em contextos aplicados da Engenharia como a aplicação de métodos específicos no apoio a tomada de decisões.

#### ***1.4 A contribuição do trabalho de Romo e Oktaç (2007)***

No artigo, as autoras buscam observar o papel que os conceitos matemáticos desempenham na resolução de projetos de Engenharia. Para tanto, utilizaram como metodologia de pesquisa a dos pensamentos teórico e prático que permitem observar os fenômenos produzidos baseados nos conceitos matemáticos.

No mesmo trabalho, foram analisados quatro projetos de Engenharia defendidos no programa de Mestrado em Engenharia de Sistemas do Instituto Politécnico Nacional do México. Tais projetos foram realizados no mesmo espaço acadêmico, porém, envolvendo problemáticas diferentes em situações reais.

Conforme discorrem as autoras, a problemática envolvida reflete a natureza do trabalho do engenheiro e a necessidade teórica da Engenharia e dos conceitos matemáticos frente à resolução de problemas práticos. Dentre as questões que sugerem tal aspecto, estão: (1) Que tipo de conhecimentos matemáticos são usados pelo engenheiro?; (2) Que características têm os usos dos elementos matemáticos?; (3) São utilizados em nível de ferramentas para resolver um problema ou para realizar e justificar hipóteses, procedimentos ou encontrar resultados?

Partindo das reflexões expostas, a proposta das autoras foi desenvolver uma ferramenta metodológica que analisasse o rol dos elementos matemáticos que são utilizados na resolução de projetos de Engenharia.

Dentre os trabalhos citados, foram usados aqueles que buscam estudar a natureza da Engenharia em diferentes enfoques, preocupações e objetivos,

relacionando a prática profissional e o perfil exigido, além da relação que se estabelece com a natureza do conhecimento matemático.

Com base no marco teórico dos pensamentos teórico e prático, as autoras descrevem as principais diferenças compreendidas entre ambos os pensamentos. Citam que o pensamento teórico tem como objeto os sistemas de conceitos, apresentando suas características e relações entre conceitos e seus sistemas. Já o pensamento prático, é o que é gerado com o objetivo de se obter algo em concreto; sendo associado a fenômenos particulares e centrado no significado das ações.

As autoras acrescentam algumas questões levantadas baseadas na pesquisa de Camarena (1999) que discute o termo saber de aplicação: *Quais são as características desse saber de aplicação? Qual é o papel que desempenha na resolução de um problema de engenharia e quais são as características do pensamento que se apresentam ou se associam com seu uso?*<sup>10</sup> (ROMO; OKTAÇ, 2007, p. 120).

Além disso, as autoras supracitadas definem a abstração como *conhecimento em uso*<sup>11</sup>, nos quais os engenheiros envolvidos em diferentes problemáticas alcançam um nível de entendimento sobre a solução do problema matemático (ROMO; OKTAÇ, 2007, p. 120)<sup>12</sup> pautados nos resultados. É esse mesmo conhecimento matemático que lhes permite modificar ou alterar parâmetros, ou ainda, realizar ajustes, quando necessários. As autoras defendem que a atividade matemática do engenheiro requer a construção e o desenvolvimento de ferramentas teóricas específicas que permitem estudar e analisar essa mesma atividade. Para eles, a natureza da Matemática no contexto da Engenharia poderá favorecer o desenvolvimento de uma didática da matemática para a formação dos profissionais.

Para realizar o estudo dos elementos matemáticos empíricos na prática da Engenharia, Romo e Oktaç (2007) partiram da caracterização do pensamento matemático presente nos projetos investigados. Descrevem que

O pensamento prático se distingue do teórico em seu objetivo, objeto, principais preocupações e resultados:

---

<sup>10</sup> Tradução nossa: *¿Cuáles son las características de este saber de aplicación? ¿Cuál es el papel que desempeña en La resolución de un problema de ingeniería y cuáles son las características del pensamiento que se presentan o se asocian con su uso?*

<sup>11</sup> Tradução nossa: *conocimiento-em-uso*.

<sup>12</sup> Tradução nossa: *alcanzan un nivel de entendimiento sobre la solución del problema matemático*.

- O pensamento teórico é o que se produz no fazer puro de pensar, tem como objeto os sistemas de conceitos; estuda as relações e características entre conceitos e sistemas de conceitos.
- O pensamento prático é o que se gera com o fim de se obter algo em concreto; está associado a objetos, feitos ou fenômenos particulares; se centram no significado das ações enquanto que sua validade depende do factível<sup>13</sup> (ROMO; OKTAÇ, 2007, p. 122).

Assim, entendemos que o pensamento teórico está atrelado aos conceitos, sistemas e relações que são estabelecidos entre ambos. Diferentemente do anterior, o pensamento prático associa-se a objetos e ao significado das ações realizadas sobre os mesmos.

### *A metodologia utilizada na pesquisa de Romo e Oktaç (2007)*

As dissertações de mestrado apresentadas na pesquisa de Romo e Oktaç (2007) buscam estudar e solucionar problemáticas reais vivenciadas em determinadas empresas ou indústrias, locais onde buscam desenvolver suas atividades profissionais, como engenheiros.

Acrescentam que a busca de solução dessas problemáticas envolve tempos distintos daqueles realizados em uma situação problemática artificial. Entretanto, não fogem do cunho acadêmico, apresentando argumentações para a solução com base nas justificativas e fundamentações teóricas quanto ao uso de ferramentas, métodos ou fórmulas.

A seleção dos trabalhos baseou-se nos seguintes aspectos: conteúdo matemático (foram identificadas possíveis categorias do uso do conceito matemático) e a problemática abordada.

A proposta foi analisar o rol de soluções dos projetos de Engenharia investigados, de acordo com os resultados que poderiam redefinir os elementos matemáticos empíricos e, assim, desenvolver uma ferramenta prática. Acrescentam não ser propósito da investigação determinar as transformações ou adaptações que

---

<sup>13</sup> Tradução nossa: *El pensamiento práctico se distingue del teórico en su objetivo, objeto, preocupaciones principales y resultados: o pensamiento teórico es el que se produce en el hecho puro de pensar; tiene como objeto a los sistemas de conceptos; estudia las relaciones y características entre conceptos y sistemas de conceptos. El pensamiento práctico es el que se genera con el fin de obtener algo en concreto; está asociado a objetos, hechos o fenómenos particulares; se centra en el significado de acciones, mientras que su validez depende de lo factible.*

o conceito matemático sofre entre o saber escolar e o saber de aplicação, mas apenas evidenciar que o conhecimento matemático presente em um projeto com essas características passa naturalmente pelo ciclo de vida saber sábio, saber escolar e saber de aplicação.

Dentre as pesquisas analisadas, evidenciaremos o tema *Desenho e simulação de uma Rede neuronal aplicada ao problema de distribuição ótima de planta*.

Para análise dos dados coletados nos trabalhos investigados, Romo e Oktaç (2007) elaboraram uma ferramenta metodológica que distingue quatro categorias:

- a) **Uso do conceito:** corresponde ao papel ou função que determinado conceito matemático desempenha em um projeto de Engenharia, que pode se dividir em: *Uso conceitual:* pode ser usado fazendo-se referência à sua definição, ao corpo teórico a que pertence, assim como às relações com outros conceitos matemáticos; podem ser utilizados como modelo de dado fenômeno, elemento, etc. e *Uso teórico:* nesse caso, o conceito matemático é empregado como técnica, um algoritmo ou um modelo em situações específicas;
- b) **Componente matemático:** nessa situação, o conceito matemático é compreendido como um único ente. É considerado um objeto matemático, com definições, propriedades ou um modelo, algoritmo com fórmulas e métodos vistos em situações específicas;
- c) **Relação entre conceitos matemáticos e conceitos próprios da Engenharia:** o objetivo das autoras é caracterizar o rol a que pertencem os conceitos matemáticos envolvidos, e as conexões que são estabelecidas com os conceitos específicos da Engenharia; e
- d) **Condição do elemento matemático:** as autoras buscam observar qual o papel do conceito matemático na teoria específica da Engenharia. Tratam de observar se há transformação do objeto com a aplicação, assim como se há evolução, contribuição com a teoria matemática ou se aparece somente como um elemento imutável dessa teoria.

A seguir, as autoras apresentam a análise da pesquisa *Desenho e Simulação de uma Rede Neuronal aplicada ao problema de distribuição ótima de planta*. O objetivo da pesquisa de Mestrado em Engenharia de Sistemas consiste em distribuir

de modo ótimo um conjunto de elementos, dentre eles, departamentos e máquinas, a fim de obter benefício em termos de custos ou utilidades.

O Problema de Alocação Quadrática (PAQ) <sup>14</sup> foi eleito para representar o problema. O PAQ pode ser definido como um problema clássico de otimização combinatória, composto por um conjunto de  $n$  elementos distintos a serem localizados (atribuído) em  $n$  diferentes localizações. Tal método considera o fluxo que há entre pessoas, a informação, assim como os materiais entre os departamentos e a distância retilínea entre os centros dos departamentos. Na análise, também é considerado o custo do movimento de cada elemento entre os departamentos.

Para solucionar o problema, foi estabelecido um conjunto de elementos interconectados hierarquicamente, cujas informações são processadas entre as diversas redes que se estabelecem com base em uma função de entrada. A informação é trabalhada por uma função de processamento que corresponde a um neurônio e, então, é entregue como função de saída. O propósito é chegar à estabilização do sistema apoiado em um custo mínimo de energia da rede.

O conteúdo matemático é considerado componente essencial do projeto, uma vez que se objetiva resolver o problema de distribuição de planta, com base em um modelo de otimização matemática, mediante a ferramenta redes neurais.

Considerando a análise da categoria *uso do conceito*, a matriz foi um dos conceitos necessários para a resolução do projeto. Mas, em muitas situações, não se faz referência explícita à sua definição nem à teoria a que pertence. As autoras consideram que o uso das matrizes não é conceitual e aparece apenas como uma representação gráfica do arranjo entre linhas (correspondem aos locais específicos) e colunas (correspondem aos departamentos). Portanto, seu uso é técnico, já que tem como objetivo encontrar um resultado pelo qual não se requer conhecer sua definição nem propriedades.

Dessa maneira, as autoras questionam: - Que conhecimento deve ter de um conceito para que seja usado como modelo? Se não são conhecidas sua definição, propriedades, características que o definem, como pode se pensar que simboliza certo problema, conceito ou elemento?

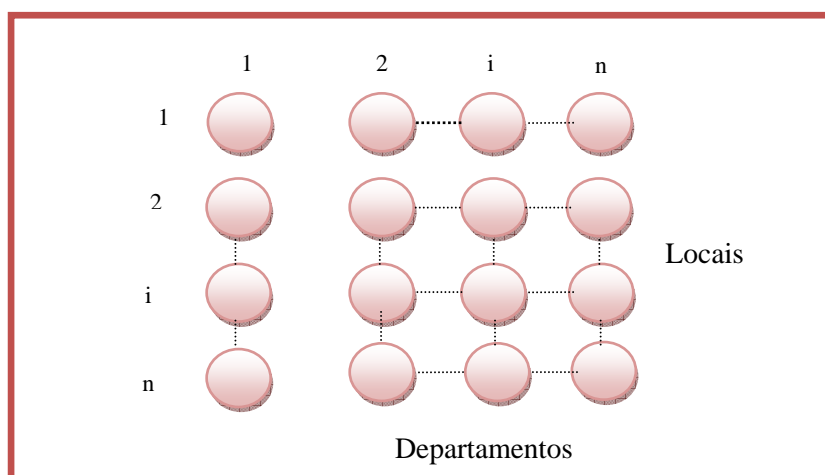
---

<sup>14</sup> Tradução nossa: *Problema de Asignación Cuadrática*.

Consideram que o conceito de rede neuronal relaciona-se estritamente com os conceitos matemáticos, pois seu propósito é solucionar o modelo de otimização matemática utilizado (PAQ).

Para o desenho da rede neuronal, que se estabelece entre locais específicos e departamentos envolvidos, o arranjo de matrizes se faz necessário para se modelar seu comportamento, em que cada elemento terá um significado para a solução do problema.

Figura 2 - Representação de uma Rede Neuronal de Departamentos e Locais



Fonte: Adaptado de Romo e Oktaç (2007, p. 132)

Acrescentam que *a relação entre o modelo matemático e a rede neuronal dentro do projeto é tão estreita que não se visualizam como elementos distintos, mas, sim, constituem-se como um único ente, definindo-se novamente*<sup>15</sup> (ROMO; OKTAÇ, 2007, p. 135).

Concluem a análise do tema considerando que o papel do elemento de Engenharia é visualizado em torno do matemático. Propõem um aporte à teoria matemática, envolvendo em elemento da Engenharia com base no desenvolvimento de uma metodologia para resolução de problemas de otimização matemática.

É percebida a necessidade de ressignificar o elemento matemático em termos de elementos que pertençam aos fenômenos estudados, assim como de adequação do modelo matemático em termos do fenômeno ou processo que se modela.

<sup>15</sup> Tradução nossa: *La relación entre el modelo matemático y el de la red neuronal dentro del proyecto es tan estrecha que no se visualizam como elementos distintos, sino se conforman como un solo ente, definiéndose nuevamente.*

Também é identificado que os elementos de Engenharia constituem parte de um modelo matemático.

O conteúdo matemático não se insere de maneira direta na engenharia, mas toma forma própria, já que os problemas da vida real que a engenharia resolve provocam também a criação de conhecimento matemático<sup>16</sup> (ROMO; OKTAÇ, 2007, p. 139).

Pautados na análise, consideram importante refletir sobre os modos de pensamento e sua relação com a atividade matemática do engenheiro. É pertinente fazer uma reinterpretação dos modos de pensamento teórico e prático com base nas análises que nos permitem observar o pensamento desse profissional associado ao uso que se faz do conhecimento matemático em exercício.

Portanto, propõem o estudo e a caracterização da natureza própria da Engenharia, com o fim de apresentar uma didática da matemática particular à formação de seus estudantes.

### *1.5 A contribuição do trabalho de Camarena (2011)*

Em Camarena (2011), o ensino e a aprendizagem no contexto das ciências para estudos universitários consideram a interação entre a fase curricular, didática, cognitiva, epistemológica e docente. O trabalho aborda a modelagem de problemas matemáticos nas graduações de Engenharia, particularmente, na Engenharia Eletrônica. Na pesquisa, é considerada a matematização de fenômenos e eventos que se apresentam no campo profissional das áreas específicas. A autora acrescenta que esse tema constitui um conflito cognitivo para os estudantes, visto que vivenciam suas aulas de disciplinas matemáticas e específicas, como áreas de conhecimentos desvinculados. No entanto, é necessário que eles possam articulá-las para matematizar o evento ou fenômeno a ser pesquisado. Para a autora, resulta que os professores de matemática acreditam que esse assunto deva ser tratado pelos professores do ciclo específico, e estes últimos pelos professores das aulas

---

<sup>16</sup> Tradução nossa: *El contenido matemático no se inserta de manera directa em la ingeniería, sino toma forma propia, ya que los problemas de la vida real que la ingeniería resuelve provocan también la creación de conocimiento matemático.*

matemáticas. O assunto é abordado pela Rede Internacional de Investigação em Matemática no Contexto das Ciências (*RedMaCoCiencias*) que considera que o ensino e a aprendizagem de disciplinas matemáticas em cursos de Engenharia devam ser atendidos de forma interdisciplinar para que haja motivação e transferência de conhecimentos.

Camarena (2011) questiona: (a) Quais conhecimentos prévios são necessários, para que o aluno aprenda a modelar? e (b) Que elementos de ordem cognitiva o estudante deve construir para elaborar o modelo matemático de um evento em Engenharia? Para tanto, acrescenta que são precisos o conhecimento e o domínio da matemática na disciplina de contexto.

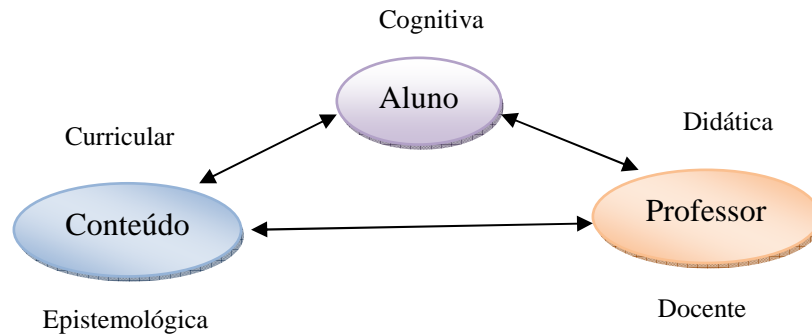
Para responder às questões anteriores, a autora pautou-se na *Teoría da Matemática no Contexto das Ciências*, desenvolvida no Instituto Politécnico Nacional do México ao longo de quase 30 anos. A teoria reflete a respeito do vínculo que deve ser estabelecido entre a matemática e as ciências que a requerem, entre a matemática e as futuras atividades profissionais, assim como entre a matemática e as situações da vida cotidiana. Fundamenta-se em três paradigmas: - *a matemática é uma ferramenta de apoio e matéria formativa*; - *a matemática tem uma função específica no nível superior*; - *os conhecimentos nascem integrados*<sup>17</sup> (CAMARENA, 2011, p. 3).

As cinco fases desenvolvidas pela teoria contemplam: a curricular, a didática, a epistemológica, a docente e a cognitiva que se relacionam e interagem, de modo dinâmico em um ambiente social, econômico e político e não estão alheias às condições sociológicas nem psicológicas dos atores envolvidos.

---

<sup>17</sup> Tradução nossa: - La matemática es una herramienta de apoyo y materia formativa; - La matemática tiene una función específica em el nivel superior; - Los conocimientos nacen integrados.

Figura 3 - Uma terna dourada em Educação



Fonte: Adaptado de Camarena (2011, p. 3)

Camarena (2011) afirma que a *Teoria Matemática no Contexto das Ciências* possibilita a mudança do paradigma educacional de ensino tradicional, pois trata de um ensino com conhecimentos integrados, duradouros e centrados no estudante.

Em uma primeira fase, a análise considerou: (a) os eventos que se apresentaram; (b) a maneira como estes são representados matematicamente e (c) os temas e conceitos específicos da Engenharia, que são descritos matematicamente. Já em uma segunda fase, foram consideradas as áreas que compõem um curso de Engenharia: as ciências básicas, formadas pelas disciplinas de Física, Química e Matemática; as ciências básicas da Engenharia, formadas pelas disciplinas: Circuitos Elétricos, Eletromagnetismo, Computação, Eletrônica Básica e Comunicações Básicas e as ciências das especialidades da Engenharia, como: Comunicações, Eletrônica, Controle, Acústica, Robótica, Telefonia e Computação; além das Ciências Sociais, Econômicas e Administrativas.

Para a análise da segunda fase da pesquisa, foi considerada uma amostra aleatória de 21 universidades do país onde estudantes de Engenharia buscaram resolver uma seleção de eventos analisados na primeira fase. Na segunda fase, foram identificados os elementos cognitivos e as habilidades que entram em ação no processo de construir o modelo matemático do evento.

Dentre os resultados obtidos, Camarena (2011) refere que a Matemática ensinada em cursos de Engenharia é uma linguagem e que as relações matemáticas que se estabelecem com os eventos ou situações podem ser representadas por uma equação, um sistema de equações ou mesmo uma distribuição de probabilidades.

Para a autora, o processo cognitivo relacionado à modelagem matemática consta de três momentos: (1) identificação das variáveis e constantes do evento; (2) as relações entre os diversos conceitos presentes, tanto implícita como explicitamente; (3) validação da relação matemática que modela o evento com base na análise de dados, variáveis e conceitos.

Destaca que pode haver mais de um modelo matemático e várias representações matemáticas que descrevam o mesmo evento, motivo esse que torna necessária a validação do modelo.

Para conhecer os elementos cognitivos que intervêm na construção do modelo matemático, é preciso que sejam conhecidos os diferentes enfoques dos temas e conceitos matemáticos da área de contexto. Por exemplo, o conceito de derivada, é reconhecido como o quociente de diferenciais, um limite muito específico ou a operação inversa da integral. Além disso, são necessários conhecer os pontos de controle e os padrões de comportamento do conceito, quando se movem os parâmetros que os compõem, e deve haver a habilidade de transitar da linguagem natural à linguagem matemática e vice-versa (CAMARENA, 2011).

Em sua conclusão, ressalta a formação do professor de matemática dessas graduações: se sua formação for a de matemático, ele deverá aprofundar-se nas áreas do conhecimento da Engenharia, já se sua formação for a de engenheiro, deverá conhecer profundamente as áreas dos conhecimentos matemáticos.

## ***1.6 A contribuição do trabalho de Nomura (2008)***

Nomura, em sua pesquisa de Mestrado concluída, em 2008, propôs encontrar elementos que respondessem à questão: Por que e como deve ser lecionada a disciplina Álgebra Linear em uma graduação de Engenharia Elétrica?

A escolha do tema foi justificada pela importância que a disciplina Álgebra Linear apresenta em relação às disciplinas específicas que compõem a graduação. Essa evidência pôde ser percebida com os discursos obtidos de professores da graduação, que enfatizaram o aspecto interdisciplinar inerente às demais disciplinas do curso e a necessidade de mudança de enfoque dado pelos professores que a lecionam.

A análise considerou os resultados obtidos em pesquisas bibliográficas, documentos oficiais que regem um curso de Engenharia, os discursos dos professores da graduação em Engenharia Elétrica, assim como exercícios aplicados em livros-texto. As entrevistas realizadas com professores da graduação em Engenharia foram consideradas como fonte valiosa de coleta de informações e trouxeram uma diversidade de informações que contribuíram de modo significativo para a expansão e criação de novas perspectivas e visões sobre os assuntos abordados. Como afirmamos anteriormente nas considerações finais da dissertação *foi, sem dúvida, uma experiência única, pois o tema de nossa pesquisa foi merecidamente debatido* (NOMURA, 2008, p. 110).

As análises seguiram as noções expostas pela tríade objeto-pessoa-instituição inerentes a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). O postulado de base dessa teoria admite, com efeito, que toda atividade humana pode ser descrita como um modelo único, que se resume com a palavra praxeologia.

Consideramos que as respostas para a questão de pesquisa foram obtidas pautadas na análise da organização praxeológica formada pelo conjunto objeto, pessoa e instituição.

Como resultados obtidos, constatamos ser pertinente que os professores de Álgebra Linear conheçam algumas relações que possam ser estabelecidas entre a disciplina e as demais especificidades do curso e adotá-las, como prática comum em sua aula. Outro resultado observado relaciona-se à interdisciplinaridade entre os conceitos de Álgebra Linear e os demais conceitos específicos da graduação, como por exemplo, Processamento de Sinais, Circuitos Elétricos ou Teoria Eletromagnética.

Os professores entrevistados consideraram a importância da formação do engenheiro conceitual e generalista que se prime por conhecimentos matemáticos vinculados à pesquisa.

Nesta dissertação, consideramos que as instituições de ensino podem privilegiar a construção de um programa de estudos coerentemente integrado que assegure a interdisciplinaridade requerida e um maior vínculo entre teoria e prática.

## 1.7 *Resumo e Conjecturas*

No presente capítulo, destacamos as contribuições das pesquisas que relacionam aspectos teóricos, conceituais e práticos das disciplinas matemáticas em contextos reais da Engenharia. A seleção dessas pesquisas reforçou a justificativa por nosso tema, cujas primeiras considerações foram evidenciadas na conclusão do trabalho de Mestrado Acadêmico. Assim, percebemos que os temas expostos focam o aspecto interdisciplinar, não deixando de lado a ênfase que deva ser atribuída aos conceitos matemáticos em relação às suas definições, propriedades e características próprias. Além disso, acrescentamos que tal aspecto interdisciplinar poderá promover maior grau de motivação e maturidade dos estudantes em ambos os aspectos, teórico e prático.

Pedersen (2006); Romo e Oktaç (2007), Nomura (2008); Camarena (2011) defendem a reestruturação dos cursos matemáticos baseados em exemplos e aplicações. Dentre eles, destacamos o modelo de crescimento populacional proposto por Pedersen (2006) que relaciona o conceito de autovalor e autovetor a outros conceitos, dentre eles, modelos matriciais, métodos iterativos e de comportamento assintótico que correspondem à resposta ao estado estacionário de um sistema de controle, que é o equivalente em Engenharia ao que denominamos de comportamento de longo prazo.

De acordo com Ruggiero e Lopes:

Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.

A execução de um ciclo recebe o nome de *iteração*. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado (RUGGIERO; LOPES, 2012, p. 37).

Poole (2004) cita que os métodos que funcionam *iterativamente* geram sequências de vetores que se aproximam de uma solução de um sistema linear. Além disso, um método iterativo pode ser interrompido, quando a solução gerada por ele estiver suficientemente precisa.

Ressaltamos que o modelo proposto por Pedersen (2006) foi fundamental para o desenvolvimento de nossa atividade com estudantes em diferentes fases de formação dos cursos de Engenharia.

A análise do modelo de Pedersen considerou a natureza abstrata da Álgebra Linear e enfatizou a construção das propriedades do conceito de autovalor e autovetor baseado em deduções da definição, estimulando o pensamento indutivo.

Silva e Velozo (2003) e Silva; Bernarden; Reck (2010) também destacam que conceitos matemáticos, como autovalor e autovetor, podem ser apresentados pautados na associação com temas específicos, como o estudo do comportamento dinâmico de um sistema estrutural com base na análise de frequências naturais na Engenharia de Pontes ou no restabelecimento de energia em tempo real de uma rede elétrica. O texto de Silva e Velozo (2003) aborda conceitos relacionados à Matemática e Física, dentre eles, equação matricial, vetores das acelerações e dos deslocamentos, modo de vibração e equação característica. Em Silva; Bernarden; Reck (2010), a escala de prioridade envolve o estudo de uma matriz que estabelece critérios de comparações apresentados entre linhas e colunas.

Em Romo e Oktaç (2007), o problema de distribuição ótima de planta expõe a relação entre conceitos de otimização matemática e as redes que estabelecem o fluxo de informação entre funções de entrada e saída. A partir de então, um novo conceito é apresentado, o de Rede Neural<sup>18</sup>. *Na sua forma mais geral, uma rede neural é uma máquina que é projetada para modelar a maneira como o cérebro realiza uma tarefa particular ou função de interesse* (HAYKIN, 2004, p. 28)

Conforme exposto na dissertação de Nomura (2008), seguimos com a defesa de que em um curso de Álgebra Linear é possível apresentar algumas dessas discussões, o que permitiria direcionar e estimular os estudantes em suas escolhas e questões inerentes à sua futura profissão.

O aspecto interdisciplinar deve ir além do ensino da Matemática, como ferramenta ou técnica de resolução baseada em algoritmos estruturados, promovendo a construção de estruturas cognitivas inerentes àquele sujeito que realiza e justifica hipóteses, procedimentos e analisa resultados. Dessa forma, a compreensão é promovida internamente, sendo necessário fazer conexões entre os conceitos e saber o porquê e como fazê-los.

---

<sup>18</sup> As redes neurais são também conhecidas na literatura como neurocomputadores, redes conexionistas, processadores paralelamente distribuídos, etc. (HAYKIN, 2004, p. 28).

Referindo-nos ao exposto na pesquisa de Romo e Oktaç (2007), na qual os estudantes não relacionaram a matriz à sua definição ou teoria, questionamos se o desenvolvimento do problema pode ser bem-sucedido, se não há atribuição dos conceitos às suas definições, propriedades e características para a construção do conhecimento. Como afirmam as autoras, é esse mesmo conhecimento matemático que lhes proverá a capacidade de modificar e analisar parâmetros e realizar ajustes quando necessário.

É importante que reflitamos nos diferentes modos de pensamento, nas relações numéricas, como parte das propriedades dos objetos em lugar de meras representações de quantidades envolvidas.

Conforme Camarena (2011), a desarticulação entre os conhecimentos é cabida aos professores de matemática que atribuem a responsabilidade interdisciplinar aos professores das áreas específicas, e estes últimos que responsabilizam os professores de Matemática.

Assim, a Educação Matemática para a formação de engenheiros é um tópico que merece debate sobre a prática profissional e formação acadêmica. Defendemos a discussão do tema e a construção de uma didática da matemática em cursos com esse perfil.

No próximo capítulo, nosso objetivo será descrever os aspectos mais relevantes dos aportes teóricos que embasaram nossa pesquisa. Primeiramente, serão apresentados os pressupostos teóricos de Dubinsky (1991) a respeito da Teoria APOS. Para a realização da análise dos dados coletados com os estudantes, voluntários evidenciaremos as construções mentais ação-processo-objeto-esquema exposto nessa teoria.

## Capítulo 2 - Fundamentação Teórica

---

Dubinsky e Mc Donald (2002) resumem as características das teorias de aprendizagem, como seguem: (a) ter poder explicativo; (b) ser aplicável a uma ampla série de fenômenos; (c) ajudar a organizar determinados pensamentos sobre complexidade e inter-relação de fenômenos; (d) servir como uma ferramenta de análise dos dados e (e) prover uma linguagem para comunicar ideias sobre aprendizagem, além de descrições superficiais.

De acordo com Stewart (2008), a Teoria APOS foi construída para encontrar o critério de teoria que concilie análise teórica, dados empíricos, projeto e implementação do instrumento em um ciclo. É possível que o ciclo seja repetido quantas vezes forem necessárias para ganhar uma compreensão melhor sobre a epistemologia do conceito.

A seguir, apresentamos a Teoria APOS, como norteadora da análise dos dados obtidos na investigação das construções mentais dos estudantes participantes de nossa pesquisa.

### 2.1 Teoria APOS

Particularmente relacionada ao estudo de Álgebra Linear, a Teoria APOS (*Act-Process-Object-Schema*) de Dubinsky (1991) utiliza métodos qualitativos de pesquisa sendo baseada em perspectivas teóricas específicas que foram desenvolvidas para atender ao entendimento das ideias do psicólogo construtivista Piaget, de acordo com a abstração reflexionante no contexto de nível universitário (COOLEY *et al.*, 2006).

Dubinsky (1991) explica, o que é entendido por abstração reflexionante, apontando, como ela pode ser usada para descrever a epistemologia de vários conceitos matemáticos e indicando como algumas dificuldades conceituais apresentadas por estudantes podem ser explicadas. Acrescenta que a abstração reflexionante pode influenciar o desenho da instrução, resultando em aprimoramento e ampliando a aquisição desses conceitos pelo estudante.

O autor descreve que a abstração reflexionante pode ser uma ferramenta poderosa do Pensamento Matemático Avançado e poderá prover uma base teórica

para suportar nossa compreensão do que esse pensamento é, e como os estudantes podem praticá-lo.

O conceito de abstração reflexionante foi apresentado por Piaget e descreve a construção de estruturas lógico-matemáticas de indivíduos durante seu desenvolvimento cognitivo. Para Piaget, a abstração reflexionante ocorre nos primeiros anos da criança, durante a coordenação de estruturas sensório-motoras e continua em níveis mais avançados da Matemática. Piaget concentrou seu estudo no desenvolvimento do conhecimento matemático de crianças, raramente, estendendo-se a adolescentes. No mesmo trabalho, Dubinsky (1991) acrescenta que o enfoque dado às crianças pode ser estendido a níveis mais avançados da Matemática.

Dubinsky (1991) refere que discussões e conjecturas com o objetivo de prover evidências em relação a conceitos, como indução matemática, cálculo proposicional, funções como processos e objetos, independência linear, espaços topológicos, dualidade de espaços vetoriais, dualidade de espaços vetoriais topológicos e categorias de teorias, podem ser analisadas com base nas mesmas noções expostas por Piaget, quando descreve a construção de conceitos por crianças, como aritmética, proporção ou, simplesmente, medição.

O autor destaca como as ideias de Piaget podem ser ampliadas e reorganizadas, formando uma teoria geral do conhecimento matemático, identificando como essa mesma teoria pode ser aplicada a níveis mais avançados do pensamento matemático, como em um curso de Matemática ou uma pesquisa científica.

Piaget caracteriza três tipos de abstração: empírica, pseudoempírica e reflexionante.

- (a) abstração empírica: o conhecimento é derivado das propriedades do objeto que correspondem ao resultado das construções internas realizadas pelo sujeito. Assim, a abstração empírica lida com a extração das propriedades comuns dos objetos e a extensão de suas generalizações, que é a passagem do específico para o geral. Dubinsky (1991) afirma que a compreensão de tais propriedades, assim como sua generalização é particular a cada indivíduo, que é capaz de identificar diferentes considerações sobre tais propriedades;

- (b) abstração pseudoempírica: corresponde à abstração entre a empírica e a reflexionante, cujas propriedades são retiradas das ações que os sujeitos apresentam sobre os objetos. Dubinsky cita o exemplo da observação da correspondência 1-1 entre dois conjuntos de objetos que o indivíduo coloca os elementos alinhados. A situação é experimental e as ações do sujeito sobre o objeto, compreendendo sua configuração no espaço e a relação entre ambos os conjuntos, resultam na realização de construções internas; e
- (c) Abstração reflexionante: é designada como a coordenação geral das ações, cuja origem é o sujeito e é completamente interna. O autor apresenta, como exemplo, o objeto matemático sequência numérica em que as crianças realizam uma série de ações individuais, como formação de pares, triplos, etc., interiorizando e coordenando as ações para formar uma ordem total. A abstração reflexionante lida com um diferente tipo de generalização, que é construída e resulta em novas sínteses em meio a novos estudos que adquirem novos significados.

Dubinsky (1991) prossegue o estudo, afirmando que os três tipos de abstração não são completamente independentes, pois as ações realizadas sobre os objetos que lidam com as abstrações pseudoempíricas e reflexionantes só podem ser conhecidas baseadas na abstração empírica. Por outro lado, a abstração empírica será possível se apoiada na assimilação de esquemas, que são construídos na abstração reflexionante.

Abstração empírica e pseudoempírica obtêm conhecimento a partir da realização (ou imaginação) de objetos. Abstração reflexionante interioriza e coordena essas ações para formar novas ações e, em última instância novos objetos (que podem não ser físicos, mas matemáticos como uma função ou um grupo). Abstração empírica, portanto, extrai dados desses novos objetos por meio de ações mentais sobre eles, e assim por diante [...].

Na abstração empírica o sujeito observa um número de objetos e abstrai uma propriedade comum. Abstração pseudo-empírica procede da mesma maneira, depois que ações tenham sido transformadas no objeto. Abstração reflexionante, contudo, é muito mais complicada. De acordo com Piaget, não é uma surpresa que “o

desenvolvimento das estruturas cognitivas é devido à abstração reflexionante”<sup>19</sup> (DUBINSKY, 1991, p. 98).

Portanto, as três abstrações são consideradas dependentes e relacionam-se da seguinte forma: a abstração empírica permite abstrair determinadas propriedades dos objetos, estabelecendo ações sobre eles com base na abstração pseudoempírica. A interiorização desses conceitos e as ações sobre eles ocorrem apoiadas na abstração reflexionante. Em seguida, há a construção de novos objetos matemáticos.

Para Dubinsky (1991), a construção dos objetos matemáticos ocorre em função de situações matemáticas problemáticas, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se formam para resolver determinada situação. Assim, os esquemas mentais dos alunos evoluem, à medida que novos esquemas são formados e nos quais o conhecimento matemático cresce. O autor afirma que as estruturas mentais apropriadas devem ser construídas para cada novo conceito e identifica na Teoria APOS a possibilidade de que essas construções mentais (ações, processos, objetos e esquemas) sejam estudadas, assim como os mecanismos mentais dados pelas classes de abstração reflexionante.

A seguir, apresentamos uma breve descrição das classes de abstração reflexionante de Piaget:

- Interiorização: corresponde a uma sucessão de ações materiais a um sistema de operações interiorizado, que ocorre, quando as crianças usam símbolos, linguagens, figuras e outras imagens mentais para construir processos internos, cujo objetivo é dar sentido ao fenômeno percebido. Um exemplo é a propriedade comutativa da adição. *Dubinsky resume este mecanismo como a transferência de uma atividade específica do mundo externo ao mundo interno* (FUENTES, 2008, p. 30). Com base nesse mecanismo, uma ação pode tornar-se um processo.

---

<sup>19</sup> Tradução nossa: *Empirical and pseudo-empirical abstraction draws knowledge from objects by performing (or imagining) actions on them. Reflective abstraction interiorizes and coordinates these actions to form new actions and, ultimately new objects (which may no longer be physical but rather mathematical such as a function or a group). Empirical abstraction then extracts data from these new objects through mental actions on them, and so on. This feedback system will be reflected in our extension of these ideas in the next section.*

*In empirical abstraction the subject observes a number of objects and abstracts a common property. Pseudo-empirical abstraction proceeds in the same way, after actions have been performed on the object. Reflective abstraction, however, is much more complicated. This is not surprising since, according to Piaget, "The development of cognitive structures is due to reflective abstraction".*

- Coordenação: corresponde à coordenação de ações necessárias para a construção de novos objetos ou novas ações. Dessa forma, dois ou mais processos coordenam-se para formar novos;

- Encapsulação (ou Conversão): é considerado o mecanismo mais importante para a construção de dado objeto matemático. Nessa classe de abstração reflexionante, temos a conversão de um processo (estrutura dinâmica) em um objeto matemático (construção estática). Tal método corresponde à construção mais importante (para a Matemática) e a mais difícil (aos alunos). Para Piaget, a Matemática deve ser pensada em termos de construção de estruturas em que entidades passam de um nível a outro, tornando-se um objeto da teoria. Os processos repetem-se até que estruturas sejam encontradas e transformadas em *estruturas fortes*. As novas formas são construídas com base nas formas anteriores, mais elementares. Como exemplo, o autor cita a multiplicação, proporção e variação de uma variação (DUBINSKY, 1991, p. 101);

- Generalização: neste mecanismo, o indivíduo aplica um determinado esquema a um contexto distinto. Outros objetos podem adicionar-se a um esquema para serem trabalhados em outros contextos. Assim, o sujeito aplica um esquema existente em uma ampla coleção de fenômenos, tornando-se consciente das aplicabilidades do esquema, que ocorre, quando um processo é encapsulado como objeto. Dubinsky (1991) cita alguns exemplos: a razão de duas quantidades ou a adição é usada como esquema para obter, respectivamente, a proporção e multiplicação. Os objetos adquirem novo sentido para o sujeito, à medida que ele entende que o objeto pode ser assimilado pela extensão do esquema. Um exemplo apresentado são os vetores de dimensão 2 ou 3 que podem ser generalizados em vetores de dimensão infinita. Um esquema existente, que não será alterado formará novos objetos (resultantes da encapsulação); e

- Reversão: foi agregada por Dubinsky e consiste na capacidade de reverter o mecanismo gerador de dado objeto matemático, regressando ao processo que o gerou. Dubinsky (1991) apresenta alguns exemplos: subtração e divisão, resolução de uma equação ou inversão de uma função.

Para Fuentes (2008), o aluno adquire uma concepção de dado objeto em particular, caracterizando-a como intrapessoal, ou seja, é o que o indivíduo

compreende. Já o conceito de um objeto matemático é comum e resultante de acordo entre matemáticos.

A autora prossegue afirmando que esquemas constituem estruturas dinâmicas que evoluem constantemente, cada vez que um objeto matemático é agregado às suas estruturas prévias, são constituídos por uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas relacionados a determinado conceito matemático. Fuentes (2008) destaca que, para Meel (2003), os esquemas constituem novos objetos que se relacionam com os conceitos matemáticos preexistentes e àqueles que são construídos simultaneamente em um estado superior. Para Dubinsky (1997), *uma ação, processo ou objeto pode ser reconstruída, como resultado de experiências com novos problemas em um plano superior, interiorizando ações mais sofisticadas e encapsulando processos enriquecidos. O nível inferior de construção não se perde, e sim forma parte de uma concepção enriquecida* (FUENTES, 2008, p. 34).

Baseados nas ideias de Jean-Luc Dorier, os autores COOLEY *et al.* (2006) sugerem que, particularmente, a aprendizagem de Álgebra Linear necessita que os conceitos sejam unificados e generalizados e, assim, devem ser suportados por atividades metacognitivas.

Nessa teoria, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que corresponde a uma descrição baseada em dados experimentais da Matemática envolvida, e em como o sujeito fará a construção desse conhecimento. Mas, não há apenas uma decomposição genética de determinado conceito nem uma única forma que o sujeito o constrói. A observação do progresso da aprendizagem constitui um importante recurso para a decomposição genética, que será apresentada, como um guia possível para o desenho instrucional. Dubinsky (1991) afirma que a análise de suas pesquisas foi fortemente influenciada por dados obtidos de observações (entrevistas, testes escritos, uso do computador, etc.) de estudantes durante o estudo de determinado conceito. A decomposição genética é resultante da síntese de resultados empíricos, da teoria geral e do conhecimento matemático que envolve o conceito em estudo.

Para Stewart (2008), a decomposição genética de determinado conceito matemático é o resultado de sua análise teórica, nos quais as construções mentais dos estudantes podem evoluir com o propósito de compreendê-lo. Como as

construções mentais entre os sujeitos diferenciam-se, podemos considerar que a decomposição genética de determinado assunto não é única. Trata-se de um conjunto estruturado de construtos mentais que descrevem o conceito na mente do indivíduo. É o resultado da análise teórica do conceito, o modo que cada construção mental do indivíduo pode progredir com o objetivo de compreender determinado conceito. Como o detalhe de uma construção mental é diferente de indivíduo para indivíduo, a decomposição genética pode variar e não ser única.

O objetivo da análise teórica de um conceito é propor um modelo cognitivo que descreva as construções mentais específicas que um estudante poderá ter ao desenvolver sua compreensão sobre determinado conceito. Ao resultado da análise, atribui-se o nome de decomposição genética do conceito.

Com base na análise dos dados coletados, podemos sugerir mudanças na decomposição genética, se necessário.

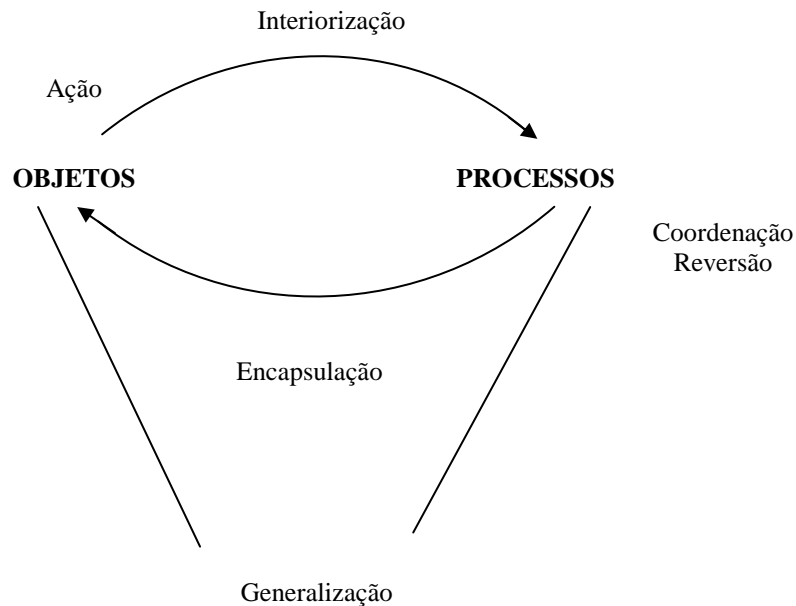
Quando tratamos da Teoria APOS, referimo-nos a quatro fases que se relacionam e intercalam-se em um ciclo contínuo: ação, processo, objeto e esquema.

Dubinsky (1991) descreve como as ações são interiorizadas em processos e, então, encapsuladas como objetos mentais situados em esquemas cognitivos mais sofisticados. Para expandir melhor as concepções do ciclo, serão destacadas as informações mais relevantes de cada uma:

- (a) Conceção-ação: os alunos por meio de conhecimentos prévios e das atividades propostas pelo professor limitam-se às técnicas de resolução conhecidas, sem estabelecer relações entre os conceitos envolvidos;
- (b) Conceção-processo: os alunos passam a se desprender de exemplos dados, estabelecendo conexões entre outros exemplos, e refletindo sobre a generalização de padrões. Os objetos são vistos sob diferentes pontos de vista. Os alunos enxergam novas propriedades e deparam-se com distintas formas de representações;
- (c) Conceção-objeto: o aluno torna-se consciente do processo, como totalidade, tendo a capacidade de realizar ações sobre o objeto e raciocinar sobre suas propriedades; e

- (d) Concepção-esquema: todos os conceitos são relacionados, compreendidos e generalizados sob diferentes contextos, formando uma referência bem articulada e coerente na mente do indivíduo.

Figura 4 - Esquemas e suas construções



Fonte: Adaptado de Dubinsky (1991, p. 107)

O esquema não pode ser pensado de modo estático, mas, sim, como uma atividade dinâmica que se constrói e reconstrói continuamente. Como apresentado na Figura 4, um esquema não se constrói de modo linear, correspondendo a um sistema de *feedback* circular.

Como exemplo, Dubinsky (1991, p. 107) apresenta a descrição dos objetos matemáticos que correspondem a números, variáveis, funções, espaços topológicos, topologias, grupos, vetores, espaços vetoriais, etc. Estes objetos são construídos pelo sujeito em seu desenvolvimento matemático. Para tanto, um conjunto de ações é realizado e interiorizado sobre tais objetos. Assim, as construções internas são feitas sobre as ações. Quando uma ação é interiorizada, é dito que se formou um processo. A interiorização permite que haja a consciência sobre a ação de modo que se reflita e tenha combinação em outras ações. *Interiorizar ações é uma maneira de construir processos. Outra maneira é trabalhar com processos existentes para formar novos. Isso pode ser feito, por exemplo, por reversão.*

Novos processos também podem ser formados com base na composição e coordenação de dois ou mais processos. Um exemplo apresentado é o esquema do espaço vetorial de dimensão finita que poderá ser utilizado para a construção do objeto espaço vetorial de dimensão infinita. Diz-se, portanto, que o novo fenômeno (espaço vetorial de dimensão infinita) foi assimilado pelo esquema. Contudo, a experiência matemática mostra ser conveniente o uso de estruturas topológicas. Dessa forma, se houver no sujeito esquemas formados por espaço topológico, este poderá ser coordenado com o esquema do espaço vetorial, para se obter um espaço vetorial topológico. Da mesma forma, esquemas de espaços topológicos podem ser para o conceito de função contínua, e esquemas de espaços vetoriais podem ser para o conceito de função linear. Portanto, coordenar a continuidade e linearidade acarretará a ideia de função linear contínua.

O estudo de Dubinsky (1991) mostra que novos esquemas são acomodados a novos fenômenos e experiências, tornando os esquemas antigos menos satisfatórios. Acrescenta que o processo de construir novos processos torna possível, que esse novo processo seja transformado em um objeto. Para tanto, é preciso que o sujeito assuma que a entidade matemática possa ser pensada, tanto como objeto como processo.

Em pesquisa realizada por Cooley *et al.* (2006, p. 3), um grupo de professores buscou estudar o conceito de vetor. No primeiro dia da pesquisa experimental, os participantes trabalharam com atividades designadas no *Maple e Geometer's Sketch Pad* (GSP). A finalização da tarefa ocorreu com a discussão entre os professores de como as atividades propostas relacionavam-se com a Teoria APOS. Uma das questões apontadas foi: *Como você interpreta o tipo de pensamento que essas atividades promovem nas mentes dos estudantes?*<sup>20</sup>.

A seguinte questão iniciou o debate em aula: *O que é um vetor?* Foi proposto ao grupo que esboçasse à mão a transformação de 3D para 2D. Seguiu-se a discussão sobre a aplicação das projeções gráficas no computador.

O grupo, então, discutiu como todas as atividades propostas poderiam ser incorporadas ao currículo do nível universitário.

---

<sup>20</sup> Tradução nossa: *How would you interpret the kind of thinking that these activities may promote in your student's mind?*

A segunda fase da pesquisa foi dirigida por três líderes de projeto, que dividiram as atividades em um grupo de oito professores universitários (dois homens e seis mulheres). Foi-lhes proposto que: (a) desenvolvessem um mapa conceitual do conceito de vetor; (b) fizessem uma reflexão sobre a evolução mental ocorrida entre as atividades aplicadas nos primeiro e segundo dias; e (c) um ensaio reflexivo sobre a evolução do entendimento do conceito de vetor, baseado na análise de seus próprios mapas conceituais. As atividades e discussões foram gravadas e observadas por dois participantes externos.

Como resultado, os pesquisadores evidenciaram que os estudantes auto avaliaram-se como aprendizes e tiveram maior compreensão dos conceitos destacados com base em uma variedade de atividades aplicadas.

Dois questões referiam-se, diretamente, à Teoria APOS: (a) Descreva os componentes da Teoria APOS e (b) Encontre um conceito da Álgebra Linear e atribua sua decomposição genética, de acordo com a Teoria. A seguinte decomposição genética do conceito de Independência Linear foi dada por um dos participantes:

Tópico de discussão: *Independência Linear*

**Ação** Dados dois ou mais vetores, é possível configurar uma combinação linear com base nos coeficientes desconhecidos e dizer se os vetores são independentes ou dependentes.

**Processo** Pode-se descrever o processo de determinação da independência linear, sem realmente ter um conjunto de vetores. Os vetores poderiam também ser pensados geometricamente, e pode-se imaginar um conjunto linearmente independente ou dependente de vetores.

**Objeto** A independência linear é pensada como um objeto quando o conceito pode ser conceituado além do processo de determinação de independência ou imaginando os vetores. Independência Linear conecta as ideias de base e espaço.

**Esquema** A independência linear como conceito ultrapassa os vetores em  $\mathbb{R}^n$  e relaciona-se à base e amplia a visão em qualquer tipo de espaço vetorial<sup>21</sup> (COOLEY *et al.*, 2006, p. 6).

---

<sup>21</sup> Tradução nossa: *Linear Independence*

Action: *Given two or more vectors, one can set up a linear combination, solve for the unknown coefficients, and tell whether the vectors are lin. indep or dep.*

Process: *One can describe the process of determining independence without actually having a set of vectors. Vectors could also be thought of geometrically, and one could picture a set of lin indep or dep vectors.*

O professor reconheceu significativa mudança em seu entendimento e ampliou suas ideias com base na formação de novas conexões e estruturas mentais.

As conexões foram mais específicas e o número de informações foi ampliado. Com a criação do segundo mapa conceitual, alguns conceitos vieram à tona, dentre eles: Matrizes, Transformações Lineares e Física. As representações foram realizadas, tanto na forma algébrica como na geométrica; e foram realizadas em 2D e 3D, ampliando a conceitos de movimento, projeção e velocidade.

De acordo com Trigueros; Oktaç; Manzanero (2007), a relação dessas concepções poderá apresentar diferentes concepções de determinada noção em distintos momentos.

Em seu artigo, Dubinsky (1991) defende que os aspectos educacionais devem estar relacionados à motivação, que estimula estudantes e incentiva construções cognitivas ligadas a situações de conflito. Diante da dificuldade, o estudante é estimulado a resolver o problema, à medida que percebe que a atividade cognitiva leva ao crescimento e à solução do problema.

O autor tece crítica à prática de exemplos repetitivos, chamados de *exemplos perdidos*. Afirma que estes poderão prejudicar a construção das estruturas cognitivas dos estudantes, reforçando interpretações incorretas que acarretarão esquemas inapropriados.

A decomposição genética possibilita que os estudantes vejam os exemplos de um modo diferente da prática tradicional de aula, possibilitando a construção de atividades mentais relacionadas ao objeto matemático em estudo. Assim, acredita que é esse o papel do educador matemático. Mas, não afirma que as práticas com exemplos devam ser eliminadas. É importante que o estudante desenvolva a percepção do erro ou o que deve ser feito de forma apropriada, tornando essencial a relação que se estabelece entre o conhecimento procedural e o conceitual. Caberá ao professor identificar os tipos de erros cometidos pelos estudantes, justificar as respostas “corretas” e explicar como elas foram obtidas.

---

*Object:* Linear independence is thought of as an object when the concept can be conceptualized beyond the process of determining independence or picturing vectors. Linear independence connects to the ideas of basis and span.

*Schema:* One can see linear indep as a concept beyond vectors in  $\mathbb{R}^n$ , but as a concept relating to basis and span in any sort of vector space.

### *2.1.1 Resumo e Conjecturas*

Na Teoria APOS de Dubinsky (1991), encontramos a fundamentação teórica que direcionou a análise de nossa pesquisa de doutoramento. O aporte teórico possibilitou que diferentes concepções do conceito em estudo fossem percebidas, após a realização de sua decomposição genética pelos estudantes, possibilitando a interpretação do tipo de pensamento estabelecido. Entretanto, como afirma Dubinsky (1991), não há uma única decomposição genética do conceito, nem mesmo uma única maneira, como o sujeito constrói o conhecimento. Além disso, as diferentes concepções estabelecidas podem ter distintos papéis e momentos.

Defendemos que a apresentação de problemas que ultrapassem a prática de exemplos repetitivos, reforça a construção das estruturas cognitivas dos estudantes.

De acordo com Stewart (2008), os estudantes buscam um novo enfoque no ensino da Álgebra Linear que deverá considerar mais ideias conceituais do que procedimentais.

É importante que eles ultrapassem a compreensão limitada dos conceitos (concepção ação), esforçando-se para estabelecer relações com suas definições, propriedades e diferentes representações (concepção processo-objeto-esquema). Se o sujeito estiver limitado à concepção ação, ele estará restrito a regras e instruções passo a passo de como resolver determinada tarefa. No entanto, é possível afirmar que a concepção ação exerça um papel essencial nos primeiros estágios de compreensão de determinado conceito. Na concepção processo, o sujeito pode prever resultados, novos atalhos e descrever a ação verbalmente, tudo apenas pelo pensamento e não, necessariamente, realizando operações. Quando um processo torna-se uma totalidade, entendemos que o indivíduo apresenta a concepção objeto. Nesse caso, afirmamos que o processo foi encapsulado como objeto mental. Já o esquema corresponde à estrutura na mente do indivíduo, uma estrutura dinâmica em que novos objetos matemáticos serão agregados às suas estruturas prévias. Assim, ao escrever a respeito da Teoria APOS, fez com que refletíssemos a respeito dos processos cognitivos envolvidos na construção do conhecimento, que foram perceptíveis, após a realização da decomposição genética dos mesmos. Desse modo, foi nitidamente identificada a relação, que teorias cognitivas como esta podem estabelecer com outras teorias.

Quando estudamos Álgebra Linear, estamos envolvidos com conceitos altamente abstratos, que são construídos por uma variedade de processos mentais que interagem e que relacionam aspectos da Matemática, da Psicologia Cognitiva e mesmo de nossa natureza biológica. Mas, quais são as capacidades encontradas em estudantes que apresentam um alto grau de abstração? Em qual concepção (da Teoria APOS), um estudante com alto grau de abstração de resolução de problemas encontra-se? Assim, defendemos que as estruturas biológicas que se formam nas diferentes concepções da Teoria APOS ativam distintas regiões do cérebro e estabelecem conexões em diferentes níveis de complexidade. Remetemo-nos à relação que se estabelece entre a Teoria APOS e o termo *mente matemática*, em que cada processo e conceito matemático são compartilhados entre os sujeitos, com base no estudo das estruturas matemáticas concebidas pela comunidade. Consideramos que a conciliação dos aportes teóricos citados e o estudo da Neurociência constituem uma futura etapa de nossos estudos. Com certeza, o estudo que realizaremos sobre este último tema, foi merecedor de uma seção à parte.

## 2.2 *Pensamento Matemático Avançado (PMA)*

Dubinsky (1991) propôs analisar a Teoria APOS em domínios mais amplos de aprendizagem matemática e pensar, em particular, em uma comparação de seus papéis em contextos que se estendem ao Pensamento Matemático Avançado.

O trabalho de Dubinsky ficou centrado na Matemática da graduação, nomeadamente, no desenvolvimento de práticas adequadas de funcionamento e sequências de aprendizagem (Decomposição Genética) em uma ampla série de áreas específicas da Matemática, incluindo Matemática Discreta, Lógica, Cálculo e Teoria dos Grupos de Álgebra Linear.

Para exposição do tema Pensamento Matemático Avançado, fizemos uma síntese do Capítulo 2 do livro *Advanced Mathematical Thinking*, considerando as principais ideias de Tommy Dreyfus.

Para Dreyfus (1991, p. 25), *não é suficiente, por exemplo, definir e exemplificar um conceito abstrato, como espaço vetorial. Os estudantes devem,*

*então, construir as propriedades de tal conceito por meio de deduções a partir da definição*<sup>22</sup>.

O autor completa que o entendimento é um processo que ocorre na mente dos alunos, constituído por uma longa sequência de atividades de aprendizagem em que uma variedade de processos mentais interage. Mas, a análise do entendimento de uma noção ou um conceito matemático torna-se extremamente difícil. Na área de psicologia, pesquisadores vêm perguntando o que o “entendimento” significa, em particular, quais seus componentes, quais processos mentais intervêm e se combinam em processos-meta de entendimento. Já os pesquisadores em Educação Matemática, em particular, têm consciência da importância dos processos componentes para entender a Matemática avançada e suas interações. O interesse de ambas as áreas busca angariar conhecimentos básicos teóricos e estabelecer o que ocorre na mente dos alunos.

Os processos abstratos são analisados e discutidos com a finalidade de tornar os professores de Matemática avançada mais conscientes com o que ocorre durante tais processos.

Refletir sobre uma experiência matemática é importante para a solução de problemas não triviais, contrariamente do que ocorre com exercícios-padrão. Essa reflexão é um importante aspecto da metacognição e do metaprocessos, sendo uma característica do Pensamento Matemático Avançado.

Para o autor, ainda não está clara a diferença entre o Pensamento Matemático Elementar e o Avançado. Mas, o que se evidencia é que o Pensamento Matemático Avançado está focado nas abstrações de definição e dedução; e segue afirmando que a abstração não é exclusiva da Matemática avançada.

*Assim, abstrações são realizadas na física, representações são usadas na psicologia, análise é usada na economia e visualização em arte*<sup>23</sup> (DREYFUS, 1991, p. 26).

Os processos relevantes para o Pensamento Matemático Avançado focam as características desses mesmos processos. Dreyfus (1991) cita o exemplo de Anéis e Grupos de *Lie* que parecem ser muitos complexos. A distinção está em como essa

---

<sup>22</sup> Tradução nossa: *Is not sufficient, for example, to define and exemplify an abstract concept such as vector space. Students must then construct the properties of such a concept through deductions from the definition.*

<sup>23</sup> Tradução nossa: *Abstractions are made in physics, representations are used in psychology, analysis is used in economics and visualization in art.*

complexidade é gerenciada. Os processos mais poderosos são os que permitem, em particular, abstrair e representar. Quando tratamos de abstração e representação, um pode se mover de um nível de detalhe a outro e, então, gerenciar tal complexidade. Os aspectos matemáticos e psicológicos de um processo não podem ser separados. Um exemplo é a construção de um gráfico de uma função em que é executado um processo matemático, seguindo regras que podem ser afirmadas em uma linguagem matemática e, ao mesmo tempo, está sendo gerada uma imagem mental visual do gráfico, ou seja, está sendo gerada uma visualização da função.

Assim, aspectos mentais e imagens matemáticas estão sempre relacionados. Um não pode nascer sem o outro e ambos são gerados pelo mesmo processo que envolve aspectos matemáticos, psicológicos e biológicos. A conexão entre esses aspectos torna os processos interessantes e relevantes para compreender o aprendizado e o pensamento na Matemática avançada.

Mas, como devem ser apresentadas as disciplinas Matemáticas em cursos superiores, em particular, em um curso de Engenharia que, particularmente, atrai nossa atenção?

De acordo com Dreyfus (1991), a Matemática é criada na tentativa e erro, com base nas afirmações parcialmente corretas (e, parcialmente, erradas), no formalismo intuitivo em que termos desconhecidos e imprecisos são intencionalmente apresentados. A vantagem de se estruturar e apresentar um curso que segue o formalismo do teorema-prova-aplicação permite um bom planejamento, um progresso em termos de apresentação do material e dos programas que devem ser cobertos. Infelizmente, há uma séria desvantagem: é inflexível em termos de adaptabilidade do estudante. É imprescindível que o estudante apresente uma natureza própria de investigação e tenha a oportunidade de adquirir uma atitude matemática. Entretanto, isso não funciona para a grande maioria dos estudantes, aqueles que estão se formando em Ciências, Engenharia, Medicina ou Artes e estudando a Matemática, como uma disciplina de serviço<sup>24</sup>.

Conforme explicam Howson *et al.* (1987), o profissional de Engenharia deverá ser capaz de modelar ou tratar matematicamente determinado problema. Caberá a

---

<sup>24</sup> De acordo com Howson *et al.* (1987) a Matemática tem se tornado uma necessidade conjunta, envolvendo as áreas de Engenharia, Medicina, Arquitetura e outras. A Matemática quando evidencia um campo específico entre a teoria e suas aplicações é chamada de "disciplina de serviço".

ele, conhecer Matemática o suficiente para que seja capaz de consultar um matemático e que tire o melhor benefício de toda a situação.

Dreyfus (1991, p. 28), discute que a maioria das instruções da escola fundamental ao ensino médio ensina o que são chamados rituais: *faça isso, então, faça isso, se não, então faça isso*<sup>25</sup>. Os professores consideram esse ritual, composto por exercícios padronizados e definidos formalmente, suficientes para trabalhar com os estudantes que adquirem a capacidade de executá-los, contudo de forma lenta ou com o auxílio de programas computacionais como o *Mathematica*. Adquirem uma considerável quantidade de conhecimentos matemáticos, porém, sem trabalhar a metodologia do matemático que tem uma capacidade de usar seu conhecimento de modo flexível na solução de diversos problemas. Dessa forma, os professores ensinam a Matemática, como produto final, porém, não ensinam os processos envolvidos na construção desses produtos.

No mesmo texto, o Pensamento Matemático Avançado é apresentado como um processo extremamente complexo, com um grande número de componentes envolvido de maneiras diferentes. Dreyfus (1991) cita o livro de Hadamard (1945), que faz referência às ideias de Poincaré. Assim, Hadamard explicita a importância das resoluções informais e pensar na essência das palavras, na imagem visual e mental (que não são, necessariamente, expressas em palavras). Nessa fase, “jogam-se”, com diferentes ideias, com distintos elementos, como em um quebra-cabeça.

Dreyfus (1991, p. 29) defende a ideia de Hoffman (1989) que propôs a Filosofia da Educação Matemática baseada no reconhecimento da Matemática, como uma atividade humana, usada no mundo real, caracterizada, como uma ciência que incorpora observação, experimento e descoberta.

O Pensamento Matemático Avançado envolve a representação, a visualização, generalização, assim como a classificação, conjectura, indução, análise, síntese, abstração ou formalismo.

Quando tratamos dos processos envolvidos na representação do Pensamento Matemático Avançado, a discussão sobre a importância da representação matemática é importante. Ao mesmo tempo em que os símbolos são absolutamente indispensáveis na moderna Matemática, há perigos associados a eles. Assim,

---

<sup>25</sup> Tradução nossa: *do this, then do this, then do this*.

símbolos envolvem relações entre sinais e significados. Permitem que o significado – o conhecimento implícito da pessoa, - seja expresso em termos de símbolos. Uma representação simbólica é externalizada de forma escrita ou falada, usualmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil. Por outro lado, a representação mental refere-se a esquemas internos ou quadros de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo.

Dreyfus (1991) cita o exemplo dos espaços vetoriais. Quando pensamos em espaço vetorial, podemos “ver” setas (flechas) e pensar nessas setas, de acordo com suas bases, transformações, etc. Outros irão pensar nas *n-uplas* de números ou símbolos abstratos que satisfazem os axiomas.

As representações passam a ser criadas na mente, na base de sistemas de representação concreta. Nesses sistemas, são criadas as várias representações do mesmo objeto matemático.

Dreyfus (1991) considera que o sucesso na Matemática é obtido quando há ricas representações dos conceitos matemáticos estudados que proporcionarão a conexão entre os diversos aspectos envolvidos, pois, caso contrário, tal conexão será bastante pobre. Assim, várias representações mentais do mesmo objeto complementam-se e, eventualmente, integram-se em uma única representação. Tal processo é chamado de múltiplas conexões de representações.

Uma única representação não é suficiente para gerenciar todo o ciclo de informação usado na solução de um problema, a menos que várias representações estejam corretas e conectadas. Uma representação pode levar a outra, e uma poderá ser mais eficaz para alcançar o próximo passo.

Para obter sucesso na solução de um problema, são necessárias, pelo menos, duas representações, sendo importante que se transfira a informação obtida de uma representação a outra.

Pela nossa experiência como professora, notamos que, quando tratamos das questões aplicadas em um curso de Engenharia, podemos relacionar a experiência do autor com seus alunos. É citado que seus alunos ficam, particularmente, apreensivos com os “problemas aplicados” nos exames. Os estudantes precisam compreender não apenas o contexto dos problemas aplicados, como por exemplo, circuitos elétricos e estabelecer uma próxima e clara correspondência entre as quantidades referidas em termos de circuitos elétricos e em termos de equações

diferenciais. Essa correspondência para o aluno não é tão óbvia e precisa ter o suporte explícito do professor.

Mas, é discutido que a distinção entre as representações mentais, concretas e simbólicas estão desfocadas. Em certo grau, é preciso que os processos de aprendizagem nasçam de representações mentais que, por sua vez, nasçam de representações concretas. O processo de representação concreta tem uma particular importância na Matemática aplicada e um peso considerável na universidade.

Dentre as capacidades desenvolvidas no Pensamento Matemático Avançado, é evidenciada a abstração; no entanto, é importante ressaltar que os processos de abstração envolvem não só o pensamento matemático em nível avançado, como também o elementar.

Quando tratamos do Pensamento Matemático Avançado, o estudante desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas. Dreyfus (1991) descreve dois processos adicionados à representação que formam um pré-requisito para a abstração: a generalização e a síntese.

Quando se refere à generalização, o autor supracitado destaca que generalizar é derivar ou induzir particularidades com o objetivo de identificar aspectos comuns e expandir a domínios de validade. Cita o exemplo de um estudante que sabe que a resolução de um sistema linear com uma variável apresenta uma única solução, e que outros sistemas com duas (ou três) equações e duas (ou três) variáveis também apresentam solução única. Assim, o estudante generaliza o conceito de  $n$  equações lineares para  $n$  variáveis. No processo, ocorre a transição de um caso particular de  $n = 1, 2, 3$  para um geral  $n$ , em que há necessidade de se verificar as condições comuns de  $n = 2, n = 3$  e, então, fazer conjecturas e estabelecer o domínio de validade da conclusão em que uma única solução pode ser expandida ao caso geral  $n$ .

Nesse exemplo, há o estabelecimento de analogias entre casos concretos de  $n = 2$  e  $n = 3$  para  $n$  equações e  $n$  variáveis, ou seja, casos abstratos.

No processo de generalização, os requisitos cognitivos são consideravelmente ampliados.

Podemos considerar os processos de Síntese, Generalização e Abstração, como componentes do Pensamento Matemático Avançado.

A respeito da *Síntese*, atribui a definição como a combinação de partes, de modo que estas formem o todo, ou seja, uma entidade.

Na *Álgebra Linear*, os estudantes, usualmente, aprendem um número de fatos isolados sobre ortogonalidade de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de base, solução de sistemas de equações lineares, etc. Mais tarde, todos esses fatos isolados, vistos previamente, irão se inter-relacionar, formando uma única imagem. Mas, é bastante difícil para o matemático estabelecer ferramentas que auxiliem o estudante que ainda não está acostumado a sintetizar e, ainda, não percebe os detalhes envolvidos no processo de aprendizagem necessários para sintetizar conceitos e operações.

Frente a esse cenário, as práticas de sala de aula não são suficientes nem enfatizam o processo de síntese. Poucas atividades são praticadas no sentido de permitir a prática de síntese de diferentes aspectos do conceito e, muito menos, distintos conceitos em vários domínios. A maioria dos exercícios é padrão e não requer a síntese, conseqüentemente, os estudantes não identificam sua necessidade.

O autor citado defende que, mesmo que a maioria dos problemas seja trivial, porém, não padrão, é necessário que se requeira flexibilidade de pensamento e síntese.

Na *Abstração*, apresenta um exemplo: na transição entre os vetores do  $\mathbb{R}^3$  para a noção abstrata de espaço vetorial, a relação entre os vetores torna-se o foco de atenção.

A transição requer que os estudantes sejam capazes de manter o objeto “vetor” puramente em termos de suas relações com objetos similares e diferentes, como vetores ou escalares e compreender que o objeto por si só não é especificado por qualquer propriedade. Assim, são estabelecidas conclusões que, geralmente, são válidas, independente, das propriedades intrínsecas dos vetores. Dessa forma, um grande poder da Matemática advém da abstração que está intimamente ligada à generalização.

Apona que um dos principais incentivos para a abstração é a natureza dos resultados obtidos. Outro incentivo é sua síntese.

O autor afirma que nem a generalização, nem a síntese têm o peso da exigência cognitiva nos estudantes, como a abstração. Usualmente, a generalização

envolve uma expansão da estrutura do conceito de indivíduo, e a abstração, uma reconstrução mental.

Portanto, a abstração contém o potencial de ambas: generalização e síntese. Dreyfus (1991) aponta que a natureza do processo mental da abstração é bastante diferente do processo mental da generalização e síntese. O processo da abstração corresponde a um processo construtivo de estruturas mentais necessárias para a construção das estruturas matemáticas, de suas propriedades e relações com outros objetos matemáticos.

A abstração requer que a estrutura das propriedades e as relações entre os objetos sejam observadas. As estruturas tornam-se importantes, e detalhes irrelevantes são omitidos de forma a reduzir a complexidade da situação.

O autor discute algumas questões:

Como podemos gerar estruturas mentais que estão frequentemente relacionadas a imagens visuais, se elas podem representar relações que são removidas do concreto que estão originalmente relacionadas? Qual é o papel da visualização no processo de abstração? (DREYFUS, 1991, p. 38)<sup>26</sup>.

Entretanto, não há respostas definidas para tais questões.

As imagens visuais ajudam os estudantes a engajarem-se na abstração, incorporando aspectos comuns dos processos indutivos e exibindo as estruturas e funcionalidades comuns em entidades únicas, permitindo que construam e aperfeiçoem suas representações mentais por indução.

Os processos de representação e abstração são complementares e funcionam em direções opostas. Um conceito é sempre abstraído de várias representações; por outro lado, representações são sempre representações de conceitos mais abstratos. Quando uma única representação de um conceito é usada, a atenção deve focar nessa última, em lugar do objeto abstrato. Mas, quando muitas

---

<sup>26</sup> Tradução nossa: *How can we generate mental structures which are so often linked to visual images, if they should represent relationships that are removed from the concrete which were originally linked to? What is the role of visualization in the process of abstraction?*

representações são consideradas em paralelo, a relação com o conceito abstrato torna-se importante. Portanto, as estruturas cognitivas aprimoram-se, quando os estudantes passam a pensar paralelamente em diferentes representações, no caso, visuais, promovendo uma complementaridade entre a Matemática e os aspectos cognitivos da representação das estruturas matemáticas. Ambas se complementam, uma entre abstração e representação, e a outra entre a Matemática e as representações mentais.

De acordo com Dreyfus (1991), alguns aspectos devem ser considerados nos processos de aprendizagem que consistem em quatro estágios: (a) usar uma única representação; (b) usar mais de uma representação em paralelo; (c) estabelecer relações entre as representações e (d) integrar as representações e conectá-las de modo flexível.

Quando usamos uma única representação, partimos de um caso concreto. Já quando há diferentes representações usadas paralelamente, evidencia-se a dificuldade de se estabelecer conexões entre elas. O poder de estabelecer tais conexões reforça o conceito e a influência da abstração. Na última fase, as conexões entre as relações aparecem, assim como as propriedades comuns que formam o conceito abstrato, pois, caso contrário poderá ocorrer uma regressão. Por fim, quando esse processo estiver completo, haverá a formação da noção abstrata do conceito dado, e o estudante retornará a uma (ou várias) representação para resolver o problema matemático proposto.

Dreyfus (1991) destaca que a representação e a abstração são os processos mais importantes do Pensamento Matemático Avançado, englobando interações entre descobertas, intuição, checagem, prova, definição e outros.

O ensino e a aprendizagem do processo de investigação permitem o envolvimento pessoal, ampliam a intensidade de atenção e o sentimento de atingir o sucesso. Mas depende tempo, fazendo com que professores não o utilizem de modo eficiente.

A descoberta, a intuição e a checagem correspondem ao início da sequência dos processos matemáticos, cujo objetivo é compreender as relações abstratas que se encontram entre os objetos matemáticos. Os processos devem ser explicitados aos alunos com o máximo de detalhes, e os alunos devem ter ciência de promover a interação entre os diversos processos como representação e abstração.

A Teoria APOS desenvolveu-se no seio do Pensamento Matemático Avançado, pela necessidade de um grupo de pesquisadores da RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*) pesquisar, como os processos mentais se desenvolvem, pelos quais os novos conceitos matemáticos são adquiridos.

A transição entre a concepção processo e objeto caracteriza o Pensamento Matemático Avançado (PMA). Para tanto, há uma transformação dinâmica de conceitos que se constituíram baseados nos objetos iniciais. Após a construção do novo objeto, o indivíduo deverá desencapsular os objetos envolvidos e coordená-los em um novo processo.

Mas, o que caracteriza o Pensamento Matemático Avançado (PMA)? Quais as qualidades essenciais da criatividade Matemática no Pensamento Matemático Avançado?

Conforme Tall (2000), a estrutura falha dos programas de Matemática das universidades proporciona um grande obstáculo entre a forma como as ideias são construídas cognitivamente e o modo como são apresentadas em uma ordem dedutiva. Nesses programas não há evidências de crescimento psicológico da mente humana formada com base no processo de abstração reflexionante.

O autor acrescenta que todos os conceitos matemáticos avançados são abstratos; aqueles que começam como processos, são encapsulados como objetos mentais e, assim, atingem níveis mais elevados de pensamento.

A caracterização do Pensamento Matemático Avançado (PMA) ocorre, quando: (a) há a participação ativa do aluno em um “debate científico”, o contrário de uma postura passiva de uma teoria pré-organizada; (b) há o conflito do estudante frente à construção de novas teorias, de forma a ajudá-lo a refletir sobre o problema e construir um novo; (c) há a construção de fundamentação cognitiva apropriada de conceitos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) com base em um enfoque que equilibra o crescimento cognitivo e o desenvolvimento lógico; (d) o uso da visualização, particularmente, apoiada no computador permite uma visão ampla dos conceitos e novos métodos de tratar a informação; (e) o uso da programação, objetivando incentivar o pensamento dos estudantes baseados nos processos matemáticos evidencia como esses processos são encapsulados por abstração reflexionante.

De acordo com Tall (1991), o ciclo completo do Pensamento Matemático Avançado (PMA) inicia-se no ato criativo de considerar o contexto do problema na pesquisa que acarreta a formulação de conjecturas e o último estágio, o refinamento e prova. Deve-se, portanto, focar o processo e não o produto como no nível elementar.

Tall (1991) apresenta os diferentes tipos de *mente matemática*. De acordo com Poincaré, há estudantes que preferem tratar o problema matemático pela “Análise”, e outros pela “Geometria”. Os primeiros têm dificuldades em “olhar no espaço”, os segundos recorrem à Geometria, transformando cada conceito em uma imagem que corresponderá a seu significado.

Em considerações metateóricas, o autor discorre que a Matemática é uma cultura e que devem ser considerados diferentes aspectos diante de cada contexto sob o ponto de vista de um analista e de um matemático aplicado, acarretando distintas atitudes frente ao conceito matemático.

Prossegue com a definição dos conceitos imagem e definição. O termo conceito imagem é usado para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, incluindo todas as figuras mentais, propriedades e processos. É essa mesma estrutura cognitiva final que, após construída, será desencapsulada nos objetos envolvidos e coordenados em um novo processo. No entanto, a construção do conceito imagem não se faz de modo coerente, pois o cérebro humano não se comporta dessa forma. Estímulos ativam diferentes partes do conceito imagem, tornando-o coerente, como um todo. Para tanto, uma série de conhecimentos deve ser sequenciada em argumentos dedutivos.

Portanto, deve-se prover material que auxilie o estudante na construção de uma sequência lógica correta e que promova a construção de novas estruturas e processos de pensamentos amadurecidos em um nível mais elevado de abstração.

Assim, o Pensamento Matemático Avançado ocorre quando pensamos em sistemas dinâmicos controlados por uma variedade de parâmetros.

### ***2.2.1 O Conceito Imagem e Conceito Definição na concepção de Vinner (1991)***

Vinner (1991, p.68) define o conceito imagem como algo não verbal associado em nossa memória com o conceito nome. Por sua vez, o conceito nome

corresponde ao conceito que, quando visto ou escutado, provoca um estímulo em nossa memória. Assim, afirma que estímulos podem provocar uma representação visual, repleta de impressões e experiências. *As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao conceito nome podem ser transformadas em formas verbais*<sup>27</sup>.

Mas, é importante ressaltar que as imagens visuais não são as primeiras a serem evocadas em nossa memória, mas, sim, as impressões e experiências associadas a essa imagem visual. O autor cita o exemplo de uma função. Afirma que quando escutamos a palavra “função”, imediatamente, pensamos na expressão  $y = f(x)$  ou visualizamos um gráfico da função, ou pensamos em funções específicas como  $y = \text{sen}x$ , etc. É importante salientar que o conceito nome é específico de cada sujeito e que esse mesmo sujeito pode reagir de diferentes maneiras em relação ao conceito nome dependendo da situação.

Para adquirir e entender um conceito de dado objeto, é preciso formar um conceito imagem do mesmo e que o conceito definição não é suficiente para garantir seu pleno entendimento. Para o autor, a maioria dos conceitos do cotidiano é adquirida sem qualquer envolvimento de definições. Por outro lado, alguns conceitos podem ser apresentados com base nas definições, cujo papel é auxiliar a construção do conceito imagem (VINNER, 1991).

Em contextos do cotidiano<sup>28</sup>, a partir do momento que o conceito imagem se forma, o conceito definição torna-se dispensável, inativo ou mesmo esquecido.

Contudo, em contextos técnicos<sup>29</sup>, as definições continuam a exercer um papel primordial na formação, tanto do conceito imagem como no desenvolvimento de estruturas cognitivas. Observamos que os contextos técnicos impõem aos alunos um modo de pensar totalmente diferente do apresentado nas práticas cotidianas. No início dos processos de aprendizagem, os hábitos de pensar sobre o cotidiano sobrepõem-se aos hábitos impostos pelos contextos técnicos.

Com o objetivo de apresentar suas ideias preliminares a respeito do conceito imagem e conceito definição, Vinner (1991) assume a existência de duas células diferentes (não biológicas) em nossa estrutura definitiva.

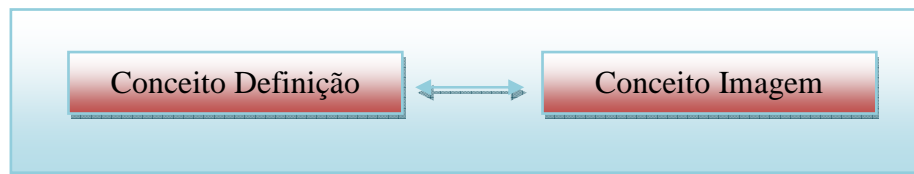
---

<sup>27</sup> Tradução nossa: *The visual representations, the mental pictures, the impressions and the experiences associated with the concept name can be translated int verbal forms.*

<sup>28</sup> Mantivemos o mesmo termo apresentados pelo autor.

<sup>29</sup> Mantivemos o mesmo termo apresentados pelo autor.

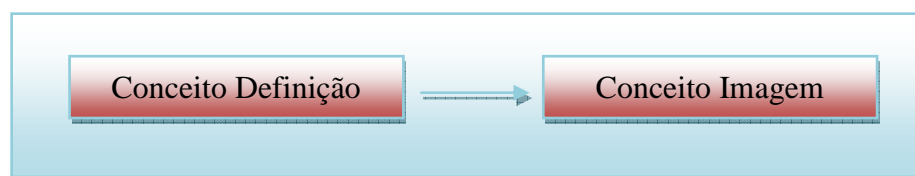
Figura 5 - Inter-relação entre conceito imagem e conceito definição



Fonte: Adaptado de Vinner (1991, p. 70)

Na Figura 5, uma célula representa o conceito definição e outra o conceito imagem. Vinner (1991) prossegue afirmando que ambas as células ou apenas uma é evocada. Destacamos a sentença de Vinner, ao afirmar que a célula do conceito imagem pode se apresentar vazia, quando algum significado não está associado ao conceito nome. Isso pode ocorrer, por exemplo, quando não há ou há pouca atribuição de significado ao conceito definição. Ambos os conceitos interagem, contudo, também podem se constituir de modo independente. O autor na Figura 6 ilustra a expectativa dos professores do Ensino Médio ou Superior na formação do conceito imagem, após a atribuição de significado ao conceito definição.

Figura 6 - O crescimento cognitivo do conceito formal



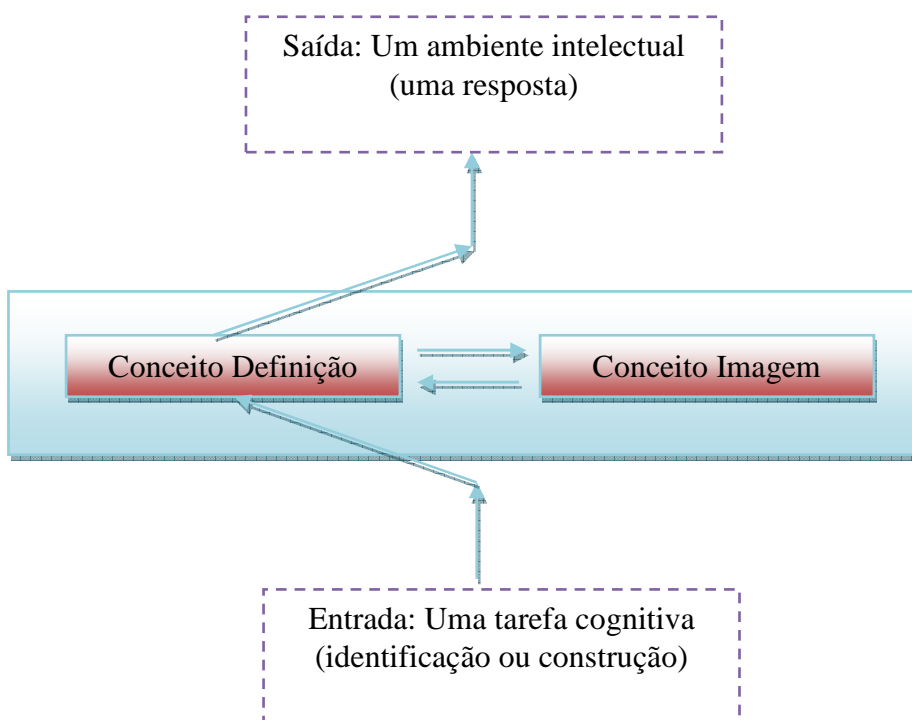
Fonte: Adaptado de Vinner (1991, p. 71)

Vinner (1991) discute que, qualquer conceito pode ser, a princípio, apresentado pelo conceito definição. Nesse momento, a célula do conceito imagem ainda se encontra vazia e que, após muitos exemplos e explicações, passa a ser preenchida. Mas, isso não significa que todos os aspectos do conceito definição sejam refletidos.

Em processos que envolvam a solução de problemas ou teste de desempenho, é suposto que as células do conceito imagem e definição sejam ativadas. Assim, o autor expressa pelas Figuras 5, 6 e 7, as expectativas de professores ao desenvolverem e aplicarem diferentes problemas. Na Figura 7, o

autor ilustra a inter-relação entre definição e imagem. Evidenciamos que o estímulo dado, por exemplo, com base na aplicação de problemas aciona a célula do conceito definição que, por sua vez, interage com a célula do conceito imagem em um fluxo contínuo de estímulo-resposta. Portanto, todas as imagens mentais, as representações, as experiências existentes sobre o conceito nome são ativadas, com base no conceito definição apresentado pelo professor. Uma resposta do aluno pode representar o ambiente intelectual desenvolvido.

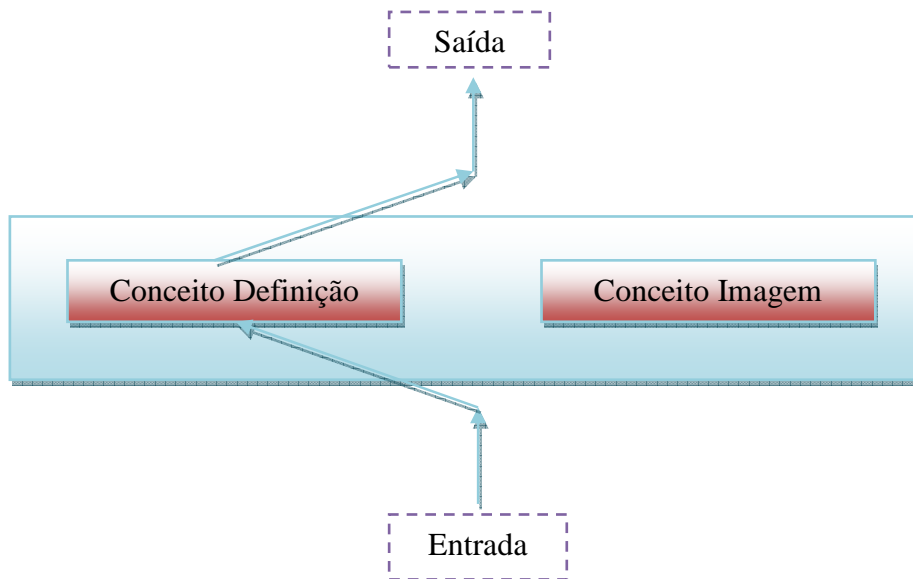
Figura 7 - Inter-relação entre definição e imagem



Fonte: Adaptado de Vinner (1991, p. 71)

A Figura 8 ilustra a construção de uma dedução puramente formal. Um estímulo aciona o conceito definição, gerando uma resposta (saída). Nessa construção, a célula do conceito imagem permanece vazia.

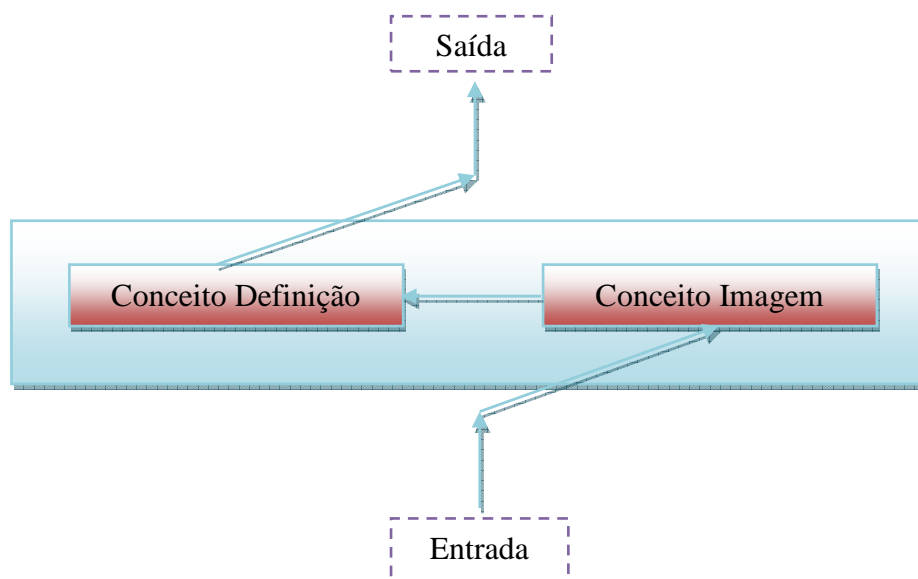
Figura 8 - Dedução puramente formal



Fonte: Adaptado de Vinner (1991, p. 71)

Na Figura 9, a dedução do conceito é atribuída por um pensamento intuitivo. Primeiramente, o conceito imagem é acionado. Por sua vez, segue o estímulo do conceito definição, que será o precursor da resposta atribuída pelo aluno.

Figura 9 - Dedução seguida de pensamento intuitivo

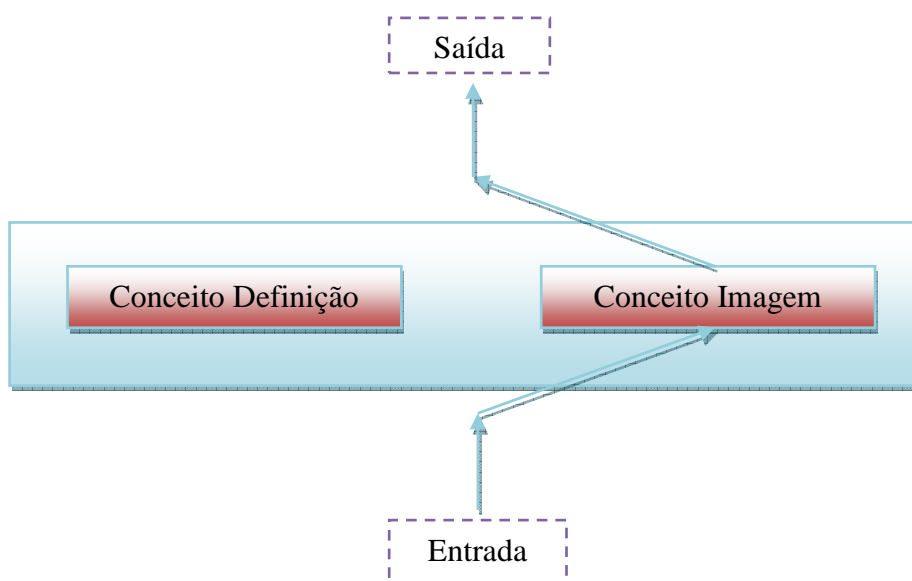


Fonte: Adaptado de Vinner (1991, p. 72)

Assim, Vinner (1991) afirma que os processos que levem em conta a construção do conhecimento, ilustrados nas Figuras 7, 8 e 9, independentemente do mesmo modo como a associação dos sistemas reage, quando um problema é apresentado no contexto técnico, toda solução dependerá do conceito definição. Este processo é desejável, porém, a prática evidencia o contrário. É o que mostra a ilustração dada pela Figura 10.

Na situação exposta pela Figura 10, é gerada uma resposta puramente intuitiva, após a ativação cognitiva do conceito imagem. Nesse caso, o conceito nome está relacionado às figuras mentais, impressões e experiências que são expressas em formas verbais. A célula do conceito definição não é consultada e permanece vazia.

Figura 10 - Resposta intuitiva



Fonte: Adaptado de Vinner (1991, p. 73)

Os pensamentos que relacionam os hábitos do cotidiano, não têm a necessidade de consultar a definição formal. Assim, a referência à célula do conceito imagem torna-se quase que suficiente, desencorajando os alunos a se referirem ao conceito definição. Vinner (1991) destaca que a aplicação de contextos técnicos ou práticas inapropriadas são precursores da construção errônea e enganada dos conceitos imagens.

Para o autor, o Ensino Médio e o Superior não desenvolvem os hábitos necessários em contextos técnicos, pois os estudantes continuam a usar hábitos de pensamento do cotidiano. Assim, afirma ser facilmente evidenciado o conceito definição de um estudante por uma questão direta, como por exemplo, o que é uma função? O que é uma tangente? Ou, como expõe nosso estudo, o que é autovalor e autovetor? Isso ocorre porque as definições são verbais e explícitas. Já, quando buscamos identificar qual o conceito imagem está presente na mente do estudante, usualmente, apresentamos questões indiretas, pois os conceitos imagens são não verbais e implícitos ao sujeito. *Assim, a tarefa principal do pesquisador é inventar questões que têm o potencial de expor as respostas ao conceito imagem*<sup>30</sup> (VINNER, 1991, p. 74).

Vinner reafirma que a intenção do ensino da Matemática deveria mudar os hábitos do pensamento do cotidiano para hábitos que envolvam modelos técnicos. Fica evidente que o papel da definição no pensamento matemático está sendo negligenciado em contextos oficiais, como mostram os livros didáticos e documentos oficiais que objetivam investigar o ensino da Matemática, etc.

### 2.2.1.1 *Os diferentes níveis de conceitos imagem*

Domingos (2003) buscou caracterizar a compreensão dos conceitos matemáticos avançados no início do Ensino Superior relacionados com os tópicos das sucessões, funções e Cálculo Diferencial e Integral, conciliando várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos e caracterizando os conceitos imagem manifestados nos alunos. Para tanto, assumiu como sujeitos de sua investigação os alunos de licenciaturas em Ensino das Ciências, Engenharia Eletrotécnica e Matemática. Como resultado, destaca que os conceitos imagem e definição são conceitos-chave para a compreensão dos objetos matemáticos estudados.

Tall (2000) concebe uma visão proceitual dos conceitos (ou objetos) com base na realização de procedimentos e processos que vão sendo cada vez mais sofisticados e que culminam na possibilidade de pensar na matemática, simbolicamente, como proceito (processos e conceitos).

---

<sup>30</sup> Tradução nossa: *Thus the main task of the researcher is to invent questions that have the potential to expose the respondent's concept image.*

Dubinsky também realça o papel de objetos sobre os quais são realizados determinados processos que posteriormente, serão encapsulados, como objetos mentais ou novos objetos matemáticos.

Para Domingos (2003), os conceitos imagem apresentam níveis de complexidade que lhes conferem características próprias. Acrescenta que um aluno pode apresentar um conceito imagem incipiente de função, mas, para a noção de limite de função ele pode apresentar o conceito imagem em nível instrumental ou relacional. Assim, em situações em que se poderia pensar em um conceito para a construção de outro, devem ser usados os conceitos imagem dos alunos que não, necessariamente, traduzam essa relação.

Entendemos que os conceitos imagem revelam a existência de uma hierarquia, estendendo-se do nível de conceito imagem incipiente (característicos da matemática elementar) ao conceito imagem relacional.

Domingos (2003) aborda outra característica do conceito imagem, que é a existência de certa estabilidade, ou seja, a permanência em determinado nível. Quando o aluno encontra-se no nível do conceito imagem relacional, entendemos que há uma situação ótima em termos de aprendizagem. Portanto, quando o aluno estabiliza-se no nível de conceito imagem relacional, há a plena compreensão dos conceitos. Quando o aluno estabiliza-se no nível de conceito imagem incipiente, os conceitos abordados não são considerados objetos matemáticos. Já o nível de conceito imagem instrumental é suficiente, para que os alunos tenham sucesso na disciplina.

O autor acrescenta que os conceitos imagem são caracterizados em termos de *objetos, processos, tradução entre representações, propriedades e pensamento proceitual* (DOMINGOS, 2003, p. VII). O pensamento proceitual permite que os alunos compreendam os objetos matemáticos mais avançados com base em uma sequência de raciocínio que compacta esses mesmos objetos em símbolos.

Estas características permitem uma análise pormenorizada da compreensão estabelecida pelos alunos que evidencia que o sucesso escolar ocorre, quando há a integração de conceitos imagem bastante diversificados. Tal diversidade revela conceitos imagem atrelados à compreensão relacional (o aluno consegue aplicar o objeto matemático em estudo a mais de uma situação), à compreensão instrumental ou operacional e à compreensão incipiente.

O autor destaca ainda que os alunos com conceito imagem incipiente revelam-se como um caso paradoxal, pois também podem representar um caso de sucesso escolar.

Em sua pesquisa, é destacada a caracterização dos níveis de complexidade (ou grau de desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático) dos conceitos imagem identificados com dados empíricos. Desse modo, são destacados três diferentes níveis de conceitos imagem nos alunos: conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental e conceito imagem relacional. Dentre os três tipos de conceitos imagem, o incipiente aproxima-se da Matemática elementar, e o conceito imagem relacional, das características da Matemática avançada.

Assim, podemos evidenciar que níveis hierárquicos partem do nível incipiente (Matemática elementar) ao nível relacional (Matemática avançada), cujas fronteiras são bastante difusas.

Domingos (2003, p. 131) considera que os alunos com conceito imagem em nível incipiente não assumem os conceitos trabalhados, como objetos matemáticos. *Os conceitos imagem desse nível são muito incompletos referindo-se a objetos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido.* Acrescenta que os próprios alunos têm consciência das limitações dos conceitos trabalhados e que as ações não conduzem a processos, que são encapsulados nos objetos matemáticos pretendidos.

Os processos utilizados são quase sempre em nível elementar, mas podem ser encapsulados, de modo que sejam transformados em objetos matemáticos, ainda com considerações insuficientes sobre suas propriedades e com demasiada automatização de procedimentos.

Os alunos verbalizam determinadas propriedades dos conceitos, porém não fazem uma tradução simbólica adequada com atribuição do significado pretendido aos símbolos representados. As propriedades passam a ser repletas de memorização e ventriloquismo, sem atribuição de significado. Dessa forma, os construtos não têm o estatuto de objeto matemático nem podem ser pensados proceitualmente. Assim, quando os símbolos são usados na tradução simbólica de conceitos, estão quase sempre desprovidos de significado no contexto da definição simbólica.

Os alunos não estabelecem relações entre os diversos objetos envolvidos na construção do conceito, tornando-se necessário que sejam criados outros objetos intermediários para que a compreensão dos conceitos torne-se efetiva.

Quanto ao pensamento proceitual, o aluno utiliza símbolos, porém não consegue explicar seu significado e integrar todos os símbolos presentes. Em uma situação como essa, geralmente, é ativada parte do pensamento proceitual ao componente processual.

Os dados do Quadro 1 mostram as principais ideias que caracterizam o conceito imagem incipiente:

Quadro 1 - Principais ideias apresentadas por Domingos (2003) que caracterizam o conceito imagem incipiente

Objetos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento Proceitual
<ul style="list-style-type: none"> <li>• São essencialmente elementares neste nível de ensino.</li> <li>• As ações realizadas sobre eles não conduzem a processos possíveis de encapsular nos objetos que representam o conceito.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Manifestação de ventriloquismo (recurso a processos memorizados).</li> <li>• Processos baseados na automatização de procedimentos.</li> <li>• Processos elementares, sem coordenação entre eles.</li> <li>• Processos interiorizados de nível elementar que conduzem a objetos elementares.</li> <li>• Uso preferencial</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Baseada em procedimentos demasiado elementares para esse nível de ensino.</li> <li>• As representações entre as quais são feitas a tradução não são objetos matemáticos.</li> <li>• As traduções são quase sempre incompletas (nomeadamente as traduções simbólicas).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Manifestação de ventriloquismo (recurso à verbalização de propriedades memorizadas).</li> <li>• Memorização.</li> <li>• Propriedades elementares que são usadas com compreensão.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os símbolos são usados como proceitos representando objetos matemáticos elementares.</li> <li>• Uso de proceitos elementares que são abordados em termos de processos.</li> <li>• Símbolos que apenas representam o conceito de forma parcial.</li> <li>• Uso parcial do proceito, destacando apenas sua componente</li> </ul>

Objetos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento Proceitual
	de processos algébricos. • Verbalização de processos que não são possíveis de representar na forma de proceito.			processual. • Símbolos desprovidos do significado esperado. • Componentes processual e conceptual do conceito desligados uma da outra.

Fonte: Adaptado de Domingos (2003, p. 134)

### *Conceito imagem instrumental*

Neste nível, podemos identificar a realização e coordenação de processos que conduzem à construção de objetos matemáticos e novos conceitos. Contudo, tais processos ainda são insuficientes, para que haja a encapsulação destes em novos objetos mentais.

Neste nível de conceito imagem, o aluno apresenta dificuldade para coordenar todos os elementos relacionados ao conceito para explicitar seu significado.

Os objetos podem ser apresentados como proceitos, e é necessário que sejam estabelecidas relações entre eles.

Esta última fase, que diz respeito à capacidade de utilizar o conceito como um objeto, não é atingida neste nível, ficando os alunos ligados aos processos maioritariamente realizados, usando procedimentos algébricos e envolvendo objetos concretos. Os processos que envolvem objetos abstratos são apenas abordados de forma parcial, sendo possível verbalizá-los mas sua tradução simbólica revela-se insuficiente (DOMINGOS, 2003, p. 136)

Já os alunos dos cursos de Engenharia, que também foram sujeitos de sua investigação, apresentam os conceitos imagem no nível instrumental e revelam uma

compreensão dos objetos matemáticos que lhes permitem ter sucesso na disciplina ou, pelo menos, que tenham aprovação.

No nível do conceito imagem instrumental, é possível estabelecer processos que conduzam à construção do objeto matemático. Mas, os processos são ainda insuficientes, para que haja a plena interiorização em objetos mentais.

Para Domingos (2003, p. 135), *é possível identificar alguns processos realizados sobre esses objetos, mas falta a coordenação entre eles para que possam ser encapsulados em novos objetos.*

Nesse nível de conceito imagem, os alunos têm grande dificuldade para identificar o papel dos quantificadores e das definições simbólicas, recorrendo à memorização de algumas sequências de símbolos.

As propriedades dos objetos matemáticos em estudo são estabelecidas de modo operacional e ainda são elementares.

Os alunos estão ligados, sobretudo, aos processos algébricos e objetos concretos. Assim, os processos que se relacionam aos objetos abstratos são abordados de modo parcial, sendo possível verbalizá-los de forma simbólica, porém, de maneira ainda insuficiente.

Quanto ao pensamento proceitual, os símbolos são usados de modo operacional, limitados a processos e procedimentos concretos, permitindo-lhes fazer uma tradução parcial dos conceitos; e os alunos estabelecem traduções incompletas em relação aos conceitos que correspondem a situações de aprendizagem em que não são atribuídos significados de representação, como um todo.

Os dados do Quadro 2 apresentam as principais ideias que caracterizam o conceito imagem instrumental

Quadro 2 - Principais ideias apresentadas por Domingos (2003) que caracterizam o conceito imagem instrumental

Objetos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento Proceitual
<ul style="list-style-type: none"> <li>Há uma variedade de objetos elementares para</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Processos interiorizados e condensados.</li> <li>Coordenação de</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Baseada em processos repetitivos;</li> <li>Baseada em</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Propriedades elementares usadas com compreensão.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Os símbolos são usados como proceitos representando</li> </ul>

Objetos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento Proceitual
<p>esse nível de ensino, mas, com escassa interiorização e coordenação.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Alguns objetos são interiorizados em processos, que depois não são encapsulados.</li> <li>• Partes dos conceitos são considerados como objetos; no entanto, isso não é suficiente para sua reificação.</li> </ul>	<p>processos que, por vezes, resultam na criação de objetos matemáticos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Processos realizados sobre objetos concretos.</li> <li>• Dificuldade em realizar processos envolvendo objetos abstratos.</li> <li>• Uso adequado de processos algébricos.</li> <li>• Capacidade de verbalizar processos representados parcialmente, como proceitos.</li> </ul>	<p>procedimentos interiorizados.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• É feita de modo operacional.</li> <li>• As traduções simbólicas são quase sempre incompletas, sem atingir o significado pretendido pelo ensino.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso de algumas propriedades evidenciando as suas características relacionadas com os processos.</li> <li>• São estabelecidas de modo operacional.</li> </ul>	<p>objetos matemáticos elementares.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• No pensamento proceitual, apenas destacam sua componente processual.</li> <li>• Os conceitos mais complexos têm uma tradução simbólica incompleta.</li> <li>• Memorização de algumas sequências de símbolos.</li> <li>• Uso de proceitos em algumas partes da tradução simbólica de conceitos.</li> </ul>

Fonte: Adaptado de Domingos (2003, p. 137)

Em sua pesquisa, Domingos (2003) considera o caso de José, um típico aluno de Engenharia que apresenta um desempenho satisfatório, mesmo que não manifeste uma compreensão relacional dos conceitos envolvidos. José apresenta uma concepção operacional dos conceitos apoiada em gráficos e esquemas.

O autor acrescenta que alunos como José

Embora ele mostre alguma capacidade em manipular determinados processos inerentes a cada uma das propriedades abordadas,

encontra alguma dificuldade quando é necessário coordenar esses processos de forma a construir outros mais complexos (DOMINGOS, 2003, p. 329)

Muitas vezes, alunos com esse perfil encontram dificuldades em representar alguns parâmetros, e o estabelecimento da representação simbólica não atribui pleno significado aos quantificadores. Nessas condições, uma representação simbólica não pode ser considerada como um conceito.

No estudo do Cálculo, José evidencia processos e procedimentos necessários para estabelecer as propriedades, contudo não consegue construir outros objetos matemáticos.

### *Conceito imagem relacional*

Neste nível de conceito imagem, existe a representatividade dos conceitos que são abordados na forma estrutural, ou seja, os alunos referem-se como se estes representassem propriedades com uma concepção próxima da definição formal.

O conceito relaciona assim outros objetos matemáticos, como por exemplo a sua representação algébrica ou gráfica, que obedecem a determinados processos, processos estes que são coordenados e encapsulados dando origem ao novo objeto (DOMINGOS, 2003, p. 138).

Os conceitos são considerados objetos matemáticos, pois, baseados nos processos são encapsulados em novos objetos mentais.

Conforme expõe a pesquisa de Domingos (2003), a passagem do conceito imagem instrumental ao relacional ocorreu com a ajuda do entrevistador. Um exemplo citado mostra que os alunos conseguem referir-se à derivada de uma função em um ponto com base em sua definição formal, mas o papel do limite só é estabelecido quando lhes é pedido que façam a sua representação geométrica.

Neste nível, o aluno consegue lidar com um maior número de processos que deram origem ao objeto matemático, que o autor chama de desencapsulação, ou seja, o aluno retorna baseado em um objeto matemático a todos os processos que

lhes deram origem. Também é possível que esses processos sejam coordenados com o objetivo de encapsular e formar novos objetos matemáticos.

As propriedades representam os objetos matemáticos e são verbalizadas pautadas em suas definições formais. O autor afirma que tais propriedades podem ser encapsuladas em novos objetos matemáticos mais avançados do mesmo modo que esses objetos possam ser desencapsulados, para que sejam evocadas propriedades mais elementares.

No domínio do pensamento proceitual, os quantificadores desempenham um papel fundamental, pois com base nestes um pensamento proceitual é manifestado, explicitando os objetos e processos que estão na definição.

Os dados do Quadro 3 apresentam as principais ideias que caracterizam o conceito imagem relacional.

Quadro 3 - Principais ideias apresentadas por Domingos (2003) que caracterizam o conceito imagem relacional

Objetos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento Proceitual
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os conceitos assumem o estatuto de objetos matemáticos.</li> <li>• Os objetos são encarados como proceitos.</li> <li>• Alguns objetos são difíceis de desencapsular.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Continuam a ser utilizados processos de índole operacional, ainda que com menor frequência.</li> <li>• Os processos mais utilizados resultam do desencapsular de objetos.</li> <li>• Os processos realizados sobre os objetos mais elementares são coordenados e</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduções simbólicas dos conceitos.</li> <li>• Têm por base objetos que são desencapsulados.</li> <li>• Há um predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais.</li> <li>• Fluidez na tradução entre representações.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• São enunciadas com compreensão.</li> <li>• São usadas de forma estrutural.</li> <li>• Enunciadas como objetos matemáticos que podem ser desencapsulados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• É possível traduzir simbolicamente os conceitos.</li> <li>• Os símbolos são usados como proceitos.</li> <li>• No pensamento proceitual é possível observar as componentes processual e conceptual em interação.</li> <li>• A componente proceitual dos conceitos mais</li> </ul>

Objetos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento Proceitual
	encapsulados em novos objetos.			avançados ainda é fraca.

Fonte: Adaptado de Domingos (2003, p. 140)

No terceiro nível de conceito imagem, o relacional, os alunos recorrem aos processos que estiveram na origem da construção do objeto matemático. Assim, uma variedade de processos é manipulada e encapsulada, como novos objetos mentais. São destacadas suas propriedades, porém, em algumas situações, ainda em caráter elementar. Isso ocorre quando não houve plena interiorização e encapsulação de determinados processos que seguem baseados em procedimentos elementares.

O conceito relaciona assim objetos matemáticos, como por exemplo, a sua representação algébrica ou gráfica, que obedecem a determinados processos, processos estes que são coordenados e encapsulados dando origem ao novo objeto (DOMINGOS, 2003, p. 138).

Ainda nesse nível, ocorre a tradução entre várias representações, como a algébrica e a gráfica, com base nos objetos e processos matemáticos mais complexos. Também a redução no número de procedimentos operacionais é observada.

As propriedades são enunciadas com compreensão, e o pensamento proceitual é evidenciado, quando os objetos matemáticos e processos interagem mutuamente e são explicitados na definição.

Ocorre, portanto, a passagem do elementar ao avançado, a transição da descrição à definição, do convencer ao provar baseado em definições, visando a uma reconstrução cognitiva no sujeito.

Dessa forma, considerando a estrita relação entre a Teoria APOS e o Pensamento Matemático Avançado, propusemo-nos a investigar os processos cognitivos envolvidos na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases iniciais e finais de formação de um estudante de Engenharia. Para tanto,

evidenciaremos suas concepções ação-processo-objeto e esquema, conforme as ideias expostas por Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012), e os conceitos imagem e definição, de acordo com Vinner (1991) e Domingos (2003).

Na realização da decomposição genética, o material apresentado pelos alunos, como primeiros sujeitos de nossa pesquisa, auxiliará novos alunos na construção de uma sequência lógica que possibilite a construção de estruturas conceituais que correspondem a conceitos imagens, desencadeando níveis mais elevados de abstração.

Dubinsky (1991) apresenta quatro passos que poderão ajudar os estudantes a desenvolver o Pensamento Matemático Avançado: (a) observar o processo de aprendizagem dos estudantes em um tópico específico ou em um conjunto de tópicos, identificando o desenvolvimento de estruturas conceituais que correspondem a seus conceitos imagens; (b) observar os dados e desenvolver uma decomposição genética para cada tópico em estudo que representa uma possibilidade na qual o sujeito construirá o conceito; (c) desenvolver atividades e criar situações que induzirão os estudantes a realizar a abstração reflexionante específica; e (d) repetir o processo, revise a decomposição genética e o tratamento dos dados e continue até que ocorra a estabilização (se ela ocorrer).

Em nossa investigação, consideramos que iremos percorrer os três primeiros itens para poder identificar as concepções dos estudantes participantes. Há a observação do processo de aprendizagem dos alunos referente ao objeto matemático autovalor e autovetor, assim como a observação dos dados expostos com base em seus discursos, resoluções do problema e exposição de suas ideias e experiências no papel. Quanto ao item (d), por não se tratar de um processo de ensino por parte da pesquisadora, não houve repetição do processo.

### *2.2.2 Resumo e Conjecturas*

Defendemos as ideias de Dreyfus (1991) sobre o Pensamento Matemático Avançado. O autor considera que um conceito abstrato, como por exemplo, espaço vetorial poderá ser construído por meio de deduções com base na definição e ainda estabelecer que o entendimento só pode ocorrer pautado em uma longa sequência de atividades de aprendizagem que promovam a interação entre os processos mentais. Assim, questionamo-nos a respeito das barreiras que podem promover o

não entendimento pelos sujeitos e, dentre elas, citamos a falta de tempo hábil para a aplicação adequada de uma sequência de atividades nas práticas escolares.

O Pensamento Matemático Avançado é caracterizado pelos processos que o constituem, como a abstração e a representação, responsáveis pela construção de uma imagem mental e visual do objeto matemático em estudo. Portanto, destacamos a importância da relação que se estabelece entre os aspectos mentais, matemáticos e biológicos na constituição e compreensão dos conceitos matemáticos.

Voltemos à questão apresentada: Mas como devem ser apresentadas as disciplinas matemáticas em cursos superiores, em particular, em um curso de Engenharia que, particularmente, atrai nossa atenção?

Uma das respostas, que defendemos é que no estudo de disciplinas matemáticas deve ser incentivada a natureza própria da investigação pelo aluno, uma atitude matemática. É possível considerarmos que os chamados rituais atribuídos por inúmeras instruções devam ser minimizados e substituídos por problemas que promovam os aspectos abstratos e dedutivos do Pensamento Matemático Avançado.

Em nossas considerações parciais, destacamos o papel dos símbolos nas representações que refletem as relações entre sinais e significados e que podem ser externalizados nas formas escrita ou falada. Já as representações mentais, referem-se a esquemas internos que podem construir várias representações do mesmo objeto matemático.

Devemos, portanto, considerar que compreender a Matemática envolve conhecer diferentes representações do mesmo objeto matemático em estudo. São as chamadas múltiplas conexões de representações. Quando são estabelecidas relações entre as diferentes representações, há o reforço do conceito com base na influência da abstração e da evidência de propriedades comuns.

Dreyfus (1991) destaca que os problemas aplicados podem requerer uma flexibilidade cognitiva no processo de construção de novas estruturas cognitivas.

Neste capítulo, como aspecto relevante consideramos a afirmação de Tall (2000) sobre as estruturas falhas dos programas de Matemática das universidades que não têm favorecido o crescimento psicológico da mente humana formada com base no processo de abstração reflexionante.

Outro aspecto importante que nos auxiliará na análise desta tese, refere-se aos aspectos que caracterizam o Pensamento Matemático Avançado: (a) a participação ativa do aluno em um debate científico; (b) o conflito do aluno na construção de novas teorias com base na formulação de conjecturas e hipóteses; (c) a construção de uma fundamentação cognitiva que equilibre o crescimento cognitivo e o raciocínio lógico.

Outros aspectos tratados por Vinner (1991) e Domingos (2003) referem-se aos conceitos imagem e definição. Para que haja a construção do conceito imagem, é preciso uma série de conhecimentos sequenciada em argumentos dedutivos, que promova a construção de figuras mentais, propriedades e processos.

De acordo com Vinner (1991), o conceito imagem é construído apoiado nos estímulos que podem provocar uma representação visual, uma figura mental, impressões e experiências associadas ao conceito nome e podem ser transformadas em formas verbais. As impressões e experiências são as primeiras a serem evocadas em nossa memória e são as responsáveis pela formação das imagens visuais.

Para Vinner (1991), é necessário que se construa um conceito imagem do objeto em estudo, pois o conceito definição, por si só, não é suficiente, para que o aluno tenha plena compreensão do objeto de estudo.

Defendemos que ambas as células, a do conceito imagem e definição, devam ser evocadas, para que haja plena atribuição de significado ao conceito nome. É o que propomos com a aplicação de problemas, como o apresentado em nossa investigação.

Em situações que explicitem as expectativas de professores ao desenvolverem diferentes problemas, as células do conceito definição são, primeiramente, ativadas e interagem com a célula do conceito imagem. Em um fluxo contínuo de estímulo-resposta, é possível que sejam explicitadas as representações visuais e mentais, experiências e impressões do objeto matemático em estudo.

Assim, é preciso considerarmos que o professor de Matemática repense suas práticas em sala de aula e promova situações baseadas em problemas que estimulem a construção do conceito nome com base na inter-relação entre ambas as células.

O estudo deste Capítulo possibilitará identificar, apoiados nos discursos dos alunos, qual célula foi primeiramente ativada, a do conceito imagem ou definição e,

daí, traçar considerações a respeito de suas estruturas cognitivas e das concepções que têm em relação ao objeto matemático autovalor e autovetor.

Outro autor que trouxe contribuições significativas para esta pesquisa, foi o português Antonio Manuel Dias Domingos. Em sua tese, considera os diferentes níveis de conceito imagem, como uma hierarquia que se estende do incipiente ao relacional. Afirma que os conceitos imagem são caracterizados em termos de objetos, tradução entre representações, propriedades e pensamento procedimental. Assim, utilizaremos as principais ideias traçadas pelo autor para identificar quais as características de cada nível de conceito imagem podem estar presentes no discurso dos alunos entrevistados.

Destacamos a afirmação do autor que considera que o sucesso escolar não, necessariamente, está atrelado ao último nível do conceito imagem, o relacional. É o caso citado do aluno José, um típico aluno da Engenharia. José é um aluno que tem sucesso na disciplina, e seus processos conduzem à construção do objeto matemático, contudo, não são plenamente interiorizados, como entidades mentais.

É possível afirmarmos que em um curso de Engenharia o terceiro nível do conceito imagem, o relacional, é difícil de ser atingido, visto que a abordagem adotada pelo professor e pela instituição é bastante diferente da atribuída em um curso de Bacharelado ou Licenciatura em Matemática. Assim, questionamo-nos se caberá ao aluno, individualmente, escolher entre avançar ou não suas concepções e construções mentais para o nível de conceito imagem relacional?

Uma questão como esta é cabível de discussão e voltará a ser apresentada nas Considerações Finais deste estudo.

A seguir, o termo *mente matemática* apresentado no artigo de Tall (2000) será discutido em razão de ter sido agregado a nosso título por razões que explicitaremos na próxima seção.

### *2.3 A base biológica do processo de ação-objeto-esquema - perspectivas das contribuições de aspectos da Neurociência Cognitiva*

Nesta seção, apresentaremos algumas ideias das principais contribuições das referências Tall (2000), Devlin (2008) e Dehaene (2008) em nossa pesquisa. Em

razão do crescimento exponencial, que toma os assuntos relativos a essa ciência que emerge, nossa contribuição é ainda limitada, porém, pode garantir campo de investigação para trabalhos futuros.

Apesar dos aspectos que se contrapõem entre as teorias, que são evidenciadas nos estudos dos mesmos autores, destacamos que nosso objetivo será expor os aspectos comuns que, em conjunto, contribuem para a análise das construções cognitivas que se estabelecem na formação do objeto matemático.

A presente seção expõe a relevância e as possíveis contribuições da Neurociência Cognitiva na constituição do Pensamento Matemático Avançado na área de Educação Matemática.

Conforme apresenta Nicoletti (2011), a Neurociência do século XXI liberta-se do dogma da visão cartesiana de que o cérebro humano comporta-se de modo passivo, sem opiniões prévias ou julgamento, simplesmente recebendo sinais do mundo exterior, para uma visão que o apresenta, como uma estrutura ativa e participante.

Dessa forma, entendemos que as estruturas cognitivas vinculadas às reações do cérebro humano que são formadas no Pensamento Matemático Avançado, modificam-se e adaptam-se de maneira ativa junto à construção de determinado conhecimento, diferente, das estruturas cognitivas que se constroem no Pensamento Matemático Elementar<sup>31</sup>. Por consequência, as estruturas biológicas que constituem o cérebro humano também são distintas, ativando populações de neurônios e estabelecendo conexões mais duradouras que as estabelecidas em operações matemáticas elementares.

Dessa forma, pesquisadores em Educação Matemática, em particular, têm consciência da importância dos processos componentes para entender a Matemática avançada e suas interações (DREYFUS, 1991).

Dentre estas interações, entender as estruturas biológicas subjacentes ao estudo de determinado conceito matemático regido pela abstração, generalização e síntese ou padrões que definem a visualização e manipulação de símbolos que nos permitiram descobrir aspectos que regem um circuito neuronal, concedendo-nos algum vocabulário extra que, até então, foi tão pouco ou que, absolutamente, nunca

---

<sup>31</sup> Destacamos que não é objeto desta pesquisa, traçar as diferenças e as interfaces que separam ambos os pensamentos. Ressaltamos que, caso o leitor tenha interesse, poderá aprofundar seu conhecimento com as referências que compõem esta tese.

compôs o quadro de vocabulário comum em nossa área. Córtex cerebral, axônio, sinapse, Mapa de Broadmann, todas estas palavras estão relacionadas, mesmo que, de forma, ainda indireta, às definições de objetos matemáticos, às suas representações geométricas e aos padrões que se estabelecem à Aritmética, à Álgebra ou ao Cálculo.

Conforme Ferrari (2008), é crescente o número de reflexões na área de Psicologia, Neuropsicologia e Educação com foco no desenvolvimento cognitivo e na aprendizagem. Tais reflexões poderão contribuir na busca de fundamentos, princípios e conceitos epistemológicos, bem como na melhoria da prática metodológica do professor.

Em sua pesquisa, a autora investiga a formação do conceito de número na criança com base nas ideias de Piaget e do neurocientista Stanislas Dehaene, expostas na obra “La Bosse des Maths”. Conforme explica Dehaene (1997), foi a invenção dos sistemas simbólicos para escrever e falar sobre numerais que nos iniciou na escalada para a Matemática. A Matemática encontra-se limitada por nossa arquitetura cerebral que impõe um limite sobre a aprendizagem e memória.

Nossas construções matemáticas, as mais abstratas, são o fruto acabado da atividade coerente de nosso cérebro e daqueles milhões de outros que, antes de nós, talharam e selecionaram as ferramentas matemáticas. Importa, portanto, compreender os entraves que nossa biologia de “homem neuronal” impõe às nossas atividades matemáticas (DEHAENE, 1997, p. 4)

Devlin (2008) destaca que a parte do cérebro humano ativada por um matemático ou um músico experiente forma imagens semelhantes visualizadas por técnicas de tratamento de imagem. Essas imagens, contudo, tornam-se diferentes quando tratadas por amadores. Prossegue afirmando que os padrões podem ser descritos baseados na linguagem que incluem as linguagens especializadas, como a notação musical e a Matemática.

O cérebro não adquiriu novos processos de pensamento apenas aplicando processos já existentes a objetos em um nível maior de abstração. Em outras palavras, o desenvolvimento crucial foi de abstração crescente, não de maior complexidade dos processos de pensamento (DEVLIN, 2008, p. 144).

Portanto, parece que estamos diante de uma das áreas mais fascinantes e promissoras da pesquisa científica, seja em termos dos impactos que prometem causar na construção do conhecimento, seja em termos sociais.

Para tanto, é procedente fazer uma breve descrição da Neurociência Cognitiva e das estruturas que compõem o cérebro humano ou da anatomia que constitui o sistema nervoso, para que o leitor torne-se mais familiarizado com tantos termos diferentes. Em seguida, estabeleceremos a relação que rege essa fascinante ciência e o Pensamento Matemático Avançado.

### *2.3.1 Uma breve descrição da Neurociência Cognitiva*

Consideramos importante expor algumas ideias sobre o tema Neurociência Cognitiva, afim de que o leitor desta tese tenha familiaridade com alguns conceitos e expressões usadas por alguns autores, como por exemplo, Dreyfus (1991), Vinner (1991) e Tall (2000), conforme expusemos no início desta pesquisa. Os autores discutem que a Teoria APOS e o Pensamento Matemático Avançado estão intrinsecamente relacionados às estruturas biológicas subjacentes do indivíduo. Essa relação nos instigou a observação de algumas relações consideradas entre ambos os aportes teóricos e que, como afirmamos, nos levou em busca de conhecimentos relacionados a uma terceira: a Neurociência Cognitiva. Destacamos também a importância desses conhecimentos para a compreensão do termo *mente matemática*, que compõe o título desta tese.

Assim, apresentamos uma descrição de suas ideias principais.

A Neurociência Cognitiva objetiva entender, como as funções cognitivas e suas manifestações e experiências no ambiente do sujeito surgem da atividade do cérebro. Constitui um híbrido de muitas disciplinas distintas que, até há pouco tempo, pareciam estagnadas em métodos ou novas ideias. Tais disciplinas incluem a Psicologia Cognitiva, Neuropsicologia Clínica, Psicologia Fisiológica e Neurofisiologia (RUGG, 1997). Atualmente, outras áreas foram incorporadas à Neurociência Cognitiva, à Ciência da Computação e à Engenharia. Equipamentos de tomografia ou ressonância magnética podem visualizar os circuitos ativos do cérebro humano, enquanto ele calcula ou soluciona um problema.

Nos últimos 200 anos, a Neurociência envolveu-se no estudo das regiões do cérebro que medeiam diferentes funções cerebrais ou comportamentos. Foi representada por dois grupos de posições extremas. O primeiro, os localizacionistas radicais, defensores dos preceitos do anatomista alemão Franz Gall (1758-1828), criador da frenologia<sup>32</sup>, que acreditavam piamente que as funções cerebrais específicas eram geradas por regiões do sistema nervoso central e que atributos essenciais da personalidade humana, como vaidade, afetuosidade, orgulho, etc., poderiam ser reconhecidos pelo simples palpar dos contornos do couro cabeludo criados pelas diferentes configurações ósseas do crânio. Assim, cada uma das emoções do ser humano poderia ser reconhecida em regiões corticais específicas. Já o segundo grupo, foi representado pelos distribucionistas, defensores de que o cérebro humano realiza suas tarefas por meio de um trabalho coletivo de grandes populações de neurônios, localizados nas diferentes regiões do cérebro. As populações de neurônios passaram a ser os *verdadeiros compositores das sinfonias elétricas que dão vida a todos os pensamentos gerados pelo cérebro humano* (NICOLELIS, 2011, p. 21).

Por quase um século, pesquisas foram conduzidas para identificar as regiões do cérebro e suas interconexões que suportassem os processos cognitivos responsáveis por complexos comportamentos, como por exemplo, a linguagem. Contudo, as pesquisas revelaram uma carência de modelos bem articulados, necessários para direcionar questões empíricas e prover um leque de ferramentas de análise e interpretação dos resultados. Dessa forma, a emergência da Psicologia Cognitiva durante os anos 1960, com foco no desenvolvimento de modelos funcionais do processo cognitivo e métodos experimentais para testar tais modelos, proveram a Neuropsicologia de ferramentas conceituais bastante necessárias, que auxiliaram na descoberta das regiões do cérebro e suas estruturas relacionadas a determinados processos cognitivos. Em decorrência, foram aprimorados os estudos sobre as regiões do cérebro que sofreram lesão, assim como a constituição da memória em uma ampla série de circunstâncias.

No século XX, um novo campo da Ciência emergiu: a cognição matemática ou, simplesmente, o funcionamento do cérebro humano relacionado ao pensamento matemático.

---

<sup>32</sup> Consiste no estudo do caráter e das funções intelectuais humanas com base na estrutura craniana.

Mas, como pode o cérebro humano entender objetos abstratos que manipulamos em nosso pensamento matemático? Com base no exposto, alguns assuntos surgem em nossa discussão, como por exemplo, a formação da memória de longo prazo, a visualização e manipulação de símbolos, os sistemas verbais e visuais que são atrelados a conceitos específicos.

Dehaene (1997) destaca que parece ser um tempo promissor para o matemático e interessados na área voltarem-se ao estudo do imenso poder do cérebro, a Neurociência Cognitiva.

### *2.3.2 A respeito da anatomia do sistema nervoso*

Nesta seção, apresentamos a importância da neuroanatomia ou anatomia do cérebro, que é a disciplina fundamental da Neurociência, englobando tanto o nível microscópico dos neurônios individuais (células nervosas) como o nível macroscópico dos sistemas que se estendem pelo cérebro.

O cérebro é dividido nas regiões central e periférica; e constitui o componente principal do sistema nervoso central. Além do cérebro, que é dividido em hemisférios esquerdo e direito unidos pelo corpo caloso (fibras nervosas que ligam bidirecionalmente o cérebro), o sistema nervoso central também inclui o diencéfalo (núcleos nervosos escondidos sob os hemisférios, formados pelo tálamo e hipotálamo), o mesencéfalo, o tronco cerebral, o cerebelo e a medula espinhal.

Já o sistema nervoso periférico, é constituído por nervos que ligam o sistema nervoso central a todo o resto do corpo.

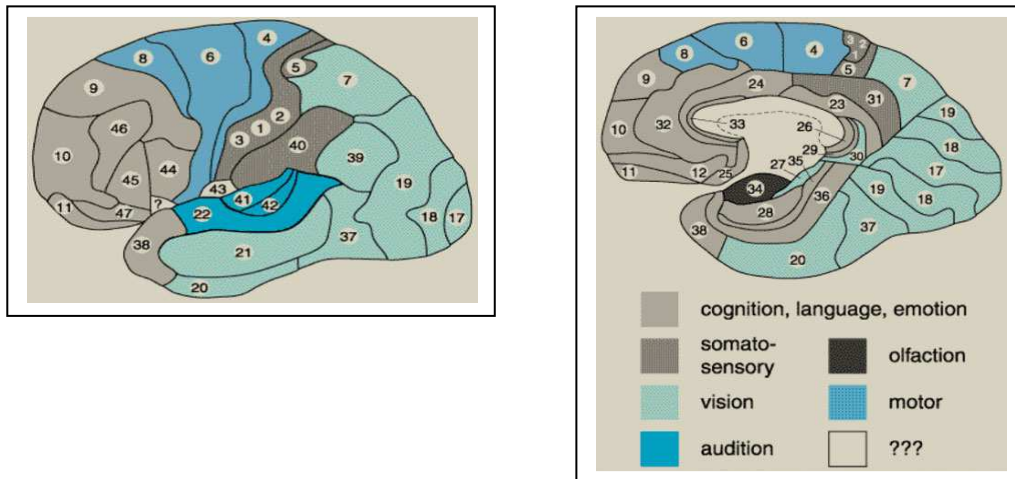
A princípio, apresentamos o cérebro humano dividido nos chamados setores: escuro e claro. O escuro, conhecido como massa cinzenta, corresponde a grupos de corpos celulares de neurônios, e o setor claro ou massa branca é constituído por axônios, ou fibras nervosas que saem dos corpos celulares da massa cinzenta. A massa cinzenta é formada por neurônios dispostos em camadas, chamadas de córtex cerebral (que envolvem os hemisférios cerebrais) e o córtex cerebeloso (que envolve o cerebelo).

Outro conjunto que forma a massa cinzenta é o núcleo.

A Neurociência tem atribuído especial atenção ao córtex cerebral, que pode ser visualizado, como um manto que recobre todo o cérebro, incluindo as fissuras e

sulcos que lhe atribuem a aparência enrugada característica. Toda a camada localizada abaixo do córtex é conhecida como subcortical. A parte evolutiva do córtex é conhecida como neocórtex; e a parte do córtex, evolutivamente, mais antiga é o córtex límbico.

Figura 11 - Mapa de Broadmann



Fonte: Adaptado de Damásio (2007, p. 50)

Durante os dois últimos séculos, ambos os grupos localizacionistas e distribucionistas elegeram o córtex cerebral, como o principal campo de batalha entre as duas ideologias.

Os neurônios constituem as células do tecido nervoso, sendo organizados em circuitos locais que, quando dispostos em camadas formam regiões corticais e quando agregados em grupos, sem constituir camadas, constituem os núcleos. Tanto as regiões corticais como os núcleos formam sistemas e sistemas de sistemas, ampliando o nível de complexidade.

Estes são divididos em três componentes: um corpo celular, uma fibra principal de saída, também chamada de axônio e fibras de entrada ou dendritos; os neurônios interligam-se em circuitos baseados em seus axônios que estabelecem contato com os dendritos de outros neurônios. A partir do momento que os neurônios, tornam-se ativos, ou quando ocorre um “disparo”<sup>33</sup>, uma corrente elétrica propaga-se pelo corpo celular ao longo do axônio, atingindo a sinapse. Esta constitui os pontos onde os axônios conectam-se com os dendritos de outros neurônios.

<sup>33</sup> O termo “disparo” é usado como gíria na Neurociência.

Assim, as substâncias químicas conhecidas como neurotransmissoras são liberadas, estabelecendo as sinapses que, por um lado, podem ser estimuladoras, facilitando a transmissão de um dado impulso ou inibidoras, quando dificultam ou bloqueiam tal transmissão.

Essas intrincadas redes, cujo grau de complexidade e conectividade suplanta, por várias ordens de magnitude, qualquer outra rede elétrica, computacional, mecânica ou telefônica jamais criada por seres humanos, permitem que cada célula cerebral, ou neurônio, estabeleça contato direto e se comunique com centenas ou mesmo milhares de outras células cerebrais. O cérebro humano possui cerca de 10 bilhões de neurônios e mais de 10 trilhões de sinapses. Contudo, se selecionarmos aleatoriamente alguns neurônios do núcleo ou córtex cerebral descobriremos que cada neurônio se comunica com pequenos grupos e não com a maioria dos neurônios restantes, apesar dos axônios se prolongarem milímetros ou até centímetros ao longo do cérebro (NICOLELIS, 2011, p. 18).

Damásio (2007) estabelece que as principais consequências desse arranjo são: (i) o neurônio depende da relação que se estabelece com o conjunto de neurônios inseridos; (ii) os sistemas formados pelos conjuntos de neurônios influenciam-se mutuamente, e a contribuição de cada conjunto de neurônios depende de sua localização no sistema de grande escala, constituindo a especialização do cérebro.

O autor apresenta os níveis de arquitetura cerebral: 1º) neurônios; 2º) circuitos locais; 3º) núcleos subcorticais; 4º) regiões corticais; 5º) sistemas e 6º) sistemas de sistemas.

Dessa forma, o cérebro constitui um supersistema de sistemas interligados por complexas regiões macroscópicas, como as corticais e os núcleos subcorticais e regiões microscópicas, como os circuitos locais e neurônios.

Gerald Edelman recebeu o prêmio Nobel de Psicologia, em 1972, por estudar o sistema imunológico humano, estendeu sua teoria aos trabalhos do cérebro. Baseada na seleção de grupos neuronais, a teoria defende três princípios: (i) o cérebro apresenta uma grande diversidade de interconexões que permitem um vasto repertório de ações mentais e físicas que podem ou não serem usadas; (ii) quando as atividades ocorrem com sucesso, as conexões correspondentes são reforçadas (com base nas alterações químicas, nas sinapses entre sucessivos neurônios), tornando mais fácil uma ação já conhecida em ocasião futura; (iii) essas funções

operam grupos de neurônios que se tornam fortemente interconectados com grupos e entre grupos. Tais conexões permitem que os neurônios trabalhem, como uma unidade em co-operação.

Uma característica importante da inteligência humana é a capacidade de pensar sobre memórias passadas que permitem ter o senso de tempo passado e a possibilidade de planejar o futuro.

Tall (1994) considera que o cérebro humano tem um tipo de organização modular, estruturado com unidades que funcionam de modo relativamente independente e que trabalham em paralelo, com um componente cerebral que atua, como um intérprete de mensagens de conflito. Com base nas conexões, o módulo verbal de saída fornece sentido ao “produto” e mostra o que é interpretado pelo cérebro (ou o que o indivíduo pensa que o cérebro está interpretando), estabelecendo um senso de escolha e livre arbítrio.

### *2.3.3 As concepções opostas de Piaget e da Neurociência*

Alguns aspectos contraditórios entre as teorias de Piaget e da Neurociência foram expostos nos trabalhos de Stanislas Dehaene (1997) e Keith Devlin (2008).

Keith Devlin (2008) revela que, com base nas investigações subsequentes aos estudos do psicólogo cognitivo Jean Piaget, os resultados apontaram que as conclusões de Piaget estavam *quase que certamente* erradas. Enfatiza o termo *quase que certamente* erradas e admite que os resultados experimentais realizados pelo psicólogo acarretaram conclusões alternativas.

Em seus estudos realizados nas décadas de 1940 e 1950, Piaget defendeu o princípio de construção gradativa do conhecimento de um bebê recém-nascido. Em outras palavras, apresentou a ideia de que o bebê nasce com uma mente vazia e *constrói um modelo mental ou uma conceitualização do mundo* (DEVLIN, 2008, p. 46) ao longo dos anos.

Seus experimentos mostraram que o senso numérico de crianças é adquirido por volta de 4 ou 5 anos de idade. Piaget alegava que crianças de 4 a 5 anos não têm a noção de conservação do número, ou seja, *o rearranjo dos objetos de um conjunto não altera o seu número* (DEVLIN, 2008, p. 47).

Mas, seus métodos apontavam graves falhas.

No final da década de 1960, Jacques Mehler e Tom Bever, do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), realizaram o experimento original de Piaget sobre a conservação numérica, porém, com crianças de 2 e 3 anos. Os resultados contradisseram os anteriores do psicólogo experimentalista. Mehler e Bever acreditavam que crianças de 4 e 5 anos (conforme apontam os testes realizados por Piaget) sofrem grande influência de adultos, sobretudo, aqueles que são por eles admirados, como os pais ou o pesquisador. As crianças passam a raciocinar sobre o que é que realmente ele quer, criando respostas alternativas sobre a expectativa desses adultos. Assim, os pesquisadores defendem o raciocínio que crianças de 2 ou 3 anos interpretam as perguntas, literalmente, como são.

Nos anos 1980 e 1990, os resultados experimentais de Piaget sobre as capacidades numéricas de crianças continuaram a ser rebatidos.

Experimentos realizados por Prentice Starkey e seus colegas da Universidade da Pensilvânia, em 1980, com bebês entre 16 e 30 semanas objetivavam descobrir os pensamentos desses bebês. Os resultados evidenciaram que os bebês conseguem distinguir dois pontos de três, destacando que a mudança de número era o que atraía o interesse dos bebês, e não a forma ou o tamanho dos objetos.

Em seguida, mostraram que *bebês podem reconhecer uma estrutura silábica num conjunto contínuo de sons e, de certo modo inato e consciente, podem detectar diferenças no número de sílabas* (DEVLIN, 2008, p. 52), incluindo similaridade entre duas ou três sílabas. Da mesma forma, a similaridade é estendida a objetos, mostrando que existe, certamente, um conceito numérico, uma capacidade matemática inata. *Nós nascemos com ele* (DEVLIN, 2008, p. 53).

Estendendo os experimentos à capacidade de somar, em 1972, a psicóloga americana Karen Wynn surpreendeu o mundo ao anunciar que crianças com 4 meses de idade são capazes de realizar somas e subtrações de modo inconsciente.

Devlin (2008, p. 54) acrescenta que *é interessante notar que, de todas as características do mundo físico com as quais os bebês nascem, o senso numérico parece ser o mais significativo – muito mais do que a forma ou aparência física*.

Assim, o conceito de conservação do objeto apontado por Piaget parece ter sido posto em dúvida por novos experimentos que contradizem as ideias de construção do conhecimento ao longo do tempo.

Com uma visão de senso numérico inato, semelhante ao apresentado por Devlin, o matemático e neuropsicólogo cognitivo Stanislas Dehaene aponta que,

infelizmente, os testes de Piaget não mostram, como as crianças são realmente capazes de pensar. O neuropsicólogo destaca que as crianças não entendem, exatamente, o que está sendo questionado, o que poderá acarretar erros nas interpretações dos resultados observados. Dessa forma, Dehaene (1997) questiona: as crianças interpretam as questões como os adultos o fazem? Também é colocado em dúvida o conceito de conservação numérica apresentado por Piaget. O autor citado ressalta que os testes realizados por Piaget não podem medir a competência numérica das crianças, pois seus experimentos foram repletos de inferências sobre as respostas apresentadas pelas mesmas.

Para Dehaene (1997), não existem respostas conclusivas a respeito das ideias de Piaget nem sobre as ideias que tentam rebater o conceito de conservação numérica exposto pelo psicólogo construtivista.

*Acrescenta que este é um domínio ativo da pesquisa que ainda atrai muitos pesquisadores pelo mundo (DEHAENE, 1997, p. 47).*

Ampliando os resultados dos aspectos fisiológicos do cérebro humano, cientistas acreditam que a falha dos testes de Piaget reflete a contínua maturação do córtex pré-frontal, uma região do cérebro que nos habilita à seleção de estratégia.

O neurocientista expõe que seu objetivo é apresentar, o que os estudos de Piaget não mostraram, ressaltando que os testes continuam prematuros, quando o assunto discute a capacidade numérica das crianças.

Assim, os neuropsicólogos não estão refutando toda a teoria construtivista de Piaget, mas, sim, advertindo sobre resultados que, como Devlin destaca, parecem *quase que certamente* errados.

Em seu trabalho de doutoramento, Ferrari (2008) evidencia que Piaget desenvolveu uma teoria com métodos próprios: o Método Clínico Experimental. Para Piaget, a construção do conhecimento ocorre com base na interação do sujeito com o meio, considerando os processos cognitivos. A grande questão traz à tona as conjecturas apontadas por Piaget. Dentre elas, Ferrari (2008, p. 22) cita que *[...] se todas as informações cognitivas surgem dos objetos do meio, ou seja, estão fora do sujeito, ou se ao contrário, o sujeito nasce com estruturas endógenas que são precondições biológicas desse processo.*

Ferrari (2008) prossegue ressaltando que o estudo de Piaget buscou, em primeiro lugar, identificar as operações básicas de classificação, de seriação ou

ordenação e, em um segundo lugar, mostrar a ontogênese desse funcionamento baseado em uma embriologia mental. Portanto, para o psicólogo construtivista, o desenvolvimento da inteligência ocorre pautado em transformações sucessivas da construção do conhecimento, sem saltos, envolvendo aspectos mentais, fisiológicos, sociais e afetivos.

Na perspectiva biológica dos neurocientistas, condições neuronais intervêm nas possibilidades de aprender e devem ser consideradas na elaboração de estratégias que visem à aprendizagem da Matemática. Dehaene (1997) acrescenta que as reflexões a respeito da construção do conhecimento matemático dependem das atividades realizadas no córtex cerebral, assumindo o senso numérico, como uma capacidade inata de perceber diferentes quantidades.

O neurocientista cita que Tobias Dantzig, em 1954, também refutou a teoria de Piaget e confirmou a sua: todas as pessoas possuem, mesmo que em seu primeiro ano de vida, uma intuição bem desenvolvida sobre números. Bebês de 6 meses, assim como animais trabalham com uma aritmética mínima, por aproximação, e em contextos limitados. Mas, os humanos apresentam uma competência adicional: a habilidade de criar complexos sistemas de símbolos, incluindo a fala e a escrita da linguagem. Dessa forma, Dehaene enfatiza que palavras ou símbolos separam conceitos de arbitrários significados, por sua vez, muito próximos. A linguagem nos permite trabalhar com infinitos números diferentes que podem simbolizar e discretizar qualquer quantidade contínua. Apenas os números apresentam as regras formais de comparação, adição ou em que a divisão de dois números se preserva. *Os andaimes da Matemática podem então ser levantados, sempre mais altos, sempre mais abstratos. É assim que proponho* (DEHAENE, 1997, p. 6).<sup>34</sup>

O autor afirma que, nossa memória, diferentemente do computador, não é digital, e que trabalha por associação de ideias. Hoje, alguns objetos matemáticos parecem ser bastante intuitivos, porque suas estruturas estão bem adaptadas à arquitetura do cérebro humano.

O conhecimento matemático é incorporado às estruturas biológicas do cérebro, tornando os conceitos aritméticos mais simples do que outros.

---

<sup>34</sup> Tradução nossa: *The scaffolding of mathematics can then rise ever higher, ever more abstract.*

Dehaene (1997) argumenta que, seu ponto de vista, eventualmente, leva à melhoria no ensino da Matemática. Para otimizar as experiências de aprendizado das crianças, considerou quais são os impactos educacionais e a maturação do cérebro na organização das representações mentais? Obviamente, ainda está longe de entender qual extensão de aprendizagem pode modificar nossa máquina cerebral.

Portanto, na visão de um biologista, é evidenciado que as habilidades matemáticas não se encontram isoladas de seus precursores biológicos.

#### *2.3.4 Contribuições da Neurociência Cognitiva no Pensamento Matemático Avançado e na Educação Matemática*

Em estudos do artigo de Tall (2000), identificamos que o autor considera que o modo como pensamos e aprendemos Matemática em determinada referência ocorre pela visualização e manipulação de símbolos; considera que a visualização ocupa uma porção principal do córtex cerebral e habilita o *Homo Sapiens* a ver como as ideias podem ser formadas e relacionadas.

Os símbolos matemáticos na Aritmética, Álgebra, Cálculo, particularmente, acionam o cérebro humano, atuando como pivôs entre conceitos para pensar sobre Matemática, calcular e prever seus processos.

O termo *proceito* é usado para descrever essa particular combinação de símbolo como processo e conceito. A análise do *proceito* revela que o desenvolvimento de símbolos não segue um caminho cognitivo fácil no crescimento do indivíduo porque opera em diferentes formas na Aritmética, Álgebra e Cálculo. A noção de *proceito* pode ser identificada em ações de crianças que calculam  $8+6$  como  $8+2+4=10+4=14$ . Primeiramente, a criança entende 6 como a equivalência  $2+4$ , assim a expressão  $8+2+4$  aparece como  $8+2 = 10$  e 4, totalizando 14.

Tall (2000) acrescenta o termo “*mente matemática*”<sup>35</sup>, para se referir à forma como cada processo e conceito matemático são concebidos e compartilhados entre os indivíduos. A discussão sobre “*mente matemática*” foca, tanto na estrutura matemática, que é concebida e compartilhada pela comunidade e na maneira de delineamento em que cada estrutura biológica mental trata estas ideias.

---

<sup>35</sup> Tradução nossa: *Mathematical Mind*.

Portanto, afirma que a última década do último milênio foi dedicada à “década do cérebro”, no qual o interesse crescente expõe seu funcionamento, cujos resultados vêm sendo divulgados a um grande público.

Na construção de uma teoria da *mente matemática*, o autor afirma acreditar em construtos teóricos. Estes são concebidos para corresponder à forma de funcionamento do cérebro, considerado como um complexo sistema multiprocessável. Para simplificar os processos de pensamento, atividades são rotinizadas e passam a requerer uma menor atividade cerebral. Isso ocorre quando passamos a agir mecanicamente.

O autor supracitado considera que a ideia básica é que os primeiros processos cerebrais ocorram de forma paralela, possibilitando a operação simultânea de várias atividades. À medida que as informações são selecionadas, novos estágios desenvolvem-se e apenas um (ou poucos) “objetos” passam a ser tratados ao mesmo tempo. O sistema cerebral move-se, rapidamente, para o próximo objeto, tornando a relação entre os diferentes objetos serial e não mais paralela (atendendo um objeto após o outro e não vários ao mesmo tempo).

Isso pode ser feito usando palavras ou, mais eficientemente, símbolos.

Assim, Tall (2000) reafirma que é possível a combinação entre o cérebro biológico e a *mente matemática*.

Construtos relacionados à descrição da operação cognitiva da *mente matemática* são descritos, como: o conceito imagem que se refere ao total de estruturas cognitivas na mente do indivíduo associada ao conceito, incluindo todas as figuras mentais associadas a propriedades e processos e à teoria de unidades cognitivas (grandes estruturas mentais que usamos e suas relações com as estruturas cognitivas).

Conforme o autor supracitado, a noção do conceito imagem depende da pré-história do indivíduo e apresenta interpretações e inconsistências pessoais. Para sua construção, grupos neuronais correlacionam-se de várias maneiras, sendo modificadas por novas experiências. Assim, uma base biológica do pensamento torna-se evidente, tanto para matemáticos, estudantes e pesquisadores da área.

Assim, um tipo particular de unidade cognitiva, muito importante na Matemática, é a noção de *proceito*, que representa a forma na qual trabalhamos os

símbolos, evidenciando, tanto os processos matemáticos como seus conceitos.

Exemplos incluem:  $3+5$ ;  $ax^2 + bx + c$ ;  $\frac{d}{dx}(e^x \sin x)$  ou  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Para Tall (2000), a noção de conceito imagem provê o mais valioso construto em contraste com a *mente matemática* e o computador. Enquanto o computador está limitado a algoritmos computacionais e representa soluções em números e figuras, a *mente matemática* tem todos os tipos de associações com um cérebro multiprocessável. Por exemplo, o conceito de função não apresenta apenas as propriedades dadas pela definição, sua imagem inclui relações com uma série de outras ideias, dentre elas, uma fórmula singular, um gráfico uniforme, cujo domínio consiste em todos os pontos em que a função é definida. Além disso, o conceito de função apresenta uma figura reconhecida determinada por polinômios, expressões trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

A noção de conceito e a mais geral noção de unidade cognitiva são formas poderosas de descrever como a *mente matemática* abrange os conceitos matemáticos.

Símbolos como conceitos operam de forma adequada com o cérebro biológico; eles podem ser usados como sinais que serão acomodados pelo foco limitado da atenção, e podem ser empregados para chamar processos desenvolvidos no subconsciente, deixando a atenção consciente focar em aspectos mais importantes.

O cérebro não está naturalmente configurado para uma Aritmética rápida e eficiente (DEHAENE, 1997). Em lugar disso, haverá o uso de relações de significado entre as unidades cognitivas.

O pensamento matemático é, portanto, mais do que conhecer procedimentos “de como fazer”. Envolve conhecer as estruturas que são compatíveis com a estrutura biológica do cérebro humano, formando um grande estoque<sup>36</sup> de conhecimentos e relações internas entre atividades singulares. Além disso, envolve conhecer os “tipos de consciências” necessárias ao desenvolvimento de tarefas específicas, de longo prazo, que tratem da combinação de várias operações e que estejam relacionadas aos aspectos abstratos, lógicos, dinâmicos e espaciais e às

---

<sup>36</sup> Tradução de *huge store*.

ações externas (intencionais) que ativam o cérebro humano para o desenvolvimento de tais conceitos.

Quando processos na Aritmética, Álgebra ou Cálculo passam a ser rotinizados, os resultados são alcançados com pouca atenção consciente. Assim, símbolos são evocados.

Esta ação permite que as teorias de processo-objeto e encapsulação de Piaget, Dienes; Greeno; Dubinsky; Sfard e etc. e a dualidade, ambiguidade, flexibilidade do simbolismo como processo e conceito sejam representadas pela noção de *proceito*.

O Pensamento Matemático Avançado não apenas envolve uma grande complexidade de ideias, mas também uma sistematização e uma organização, levando às teorias axiomáticas. A necessidade de prova leva ao conceito definição e à formulação de conceitos matemáticos, essencialmente, apresentados como objetos mentais que foram prescritos com propriedades verbal-simbólicas.

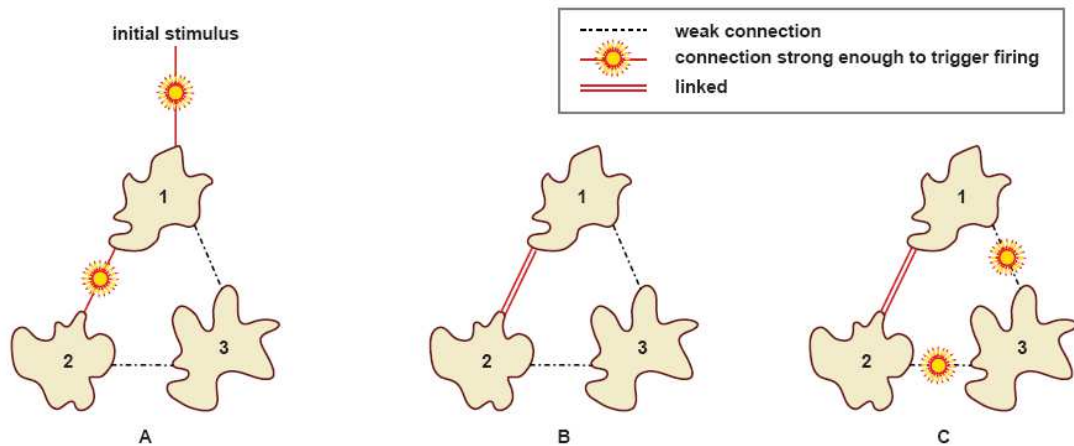
Tall (1994) defende que os diferentes métodos de construção do objeto matemático podem causar grandes dificuldades aos estudantes na transição ao Pensamento Matemático Avançado. A apresentação de métodos axiomáticos requer a construção massiva de novas estruturas matemáticas mentais em que os objetos matemáticos têm apenas as propriedades que seguem as definições. As múltiplas conexões, particularmente, as imagens visuais e verbais, devem ser reconectadas de uma maneira logicamente dedutível. Mas, as novas definições podem envolver uma nova forma de pensamento que entra em conflito com a antiga.

Assim, *o cérebro biológico com suas imagens conceituais ricamente conectadas ainda tem que crescer em uma mente matemática* (TALL, 1994, p. 8).

Baseados no estudo das leituras expostas, defendemos que a Teoria APOS e o Pensamento Matemático Avançado parecem ter uma profunda estrutura biológica subjacente.

A próxima Figura mostra um modelo simplificado das três fases do desenvolvimento cerebral, como resultado de estímulos sucessivos.

Figura 12 - A construção da memória no cérebro humano



Fonte: Tall (1999, p. 2)

A primeira fase representa um estímulo externo ao grupo 1 de neurônios, sendo suficientemente forte para ativar o grupo 2, mas, não o 3. A conexão estabelecida entre os grupos 1 e 2 estabelece a memória de curto prazo (horas ou dias). A reativação sucessiva dessas conexões a longo prazo estabelece a construção de novas estruturas mentais. As conexões estabelecidas entre os grupos 1 e 2 agora acionam o grupo 3 e, assim, por diante.

Portanto, estímulos externos entre dois estágios, percebidos, a princípio, como separados, podem trabalhar em conjunto de forma a ativar outros grupos neuronais e, assim, situações mais complexas.

### 2.3.5 *As contribuições de Keith Devlin*

Keith Devlin<sup>37</sup> é outro autor com significativa importância na construção de nossa pesquisa.

A importância que atribuímos a seus trabalhos está atrelada a seu empenho em identificar aspectos do Pensamento Matemático Avançado relacionando, mesmo que, de forma implícita, suas pesquisas aos conceitos anteriormente citados, como *mente matemática*, conceito imagem, definição, *proceito* e conceitos da Neurociência Cognitiva.

Para Devlin (2008), a habilidade de pensar matematicamente surgiu da mesma capacidade de manipulação de símbolos. O autor analisa o funcionamento do cérebro, dos sistemas matemáticos, das teorias do linguísta Noam Chomsky e mostra-nos, como a Matemática é usada no domínio humano do raciocínio e comunicação. Considera que a formação de padrões é uma habilidade inata. Em sua investigação, afirma que as pessoas dividem-se em dois grupos distintos: o primeiro formado pelos que acham a Matemática inteiramente incompreensível e o segundo, por aqueles que consideram as coisas bastante fáceis.

Destaca que o objetivo de seu livro *O Gene da Matemática: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático*, não é tratar a Aritmética, mas, sim, a Matemática. Ambos são diferentes, e as partes mais avançadas da Matemática têm pouco a ver com Aritmética ou Cálculo Numérico, ou, até mesmo, com números.

Mas, o que é Matemática exatamente? O que a palavra significa para um matemático?

O que é Matemática? Os matemáticos responderiam: É a ciência dos padrões, quando estudados podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, utilitários ou recreativos.

Acrescentam que diferentes tipos de padrões fazem surgir distintas áreas da Matemática. Como tais padrões são altamente abstratos, exigem uma anotação simbólica, também abstrata, como a notação algébrica.

---

<sup>37</sup> Keith Devlin é matemático e chefe da Escola de Ciência de St. Mary's College. Pesquisador Sênior do Centro de Estudos da Linguagem e Comunicação da Universidade de Stanford.

O único modo de apreciar a Matemática é *ler visualmente* os símbolos. *A Matemática só pode ser “vista” com os “olhos da mente”* (DEVLIN, 2008, p. 27). Mas, o problema que relaciona Matemática e símbolos tem a ver com a capacidade cognitiva do ser humano que deverá reconhecer a entidade ou símbolo, como uma entidade bem definida. Entender o símbolo permite pensar em seu conceito.

Mas, o que é preciso para ter uma *mente matemática*?

Algumas qualidades citadas são consideradas de extrema importância, como:

- **senso numérico:** é a capacidade de distinguir e comparar pequenas quantidades, contudo não exige um conceito de números, como entidades abstratas. Consiste em uma capacidade inata;
- **capacidade numérica:** é a capacidade de contar e continuar uma, sequência numérica e contar arbitrariamente grandes conjuntos, é uma capacidade adquirida e não inata e envolve algum nível de abstração; e
- **capacidade algorítmica:** um algoritmo é uma sequência de passos que leva a um objetivo. Na Matemática, consiste em uma sequência de operações com números, como exemplo, temos a resolução de uma equação polinomial de 2º grau.

As três capacidades levam à capacidade aritmética; as demais contribuem em maior ou menor grau com a capacidade matemática;

- **capacidade em lidar com abstrações:** corresponde à maior barreira ao uso da Matemática. O cérebro humano adquiriu essa capacidade baseado na linguagem e sua maior dificuldade está em aplicar essa mesma linguagem às abstrações;
- **um senso de causa e efeito:** a capacidade de elaborar e seguir uma sequência causal de fatos ou eventos: essa capacidade é adquirida depois dos primeiros anos de vida. A prova de um teorema é um exemplo de cadeia causal de fatos;
- **capacidade de raciocínio lógico:** está relacionada ao senso de causa e efeito, em que o raciocínio lógico segue um passo a passo. Essa capacidade é considerada fundamental na Matemática;

- capacidade de raciocínio relacional: o autor defende a tese de que raciocinar sobre objetos matemáticos não é diferente de raciocinar sobre relações físicas ou relações humanas entre pessoas; e
- capacidade de raciocínio espacial: constitui a base da Geometria, pode também ser usada para raciocinar sobre áreas que não são, necessariamente, espaciais.

Na realidade, muitas das grandes descobertas na Matemática avançada nascem de matemáticos que procuram novas maneiras de ver problemas de modo espacial (A prova do último teorema de Fermat, em 1994, surgiu dessa forma) (DEVLIN, 2008, p. 30).

O autor acrescenta que cada uma das capacidades listadas acima traz um custo em termos de consumo de energia para o cérebro e que as capacidades de causa e efeito, raciocínio relacional e espacial estão relacionadas à sobrevivência de muitas espécies animais.

Para Devlin (2008), a Matemática trata da vida e do mundo onde vivemos com base nos símbolos abstratos, uma linguagem própria dos matemáticos. É essa linguagem abstrata que caracteriza padrões também abstratos. Mas, por que fazer isso? Há necessidade de que se escreva no papel um padrão que existe apenas na mente humana. Acrescenta que a estrutura que criou a Matemática é o cérebro humano que, por sua vez, quando ativado por um matemático ou um músico experiente forma imagens semelhantes visualizadas por técnicas de tratamento de imagem. Estas imagens, contudo, tornam-se diferentes, quando tratadas por amadores.

O autor discorre sobre os quatro níveis de abstração que caracterizam o cérebro humano. Assim, uma de suas características é pensar sobre entidades abstratas denotadas por símbolos que correspondem a objetos de nossos processos de pensamento.

Desse modo, considera o pensamento abstrato em termos de quatro níveis:

- abstração de nível 1: não há abstração. Os objetos desse pensamento são todos objetos concretos no ambiente imediato. Mas, Devlin

ressalta que acha válido assumir que tais objetos podem se deslocar para diferentes lugares do ambiente ou serem arrumados de distintas maneiras, assumindo também o caráter abstrato;

- abstração de nível 2: está relacionada a objetos reais familiares a quem pensa, contudo, não são acessíveis à percepção no ambiente imediato;
- abstração de nível 3: aqui os objetos de pensamento podem ser objetos reais ou versões imaginárias de objetos reais. Embora sejam objetos imaginários, podem ser descritos em termos de objetos reais. Devlin acrescenta que somente os humanos são capazes de abstrair no nível 3. A capacidade de pensar no nível de abstração 3 equivale a ter uma linguagem; e
- abstração de nível 4: nesse nível temos o pensamento matemático no qual os objetos são inteiramente abstratos.

Segue com a afirmação

O cérebro não adquiriu novos processos de pensamento apenas aplicando processos já existentes a objetos em um nível maior de abstração. Em outras palavras, o desenvolvimento crucial foi de abstração crescente, não de maior complexidade dos processos de pensamento (DEVLIN, 2008, p. 144).

Para resolver o problema do nível de abstração 3, o cérebro adquiriu a capacidade de criar padrões de ativação que se parecem com os criados pela estimulação sensorial direta do mundo.

Essa capacidade de simular o mundo real, avançando para um campo puramente simbólico – abstração de nível 4 – caracteriza o pensamento matemático. Os matemáticos pensam em objetos e circunstâncias, que são os focos do pensamento matemático.

Devlin (2008) apresenta o *pensamento desconectado*, cuja ideia e nome não são de sua autoria.

[...] o pensamento desconectado é a capacidade de raciocinar de uma maneira abstrata e hipotética. Examinando a estrutura do

pensamento desconectado, e a mudança na estrutura cerebral exigida para lidar com essa nova faculdade, veremos como ela produz a sintaxe (sob a forma da gramática universal) e a faculdade de pensar matematicamente (DEVLIN, 2008, p. 194).

Outra capacidade apontada pelo autor necessária para o pensamento matemático é a percepção de causa e efeito; prossegue ressaltando que lidar com a Matemática não exige novas capacidades mentais, mas, sim, lidar com capacidades já existentes de uma nova forma.

Acrescenta que, para *agir com mais inteligência*, devemos considerar a estrutura do cérebro e as capacidades de resolver problemas, particularmente, as que envolvem pensamento abstrato ou pensamento simbólico.

O autor supracitado critica a visão do filósofo francês René Descartes de que a mente é uma máquina de calcular, que pensa seguindo uma progressão de passos lógicos isolados.

Prossegue com a afirmação

Como afirmei em meu livro *Goodbye Descartes*, o pressuposto de que todos os processos mentais podem ser entendidos por regras lógicas é falso. Além do mais, é precisamente a falsidade dessa assertiva que explica o fracasso de muitas tentativas de programar computadores digitais para reconhecer cenas, lidar com a linguagem natural e mostrar inteligência artificial. No final de *Goodbye Descartes*, propus uma visão alternativa para a mente humana, como um instrumento de reconhecer padrões – padrões visuais, padrões auditivos, padrões linguísticos, padrões de atividades, padrões de comportamentos, padrões lógicos e muitos outros. Tais padrões podem estar presentes no mundo, ou podem ser impostos pela mente humana como parte integrante de sua visão do mundo (DEVLIN, 2008, p. 209).

Conforme explica, os padrões podem ser descritos baseados na linguagem que inclui as linguagens especializadas, como a notação musical e a Matemática. É a capacidade de reconhecer (e, possivelmente, criar) um grande número de padrões e reagir com eles. Afirma que as regras são úteis para se adquirir uma nova capacidade e que o conhecimento especializado surge, quando o cérebro já se adaptou à nova capacidade e reage sem esforço. Nesse estágio, as regras não são

mais necessárias [...] *não precisamos mais das regras que governam o processo de aprendizado* (DEVLIN, 2008, p. 210).

A evolução nos fornece a capacidade de reconhecer novos padrões e desenvolver reações comportamentais a esses padrões.

Acrescenta que as mudanças estruturais do cérebro nos últimos 200000 anos trouxeram consequências para a atividade cerebral, que estão relacionadas ao pensamento simbólico, desconectado, à *linguagem, ao sentido do tempo, à capacidade de formular e seguir planos de ações complexos, e à capacidade de projetar e construir uma quantidade cada vez maior de artefatos* (DEVLIN, 2008, p. 211).

Outro estágio de desenvolvimento do cérebro humano aborda o raciocínio simbólico que, por sua vez, é muito mais problemático.

A capacidade fundamental para o planejamento e para a criação de ferramentas advém da capacidade de formular uma cadeia de proposições “Se isso, então, aquilo”.

Devlin defende que as ideias de Birkerton, do livro *Language and Human Behavior*, de 1995, ajudaram muito na compreensão da construção mental humana que se desenvolveu em dois estágios. Assim, a partir do momento que temos a capacidade de lidar com abstrações (pensamento desconectado), temos a linguagem. A linguagem associada ao senso numérico leva à capacidade numérica, e a capacidade algorítmica e de raciocínio lógico são versões abstratas da capacidade de elaborar e seguir uma cadeia causal de fatos e eventos.

O autor descreve o funcionamento do cérebro, como uma grande rede neural formada por, aproximadamente, 100 bilhões de neurônios, cada um ligado quase a 1000 e 100000 outros neurônios, produzindo um comportamento do tipo estímulo-resposta. O conjunto de neurônios recebe *inputs* do mundo exterior, e outro gera *outputs* como resposta.

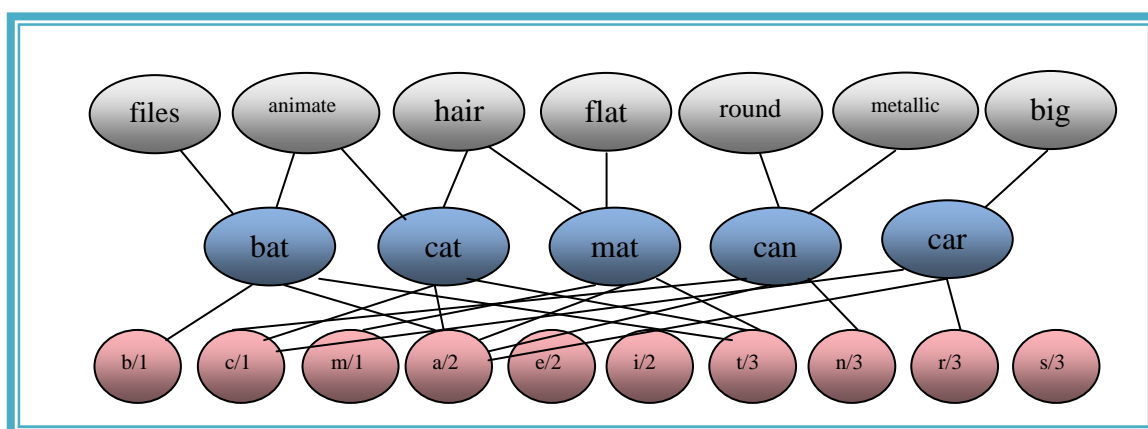
E prossegue

Onde as conexões neurais têm capacidades variáveis, o dispositivo pode “aprender” um novo padrão de estímulo-resposta, se tiver o treinamento adequado (isso exige um mecanismo de *feedback* para

ajustar as capacidades das conexões variáveis (DEVLIN, 2008, p. 258).

Neurônios em “camadas ocultas” entre os neurônios de *input* e *output* são capazes de comportamentos mais sofisticados.

Figura 13 - Parte de uma rede neural simples que lê palavras de três letras e as associa a diversas propriedades dos objetos que elas denotam



Fonte: Adaptado de Devlin (2008, p. 259)<sup>38</sup>

O autor chama de “pensamento desconectado”, o que está na capacidade do cérebro humano, diferentemente de qualquer criatura viva ou extinta, simular um padrão de ativação produzido externamente de modo a dar partida a uma sequência sem, necessariamente, gerar uma resposta corporal.

Assim, resolver um problema matemático, não requer um estímulo externo, é pensar desconectado sobre um mundo de símbolos gerados externamente. O

<sup>38</sup> Observações de Devlin (2008), a respeito da Figura 13: [Devido às peculiaridades morfológicas do exemplo em inglês, este foi conservado com as palavras originais]. Parte de uma rede neural simples que lê palavras de três letras e as associa a diversas propriedades dos objetos que elas denotam. Os **inputs** (camada inferior) são letras individuais em determinadas posições nas palavras. A camada do meio representa unidades que a rede reconhece como palavras completas. Os **outputs** (camada superior) são propriedades dos objetos descritos pelas palavras. A rede é construída de tal modo que três sinais devem atingir um nódulo na camada do meio a fim de que esta seja ativada e envie um sinal para a camada do **output**. Por exemplo, se a palavra **cat** é **input**, ao se fornecer **inputs** para os nódulos “c/1”, “a/2”, “t/3”, os sinais viajarão para atingir um dos nódulos na camada do meio. Mas apenas o nódulo “**cat**” recebeu três **inputs**, de modo que apenas ele torna-se ativo, enviando sinais para os nódulos “**animate**” e “**hairy**”. Assim, a rede associa o **input** da palavras **cat** ao **output** das palavras **animate** e **hairy**.

pensamento desconectado nos dá automaticamente a linguagem completa. De acordo com o autor, o pensamento desconectado e a linguagem caminham juntos.

Acrescenta que é o ambiente físico que gera, por meio de estímulos de *input* – os padrões de ativação do pensamento desconectado sem que termine em uma ação motora ou ação física. O pensamento desconectado leva ao conhecimento e não à ação. É necessário que uma grande quantidade de tipos seja combinada, de modo que corresponda à estrutura de situações do mundo real, mas, que espécies de combinações são necessárias?

O autor defende que, para pensar desconectado, é preciso que tenhamos a linguagem integral e aponta que o pensamento matemático é simplesmente uma forma, de certa maneira especializada, de pensamento desconectado.

O pensamento simbólico foi adquirido quando

[...] o cérebro adquiriu a capacidade de simular os padrões de ativação normalmente causados por estímulos sensoriais, e de isolar dos centros motores do corpo os resultados dos processos de pensamentos resultantes. Em resumo, o cérebro tornou-se capaz de pensar “desconectado” (DEVLIN, 2008, p. 275).

Assim, o pensamento desconectado só pode ocorrer, depois que o cérebro adquiriu um número suficiente de tipos para suportar um “modelo” interno do mundo e desenvolveu uma estrutura do mundo suficientemente rica. Para o autor, a Matemática é uma consequência automática do pensamento desconectado e que o gene da Matemática e o gene da linguagem são os mesmos.

Para compreender a Matemática, é preciso que conheçamos os “personagens” em uma série matemática<sup>39</sup>, que correspondem aos objetos matemáticos – números, figuras geométricas, grupos, espaços topológicos, etc.

Por sua vez, os objetos matemáticos apresentam relações e propriedades que só podem ser encontradas na mente humana, lá no fundo da mente.

Para lidar com a Matemática, precisamos pensar desconectadamente em objetos totalmente abstratos – que não têm semelhança com qualquer coisa no mundo real – abstração de nível 4 – nos quais os padrões de ativação cerebrais são

---

<sup>39</sup> Aqui o autor refere-se à série matemática, como um filme composto por atores e personagens.

diferentes dos relacionados ao mundo real. É por meio da familiaridade e de um trabalho duro que o cérebro fica confortável com uma nova abstração, aproximando-a de uma situação concreta. Outro ponto de dificuldade da Matemática é o grau de rigor exigido nos processos de raciocínio, sobretudo, na verificação de coisas já descobertas.

É preciso convencer os outros da verdade das descobertas, o que torna a necessidade de verificação formal uma consequência direta da natureza da descoberta Matemática. *As provas formais são a segurança final (e totalmente confiáveis) contra falsas “descobertas”* (DEVLIN, 2008, p. 292).

Após a resolução de um problema, o matemático começa a trabalhar na prova lógica que corresponde ao árbitro da verdade matemática.

O autor acrescenta que o “treinamento” mental exigido para acompanhar a abstração de uma série de televisão (também abstrata) é fornecido pelas nossas vidas do dia a dia. Contudo, os personagens da série matemática compostos pelos objetos matemáticos não se parecem com as coisas que encontramos em nossas vidas.

O autor defende ser importante estruturar cursos que demonstrem o papel da Matemática e da Ciência na vida moderna, em vez de tentar desenvolver determinadas capacidades. Acrescenta que o papel da educação é transmitir cultura humana e não fazer treinamento profissional.

### ***2.3.6 Resumo e Conjecturas***

Na seção *Um Panorama Geral da Tese* exposta na Introdução desta tese, a princípio, evidenciamos a estrita relação que se estabelece entre a Teoria APOS e as principais ideias presentes no Pensamento Matemático Avançado.

Com base em nossos estudos sobre as principais ideias presentes no Pensamento Matemático Avançado, deparamo-nos com o artigo de Tall (2000) que nos trouxe uma indagação a respeito do termo *mente matemática*. Aprofundando nossas leituras sobre o tema, identificamos que o autor relaciona-o aos processos cognitivos envolvidos na construção dos conceitos matemáticos, dentre eles,

processos inerentes à estrutura matemática e à estrutura biológica mental do sujeito que os constrói.

Em nossa proposta de estudo, é perfeitamente cabível relacionar a primeira estrutura aos aportes teóricos desta tese, a Teoria APOS e o Pensamento Matemático Avançado.

Entretanto, também reconhecemos que os aspectos inerentes à estrutura biológica do sujeito têm um papel primordial na construção das concepções ação-processo-objeto-esquema e dos conceitos imagem e definição que se formam no indivíduo.

É fato que o tema mereceu uma maior discussão e uma seção neste Capítulo para direcionar os estudos de interessados na área.

Assim, estendemo-nos ao estudo dos aspectos relativos à Neurociência Cognitiva na construção do Pensamento Matemático Avançado.

Como citado no início desta seção, nosso objetivo é contrapor os aspectos comuns evidenciados nas leituras que, em conjunto, contribuem para a análise das construções cognitivas dos sujeitos.

Em nossos estudos é possível evidenciarmos que as construções mentais que se estabelecem no Pensamento Matemático Avançado são mais duradouras que as estabelecidas no Pensamento Matemático Elementar. Contudo, não foi nosso propósito discutir aqui os diferentes aspectos que regem cada um deles.

Portanto, é impossível refletir sobre os aspectos cognitivos sem considerar as estruturas biológicas subjacentes à construção de determinado conceito matemático.

Mas, como afirma Dehaene (1997), é necessário compreender os entraves que nossa biologia de “homem neuronal” impõe às nossas atividades matemáticas.

O estudo do funcionamento do cérebro humano relacionado ao pensamento matemático parece emergir nos debates científicos no século XX e, com ele, discussões a respeito da constituição da memória a longo prazo, da visualização e da manipulação de símbolos e sistemas verbais e visuais atrelados a conceitos específicos da Matemática.

Mas, como é possível compreender a atuação de sistemas e sub-sistemas cerebrais na constituição de determinado conceito? Como são estabelecidas as conexões neuronais em indivíduos que apresentam elementos característicos do Pensamento Matemático Avançado? Estas são questões que poderão ser respondidas em futuras investigações.

Defendemos as ideias expostas por Geraldo Edelman, ao apontar, quando as atividades ocorrem com sucesso, as conexões correspondentes são reforçadas e tornam a ação já conhecida em situações futuras.

Contudo, é importante ressaltar que existem divergências entre as concepções de Stanislas Dehaene e Keith Devlin em relação à teoria cognitivista de Piaget.

Apoiados nos experimentos realizados com bebês, os neurocientistas evidenciaram que a teoria piagetiana de construção de um modelo mental ao longo dos anos estava *quase que certamente errada*. Os neurocientistas defendiam a ideia de que os bebês apresentam um senso numérico inato, pois conseguem detectar diferenças no número de sílabas das palavras e estender essa similaridade aos objetos.

Para o matemático russo Tobias Dantzig (1884-1956), os humanos são dotados pela habilidade de criar complexos sistemas de símbolos, incluindo, a fala e a escrita da linguagem, e estas constituem habilidades inatas.

Portanto, destacamos que há evidências das ideias de Tall (2000) que considera que a maneira como aprendemos Matemática está relacionada à visualização e à manipulação de símbolos e que, como defendem os neurocientistas, corresponde a uma habilidade inata do ser humano.

Assim, os símbolos matemáticos atuam como pivôs entre os conceitos, mas, para tanto, são fundamentais que os processos envolvidos em sua construção sejam compreendidos.

Tall (2000) atribui ao termo *proceito* essa particular combinação entre processo e conceito; também destaca o termo *mente matemática* ao referir-se à forma em que cada processo e conceito são concebidos pelo sujeito, além das estruturas biológicas envolvidas nessa construção.

Assim, é possível conceber a atividade matemática à fisiologia cerebral humana. Tall (2000) acrescenta que os primeiros processos cerebrais ocorrem de forma paralela, possibilitando a operação simultânea de várias atividades. No entanto, defendemos que, na situação exposta pelo autor, as informações não se encontram plenamente interiorizadas e o aluno não consegue estabelecer uma concepção do objeto matemático, como entidade mental. Ressaltamos que a ação simultânea de várias atividades em paralelo pode ser percebida no momento da

aplicação de um problema ou da entrevista com os estudantes, sujeitos de nossa pesquisa.

Ainda de acordo com as ideias de Tall (2000), se o aluno conceber o objeto matemático como entidade mental, a relação entre os diversos objetos passará a ser serial e será explicitada baseada em palavras e símbolos. É o que Bruner (1966) chama de compactabilidade.

Nesta seção, o termo conceito imagem é apresentado como o construto relacionado à descrição da operação cognitiva da *mente matemática*. Portanto, as ideias por trás da *mente matemática* abrangem não só a noção do proceito, como também a noção do conceito imagem que reflete a pré-história do indivíduo.

Em nossa pesquisa, Devlin (2008) também contribuiu com a compreensão do termo *mente matemática* acrescentando qualidades atribuídas a ela, que são: senso numérico, capacidades numérica e algorítmica que contribuem em maior ou menor grau para a constituição da capacidade em lidar com abstrações, um senso de causa e efeito, capacidade de raciocínios lógico, relacional e espacial.

O autor acrescenta que raciocinar de uma maneira abstrata e hipotética caracteriza o pensamento desconectado e a facilidade de pensar matematicamente, leva ao conhecimento e não, necessariamente, à ação motora ou física.

Assim, de acordo com as ideias expostas por Devlin (2008) defendemos que para que seja atingido o nível de abstração 4 citado pelo autor é necessário que haja familiaridade com os objetos matemáticos existentes, e esta será obtida apoiada em um trabalho duro e persistente que tornará o cérebro confortável com os processos que envolvem, sobretudo, a abstração.

Diante das considerações traçadas sobre os aportes teóricos desta tese e do significado do termo *mente matemática* em nosso título, no próximo capítulo, apresentaremos a metodologia de pesquisa que norteou nossa investigação, como também os passos percorridos para atingir nossa proposta e responder às questões da pesquisa.

## *Capítulo 3 - Procedimentos Metodológicos*

---

O presente capítulo abordará a metodologia empregada nesta pesquisa, bem como serão descritos os procedimentos metodológicos adotados, com o objetivo de responder às questões do estudo.

Por meio de uma abordagem qualitativa, apresentaremos a metodologia de investigação que norteará o estudo.

Nos estudos de caso múltiplos, identificaremos a possibilidade de comparar os diferentes aspectos cognitivos destacados pelos alunos dos cursos de Engenharia de duas instituições de ensino privado, localizadas no Estado de São Paulo. Destacaremos que o trabalho com estudos de caso múltiplos nos permitirá identificar a particularidade inerente a cada curso e a compreender a realidade existente em ambas as instituições.

Para refinar e aprimorar algumas ideias e conjecturas traçadas no início da pesquisa, será apresentada, inicialmente, a investigação piloto a respeito do problema proposto, com o objetivo de identificar como pode ocorrer a construção do conhecimento pelos estudantes participantes.

Após a análise dos dados relacionados a primeira investigação, a chamada investigação piloto, seguiremos para o aprimoramento da coleta de dados e análise, com base em novas leituras e revisões bibliográficas; depois com a apresentação dos passos percorridos e o cenário da investigação.

### *3.1 A metodologia de investigação*

Ludke e André (2005) afirmam que a pesquisa qualitativa envolve a coleta de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatizam mais o processo do que o produto e preocupam-se em retratar a perspectiva dos participantes.

Para as autoras, uma pesquisa qualitativa tem o ambiente natural, como sua fonte direta de dados, e o pesquisador como seu principal instrumento. Os problemas são estudados no ambiente onde eles ocorrem, naturalmente, sem

qualquer manipulação intencional do pesquisador. Dessa forma, esse tipo de estudo também pode ser chamado de “naturalístico”.

Dentre as características citadas, destacam que os dados coletados são predominantemente descritivos, ricos em especificações de pessoas, situações e acontecimentos. O interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar, como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.

Para os autores *a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse* (LUDKE; ANDRÉ, 2005, p. 38).

### ***3.1.1 O estudo de caso como metodologia de investigação***

Iniciamos com a citação de Ponte (2006, p. 1) sobre a caracterização de um estudo de caso: O estudo de caso é caracterizado, como incidindo numa entidade bem definida, como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social.

O autor discute que o estudo de caso visa a compreender com profundidade o seu “como” e “porquê”, com base em um enfoque particularista em que são investigadas as características próprias da unidade. Pode seguir uma perspectiva interpretativa ou pragmática. Na primeira, a compreensão ocorre do ponto de vista dos participantes e na segunda, do ponto de vista global do objeto de estudo.

Cita que o estudo de caso deve contribuir para a compreensão global de certo fenômeno de interesse, revelando em profundidade o “como” e “porquê” dessa entidade, em uma visão particularista, única e especial. Acrescenta que, no Brasil, os estudos de caso têm sido usados para investigar o ensino e a aprendizagem de questões relacionadas às práticas didáticas e pedagógicas, programas de formação inicial e contínua de professores, assim como orientações curriculares. Tais estudos permitem que não só haja uma reflexão mais aprofundada por parte dos atores envolvidos, como também seja observado o modo contraditório, nos quais os projetos institucionais são desenvolvidos.

O autor cita alguns exemplos, como o caso do trabalhador do século XIX, *Phineas P. Gage*, que sofreu um grave acidente de trabalho e danificou uma parte

considerável do cérebro, relatado por Damásio em 1995, ou a introdução de um novo programa de Matemática e a avaliação de um curso de Licenciatura em Matemática. Todos são considerados estudos de caso.

Em qualquer que seja a situação, um estudo de caso é marcado sempre por suas determinantes internas, sua história, suas propriedades, assim como suas influências externas, *quer da realidade local, quer de natureza social e sistêmica que o influenciaram* (PONTE, 2006, p. 5).

O autor refere que a existência de “estudos de caso múltiplos”, que correspondem a diversos estudos, que podem ser comparados de modo a ajudar a compreender a diversidade de realidades existentes em um grupo, divididas entre preocupações e interesses pessoais.

Os estudos de caso podem ser classificados, conforme seus objetivos: (i) exploratório: são obtidas as informações preliminares a respeito de um objeto de interesse. No estudo de caso exploratório, as informações podem ser descritivas (aqui o propósito é descrever “como é” o caso de interesse) ou analíticas (as informações passam a ser problematizadas, confrontadas com a teoria existente e, possivelmente, propulsoras de uma nova teoria).

Ponte (2006, p. 6) acrescenta que a investigação exploratória e descritiva é essencial para a coleta de informação em um estudo de caso, porém é o estudo analítico que proporcionará um avanço significativo do conhecimento. Além disso, afirma que *os casos não precisam ser muito detalhados nos seus procedimentos metodológicos – devem ser ilustrativos e fortemente evocativos junto ao público a que se destinam.*

Para o autor, o estudo de caso pode englobar uma variedade de instrumentos e estratégias de coleta e análise dos dados, cuja natureza faz com que a pesquisa baseie-se em trabalho de campo ou em análise documental. As evidências são relatadas por entrevistas, observações, documentos ou artefatos. Assim, apresentam um forte cunho descritivo, cujos fatos são relatados de modo literal, sistemático e o mais completo possível. No entanto, não é apenas o lado do estudo de caso descritivo que permite um profundo alcance analítico, mas, a verificação e confrontação de teorias e a possibilidade de gerar questões futuras.

No estudo de caso, o pesquisador não intervém na situação ou comportamento dos participantes que não serão modificados ou manipulados.

Também é possível que haja uma natureza mista, envolvendo tanto uma abordagem qualitativa como quantitativa. Os resultados podem ser descritos por textos, comunicações orais ou registros em vídeo e devem acrescentar algo de significativo e original ao que já é conhecido.

### *O conhecimento produzido em um estudo de caso*

De acordo com Ponte (2006, p. 12), a perspectiva essencial de um estudo de caso pode ser interpretativa ou pragmática. Na primeira, há a compreensão do *mundo do ponto de vista dos participantes*, e na segunda é proporcionada uma *perspectiva global do objeto de estudo, do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente*.

A perspectiva interpretativa tem como ideia central a atividade humana como experiência social em que cada sujeito vai constantemente elaborando significado. Ocorre a interação entre os atores que relatam em suas experiências a realidade tal como ela é, assim como suas emoções que vão além dos fatos e aparências.

O autor evidencia que tanto o estudo de caso como os estudos de caso múltiplos buscam enriquecer o conhecimento coletivo a respeito dos problemas e fenômenos particulares, sem generalizá-los.

Acrescenta que o estudo de caso permite que exista a confirmação ou refutação de uma teoria existente, sem que haja uma generalização em extensão. Assim, são estabelecidas novas hipóteses de trabalho que poderão ser testadas em novas investigações, originadas de novas questões levantadas.

Outro fator destacado pelo autor refere-se às características e qualidade dos trabalhos, sobretudo, em Educação Matemática que têm sido muito desiguais. Para o autor, a investigação qualitativa permite certa “tolerância”, pois um dado fenômeno pode ser visto de maneiras diferentes, assegurando alguma flexibilidade em sua apreciação.

Deve haver capacidade para distinguir a que é investigação adequada da que não é e isso afeta os estudos de caso do mesmo modo que afeta qualquer outro tipo de investigação. A existência de padrões de qualidade é necessária, tanto por razões de ordem interna à comunidade de investigação, como por razões de ordem externa (PONTE, 2006, p. 17).

O autor aponta o cuidado que o pesquisador deve ter a respeito do propósito dos estudos de caso. Acredita que deva ser reforçada a *compreensão*<sup>40</sup> e não a comprovação ou refutação de *leis gerais*<sup>41</sup>, como ocorre nas ciências naturais, o que faz com que se estabeleçam eventuais critérios de qualidade que reflitam essa diferença essencial.

Dentre os critérios gerais de qualidade para a avaliação do estudo de caso, do tipo interpretativo, Ponte (2006) cita Goetz e LeCompte (1984) que sugerem cinco critérios: (i) adequação; (ii) clareza; (iii) caráter completo; (iv) credibilidade e (v) significado. As investigações do tipo interpretativo, a coleta e análise dos dados correspondem a uma atividade diversificada com a exposição de novos problemas e, frequentemente, requerem flexibilidade e criatividade por parte dos pesquisadores. Já para um estudo de caso de caráter excepcional, as autoras acrescentam outros dois critérios possíveis: (vi) criatividade e (vii) caráter único. Estes constituem critérios que não são exclusivos dos estudos de caso, mas para toda investigação de cunho qualitativo. O autor lembra que os estudos de caso ganham em relação à validade interna, um objetivo específico, mas, perdem em relação à fidedignidade. Para o autor, *a fidedignidade refere-se à questão de saber se as operações do estudo (recolha de dados) poderiam ser repetidas, de modo a produzir resultados semelhantes* (PONTE, 2006, p.19).

Para Cohen; Manior; Morrison (2005), um estudo de caso corresponde a um exemplo específico que é, frequentemente, desenhado para ilustrar um exemplo geral. Pode-se restringir a um determinado período, a um contexto geográfico, organizacional, institucional e a outros contextos que se limitam e são definidos por características do indivíduo ou do grupo.

O caso específico de um sistema é limitado, por exemplo, a uma criança, uma classe, uma escola ou uma comunidade. O estudo de caso possibilita que os leitores compreendam as ideias e abstraíam os princípios que se relacionam. Os autores acrescentam que o estudo de caso pode revelar situações e resultados que não são suscetíveis a uma análise numérica, permitindo que pesquisadores entendam casos similares, fenômenos ou situações.

---

<sup>40</sup> Grifo do autor.

<sup>41</sup> Grifo do autor.

Assim, podem ser estabelecidas relações de causa e efeito em contextos reais que revelam uma interação única e dinâmica entre os eventos, relações humanas e outros atores em um único exemplo e são suportadas por evidências.

Na apresentação do livro de Robert Yin (2005), Donald T. Campbell – Bethlehem, Pensilvânia, descreve o estudo de caso como:

Um método de pesquisa para investigação de inferências válidas a partir de eventos que se encontram fora dos limites do laboratório, ao mesmo tempo em que mantém os objetivos do conhecimento compartilhado com a ciência laboratorial. A essência do método científico não é a experimentação, mas sim a estratégia conotada pela expressão “hipóteses concorrentes plausíveis”, em que as soluções são alcançadas a partir de evidências ou pode começar com hipóteses que estarão atreladas ao contexto e apresentadas em “redes ampliadas de implicações que (embora nunca completas) são cruciais à sua avaliação científica” (YIN, 2005, p. vii).

Yin (2005, p. 19) acrescenta que *os estudos de caso representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo “como” e “porque”* e que hoje são predominantes em todas as ciências sociais, sendo utilizados como estratégias de pesquisa de fenômenos individuais, organizacionais, sociais, políticos, educacionais e outros. Para utilizá-lo como estratégia de pesquisa, devemos estar atentos à sua definição, à determinação e coleta de dados relevantes e à sua análise.

Assim, Yin (2005) considera que a pesquisa empírica vem acompanhada pelo pensamento lógico e não pela coleta de dados realizada como propósito mecanicista. Assim, os estudos de caso podem ser utilizados para descrever ou testar proposições e representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo “como” e “por que” sobre um conjunto contemporâneo de acontecimentos.

Portanto, trabalhar com a metodologia baseada em estudos de caso, permite que compreendamos os processos e não apenas os produtos de uma investigação científica baseada na coleta de dados empíricos. Os fenômenos em estudo são entendidos, como um sistema complexo e cujas interdependências permitem que as inúmeras variáveis envolvidas estabeleçam relações de causa e efeito.

### 3.2 *Os passos percorridos e o cenário da investigação*

A pesquisa foi constituída por dois momentos: **no primeiro momento**, realizamos a investigação piloto com um estudante do curso de Engenharia de uma instituição de ensino privada do Estado de São Paulo. A análise dos dados considerou algumas ideias destacadas por Trigueros *et al.* (2012), em seu projeto de pesquisa nº 62375, realizado pelo Departamento de Matemática do Instituto Tecnológico do México e da Associação Mexicana de Cultura A. C., intitulado *Desenvolvimento de Modelos de Aplicação dos conceitos de Álgebra Linear para a aprendizagem significativa*. Tal análise considerou os aspectos evidenciados como os objetos matemáticos prévios e as concepções ação-processo-objeto-esquema desses conhecimentos prévios. Contudo, evidenciamos que, tal análise não considerou as principais ideias que pudessem caracterizar a concepção final do objeto matemático autovalor e autovetor pelos estudantes investigados. Além disso, estávamos em busca de mais evidências a respeito da relevância de problemas como o proposto na investigação, que tratassem do tema Sistema Dinâmico Discreto. Tais evidências foram afirmadas pelas leituras que se sucederam ao Exame de Qualificação.

Após um aprofundamento da revisão bibliográfica, identificamos que alguns trabalhos relacionavam-se diretamente à nossa tese, dentre eles, as pesquisas que tratavam contextos semelhantes ao nosso, ou seja, o estudo de disciplinas matemáticas em cursos de Engenharia. Dentre eles, evidenciamos no trabalho de Pedersen (2006), a relevância de problemas de Sistemas Dinâmicos Discretos na construção do objeto matemático autovalor e autovetor.

Problemas como esses, também foram destacados nas descrições dos livros-texto que compõem o conteúdo programático dos programas de Engenharia das instituições investigadas.

Assim, baseamo-nos nos aportes teóricos de Dubinsky (1991) e Vinner (1991), que subsidiariam a análise desta tese, e que nos sustentariam na identificação das concepções ação-processo-objeto-esquema, após a análise das decomposições genéticas realizadas. Além do mais, também seria possível a identificação dos conceitos imagem e definição relacionados ao objeto matemático autovalor e autovetor e suas posteriores análises.

Após a análise da investigação piloto, partimos para uma reformulação que poderia evidenciar uma melhor maneira de análise dos dados e que nos levou ao segundo momento da pesquisa.

Assim, realizou-se o **segundo momento**, no qual passamos a identificar quais características são evidenciadas nas concepções ação, processo, objeto ou esquema desse objeto matemático, de acordo com as pesquisas de Stewart (2008) e de Trigueros *et al.* (2012); além das características que evidenciam os diferentes níveis de conceito imagem, de acordo com Vinner (1991) e Domingos (2003). Essas mesmas características serão destacadas no Capítulo 6 desta tese.

Este momento considerou outras duas instituições de ensino do Estado de São Paulo, distintas da instituição de ensino apresentada na investigação piloto, e a análise da produção de dez estudantes, sendo quatro da primeira instituição e seis, da segunda.

Assim, chamamos de Estudo de Caso I, aos alunos participantes da primeira instituição de ensino e Estudo de Caso II, aos alunos participantes da segunda.

O Estudo de Caso I foi realizado em uma instituição de ensino localizada em uma cidade da região metropolitana do Estado de São Paulo, fundada em 1945. Hoje, a instituição constitui-se de sete cursos de Engenharia, um de Ciência da Computação e um de Administração, além de programas de Mestrado e Doutorado.

A aplicação do problema aos alunos voluntários, realizou-se entre os meses de maio e julho de 2013, com três alunos que haviam concluído a disciplina Álgebra Linear no semestre anterior e um aluno que estava no último semestre da graduação.

A princípio, tínhamos a ideia de que mais alunos seriam voluntários de nossa pesquisa, mas, após o convite pela pesquisadora, foram poucos os retornos e suas disponibilidades para participarem.

A Coordenação da instituição onde foi realizado o estudo forneceu o plano e ensino da disciplina Álgebra Linear (ANEXO G), para que pudéssemos identificar os livros recomendados, a carga horária dispendida, assim como o conteúdo trabalhado.

Já o Estudo de Caso II, foi realizado em uma instituição de ensino privada localizada na cidade de São Paulo, fundada em 1968. Hoje, ela é constituída por cursos de graduação em nível bacharelado e tecnológicos, além de programas de Mestrado e Doutorado.

Com a participação de seis estudantes, sendo três na primeira fase e três na segunda. A primeira fase foi realizada com estudantes que haviam concluído a

disciplina Álgebra Linear no primeiro semestre letivo da graduação em Engenharia e a segunda fase, com três estudantes do último semestre do curso.

Assim, como no Estudo de Caso I, houve o convite, por parte da pesquisadora, a todos os alunos matriculados nesses semestres, porém, foram poucos os que se prontificaram a participar.

O plano de ensino da disciplina também nos foi entregue pela Coordenação do curso (ANEXO H).

O desenvolvimento do problema pelos alunos foi realizado em um horário extraclasse, nas próprias instituições de ensino ou em nosso programa de pós-graduação. A todos os alunos, foi concedido o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (ANEXO A)

### *3.3 Resumo e Conjecturas*

Em nossa pesquisa, consideramos que a abordagem qualitativa adotada propiciará a análise e compreensão das estruturas cognitivas dos alunos e os diferentes perfis das instituições de ensino envolvidas com o processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear. Assim, de acordo com o que é exposto por Ponte (2006), consideraremos como entidade bem definida que caracteriza nossos estudos de caso, os alunos voluntários e as instituições de ensino as quais fazem parte.

Sob a perspectiva qualitativa, pudemos retratar os processos descritos pelas narrativas dos estudantes expostas nas entrevistas, encontrando argumentos que respondessem à nossa questão de pesquisa e validassem nossa hipótese.

Caracterizada como estudos de caso múltiplos, a coleta e a análise dos dados abrangeram o discurso dos estudantes de cursos de Engenharia em contextos diversos de formação estabelecidos pelas instituições de ensino onde a pesquisa foi realizada. O perfil diferente das instituições nos permitirá estabelecer uma comparação e extrair resultados com base nas diversidades existentes.

Também foi possível que compreendêssemos com profundidade “como” a disciplina de Álgebra Linear foi lecionada e o “porque” de sua importância na graduação, explicitando as características particulares, únicas e especiais de seu

ensino, marcadas por influências internas e externas, pela realidade local, social e sistêmica.

Em nossa investigação, optamos pela seleção de perguntas abertas, também chamadas livres ou não limitadas, em razão da ampla série de informações obtidas nos discursos dos sujeitos e que nos instigavam na busca de novas considerações.

Lakatos; Marconi (2003, p. 204) explicam que perguntas com tais características *permitem ao informante responder livremente, usando linguagem própria, e emitir opiniões. Possibilitam investigações mais profundas e precisas.*

Após a seleção das perguntas, foram realizadas entrevistas com os alunos participantes, cujo objetivo foi determinar a validade das hipóteses apresentadas na construção do instrumento diagnóstico, referente aos mecanismos mentais desenvolvidos pelos estudantes na construção do conceito de autovalor e autovetor.

As entrevistas foram caracterizadas como despadronizadas ou não estruturadas, cercadas por certo grau de liberdade e flexibilidade entre o pesquisador e o grupo de estudantes. Os autores supracitados apontam que há diferentes tipos de entrevistas que variam, conforme o objetivo do entrevistador. São, portanto, consideradas entrevistas do tipo padronizada ou estruturada, a despadronizada ou não estruturada e o painel. Assim, esse tipo de entrevista permite que o entrevistador tenha liberdade para redirecionar as questões, à medida que identifica cada situação. *Em geral, as perguntas são abertas e podem ser respondidas dentro de uma conversação informal* (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 197).

A capacidade de refletir é o maior recurso de conhecimento em todos os níveis da Matemática; e é importante que o aluno exponha seu pensamento a outros alunos, compartilhando leituras, conhecimentos e compreensões.

Consideramos nossos estudos de caso exploratórios e descritivos, pois nos permitem obter as informações preliminares do objeto de interesse com base na análise documental, entrevistas e observações.

Para Ludke e André:

São considerados documentos “quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano” (Phillips, 1974, p. 187). Estes incluem desde leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros

de programas de rádio e televisão até livros, estatísticas e arquivos escolares (LUDKE; ANDRÉ, 2005, p. 38).

Na perspectiva interpretativa, a coleta e análise dos dados retrataram as experiências e convicções dos estudantes, tal como a realidade é, levando-nos a formular novas hipóteses de trabalho e questões, como por exemplo, se há o interesse do estudante, por que o professor não incentiva a exploração de novos problemas que abordem os conceitos matemáticos com um enfoque particularista direcionado à formação do estudante?

No entanto, afirmamos que o resultado obtido com os estudos de caso múltiplos não poderá ser extensivo a outros grupos de estudantes ou a outras instituições de ensino, pois ele tem um enfoque particular, restrito às características do grupo investigado.

No próximo capítulo, discutiremos o papel das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Engenharia. Nesse capítulo, serão evidenciados os autores que subsidiaram sua construção, assim como informações pertinentes ao perfil do futuro profissional da Engenharia, o papel do professor e da instituição de ensino na construção do pensamento criativo, e a constituição do aprendizado independente e interdependente ao longo da vida acadêmica e profissional do estudante.



## *Capítulo 4 - A formação do profissional de Engenharia orientada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais*

---

Neste capítulo, será discutida a formação do profissional de Engenharia, de acordo com um documento oficial que rege os cursos da graduação.

Consideramos que o papel das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Engenharia visa a contemplar a formação acadêmica e profissional de seus integrantes e orientar a plena integração dos conteúdos trabalhados nas instituições de ensino. Para tanto, será imprescindível que se estabeleçam relações entre as disciplinas de formação básica, como a de matemática, com as especificidades de formação de seus alunos, permitindo-lhes que consigam ampliar seus argumentos, discursos e críticas, quando deparados por problemas que envolvam contextos específicos.

Iniciamos o capítulo, contemplando uma citação que define a Engenharia e que privilegia as mentes que a constitui.

Engenharia: eis uma profissão que é fruto do trabalho de milhares de pessoas que, ao longo dos tempos, estudaram, arriscaram, investiram anos de suas vidas, que se decepcionaram e que exultaram com os resultados de suas soluções. Mais que isso: essa é uma profissão que precisa constantemente renovar seus arsenais de “mentes de obra” bem qualificadas, inquietas, criativas, dispostas a batalhar e a ultrapassar limites, curiosas (BAZZO; PEREIRA, 2012, p. 12).

Definir a Engenharia, ressaltando seus profissionais, segue um percurso que se inicia com o ingresso do estudante no curso universitário. Sua postura frente a esse mundo que o assombra, encanta e remete a uma futura postura profissional, envolve uma imensidão de aspectos que estão relacionados a comportamentos, ética, condições psicológicas, físicas e intelectuais e a uma vida estudantil que será desenvolvida na instituição de ensino escolhida.

A vida na universidade deve estimular a criatividade e o aprimoramento intelectual, mas, é necessário que o estudante esteja motivado para acompanhar

ativamente seu processo de formação *que começa justamente conhecendo e vivenciando a instituição de ensino* (BAZZO; PEREIRA, 2012, p. 16).

Na elaboração deste capítulo, apresentamos as contribuições da pesquisa de Rugarcia; Woods; Stice (2000).

#### ***4.1 As contribuições de Rugarcia ; Woods; Stice(2000)***

Os autores supracitados apontam as poucas mudanças ocorridas na área de Educação em Engenharia nos últimos 30 anos, exceto as mudanças tecnológicas atribuídas ao uso das calculadoras e *softwares*, que apresentam métodos de solução gráfica. Mas, algumas mudanças no contexto educacional vêm ocorrendo com a participação de seus professores em conferências e oficinas de ensino que têm adotado novos enfoques em suas práticas escolares. Acrescentam que os padrões de credenciamento dos cursos de Engenharia passaram a ser implementados nas universidades americanas, cujos currículos implantados deveriam ser embasados em fundamentos físicos, matemáticos e da Engenharia, além de habilitar seus alunos às práticas da comunicação, às equipes multidisciplinares e à ética.

Na pesquisa dos autores, alternativas para o ensino tradicional nas universidades passam a ser discutidas. Eles relatam que, embora este estudo aborde práticas e experiências relatadas em universidades do México, Estados Unidos da América e Canadá, elas podem ser generalizadas para uma ampla série de países desenvolvidos ou em desenvolvimento.

As sete características que foram identificadas colocam novos desafios aos futuros engenheiros, foram elas: (1) a proliferação da informação; (2) o desenvolvimento tecnológico; (3) a globalização de mercados; (4) os ambientes ameaçados de extinção; (5) a emergência de responsabilidade social; (6) a participação de estruturas corporativas e (7) as rápidas mudanças nos diversos setores da Engenharia.

### 4.1.1 Componentes da Educação em Engenharia

Conforme os autores citados, os perfis dos engenheiros podem ser apresentados em três componentes: (i) conhecimentos: relacionados aos conceitos e eventos; (ii) as habilidades que usam no gerenciamento e aplicação de seus conhecimentos, como os computacionais, experimentais, de análise, síntese, avaliação, comunicação, liderança e trabalho em equipe e (iii) as atitudes que ditam as metas em que suas habilidades e conhecimentos são direcionados, dentre elas, valores pessoais, preferências e preconceitos.

Conhecimento é a base de dado de um profissional da engenharia, habilidades são as ferramentas usadas para manipular o conhecimento com o propósito de encontrar uma meta ditada ou fortemente influenciada por atitudes (RUGARCIA; WOODS; STICE, 2000, p. 5)

Os autores citam que hoje as disciplinas que compõem um curso de Engenharia ampliam os campos da ciência, englobando novas áreas. Citam o exemplo da graduação em Engenharia Química que parte de disciplinas tradicionais para novas que agreguem conhecimentos em Biotecnologia, Ciência Ambiental, Engenharia da Saúde e Segurança; Tecnologia de Semicondutores, além de Negócios e Finanças. Para que o profissional atenda a esse amplo espectro de novas possibilidades profissionais, os graduados também devem compreender os conceitos de Biologia, Física, Toxicologia, Política Fiscal e Engenharia da Computação e de *Software* que estão além do alcance da Engenharia Química tradicional. Assim, descrevem que para atender a essa ampla série de áreas especializadas é importante prover aos estudantes um conjunto de fundamentos da Ciência e da Engenharia, ajudando-os a integrar o conhecimento baseado nos cursos e disciplinas.

Dentre as habilidades requeridas, citam: (i) habilidades relacionadas à independência, interdependência e aprendizagem ao longo da vida<sup>42</sup>; (ii) resolução de problemas, pensamento crítico e criativo; (iii) habilidades interpessoais e de equipe; (iv) habilidades de comunicação; (v) habilidades de autoavaliação, (vi)

---

<sup>42</sup> Para outras informações ver W.G.Perry, Jr., *Forms of Intellectual and Ethical Development in the College Years*. Holt, Reinhart and Winston, New York, 1968.

habilidades de pensamento global e de integração e (vii) habilidades de gerenciamento de mudanças.

Sob outra perspectiva, a ABET *Engineering Criteria* 2000 requer que os estudantes dos programas das graduações em Engenharia adquiram habilidades para aplicar os conhecimentos das matemáticas, ciências e engenharia; de conduzir experimentos e analisar seus dados; de projetar um sistema, componente ou processo; de formar e conduzir times multidisciplinares; de identificar e solucionar problemas da Engenharia; de agir com responsabilidade profissional e ética e compreender o impacto das soluções da Engenharia no contexto social e global.

#### *4.1.2 Aprendizado Independente, Interdependente e ao longo da vida*

Rugarcia; Woods; Stice (2000) afirmam que a maioria dos estudantes entra na faculdade, como aprendiz dependente e confia a seus professores a responsabilidade de organizar e interpretar o conhecimento a ser transferido. Contudo, apontam para o papel do professor estimular que os estudantes tornem-se aprendizes independentes. Acrescentam que os

aprendizes independentes que percebem que todo o conhecimento não é conhecido e diferentes pontos de vista podem vir em tons de cinza em lugar de preto ou branco, e que sua tarefa é adquirir conhecimento pautado em uma variedade de fontes e submetê-la à sua própria avaliação crítica<sup>43</sup>(RUGARCIA; WOODS; STICE, 2000, p. 7).

Para tanto, o aluno poderá identificar os fatores pertinentes e assuntos que afetem a situação dada baseada nas diferentes perspectivas e adquira o conhecimento pertinente que ainda não possua e aplique-o para adquirir a melhor solução de um problema.

No entanto, devem ir além da aprendizagem independente. O reconhecimento da aprendizagem interdependente surge, quando os estudantes passam a ver todo

---

<sup>43</sup>Tradução nossa: *independent learners, who realize that all knowledge is not known and different points of view may come in shades of gray rather than being either black or white, and that their task is to acquire knowledge from a variety of sources and subject it to their own critical evaluation.*

conhecimento e atitudes no contexto, atribuindo a informação de uma variedade de fontes e recursos.

Os estudantes aprendem a reconhecer seus próprios estilos de aprendizagem, pontos fortes e fracos, e tomar vantagem da sinergia que vem das pessoas com uma diversidade de origens e capacidades de trabalho em grupo em direção a um objetivo comum (RUGARCIA; WOODS; STICE, 2000, p. 8).

Completam que os alunos, quando deixam a universidade e entram no mercado de trabalho, não terão mais o suporte dos livros didáticos ou professores para resolução de problemas, restando-lhes o acesso a seus colegas ou a si mesmo. Assim, ao se tornarem aprendizes interdependentes, estarão mais bem preparados para a aprendizagem ao longo de suas carreiras.

#### *4.1.3 Resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade*

No mesmo artigo, os autores citam o pensamento crítico e criativo como as principais habilidades aplicadas à resolução de problemas. Com base no pensamento crítico e criativo, os estudantes poderão identificar a meta a ser atingida e colocá-la em um contexto, formular um plano sistemático de análise, síntese e avaliação. Também poderão identificar as principais ideias e suposições subjacentes e a credibilidade dos recursos envolvidos e que são estabelecidas prioridades, observações apropriadas e inferências, de modo a garantir que argumentos convincentes reflitam a validade e plausibilidade das hipóteses ou tese.

#### *4.1.4 Obstáculos à mudança*

Assim,

um número considerável de professores de engenharia desconhece métodos educacionais alternativos, e muitos que estão cientes deles, optam por não incorporá-los em sua abordagem de ensino. Há várias

razões possíveis para essa inércia, além da resistência humana à mudança<sup>44</sup> (RUGARCIA; WOODS; STICE, 2000, p. 11).

Algumas questões encerram a pesquisa, como: Qual o equilíbrio adequado entre os fundamentos e aplicações? Cabe às instituições de modo individual enfatizar um ou outro, ou ambos devem ser integrados de maneira equilibrada no currículo do curso? O fluxo normal deve seguir a sequência de fundamentos para aplicações ou vice-versa?

Concluem que o ensino tradicional parece não ser o mais adequado para dotar os formandos em Engenharia dos conhecimentos, habilidades e atitudes que necessitam para atender às demandas das próximas décadas, e os métodos alternativos podem oferecer boas perspectivas.

Diante dessa exposição preliminar, apresentamos o papel das Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia frente à constituição do projeto pedagógico que cada instituição de ensino poderá implementar.

Instituída pelo Parecer CNE/CES 1362/2001 e publicada no Diário Oficial da União em 25/02/2002, as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Engenharia definem:

os princípios, fundamentos, condições e procedimentos da formação de engenheiros estabelecida pela Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação, para aplicação em âmbito nacional na organização, desenvolvimento e avaliação dos projetos pedagógicos dos cursos de graduação em Engenharia das Instituições de Ensino Superior (PARECER CNE/CES 11, 2002, p. 1).

O relatório inicia-se com o breve histórico do ensino de Engenharia no Brasil, apontando as características fundamentais que devem estar presentes no perfil do engenheiro diante do atual cenário global.

Na mesma diretriz, o tópico *perfil do egresso* ressalta privilegiar o profissional com sólida formação técnico científica, capaz de lidar com as atuais demandas da sociedade, envolvendo aspectos que trabalhem com a resolução de problemas em diversas situações, com visão ética e humanística.

---

<sup>44</sup> Tradução nossa: *A substantial number of engineering professors are still unaware of alternative educational methods, and many who are aware of them choose not to incorporate them into their approach to teaching. There are several likely reasons for this inertia, aside from the inevitable human resistance to change.*

Para Bazzo e Pereira

O profissional deve possuir bons conhecimentos dos fundamentos da física, da estrutura da matéria, do comportamento dos fluidos, das ligações químicas, da conversão de energia e de diversos outros aspectos do mundo real. Porém, apenas o conhecimento dos fenômenos físicos básicos não é suficiente. É preciso, antes de tudo, saber identificar, interpretar, modelar e aplicar esses fenômenos à solução de problemas concretos. [...]. A familiarização com a tecnologia requer que o profissional saiba muito de ciências físicas aplicadas e domine conhecimentos empíricos sistematizados (BAZZO; PEREIRA, 2012, p.86).

Com foco primordial na formação do profissional da Engenharia, as IES (Instituições de Ensino Superior) visam a equacionar problemas que resultem na melhoria da qualidade de ensino, envolvendo novas análises curriculares, reformulações de projetos pedagógicos e um repensar sobre as competências e habilidades específicas do profissional.

É enfatizado que o conceito de currículo passa a adotar uma estrutura flexível que incorpore as tendências do mercado atual, considerando o aspecto interdisciplinar, a formação do caráter crítico, a possibilidade de articulação direta com a pós-graduação e forte vinculação entre teoria e prática.

Dessa forma, o estudante deve buscar ser um agente ativo frente à construção do conhecimento, direcionando com mais liberdade e autonomia seu aprendizado, de acordo com suas potencialidades e interesses.

Partindo do pressuposto de que o estudante deve adotar uma postura participante, a nova definição de currículo passa a incorporar elementos fundamentais que norteiam a proposta das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Engenharia.

As atividades complementares são consideradas, como trabalhos de iniciação científica e tecnológica, visitas técnicas e eventos científicos, dentre outros. O objetivo é que o estudante de Engenharia tenha uma formação sociocultural que lhe amplie os horizontes de uma formação profissional. É importante que o estudante participe ativamente da construção de seu conhecimento e tenha o professor, como um orientador de seus estudos e experiências.

A proposta do novo conceito de currículo também aborda a adoção de um programa de estudos *coerentemente integrado* (PARECER CNE/CES 1362, 2001,

p.2) que busca facilitar a compreensão total e global do conhecimento, em seus aspectos fundamentais, sociais, culturais ou tecnológicos. Dessa forma, a palavra *transdisciplinaridade* é usada, como um fator de convergência e alinhamento entre as disciplinas, permitindo uma nova organização curricular. Repercute-se, portanto, sobre o conhecimento do estudante que deverá encadear logicamente os tópicos trabalhados e discutidos em aula, estabelecendo uma postura crítica de causas e efeitos. Como resultado, seus estudos serão fixados e organizados de modo lógico e duradouro, apoiado na incorporação de conhecimentos úteis e que serão modificados continuamente.

No currículo de um curso, salientamos que todos os assuntos exercem um papel importante, embora, a princípio, isso não parece estar claro.

No tópico *Competências e Habilidades* são destacados 14 itens que identificam o papel primordial das disciplinas básicas, como a Matemática, Estatística ou a Física e as disciplinas específicas que compõem a grade curricular.

Nas Diretrizes Curriculares, listamos os 14 itens descritos:

a) aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à Engenharia; b) projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados; c) conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos; d) planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de Engenharia; e) identificar, formular e resolver problemas de Engenharia; f) desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas; g) supervisionar a operação e a manutenção de sistemas; h) avaliar criticamente a operação e a manutenção de sistemas; i) comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica; j) atuar em equipes multidisciplinares; k) compreender e aplicar a ética e responsabilidade profissionais; l) avaliar o impacto das atividades da Engenharia no contexto social e ambiental; m) avaliar a viabilidade econômica de projetos de Engenharia; n) assumir a postura de permanente busca de atualização profissional (PARECER CNE/CES 1362, 2001, p. 4).

O engenheiro deve contar para um bom desempenho profissional com sua formação básica e com o raciocínio analítico e senso crítico aguçado.

É necessário que o profissional seja consciente de sua cidadania baseado em uma formulação completa de vários problemas e soluções que lhe tragam repercussões positivas. Cabe-lhe uma postura coerente e racional, pautada em preceitos éticos consistentes, perante a sociedade, seu empregador, clientes e concorrentes.

Portanto, a estrutura do curso deve englobar um projeto pedagógico que garanta o cumprimento das atividades relacionadas ao perfil do egresso que a IES objetiva formar. É atribuída ênfase aos projetos que envolvam trabalhos individuais e em grupo, síntese e integração dos conhecimentos adquiridos ao longo do curso, projetos multidisciplinares, participação em empresas juniores e demais atividades complementares.

No tópico *Conteúdos Curriculares*, as diretrizes apontam três núcleos de formação que integram os cursos de Engenharia (em qualquer modalidade): o núcleo de conteúdos básicos, os profissionalizantes e os específicos que contemplam uma carga horária mínima de 3600 horas.

Compondo 30% da carga horária mínima total do curso, o núcleo de conteúdos básicos é formado por disciplinas fundamentais, visando à constituição do perfil do egresso, competências e habilidades. Dentre elas, citamos Matemática, Física, Informática, Química, Administração, Humanidades, Ciências Sociais e Cidadania.

Na Engenharia, é comum o uso de tabelas, gráficos e fórmulas matemáticas que correspondem a uma representação de uma situação real, envolvendo a relação entre variáveis ou a evolução de algum fenômeno, ou evento. É importante que sempre ocorra o hábito de interpretar seus significados e resultados. Assim, as disciplinas de formação básica fornecem fundamentação às disciplinas específicas que constituem as modalidades, abordando temáticas que serão trabalhadas ao longo de todo o curso.

Os dados do Quadro 4 apresentam os conteúdos gerais das disciplinas básicas.

Quadro 4 - Conteúdos gerais das disciplinas básicas

Conteúdos gerais das disciplinas básicas		
<p><b>Matemática</b></p> <p>Cálculo vetorial. Cálculo diferencial e integral. Geometria analítica. Cálculo numérico. <b>Álgebra Linear</b><sup>45</sup>. Probabilidade e estatística.</p>	<p><b>Desenho</b></p> <p>Representação de forma e dimensão. Convenções e normalização. Utilização de elementos gráficos na interpretação e solução de problemas.</p>	<p><b>Resistência dos materiais</b></p> <p>Tensões e deformações nos sólidos. Análise de peças sujeitas a esforços simples e combinados. Energia de deformação.</p>

<sup>45</sup> Grifo nosso.

<b>Conteúdos gerais das disciplinas básicas</b>		
<b>Química</b> Estrutura e propriedades periódicas dos elementos e compostos químicos. Tópicos básicos da físico-química.	<b>Fenômenos de transporte</b> Mecânica dos fluidos. Transferência de calor e de massa.	<b>Eletricidade</b> Circuitos. Medidas elétricas e magnéticas. Componentes e equipamentos elétricos e eletrônicos.
<b>Processamento de dados</b> Conceitos básicos de computação. Aplicações típicas de computadores digitais. Linguagens básicas e sistemas operacionais. Técnicas de programação. Desenvolvimento de sistema de Engenharia. Simulação e técnicas de otimização.	<b>Física</b> Medidas físicas. Fundamentos de mecânica clássica. Teoria cinética. Termodinâmica. Eletrostática e eletromagnetismo. Física ondulatória. Introdução à mecânica quântica e relativista. Introdução à física atômica e nuclear.	<b>Mecânica</b> Estática, cinemática e dinâmica do ponto e do corpo rígido.

Fonte: Adaptado de Bazzo; Pereira (2012, p. 96)

Com 15% da carga horária mínima total, o núcleo de conteúdos profissionalizantes é constituído por disciplinas que integram as diversas modalidades da Engenharia<sup>46</sup>, como Algoritmos e Estruturas de Dados, Circuitos Lógicos, Eletromagnetismo, Ergonomia e Segurança do Trabalho, Matemática Discreta, Métodos Numéricos, Modelagem, Análise e Simulação de Sistemas, Sistemas Operacionais e outras.

Com o complemento da carga mínima total restante, o núcleo de conteúdos específicos *se constitui em extensões e aprofundamentos dos conteúdos do núcleo de conteúdos profissionalizantes, bem como de outros conteúdos destinados a caracterizar modalidades* (PARECER CNE/CES 1362, 2001, p. 7). Vale salientar que esses conteúdos serão propostos exclusivamente pela IES e devem abranger os conhecimentos científicos, tecnológicos e instrumentais que assegurem o desenvolvimento das competências e habilidades propostas pelas diretrizes.

Como atividade obrigatória, os estágios supervisionados contemplam 160 horas totais do curso. Também é considerada atividade obrigatória a realização do

<sup>46</sup> Os campos de atuação da Engenharia são bastante amplos o que acarreta a existência de diversas modalidades. Dentre elas, citamos: Aeronáutica, Agrícola, Agrimensura, Agronomia, Alimentos, Cartográfica, Civil, Computação, Elétrica, Florestal, Industrial, Materiais, Mecânica, Metalúrgica, Minas, Naval, Pesca, Produção, Química, Sanitária e Têxtil.

trabalho de conclusão de curso (TCC) englobando os conhecimentos desenvolvidos, além de trabalhar com a visão crítica sobre os assuntos tratados.

No mesmo Parecer, as diretrizes apontam para os seguintes princípios que devem nortear a elaboração de currículos desenvolvidos pelas IES. São eles: a) a IES terá total e ampla liberdade para compor a carga horária, visando à integralização dos conteúdos, assim como as unidades de estudos a serem ministradas; b) as disciplinas que compõem o núcleo de conteúdos específicos, não devem ultrapassar 50% da carga horária total do curso; c) deve ser evitado o prolongamento desnecessário do curso; d) devem ser estimuladas diferentes habilitações em um mesmo programa de modo que o profissional esteja apto a exercer a profissão em condições diversas; e) o estudante deve ser estimulado a desenvolver a autonomia em seus aspectos profissionais e intelectuais; f) os conhecimentos adquiridos fora da faculdade devem ser encorajados, sobretudo, aqueles considerados relevantes à área de formação; g) os estágios supervisionados e a participação em atividades de extensão devem fortalecer a articulação entre teoria e prática; h) as avaliações periódicas devem incluir instrumentos variados que forneçam informações aos docentes e discentes sobre o desenvolvimento das atividades didáticas.

A implantação e o desenvolvimento das diretrizes curriculares serão acompanhados e permanentemente avaliados com o propósito de realizar ajustes necessários frente às mudanças e/ou evoluções tecnológicas e sociais.

#### *4.2 Resumo e Conjecturas*

Para adentrar ao mundo da Engenharia, o estudante depara-se com encantos e frustrações relacionados às condições psicológicas, físicas e intelectuais que serão desenvolvidas na instituição de ensino e, mais tarde, no mercado de trabalho. Portanto, é evidente o papel fundamental que a instituição de ensino escolhida desenvolve na vida estudantil e profissional.

De acordo com Rugarcia, Woods; Stice (2000), as disciplinas que compõem um curso de Engenharia englobam diversas áreas que possibilitam que o profissional amplie o espectro das áreas de atuação.

O profissional precisa compreender o impacto das soluções da Engenharia, estabelecendo as prioridades e as observações apropriadas de garantir argumentos que verifiquem a validade das hipóteses ou teses nos contextos sociais e globais.

Além disso, cabe a nós, professores, prover os diferentes pontos de vista, para que o aluno adquira sua independência ao longo da vida acadêmica com base na variedade de fontes de informação e diferentes perspectivas. Como afirmam Rugarcia; Woods, Stice (2000), fazer com que o aluno vá além da aprendizagem independente. É na aprendizagem interdependente que ele adquire conhecimento pautado na identificação de seus próprios estilos de aprendizagem.

Uma das considerações que ressaltamos atrela-se aos resultados de Rugarcia; Woods; Stice (2000) em que muitos professores de Engenharia têm ciência de métodos alternativos que podem ser incorporados a suas aulas, porém, optam por não o fazê-lo. Cabe-nos, portanto, a dúvida a respeito da provável inércia que paira sobre a maioria dos professores e/ou instituições de ensino.

Conforme exposto pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Engenharia, as IES devem privilegiar o aspecto interdisciplinar, considerando as estruturas curriculares flexíveis.

É importante que com base em seus estudos, o estudante adquira os conhecimentos úteis que foram fixados e organizados de maneira lógica e duradoura.

Outro fator que ressaltamos a respeito dos princípios que norteiam as diretrizes, é o estímulo às diferentes habilitações que um mesmo programa deve proporcionar ao futuro egresso. É importante que ele possa exercer a profissão em contextos diversos. Atribuimos esse princípio aos diversos contextos que a Engenharia pode seguir e que, para tanto, o estudante deverá estar preparado. É o início de uma vida profissional constituída por alternativas que poderão requerer conhecimentos adquiridos nos três núcleos de formação do estudante (básico, profissionalizante e específico) propiciado pela IES. É a valorização dos aspectos interdisciplinar, interdependente e independente do estudante.

No próximo capítulo, faremos uma descrição da abordagem adotada pelos autores David C. Lay e David Poole em seus livros de Álgebra Linear. O objetivo será apresentar a abordagem adotada pelos autores para exposição do tema autovalores e autovetores; pautados na exposição e estudo de um seus exemplos, fizemos a escolha pelo problema usado, como instrumento diagnóstico de nossa Tese.

## Capítulo 5 - A descrição de livros de Álgebra Linear

---

O presente capítulo apresentará a descrição dos capítulos referentes ao tema autovalor e autovetor em dois livros: (1) *Álgebra Linear* de autoria de David Poole (2004) e *Álgebra Linear e suas aplicações* de autoria de David C. Lay (1999).

O primeiro livro está entre os que compõem as referências bibliográficas básicas da instituição de ensino investigada, que constitui a investigação piloto. Assim, um primeiro contato será importante para reconhecer quais livros são indicados pelas instituições de ensino, assim como ter um panorama geral dos exercícios e problemas propostos, de suas representações e a abordagem adotada pelos autores.

Já o segundo livro está entre os citados nas referências bibliográficas complementares do plano de ensino de Álgebra Linear da instituição que fez parte da investigação piloto e da primeira instituição que constituiu o Estudo de Caso I.

Nosso objetivo será expor a abordagem adotada pelos autores ao tratar o tema autovalor e autovetor e descrever os principais conceitos relacionados ou conhecimentos prévios que se fazem necessários para a apresentação dos exemplos e resolução dos exercícios expostos. Também destacaremos que o problema proposto em nossa investigação será retirado do segundo livro. A justificativa para a adoção desse problema é apresentada no Capítulo 6 da presente pesquisa.

### 5.1 O livro: *Álgebra Linear de David Poole (2004)*

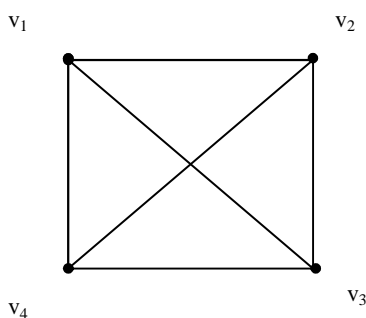
O objetivo desta seção é expor como o objeto matemático autovalor e autovetor é abordado pelo autor David Poole no livro *Álgebra Linear*, identificando os conceitos preliminares requeridos e os tipos de abordagens estabelecidas, como a matricial, algébrica, geométrica, etc.

O autor introduz o capítulo Valores e Vetores Próprios com o conceito de processo iterativo ou Sistema Dinâmico sobre grafos. Os problemas iniciais relacionados a grafos introduzem o conceito de autovalor e autovetor também

chamados de valor característico e vetor característico. Com base nos problemas iniciais, o objetivo foi fazer com que o leitor compreenda o comportamento dos exemplos apresentados nos capítulos anteriores do livro que destacam as Cadeias de Markov e os modelos de *Leslie*, para o crescimento populacional, que exibem estados estacionários em algumas situações.

O primeiro exemplo apresentado envolve grafos. O autor cita que um grafo completo é aquele que cada vértice é adjacente a todos os outros vértices. A denotação  $K_n$  é um grafo completo com  $n$  vértices. A Figura 14 mostra uma representação de  $K_4$ .

Figura 14 - Grafo Completo



Fonte: Adaptado de Poole (2004, p. 230)

Os problemas iniciais expostos pelo autor, ainda sem solução, trazem os primeiros conceitos de autovalor e autovetor. O objetivo foi que o leitor, com o estudo dos conceitos que seguem o capítulo, volte-se aos problemas iniciais e consiga resolvê-los.

Os problemas 1 a 8 introduzem o capítulo:

**Problema 1:** Considere um vetor qualquer  $\mathbf{x}$  em  $R^d$ , com coordenadas não negativas, e utilize tais coordenadas para nomear os vértices de  $K_4$  de maneira que  $v_1$  seja chamado de  $x_1$ , e assim por diante. Determine a matriz de vértices  $A$  de  $K_4$  e renomeie os vértices do grafo com as coordenadas correspondentes de  $A\mathbf{x}$ . Repita o procedimento para vários vetores  $\mathbf{x}$  e explique, em termos do grafo, como os novos nomes podem ser determinados a partir dos velhos.

**Problema 2:** Agora, faça uma iteração do processo descrito no Problema 1 – ou seja, para uma dada escolha de  $\mathbf{x}$ , renomeie os vértices como antes e em seguida aplique  $A$  novamente (depois de novo, e de novo) até que surja um padrão. Como as coordenadas dos vetores se tornarão números bastante elevados, faremos uma

mudança de escala, dividindo cada coordenada do vetor por 1/4 depois de cada iteração. Assim, se os cálculos nos fornecem o vetor

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ nós o substituiremos por } \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

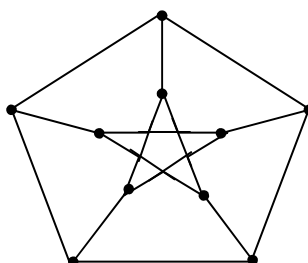
Observe que esse processo garante que a maior coordenada de cada vetor ficará sempre igual a 1. Faça isso para  $K_4$ , depois para  $K_3$  e para  $K_5$ . Itere pelo menos dez vezes, dando os resultados com precisão de, no mínimo, até a segunda casa decimal. O que parece acontecer?

**Problema 3:** Você deve ter notado que, em cada caso, os vetores obtidos no processo de iteração se aproximam de um determinado vetor (um vetor em estado estacionário!). Nomeie os vértices do grafo completo com as coordenadas desse vetor e aplique mais uma vez a matriz de vértices  $A$  (sem mudanças de escala). Qual a relação entre as novas coordenadas e as anteriores?

**Problema 4:** Faça uma conjectura para o caso geral  $K_n$ . Qual será o vetor em estado estacionário? O que acontecerá se nomearmos  $K_n$  com as coordenadas desse último vetor e aplicarmos a matriz de adjacência  $A$ , sem mudanças de escala?

**Problema 5:** Na Figura 15, mostramos o **grafo de Petersen**. Repita o procedimento dos Problemas de 1 a 3 com esse grafo

Figura 15 - Grafo de Petersen



Fonte: Adaptado de Poole (2004, p. 231)

Vamos agora explorar o procedimento descrito anteriormente com outros tipos de grafos para ver se eles se comportam da mesma forma. O **ciclo**  $C_n$  é o grafo de  $n$  vértices apresentado em um formato cíclico.

**Problema 6:** Repita o procedimento descrito nos problemas de 1 a 3 com ciclos  $C_n$ , para alguns valores ímpares de  $n$ , e estabeleça uma conjectura para o caso geral.

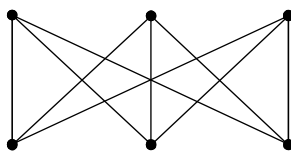
**Problema 7:** Repita o Problema 6, utilizando valores pares de  $n$ . O que acontece? (POOLE, 2004, p. 231).

Após os problemas 1 a 7, o autor apresenta o grafo bipartido completo

em que seus vértices admitem uma partição em conjuntos  $U$  e  $V$  de maneira que cada vértice de  $U$  seja adjacente a todos os vértices de  $V$ , e vice-versa. Se  $U$  e  $V$  tiverem, cada um,  $n$  vértices, o grafo será denotado por  $K_{n,n}$  (POOLE, 2004, p. 232).

A Figura 16 apresenta um **grafo bipartido** completo denotado por  $K_{3,3}$ .

Figura 16 - Grafo Bipartido



Fonte: Adaptado de Poole (2004, p. 232)

**Problema 8:** Repita o procedimento descrito nos problemas de 1 a 3 para grafos bipartidos completos  $K_{n,n}$  para vários valores de  $n$ . O que acontece? (POOLE, 2004, p. 232).

O autor citado acrescenta que, no final do capítulo, o leitor terá condições de explicar as observações que fez nesta Introdução.

Na seção intitulada *Introdução aos Valores e Vetores Próprios*, o autor apresenta o significado do adjetivo germânico *eigen* que significa “próprio” ou “característico de”. Assim, os valores e vetores próprios são característicos de uma matriz no sentido de conferirem informações importantes sobre sua natureza (POOLE, 2004, p. 232). A letra  $\lambda$  (*lambda*), letra grega equivalente ao  $L$  em português designa os autovalores que, antigamente, eram chamados de valores latentes.

Para iniciarmos o estudo do capítulo exposto por Poole (2004) é necessário compreender a noção de vetor em estado estacionário. A discussão desse conceito ocorreu no capítulo anterior de seu livro com base na exposição das aplicações: Cadeias de *Markov* e Modelos de *Leslie* para crescimento populacional. No contexto das Cadeias de *Markov* com matriz de transição  $P$ , um vetor em estado estacionário  $\mathbf{x}$ , satisfaz a equação matricial  $P \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{x}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^n$ , já para uma Matriz de *Leslie*  $L$ , um vetor em estado estacionário corresponde a um vetor

população  $\mathbf{x}$  que satisfaz a equação matricial  $L \cdot \mathbf{x} = r \cdot \mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{x}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^m$  e em que  $r$  representa a taxa de crescimento do estado estacionário.

O autor apresenta que dada uma matriz quadrada  $A$ , a existência de vetores não nulos  $\mathbf{x}$  que tornam o valor de  $A \cdot \mathbf{x}$  um múltiplo de  $\mathbf{x}$ , corresponde ao **problema de autovalor**<sup>47</sup> mais central da Álgebra Linear. Acrescenta que *esse tipo de problema tem aplicações por todas as áreas da Matemática, e fora dela também* (POOLE, 2004, p. 232).

A seguir, apresentamos a definição estabelecida pelo autor do conceito de autovalor e autovetor: **Definição:** Considere  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Um escalar  $\lambda$  é chamado de **autovalor** de  $A$  se existe um vetor não nulo  $\mathbf{x}$  tal que  $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ . Tal vetor é chamado de um **autovetor** de  $A$  correspondente a  $\lambda$  (POOLE, 2004, p. 233).

Nos estudos de Fuentes (2008), a importância da axiomatização da Álgebra Linear relaciona-se à generalização e unificação e, em consequência, à simplificação dos métodos de resolução de problemas.

Os exemplos apresentados abordam conceitos prévios relacionados à disciplina, dentre eles: subespaço nulo, matrizes linearmente dependentes e independentes, o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis, base, combinação linear, transformações lineares e corpo. Acrescenta o conceito de autossobrespaço de  $\lambda$ , que é denotado por  $E_\lambda$ .

Ressaltamos a importância atribuída pelo autor às interpretações geométricas da noção de autovetor. Conforme expõe no prefácio do livro, o capítulo apresenta autovalores, usando “autofiguras” como apoio visual.

A demonstração do Teorema de Perron é vista heurísticamente em um primeiro momento para depois ser vista formalmente, com o emprego de um argumento geométrico nos dois casos. A natureza da decomposição por valores singulares é também explicada informalmente com o uso de um argumento geométrico (POOLE, 2004, p. xiii).

Os exemplos apresentados seguem a ordem:

**Exemplo 1.** Mostre que  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  é um autovetor de  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  e encontre o autovalor correspondente.

---

<sup>47</sup> Grifo do autor.

**Exemplo 2.** Mostre que 5 é um autovalor de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  e determine todos os autovetores correspondentes a esse autovalor.

**Exemplo 3.** Mostre que  $\lambda=6$  é um autovalor de  $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  e

encontre uma base para seu autossobespaço.

**Exemplo 4.** Encontre geometricamente os autovalores de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Exemplo 5.** Encontre todos os autovalores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  do

Exemplo 1.

**Exemplo 6.** Interprete a matriz do Exemplo 5 como uma matriz sobre  $\mathbb{Z}_3$  e encontre autovalores nesse corpo.

**Exemplo 7.** Determine os autovalores de  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (a) sobre  $R$  e (b) sobre os números complexos  $C$  (POOLE, 2004, p. 236).

No mesmo capítulo, o autor segue com a definição de determinantes, necessária para o cálculo de valores e vetores próprios de matrizes  $n \times n$ .

**Definição:** Seja  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ . Então, o **determinante** de  $A$  é

$$\text{o escalar } \det a = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(POOLE, 2004, p. 240).

O autor prossegue com a seção Valores e Vetores Próprios de Matrizes  $n \times n$ . Lembra que  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  se, e somente se,  $A - \lambda I$  for não invertível. Isso ocorre se, e somente se,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Assim, os autovalores de uma matriz  $A$  são precisamente as soluções  $\lambda$  da equação  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Quando desenvolvemos  $\det(A - \lambda I)$ , obtemos um polinômio em  $\lambda$ , chamado de **polinômio característico** de  $A$ . Já a equação  $\det(A - \lambda I) = 0$  é chamada de **equação característica** de  $A$ . Assim, temos como polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

O autor faz uma breve citação ao Teorema Fundamental da Álgebra (ANEXO C – (b)) que diz que um polinômio de grau  $n$ , com coeficientes reais ou complexos, tem no máximo  $n$  raízes distintas. Assim, uma matriz  $n \times n$ , com elementos reais ou complexos, tem no máximo  $n$  autovalores distintos.

Poole (2004) prossegue com um resumo do procedimento que será abordado para a determinação de autovalores e autovetores (autossubespaços) de uma matriz.

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .

1. Encontre o polinômio característico  $\det(A - \lambda I)$  de  $A$ .
2. Ache os autovalores de  $A$  determinando os valores de  $\lambda$  na equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
3. Para cada autovalor  $\lambda$ , determine o subespaço anulado pela matriz  $A - \lambda I$ . Esse é o autossubespaço  $E_\lambda$ , formado pelos autovetores de  $A$  (não nulos) que correspondem a  $\lambda$ .
4. Encontre uma base para cada autossubespaço. (POOLE, 2004, p. 264)

Os exemplos apresentados seguem a ordem:

**Exemplo 1.** Encontre os autovalores e os correspondentes

autossubespaços de  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

**Exemplo 2.** Encontre os autovalores e os correspondentes

autossubespaços de  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**Exemplo 3.** Os autovalores de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$  são

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$  e  $\lambda_4 = -2$ , pelo Teorema 1. [De fato, o polinômio característico é  $P(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)(-2 - \lambda)$ . Observe que matrizes diagonais são casos particulares do Teorema 1, já que uma matriz diagonal é ao mesmo tempo triangular superior e inferior. Autovalores capturam muitas das informações importantes sobre o comportamento de uma matriz.

Quando conhecemos os autovalores de uma matriz, podemos deduzir muitas coisas sem nenhum trabalho suplementar.

**Exemplo 4.** Calcule  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$  (POOLE, 2004, p. 267)

No exemplo 1, o autor faz referência ao Teorema da Fatoração (ANEXO C – (a)) para determinação do polinômio característico e da equação característica. Já o Teorema Fundamental da Álgebra define a multiplicidade algébrica de um autovalor como sua multiplicidade como raiz da equação característica. Logo em seguida, define-se a multiplicidade geométrica de um autovalor  $\lambda$  como  $E_\lambda$ , a dimensão do autossobespaço associado a  $\lambda$ . É importante uma comparação entre estas duas noções de multiplicidade.

O exemplo 2 faz referência ao Teorema do Determinante de uma Matriz Triangular (ANEXO C - (d)).

Já no exemplo 3, o autor faz referência a outros quatro teoremas (ANEXO C - (e), (f), (g), (h)) e estende o Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis incluindo os resultados provados no capítulo (ANEXO C - (i)).

No final do exemplo 3, Poole (2004) acrescenta que os autovalores permitem capturar muitas informações a respeito do comportamento de uma matriz. Para tanto, apresenta o Teorema (ANEXO C - (e)) como um dos mais importantes a esse respeito.

Para o exemplo 4, Poole (2004), faz referência ao Teorema (ANEXO C - (j)) que envolve os autovalores de potência e da inversa de uma matriz.

O autor ressalta que as matrizes triangulares e diagonais são interessantes no sentido de que seus autovalores manifestam-se de forma transparente. Destaca que seria interessante relacionar uma matriz a outra matriz triangular ou diagonal, porém os autovalores não são preservados nessa conversão e apresentam um tipo diferente de transformação de uma matriz que preserva seus autovalores. Para tanto, inicia a seção Semelhança e Diagonalização com a definição de Matrizes Semelhantes. Poole (2004, p. 273) apresenta **Definição:** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Dizemos que  $A$  é **semelhante a**  $B$  se existir uma matriz  $n \times n$  invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP = B$ . Se  $A$  é semelhante a  $B$ , escrevemos  $A \sim B$ .*

O autor destaca que a relação de equivalência permite que objetos partilhem propriedades importantes. Segue com dois teoremas (ANEXO C – (l) e (m)) para matrizes semelhantes.

Na seção Diagonalização, destaca que a melhor situação possível é quando uma matriz quadrada é semelhante a uma matriz diagonal. Apresenta que a possibilidade disso ocorrer relaciona-se aos autovalores e autovetores da matriz.

Poole (2004, p. 274) segue com a definição de matriz diagonalizável *Uma matriz  $n \times n$  é diagonalizável se existe uma matriz diagonal  $D$  tal que  $A$  seja semelhante a  $D$ , ou seja, se existe uma matriz  $P$   $n \times n$  invertível tal que  $P^{-1}AP = D$ .*

O autor apresenta o Teorema (ANEXO C – (n)) que acrescenta o conceito de autovetores linearmente independentes para identificação de uma matriz diagonalizável.

### ***5.1.1 Resumo e Conjecturas***

Poole (2004) introduz o tema sobre autovalores e autovetores com o conceito de método iterativo com base em um sistema dinâmico sobre grafos. Destaca que o tema permitirá que sejam compreendidos conceitos expostos em capítulos anteriores que destacam as *Cadeias de Markov* e os *Modelos de Leslie*, que tratam do crescimento populacional a partir de vetores em estado estacionário.

O autor atribui seu livro às recomendações feitas pelo LACSG que propõe o estudo da Álgebra Linear pautado em matrizes.

Nos problemas iniciais é possível identificar a intenção do autor ao apresentar os primeiros conceitos relativos ao vetor em estado estacionário, com base na iteração do processo. Ele descreve o vetor estacionário, a partir do surgimento de um padrão estabelecido nos vértices do grafo. Em seus problemas, questiona sobre o que acontecerá se forem aplicadas, pelo menos, dez iterações e que o leitor faça conjecturas para o caso geral  $K^n$ , estendendo o estudo para grafos de  $n$  vértices.

Consideramos que problemas, como os que introduzem o tema em estudo apresentam uma abordagem que visa a facilitar a compreensão e a construção das primeiras concepções do aluno em relação ao objeto de estudo. Os exemplos permitem que o aluno estabeleça conjecturas pautadas na generalização de padrões e identifique em seu estudo conceitos-chave que regem não só o objeto matemático

autovalor e autovetor, mas também conceitos relacionados ao estudo de grafos e de sistemas dinâmicos.

O autor considera como problema de autovalor mais central da Álgebra Linear a existência de vetores não nulos  $x$  que tornam o valor de  $A.x$  um múltiplo de  $x$ , e que é obtido a partir de  $A.x = \lambda.x$ .

Há o reconhecimento da necessidade de conhecimentos prévios, para que o aluno possa iniciar o estudo do tema e o apelo às representações geométricas.

Contudo, destacamos que não desconsidera os exemplos e os exercícios tradicionais.

Estabelece relações com teoremas e propriedades, dentre eles, o Teorema Fundamental da Álgebra que define a multiplicidade algébrica e geométrica de um autovalor. Com base nesse teorema, é possível que o aluno depreenda que para uma matriz  $n \times n$ , com elementos reais ou complexos tem no máximo  $n$  autovalores distintos.

A seguir, apresentaremos a descrição do livro Álgebra Linear de autoria de David C. Lay. A escolha pela descrição deste livro ocorre por ele fazer parte da referência bibliográfica complementar da primeira instituição investigada e que constituiu a investigação piloto e também da instituição que participou do Estudo de Caso I. Do mesmo modo, como a apresentação desta seção, nosso objetivo é descrever a abordagem adotada pelo autor ao situar o tema de autovalores e autovetores.

Consideramos que a descrição de mais um livro poderá nortear a escolha de exemplos, exercícios e problemas e um repensar sobre as possíveis mudanças que podem ocorrer na apresentação do tema pelas instituições e pelo corpo docente, desvencilhando-se das práticas sistemáticas e tradicionais.

## 5.2. *O livro: Álgebra Linear e suas aplicações de David C. Lay<sup>48</sup> (1999)*

Como descrito pelo autor, David C. Lay, o livro *Álgebra Linear e suas aplicações* propõe-se a ajudar os alunos, com maturidade de dois semestres completos de Matemática em nível superior, a dominar os conceitos e habilidades básicas que usarão mais tarde em suas carreiras. Tais conceitos e habilidades compreendem conhecer os conceitos fundamentais que constituem a disciplina, assim como suas aplicações.

Para tanto, o autor segue as recomendações do *Linear Algebra Curriculum Study Group*, que se baseou em uma cuidadosa e minuciosa pesquisa sobre as necessidades reais dos alunos e dos profissionais de muitos campos que têm a Álgebra Linear, como disciplina de serviço.

Lay (1999) afirma que a Álgebra Linear é a mais interessante e mais útil disciplina de Matemática de toda a graduação, enfatizando que os conceitos são tão importantes como os cálculos e que na vida profissional os computadores passarão a fazer todos os cálculos. Contudo, é preciso saber interpretar os resultados e explicar esses dados a outras pessoas.

O autor supracitado aponta que, para que os exercícios de determinada seção sejam resolvidos, é necessário que os das seções precedentes tenham sido também resolvidos. Dessa forma, ressalta a importância dos conceitos preliminares que compõem os objetos matemáticos em estudo.

O capítulo de Autovalores e Autovetores aparece, razoavelmente, cedo no texto com forte ênfase geométrica. Os teoremas são demonstrados, tendo-se em mente que os alunos são principiantes, e os exercícios variam de rotineiros a conceituais. Quanto aos exercícios conceituais, o autor expõe que estes necessitam de maiores reflexões, buscando aprofundar a compreensão, em lugar de se limitar a cálculos mecânicos.

---

<sup>48</sup> David C. Lay fez bacharelado na Universidade de Aurora, em Illinois, mestrado e doutorado na Universidade da Califórnia em Los Angeles. É professor e pesquisador em Matemática, desde 1996, sobretudo na Universidade de Maryland, em College Park. Também foi professor visitante na Universidade de Amsterdã, na Universidade Livre de Amsterdã e na Universidade de Kaiserslautern, na Alemanha. Publicou mais de 30 artigos de pesquisa em análise funcional e álgebra linear (Fonte: *Álgebra Linear e suas aplicações*, 2ª. ed., 1999)

O mesmo capítulo tem como exemplo introdutório o Sistema Dinâmico Discreto e o estudo de R. H. Lamberson e seus colegas, que não mediram esforços para compreender a dinâmica populacional das corujas malhadas em risco de extinção em razão da exploração das florestas do noroeste do Pacífico. O estudo do grupo pretendia convencer o governo federal americano sobre o risco de extinção da coruja malhada, o que mobilizou ambientalistas matemáticos a estudarem o ciclo de vida da espécie, modelando a dinâmica da população baseada em uma matriz de fase que corresponde a uma equação de diferenças da forma  $x_{k+1} = Ax_k$ . Tal equação chamada de sistema dinâmico discreto descreve a variação de um sistema em função do tempo. O modelo descrito prevê a extinção da espécie e é apresentado, posteriormente, no mesmo capítulo.

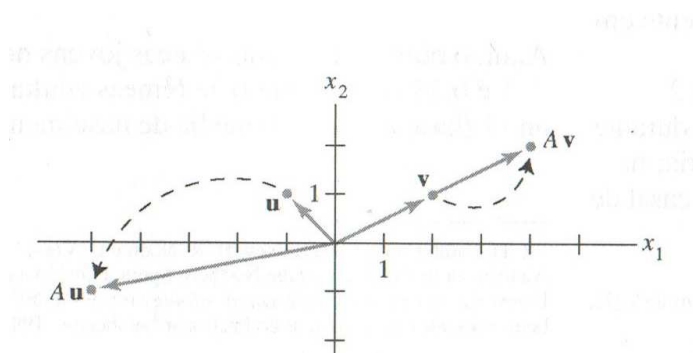
Lay (1991, p. 272) expõe que o objetivo do capítulo foi *dissecar a ação de uma transformada linear  $x \mapsto Ax$  em elementos que sejam facilmente visualizáveis*. São destacadas que as principais aplicações serão em torno de sistemas dinâmicos discretos, mas o objeto matemático autovalor e autovetor aparece em situações muito mais gerais do que estas, englobando equações diferenciais e sistemas dinâmicos contínuos, que fornecem informações críticas em projetos de Engenharia e surgem de modo natural nas áreas de Física e Química.

A abordagem usada pelo autor é matricial, e os exemplos dispõem de representações geométricas. O conceito de autovalor e autovetor desenvolve-se com base em uma transformação  $x \mapsto Ax$  que desloca vetores em muitas direções.

Na primeira seção do capítulo, são apresentados cinco exemplos.

**Exemplo 1.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , e  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . As imagens de  $u$  e  $v$  na multiplicação por  $A$  são mostradas na Figura 17. De fato,  $Av$  é simplesmente  $2v$ . Assim,  $A$  apenas “estica”, ou dilata  $v$ .

Figura 17 - Efeitos da multiplicação por A



Fonte: Lay (1999, p. 272)

**Exemplo 2.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ , e  $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ . Será que  $u$  e  $v$  são autovetores de  $A$ ?

**Exemplo 3.** Mostre que 7 é um autovalor para a matriz  $A$  do Exemplo 2 e determine os autovetores associados.

**Exemplo 4.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ . Um autovalor de  $A$  é 2. Determine uma base para o autoespaço associado.

**Exemplo 5.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Os autovalores de  $A$  são 3, 0 e 2. Os autovalores de  $B$  são 4 e 1. O que significa para uma matriz  $A$  ter um valor igual a 0, como no exemplo 5? (LAY, 1999, p. 276).

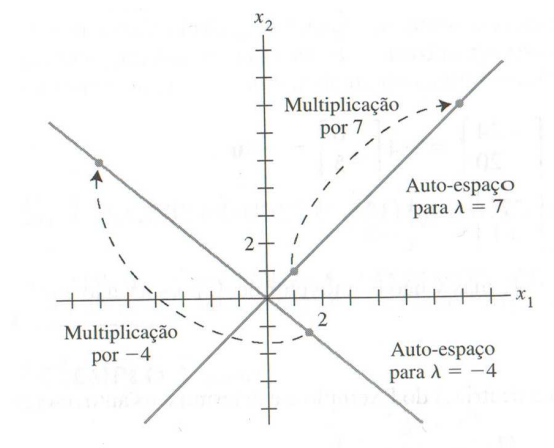
Na exposição dos exemplos anteriores, Lay (1999, p. 272) faz uso de expressões como a matriz  $A$  “estica” ou dilata  $v$ , apresentada na Figura 17 do Exemplo 1, os efeitos da multiplicação por  $A$ . A abordagem apresentada em um exemplo inicial deixa claro o papel de  $A$  em relação aos vetores  $u$  e  $v$ , direcionando o aluno à compreensão do conceito de autovalor e autovetor. Acrescenta que iremos procurar por vetores que são transformados por  $A$  em múltiplos escalares deles mesmos.

Segue com a definição:

Um **autovetor** de uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , é um vetor não-nulo  $\mathbf{x}$  tal que  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  para algum escalar  $\lambda$ . Um escalar  $\lambda$  é chamado de **autovalor** para  $A$  se existe solução não trivial  $\mathbf{x}$  para  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ; este  $\mathbf{x}$  é chamado de *autovetor associado a  $\lambda$*  (LAY, 1999, p. 273).

Para a solução do exemplo 3, é preciso que tenhamos conhecimento prévio de vetores linearmente dependentes e independentes e escalonamento de matrizes para alcançar a solução não trivial da equação  $A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$ . Conceitos são estabelecidos durante a própria resolução do exercício, como por exemplo, **autoespaço** de  $A$  associado a  $\lambda$  que corresponde a um subespaço do  $\mathbb{R}^n$ , formado pelo vetor nulo e por todos os autovetores associados a  $\lambda$ . A representação geométrica permite a visualização da ação geométrica da transformada  $x \mapsto Ax$  em cada subespaço.

Figura 18 - Autoespaços para  $\lambda = -4$  e  $\lambda = 7$



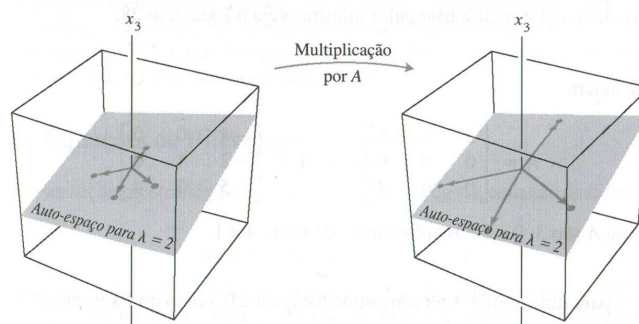
Fonte: Lay (1999, p. 274)

No exemplo 4, a relação se estabelece com o conceito de base. A Figura 19

que ilustra o resultado do exemplo apresenta que a matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$  age como

uma **expansão** no autoespaço.

Figura 19 -  $A$  age como uma expansão no autoespaço



Fonte: Lay (1999, p. 116)

Para a resolução do exemplo 5, o autor apresenta o primeiro teorema exposto no capítulo (Teorema 1 – ANEXO D).

Os conceitos que seguem no capítulo, fazem referência a outro teorema (Teorema da Matriz Invertível).

O autor prossegue o capítulo de Autovalores e Autovetores apresentando a *Equação Característica e Polinômio Característico de A*. Um exemplo simples e específico conduz a um exemplo geral. Todas as soluções levam ao Teorema da Matriz Invertível e ao cálculo de seu determinante, cujas propriedades são resumidas e usadas para o estudo de autovalores. Como nos demais exemplos expostos no capítulo, representações geométricas enriquecem a visualização e compreensão dos conceitos apresentados.

O exemplo 1 é apresentado e sua solução pede determinar todos os escalares  $\lambda$  para os quais a equação matricial tem solução não trivial, ou seja, cujas incógnitas são independentes. A equação matricial com as incógnitas  $\lambda$  e  $x$  é transformada na equação escalar  $\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$  que apresenta apenas uma incógnita. Assim, estende a ideia para matrizes  $n \times n$ .

**Exemplo 1.** Determine os autovalores de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ . (LAY, 1999, p. 281)

Na exposição do conceito de determinante, o autor atribui a comparação com o volume do paralelepípedo. Acrescenta que uma matriz  $n \times n$  escalonada obtida de  $A$ , apenas com base nas operações de substituição e troca de linhas (sem mudança de escala) em que  $r$  representa o número de operações realizadas de trocas de linhas leva à seguinte propriedade:

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r & \text{(produto dos pivôs de } U) & \text{quando } A \text{ é invertível} \\ 0 & & \text{quando } A \text{ não é invertível} \end{cases}$$

Assim,  $\det A$  é igual a  $(-1)^r$  vezes o produto dos elementos da diagonal principal  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  de  $U$ . Se  $A$  é invertível, então,  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  são todos pivôs. Caso contrário, pelo menos  $u_n$  é igual a zero e, então, o produto  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  é igual a zero.

Segue com o exemplo 2. Na solução, são identificadas que existem duas possibilidades de escalonamento. Na primeira, o autor faz uso de apenas uma troca de linha, assim,  $r = 1$ . Segue com o escalonamento alternativo em que  $r = 0$ , pois não há troca de linhas, resultando em um escalonamento diferente, porém, sem mudança de escala. Ambos os escalonamentos levam ao mesmo resultado.

**Exemplo 2.** Calcule  $\det A$  para  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$  (LAY, 1999, p. 281)

Antes de prosseguir com matrizes de ordens maiores, expõe as propriedades dos determinantes que serão usadas para estudar os autovalores.

São elas:

### TEOREMA 3

#### PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ .

- $A$  é invertível se e somente se  $A \neq 0$ .
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .

- c.  $\det A^t = \det A$
- d. Se  $A$  é matriz triangular, então,  $\det A$  é o produto dos elementos da diagonal principal.
- e. Uma operação de substituição de linhas em  $A$  não altera o valor do determinante. Uma operação de troca de linhas muda o sinal do determinante. Um reescalonamento de linha muda o determinante pelo mesmo fator (LAY, 1999, p. 282)

O autor referencia o Teorema 3(a) para determinar quando a matriz  $A - \lambda I$  não é invertível. A equação escalar  $\det(A - \lambda I) = 0$  é chamada de *equação característica de  $A$*  e um escalar  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz  $A_{n \times n}$  se, e somente se,  $\lambda$  satisfaz a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Segue com o exemplo 3 que acrescentará mais um conceito, o de *polinômio característico*.

**Exemplo 3.** Determine a equação característica de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{LAY, 1999, p. 282}).$$

Na solução do exemplo 3, o autor faz referência à propriedade do determinante do Teorema 3 (d). A equação característica final

$(5 - \lambda)^2 (3 - \lambda) (1 - \lambda)$  ou  $(\lambda - 5)^2 (\lambda - 3) (\lambda - 1) = 0$  expande o produto para um polinômio de grau 4 chamado de equação característica de  $A$ , como apresentado:

$$\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75.$$

É exposto o conceito de multiplicidade (algébrica) de um autovalor de  $\lambda$  que se caracteriza como a multiplicidade como raiz da equação característica. Dessa forma, temos que a multiplicidade (algébrica) do autovalor 5 é igual a 2. O mesmo raciocínio é aplicado aos demais autovalores do exemplo.

Tendo por base, os conceitos já apresentados, nos exemplos 1 a 3, poderemos agora determinar os autovalores e suas multiplicidades. Seguimos com o exemplo 4, exposto por Lay (1999, p. 283)

**Exemplo 4.** O polinômio característico de uma matriz  $6 \times 6$  é  $P(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$ . Determine os autovalores e suas multiplicidades.

A fatoração do polinômio leva à seguinte solução:  $\lambda^4 (\lambda - 6) (\lambda + 2)$ , cujos autovalores e multiplicidades respectivas são 0 (multiplicidade 4), 6 (multiplicidade 1) e -2 (multiplicidade 1).

Nos exemplos apresentados, são considerados apenas os autovalores reais e os escalares também reais.

Lay (1999) apresenta que, nas aplicações, os autovalores de qualquer matriz de ordem maior que  $2 \times 2$ , deverão ser determinados por computador, a menos que a matriz seja triangular ou que tenha outras propriedades especiais que facilitem a determinação dos autovalores. A fatoração de um polinômio característico de uma matriz  $3 \times 3$  pode se tornar bastante difícil. Para tanto, faz referência aos Comentários Numéricos que são apresentados no ANEXO E.

Como exposto no início do capítulo, as aplicações de autovalores em sistemas dinâmicos fazem uso de métodos iterativos que *aproximam*<sup>49</sup> os autovalores. Para tanto, o autor expõe o conceito de **transformação de similaridade** entre duas matrizes  $A$  e  $B$ .

*Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , então  $A$  é similar a  $B$  se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP = B$ , ou, de modo equivalente,  $A = PBP^{-1}$ . Denotando  $P^{-1}$  por  $Q$ , temos  $Q^{-1}BQ = A$ . Portanto,  $B$  também é similar a  $A$ , e dizemos simplesmente que  $A$  e  $B$  são similares (LAY, 1999, p. 283).*

Segue com o Teorema 4 (ANEXO D).

A primeira aplicação do capítulo destina-se ao estudo de Sistemas Dinâmicos. Considera que *os autovalores e autovetores são a chave da evolução discreta de um sistema dinâmico* (LAY, 1999, p. 284).

Corresponde ao exemplo que segue:

---

<sup>49</sup> Grifo do autor.

**Exemplo 5.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}$ . Analise o comportamento assintótico do sistema dinâmico definido por  $x_{k+1} = Ax_k$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) com  $x_0 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$  (LAY, 1999, p. 284)

O autor supracitado descreve o exemplo anterior, como uma aplicação interessante das Cadeias de Markov. Na seção Aplicações a Cadeias de Markov, a matriz  $A$  é chamada de matriz de migração  $M$ ,  $x_0$  é a distribuição de população inicial entre cidade e subúrbio e  $x_k$  representa a distribuição de população após  $k$  anos. Faz referência ao Teorema 18 (referente ao Capítulo 4, seção 4.9 do mesmo livro) (ANEXO D) que apresenta a sequência  $x_k$  de uma matriz  $A$ , convergindo ao vetor em estado “estacionário” que corresponde a um múltiplo do vetor  $v_1$ . O Teorema apresenta que o estado inicial não tem qualquer efeito sobre o comportamento a longo prazo da cadeia de Markov.

A ideia de aplicação em sistemas dinâmicos prossegue com a seção de Diagonalização. A informação sobre autovalores e autovetores contida em uma matriz  $A$  pode ser apresentada baseada na fatoração útil do tipo  $A = PDP^{-1}$ . A fatoração é utilizada para calcular  $A^k$  rapidamente, quando  $k$  tem um valor elevado e é apresentada em exercícios posteriores para analisar (e desacoplar) sistemas dinâmicos. Matrizes Diagonais são representadas por  $D$ .

O autor segue com os exemplos:

**Exemplo 1.** Se  $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ , então

$$D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$D^3 = DD^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix} \quad \text{Em geral,}$$

$D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$  para  $k \geq 1$ . Se  $A = PDP^{-1}$  para alguma matriz invertível e matriz diagonal  $D$ , então  $A^k$  também fica fácil de calcular, como mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 2.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ . Determine uma fórmula para  $A^k$ , dado que  $A = PDP^{-1}$ , onde  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  (LAY, 1999, p. 288).

O Teorema 5 (ANEXO D) expõe uma caracterização de matrizes diagonalizáveis em que os autovetores são em número suficiente, para formar uma base para o  $R^n$ , chamada de **base de autovetores**.

Em *Diagonalizando Matrizes*, o autor expõe os exemplos 3, 4 e 5, como seguem:

**Exemplo 3.** Diagonalize a seguinte matriz, se possível.  
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Isto é, determine uma matriz invertível  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tal que  $A = PDP^{-1}$  (LAY, 1999, p. 290).

A solução do exemplo citado é descrita como um procedimento sistemático, dividido em passos. No passo 1, devem ser determinados os autovalores de  $A$ ; no passo 2, devem ser determinados três autovetores linearmente independentes para  $A$ ; no passo 3, escrever  $P$  com base nos vetores do passo 2 e no passo 4, escrever  $D$  baseado nos autovalores associados.

**Exemplo 4.** Diagonalize a seguinte matriz, se possível.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 5.** Determine se a seguinte matriz é diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (LAY, 1999, p. 292).}$$

Na solução do exemplo 4, a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  é apresentada como

não diagonalizável, pois, cada autoespaço é apenas unidimensional. *Não existem outros autovalores e, todo autovetor de  $A$  é um múltiplo escalar de  $v_1$  ou de  $v_2$ . Portanto, é impossível obter uma base para o  $R^3$  usando autovetores de  $A$*  (LAY, 1999, p. 290). Assim, a condição suficiente para que uma matriz seja diagonalizável segue o Teorema 6 (ANEXO D).

O exemplo 5 apresenta uma matriz triangular com três autovalores distintos 5, 0 e -2. Portanto, ela é diagonalizável.

Na seção intitulada *Autovetores e Transformadas Lineares*, o autor expõe que *o objetivo é compreender a fatoração da matriz  $A = PDP^{-1}$  no contexto de transformada linear* (LAY, 1999, p. 295). É apresentada que a transformação  $x \mapsto Ax$  é igual à aplicação simples  $u \mapsto Du$ , cuja interpretação análoga aplica-se à  $A$  e  $D$ . Nesse caso,  $D$  não é, necessariamente, uma matriz diagonal. Será preciso que o aluno lembre que toda transformação linear pode ser implementada com a multiplicação à esquerda de uma matriz  $A$ , chamada de *matriz canônica* de  $T$ . A mesma representação é utilizada *para qualquer transformada linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita* (LAY, 1999, p. 295).

O autor citado dedica uma seção ao estudo de Sistemas Dinâmicos Discretos e em sua citação apresenta que:

os autovalores e autovetores são a chave para a compreensão do comportamento assintótico, ou da evolução, de um sistema dinâmico descrito pela equação de diferenças  $x_{K+1} = Ax_K$  [...]. Os vetores  $x_K$  fornecem informação sobre o sistema em função do tempo (denotado por  $K$ ) (LAY, 1999, p. 309).

Alguns exemplos anteriores foram expostos ao longo dos capítulos, dentre eles, o exemplo para modelar a população, alguns sobre Cadeias de Markov e outro sobre a população das corujas malhadas. Os exemplos apresentados pelo autor concentram-se em problemas ecológicos que, conforme ele, são mais fáceis de serem explicados. Contudo, acrescenta a importância dos sistemas dinâmicos nas áreas de Engenharia e Física, como por exemplo, no estudo de sistemas de controle,

cuja resposta estacionária equivale ao que é apresentado no livro como “comportamento assintótico” do sistema dinâmico  $x_{K+1} = A \cdot x_K$ .

Inicialmente, considera que  $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$  em que  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são escalares  $\in$  ao  $R^n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são vetores linearmente independentes e formam uma base para o  $R^n$ . Seus autovalores associados são  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . A decomposição de autovetores de  $x_0$  determina o que acontece com a sequência  $\{x_k\}$ , partindo para a generalização.

$$x_1 = Ax_0 = c_1 Av_1 + \dots + c_n Av_n = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_n \lambda_n v_n.$$

Em geral,

$$x_K = c_1 (\lambda_1)^K v_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^K v_n \quad (K = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{LAY, 1999, p. 310})$$

O exemplo 1 apresenta um sistema dinâmico linear para modelar o sistema físico da população de corujas e ratos. Embora seja um exemplo fictício, pode ser considerado, como ponto de partida para sistemas dinâmicos não lineares estudados em casos reais.

**Exemplo 1.** Vamos denotar as populações de corujas e ratos do mato, no instante  $K$ , por  $x_K = \begin{bmatrix} O_K \\ R_K \end{bmatrix}$ , onde  $K$  é medido em meses,  $O_K$  é o número de corujas na região estudada e  $R_K$  é o número de ratos (medidos em milhares). Suponha que

$$O_{K+1} = (0,5)O_K + (0,4)R_K$$

$$R_{K+1} = -p \cdot O_K + (1,1)R_K$$

onde  $p$  é um parâmetro positivo a ser especificado. O termo  $(0,5)O_K$  da primeira equação diz que sem os ratos para poderem se alimentar, apenas metade das corujas sobrevive a cada mês, enquanto o termo  $(1,1)R_K$  da segunda equação diz que sem as corujas como predadoras a população de ratos cresce a uma taxa de 10% ao mês. Se os ratos abundam, o termo  $(0,4)R_K$  fará com que a população das corujas cresça, enquanto o termo negativo  $-p \cdot O_K$  mede o número de mortes de ratos devido à ação predadora das corujas. (De fato,  $1000p$  é o número médio de ratos comidos por uma coruja em um mês). Determine a evolução desse sistema quando o parâmetro predatório é igual a 0,104 (LAY, 1999, p. 311).

O autor expõe exemplos que fazem uso da descrição gráfica das soluções que representam a evolução do sistema e que descrevem a trajetória do sistema dinâmico. Considerando  $A$  uma matriz  $2 \times 2$  e  $x_{k+1} = A \cdot x_k$  uma descrição do que acontece com o ponto inicial  $x_0$  do  $\mathbb{R}^2$ , a representação mostra a sucessão construída de  $x_0$ , à medida que é aplicada a  $x$ .

Seguem os exemplos:

**Exemplo 2.** Represente graficamente algumas trajetórias do sistema dinâmico  $x_{k+1} = A \cdot x_k$ , quando  $A = \begin{bmatrix} 0,80 & 0 \\ 0 & 0,64 \end{bmatrix}$ .

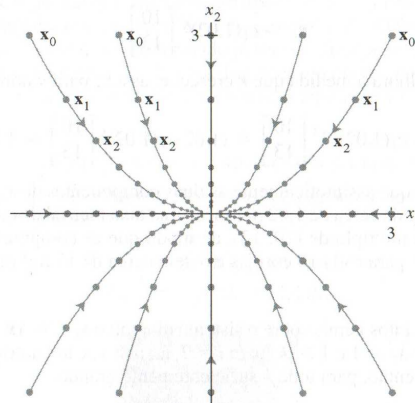
**Exemplo 3.** Represente graficamente várias soluções típicas da equação  $x_{k+1} = A \cdot x_k$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 1,44 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}$ .

**Exemplo 4.** Represente graficamente várias soluções típicas da equação  $y_{k+1} = D \cdot y_k$ , onde  $D = \begin{bmatrix} 2,0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ . (Usamos  $D$  e  $y$  em vez de  $A$  e  $x$  porque esse exemplo será usado mais tarde). Mostre que uma solução  $[y_k]$  não é limitada se seu ponto inicial não pertence ao eixo  $x_2$  (LAY, 1999, p. 313).

Na solução do exemplo 2, o autor expõe que  $x_k$  tende a zero, porque tanto  $(0,80)^k$  como  $(0,64)^k$  aproximam-se de zero quando  $K \rightarrow \infty$ . Os primeiros termos são expostos nos bordos dos vértices  $(\pm 3, \pm 3)$ . A origem é chamada de **atrator** do sistema dinâmico, porque todas as trajetórias tendem a zero. O sistema sempre apresentará essa característica, quando os autovalores forem menores que 1 em módulo.

A direção da atração mais forte é ao longo da reta por zero e pelo autovetor associado ao autovalor de menor valor absoluto (LAY, 1999, p. 312).

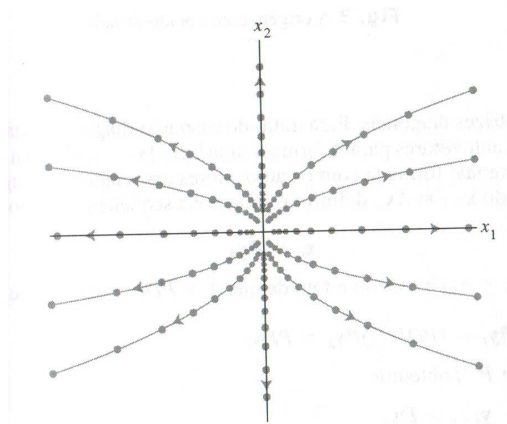
Figura 20 - A origem como atrator



Fonte: Lay (1999, p. 312)

No exemplo 3, temos um caso em que os autovalores são maiores que 1 em módulo. De modo contrário ao exemplo 2, a *origem representa o repulsor* do sistema dinâmico em que todas as soluções de  $x_{K+1} = A.x_K$ , exceto a solução (constante) zero, não são limitadas e tendem a se afastar da origem (LAY, 1999, p. 312).

Figura 21 - A origem como repulsor

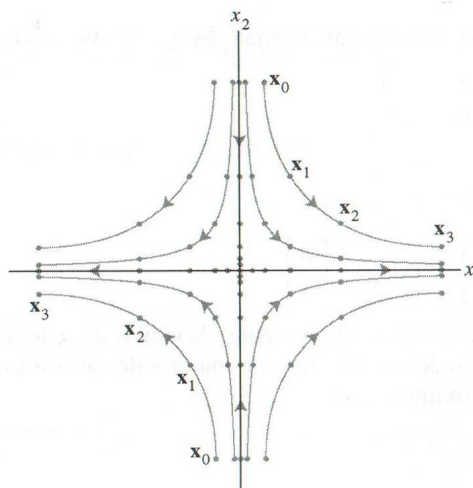


Fonte: Lay (1999, p. 313)

O exemplo 4 apresenta um caso em que os autovalores são, respectivamente, 2,0 e 0,5. Em razão dessa característica, a origem é chamada de **ponto de sela**. Nessa situação, há tanto a atração como a repulsão em diferentes direções. O

objetivo desse exemplo é mostrar que uma solução  $\{y_k\}$  não é limitada se seu ponto inicial  $y_0$  não pertence ao eixo  $x_2$ . O primeiro termo da expressão para  $y_k$  torna-se cada vez maior e, portanto,  $\{y_k\}$  não é limitada (LAY, 1999, p. 314). Na Figura 21, são expostas dez trajetórias que partem de pontos no eixo  $x_2$ , ou próximos ao eixo  $x_2$ .

Figura 22 - A origem como ponto de sela (Exemplo 4)



Fonte: Lay (1999, p. 314)

O autor cita que os três exemplos anteriores trataram de matrizes diagonais e encaminha o leitor para o estudo de matrizes não diagonais. Para tanto, Lay (1999) segue com a seção Mudança de Variável, em que é exposto o tema Sistemas Dinâmicos.

Em casos de matrizes não diagonais, precisamos voltar ao caso em que os autovetores de uma matriz  $A$  formam uma base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  para o  $R^n$ .

Seja  $P = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $D$  uma matriz diagonal formada por autovetores associados à diagonal principal. A partir da sequência  $\{x_k\}$  satisfazendo  $x_{k+1} = A \cdot x_k$ , define uma nova sequência  $\{y_k\}$  por  $y_k = P^{-1} x_k$  ou  $x_k = P y_k$ . Dessa forma, é promovida a mudança de variável na equação.

A substituição é feita na equação  $x_{k+1} = A \cdot x_k$  e usando  $A = P D P^{-1}$ , tem-se que  $P \cdot y_{k+1} = A \cdot P \cdot y_k = (P D P^{-1}) \cdot P \cdot y_k = P \cdot D \cdot y_k$ . Multiplicando os dois membros da equação por  $P^{-1}$ , seguimos com  $y_{k+1} = D \cdot y_k$ .

Denota-se  $y_k$  por  $y(k)$  e, em consequência, todas as suas componentes  $y_1(k)$ ,  $y_2(k)$ , ...,  $y_n(k)$ .

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \\ \dots \\ y_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \dots \\ y_n(k) \end{bmatrix}$$

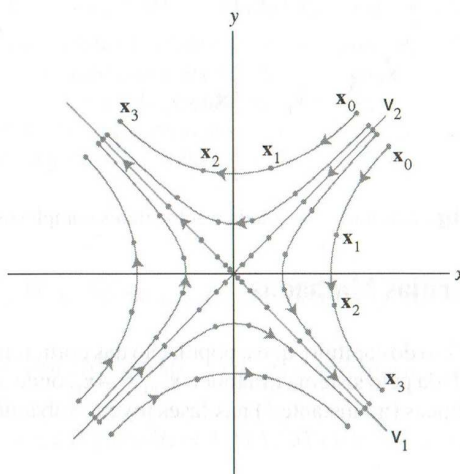
O autor expõe que a mudança de variável de  $x_k$  para  $y_k$  *desacoplou* o sistema de equações de diferenças, pois a evolução de  $y_1(k)$  não é influenciada por  $y_2(k)$ . O mesmo ocorre para qualquer outra variável.

A equação  $x_k = Py_k$  diz que  $y_k$  é o vetor das coordenadas para  $x_k$  com respeito à base de autovetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Podemos desacoplar o sistema  $x_{k+1} = Ax_k$  fazendo os cálculos no novo sistema de coordenadas dos autovetores. Quando  $n = 2$ , isso significa usarmos uma folha de papel quadriculada com os eixos nas direções dos dois vetores (LAY, 1999, p. 314)

O exemplo 5 é apresentado, cuja proposta de solução faz uso do papel quadriculado para traçar eixos por  $v_1$  e  $v_2$  que correspondem à base canônica da equação  $x_k = c_1 K v_1 + c_2 (0,5) K v_2$ . Por técnicas usuais, os autovalores 2 e 0,5 com autovetores associados  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  e  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  foram encontrados. De acordo com o exemplo 4, encontramos o ponto de sela do sistema dinâmico, pois  $|2| > 1$  e  $|0,5| < 1$ .

**Exemplo 5.** Mostre que a origem é um ponto de sela para as soluções de  $x_{k+1} = Ax_k$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{bmatrix}$ . Determine as direções de maior atração e maior repulsão) (LAY, 1999, p. 314).

Figura 23 - A origem como ponto de sela (Exemplo 5)



Fonte: Lay (1999, p. 315)

### 5.2.1 *Resumo e Conjecturas*

Como descrito pelo autor, o livro visa a propor a apresentação dos conceitos fundamentais que constituem a disciplina de Álgebra Linear, assim como suas aplicações. Foi redigido apoiado nas recomendações do *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), e expõe o que o autor chama de necessidades reais dos alunos com base nos vários exemplos de aplicação.

Lay (1999) enfatiza a relevância tanto dos cálculos quanto dos conceitos. Mas, salienta que em disciplinas de serviço, os resultados saibam ser interpretados, analisados e explicados a outras pessoas.

Em seu livro, o tema autovalor e autovetor recebe forte apelo geométrico, porém considera que esta não é uma prática comum nas tradicionais de Álgebra Linear.

Além disso, destaca a dependência dos conhecimentos prévios adquiridos nos capítulos anteriores, para que os exercícios da seção de autovalores e autovetores sejam resolvidos. Estes variam de rotineiros a conceituais, portanto, consideramos ser possível destacar e valorizar a construção do conceito mesmo para alunos em início de formação acadêmica. Mas, para tanto, é preciso que haja o incentivo à reflexão e ao pensamento crítico de maneira a estimular a formulação de conjecturas, hipóteses baseadas na mente criativa do estudante.

A primeira exposição do tema autovalor e autovetor apresenta um exemplo introdutório de Sistema Dinâmico Discreto, pautado em uma pesquisa realizada no Noroeste do Pacífico com populações de corujas malhadas. O ciclo de vida dessas populações passou a ser estudado, para que os pesquisadores pudessem expor ao governo federal americano o risco de extinção da espécie.

Com base na situação real e prática que conduziu à elaboração do exemplo apresentado por Lay (1999), defendemos que a exposição de problemas que relacionem temas específicos das disciplinas matemáticas e outras que compõem a formação do estudante são, perfeitamente, viáveis em qualquer etapa.

De modo diferente das aulas tradicionais, a prática de problemas que enfatizem os aspectos interdisciplinares, incentiva a discussão e uma maior maturidade do estudante, apoiado nos aspectos, que acarretem um encadeamento lógico de causa e efeito.

Com base na exposição do autor, que cita como objetivo do capítulo, *discorrer a ação de uma transformada linear  $x \mapsto Ax$*  em elementos que sejam facilmente visualizáveis (LAY, 1999), torna-se evidente a valorização da representação geométrica do tema e a abordagem matricial, seguindo as recomendações dos LACSG.

Assim, todo conceito de autovalor e autovetor desenvolve-se apoiado em uma transformação  $x \mapsto Ax$  que desloca vetores em várias direções. Entendemos que, baseados na exposição do autor, é apresentada a ideia de preservação de direção e que todo múltiplo escalar de um autovetor também é um autovetor, ocorrendo, portanto, infinitos autovetores. Apoiado nos exemplos iniciais, o aluno também adquire as noções de autoespaço de  $A$  associado a  $\lambda$  e base de um autoespaço.

Evidenciamos que tais conceitos constituem, portanto, conceitos básicos e primordiais necessários para a compreensão do tema em questão.

O autor usa termos que podem facilitar a compreensão e a posterior exposição do tema pelo aluno, como por exemplo, *a matriz  $A$  estica ou dilata  $v$*  (LAY, 1999, p. 272). Acrescentamos que termos como o exposto podem trazer elementos que sejam, posteriormente, internalizados como objetos mentais.

Para a solução dos exemplos propostos, é necessário que conhecimentos prévios adquiridos nos capítulos anteriores sejam reconhecidos. Nos exemplos

iniciais, temos dependência e independência linear e escalonamento de matrizes para encontrar uma solução não trivial da equação  $Ax = \lambda x$ .

Assim, podemos considerar que o autor assume algumas características evidenciadas no PMA, como a generalização, ou seja, o reconhecimento de padrões, além de aspectos que evidenciam a concretização, a síntese e o pensamento proceitual.

Além disso, destacamos a importância em apresentar as propriedades e Teoremas aos estudantes. Dentre elas, evidenciamos a relevância do Teorema 3(a), exposto pelo autor que apresenta a equação característica de  $A$ ,  $\det(A - \lambda I) = 0$  em que  $\lambda$  é o autovalor de uma matriz  $n \times n$  se, e somente se,  $\lambda$  satisfizer a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

As aplicações de autovalores em sistemas dinâmicos fazem uso de métodos iterativos que *aproximam* os autovalores. Portanto, é pertinente que os alunos tenham uma familiaridade com os conceitos relacionados aos métodos iterativos que ocorrem, geralmente, dentre os 3º. ou 4º. semestres letivos na disciplina de Cálculo Numérico ou Métodos Numéricos.

A primeira aplicação introduz termos como comportamento assintótico de um sistema dinâmico, descrito pela equação de diferenças  $x_{K+1} = A \cdot x_K$  ( $K = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) com base em um vetor inicial  $x_0$ . Outro termo que destacamos, refere-se ao vetor em estado “estacionário”.

Evidenciamos que, nas aulas consideradas tradicionais, termos como os anteriormente expostos não são comuns, porém, podem ser facilmente compreensíveis pelos alunos e podem ser apresentados durante a discussão do conceito de autovalor e autovetor.

Lay (1999), concentra-se em problemas ecológicos para explicar o comportamento de um vetor em estado estacionário, mas ressalta a importância de outros temas relacionados, como por exemplo, o estudo de sistemas de controle na Engenharia, cuja resposta estacionária equivale ao “comportamento assintótico” do sistema dinâmico  $x_{K+1} = Ax_K$ .

A partir da equação  $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$  em que  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são escalares  $\in \mathbb{R}^n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são vetores linearmente independentes e formam uma base para o  $\mathbb{R}^n$  o autor parte de um caso específico para um caso geral. Assim, com base na decomposição de  $x_0$  é possível identificar, o que acontece com a sequência  $x_K$ , pois,

$x_1 = Ax_0 = c_1Av_1 + c_2Av_2 + \dots + c_nAv_n$  e, para o caso geral, tem-se  $x_K = c_K(\lambda_1)^K v_1 + \dots + c_n(\lambda_n)^K v_n$  com  $(K=0,1,2,\dots)$ . Apoiado na sequência anterior, é discutido o que ocorre com  $x_K$  quando  $K \rightarrow \infty$ . Assumimos que há a construção gradativa do conhecimento e a expansão do conhecimento específico para o geral.

O autor atribui significativa relevância às representações geométricas. Isso pode ser evidenciado nas descrições gráficas das soluções da evolução do sistema dinâmico que são apresentadas e descrevem sua trajetória, assumindo a origem como atrator, repulsor e ponto de sela. Essas situações podem favorecer a construções de imagens mentais dos estudantes, promovendo a construção do conceito como entidade mental, com base nos processos envolvidos.

Assim, exemplos como os apresentados no início da discussão do tema podem acarretar um grau de maturidade significativo nos estudantes, direcionando-os a repensar a respeito das situações específicas que estimulem os aspectos abstratos e gerais do objeto matemático em estudo e que estejam, verdadeiramente, engajados a adentrar no intrigante mundo da Engenharia.

### *5.3 Considerações a respeito de ambos os livros e as recomendações destacadas pelo LACSG, para um primeiro curso de Álgebra Linear*

Nossas considerações foram pautados na leitura realizada sobre as principais recomendações do LACSG (*Linear Algebra Curriculum Study Group*) de modo a identificar e justificar as abordagens adotadas pelos autores dos livros descritos nas seções anteriores.

Conforme a exposição dos autores David Poole e David C. Lay, os livros foram escritos para atender a um público que emerge e cujo programa de Álgebra Linear de muitas universidades ainda não está adequado para atender. São os estudantes de cursos de Engenharia, Ciência da Computação, Pesquisa Operacional, Economia e Estatística. Além disso, os autores ressaltam que as mudanças também devem ocorrer em relação às novas gerações de *hardware* e

*software* que vêm ampliando, significativamente, a magnitude das soluções de problemas relacionados às várias áreas do conhecimento.

Os autores expõem que seus livros foram escritos, de acordo com as recomendações do LACSG para um primeiro curso de Álgebra Linear.

Conforme os pesquisadores que compõem o grupo, a importância da Álgebra Linear nas áreas específicas não é apresentada aos estudantes, e a influência do computador não é percebida durante a seleção dos tópicos trabalhados. Além disso, a ênfase total da abstração pode sobrecarregar os alunos iniciantes até o ponto que eles decidem deixar o curso. Em uma situação como essa, é bem provável que os estudantes saiam sem, pelo menos, conhecer os conceitos básicos que irão precisar nas futuras disciplinas ou em suas atividades profissionais.

Em resposta a essa real situação, um grupo de pesquisadores, em 1990, formou o LACSG, cuja proposta foi despertar e iniciar uma significativa mudança no currículo da Álgebra Linear nos Estados Unidos da América.

Com base nas reuniões e em um *workshop* promovido pelo grupo em agosto de 1990, foram ressaltadas as cinco recomendações, que são:

1. *O currículo e a apresentação de um primeiro curso de Álgebra Linear devem responder às disciplinas do estudante*<sup>50</sup> (CARLSON *et al.*, 1993, p. 41).

Conforme os autores, um primeiro curso de Álgebra Linear deve ser considerado, como uma disciplina de serviço de modo a atender uma variedade de disciplinas que envolvam aspectos da Ciência da Computação, Engenharia Elétrica, Aeroespacial e de Sistemas e outras tantas áreas de conhecimento. Adicionalmente, devem ser considerados os interesses daqueles que buscam uma pós-graduação no futuro.

Em nossas considerações, somos favoráveis à adoção de algumas aplicações, como a prática de ensino da Álgebra Linear que evidencie sua relevância e potencialidade, como uma das mais importantes disciplinas matemáticas que constitui a graduação.

O nível e o modo de apresentar o curso devem considerar o conhecimento e as habilidades dos alunos, além de promover uma sólida mudança intelectual nos estudantes com base na exposição cuidadosa das definições e demonstrações de

---

<sup>50</sup> Tradução nossa: 1. *The syllabus and presentation of the first course in linear algebra must respond to the needs of client disciplines.*

teoremas e provas que identificarão a relação e aprofundarão a compreensão dos vários conceitos envolvidos.

Assim, os autores identificam a relação que se estabelecerá entre os professores e profissionais das áreas relacionadas. Dessa forma, ressaltamos o aspecto interdisciplinar e a efetiva interação que poderá ser estabelecida entre os departamentos, para evidenciar a fundamentação e a base necessária para adentrar ao mundo da Engenharia.

2. *Os departamentos de matemática devem, seriamente, considerar e fazer um primeiro curso de Álgebra Linear em um curso orientado a matrizes*<sup>51</sup> (CARLSON *et al.*, 1993, p. 42).

Os autores reconhecem que essa recomendação corresponde a uma mudança significativa na prática de ensino da Álgebra Linear. Defendem que um primeiro curso de Álgebra Linear pode refletir os aspectos da disciplina como uma ferramenta científica, pautada em uma menor ênfase na abstração e maior ênfase na solução de problemas. Contudo, destacam que esse enfoque não reduziria o papel do rigor ou da prova de teoremas. Tal mudança propiciaria a mudança de um enfoque introspectivo para um mais prático orientado por matrizes que atenderiam às necessidades não só dos estudantes de cursos de Matemática como também das chamadas disciplinas de serviço.

Os autores consideram que os assuntos principais da Álgebra Linear possam ser cobertos entre 26-28 aulas de 50 minutos cada. Além disso, ressaltam ser necessário adquirir uma maturidade matemática associada à conclusão bem sucedida de dois semestres em Cálculo, objetivando direcionar o aluno a solução de problemas.

O conteúdo básico poderá abordar:

(a) Adição e Multiplicação de Matrizes (3 dias);

(b) Sistemas de Equações Lineares (4 dias);

(c) Determinantes (2-3 dias);

---

<sup>51</sup> Tradução nossa: 2. *Mathematics departments should seriously consider making their first course in linear algebra a matrix-oriented course.*

(d) Propriedades do  $R^n$  (7-8 dias);

No tópico (d), os autores observam que o conjunto do  $R^n$  poderá ser apresentado como um conjunto de *n-uplas* e não como o espaço vetorial formal. As provas formais de todas as propriedades não precisam ser consideradas. Além disso, deve ocorrer forte apelo às representações geométricas dos conceitos estudados, como combinações lineares, base do  $R^n$ , subespaço do  $R^n$ , matrizes como transformações lineares, matrizes linha e coluna e produto interno.

(e) Autovalores e Autovetores (6 dias);

No tópico (e), os autores ressaltam a ampla variedade de aplicações que estão atreladas ao conceito. Acrescentam que o tema seja apresentado, pautado em exemplos que envolvam as representações geométricas.

(f) Ortogonalidade (4 dias); e

(g) Tópicos Suplementares.

Nesta seção, algumas aplicações podem ser apresentadas, como por exemplo, Cadeias de Markov, Modelos de Entrada-Saída, Matriz de Leslie ou Programação Linear;

3. *O corpo docente deverá considerar as necessidades e interesses dos estudantes como aprendizes*<sup>52</sup> (CARLSON *et al.*, 1993, p. 45).

Os autores enfatizam que um primeiro curso de Álgebra Linear poderá pautar-se em exemplos concretos e práticos para exemplos gerais, incentivando a solução de problemas, que serão estimulados por uma atuação crítica e participativa dos alunos. Algumas questões que envolvam as estratégias de ensino, as avaliações e o papel da abstração e das aplicações poderão ser repensadas pelos professores da disciplina;

---

<sup>52</sup> Tradução nossa: 3. *Faculty should consider the needs and interests of students as learners.*

4. *O corpo docente deverá ser encorajado a utilizar a tecnologia em um primeiro curso de Álgebra Linear*<sup>53</sup> (CARLSON et al., 1993, p. 45).

Projetos vinculados ao tema que considerem a utilização de ferramentas tecnológicas podem reforçar os conceitos estudados e contribuir para a descoberta de novos com base na viabilização de soluções na solução dos problemas aplicados.

5. *Pelo menos, um “segundo curso” em teoria matricial / Álgebra Linear poderá ter uma alta prioridade para cada programa de matemática*<sup>54</sup> (CARLSON et al., 1993, p. 45).

Um segundo curso de Álgebra Linear poderá englobar: espaço vetorial abstrato, análise e aplicação matricial em Álgebra Linear; Álgebra Linear Numérica. Deverão ser priorizados o rigor e a abstração. Os autores acrescentam que tal enfoque poderá corresponder a uma futura base para estudos de pós-graduação e uma oportunidade para melhorar a eficiência curricular.

De acordo com Fuentes (2008), há evidências que, para estabelecer o conceito matemático é necessário que se façam conexões com outros conceitos.

A autora destaca que a maior dificuldade enfrentada pelos estudantes, consiste na representação dos diversos objetos matemáticos que podem ser descritos por uma variedade de linguagens que envolvem os conceitos.

Abaixo, apresentaremos os principais tópicos que dividem a Análise da Linguagem da Álgebra Linear. Em *A linguagem formal*, Fuentes (2008) baseia-se nos conceitos de Dorier (2002) que denomina esse fenômeno como obstáculo ao formalismo. Esse obstáculo está relacionado às dificuldades encontradas pelos alunos frente às estruturas da teoria dos espaços vetoriais sem ter controle sobre as ferramentas de lógica e teoria dos conjuntos. Não há, portanto, nenhuma relação entre as estruturas matemáticas prévias e novas.

No tópico *A linguagem geométrica, algébrica e abstrata da Álgebra Linear*, Fuentes (2008), baseado-se nos conceitos de Hillel (2000), apresenta como fonte das dificuldades conceituais da Álgebra Linear, a existência de variadas linguagens ou modo de descrição, o problema da representação e a aplicabilidade da teoria em

---

<sup>53</sup> Tradução nossa: 4. *Faculty should be encouraged to utilize technology in the first linear algebra course.*

<sup>54</sup> Tradução nossa: 5. *At least one “second course” in matrix theory / linear álgebra should be a high priority for every mathematics curriculum.*

geral. Acrescenta que a Álgebra Linear inclui três modos de representação: *o modo abstrato*: uso da linguagem da teoria formal dos espaços vetoriais que incluem: espaços vetoriais, subespaços, dimensão e operadores, etc.; *o modo algébrico*: uso da linguagem e conceitos específicos do espaço  $\mathbb{R}^n$  que incluem: *n-uplas*, matrizes, solução de sistemas de equações lineares, etc.; e *o modo geométrico*: uso da linguagem e conceitos sobre os espaços de dimensão dois ou três, que incluem: segmentos de reta dirigidos, pontos, linhas, planos e transformações geométricas.

De acordo com Hillel (2000), os professores trocam os modos de representação e de notação. Acrescenta que os alunos têm como obstáculo epistemológico a familiaridade com a análise geométrica e o uso de coordenadas e noções relacionadas ao  $\mathbb{R}^n$ . Pensar em vetores e transformações em um contexto geométrico permite fazer conexões com a notação conhecida, contudo, estas conexões podem tornar-se um obstáculo ao considerarem o conceito de base e a troca de uma base para outra. Outra dificuldade encontrada está na relação entre sistemas de equações lineares e vetores, matrizes ou polinômios.

Sierpinska (2000) considera que há três modos de pensamento em Álgebra Linear e a necessidade de transitar de um para outro. São eles: modo sintético geométrico, modo analítico aritmético e o modo analítico estrutural. A autora admite que os objetos matemáticos adquirem diferentes significados e que são necessários distintos pensamentos para interpretá-los.

Dessa forma, identificamos que a abordagem dos autores dos livros-texto visa a expor a Álgebra Linear, de forma que não exista um único estilo de aprendizado, no qual os alunos apreciem manipulações algébricas, outros adeptos de métodos numéricos (com ou sem um computador) e alguns que exibem forte intuição geométrica. Em consonância com essas ideias, os autores apresentam os tópicos algebricamente, geometricamente, numericamente e verbalmente. Poole (2004, p. xii) afirma que *uma disciplina de álgebra linear voltada à preparação dos alunos para disciplinas teóricas de nível mais avançado deve também expor esses alunos às aplicações*.

Apoiados nas recomendações feitas pelo Grupo de Estudos Curriculares de Álgebra Linear, o objetivo foi afastar-se da abstração em direção a uma disciplina mais concreta, baseada em matrizes.

Talvez seja essa a abordagem de aula atribuída à disciplina para um futuro engenheiro. É o que evidencia Camarena (2011), ao considerar que deve ser

estabelecido um vínculo entre a matemática e as ciências que a requer, entre a matemática e futuras atividades profissionais, assim como a matemática e as situações da vida cotidiana. Para tanto, a autora fundamenta-se em três paradigmas: - *a matemática é uma ferramenta de apoio e matéria formativa*; - *a matemática tem uma função específica no nível superior*; - *os conhecimentos nascem integrados*<sup>55</sup> (CAMARENA, 2011, p. 3).

Camarena (2011) considera que, para os engenheiros, a Matemática não é uma meta por si mesma. É importante que os alunos identifiquem problemas, como os expostos pelos autores que evidenciem a aplicação em suas carreiras. Os que resolvem problemas matemáticos atingem um nível de entendimento matemático avançado sobre a solução do problema, pois são capazes de usar os resultados em situações reais.

Pautados nas considerações traçadas a respeito de ambos os livros que afirmaram nossa decisão quanto a escolha do problema a ser aplicado na investigação, seguiremos para descrição da mesma, evidenciando os passos percorridos para chegarmos a análise final dos resultados.

---

<sup>55</sup> Tradução nossa: - La matemática es una herramienta de apoyo y materia formativa; - La matemática tiene una función específica em el nivel superior; - Los conocimientos nacen integrados.

## Capítulo 6 - A investigação

---

Para a realização da investigação, será proposto um problema aos alunos voluntários dos cursos de Engenharia. Após o convite da pesquisadora, os alunos prontificaram-se a participar de todas as atividades propostas, dentre elas, a entrevista com aplicação de questionário. Assim, a aplicação do problema exposto e as entrevistas ocorreram, entre março e novembro de 2013, tanto em suas faculdades como na sala de estudo de nosso Programa, que duraram entre uma e três horas e foram gravadas em áudio. Foi permitido que os alunos consultassem os apontamentos realizados em aula.

### 6.1 Apresentação do problema

A escolha do problema proposto aos alunos justifica-se pelos motivos expostos no Capítulo 1 com base nas pesquisas de Pedersen (2003) e, no Capítulo 5, ao apresentar os dois livros de Álgebra Linear. Nos livros de David Poole (2007) e David C. Lay (1999), evidenciamos a ênfase dos autores em relação à aplicação dos Sistemas Dinâmicos.

Conforme explica Monteiro (2006), nossa rotina, horários e hábitos que se repetem, podem ser descritos por um regime permanente  $x(t)$ , aproximadamente, periódico. O regime é expresso pela função  $x_{\text{permanente}}(t)$ , cujo comportamento é, em geral, assintoticamente estável. Explica que perturbações afetam apenas de modo transiente nosso dia a dia, de maneira que  $x(t) \rightarrow x_{\text{permanente}}(t)$  conforme o tempo passa, isto é, para  $t \rightarrow \infty$ . As comparações entre  $x_{\text{permanente(antes)}}(t)$  e  $x_{\text{permanente(depois)}}(t)$  identificam, como o sistema era antes e depois do evento crítico (perturbação), permitindo identificar o caos ou sair dele.

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos é usada na análise qualitativa de sistemas que são, convenientemente, descritos por equações diferenciais ou por equações de diferenças, lineares ou não.

Assim, foram expostos vários exemplos que ilustraram a taxa de crescimento assintótico de um sistema baseado em parâmetros que descrevem os autovalores e autovetores associados a dado sistema de equações de diferenças.

Nos mesmos livros, identificamos que o tema Cadeias de Markov e Matriz de Leslie antecedem o estudo de autovalores e autovetores.

As Cadeias de Markov são usadas, como modelos matemáticos que descrevem um experimento ou medida que é realizada, muitas vezes, e cujo o resultado pertence a um dentre os resultados previamente especificados e que depende do resultado do experimento imediatamente anterior. Assim, o estado a que o resultado pertence não depende da história pela qual o processo passa, e a probabilidade disso ocorrer, dada pelas probabilidades de transição também é constante. A Cadeia de Markov satisfaz a relação:  $x_{k+1} = P \cdot x_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , em que  $x_k$  são chamados vetores de estado. Assim, uma Cadeia de Markov é determinada por suas probabilidades de transição e por seu estado inicial.

Já, o modelo de Leslie descreve o crescimento populacional (baseado em matrizes) em relação ao tempo. Os vetores de crescimento populacional são descritos por  $x_{k+1} = Lx_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  em que  $L$  é chamada de Matriz de Leslie (podemos notar que a estrutura da equação é a mesma da Cadeia de Markov, porém, a interpretação é totalmente diferente). Mas, destacamos, que o estudo desses assuntos não é um conhecimento prévio, para se chegar ao tema Sistemas Dinâmicos.

### *O Problema*

Vamos denotar as populações de corujas e ratos do mato, no instante  $k$ , por  $x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$ , em que  $k$  é medido em meses,  $O_k$  é o número de corujas na região estudada e  $R_k$  é o número de ratos (medidos em milhares). Suponha que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= (0,5)O_k + (0,4)R_k \\ R_{k+1} &= -p \cdot O_k + (1,1)R_k \end{aligned}$$

onde  $p$  é um parâmetro positivo a ser especificado. O termo  $(0,5)O_k$  da primeira equação diz que sem os ratos para poderem se alimentar, apenas metade das corujas sobrevive a cada mês, enquanto o termo  $(1,1)R_k$  da segunda equação diz que sem as corujas como predadoras a população de ratos cresce a uma taxa de 10% ao mês. Se os ratos abundam, o termo  $(0,4)R_k$  fará com que a população das corujas cresça, enquanto o termo negativo  $-p \cdot O_k$  mede o número de mortes de ratos devido à ação predadora das corujas. (De fato,  $1000p$  é o número médio de ratos comidos por uma coruja em um mês). Determine a evolução desse sistema quando o parâmetro predatório é igual a 0,104 (LAY, 1999, p. 311).

## 6.2 *A Investigação Piloto*

A realização da investigação piloto ocorreu em agosto de 2012, com um estudante do curso de Engenharia de uma instituição privada do Estado de São Paulo.

A seguir, apresentamos o discurso estabelecido entre a pesquisadora e o aluno a respeito do problema proposto e como ocorreu sua solução.

A primeira fase constituiu-se da leitura do enunciado do problema e discussão do contexto que o envolvia.

As considerações traçadas pela pesquisadora evidenciaram as principais ideias da pesquisa de Trigueros *et al.* (2012), particularmente, do Projeto nº 62375 (a decomposição genética deste projeto, referente ao objeto matemático autovalor e autovetor será, integralmente, apresentada na seção 6.5 desta tese), em relação às concepções ação-processo-objeto-esquema da Teoria APOS. Também foram expostas considerações sobre os conceitos imagem e definição, de acordo com as ideias de Vinner (1991) e Domingos (2003).

Denominamos *P* de Professor e *A* de Aluno.

P: Então, ele explica quem é *O* e quem é *R* e o que é o parâmetro predatório. Você conseguiu entender os parâmetros 0,5; 0,4; 1,1 e *p*?

A: O *q* é o parâmetro predatório. O 0,5 diz que se não houver ratos apenas a metade das corujas sobrevivem, o 0,4 está relacionado ao crescimento da população das corujas e o 1,1 diz que 10% dos ratos crescem a cada mês se não houver as corujas, é isso?

P: Ok.

A: E o  $-p$  seria o número de ratos que uma coruja devora?

P:

A: Enquanto o termo for negativo?

P: É, enquanto o termo for negativo, for  $-p$ . Então você entendeu os parâmetros. Mas o que ele quer saber? Você passa a atribuir um valor de *p*. Por onde a gente começa?

A: Nós transformamos esse sistema numa matriz? Aliás, substituindo o valor de *p* e transformando o sistema numa matriz, não é?

P: Isso. Então quer dizer que você representará em forma matricial o sistema.

A: Sim (Entrevista Piloto).

A ação de analisar os parâmetros dados pelas equações lineares é interiorizada em processos e coordena-se no processo de representar matricialmente o sistema de equações:  $O_{k+1} = (0,5).O_k + (0,4).R_k$  e  $R_{k+1} = -p.O_k + (1,1).R_k$ . As ações interiorizam-se em processos e coordenam o processo para formar a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -p & 1,1 \end{bmatrix}$ .

Como classe de abstração reflexionante, a interiorização permite uma sucessão de ações materiais a um sistema de ações interiorizado, cujo objetivo é atribuir sentido ao fenômeno percebido. São estabelecidas relações com símbolos, linguagens, figuras ou outras imagens mentais, resultando na representação matricial do sistema de equações lineares.

P: Esse tipo de problema trabalha com sistemas dinâmicos, em que você tem variáveis e você estuda o comportamento dessas variáveis em função do tempo. Depois de determinado tempo, elas vão se encontrar. Quando as variáveis se encontrarem, quer dizer que em função do tempo a situação está estabilizada. Dentro de AL, temos a equação de diferenças...

A: Tem algo assim. Tem uma matriz vezes um escalar, que é um escalar vezes um vetor, não é?

P: Então, temos diferentes formas de resolver.  $O_{k+1} = A.O_k$ .  $O_k$  você substitui por  $\lambda.v$ , que foi o que você falou. O que representa  $\lambda$ ?

A: O  $\lambda$  é um escalar.  $\lambda$  seria o autovalor. O autovalor é um fator de multiplicidade da matriz.

P: Então, você conseguiu identificar o autovalor pela simbologia do  $\lambda$ .

A: É isso? É a matriz vezes  $O_k$  que é igual a  $\lambda$  vezes  $O_k$ , não é?

P:  $O_{K+1} = A.O_k$ . Só que  $O_k$  passa a ser  $v$  e por ter esse fator  $K+1$  então passa a ser  $\lambda^{K+1}$  (Entrevista Piloto).

O aluno apresenta a concepção objeto da matriz  $A$  que pode ser escrita, como  $\lambda^{K+1}.v$ . O processo é encapsulado para formar a equação matricial  $(A - \lambda.I).v = 0$ ; ocorre a conversão de um processo (estrutura dinâmica representada pelo sistema de equações lineares) em um objeto matemático (estrutura estática representada pela matriz  $A$  e pela equação matricial  $(A - \lambda.I).v = 0$ ). Assim, entidades passam de um nível a outro, sempre relacionados com as estruturas prévias mais elementares.

A equação matricial deve ter uma solução não trivial. Portanto, identificamos que o aluno apresenta concepção objeto do conceito envolvido.

Recorre-se ao Teorema da Matriz Invertível para determinar todos os  $\lambda$  para os quais a matriz  $A - \lambda.I$  é não invertível. Para tanto, seu determinante é igual a zero, fato que caracteriza os autovalores. As ações interiorizam-se em processos para determinação do conjunto solução de todos os autovalores. O processo encapsula-se no objeto autovetor da matriz baseado em ações necessárias para determinar a independência linear dos vetores no conjunto solução. Assim, coordenam-se os processos para encontrar os autovetores associados aos autovalores de uma matriz com o processo de cálculo de um determinante em um processo que permite obter o polinômio característico.

A: [...]. Se eu calculo o determinante dessa equação, o que eu consigo identificar com a equação característica?

P: Se há uma matriz  $n \times n$  então o determinante de  $A - \lambda.I$  é chamado polinômio característico. Você vai achar o valor de  $\lambda$ .

A: Sim, que é o autovalor.

**Resolvendo a equação polinomial referente ao polinômio característico.**

A:  $\lambda^2 - 0,6\lambda + 0,5 = 0$  e aí você resolve e acha os autovalores. Deram 1,02 e 0,68.

P: Você encontrou  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

A: Agora vamos encontrar os autovetores associados a esses autovalores (Entrevista Piloto).

A determinação de  $v_1 = (O_k; 1,3O_k)$  permite a identificação do autoespaço associado a  $\lambda_1 = 1,02$  e  $v_2 = (O_k; 0,2O_k)$  permite a identificação do autoespaço associado a  $\lambda_2 = 0,58$ , possibilitando sua representação geométrica.

Portanto, são realizadas ações para encontrar o espaço gerado por todos os autovetores correspondentes. Essas ações interiorizam-se no processo que possibilita encontrar o autoespaço associado a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . O processo encapsula-se no objeto espaço próprio de uma matriz baseado no estudo de suas propriedades e sua representação geométrica. Quando o processo é encapsulado como objeto, este adquire novo sentido para o sujeito, à medida que ele entende que o objeto pode ser assimilado pela extensão do esquema em estruturas dinâmicas. Dessa forma, entendemos que os esquemas constituem estruturas dinâmicas que evoluem constantemente, à medida que um objeto matemático é agregado às suas estruturas prévias.

P: Então você chegou em 1,02 e 0,58. Você tem infinitas soluções?

A: Sim. Para qualquer valor de  $O_k$  temos infinitos  $R_k$ .

P: Que representação geométrica você conseguiu estabelecer?

A: Na verdade, você vai ter duas retas.

P: Isso!

A: Acho que ele (o professor) julgava quando era muito necessária a representação geométrica e quando não. Ele passava toda a matéria na lousa e dava um exemplo e resolvia. Ele dava um segundo exemplo e esperava a gente resolver aquele exemplo (...) e quando ele julgava importante, pedia a representação gráfica daquela situação.

P: Você acha que a representação geométrica ajuda entender o conceito?

A: Você consegue identificar, enxergar o que ele está falando. Ajuda bastante a entender a matéria. Em ambas as situações, as populações crescem, porém, para  $\lambda=0,58$  a taxa de crescimento é menor (Entrevista Piloto).

Identificamos que os objetos matemáticos: autovalores, autovetores e autoespaço relacionam-se baseados em uma matriz e estão associados a um esquema que permite encontrar uma matriz dada e determinar suas propriedades.

Com base na relação  $v_1 = (O_k, 1,3O_k)$  e  $v_2 = (O_k, 0,2O_k)$ , são adotados dois vetores arbitrários  $v_1 = (10,13)$  e  $v_2 = (10,2)$ , possibilitando escrever  $x_0$  como combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ .

Observamos que o aluno não apresentou a concepção objeto do conceito de combinação linear, pois dada a definição  $x_k = c_1 \cdot \lambda_1^k \cdot v_1 + c_2 \cdot \lambda_2^k \cdot v_2$  não conseguiu demonstrar que  $A \cdot x_k = A(c_1 \cdot \lambda_1^k \cdot v_1 + c_2 \cdot \lambda_2^k \cdot v_2)$  resultaria na Equação de Diferenças de primeira ordem  $A \cdot x_k = x_{k+1}$  ( $k = 0,1,2,3,\dots$ ).

P: O  $O_k$  também pode ser escrito como combinação linear dos vetores. Se temos  $c_1 \cdot \lambda_1^k \cdot v_1 + c_2 \cdot \lambda_2^k \cdot v_2$  e se você resolver chegaremos à equação de diferenças. Na realidade, qual é o comportamento da curva quando  $k \rightarrow \infty$ ? O que se deduz quando  $k \rightarrow \infty$ ?

Se  $O_k = c_1 \cdot \lambda_1^k \cdot v_1 + c_2 \cdot \lambda_2^k \cdot v_2$ , então  $O_k = c_1 \cdot (1,02)^k \cdot v_1 + c_2 \cdot (0,58)^k \cdot v_2$ .

Pela relação  $O_k = 1,3 \cdot R_k$  então podemos achar  $O_k = 1$  e  $R_k = 1,3$ .

Vamos pensar somente na equação. O que acontece se elevarmos a um valor muito alto? Observe  $(0,58)^k$ . Por exemplo, se  $k = 10$  e se  $k = 400$ ?

A: Se  $k$  é elevado a 400, ele tende a zero.

P: Vamos ficar somente com  $O_k = c_1 \cdot (1,02)^k \cdot v_1$  porque  $(0,58)^k$  tende a zero.

A: À medida que  $k$  cresce,  $O_k$  cresce absurdamente. Exponencialmente (Entrevista Piloto)

Combinações lineares também são soluções, portanto, para  $k \geq 0$ , podemos escrever:

$$x_k = c_1 \cdot (1,02)^k \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2 \cdot (0,58)^k \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

O aluno conseguiu identificar que, para  $k \rightarrow \infty$ ,  $(0,58)^k \rightarrow 0$ , acarretando a expressão  $x_{k+1} = 1,02 \cdot c_1 \cdot (1,02)^k \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{k+1} = 1,02 \cdot x_k$ . As ações foram interiorizadas em processos que permitiram chegar ao objeto vetor em estado estacionário  $1,02 \cdot x_k$ .

P: No final, chegamos a  $O_{k+1} = 1,02 \cdot O_k$ . O elemento posterior é sempre dependente do elemento anterior. Há sempre essa relação de dependência. Bem, você consegue entender como é o comportamento das populações de coruja e de rato apoiado na equação final?

A: As populações crescem com um fator de 1,02 ao mês. Ambas, com a mesma taxa. Na aula, só trabalhamos a teoria, não me lembro em ter trabalhado com esse tipo de exercício. Depois que você vê resolvido, vê que não tem nenhum mistério aqui.

P: O objetivo é exatamente esse. Mostrar a que leva o autovalor e o autovetor. Na Engenharia, temos os sistemas dinâmicos e esse é um exemplo de sistema dinâmico. Você usou a linguagem natural que foi trabalhada durante o curso. Todos os parâmetros foram compreendidos, você conseguiu identificar o objeto matemático em estudo que é o autovalor e autovetor. Pela representação geométrica, você também identificou o autoespaço. Dentre todos esses conceitos envolvidos, quais foram os que você trabalhou?

A: A transformação do sistema em matriz, produto escalar, o autovalor e autovetor quando a gente usa na vetorização de  $\lambda$ . O exercício começa quando se determina isso (equação matricial). Daí em diante foi achar o autovetor associado para a gente conseguir determinar a evolução que o exercício pede.

P: Você usou a equação matricial.

A: Também a equação característica, o polinômio característico, o determinante da matriz e, em seguida, a gente acha os autovalores e, em seguida, os autovetores. Também usamos a matriz identidade. No final, tivemos a combinação linear.

P: Você conseguiria identificar o contexto em que se desenvolve o problema? Como por exemplo, explicar o que é um crescimento assintótico?

A: Ainda não. Na verdade, foi você que me introduziu o assunto (Entrevista Piloto).

Ressaltamos que a relação dessas concepções não ocorre de modo, necessariamente, contínuo, apresentando diferentes concepções de determinada noção em distintos momentos.

Não há uma única decomposição genética do conceito nem uma única maneira como o sujeito o constrói. A decomposição genética possibilita que os estudantes vejam os exemplos diferentes da prática tradicional de ensino, que é repleta por “exemplos perdidos” (DUBINSKY, 1991). Tais exemplos são envolvidos pela prática da repetição e interpretações, muitas vezes, incorretas que poderão acarretar a construção de esquemas inapropriados.

### *6.2.1 Os Conceitos Imagem e Definição na concepção de Vinner (1991) e Domingos (2003)*

Em nossa análise, são consideradas as concepções de Vinner (1991) e Domingos (2003) referentes aos conceitos imagem e definição. Para tanto, destacamos os objetos matemáticos envolvidos, os processos, a tradução entre as representações, as propriedades e o pensamento proceitual destacado pelo aluno durante a resolução do problema.

Para Vinner (1991), o termo proceito corresponde a um tipo de unidade cognitiva que representa a forma como trabalhamos os símbolos, evidenciando tanto os processos matemáticos como seus conceitos. No problema exposto, exemplos de

proceitos foram destacados em:  $A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -p & 1,1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda^2 - 0,6\lambda + 0,5 = 0$ ,

$A.x_k = A(c_1.\lambda_1^k.v_1 + c_2.\lambda_2^k.v_2)$ ,  $\det A = 0$ , etc.

Como afirmam os autores, símbolos como proceitos operam de forma adequada no cérebro biológico e são responsáveis por ativarem processos desenvolvidos no subconsciente.

O autor supracitado acrescenta que o conceito imagem corresponde a algo não verbal associado à nossa memória, com o conceito nome que é acionado por

um estímulo externo. Este por sua vez, desencadeia na mente do aluno, as representações visuais, suas impressões e experiências a respeito do tema exposto.

Identificamos que, após a leitura do enunciado do problema, o aluno apresentou dúvida em relação ao contexto específico desse enunciado, pois, conforme expôs, ele não havia se deparado com problemas semelhantes.

P: A princípio, dê uma olhada no enunciado e veja se há alguma familiaridade com o que você aprendeu em Álgebra Linear.

A: Não me lembro ter trabalhado um exercício desse (Entrevista Piloto).

Mas, não houve dificuldade, para que ele resolvesse o problema proposto, listando os assuntos tratados em aula. Sua experiência, observada por seus apontamentos da aula, permitiu que iniciasse a representação matricial do sistema de equações lineares exposto no enunciado do problema, atribuindo-lhe uma imagem visual.

A: Nós transformamos esse sistema numa matriz? Aliás, substituindo o valor de  $p$  e transformando o sistema numa matriz, não é?

P: Isso. Então, quer dizer que você representará em forma matricial o sistema.

A: Sim (Entrevista Piloto).

O mesmo ocorreu, após a identificação dos autovalores  $\lambda_1 = 1,02$  e  $\lambda_2 = 0,58$ , com base na identificação da equação característica e resolução do polinômio característico. Com base nos autovalores identificados, o aluno, prontamente, propôs-se a encontrar os autovetores associados.

A: [...]. Se eu calculo o determinante dessa equação, o que eu consigo identificar com a equação característica?

P: Se há uma matriz  $n \times n$ , então, o determinante de  $A$  por  $I$  é igual ao chamado polinômio característico. Você vai achar o valor de  $\lambda$ .

A: Sim, que é o autovalor.

#### **Encontrando as raízes do polinômio característico:**

A:  $\lambda^2 - 0,6\lambda + 0,5 = 0$  e ai você resolve e acha os autovalores. Deram 1,02 e 0,68.

P: Você encontrou  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

A: Agora vamos encontrar os autovetores associados a esses autovalores. Um dos autovetores é zero? O de 1,02? Eu acho que eu raciocinei totalmente errado. São duas equações e duas incógnitas, então, é um SPD, não é? Se for SPI é que tem inúmeras soluções. São infinitos vetores. Qualquer vetor cabe nessa situação (Entrevista Piloto).

Identificamos que o conceito imagem do objeto matemático exposto pelo aluno foi relacionado ao conceito definição, e sua construção ocorreu baseada na interação entre ambos (Figura 5). Assim, a exploração de exemplos e explicações desenvolvidos em aula possibilitou a construção do conceito imagem, baseado no conceito definição apresentado pelo professor ao elucidar o tema. Mas, não foram refletidos todos os aspectos do conceito definição, como as definições formais, teoremas e suas demonstrações, quando o aluno buscou resolver o problema.

Evidenciamos que o sujeito de nossa investigação está no nível do conceito imagem instrumental ou operacional em relação a determinados objetos matemáticos, porém, a grande maioria mostrou estar no nível do conceito imagem relacional. Um exemplo do nível de conceito imagem instrumental foi exposto, quando o aluno referiu-se às expressões algébricas e ao gráfico como objetos, mas, não foi capaz de explicitar os processos que lhe permitem definir o conceito.

P: Então, você chegou em 1,02 e 0,58. Você tem infinitas soluções?

A: Sim. Para qualquer valor de  $O_k$ , temos infinitos  $R_k$ .

P: Que representação geométrica você conseguiu estabelecer?

A: Na verdade, você vai ter duas retas.

P: Isso (Entrevista Piloto).

Como afirma Dreyfus (1991), quando muitas representações são consideradas em paralelo, a relação com o conceito abstrato torna-se importante. Assim, estruturas cognitivas são aprimoradas, quando os estudantes pensam paralelamente em diferentes representações (algébricas, geométricas, visuais, etc.), propiciando uma complementaridade entre a Matemática e os aspectos cognitivos da representação das estruturas matemáticas, entre a abstração e representações mentais.

Portanto, constatamos que o aluno estabeleceu uma relação entre diversas representações, conectando-as de modo flexível.

É necessário que sejam consideradas todas as relações entre os objetos envolvidos, para que haja uma compreensão adequada do conceito. Também pudemos evidenciar a descrição de Domingos (2003) ao afirmar que os alunos nesse nível de conceito imagem são capazes de relacionar os processos a objetos concretos, porém, de maneira parcial e insuficiente aos objetos abstratos, tomados pela representação simbólica. Em muitas situações, o aluno ultrapassou a operacionalidade dos processos, atingindo o nível do conceito imagem relacional. Nesse nível, são destacadas suas propriedades, mas, em algumas situações, ainda, em caráter elementar. O aluno recorreu às propriedades do Teorema da Matriz Invertível para cálculo de todos os  $\lambda$  para os quais a matriz  $A - \lambda I$  não é invertível. Identificamos que a matriz deixa de ser invertível, quando seu determinante é zero.

Após a identificação dos autovalores, autovetores associados e autoespaço, o aluno expõe a relação estabelecida entre as equações que definem o crescimento assintótico da população de corujas e ratos.

P: No final, chegamos a  $O_{k+1} = 1,02 \cdot O_k$ . O elemento posterior é sempre dependente do elemento anterior. Há sempre essa relação de dependência. Bem, você consegue entender como é o comportamento das populações de coruja e de rato a partir da equação final?

A: As populações crescem com um fator de 1,02 ao mês. Ambas, com a mesma taxa. Na aula, só trabalhamos a teoria, não me lembro em ter trabalhado com esse tipo de exercício. Depois que você vê resolvido, vê que não tem nenhum mistério aqui (Entrevista Piloto).

Assumimos, portanto, que ele tem o conceito imagem relacional do objeto matemático autovalor e autovetor.

Para o aluno, participante de nossa pesquisa, a maioria das propriedades dadas pela definição que caracteriza o tema autovalor e autovetor é destacada como objeto. Ele envolve relações com outras ideias, dentre elas, uma fórmula singular, uma representação gráfica e, no final do desenvolvimento do problema proposto, conseguiu identificar contextos específicos como o exposto no enunciado do problema (estudo de sistemas dinâmicos). Além disso, o mesmo tema apresenta uma figura reconhecida, dada por vetores, matrizes, equações, polinômios e determinantes.

Como refere Dreyfus (1991), a descoberta, a intuição e a checagem correspondem ao início da sequência dos processos matemáticos cujo objetivo é compreender as relações abstratas que se encontram entre os objetos matemáticos.

O aluno acrescenta que, a princípio, não houve familiaridade com o problema proposto e que a exposição do tema, com base nos problemas específicos e particulares do curso de Engenharia, é interessante e pertinente à sua formação.

### ***6.3. A reformulação da investigação piloto***

Na investigação piloto, propusemo-nos a investigar os discursos dos alunos participantes, baseados nas ideias expostas no projeto anteriormente citado. Contudo, após um estudo mais aprofundado do projeto de Trigueros *et al.* (2012), passamos a considerar as principais ideias que caracterizam as concepções ação-processo-objeto-esquema referentes ao objeto matemático autovalor e autovetor. A revisão bibliográfica também nos permitiu assumir as ideias tratadas no trabalho de Stewart (2008) a respeito do tema.

Afirmamos que também houve um aperfeiçoamento das ideias discutidas a respeito dos conceitos imagem e definição, com base nas pesquisas de Vinner (1991) e Domingos (2003) que não foram evidenciadas na investigação piloto.

Conforme exposto, para efeito de análise decidimos pela reformulação da investigação, contemplando as principais ideias que serão expostas nos trabalhos seguintes e que serão apresentadas, resumidamente, nos dados dos Quadros 5 e 6.

### ***6.4 As concepções (ação-processo-objeto-esquema) de acordo com Stewart (2008)***

A ideia implícita de Stewart (2008) é o estudo de equações na forma  $A.x = \lambda.x$  em que  $A$ ,  $x$  e  $\lambda$  são, respectivamente, a matriz dada, o autovetor e o autovalor e observar os vetores que são transformados pela matriz  $A$  em um múltiplo escalar de si mesmo. Stewart (2008) considera que as manipulações simbólicas são necessárias, para que os alunos adquiram uma noção intuitiva do conceito, contudo, isso nem sempre é possível. Além disso, atribui ao conceito de autovalor e autovetor uma forte imagem corporificada que ilustra a relação simbólica  $A.x = \lambda.x$ .

Dado que  $x$  e  $\lambda$ , são autovetor e um autovalor para a matriz  $A$ , geometricamente a matriz estendeu-se (ou encolheu) a magnitude de  $x$  por um fator de  $\lambda$  (o autovalor). Assim, existe uma linha (ou plano) associada a um autovetor ou autovetores. Os autovetores também informam que a direção foi preservada<sup>56</sup> (STEWART, 2008, p. 197).

No cenário tradicional, o conceito de autovalor e autovetor é apresentado com base em sua definição formal, na qual a relação simbólica da matriz  $A.x = \lambda.x$  é usada na definição para encontrar os autovalores e autovetores associados.

A decomposição genética de tais conceitos permite que sejam perceptíveis: (a) a concepção-ação: encontrar os autovalores e autovetores; (b) concepção-processo: perceber que existem infinitos autovetores associados ao autovalor e compreender o processo de encontrá-los baseados em qualquer matriz  $A$ ; e (c) concepção-objeto: compreender a definição de autovalores e autovetores como objetos.

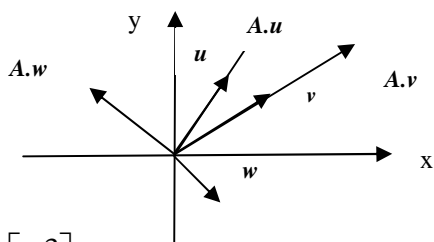
Na pesquisa de Stewart (2008), listamos as questões aplicadas aos alunos entrevistados:

---

<sup>56</sup> Tradução nossa: *Given that  $x$  and  $\lambda$  are an eigenvector and an eigenvalue for a matrix  $A$ , geometrically the matrix  $A$  stretches (or shrinks) the magnitude of  $x$  by a factor of  $\lambda$ . In fact all multiples of  $x$  (except the zero vector) are also stretched (shrunk) by a factor of  $\lambda$  (the eigenvalue). Thus there is a line (or plane) associated with an eigenvector or eigenvectors. The eigenvectors also inform one that the direction was preserved.*

Figura 24 - Questões apresentadas sobre autovalores e autovetores

1. Descreva o termo autovetores com suas próprias palavras;
2. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  uma matriz de ordem  $2 \times 2$ . Quais são os autovalores e autovetores da matriz  $A$ ?
3. Quantos diferentes autovetores são associados com um dado autovalor?
4. Como podemos decidir se um dado vetor é um autovetor de uma matriz? Explique isso com suas próprias palavras;
5. Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , explique porque a figura abaixo não é possível.



6. Podem  $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$  ambos serem autovetores de uma dada matriz? Explique sua resposta.
7. Se  $A.x = \lambda.x$  coloque todos os passos necessários para mostrar que  $(A-\lambda I).x=0$

Fonte: Adaptado de Stewart (2008, p. 198)

A pesquisa foi dividida em duas fases, a primeira composta por dez estudantes do primeiro ano dos cursos de Matemática e Ciências da Universidade de *Auckland*, e a segunda com 42 alunos participantes do segundo ano do mesmo curso e universidade.

Quando os alunos entrevistados foram questionados a respeito do conceito de autovetor, três, dentre os dez participantes da primeira fase, apresentaram a ideia de direção de um vetor. Dentre as respostas obtidas, foi considerada a preservação da direção dos autovetores quando multiplicados (ou transformados) por uma matriz específica. Assim, os alunos entendem que o autovetor pode mudar em comprimento, mas, não em direção. A resposta de um aluno evidenciou adicionalmente a noção corporificada de mudança de comprimento, como parte de seu esquema.

As construções mentais dos estudantes ilustraram seus pensamentos procedimentais com base na: (a) representação matricial e (b) representação algébrica.

a) 
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \text{ em que } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \text{ é a matriz, } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ os autovetores e } u \text{ o autovalor}$$

b)  $A \cdot v = \lambda \cdot v$ , em que  $v$  são os autovetores e  $\lambda$  o autovalor.

Stewart (2008) considerou as respostas dos estudantes no ensino do tema que, muitas vezes, desprestigiou as representações geométricas em relação à apresentação formal dos conceitos.

Na segunda parte de sua pesquisa, dos 42 estudantes entrevistados, 16 não atribuíram uma definição e 17 referiram-se à parte procedimental da definição  $A \cdot x = \lambda \cdot x$ . Uma resposta típica dessa questão é apresentada a seguir: *Autovalores são encontrados a partir de  $\det(A-\lambda I) = 0$ . Autovetores são encontrados por  $(A-\lambda I) \cdot v = 0$  e têm a relação de  $A \cdot v = \lambda \cdot v$* <sup>57</sup> (Adaptado de Stewart, 2008, p. 200).

A resposta anterior destaca um conjunto de instruções para encontrar os autovalores e autovetores, porém pouco evidencia o que realmente são.

O autor citado afirma que todas as respostas indicaram o pensamento dos estudantes no mundo simbólico e que eles buscaram descrever procedimentalmente a fórmula  $A \cdot x = \lambda \cdot x$ . Quando questionados a respeito da compreensão do conceito, a resposta de um aluno, embora bastante vaga mostrou uma opinião honesta do que, de fato, ocorreu nas aulas.

Sim, porque é isso que eu disse. Eu não tenho certeza, o que são autovalores e autovetores e, em nossa aula, eles simplesmente nos ensinam, ok, este é chamado autovalor e você pode lembrar isso, ele irá aparecer no seu exame, e essa é a maneira como você o calcula e esse vetor obtido é chamado autovetor e esse valor que tem lambda é chamado autovalor. Assim, parece que eu sei o que é

<sup>57</sup> Tradução nossa: *Eigenvalues are found through  $\det(A-\lambda I)=0$ ; Eigenvectors are found by  $(A-\lambda I)v=0$  and have the relationship of  $Av = \lambda v$ .*

autovalor e autovetor, mas, na verdade, eu não sei o que eles são<sup>58</sup> (STEWART, 2008, p. 202).

Em seguida, quando o aluno foi questionado a respeito da definição do conceito, respondeu: *Eu não entendo, o que são autovalores e autovetores. Eu acho que posso calculá-los. Eu consegui calculá-los muito facilmente. Eu não gosto disso*<sup>59</sup> (STEWART, 2008, p. 202).

Portanto, o aluno apresentou dificuldades para compreender o conceito, porém, pode calcular seus valores baseado na manipulação procedimental dos símbolos.

O autor citado ressalta que ficou evidente a busca dos estudantes por mais conhecimento a respeito do tema. Após a discussão com o pesquisador de que uma matriz  $n \times n$  tem  $n$  autovalores e cada autovetor corresponde a um autovalor, haverá, portanto, infinitos autovetores. Isso permitiu expandir a compreensão ao tema autoespaço que possibilitou a discussão sobre a noção de base. Os alunos acrescentaram que, em suas compreensões iniciais, havia a ideia limitada de vetor finito. Desse modo, passaram a buscar conexões com todas as peças de informação que não faziam sentido anteriormente. Uma vez descoberta a existência de infinitos autovetores foi possível compreender o conceito de autoespaço. No que dizia respeito aos temas expostos, tudo foi se encaixando como uma peça de quebra-cabeça.

Com base na representação geométrica, os estudantes descobriram que há infinitos autovetores e que todos são linearmente independentes.

### *Manipulação-ação simbólica do problema*

Uma das questões mais frequentes é encontrar os autovalores e autovetores com base em uma matriz dada.

---

<sup>58</sup> Tradução nossa: *Yeah, because that is what I said, I'm not sure what is eigenvalues and eigenvectors for, and in our class they just teach us, ok this is called eigenvalue and you can remember that and it will appear on your exam paper and this is the way you calculate it and this vector get it called eigenvector and this value got it lambda it's called eigenvalue. So its seems I know what is eigenvalue and eigenvector, but actually I don't know what they are, yeah.*

<sup>59</sup> Tradução nossa: *I don't quite understanding what eigenvalues and eigenvectors are. I think I can calculate them. I managed to calculate them very easily. I don't like it.*

Stewart (2008) identifica que, mesmo que alguns alunos cheguem aos resultados corretos dos autovetores e autovalores associados, nem todos seguem os passos corretos na obtenção dos mesmos.

O autor citado discute que, na Teoria APOS, a manipulação simbólica dos resultados evidencia a concepção-ação dos alunos participantes. Nessa situação, eles limitam-se a procedimentos de cálculo para encontrar os resultados.

### *Problemas de objetos conceituais*

As questões 3 e 4 buscaram evidenciar o pensamento conceitual dos estudantes com base em duas propriedades significantes.

Sem fazer qualquer cálculo um estudante mostrou que um vetor é um autovetor baseado em sua representação geométrica. O autor acrescenta, *isso pode ser conseguido geometricamente se o vetor pertencer ao autoespaço, ou poderá ser verificado, simbolicamente, mostrando, que a relação na definição aplica-se a  $A.x = \lambda.x$ .*<sup>60</sup> (STEWART, 2008, p. 205). O autor afirma que era esperado que os alunos percebessem que qualquer múltiplo escalar de um autovetor também seja um autovetor. Contudo, essa percepção não é enfatizada ou talvez nem mesmo exista nas aulas.

Dentre os alunos entrevistados, apenas um escreveu os autovetores de maneira correta  $\begin{bmatrix} v_1 \\ 2v_2 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , porém, nada foi dito a respeito do número infinito de possíveis autovetores ou que qualquer múltiplo escalar de  $v_1$  também fosse considerado um autovetor.

### *Visão corporificada dos autovetores*

A questão 5 foi apresentada com o propósito de testar a habilidade dos alunos em reconhecer os autovetores em uma representação diferente da apresentada usualmente. Para Stewart (2008), a ideia geométrica da questão permite a visualização e a compreensão, quando um autovetor é multiplicado por

---

<sup>60</sup> Tradução nossa: *This can be achieved geometrically if the vector belongs to the eigenspace, or it can be checked symbolically by showing that the relationship in the definition holds, namely  $A.x = \lambda.x$ .*

uma matriz, ele terá a mesma direção, porém, não necessariamente o mesmo sentido. Na questão, os alunos reconheceram geometricamente que cada um dos três vetores satisfazia a definição de autovetores, porém perceberam uma contradição em suas respostas com o enunciado do problema ao afirmarem que uma matriz  $2 \times 2$  não pode ter três vetores independentes, uma vez que só pode haver, no máximo, dois autovalores. Assim, apenas 6 dos 42 alunos entrevistados justificaram que o diagrama apresentado na questão não fazia sentido, uma vez que a matriz  $A$  de ordem  $2 \times 2$  apresenta no máximo dois autovetores de diferentes direções.

Dentre as respostas obtidas, foi destacada a noção de base de um espaço vetorial e de vetores linearmente independentes.

De acordo com a resposta de um aluno, a impossibilidade de lembrar a definição do conceito, chamada por Stewart (2008), de ideias formais, levou-o à manipulação simbólica (ações), que foi denominada pelo próprio entrevistado de ideias básicas. No entanto, sua resolução não expressou uma visão do processo nem houve conclusões a respeito de suas manipulações.

O pesquisador observou que a maioria dos estudantes não reconheceu os autovetores em diferentes representações e relacionou o fato de que uma matriz de ordem  $2 \times 2$  pode ter dois autovetores linearmente independentes.

### *Relacionando a representação matricial ao pensamento corporificado*

O objetivo da questão 6 foi identificar se a compreensão dos alunos sobre autovetores estava limitada às representações algébrica e matricial ou se eles conseguem relacionar tais representações às resoluções visuais, ou o que o autor intitula de pensamento corporificado.

Dentre as respostas destacadas pelo autor, foi evidenciada a relação estabelecida com as representações algébrica e matricial, sempre envolvendo

múltiplos como  $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot (-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ . No entanto, ocasionalmente, um comentário

geométrico foi estabelecido, como por exemplo,  $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$  são múltiplos um do

outro em direções opostas. Em outros comentários, foram retomadas as ideias de vetores linearmente independentes. Assim, o autor acrescenta que as ideias corporificadas nas aulas consideradas tradicionais pouco enfatizam o pensamento geométrico.

Embora alguns alunos estivessem respondendo de uma maneira não geométrica, isto é claro que não significa que eles não são capazes de pensar geometricamente. No entanto, é provável que, neste caso, ideias tradicionalmente corporificadas não foram enfatizadas como tal nas aulas<sup>61</sup> (STEWART,2008, p. 211).

Em outra resposta, o estudante revelou pensamentos similares a de seus colegas a respeito do múltiplo escalar (-1), porém, com um esquema mais completo destacado na percepção da possibilidade de infinitos autovetores.

Os resultados gerais da questão 6 evidenciaram que poucos estudantes conseguiram estabelecer conexões e ver o fato de que qualquer múltiplo escalar de um autovetor é também um autovetor e que há infinitos autovetores para todo autovetor. Portanto, a tarefa de encontrar os autovetores sempre foi efetuada pelos estudantes, porém a compreensão conceitual e explicações sobre os resultados nem sempre foram enfatizadas nas aulas.

### *Problema Processo-Objeto*

Stewart (2008) assume como hipótese de que há uma possível concepção processo-objeto relacionada à equação  $A.x = \lambda.x$ , no sentido de que ambos os membros da equação representam processos distintos e que devem ser encapsulados, para que sejam estabelecidos objetos matemáticos equivalentes. Assim, no lado esquerdo da equação, temos uma matriz que deve ser multiplicada por um vetor e, no lado direito, o processo de multiplicar um vetor por um múltiplo escalar, resultando em um mesmo vetor como objeto final. O autor acrescenta que essa relação pode criar um obstáculo ao pensamento do estudante.

---

<sup>61</sup> Tradução nossa: *Although some students were answering in a non-geometric manner, this does not of course, mean that they definitely were not able to think geometrically. However, this is likely in this case, as traditionally embodied ideas were not emphasised as such in the lectures.*

Dentre as questões destacadas pelo autor, a questão 7 buscou evidenciar, como a perspectiva do estudante nessa mudança da equação pode influenciar sua habilidade ao respondê-la.

Durante sua resolução, uma resposta não revelou a natureza da matriz identidade, contudo o aluno fez comentários a respeito dela em  $(A - \lambda I).v = 0$ : *Note o uso de I aqui*<sup>62</sup> (STEWART, 2008, p. 214).

Para a realização desta análise, Stewart apresentou a definição dada no livro-texto adotado pela instituição:

Figura 25 - Definição de Autovalor e Autovetor

**Definição 6.4.** Dada uma matriz  $A$  quadrada de ordem  $n \times n$ , podemos às vezes encontrar um vetor não-nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  e um escalar correspondente  $\lambda$ , tal que  $A.v = \lambda.v$ . Chamamos qualquer vetor não-nulo  $v$  que satisfaz (6.4) de autovetor de  $A$ , e o correspondente escalar  $\lambda$  um autovalor. A equação matricial pode ser reescrita  $(A - \lambda I).v = 0$ .

A maneira mais direta de encontrar os autovalores de uma matriz  $A$  de ordem  $n \times n$  é reescrever a equação  $A.x = \lambda.I.x$ , ou equivalentemente, como  $(\lambda.I - A).x = 0$ .

Fonte: Adaptado de Stewart (2008, p. 215)

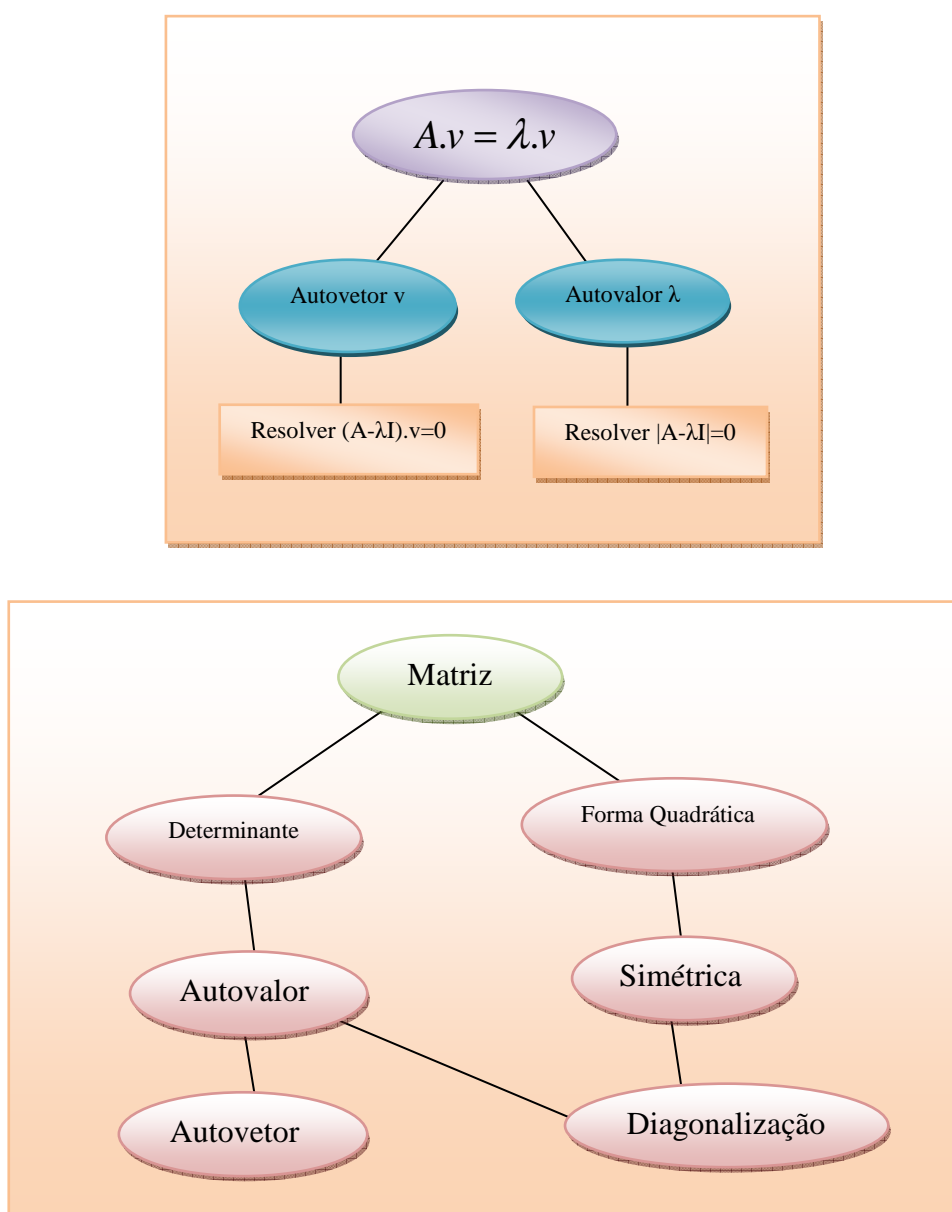
Dentre os 42 alunos entrevistados, 13 não entenderam o que era  $I$ , de onde veio e qual seu papel na equação, três não notaram ou ignoraram a matriz identidade ou, simplesmente, inseriram-na no final da linha sem fazer qualquer menção a ela. Contudo, quatro estudantes notaram e tentaram justificar a existência da matriz identidade na equação. Os resultados evidenciaram que essa passagem realizada no mundo simbólico algébrico, de  $A.x = \lambda.x$  para  $(A - \lambda I).x = 0$  não foi percebida por muitos estudantes.

<sup>62</sup> Tradução nossa: *note the use of I here.*

Stewart (2008) acrescenta que os livros-texto ou apostilas dos cursos tendem a mover o foco da atenção para  $\lambda.I$  em lugar de  $I.x$ .

Em outro momento, foi solicitado aos estudantes que desenhasssem um mapa conceitual a respeito de suas compreensões de autovalores e autovetores. Na análise do pesquisador, foi perceptível que não houve nem, remotamente, a relação com a representação geométrica. A figura seguinte mostra um exemplo típico de um mapa conceitual e outro bastante raro, na visão do autor.

Figura 26 - Mapas Conceituais de Autovalores e Autovetores dos estudantes 2<sup>a</sup>-28 (Esquerda) e 2<sup>a</sup>-30 (Direita).



Fonte: Adaptado de Stewart (2008, p. 218)

Dos 42 estudantes participantes, quando questionados a respeito do termo autovetor, a maioria referiu-se à parte procedimental da definição ( $A.x=\lambda.x$ ). Os resultados evidenciaram dificuldades em encontrar os autovetores e autovalores (que foram chamados pelo autor de *manipulações ação-simbólico-matriz*)<sup>63</sup> (STEWART, 2008, p. 218). Já os *problemas conceituais-objeto*<sup>64</sup> (STEWART, 2008, p. 218) apontados nas questões 3 e 4 revelaram uma falta de compreensão dos estudantes. Na questão 5, houve grande dificuldade dos alunos para justificar suas respostas, quanto ao fato de relacionar os autovetores dados com a matriz de ordem  $2 \times 2$ .

Stewart (2008, p. 218) também revela a dificuldade que os alunos apresentaram ao considerarem que qualquer múltiplo escalar de um autovetor também é um autovetor (tal discussão foi realizada na questão 6). Esta passagem, o autor chamou de visão *processo-simbólico-matriz*<sup>65</sup>.

Em outro resultado, o autor apresentou que a progressão do mundo algébrico-simbólico de  $A.x = \lambda.x$  para  $(A - \lambda.I).x = 0$  não é facilmente perceptível por muitos estudantes que tiveram grande dificuldade em trabalhar com processos diferentes na primeira equação, e outros não identificaram a que a matriz  $I$  referia-se.

### *Uma possível dificuldade processo/objeto com $A.x = \lambda.x$*

No estudo do conceito de autovalor e autovetor, Stewart (2008) assumiu como hipótese que alguns estudantes têm dificuldades com a representação simbólica dos conceitos relacionados à equação  $A.x = \lambda.x$ . Tal tensão pode ser percebida, quando ambos os membros da equação apontam para diferentes processos, porém devem ser encapsulados para formar o mesmo objeto matemático. Acrescenta que essa compreensão é parte crucial da definição do conceito de autovetor. É evidente que tal conflito só fica claro pelos alunos, quando são confrontados pela discussão, pois caso contrário parece passar despercebido.

A passagem do mundo simbólico-algébrico de  $A.x = \lambda.x$  para  $(A - \lambda I).x$  não foi de fácil compreensão aos estudantes. O autor citado considera que os cursos de Álgebra Linear não enfatizam claramente o fato de que  $I.x = x$ . Assim,  $I$  é uma matriz

<sup>63</sup> Tradução nossa: *action-symbolic-matrix manipulations*.

<sup>64</sup> Tradução nossa: *conceptual-object problems*.

<sup>65</sup> Tradução nossa: *process-symbolic-matrix*.

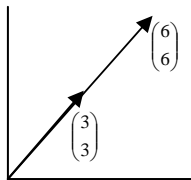
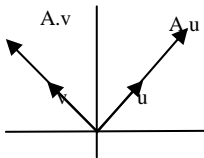
$n \times n$  usada no processo e que será multiplicada pelo vetor  $x$  e não por  $\lambda$ , resultando em  $I.x = x$ . Temos, portanto,  $\lambda.I \neq \lambda$  e  $\lambda.I.x = \lambda.x$ .

As entrevistas confirmaram que a maioria dos estudantes não sabia o papel da matriz identidade na equação  $A.x = \lambda.x$ , contudo estes esforçaram-se em compreendê-lo.

Stewart (2008) apresenta os dados de sua pesquisa resumidos no Quadro 5. O autor afirma que tal apresentação permitirá uma visão mais abrangente do conceito aos professores e pesquisadores. Assumimos que nossa análise será baseada nos dados do mesmo.

### *Principais ideias definidas por Stewart (2008)*

Quadro 5 - Teoria APOS e Os Três Mundos para Autovalores e Autovetores de acordo com Stewart (2008)

APOS	Mundo Corporificado	Mundo Simbólico		Mundo Formal
		Representação Algébrica	Representação Matricial	
Ação	<p>Pode aplicar uma transformação específica e multiplicar por um escalar específico</p> 	<p>Pode simplificar <math>A.x = \lambda.x</math> para <math>(A - \lambda.I).x=0</math> em um exemplo específico para encontrar os autovetores.</p>	<p>Pode encontrar os autovalores e autovetores da matriz <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 \end{bmatrix}</math>.</p> <p>Pode encontrar uma base de um autoespaço.</p>	
Processo	<p>Pode aplicar uma transformação e apresentá-la em como caso geral.</p> 	<p>Pode verificar que há infinitos autovetores associados a um autovalor. Compreende o processo <math>(A - \lambda.I).x=0</math> (realiza a operação <math>I.x = x</math>)</p>	<p>Pode compreender que cada múltiplo escalar de um autovetor é também um autovetor.</p>	<p>Pode se relacionar a uma base de um autoespaço. Um autoespaço consiste no vetor nulo e todos os vetores linearmente independentes.</p>

APOS	Mundo Corporificado	Mundo Simbólico		Mundo Formal
		Representação Algébrica	Representação Matricial	
Objeto	Vetores que são transformados por uma matriz e esticados ou contraídos na mesma direção por um escalar.	Compreende que para $A.x = \lambda.x$ de cada lado da equação o objeto final é um vetor.		Compreende a definição de autovetores e autovalores.

Adaptado de Stewart (2008, p. 99)

### 6.5 *As concepções (ação-processo-objeto-esquema) de acordo com Trigueros et al. (2012)*

Nesta seção, temos por base o Projeto nº 62375 de investigação em Ciências Básicas do Departamento de Matemática do Instituto Tecnológico do México e da Associação Mexicana de Cultura A. C., intitulado *Desenvolvimento de Modelos de Aplicação dos conceitos de Álgebra Linear para a aprendizagem significativa*. Tal projeto visa a expor conteúdos específicos da disciplina Álgebra Linear e modelos relacionados às aplicações desses conteúdos, dentre eles: Espaços Vetoriais (Modelo da Teoria dos Códigos), Transformações Lineares (Modelo do Ciclista) e Autovalores e Autovetores (Modelo de Emprego e Desemprego). Todos os exemplos apresentados são fundamentados na Teoria APOS e expõem suas decomposições genéticas com os modelos aplicados.

Assim, propomo-nos a analisar o discurso dos alunos participantes de nossa pesquisa com base nas categorias e/ou classificações estabelecidas pelo projeto na construção do objeto matemático Autovalor e Autovetor.

Seguimos com a apresentação do problema e etapas desenvolvidas no projeto.

#### *O problema exposto*

Em uma economia, há certo número de pessoas empregadas e algum número de pessoas desempregadas num momento específico. A soma das pessoas empregadas e as desempregadas são

consideradas a força de trabalho da economia que pode ser considerada constante. Considera-se a probabilidade de que uma pessoa desempregada encontre trabalho em qualquer momento dado e a probabilidade de que uma pessoa empregada continue empregada nesse momento.

a) Encontre um modelo que descreva a dinâmica do emprego.

De acordo com esse modelo, o que é esperado para acontecer a longo prazo com o número de pessoas ocupadas e o número de pessoas desempregadas?<sup>66</sup> (TRIGUEROS *et al.*, 2012, p. 173).

A busca da solução é dividida pelos pesquisadores em quatro fases, a saber:

**Fase 1:** Exploração e primeiras aproximações com a solução: nessa fase, o problema é apresentado aos alunos, e as dúvidas são exploradas e explicadas. Pretende-se encontrar estratégias baseadas na solução do modelo dinâmico de populações, ocorrendo a intervenção do professor, para que, com os alunos, possa eleger o modelo que pareça mais pertinente;

**Fase 2:** Busca da solução: com base na apresentação da equação de diferenças, o professor questiona os alunos sobre o que é esperado da solução. A atenção é direcionada à solução de uma função discreta que descreva a variação do emprego e desemprego em relação ao tempo transcorrido. Nessa fase, o professor intervém proporcionando aos alunos valores específicos aos parâmetros do modelo e sugere que escrevam o sistema usando notação matricial. A solução do tipo  $\bar{x}_{k+1} = A^{t+1} \bar{x}_0$  é proposta pelos alunos. O professor questiona se essa solução é pertinente e se no lugar da potência de matrizes poderia ter sido usado um escalar. Os conhecimentos prévios e as relações entre eles são estabelecidas pelos alunos, chegando ao polinômio característico e suas possíveis famílias de soluções do modelo com os parâmetros dados. Nessa fase, já é possível que se discuta qual o espaço gerado pelas soluções encontradas e qual é sua representação geométrica;

---

<sup>66</sup> Tradução nossa: *En una economía se tiene un cierto número de personas empleadas y un cierto número de personas desempleadas en tiempo específico. La suma de las personas empleadas y las desempleadas se considera la fuerza laboral de La economía que puede considerarse que se mantiene constante. Si se considera La probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier momento dado y la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada en ese momento. a) Encuentra un modelo que describa la dinámica del empleo. b) De acuerdo a este modelo ¿Qué se esperaría que pasara al largo plazo con el número de personas empleadas y el número de personas desempleadas?*

**Fase 3:** Construção da solução geral do problema. Princípio da Superposição: o professor discute sobre qual das soluções encontradas é melhor para o problema. Em seguida, é apresentada a possibilidade de formar uma combinação linear das soluções encontradas, e se esta combinação é solução do sistema. É discutido se as soluções são linearmente independentes, e o que gera o conjunto formado pelas soluções apresentadas; e

**Fase 4:** Formalização da solução em termos de Autovalores e Autovetores e sua representação geométrica: é possível que se discuta o comportamento a longo prazo da solução dos modelos e sejam estabelecidas as relações entre os conceitos de Autovalor, Autovetor e Autoespaço e os conceitos de Base e Dimensão.

### *A solução do problema*

O sistema que descreve a dinâmica da situação é apresentado:

$$\begin{cases} x_{t+1} = q \cdot x_t + p \cdot y_t \\ y_{t+1} = (1 - q) \cdot x_t + (1 - p) \cdot y_t \end{cases} \text{ em que } p \text{ e } q \text{ são parâmetros do sistema.}$$

Assumindo valores quaisquer para  $p$  e  $q$ , por exemplo,  $p = \frac{1}{3}$  e  $q = \frac{1}{2}$ , é obtido

o sistema :

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{1}{2} \cdot x_t + \frac{1}{3} \cdot y_t \\ y_{t+1} = (1 - \frac{1}{2}) \cdot x_t + (1 - \frac{1}{3}) \cdot y_t \end{cases}$$

Nesse momento, o professor intervém, para que se estabeleça a notação matricial do sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

ou

$$\overline{x_{t+1}} = A \cdot \overline{x_t} \quad (1)$$

Novamente, há a intervenção do professor que propõe que a equação (1) seja escrita na forma  $\overline{x_{t+1}} = \lambda^{t+1} \cdot \overline{v}$  e, portanto,  $\overline{x_t} = \lambda^t \cdot \overline{v}$ .

Após a demonstração, os autores expõem que  $\bar{x}_t = \lambda^t \bar{v}$  para  $\lambda = 0$  é o mesmo que  $A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0}$  ou  $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ , chegando à equação de diferenças.

Para tanto,  $\lambda$  e  $\bar{v}$  precisam cumprir com a equação anterior. É necessário que o sistema apresente solução múltipla para  $\|A - \lambda I\| = 0$ .

A partir do determinante  $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix}$ , são encontrados os autovalores  $\lambda_1 = 1$

e  $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ . O próximo passo é encontrar os autovetores associados à  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

A substituição de  $\lambda_1 = 1$  em

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

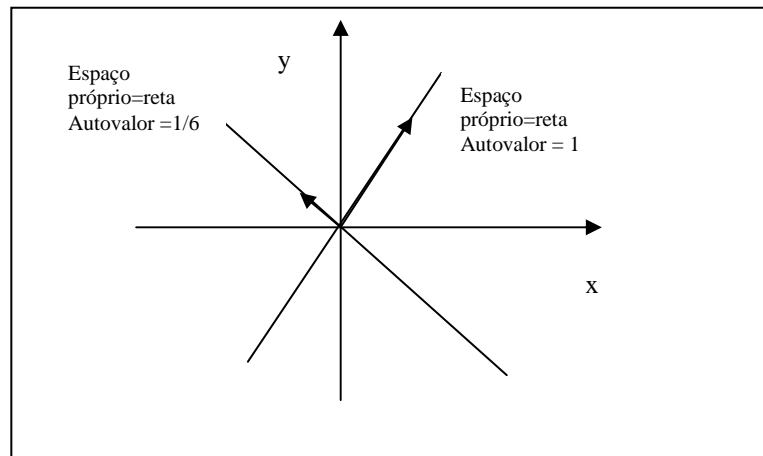
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}y_1 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{3}{2}x_1 \Rightarrow \bar{v} = \left( x_1, \frac{3}{2}x_1 \right)$$

permite chegar a uma infinidade de soluções e todas geram uma linha reta. Assim, os alunos conseguem identificar uma família de vetores associados à  $\lambda_1$ . De maneira análoga, encontram os autovetores associados à  $\lambda_2$  e reconhecem também a infinidade de soluções. Para a interpretação da solução encontrada, basta que elejam apenas um autovetor. Para  $\lambda_1 = 1$ , tem-se o autovetor  $\bar{v}_1 = (2, 3)$  e para  $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ , o autovetor  $\bar{v}_2 = (1, -1)$ . Cada vetor corresponde a apenas uma possível solução.

Os alunos reconhecem a representação geométrica para estabelecer o conceito de espaço-próprio para  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ . Em seguida, é pedido aos alunos que elejam outras condições iniciais, para que os valores sejam representados graficamente e seja analisado o comportamento das soluções encontradas.

Figura 27 - Representação Geométrica



Fonte: Adaptado de Trigueros *et al.* (2012, p. 178)

Assim, se  $\bar{v}_1$  e  $\bar{v}_2$  são vetores próprios de uma matriz  $A$ , associados a seus autovalores, a combinação deles também é solução:  $\bar{x}_t = c_1 \cdot \lambda_1^t \cdot \bar{v}_1 + c_2 \cdot \lambda_2^t \cdot \bar{v}_2$ .

São assumidos valores quaisquer para  $\bar{v}_1$  e  $\bar{v}_2$  acarretando a discussão entre os alunos do significado do comportamento da solução a longo prazo. Portanto, a equação  $\bar{x}_t = c_1 \cdot \lambda_1^t \cdot \bar{v}_1 + c_2 \cdot \lambda_2^t \cdot \bar{v}_2$  é utilizada para interpretar os resultados, quando  $t \rightarrow \infty$ . Podemos concluir que, quando  $t \rightarrow \infty$  a solução, não mais dependerá das condições iniciais.

Assim, como o Quadro 5 exposto por Stewart (2008), apresentamos, a seguir, o Quadro 6 que, de maneira resumida, poderá auxiliar professores e pesquisadores na identificação das características que evidenciam as concepções, reveladas na Teoria APOS. Assumimos que tais características serão consideradas em nossa análise.

*As principais ideias expostas por Trigueros et al. (2012) na resolução do problema*

Quadro 6 - As principais ideias a respeito das concepções ação-processo-objeto-esquema de acordo com Trigueros *et al.* (2012)

Concepção ação		Concepção processo		Concepção objeto	Concepção esquema
Multiplicar uma matriz por um vetor qualquer					
Multiplicar um escalar qualquer pelo mesmo vetor.					
Formar uma igualdade com as expressões $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v$	Interiorização das ações anteriores em processos e que se coordenam no processo de	Formar a equação vetorial para qualquer matriz dada.			
		Solucionar o Sistema de Equações			
		Determinar quais características devem cumprir o escalar e a matriz, para que a equação tenha um conjunto solução que contenha múltiplas soluções.			

Concepção ação		Concepção processo		Concepção objeto	Concepção esquema
		Repetir o processo anterior, para que se determine a multiplicidade algébrica e geométrica das soluções.			
			Encapsulação do processo anterior para determinar	Autovalor de uma matriz dada	
		Interpretar o significado algébrico da equação $A.v = \lambda.v$ .			
		Converter a equação $A.v = \lambda.v$ ao registro geométrico.			
		Interpretar a equação $A.v = \lambda.v$ em termos de vetores paralelos.			
Verificar se um número dado é um autovalor de uma matriz dada.	Interiorização da ação anterior no processo de	Encontrar os autovalores da matriz.			
		Resolução do sistema de equações que determinará o conjunto			

Concepção ação		Concepção processo		Concepção objeto	Concepção esquema
		solução.			
		Determinar a independência linear dos vetores do conjunto solução.			
		Encontrar os autovetores associados aos autovalores de uma matriz.			
		Calcular o determinante para obter um polinômio característico.			
		Identificar as condições de existência das soluções dessa equação e a solução da equação característica.			
		Encontrar o espaço-nulo de uma matriz.			
		Identificar a equivalência das condições encontradas anteriormente e o espaço nulo de uma matriz.			
Encontrar o espaço gerado pelos autovetores associados a determinado	Interiorização da ação anterior no	Encontrar o espaço gerado pelos autovetores	Encapsulação do processo anterior	Determinar o autoespaço de uma matriz com base no	

Concepção ação		Concepção processo		Concepção objeto	Concepção esquema
autovalor.	processo de	de uma matriz.	para	estudo de suas propriedades e de sua representação geométrica, quando possível.	
				Autovetores	
				Autovalores	
					Determinar os Autovalores, Autovetores e Autoespaço com base em suas propriedades.

## 6.6 *A decomposição genética do objeto matemático autovalor e autovetor de nossa tese*

### 6.6.1 *Questões trabalhadas e seus objetivos*

A proposta de aplicação das quatro questões que seguem aos alunos voluntários visa identificar elementos que possam responder nossa questão de pesquisa apresentada na Introdução desta tese. São elas:

**Questão 1:** Qual o papel das disciplinas matemáticas em sua formação acadêmica e/ou profissional?

**Objetivo da questão:** identificar a relevância das disciplinas matemáticas na formação acadêmica e profissional atribuída pelos alunos da Engenharia.

**Questão 2.** Você consegue identificar os parâmetros em ambas as equações?

**Objetivo da questão:** pretende-se encontrar as estratégias baseadas na solução de um sistema dinâmico de crescimento populacional e identificar se os alunos reconhecem quais são os parâmetros expostos pelo sistema dado.

**Questão 3.** Quais os objetos matemáticos relacionados ao objeto autovalor e autovetor?

**Objetivo da questão:** discutir os objetos matemáticos relacionados ao conceito de autovalor e autovetor, dentre eles, equação característica, polinômio característico, equação de diferenças, autoespaço vetorial e combinação linear.

**Questão 4.** O que se entende por crescimento assintótico do sistema?

**Objetivo da questão:** permitir que se discuta o comportamento a longo prazo das soluções encontradas e que sejam estabelecidas as relações entre os conceitos de autovalor, autovetor, autoespaço e base de um espaço vetorial.

### 6.6.2 Construção da solução geral do problema

De volta ao problema, a pesquisadora poderá iniciar uma discussão sobre sistemas dinâmicos discretos. Tal discussão só poderá ser apresentada aos alunos, caso encontrem a solução. Ressaltamos que a solução seguinte do problema é apresentada no livro *Álgebra Linear e suas Aplicações*, descrito neste trabalho.

#### 6.6.2.1 A solução

Quando  $p=0,104$ , os autovalores da matriz de coeficientes  $A$  para

$$O_{K+1} = (0,5)O_K + (0,4)R_K$$

$$R_{K+1} = -p \cdot O_K + (1,1)R_K$$

são  $\lambda_1=1,02$  e  $\lambda_2=0,58$ . Os autovetores são

$$v_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um  $x_0$  inicial pode ser escrito como  $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2$ . Então, para  $K \geq 0$ ,

$$x_K = c_1(1,02)^K \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2(0,58)^K \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quando  $K \rightarrow \infty$ ,  $(0,58)^K$  rápido se aproxima de zero. Suponha que  $c_1 > 0$ . Então, para todo  $K$  bastante grande,  $x_K$  é, aproximadamente, igual a  $c_1(1,02)^K v_1$  e escrevemos

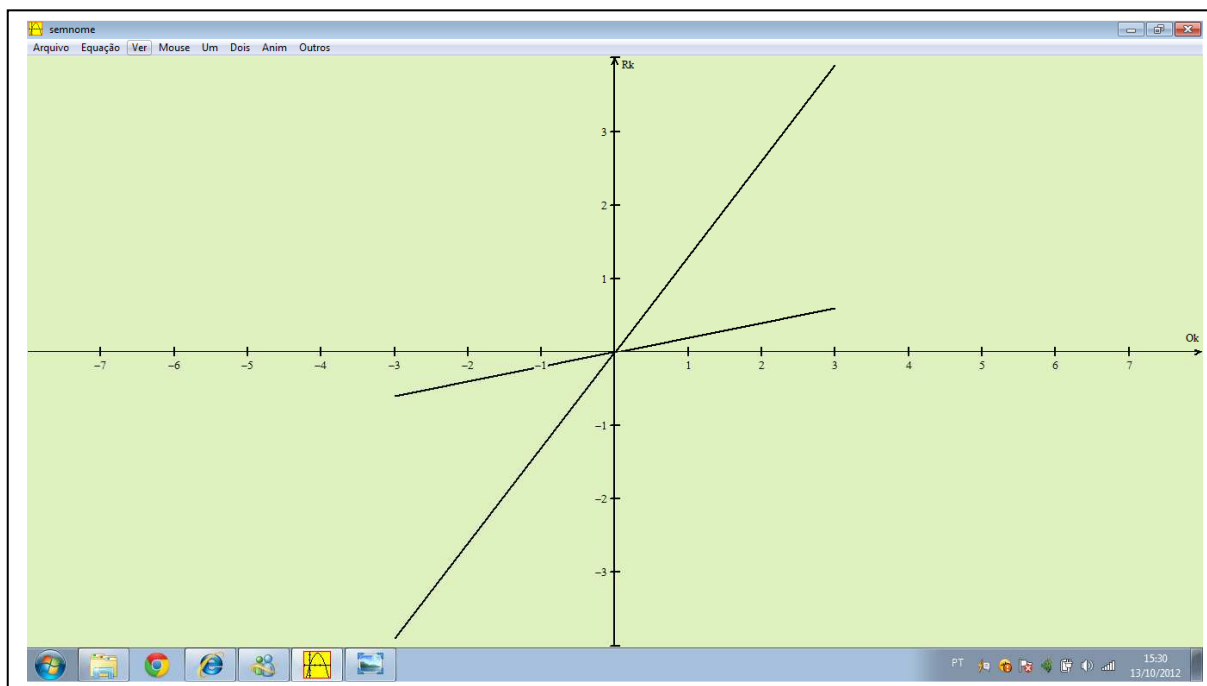
$$x_K \approx c_1(1,02)^K \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A aproximação em (1) melhora à medida que  $K$  cresce e, assim, para valores grandes de  $K$ ,

$$x_{K+1} \approx c_1(1,02)^{K+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1,02)c_1(1,02)^K \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \approx 1,02x_K \quad (2)$$

A aproximação em (2) diz que, por fim, as duas componentes de  $x_K$  (os números de corujas e de ratos) crescem por um fator de aproximadamente 1,02 por mês, uma taxa mensal de crescimento de 2%. Por (1),  $x_K$  é aproximadamente um múltiplo de  $(10,13)$ , de modo que as componentes de  $x_K$ , estão próximas na razão de 10 para 13. Ou seja, para cada 10 corujas, existem cerca de 13 mil ratos

Figura 28 - Representação Geométrica do problema proposto



Fonte: Representação geométrica dos autovetores associados

A representação geométrica exposta na Figura 28 expõe os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 1,02$  e  $\lambda_2 = 0,58$ .

Consideramos que representações geométricas permitem que haja a construção de uma imagem mental do objeto matemático em estudo, como a evidência da existência de infinitos autovetores associados a cada autovalor encontrado.

No próximo capítulo, será apresentada a Análise da Investigação pautada nos aportes teóricos descritos. Evidenciaremos os discursos dos alunos participantes da investigação, repletos de reflexões a respeito de suas experiências acadêmicas e profissionais, as conjecturas expostas sobre tema Sistema Dinâmico, além da evidência de relações com demais disciplinas da graduação em Engenharia.



## Capítulo 7 - Análise da investigação

---

Neste capítulo será discutida a análise da investigação em relação aos primeiros sujeitos: (i) os alunos que concluíram a disciplina Álgebra Linear, porém ainda não se depararam com as especificidades do curso e em relação aos segundos sujeitos: (ii) aqueles que estavam em fase de conclusão do curso e que já se depararam com a maioria das disciplinas de formação específica, de ambos os estudos de caso. Nessa fase, foi apresentada a proposição de um problema aos estudantes, cujo objeto matemático autovalor e autovetor é trabalhado na análise de um sistema dinâmico discreto de crescimento populacional. Após a decomposição genética estabelecida em nossa análise, será possível identificar as diferentes estruturas cognitivas que se formam na *mente matemática* dos sujeitos investigados.

Assim, a análise final deverá considerar as diferentes concepções dos estudantes (ação, processo, objeto e esquema) frente ao objeto matemático autovalor e autovetor, de acordo com as ideias de Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012) e os conceitos imagem e definição relacionados ao objeto em estudo, conforme as ideias de Vinner (1991) e Domingos (2003).

### 7.1 Estudo de Caso I - Primeira fase

Para introdução à análise dos resultados obtidos no Estudo de Caso I, apresentamos uma breve explanação encontrada no prefácio do livro-texto utilizado pelos alunos participantes da disciplina de Álgebra Linear.

Os autores descrevem a Álgebra Linear, como uma disciplina de faceta elegante e abstrata e que favorece o desenvolvimento do pensamento e sua expressão. No Prefácio do livro, esclarecem que a Álgebra Linear é útil para o profissional atuante nas ciências exatas ou o pesquisador na maioria das áreas de Matemática Pura ou Aplicada; os autores citam algumas aplicações pertinentes ao mundo tecnológico moderno, como sistemas multivariáveis complexos e computacionais. As aplicações evidenciadas, desde o início do livro para o estudante da disciplina, destacam várias áreas de conhecimento, como a Teoria dos Grafos, muito útil na Matemática, nas Ciências Sociais e Ciência da Computação; a Computação Gráfica (transformações do plano 2-D e transformações do espaço 3-

D); os Circuitos Elétricos com as Leis de *Kirchoff* ou as Cadeias de Markov, com modelos estatísticos e matrizes de probabilidades. Acrescentam outras interessantes aplicações que visam a incentivar seus leitores no estudo da disciplina.

Relacionam as definições, teoremas e demonstrações apresentadas no livro como boas ferramentas de comunicação e que seu aprendizado contribui para o desenvolvimento das estruturas cognitivas daquele que a apreende, e que ultrapassa os limites de simplesmente resolver tecnicamente os problemas apresentados.

Uma coisa importante que se pode aprender com as definições, teoremas e demonstrações apresentadas nesta disciplina (assim como em outras que pertencem à matemática pura) é a maneira de pensar e expressar-se claramente, para evitar enganos e interpretações equivocadas. O aprendizado da álgebra linear contribui para a formação de uma estrutura cognitiva, e na prática esse aprendizado é mais importante do que o ferramental técnico que possa ser adquirido (LORETO; LORETO Jr.; SILVA, 2011, Prefácio).

Em nossa análise, foram consideradas as concepções ação-processo-objeto-esquema, conforme a Teoria APOS, evidenciadas no estudo dos trabalhos de Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012) e os conceitos imagem e definição, de acordo com os estudos de Vinner (1991) e Domingos (2003).

Assim, um de nossos objetivos foi refletir sobre uma experiência matemática ligada à solução de problemas não triviais, como o apresentado que permitiu-nos pensar a respeito dos aspectos abstratos inerentes ao Pensamento Matemático Avançado. Para tanto, destacamos os objetos matemáticos envolvidos, os processos, a tradução entre as representações, as propriedades e o pensamento proceitual destacado pelos alunos durante a resolução do problema.

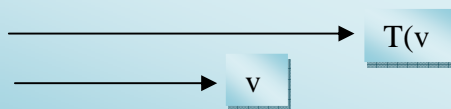
Os resultados de nossa análise descrevem o pensamento de três estudantes do 3º. ciclo (ou semestre) de um curso de Engenharia de uma instituição de ensino privada do Estado de São Paulo. Duas entrevistas foram realizadas no campus da instituição e a terceira no campus de nosso Programa, entre maio e julho de 2013, com a presença da pesquisadora e de um entrevistado e tiveram a duração de, aproximadamente, 3 horas. Após explicação dos objetivos da pesquisa, colhemos as assinaturas para autorização de divulgação e gravação em áudio. Para a resolução

do problema foi permitida a consulta de seus apontamentos realizados em aula ou quaisquer outros materiais que julgassem necessários.

Nos diálogos apresentados, evidenciamos os principais obstáculos enfrentados pelos estudantes durante o estudo do conceito de Autovalor e Autovetor. Mas, destacamos o interesse dos mesmos pelo aprofundamento de seu estudo.

Conforme o discurso dos alunos, a apresentação do tema pelo professor em aula ocorreu pautada na definição formal do conceito dado pelo livro-texto,

**Definição:** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $R$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. O vetor não nulo  $v \in V$  é chamado de vetor próprio do operador linear  $T$  se  $\exists \lambda \in R \mid T(v) = \lambda v$ . O número  $\lambda$  (real ou complexo) é o valor próprio associado ao vetor próprio  $v$ . Nos casos particulares em que  $V = R^2$  ou  $V = R^3$ , os vetores próprios de um operador linear  $T$  podem ser entendidos como aqueles vetores  $v$  cuja imagem  $T(v)$  é paralela ao vetor  $v$ .



(LORETO; LORETO JR.; SILVA, 2011, p. 146)

como as manipulações algébricas e representações matriciais, como por exemplo, a transformação de  $T(v) = \lambda.v$  para  $(T - \lambda.I_n)v = 0$ , em que  $I_n(v) = v$  é o operador identidade. A inter-relação entre os conceitos: escalar, vetor, autovalor e autovetor e suas representações algébrica, matricial e geométrica são importantes e não são, necessariamente, automáticas. Defendemos as ideias de Stewart (2008) que cita que as manipulações simbólicas são necessárias para que os alunos adquiram uma noção intuitiva dos conceitos em estudo.

Conforme Dreyfus (1991), a Teoria APOS surge com a proposta de expandir a aprendizagem matemática em contextos que se estendam ao Pensamento Matemático Avançado.

Na análise, percebemos que os alunos buscam por um novo enfoque de ensino da Álgebra Linear e valorizam seu estudo. A mudança de foco deve considerar ideias conceituais mais que procedimentais, evidenciando as relações que se estabelecem entre as disciplinas da graduação.

Identificamos nos discursos dos alunos, respostas pertinentes à **Questão 1**:

**Aluno 2:** Álgebra Linear é uma matéria divertida. No livro, tem muitas equações, todas tratadas por matrizes. E o professor já joga tudo nas equações e resolve tudo por equações. O professor nunca citou as aplicações que estão nos livros. Ele só dizia assim, tem os exercícios e aplica as fórmulas nos exercícios. Ele até tentava falar no que a gente ia usar. Eu lembro que um dia ele falou sobre espectrômetro, medidor de temperatura, fluxo de temperatura para saber se a máquina está em uma temperatura ideal, se o gerador está trabalhando na temperatura, na potência muito acima da que é permitida. Então, só com esses aparelhos você consegue medir e saber se a máquina está trabalhando bem.

É perceptível que, embora existam problemas de aplicação no livro-texto adotado pela instituição, eles não foram apresentados aos alunos.

Além disso, de acordo com o relato do Aluno 2, o professor limitou-se às manipulações algébricas e matriciais e pouco às representações geométricas.

Outra observação interessante foi apresentada pelo Aluno 1, ao discorrer sobre os comentários feitos por colegas que concluíram a disciplina:

**Aluno 1:** Mas, a gente escuta muito preconceito, pelos que os alunos falam, pelos meus amigos veteranos, porque eles sempre falam que você não vai usar a Álgebra Linear para nada. Os professores de Elétrica ainda não usaram muito a Álgebra Linear, no sentido de pegar a parte teórica e transformá-la na aplicação estudada. Tem muita coisa que a gente poderia aprender de um método diferente, mas não sei porque não dá. No livro-texto de Circuitos Elétricos, tem bastante coisa. Têm matrizes aos montes, mas o professor não trata de matrizes, ele trata por outro método. Os exercícios passados em aula só apresentam os números praticamente. Não importa o enunciado, tanto que nas provas eu mal olhava o enunciado. Eu só olhava os números e já sabia o que colocar.

O Aluno 3 também fez suas considerações a respeito da disciplina:

**Aluno 3:** A maioria das pessoas só sabe decorar a resolução do exercício, elas não sabem pensar. Eu acho que os alunos ainda não têm uma maturidade para isso. O engenheiro tem que saber pensar e resolver problemas. Eu acho que alguns professores não buscam incentivar o raciocínio dos alunos com outras coisas. Não mostram muita coisa, além do normal da matéria e, aí, quando cai uma coisa que vai além, as pessoas estranham. Não há exploração dessa parte (problemas como o apresentado). Sei que é muito importante. Mas, vai da iniciativa dos alunos, eles têm que correr atrás. Mas, se os professores não mostram os caminhos possíveis, acho que fica mais difícil ainda para os alunos.

Quando questionados a respeito dos exemplos e problemas propostos nos livros-texto inseridos nas referências bibliográficas básicas e complementares da disciplina o Aluno 1 cita:

**Aluno 1:** Nós nunca usamos esse livro (sobre o livro de David Lay).

Para a realização da decomposição genética, consideramos as principais ideias de Stewart (2008), a respeito das concepções ação-processo-objeto-esquema apresentadas pelos alunos entrevistados em sua pesquisa. Elas foram apresentadas no Capítulo 6 desta tese. Relembremo-nos delas:

(a) **Concepção-ação:** restringe-se a encontrar os autovalores e autovetores associados. O aluno pode aplicar uma transformação específica e multiplicar o vetor por um escalar específico. Quanto à representação algébrica é possível que o aluno simplifique  $A.x = \lambda.x$  para  $(A - \lambda I).x = 0$ .

Para tanto, os alunos encontram na *proposição 68* do livro-texto a fundamentação para o cálculo do determinante: *Se  $v \in V$  é um vetor próprio de  $V$ , então o determinante de  $(T - \lambda I)$  é nulo* (LORETO; LORETO JR.; SILVA., 2011, p. 147). As proposições 65, 66 e 67 antecedem proposição 68 e são encontradas no Anexo J desta pesquisa.

O cálculo de determinante fornece o polinômio característico generalizado dado por:  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_0$ .

A definição do polinômio característico é apresentada a seguir:

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $R$  e  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Impondo a condição de que o determinante de  $T - \lambda I$  é nulo obtém-se um polinômio  $P(\lambda)$  de grau  $n$ , chamado de polinômio característico associado ao operador linear  $T$ :

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_0$ . (LORETO; LORETO JR.; SILVA., 2011, p. 147)

Temos que as raízes do polinômio característico  $P(\lambda)$  são os autovalores do operador linear  $T$ . Após o cálculo dos autovalores, são encontrados os autovetores associados.

Portanto, quando o aluno apresenta a concepção-ação de determinado conceito matemático ele está limitado às técnicas de resolução conhecidas e ainda não estabelece relações entre os demais conceitos envolvidos.

(b) **Concepção-processo:** é possível que o aluno realize transformações e apresente os vetores como caso geral. Os alunos podem perceber que há infinitos autovetores associados ao autovalor e compreender o processo de encontrá-los com base em uma matriz  $A$  qualquer. Assim, começam a estabelecer conexões com outros exemplos, situações e contextos e deparam-se com possíveis representações do objeto matemático. É possível identificar que há infinitos autovetores associados a um autovalor e compreender o processo  $(A - \lambda I).x = 0$ . O aluno tem a compreensão de autoespaço vetorial que consiste no vetor nulo e todos os vetores linearmente independentes e de base de um autoespaço.

(c) **Concepção-objeto:** os vetores são transformados por uma matriz e esticados ou contraídos na mesma direção por um escalar. O aluno entende os efeitos da multiplicação pela matriz  $A$  em relação aos vetores.

O aluno compreende que ambos os membros da equação  $A.x = \lambda.x$  representam processos distintos e que devem ser encapsulados, para que sejam estabelecidos objetos matemáticos equivalentes, ou seja, o objeto final é um vetor.

O aluno compreende a definição de autovalores e autovetores e torna-se consciente do processo como totalidade, tendo a capacidade de realizar ações sobre o objeto e relacionar suas propriedades.

(d) **Concepção-esquema:** os conceitos envolvidos no desenvolvimento do problema são relacionados, compreendidos e generalizados em diferentes contextos, formando uma referência bem articulada na mente do indivíduo.

Iniciamos a leitura do problema ou do instrumento diagnóstico em conjunto e a exposição de nossa **Questão 2**. Apresentamos as respostas orais e escritas dos estudantes que se intercalam. Em alguns casos, foi perceptível que o aluno optou em escrever e, em outros, discutir verbalmente os resultados. Contudo, evidenciaremos que em alguns momentos, suas respostas orais nem sempre coincidem com o que é exposto de maneira escrita na resolução do problema. Consideramos que essa divergência pode ser atribuída ao aprofundamento da discussão que foi estabelecida durante a resolução do problema proposto.

**Aluno 1:** O 0,5 significa que apenas metade das corujas sobrevive sem os ratos a cada mês.

Figura 29 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 1

$$(0,5)O_k \rightarrow \frac{1}{2} \text{ corujas / mês}$$

$$(1,1)R_k \rightarrow \text{Ratos cresce } 10\% / \text{mês}$$

$$\text{Ratos crescem } (0,4)R_k \rightarrow \text{Corujas aumentam}$$

a) O parâmetro  $(0,5)O_k$  sendo como parâmetro  $0,5$  determina que apenas metade das corujas sobrevivem na ausência dos ratos, sendo por mês.

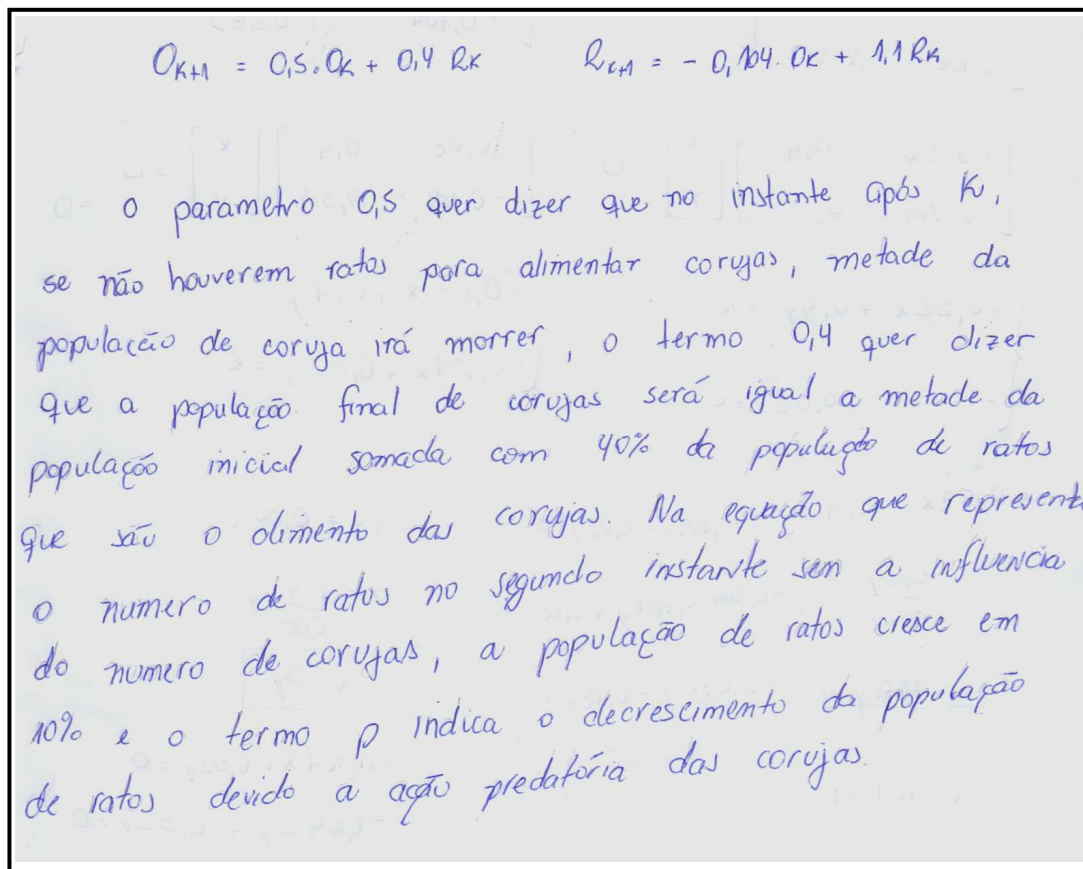
O parâmetro  $0,4$  de  $(0,4)R_k$  determina que os ratos crescem na sua população, porém com que a população de corujas cresce, apartir do termo negativo  $-p$ .

O parâmetro  $1,1$  diz que sem as corujas como predadoras população de ratos cresce com uma velocidade de  $10\%$  ao mês.

**Aluno 2:** O parâmetro  $0,5$  significa que ... (reflexão do aluno) O termo  $0,4$  quer dizer que a população final de corujas será igual à metade da população inicial (que é o  $0,5$ ), somada com  $40\%$  da população de ratos que são alimentos das corujas. Esse é o resultado de  $O_{k+1}$ . Agora de  $R_{k+1}$ : A equação que representa o número de ratos no instante  $K+1$ , sem influência do número de corujas, a população de ratos cresce  $10\%$ . Esse é o  $0,1.R_k$ . E o termo  $p$  é o índice o decrescimento da população de ratos (por isso, o sinal negativo) devido à ação predatória das corujas.

**Aluno 3:** Esse  $x$  aqui é em função de  $k$ , não é? Cada equação é separada ou ocorre ao mesmo tempo? As corujas são os predadores dos ratos. Agora sim, faz todo o sentido. Isso está dizendo que vão crescer  $10\%$  dos ratos, mas que serão mortos  $10,4\%$ , ou seja, eles estarão diminuindo em  $0,4\%$ . Isso aqui são os ratos procriando e isso aqui são as corujas matando os ratos. Isso vai diminuir, na verdade. Isso vai diminuir no total, porque as corujas estão se alimentando dos ratos. E aqui as corujas estão morrendo, porque não têm ratos suficientes para elas.

Figura 30 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 2



Foi possível observar que os alunos conseguem entender os parâmetros estabelecidos em ambas as equações e as relações existentes entre elas. Consideramos que o enunciado exposto permite que os alunos façam formulações, validações que, muito provavelmente, não sejam feitas em uma aula, cuja exposição é tradicional.

Conforme explica Pedersen (2006), problemas como este permitem que seja estimulado o pensamento indutivo do estudante e acarrete a compreensão do papel que tais objetos matemáticos desempenham em modelos de crescimento populacional.

Por se tratar de uma entrevista semiestruturada, permitimo-nos expor algumas considerações e questionamentos durante a resolução do problema e da exposição dos conceitos envolvidos.

Nesse momento, houve a **intervenção da pesquisadora** com a seguinte questão:  *você conseguiu entender o que vem a ser o índice  $K+1$ ?*

**Aluno 1:** Nós vimos isso em  $C^{++}$ . Se você tem o comando *Se você tem isso, faça +1*, ou pode ser, -1 também (Aluno 1).

**Aluno 2:** Sim, é o próximo instante. Se você tem os números de hoje, você prevê os números de amanhã. A notação é comum. Todo problema que você vai falar do futuro, a notação é +1. Em Cálculo Numérico usa-se bastante e em Computação também. É uma notação fácil.

É perceptível que os alunos do 3º semestre do curso de Engenharia conseguem estabelecer as primeiras relações com outras disciplinas do curso, dentre elas, Cálculo Numérico e Introdução à Computação.

No diálogo, os alunos referem-se aos métodos iterativos discutidos na disciplina de Cálculo Numérico. Conforme expõem Ruggiero e Lopes (2012), é possível que se compreenda a relação estabelecida entre as iterações que são executadas passo a passo em um ciclo. Poole (2004) expõe que os métodos iterativos geram uma sequência de vetores que se aproximam de uma solução de um sistema linear.

**Aluno 1:** Você tem um sistema linear aí. Você pode fazer até escalonamento para determinar. Vai ser um sistema possível e indeterminado. Agora vamos escrever como matriz, não é isso? Posso montar a matriz direto? Ai vai ter em função de  $O_{K+1}$  e  $R_{K+1}$ . Essa linha eu sei que é do  $O_K$  e essa é do  $R_K$ . Ai eu faço o escalonamento do sistema.

Figura 31 – Representação matricial do sistema pelo Aluno 1

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & O_{K+1} \\ -0,104 & 1,1 & R_{K+1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} O_{K+1} \\ R_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_K \\ R_K \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O_{K+1} \\ R_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot K$$

Figura 32 - Representação matricial do sistema pelo Aluno 2

$$\begin{aligned}
 O_{k+1} &= 0,5 O_k + 0,4 R_k \\
 R_{k+1} &= -0,104 O_k + 1,1 R_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5-\lambda & 0,4 \\ -0,104 & 1,1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Os alunos representam o sistema em notação matricial e valorizam as notações algébricas. Quando tratamos dos processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado é importante que se discutam os aspectos relacionados às representações dos conceitos envolvidos.

De acordo com o projeto de Trigueros *et al.* (2012), a ação de analisar os parâmetros dados pelas equações lineares é interiorizada em processos e coordena-se no processo de representar matricialmente o sistema de equações:  $O_{k+1} = (0,5) \cdot O_k + (0,4) \cdot R_k$  e  $R_{k+1} = -p \cdot O_k + (1,1) \cdot R_k$ . Portanto, há interiorização de ações

em processos que se coordenam para formar a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -p & 1,1 \end{bmatrix}$ .

Como classe de abstração reflexionante, a interiorização permite uma sucessão de ações materiais a um sistema interiorizado de ações, cujo objetivo é atribuir sentido ao fenômeno percebido. São estabelecidas relações com símbolos, linguagens, figuras ou outras imagens mentais, resultando na representação matricial do sistema de equações lineares. Ocorre a conversão de um processo (estrutura dinâmica representada pelo sistema de equações lineares) em um objeto matemático (estrutura estática representada pela matriz  $A$ ). São criadas várias representações de um mesmo objeto matemático.

Como aponta Dreyfus (1991), uma única representação do objeto matemático não é suficiente para gerenciar todo o ciclo de informação necessária para encontrar a solução do problema.

Assim, entidades passam de um nível a outro, sempre relacionados com as estruturas prévias, mais elementares, estabelecendo múltiplas conexões de representações.

Tais conexões podem ser percebidas com base nas seguintes exposições dos alunos, que relacionam o sistema de equações lineares aos projetos de circuitos elétricos estudados no 3º. semestre da graduação.

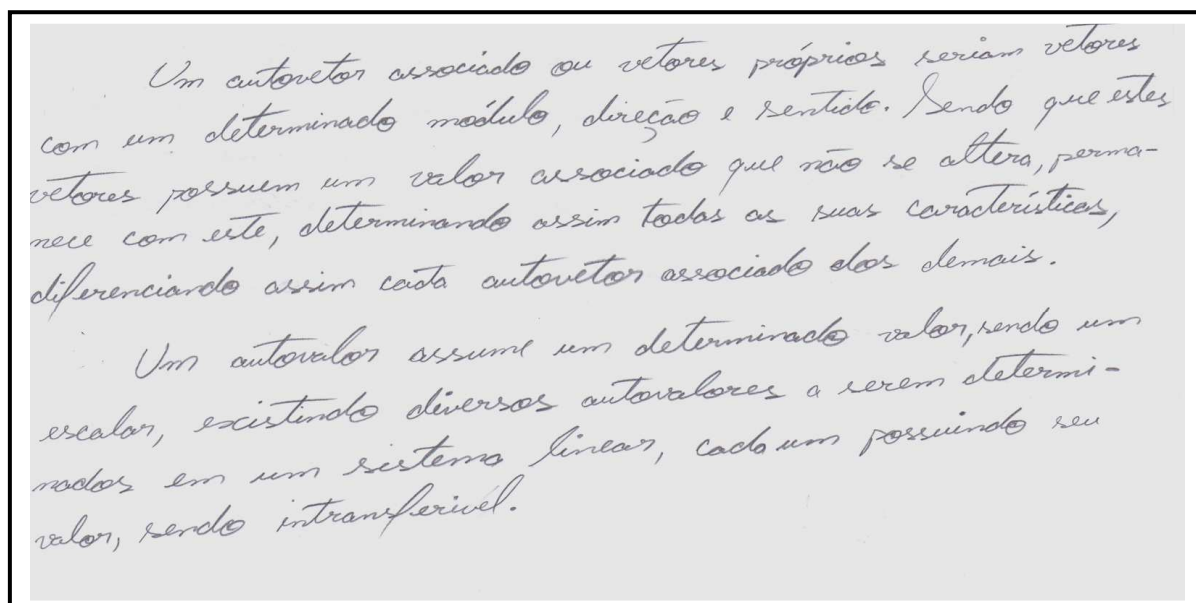
**Aluno 1:** Na verdade, isso daqui são circuitos, sabia? Em Circuitos Elétricos, a gente tem várias equações lineares que você pode jogar todos os números numa matriz. Para achar a resistência, achar a tensão, achar a corrente.

**Aluno 2:** Na parte de análise de malhas em Circuitos Elétricos, a equação é exatamente assim. Você tem as voltagens e as correntes.

A pesquisadora intervém com a seguinte questão: O que você entende por autovalor e autovetor?

**Aluno 1:** Em módulo, um vetor com direção e sentido que não tem suas características alteradas, o autovalor só pode assumir um único escalar, ele não assume um outro resultado, dentro da equação que está sendo analisada. Ou ele pode assumir outros valores? Assim, cada um tem seu valor fixo, podendo ter vários autovalores. O vetor tem a mesma direção e sentido que corresponde àquele autovalor.

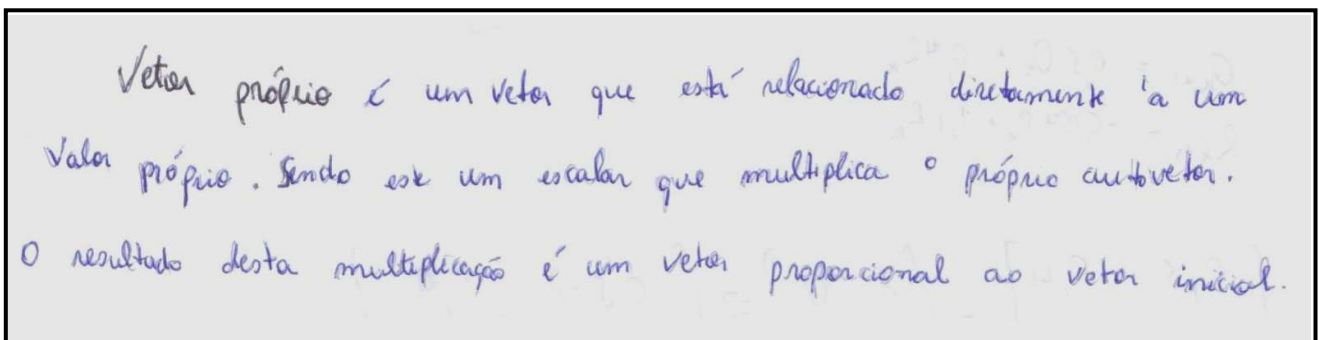
Figura 33 - Resposta à intervenção da pesquisadora pelo Aluno 1



O Aluno 1 apresentou a ideia de preservação de direção e mudança de comprimento de um vetor, quando multiplicados por uma matriz específica. São considerados os vetores especiais associados a um escalar que o aluno chama de *valor associado* e que lhe atribui suas características e propriedades.

**Aluno 2:** Os vetores próprios vão ser os vetores quando multiplicados pelo valor próprio. Precisamos identificar uma equação. O determinante da matriz  $A$  vezes uma constante (aí é o *lâmbda* que é o autovalor para poder achar os autovalores. O determinante tem que ser igual a zero. Isso é para determinar o polinômio característico da matriz. Ele pode assumir tantos valores quantos forem os números de graus de liberdade que ele vai ter. Se há um polinômio de grau 2, ele vai assumir dois valores diferentes, grau 3, grau 4, e assim por diante. Os autovalores vão ser multiplicados pelos vetores que estão dentro do problema.

Figura 34 - Resposta à Intervenção da pesquisadora pelo Aluno 2

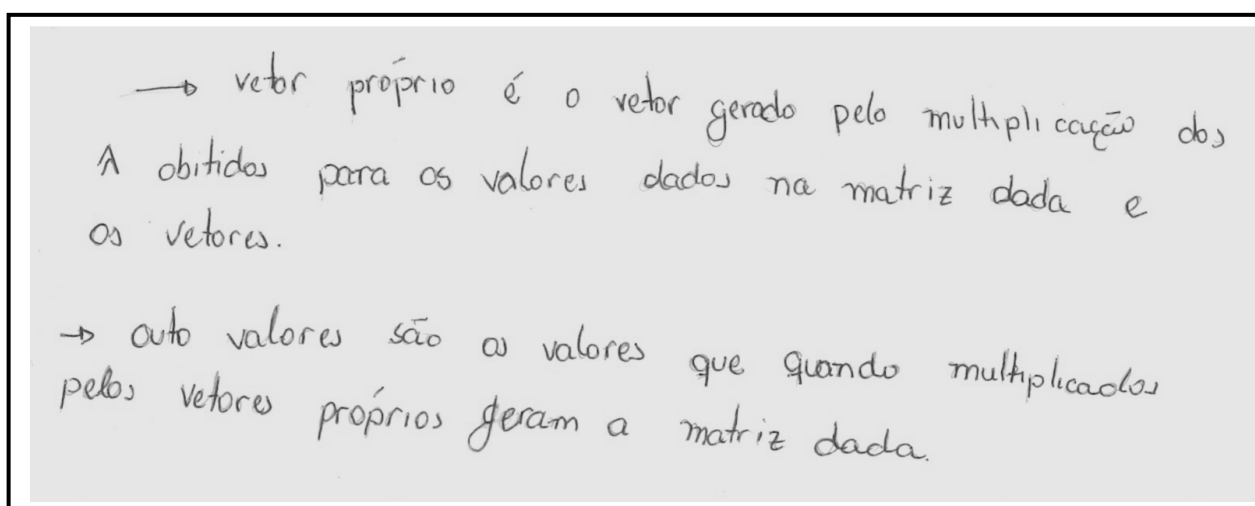


Nas considerações do Aluno 2, é perceptível quando ele cita um roteiro passo a passo, que visa a identificar os autovalores e os autovetores associados, limitando-se a um conjunto de instruções que pouco evidencia, o que são os autovalores e autovetores. Cita que, para achar os autovalores, antes de tudo, é necessário que encontremos uma equação. Nessa fase, o aluno está se referindo à equação  $(A - \lambda I)x = 0$  em que  $\lambda$  é um autovalor para  $A$ , se e somente se, a equação tiver solução não trivial. Contudo, não revelou a natureza da Matriz Identidade. Acrescenta que o determinante dessa equação é zero, ou seja,  $\det(A - \lambda I) = 0$  (equação característica) e que a solução do determinante acarretará um polinômio. É possível mostrar que se  $A$  for uma matriz  $n \times n$ , então,  $\det(A - \lambda I) = 0$  será um polinômio de grau  $n$  chamado de polinômio característico de  $A$ .

Em nenhum momento, os Alunos 1 e 2 fizeram referência à Definição do conceito de Autovalor e Autovetor. Como afirma Vinner (1991), ambos os conceitos se interagem, contudo um pode se constituir de maneira independente.

**Aluno 3:** Eu me lembro que, quando o professor passou isso, fiquei meio confuso. Eu não entendi bem nem para que servia. Porque essa parte da matéria foi mais como fazer, na verdade. E não o para quê. Dizer que os autovetores são os proporcionais aos vetores iniciais não define bem o que são os autovetores. Qual a definição formal da Matemática?

Figura 35 - Resposta à Intervenção da pesquisadora pelo Aluno 3



O Aluno 3 apresenta os autovetores como *proporcionais aos vetores iniciais* e cita que sua resposta não é satisfatória. Pede que a pesquisadora leia a definição do conceito, para que ele possa refletir sobre seu significado. Para ele, sua resposta não expressa a compreensão dos conceitos envolvidos.

Ressaltamos que as definições, teoremas e demonstrações são apresentadas no livro texto utilizado pela instituição, porém evidenciamos que os conceitos não se apresentavam internalizados pelos estudantes, constituindo, portanto, em entidades mentais.

De acordo com Vinner (1991), alguns conceitos são apresentados com base no conceito definição que permitirá a construção do conceito imagem do objeto matemático em estudo. Como cita o autor, em contextos técnicos, as definições

exercem um papel essencial a ser desempenhado frente à construção do conceito imagem e das estruturas cognitivas. O Aluno 3 expõe sua preocupação ao apresentar o aspecto formal atribuído pela definição do conceito, pois seu professor apresentou o conceito com base em sua definição. É procedente afirmarmos que a construção do objeto matemático segue a Figura 6 (p. 87) sobre o crescimento cognitivo do conceito formal.

**Intervenção da pesquisadora:** Como encontramos a equação característica?

**Aluno 1:** Calcula o determinante da matriz. (Resolvendo o determinante). Igual a zero para achar os valores próprios. Engenheiro sabe calcular e resolver problemas. A gente tem que ter o método de resolução do problema, a gente tem que ter a técnica, mas quando a gente faz uma pergunta dessa: o que é autovalor e autovetor fica muito difícil. Eu até tento mudar isso. Agora se você só pergunta: calcule para mim, eu já tenho na cabeça o método. Você não associa a definição à resolução. Isso é bem complicado. Acho que os livros-texto explicam melhor os conceitos. Uma parte que eu achei bastante confusa, foi quando o professor falou que não tem como representar graficamente, talvez no  $R^4$  ou  $R^5$ . Mas aí a minha pergunta: onde eu aplico isso, você entendeu?

### Os alunos encontram as raízes do polinômio característico

**Aluno 1:** Chegamos ao polinômio característico. Primeiro, o *lâmbda* 1; depois, o *lâmbda* 2.

Figura 36 - Encontrando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 1

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. It details the process of finding the characteristic roots of a matrix. The work starts with a matrix equation involving  $O_k$ ,  $R_k$ ,  $O_{k+1}$ , and  $R_{k+1}$ . It then shows the matrix being set to zero and the characteristic polynomial  $\lambda^2 - 0,6\lambda + 0,5916 = 0$  being derived. The roots are found to be  $\lambda_1 = 1,02$  and  $\lambda_2 = 0,58$ . The final step shows the polynomial expanded as  $\lambda^2 + 0,55 - 0,5\lambda - 1,1\lambda + 0,0416 = 0$ .

$$\begin{bmatrix} O_k & R_k \\ 0,5 & 0,4 & O_{k+1} \\ -0,104 & 1,1 & R_{k+1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} O_{k+1} \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O_{k+1} \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot K$$

$$\lambda^2 - 0,6\lambda + 0,5916 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,02 \\ \lambda_2 = 0,58 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 - \lambda & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (0,5 - \lambda)(1,1 - \lambda) - (-0,104)(0,4) = 0$$

$$\lambda^2 + 0,55 - 0,5\lambda - 1,1\lambda + 0,0416 = 0$$

**Aluno 2:** Vou fazer a divisão de polinômio utilizando o *Briot-Ruffini*. Dos dispositivos práticos, eu sei que é a coisa mais útil. O primeiro *lâmbda* deu 1,02 e o outro deu 0,58.

Figura 37 - Encontrando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 2

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1} &= 0,5 Q_k + 0,4 R_k \\
 R_{k+1} &= -0,104 Q_k + 1,1 R_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5-\lambda & 0,4 \\ -0,104 & 1,1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (0,5-\lambda)(1,1-\lambda) + (0,4 \cdot 0,104) &= (0,55 - 0,5\lambda - 1,1\lambda + \lambda^2) + 0,0416 \\
 &= \lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1,6 \pm \sqrt{1,6^2 - 4 \cdot 0,5916}}{2} = \frac{1,6 \pm \sqrt{0,1936}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1,02 \\ \lambda_2 = 0,58 \end{cases}$$

**Aluno 3:** No caso, o  $A$  é a matriz do operador linear. Eu acho que nessa parte da matéria por não ter mostrado nenhuma aplicação, eu vi que não entendi nada. Não consigo entender para que serve. Eu vi a técnica, pega a matriz, a matriz identidade vezes o *lâmbda*, aí você vai até o polinômio, resolve o determinante e calcula o valor próprio. Aí, você pega a matriz do operador linear vezes o valor próprio e acha os vetores próprios. Eu lembro, mais ou menos, isso, mas não lembro nada além disso. Mas, eu não aprendi, para que serve. Só agora entendi. Sei que há infinitas soluções, para qualquer que seja o *lâmbda*. Podemos fazer uma matriz menos uma matriz identidade e achamos os *lâmbdas* e depois os autovetores. Eu estou agora calculando o autovalor mas não sei para que. Bem, vamos lá, colocamos *lâmbda* 1 e *lâmbda* 2.

Fica  $\lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916 = 0$ . Esta é a equação característica. Eu vou fazer Báskara e achar os autovalores, e agora eu tenho de montar essa matriz aqui no lugar do *lâmbda*.

Figura 38 - Encontrando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 3

$$\begin{aligned}
 O_{K+1} &= 0,5 \cdot O_K + 0,4 R_K \\
 R_{K+1} &= -0,104 O_K + 1,1 \cdot R_K \\
 \begin{bmatrix} O_{K+1} \\ R_{K+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_K \\ R_K \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} O_{K+1} \\ R_{K+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot x_K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{bmatrix} 0,5 - \lambda & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\
 (0,5 - \lambda)(1,1 - \lambda) + 0,4 \cdot 0,104 &= 0 \\
 0,5 \cdot 1,1 - 0,5 \lambda - 1,1 \lambda + \lambda^2 + 0,4 \cdot 0,104 & \\
 \lambda^2 - 1,6 \lambda + 0,4 \cdot 0,104 + 0,5 \cdot 1,1 &= 0 \\
 \lambda^2 - 1,6 \lambda + 0,5916 &= 0 \\
 \boxed{\lambda = 1,02} \quad \boxed{\lambda = 0,58}
 \end{aligned}$$

Apesar de escreverem, os alunos não estabeleceram de maneira clara a relação entre as equações  $A \cdot x = \lambda \cdot x$  e  $(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$ . Eles acrescentaram à solução do problema, a Matriz Identidade como  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , unicamente, com o propósito de calcularem os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Para Trigueros *et al.* (2012), recorremos ao Teorema da Matriz Invertível para determinar todos os  $\lambda$  para os quais a matriz  $A - \lambda \cdot I$  é não invertível. Para tanto, seu determinante é igual a zero, fato que caracteriza os autovalores. As ações interiorizam-se em processos para determinação do conjunto solução de todos os autovalores. O processo encapsula-se no objeto autovetor da matriz com base nas ações necessárias para determinar a independência linear dos vetores no conjunto solução. Assim, coordenam-se os processos para encontrar os autovetores associados aos autovalores de uma matriz com o processo de cálculo de um determinante em um processo que permite obter o polinômio característico.

Para Tall (2000), o termo *proceito* corresponde a um tipo de unidade cognitiva que representa a forma com que trabalhamos os símbolos, evidenciando tanto os processos matemáticos como seus conceitos. Destacamos que houve evidências de

proceitos que foram destacados em:  $A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -p & 1,1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ,  $A \cdot x = \lambda \cdot x$ ,

$(A - \lambda I) \cdot x = 0$ , etc.

Contudo, é pertinente afirmarmos que para a construção dos símbolos como *proceitos*, os alunos enfrentam um difícil caminho cognitivo.

### Encontrando os autovetores

Figura 39 - Encontrando os autovetores pelo Aluno 1

Handwritten work showing the process of finding eigenvectors for a matrix  $A$ .

The student starts with the matrix equation:

$$\begin{bmatrix} -0,104 & 1,1-1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,52x - 0,4y \\ -0,104x + 0,08y \end{bmatrix} = 0$$

Then, the student substitutes  $\lambda = 1,02$  and solves for  $x$  and  $y$ :

$$\begin{bmatrix} 0,5-0,58 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1-0,58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,08x - 0,4y \\ -0,104x + 0,52y \end{bmatrix} = 0$$

For  $\lambda = 1,02$ :

$$-0,52x + 0,4y = 0 \Rightarrow -0,52x + 0,4 \left( \frac{0,104x}{0,08} \right) = 0 \quad \therefore 0 = 0$$

$$-0,104x + 0,08y = 0 \Rightarrow y = \frac{0,104x}{0,08}$$

For  $\lambda = 0,58$ :

$$-0,08x + 0,4y = 0 \Rightarrow -0,08x + 0,4 \left( \frac{0,104x}{0,52} \right) = 0 \quad \therefore 0 = 0$$

$$-0,104x + 0,52y = 0 \Rightarrow y = \frac{0,104x}{0,52}$$

The student concludes with "S.P.I" (Sem Possibilidade Interessante).

Figura 40 - Encontrando os autovetores pelo Aluno 2

$$\begin{bmatrix} 0,5-1,02 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1-1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0,52 & 0,4 \\ -0,104 & 0,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix} = 0$$

$$= \begin{cases} -0,52O_k + 0,4R_k = 0 \Rightarrow R_k = \frac{0,52O_k}{0,4} = 1,30k \\ -0,104O_k + 0,08R_k = 0 \end{cases}$$

$$-0,104O_k + 0,104O_k = 0$$

$$x_{k_1} = (O_k; 1,30k) = O_k \underbrace{(1; 1,3)}_{v_1}$$

**Aluno 2:** Você iguala a uma matriz (0,0). Ai você tem duas equações diferentes. Deu  $0 = 0$ . Deu um valor para  $x$  em função de  $y$ . São infinitas soluções. Provavelmente, o vetor vai dar 0,790. Não é essa a resposta final? Essa é uma solução possível e indeterminada, ou seja, você pode assumir qualquer valor. Foi isso que eu falei no início da entrevista. Eu sabia que, quando dá  $0 = 0$ , não pode dar um número. E provou aqui. Quando chegamos a  $0 = 0$ , você chegou a uma verdade matemática, ou seja, podem ser quaisquer valores. Então, se você chegou a esse vetor, tudo bem, deu 1,3. E é isso que dá a graça ao negócio! Aí chegamos no  $v_1$  e no  $v_2$ .



estruturas dinâmicas que evoluem constantemente, à medida que um objeto matemático é agregado às suas estruturas prévias.

De modo análogo à pesquisa de Stewart (2008), os Alunos 2 e 3 discorreram que para eles havia uma noção inicial de um número finito de vetores.

Assim, conforme expõe o autor, é possível que os alunos verifiquem que existem infinitos autovetores associados a um autovalor e compreendam o processo  $(A - \lambda I)x = 0$ .

Após os discursos apresentados pelos Alunos 1, 2 e 3, houve a compreensão do conceito de autoespaço que possibilitou a discussão sobre a noção de base. Assim, foi possível compreender que o conjunto de todas as soluções da equação  $(A - \lambda I)x = 0$  é, simplesmente, o espaço-nulo da matriz  $A - \lambda I$ . Portanto, esse conjunto é um subespaço de  $R^n$ , e é chamado de autoespaço de  $A$  associado a  $\lambda$  (Lay, 2013, p. 215).

Para Stewart (2008), o aluno apresenta a **concepção processo**, quando é possível estabelecer a relação com a noção de base de um autoespaço.

Também foi possível discutir sobre as possíveis soluções para a equação de diferença de primeira ordem  $x_{k+1} = Ax_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Para encontrarmos uma solução para a equação de diferença anterior, é preciso escolher um autovetor  $x_0$  e seu autovalor associado  $\lambda$  e definir  $x_k = \lambda^k x_0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Essa sequência é solução, pois  $Ax_k = A(\lambda^k x_0) = \lambda^k (Ax_0) = \lambda^k (\lambda x_0) = \lambda^{k+1} x_0 = x_{k+1}$  (Lay, 2013, p. 218).

Portanto, combinações lineares de  $x_k = \lambda^k x_0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) também são soluções.

A sequência anterior não havia sido apresentada em aula, porém foi perfeitamente compreensível pelos alunos durante a resolução do problema, possibilitando que estes evidenciassem o pensamento conceitual com base nas propriedades.

Identificamos as possíveis conexões que podem ser estabelecidas entre os conceitos envolvidos e que até então não estavam claras nas mentes daqueles que as estudavam. Destacamos a importância dos sistemas simbólicos, que descrevem a operação cognitiva da *mente matemática* dos estudantes. São os chamados conceitos imagem, ou seja, as estruturas cognitivas na mente do indivíduo associadas ao conceito, incluindo possíveis figuras mentais, além de relações com

uma série de outras ideias, dentre elas, uma fórmula, um gráfico ou expressões algébricas.

É importante ressaltar que as impressões e experiências foram as primeiras a serem evocadas na memória dos alunos e não as imagens visuais.

Assim, na análise, evidenciamos o uso de relações de significado entre as unidades cognitivas expostas para formação do conceito de autovalor e autovetor.

**Intervenção da pesquisadora:** O que acontece quando variamos o  $k$ ?

Obtivemos as seguintes respostas:

**Aluno 1:** O  $x_k$  cresce.

Figura 42 - Variando o índice  $k$  pelo Aluno 1

The image shows handwritten mathematical work on a light gray background. It consists of three lines of equations:

$$v_1 = \left( x; \frac{0,104}{0,08} x \right) = x (1; 1,3) \quad \therefore v_1 = (1; 1,3)$$

$$v_2 = \left( x; \frac{0,104}{0,52} x \right) = x (1; 0,2) \quad \therefore v_2 = (1; 0,2)$$

$$x_k = C_1 (1; 1,3) (1,02)^k + C_2 (1; 0,2) (0,58)^k$$

**Aluno 2:** O outro fator vai diminuir. Quer dizer que quanto maior a população de coruja, menor será a população de ratos. A população de corujas tende a infinito, e a população de ratos tende a zero? Ai eu lembrei que podemos ajustar qualquer curva a partir de uma exponencial, independente do número de termos.

Figura 43 - Variando o índice  $k$  pelo Aluno 2

$$\begin{bmatrix} 0,5 - 0,58 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 - 0,58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0,08 & 0,4 \\ -0,104 & 0,52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -0,08O_k + 0,4R_k = 0 \\ -0,104O_k + 0,52R_k = 0 \end{cases} \Rightarrow R_k = \frac{0,08O_k}{0,4} = 0,2O_k$$

$$X_k = (O_k; 0,2O_k) = O_k \underbrace{(1; 0,2)}_{v_2}$$

$$X_k = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2$$

$$X_k = c_1 (1,02)^k \cdot (1; 1,3) + c_2 \cdot (0,58)^k \cdot (1; 0,2)$$

**Aluno 3:** Conforme o tempo vai passando, o  $O_k$  vai aumentando e o  $R_k$  vai diminuindo. Um tende a infinito e outro tende a zero.

Figura 44 - Variando o índice  $k$  pelo Aluno 3

$$X_k = c_1 \cdot 1,02^k \cdot (0,769; 1) + c_2 \cdot 0,58^k \cdot (5; 1)$$

$$(5; 6,5) = c_1 \cdot (1,02)^k \cdot (0,769; 1) + c_2 \cdot (0,58)^k \cdot (5; 1)$$

$$v_2 = (5; 1)$$

$$v_2 = (5; 1)$$

conforme a população de corujas cresce a de ratos diminui  
portanto em tempo infinito a pop de corujas tende a infinito  
e a de ratos a zero

**Intervenção da pesquisadora:** Apresentação da **Questão 3**.

**Aluno 1:** Matriz, Polinômio Característico, Equação Matricial, Sistema de Equação Linear.

**Aluno 2:** Um sistema possível e indeterminado.

**Aluno 3:** Vetor, Matriz, Sistemas de Equações, Polinômio Característico e suas soluções.

#### **Intervenção da pesquisadora:** Apresentação da **Questão 4**.

Os discursos dos Alunos 1, 2 e 3 são expostos a seguir:

**Aluno 1:** Uma população cresce em função da outra, quando uma cresce a outra decresce. Se, por exemplo, você tivesse  $k$  para a coruja e uma outra letra  $p$  para os ratos, então, um dependeria do outro. Agora se você tem um único parâmetro, um dependendo do outro, enquanto um cresce o outro decresce, até que se estabilizam.

**Aluno 2:** Que uma população tende ao infinito e a outra a zero.

**Aluno 3:** Primeiro, achamos a relação entre as populações. Essa relação final é equilibrada. O equilíbrio ocorre quando as duas populações crescerem cerca de 2% ao mês.

Foi possível que os alunos compreendessem o comportamento a longo prazo de um sistema dinâmico descrito pela equação de diferenças  $x_{k+1} = Ax_k$ , ou seja, sua resposta a um estado estacionário.

#### **7.1.1 Resumo e Conjecturas - Fase I - Entrevistas com alunos do 3º. Ciclo de um curso de Engenharia (Estudo de Caso I)**

Com a exposição do problema foi possível que os estudantes ilustrassem seus pensamentos procedimentais com base nas representações matricial e algébrica. Contudo, não destacaram a representação geométrica do conceito.

Para Stewart (2008), tais representações estão relacionadas às resoluções visuais e que o autor chama de pensamento corporificado. O autor considera que nas aulas tradicionais pouco é enfatizado em relação ao pensamento geométrico.

De forma bastante semelhante, todos os três estudantes chegaram aos valores desejados da equação, evidenciando a manipulação simbólica dos resultados. De acordo com as ideias apresentadas por Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012) consideramos que os três alunos apresentam a **concepção processo** do

objeto matemático autovalor e autovetor. Os alunos destacaram que a equação característica apresenta um conjunto solução que contém múltiplas soluções. O Aluno 1 apresenta as soluções da equação como um Sistema Possível e Indeterminado, identificando na relação  $0 = 0$  que há infinitos autovetores. Como o Aluno 2 cita *Quando chegamos a  $0 = 0$ , você chegou a uma verdade matemática, ou seja, podem ser quaisquer valores (...) E é isso que dá a graça ao negócio!*. Já o Aluno 3, ao resolver o sistema de equações, afirmou *Eu cheguei no  $0 = 0$ . Cheguei a uma solução não trivial. Encontrei a relação  $O_k = 1,3 R_k$ . Tenho infinitos autovetores.*

Foi possível identificar que os alunos não conseguem estabelecer uma relação coerente entre ambos os membros da equação  $A.x = \lambda.x$  que podem ser encapsulados para formar o mesmo objeto matemático. No primeiro membro da equação, há o processo de multiplicar um vetor por uma matriz; no segundo membro, há o processo de multiplicação de um vetor por um escalar. No entanto, o objeto final é um vetor que pode ser interpretado, como o produto de autovalor e seu autovetor. Uma segunda dificuldade considerada corresponde ao processo de manipulação simbólica que transforma a equação  $A.x = \lambda.x$  em  $(A - \lambda.I)x$ .

Conforme expõe Stewart (2008), os cursos de Álgebra Linear não enfatizam que  $I.x = x$ . As respostas dos três alunos revelaram suas recordações a respeito das equações necessárias, para se encontrar as soluções pedidas (autovalores e autovalores associados), porém nada foi discutido sobre o papel da Matriz Identidade.

Apresentar o conceito de autovetor, como objeto permite que sejam explicados os efeitos de realizar as ações sobre ele; aplicando uma transformação e multiplicação por um escalar. Assim, para encontrar o autovetor, é preciso que seja verificado o autovalor associado.

Quando questionados sobre o que entendem por autovalor e autovetor, todos os três estudantes mencionaram a ideia de “direção” de um vetor. Dentre as respostas apresentadas, um estudante afirmou que, após a transformação, as direções dos autovetores não serão alteradas. Em todas as respostas, esteve presente a ideia de multiplicação por um escalar  $\lambda$ .

Todos os três estudantes encontraram corretamente ambos os autovalores e autovetores com base no sistema de equações exposto no enunciado do problema e todos se prontificaram a expressá-lo em notação matricial.

Consideramos que os alunos entrevistados apresentaram a concepção processo do objeto matemático em estudo, porém é possível que evoluam para a concepção objeto, quando estimulados a refletir sobre problemas como esse.

Ressaltamos que a relação dessas concepções não ocorre de modo, necessariamente, contínuo, apresentando diferentes concepções de determinada noção em distintos momentos.

Não há uma única decomposição genética do conceito nem uma única maneira como o sujeito o constrói. A decomposição genética possibilita que os estudantes vejam os exemplos diferentes da prática tradicional de ensino, que é repleta por “exemplos perdidos” (Dubinsky, 1991). Tais exemplos são envolvidos pela prática da repetição e interpretações, muitas vezes, incorretas que poderão acarretar a construção de esquemas inapropriados.

Outro ponto importante a ser considerado foi, enquanto desenvolviam o problema, teciam comentários a respeito das relações da Álgebra Linear com disciplinas cursadas, como Cálculo Numérico, Circuitos Elétricos e Introdução à Computação. As relações surgiam, naturalmente, como um breve comentário e evidenciavam seus entusiasmos ao chegarem à solução final.

A resolução do problema identificou a manipulação simbólica e aritmética dos conceitos, mas foi evidente que os alunos buscavam entender os resultados.

Conforme expõe Domingos (2003), os conceitos imagem são caracterizados em termos de objetos, suas representações e o pensamento proceitual que permitem que os alunos compreendam os objetos matemáticos baseados em uma sequência de raciocínio que compacta esses objetos em símbolos.

Identificamos que os Alunos 1 e 2 não fizeram qualquer citação às definições dos conceitos envolvidos, e o Aluno 3 pediu que a pesquisadora citasse-a em um determinado momento, contudo não houve discussão sobre a mesma. Acrescentaram que suas aulas seguiam a sequência: definição, exemplos e exercícios propostos.

Como apresentou Vinner (1991), em processos que envolvam a solução de problemas é possível que as células do conceito definição e imagem sejam ativadas e interajam em um fluxo contínuo de estímulo-resposta. Defendemos que problemas como o exposto poderiam ser apresentados como uma tarefa cognitiva estimulada com base no conceito definição. Assim, conforme expõe a Figura 7, todas as impressões, experiências e imagens mentais são ativadas baseadas no conceito

definição apresentado pelo professor, tendo como saída um ambiente intelectual, uma resposta.

Dentre os diferentes níveis de conceito imagem expostos por Domingos (2003) consideramos que os alunos investigados nesta fase do estudo de caso apresentam os conceitos imagem em nível instrumental. Nesse nível de conceito é possível estabelecer processos que conduzam à construção do objeto matemático autovalor e autovetor. Contudo, tais processos ainda não são suficientes, para que sejam encapsulados como objetos mentais.

Como apresentado pelo autor, os alunos recorreram à memorização de uma sequência de símbolos, e as propriedades dos objetos são estabelecidas de maneira operacional e ainda elementar.

Como destacado no estudo de Domingos (2003), é possível que identifiquemos algumas características inerentes ao conceito imagem em nível instrumental, como por exemplo:

(a) houve a coordenação de processos que resultaram na criação de objetos matemáticos: isso foi percebido quando os alunos buscaram encontrar os autovalores com base na identificação do polinômio característico;

(b) os processos foram realizados sobre objetos concretos: passagem à notação matricial do sistema de equações lineares;

(c) houve uso das manipulações algébricas necessárias para identificar as raízes do polinômio característico e, em seguida, os autovetores associados aos autovalores anteriormente encontrados;

(d) houve a capacidade de verbalizar processos representados parcialmente como proceitos: compreensão do impacto de  $k \rightarrow \infty$ , sobre o crescimentos das populações de coruja e ratos com base na equação de diferença  $x_{k+1} = c_1 \cdot (1,02)^k \cdot v_1 + c_2 \cdot (0,58)^k \cdot v_2$  .;

(e) as propriedades elementares foram usadas com compreensão;

(f) houve a memorização de algumas sequências de símbolos;

Identificamos que os alunos consideram as manipulações algébricas e matriciais de modo operacional e de maneira intuitiva estabelecem as relações entre os conceitos identificados, como Sistema Possível e Indeterminado (SPI), Autoespaço, Base e Dependência Linear.

Assim, compreendemos o papel da abstração da definição ou da dedução conforme explica Dreyfys (1991). Para o autor, a compreensão ou entendimento de determinado conceito é um processo que ocorre na mente dos alunos com base na interação de uma variedade de processos mentais. Foi possível identificar a construção desses mesmos processos, refletidos em abstrações, representações e deduções.

## 7.2 Estudo de Caso I - Segunda fase - Aluno do 10º. Semestre de um Curso de Engenharia

A segunda fase desta pesquisa é composta pela análise do discurso de um aluno entrevistado do 10º. semestre de um curso de Engenharia de uma instituição de ensino privada do Estado de São Paulo. A entrevista ocorreu no campus da instituição e durou, aproximadamente, duas horas. Foi concedido o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido da pesquisa e permitida sua gravação.

A seguir, apresentamos os dados mais relevantes da entrevista que ajudaram a responder nossa questão de pesquisa.

### *7.2.1 O discurso e desenvolvimento do problema pelo aluno entrevistado*

Abaixo destacamos uma breve consideração do Aluno 1 a respeito da disciplina Álgebra Linear e sua resposta à Questão 1.

**Aluno 1:** A Álgebra Linear ocorre no 3º. ciclo da faculdade. Assim como outras disciplinas básicas, os alunos não têm muita maturidade para enfrentar essas disciplinas. Eles ainda estão esperando as fórmulas e os exercícios prontos dos professores. Tem gente que até hoje não entende muito bem a importância delas. Eu sei que são importantes, mas tem gente até hoje que fala o contrário. Em muitas situações de trabalho, precisamos ter uma sequência lógica de raciocínio e a intuição para resolver alguns problemas. A Engenharia ajuda muito em tudo isso.

[...]

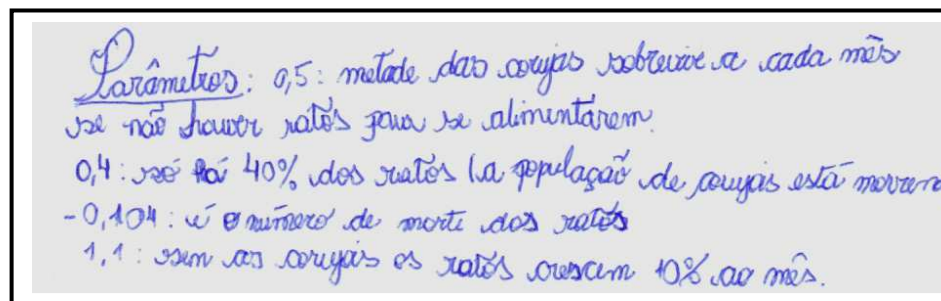
É difícil encontrar alguém que foi muito bem em Álgebra Linear. Não é fácil para quem aprende e nem para quem ensina. O professor até tenta mostrar algumas aplicações no livro. Tem bastante. Mas, se

elas não caírem na prova, a turma perde o interesse. No início, a gente só estuda o que vai cair na prova.

Só hoje eu mudei essa ideia, porque teve matéria muito importante e interessante. Depois que eu descansar um pouco, quero começar uma pós-graduação na área de Sistemas e Sinais e já tenho dado uma olhada nisso. Para eu estudar isso, preciso conhecer toda matemática que tivemos lá no início do curso. Tem sistemas lineares, álgebra matricial, vetores, integrais, derivadas, séries de potência, ... Ah! Não posso esquecer das funções trigonométricas, exponenciais.

Apresentação do problema e resposta da **Questão 2**:

Figura 45 - A identificação dos parâmetros pelo Aluno 1



**Aluno 1:** Uma vez eu vi um problema parecido, mas foi num curso que fiz. Eram raposas e coelhos. No sistema dinâmico uma população influencia os nascimentos e mortes de outra população. Os ecologistas desenvolvem um sistema dinâmico para modelar as populações de raposas e coelhos que são  $x(t)$  e  $y(t)$ . A palavra chave é posição de equilíbrio.

Sempre quando nós lemos um enunciado como esses, que mostram parâmetros e incógnitas como  $R_k$  e  $O_k$  é quase automático escrever o sistema na forma de matriz. Se eu tenho de um lado da equação o  $y$  e do outro o  $x$ , temos uma transformação linear de vetores.

O Aluno 1 segue para a resolução do problema como proposto.

**Aluno 1:** Eu lembro do *Teorema de Cayley-Hamilton*. Posso ver? Está aqui. Bem as ideias estão vindo aos poucos... Vamos ver ... O teorema diz que *Toda matriz quadrada é um zero do seu polinômio característico* (LORETO; LORETO JR.; SILVA, 2011, p. 156). Então, o polinômio característico é ... (Reflexão do aluno).

Figura 46 - Identificando o polinômio característico pelo Aluno 1 – Teorema de Cauley-Hamilton

$$L = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema de Cauley-Hamilton encontramos o Polinômio Característico:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,4 \\ -0,104 & 1,1-\lambda \end{vmatrix} = (0,5-\lambda) \cdot (1,1-\lambda) - (0,4) \cdot (-0,104)$$

$$= 0,55 - 0,5\lambda - 1,1\lambda + \lambda^2 + 0,0416$$

$$= \lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916$$

Agora vamos substituir a matriz  $A$  no polinômio  $P(\lambda) = \lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916$

$$P(A) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix}}_{A^2} - 1,6 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix}}_A + 0,5916 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I$$

Os autovalores e autovetores associados são encontrados:

Figura 47 - Identificando as raízes do polinômio característico pelo Aluno 1

Vamos achar as raízes do polinômio:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916 = 0$$

$$\lambda_1 = 1,02$$

$$\lambda_2 = 0,58$$

O Aluno 1 prossegue a solução para identificar os autovetores associados a  $\lambda_1=1,02$  e  $\lambda_2=0,58$ .

Existe um vetor próprio para  $\lambda_1 = 0,58$  e  $\lambda_2 = 1,02$

$$\begin{pmatrix} 0,5 - 1,02 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 - 1,02 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,52 & 0,4 \\ -0,104 & 0,08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -0,52x + 0,4y = 0 & x = \frac{-0,4y}{-0,52} & x = 0,7692y \\ -0,104x + 0,08y = 0 \end{cases}$$

$$-0,104 \cdot (0,7692y) + 0,08y = 0$$

$$-0,08y + 0,08y = 0$$

$$0 = 0$$

- Para  $\lambda_1 = 1,02$ , o vetor próprio associado é:  $\begin{pmatrix} 0,7692y \\ y \end{pmatrix}$   
 Se  $y = 1$  então o vetor próprio é  $\begin{pmatrix} 0,7692 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 Se  $y = 2$  então o vetor próprio é  $\begin{pmatrix} 1,5384 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 Se  $y = -2$  então o vetor próprio é  $\begin{pmatrix} -1,5384 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Para  $\lambda_2 = 0,58$ , o vetor próprio associado é:

$$\begin{pmatrix} 0,52 - 0,58 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 - 0,58 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,06 & 0,4 \\ -0,104 & 0,52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -0,06x + 0,4y = 0 \\ -0,104x + 0,52y = 0 \end{cases} \quad x = \frac{-0,4y}{-0,06} \quad x = 6,6667y$$

- Para  $\lambda_2 = 0,58$ , o vetor próprio associado  $\vec{v}$ :  $\begin{bmatrix} 6,6667y \\ y \end{bmatrix}$

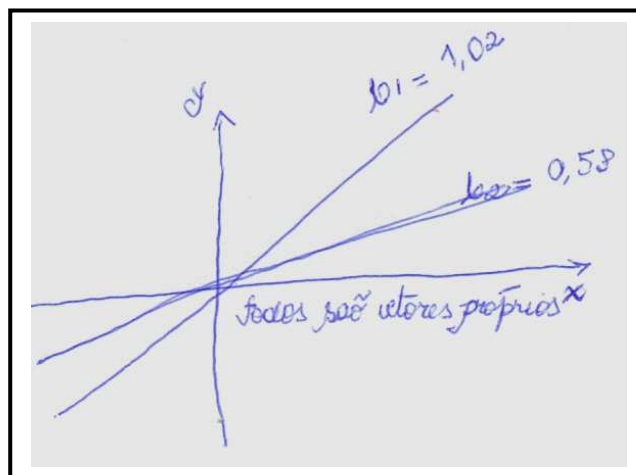
Se  $y = 1$ , o vetor próprio associado  $\vec{v}$   $\begin{bmatrix} 6,6667 \\ 1 \end{bmatrix}$

Se  $y = 2$ , o vetor próprio associado  $\vec{v}$   $\begin{bmatrix} 13,3334 \\ 2 \end{bmatrix}$

Todo vetor ~~associado~~ múltiplo do vetor  $(6,6667y, y)$  ou  $(6,6667, 1)$  é um ~~vetor~~ vetor associado a  $\lambda_2 = 0,58$ .

Toda combinação linear dos vetores associados também forma vetores associados.

Figura 48 - Representação geométrica dos autovetores associados pelo Aluno 1



Destacamos que o Aluno 1 buscou representar geometricamente os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , identificando que há infinitos autovetores. Além disso, evidencia que todo conjunto formado pela combinação linear de autovetores também constitui autovetores.

A seguir, descrevemos brevemente a respeito do tema Sistemas Dinâmicos para que o leitor tenha uma maior familiaridade com os conceitos expostos.

Os sistemas dinâmicos podem ser escritos na forma  $\frac{dx}{dt} = ax + by$  e

$\frac{dy}{dt} = cx + dy$  em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes reais,  $t$  é a variável independente de tempo e  $x$  e  $y$  são as variáveis dependentes, e as equações são chamadas de sistemas de tempo independentes.

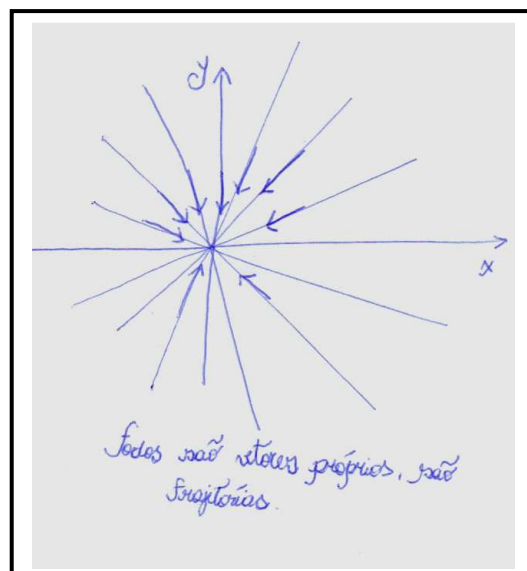
Quando é realizada uma análise qualitativa dos sistemas dinâmicos, o interesse é buscar respostas a algumas questões, como por exemplo,

- Existe alguma solução constante?
- Se houver soluções constantes, as soluções próximas movem-se para perto ou para longe da solução constante?
- Qual é o comportamento das soluções, quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ?
- Há soluções que oscilam?

O Aluno 1 acrescenta um exemplo que envolve o tema autovalor e autovetor

**Aluno 1:** Um sistema dinâmico simples é o sistema mecânico conhecido como massa-mola. As suas variáveis são descritas por uma equação diferencial. É o estudo do movimento harmônico simples, quando uma massa é deslocada para uma posição além da sua posição de equilíbrio natural e solta, ele fará um movimento vertical que se repete até que ela pare. Aí entra a matemática para estudar a trajetória do movimento. Então, a primeira coisa que veio na minha cabeça quando você apresenta um sistema dinâmico é que existe um ponto de equilíbrio, em qualquer sistema é assim. O ponto de equilíbrio é aquele que não importa mais o valor de  $t$ , o sistema não se altera. É o ponto de equilíbrio estável. É o vetor  $(0,0)$ . Olha só, todos esses vetores são os vetores próprios, eles são as trajetórias.

Figura 49 - Autovetores representados como trajetórias pelo Aluno 1



**Aluno 1:** Outro ponto importante, quando estudamos sistemas dinâmicos é saber o que acontece com o sistema a longo prazo. É só dar uma pesquisada para eu me lembrar melhor.

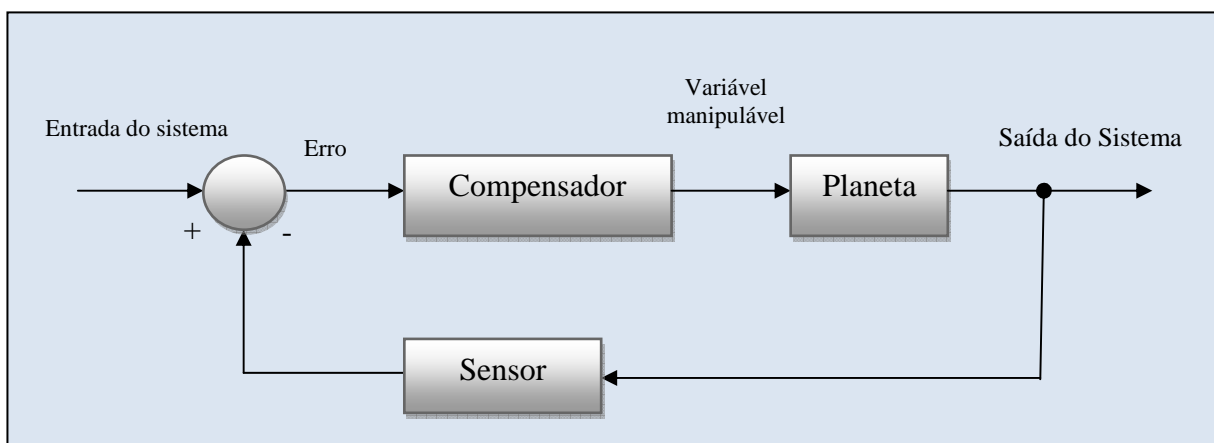
[...]

Outra matéria importante foi Sistemas de Controle. Você precisa ter uma base conceitual e matemática que vai ajudar a analisar, projetar e melhorar esse sistema. As equações diferenciais descrevem o comportamento de um sistema físico. São sistemas formados por Diagramas de Blocos. Os modelos de variáveis de estado são, geralmente, necessários para as simulações por computador.

A partir do discurso do Aluno 1, realizamos um breve estudo a respeito dos sistemas de controle evidenciando as principais características de funcionamento e o papel do objeto matemático autovalor e autovetor para encontrar os vetores em estado estacionário, ou seja, que equilibram o sistema e minimizam os possíveis erros.

A seguir, expomos um modelo simplificado de um sistema de controle em malha fechada. Os sinais aplicados ao sistema de entrada são determinados, de acordo com o conhecimento das respostas do sistema de saída.

Figura 50 - Sistema de controle em malha fechada



Fonte: Adaptado de Phillips e Harbor (1997, p.3)

De acordo com os autores, os sistemas de controle são divididos em duas classes, dependendo de sua função. Se o objetivo é manter uma variável física em valores constantes na presença de distúrbio, então, estamos diante de um sistema

regulador. É o caso dos sistemas regulares de velocidade de geradores de energia em corrente alternada nas companhias de energia elétrica.

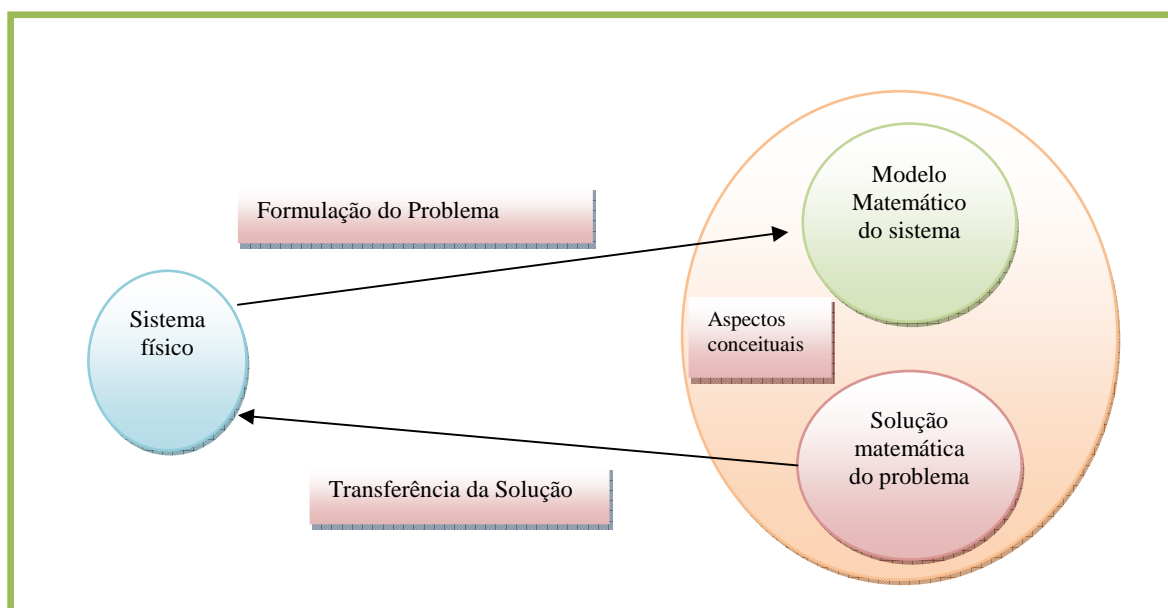
Outra classe são os chamados servomecanismos, na qual uma variável física deve seguir ou acompanhar alguma função de tempo desejada. Como exemplo, é citado o sistema de aterrissagem automática de aeronaves ou os sistemas de controle de um robô, cujos braços devem acompanhar uma trajetória predeterminada no espaço.

Como citado pelo Aluno 1, é necessário que haja uma base conceitual e matemática para sua análise ou projeto. Assim, são estabelecidas as relações matemáticas entre as entradas e saídas de cada um dos blocos do sistema de controle da Figura 50.

Os sistemas de controle, em geral, são não lineares, mas isso pode representar uma dificuldade em relação à sua análise ou projeto. Para efeitos de estudo, geralmente, são apresentados os modelos lineares que dependem das Transformações de Laplace.

As relações entre a análise matemática e os procedimentos do projeto são apresentadas abaixo:

Figura 51 - Solução matemática de problemas físicos



Fonte: PHILLIPS e HARBOR (1997, p. 5)

Os autores referem que, na prática, a grande dificuldade na formulação do problema matematicamente ocorre na transposição da solução matemática de volta ao mundo físico.

Destacam-se alguns colaboradores da Matemática usada no modelamento, na análise e no projeto: Pierre Simon Laplace (1749-1827) que idealizou a Transformada de Laplace que constitui a base da maioria dos procedimentos de análise e projetos de sistemas; James Clerk Maxwell (1831-1879) com as Equações de Maxwell; Harry Nyquist (1889-1976) com o critério de Nyquist; Hendrik W. Bode (1905-1982) com o diagrama de Bode; John Von Neumann (1903-1957) com a operação básica de um computador digital.

O modelo matemático de um sistema é definido como um conjunto de equações usado para representar o sistema físico, contudo nenhum modelo é exato e isento de erros. E, em algumas situações, os sistemas são descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo que podem ser resolvidas por Transformadas de Laplace. No entanto, o modelo pode ou não representar exatamente as características de um sistema físico real. É sempre possível melhorar a precisão de um modelo matemático, aumentando a sua complexidade, porém, é impossível obter exatidão.

A seguir, destacamos o papel do objeto matemático autovalor e autovetor na construção de modelos de sistemas de controle e o conceito de Transformações de Similaridade.

### *Transformações de Similaridade*

Um sistema de entrada e saída tem apenas um modelo entrada-saída chamado de função de transferência, mas o número de modelos internos ou modelos de estado é ilimitado.

O modelo de estado para uma entrada simples e saída é:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) &= C.x(t) + D.u(t) \end{aligned} \quad (\text{sistema 1})$$

e a função de transferência é dada por

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = G(S) = C(S.I - A)^{-1}.B + D \quad \text{em que } A, B, C \text{ e } D \text{ são matrizes.}$$

Há muitas combinações lineares de matrizes A, B, C e D que satisfazem a função de transferência.

Os autores apresentam um modelo de estado para o sistema 1 em que um vetor de estado  $v(t)$  é da mesma ordem de  $x(t)$  de maneira que os elementos de  $v(t)$  são uma combinação linear dos elementos de  $x(t)$ .

Assim, escrevemos:

$$v_1(t) = q_{11} \cdot x_1(t) + q_{12} \cdot x_2(t) + \dots + q_{1n} \cdot x_n(t)$$

$$v_2(t) = q_{21} \cdot x_1(t) + q_{22} \cdot x_2(t) + \dots + q_{2n} \cdot x_n(t)$$

...

$$v_n(t) = q_{n1} \cdot x_1(t) + q_{n2} \cdot x_2(t) + \dots + q_{nm} \cdot x_n(t)$$

O sistema anterior pode ser escrito na forma matricial

$$v(t) = Q \cdot x(t) = P^{-1} \cdot x(t)$$

em que Q é definida como o inverso da matriz P. É possível encontrar um vetor  $v(t)$  baseado em um vetor  $x(t)$  e vice-versa. É possível escrever  $x(t) = P \cdot v(t)$  em que P é chamada matriz de transformação. Essa equação apresenta a transformação de um vetor de estado em outro vetor e representa a alteração do modelo interno (do modelo de estado), sem alterar o modelo de entrada-saída do sistema (a função de transferência). É a chamada transformação de similaridade.

Os autores resumem quatro propriedades para as transformações de similaridade:

[...] faça  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  como os autovalores da matriz A. Então para a transformação de similaridade  $A_v = P^{-1}AP$

1. Os autovalores de A são iguais aos de  $A_v$ ; ou

$$\det(sI - A) = \det(sI - A_v) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)$$

2. O determinante de A é igual ao determinante de  $A_v$ :

$$\det A = \det A_v = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

3. O traço de A é igual ao traço de  $A_v$ :

$$\text{tr}A = \text{tr}A_v = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

4. As seguintes funções de transferências são iguais:

$$C(sI - A)^{-1}B = C_v(sI - A_v)^{-1}B_v \quad (\text{PHILLIPS; HARBOR, 1997, p. 110}).$$

Portanto, é possível evidenciar todos os conceitos envolvidos na compreensão do objeto matemático autovalor e autovetor com base nas propriedades expostas pelos autores.

Ressaltamos que o Aluno 1 apresentou familiaridade com os conceitos relacionados à solução do problema proposto, intimamente relacionados às propriedades expostas sobre as transformações de similaridade, contudo não podemos assumir que essas foram plenamente encapsuladas como objetos mentais para a construção do objeto matemático autovalor e autovetor.

### **Intervenção da pesquisadora - Apresentação da Questão 3:**

**Aluno 1:** Vetores, Matrizes de Entrada e de Saída. Sistemas Lineares. Determinante. Equações de Estado.

### **Intervenção da pesquisadora - Apresentação da Questão 4:**

**Aluno 1:** São os sistemas lineares invariantes no tempo.

## ***7.2.2 Resumo e Conjecturas***

Com o intuito de responder à Questão 1 de nossa entrevista, o aluno identificou e considerou o importante papel da Engenharia na obtenção do desenvolvimento do raciocínio lógico e da intuição em sua prática profissional.

Em nossa análise, identificamos que o aluno discorreu sobre o problema proposto evidenciando certa familiaridade com o contexto de Sistemas Dinâmicos vivenciado em um curso e também durante o estudo de Sistemas de Controle na faculdade.

Em um primeiro momento, citou um exemplo de sistema dinâmico simples, o sistema mecânico conhecido como massa-mola. Ressaltou que em todo sistema dinâmico há uma situação de equilíbrio a ser estabelecida. Uma possível relação com autovetores é identificada: o de trajetórias.

Para o aluno, outro ponto importante a ser tratado no estudo de um sistema dinâmico é o que ocorre com o sistema a longo prazo. Suas respostas evidenciaram conhecimentos relacionados à sua formação acadêmica e profissional que superam

os conhecimentos adquiridos pelos alunos entrevistados na fase 1 deste Estudo de Caso.

Em um segundo momento, o aluno discorreu sobre o tema Sistemas de Controle. Para ele, é necessário que haja uma base conceitual e matemática que influencie na análise e projeto do sistema, representada por modelos lineares que dependem das Transformadas de Laplace.

Em nossa busca pelo tema Sistemas de Controle, evidenciamos sua familiarização com os objetos matemáticos envolvidos na solução do problema proposto. A partir da dedução da definição, é possível considerar que o aluno pôde refletir sobre as propriedades dos conceitos, propiciando a abstração, contudo não podemos assumir que tais conceitos foram plenamente encapsulados como objetos mentais e, portanto, pudessem ser concebidas como entidades matemáticas.

A partir da definição do objeto matemático autovalor e autovetor, o aluno discutiu o papel da matriz  $A$ , identificando que a matriz  $A$  é um zero do polinômio característico com base no Teorema de Cayley-Hamilton, do autovetor  $x$  e do autovalor  $\lambda$ , relacionando-as às equações  $A.x = \lambda.x$  e  $(A - \lambda.I)x = 0$ .

Conforme as ideias de Stewart (2008) e Trigueros *et al.* (2012), o aluno pôde identificar que há infinitos autovetores associados a cada autovalor encontrado. Além disso, destaca que cada múltiplo escalar de um autovetor associado ao autovalor correspondente também é um autovetor. Compreende o papel dos infinitos autovetores na formação de um autoespaço vetorial e sua base.

Quanto às representações, há evidências da preocupação com a representação geométrica do conceito, além da algébrica e matricial.

Assim, de acordo com Trigueros *et al.* (2012), uma das características identificadas para que o aluno apresente a concepção processo é converter a equação  $A.x = \lambda.x$  ao registro geométrico.

De acordo com Dreyfus (1991), as estruturas cognitivas aprimoram-se, quando os estudantes passam a pensar paralelamente em diferentes representações que caracterizam conceitos mais abstratos. Quando várias representações são consideradas em paralelo, a relação com o conceito abstrato é enfatizado. Conforme expõe o autor, a representação e a abstração constituem os processos mais importantes do Pensamento Matemático Avançado, englobando descobertas, intuição, provas, definição e outros.

Consideramos que o aluno possa evoluir para a concepção objeto, pois evidencia as características citadas por Stewart (2008) para essa concepção. São elas: em sua representação geométrica, há a preservação de direção do vetor por um escalar, a identificação do objeto comum de ambos os membros da equação e a compreensão da definição de autovalores e autovetores. Mas, não podemos considerar que tais objetos encontram-se plenamente interiorizados e que o aluno raciocine sobre todas as suas propriedades. Assumimos que essa evolução possa ser incentivada pela prática de novos problemas que favoreçam a construção de novas estruturas cognitivas.

É possível considerar algumas características citadas por Tall (1991) quanto ao Pensamento Matemático Avançado: (a) participação ativa do aluno em um “debate científico”; (b) conflito do aluno frente à construção de conjecturas e hipóteses; (c) construção de uma fundamentação cognitiva apropriada do conceito de Pensamento Matemático Avançado com base em um enfoque que equilibre o crescimento cognitivo e o raciocínio lógico apropriado; (d) uso da visualização baseado em diferentes representações, sobretudo, a geométrica. Entretanto, destacamos que não houve o último estágio do PMA caracterizado pelo refinamento e prova.

Para a construção do conceito imagem, os conhecimentos são sequenciados em argumentos dedutivos, por exemplo, a relação entre as equações  $Ax = \lambda x$  e  $(A - \lambda I)x = 0$  ou a identificação de que cada múltiplo escalar de um autovetor também é um autovetor.

Observamos que o aluno apresenta o conceito imagem em nível instrumental. A seguir, destacamos algumas características apresentadas por Domingos (2003), que descrevem o conceito imagem no nível instrumental e que puderam ser identificadas em nossa análise: (a) a coordenação de processos que, por vezes, resulta na criação de objetos matemáticos: encontrar as raízes do polinômio característico que correspondam aos autovalores, identificação de infinitos autovetores que possibilitaram compreender o conceito de autoespaço vetorial; (b) os processos são realizados sobre objetos concretos: notação matricial dos parâmetros apresentados no sistema de equações dado no enunciado do problema; (c) ocorre o uso adequado de processos algébricos: manipulações algébricas para encontrar as raízes do polinômio característico (autovalores) e autovetores associados; (d) capacidade de verbalizar processos representados parcialmente

como proceitos: compreender o que ocorre com o autovalor quando  $k \rightarrow \infty$  com base na equação de diferença  $x_{k+1} = c_1 \cdot (1,02)^k \cdot v_1 + c_2 \cdot (0,58)^k \cdot v_2$ ; (e) as propriedades elementares são usadas com compreensão; (f) memorização de algumas sequências de símbolos; (g) os símbolos são usados como proceitos representando objetos matemáticos elementares.

Destacamos que o aluno entrevistado representa um caso de sucesso como o aluno José, citado por Domingos (2003). Assim como o aluno José, o aluno entrevistado não atribuiu pleno significado aos quantificadores na representação simbólica dos conceitos. Nessas condições, uma representação simbólica não pode ser considerada como um proceito.

É possível que alunos com esse perfil evidenciem processos e procedimentos necessários para estabelecer as propriedades, mas não conseguem construir outros objetos matemáticos.

No final de seu discurso, o aluno considerou não haver tempo hábil durante as aulas, para que problemas como esse sejam tratados. Além disso, destacou que somente os alunos mais aplicados poderão vir a se interessar por discussões desse tipo.

### 7.3 Estudo de Caso II - Primeira fase - Alunos do 4º. Semestre de um curso de Engenharia

O segundo estudo de caso foi realizado com três estudantes de um curso de Engenharia de uma instituição de ensino privada do Estado de São Paulo. A aplicação do instrumento diagnóstico, assim como as entrevistas, foi realizada no campus da universidade e durou, aproximadamente, uma hora. Após a explicação dos objetivos da pesquisa, colhemos as assinaturas para autorização de divulgação e gravação em áudio. Foi permitida a consulta de todos os apontamentos realizados em aula assim como de livros textos constantes nas referências bibliográficas.

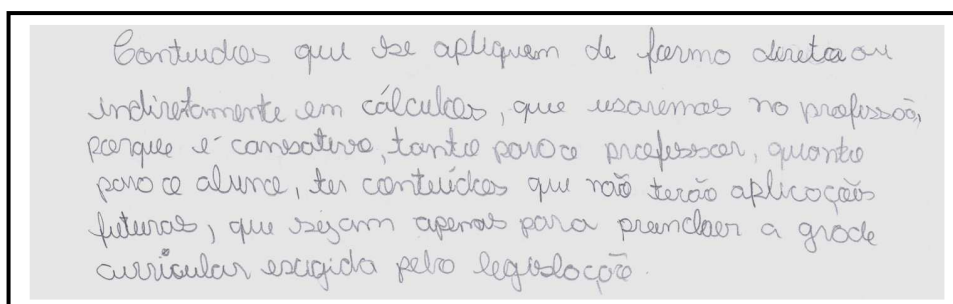
Quanto à disciplina de Álgebra Linear, ela ocorre no primeiro semestre letivo da graduação e recebe o nome de Álgebra Linear, Vetores e Geometria Analítica. Sua carga horária é de 80 horas/aula. O plano de ensino é apresentado no ANEXO H desta tese.

Identificamos que, apesar do conteúdo relacionado ao conceito de autovalor e autovetor constar na ementa do curso e ser desenvolvido em aula, houve grande dificuldade dos alunos em trabalhar com o problema proposto, alegando que lhes faltava conteúdo.

Após lermos em conjunto o enunciado do problema, foi apresentada a **Questão 1**.

Evidenciamos nos discursos dos três alunos participantes a disposição e a iniciativa em trabalhar com conteúdos como o problema proposto. Porém, faltava-lhes incentivo durante as aulas. Identificavam que tais conteúdos eram fundamentais e que seriam usados na profissão, contudo, a grande maioria dos conteúdos era ministrada para preencher a grade curricular exigida pela legislação. É o que discorre o Aluno 1:

Figura 52 - Resposta da Questão 1 pelo Aluno 1



Quando apresentado o problema, partimos para a Questão 2. As respostas obtidas foram as seguintes:

**Aluno 1:** Esses fatores indicam a taxa de variabilidade de crescimento de ratos e corujas, não é? O  $-p$  indica que os ratos vão ser comidos pelas corujas. A relação entre presa e predador está no sistema. Esse problema é bastante viável, mas depende muito da maturidade da sala.

Figura 53 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 1

Sim, onde o fator determinante do sistema é o  $-p \cdot O_k$ , que indica o número de ratos comidos por uma coruja no mês, os outros parâmetros são fatores que descrevem a relação de presas e predadores de acordo com o texto.

São os fatores que indicam qual a taxa de variabilidade de corujas e de ratos sendo que um depende do outro para o sistema funcionar.

**Aluno 2:** Acho que temos um problema de ação predatória. A relação entre as vidas dos ratos e corujas está no sistema e no vetor

$$x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix} \text{ e } k \text{ é o mês e } k+1 \text{ é o mês seguinte.}$$

Figura 54 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 2

$\begin{cases} O_k = \text{n}^\circ \text{ de corujas} \\ R_k = \text{n}^\circ \text{ de ratos} \end{cases} \quad x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$

$O_{k+1} = (0,5)O_k + (0,4)R_k$   
 $R_{k+1} = -p \cdot O_k + (1,1)R_k$

$(0,5)O_k$  = Se não houver ratos apenas metade das corujas sobrevivem  
 $(0,4)R_k$  = Se o n.º de ratos crescer proporcionalmente o n.º de corujas irá crescer também.  
 $-p \cdot O_k$  = É relacionado ao n.º de ratos que morrem devido a alimentação das corujas (ação predatória)  
 $(1,1)R_k$  = Se não tiver corujas, a população de ratos cresce 10% ao mês

**Aluno 3:** Professora, essa é matéria de Cálculo Numérico? Porque nós vimos que  $k$  e  $k+1$  existem em um método iterativo. O resultado do mês seguinte depende do mês anterior. Acho que posso entender que esse é um problema para calcularmos como fica o crescimento da população de corujas e ratos no decorrer dos meses. E o sistema mostra como é que as populações crescem e decrescem, para que haja o equilíbrio ecológico Parece bem interessante! Tem tudo a ver com a gente!

Figura 55 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 3

$$O_{k+1} = (0,5)O_k + (0,4)R_k$$

$$R_{k+1} = -p \cdot O_k + (1,1)R_k$$

Sim, mas eq. mês a mês:

$(0,5)O_k$  = metade das coxujas sobrevivem a cada mês, sem os ratos para se alimentar.

$(1,1)R_k$  = sem as coxujas como predadoras, a população de ratos cresce a uma taxa de 10% ao mês.

$O_{k+1}$  = relação entre as coxujas.

$R_{k+1}$  = relação entre os ratos.

$(0,4)R_k$  = população de coxujas crescerá com a abundância de ratos.

$-p \cdot O_k$  = mede o número de ratos mortos, devido a caça predatória das coxujas.

Assim, quando questionados a respeito dos parâmetros que são estabelecidos em ambas as equações, os alunos mostraram compreendê-los com a leitura do enunciado.

Os Alunos 1 e 3, após a primeira leitura do enunciado, identificaram que o objetivo do problema limitava-se a encontrar os fatores que estabilizariam o sistema, acarretando um equilíbrio ecológico.

A relação com as demais disciplinas do curso foi estabelecida prontamente pelos alunos, dentre elas, Cálculo Numérico.

**Intervenção da pesquisadora:** Você compreendem o conceito de autovalor e autovetor?

**Aluno 1:** Acho que é esse número que estabiliza o sistema.

**Aluno 3:** O Autovalor é um escalar, uma constante. Se eu multiplicar esse escalar pela matriz  $x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$  quando  $k$  for igual a zero, vamos

ter essa matriz no instante  $k+1$ . Esse é o autovetor. E se esse escalar é único, a matriz também é.

Em nenhum momento, houve consulta dos alunos em relação a seus apontamentos ou livros.

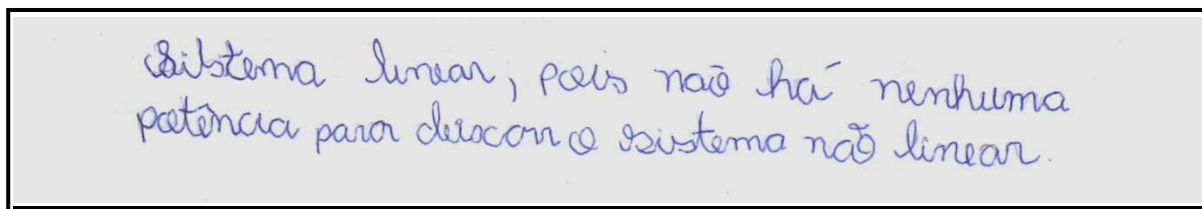
O Aluno 2 não respondeu à Intervenção da Pesquisadora. Mas os Alunos 1 e 3, tentaram expressar sua compreensão em relação ao conceito de Autovalor e Autovetor, reforçando a todo momento que deveriam encontrar “um número” que estabilizasse o sistema. Já o Aluno 3 pareceu ter a imagem mental de um vetor que, quando multiplicado por um escalar, acarretará um outro vetor. Este seria o resultado que estariam buscando o autovetor. Os conceitos parecem ser implícitos ao sujeito e de um modo intuitivo expressou a ação de uma transformação linear  $x \mapsto A.x$ . Destacamos que, em nenhum momento, houve a expressão do termo transformação linear pelos alunos.

Conforme expõe Dreyfus (1991), é importante que se identifiquem os processos componentes para entender a matemática avançada e suas interações.

Os discursos de ambos os alunos, sobretudo, do Aluno 3 evidenciou aspectos abstratos e dedutivos presentes no Pensamento Matemático Avançado. Mas, ficou evidente que não houve a construção apropriada dos objetos matemáticos com base na interação de seus processos mentais. Os construtos não têm um estatuto de objeto matemático e, portanto, não podem ser pensados proceitualmente.

### Apresentação da Questão 3

Figura 56 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 1



O Aluno 1 considerou, de maneira intuitiva, que o problema trata de um modelo linear. Faz referência aos modelos não lineares que, na sua concepção, não apresenta potência.

**Aluno 2:** A primeira coisa que eu pensei quando você me perguntou sobre os conteúdos envolvidos foram os conteúdos da matéria de Probabilidade e Estatística que tivemos. Os conteúdos estão relacionados. Se você está procurando a probabilidade de crescimento de uma população qualquer você está falando de Probabilidade e Estatística. Mas, depois que vi um vetor e um sistema, acho que tem mais conteúdo relacionado.

Figura 57 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 2

Existem vários envolvidos: determinantes, matrizes, equações e sistemas

A princípio, o Aluno 2 relacionou o problema proposto à disciplina de Probabilidade e Estatística. De maneira intuitiva, relaciona as probabilidades das populações de ratos e corujas em um determinado momento.

**Aluno 3:** Mas, esse aqui, olha é um sistema dinâmico mesmo. Para  $k = 0, 1, 2$  e  $3$ , levando em conta que são os meses esses daqui. Quando  $k = 0$  e  $1$ , temos as corujas jovens e  $k = 2$  e assim em diante ... Ainda acho que você quer falar de métodos iterativos. Olha só, se eu resolver o sistema pelo Método de Gauss-Seidel, para  $k = 0, k = 1, k = 2$ , até  $k$  igual a um número que o sistema vai se estabilizar, vamos ter o equilíbrio do sistema.

Figura 58 - Resposta à Questão 3 pelo Aluno 3

sistemas de equações, matrizes, sistema iterativo  $k+1$

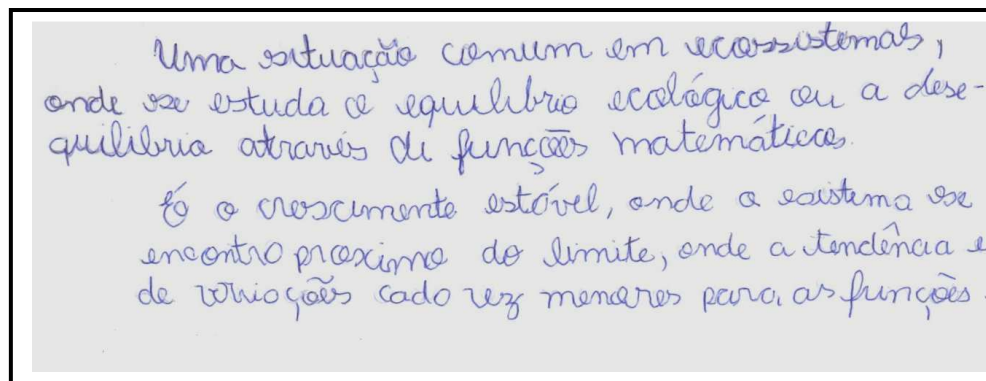
$\rightarrow K=0$  , determinante  $A_0 = 1000$   $R_0 = 1$   
 $A_1 = (0,5)1000 + (0,4) \cdot 1 \Rightarrow$   
 $\rightarrow K=1$   
 $\rightarrow K=2$   
 $\rightarrow K=3$   
 $\rightarrow K=4$

Ficou evidente que vinha à mente do aluno a relação com os métodos iterativos, discutidos na disciplina de Cálculo Numérico. O Aluno 3 expôs que uma possível solução seria resolver o sistema linear baseado no Método de Gauss-Seidel. Este é um método iterativo em que o sistema linear  $A \cdot x = b$  é escrito na forma equivalente  $x = C \cdot x + g$  por separação da diagonal. Assim, sendo  $x_0$  uma aproximação inicial, é calculada a sequência  $x_k$  de vetores. Mas, ele não conseguiu desenvolver o problema pelo método citado.

As respostas da questão 4 foram:

**Aluno 1:** É quando se busca o crescimento estável das populações, e a tendência de variações é cada vez menor. É o equilíbrio ecológico. Preciso saber o conceito de limite para responder a essa questão. É o momento que a função chega a um limite, que é a estabilização do sistema, e isso ocorre quando o  $x$  tende ao infinito.

Figura 59 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 1

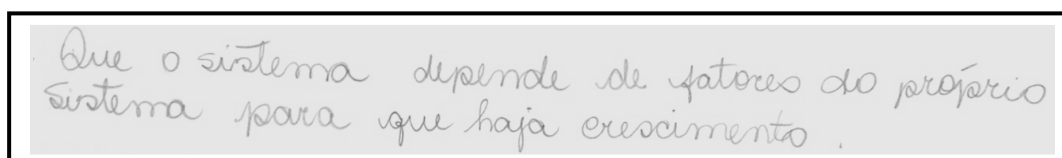


Uma situação comum em ecossistemas, onde se estuda o equilíbrio ecológico ou a desequilíbrio através de funções matemáticas.

É o crescimento estável, onde o sistema se encontra próximo de limite, onde a tendência e de variações cada vez menores para as funções.

Quando questionado a respeito de sua compreensão do conceito de crescimento assintótico, o Aluno 1 expôs a noção de limite e afirmou que precisaria saber seu conceito. Citou as palavras funções matemáticas, tendência de variações e limite. Mais uma vez, podemos afirmar que as observações do Aluno 1 refletem o papel do pensamento abstrato e dedutivo, característico do Pensamento Matemático Avançado. Para ele, o equilíbrio ecológico ocorre em uma situação de convergência, e isso acontece quando encontramos o limite de uma determinada função matemática, quando  $x$  tende ao infinito.

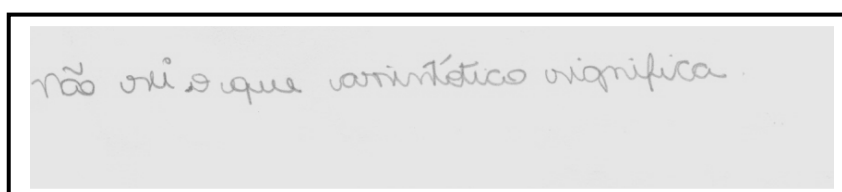
Figura 60 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 2



Que o sistema depende de fatores do próprio sistema para que haja crescimento.

Consideramos que o Aluno 2 não conseguiu responder à questão 4.

Figura 61 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 3



não sei o que assintótico significa.

Embora o Aluno 3 tivesse escrito que não sabia o que assintótico significava, sua compreensão ficou bastante clara nas citações anteriores.

Dentre os comentários feitos pelo Aluno 3, identificamos sua apreensão para resolver o problema, porém faltava-lhe conhecimento a respeito dos conceitos relacionados. Em um momento, após grande esforço, ele desistiu de resolvê-lo e lamentou:

**Aluno 3:** Professora, eu cheguei à conclusão: que eu não sei resolver, porque eu não sei o que é um autovetor. Até a parte do sistema dinâmico, eu sei fazer, para  $k = 0, 1, 2$  e  $3$ , mas a parte de autovetor eu não sei como achar. Eu consigo entender as quantidades, as relações, mas não sei calcular os valores. Eu entendi tudo. Porque, na verdade, o professor que passou essa matéria, primeiro, que ele não sabia passar a matéria. Ele chegava a um sisteminha simples, cálculo de matrizes e, segundo, que nós não entendíamos, o que ele estava passando e quando a gente perguntava, ele não entendia nossa pergunta.

**Intervenção da pesquisadora:** Você chegou à conclusão de que não sabe achar os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , porque não sabe o que é um autovalor e autovetor, porém entendeu o contexto do problema perfeitamente. Você acredita que problemas como este poderiam ajudar na compreensão dos conceitos?

**Aluno 1:** Os professores não têm hábito de passar exemplos como estes, porque dá muito trabalho.

Figura 62 - Resposta à Intervenção da Pesquisadora pelo Aluno 1

Sim, é muito mais interessante aprender com exercícios onde se vê a sua aplicação, pois assim se torna mais fácil e aprendido e quando nos depararmos com a situação real, obteremos melhores resultados.

Isso varia de dependendo dos alunos, mas acredito que a maioria tem interesse no aprendizado, mas em alguns casos, acredito que fica difícil de ser aplicado exatamente pela mentalidade da sala.

Muito direto, só passar os exercícios sem questões problemas e isso se reflete ao longo da curso, infelizmente.

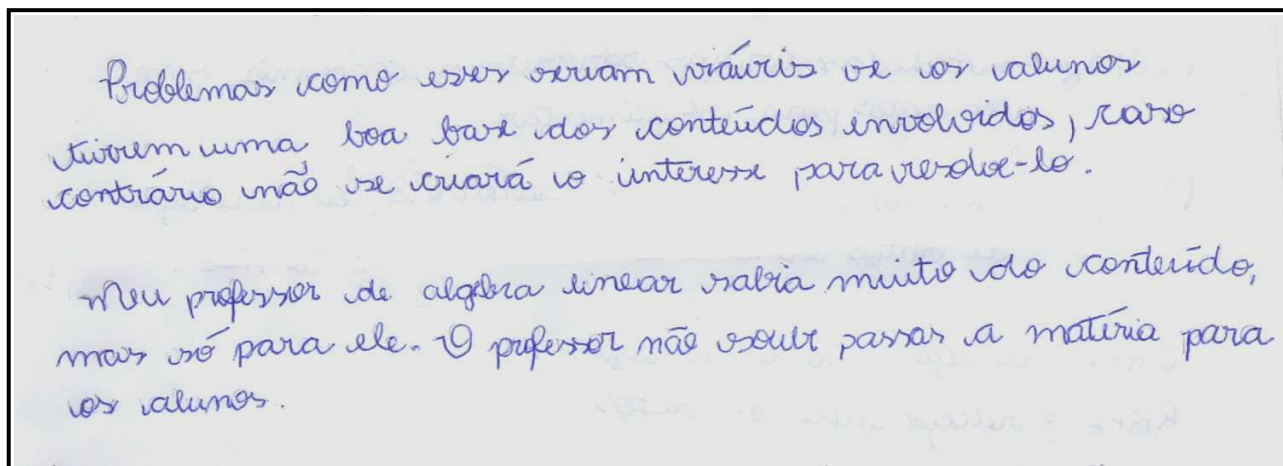
Figura 63 - Resposta à Intervenção da Pesquisadora pelo Aluno 2

Sim, pois o aluno vê o valor do cálculo em si em que situação pode aplicar as teorias aprendidas em sala.

Acho que sim, pois muitos professores ensinam apenas como se resolve a equação/sistema, mas muitas vezes não mostra onde podemos aplicar estes cálculos, então com situações como esta facilitam o aprendizado.

A abordagem não foi muito ampla, como respondi nas questões anteriores o professor deu alguns exercícios, mas não mostrou nenhuma situação em que podíamos aplicar o que ele ensinou.

Figura 64 - Resposta à Intervenção da Pesquisadora pelo Aluno 3



O Aluno 3 prosseguiu afirmando que problemas como esse são interessantes quando há uma “boa base” trabalhada em aula. Relacionou a sua defasagem e de seus colegas a problemas de didática do professor.

### 7.3.1 *Resumo e Conjecturas*

Consideramos que o Aluno 3 mostrou a ideia implícita de equação na forma  $Ax = \lambda x$ , em que  $A$ ,  $x$  e  $\lambda$  são, respectivamente, a matriz dada, o autovetor e autovalor. Identificamos que suas ideias apresentam-se desconectas dos conceitos necessários, porém, em seus discursos, ficaram evidentes os pensamentos intuitivo e dedutivo característicos do Pensamento Matemático Avançado.

Outra característica importante do Pensamento Matemático Avançado apresentada por Dreyfus (1991), que o processo de generalização é considerado pré-requisito para a abstração. Analogamente ao autor, consideramos que, no processo de generalização, os requisitos cognitivos são consideravelmente ampliados. Foi o que pudemos evidenciar nos discursos dos Alunos 1 e 3 quanto à citação dos Métodos Iterativos necessários para se obter  $x_{k+1}$  com base no vetor inicial. Afirmaram que a solução do problema era encontrar um vetor  $x_{k+1}$  que estabilizasse o sistema.

Contudo, a generalização não apresenta o peso da exigência cognitiva dos estudantes como a abstração. É esta que permite as reconstruções mentais, já a generalização promove a expansão da estrutura do conceito dos sujeitos.

Ainda como expõe Tall (1991), a caracterização do Pensamento Matemático Avançado ocorre quando (i) há um “debate científico” do aluno em busca da solução do problema, ao contrário de uma postura passiva de uma teoria pré-organizada; (ii) existe a construção de fundamentação cognitiva para o conceito com base no equilíbrio entre crescimento cognitivo e desenvolvimento lógico.

Nos discursos observados dos três estudantes investigados, acrescentamos que todos apresentaram uma natureza própria de investigação que lhes possibilitou adquirir uma atitude matemática.

Assim, entendemos que foram estabelecidas conjecturas, discussões e conclusões, independentemente, das propriedades intrínsecas dos objetos matemáticos envolvidos. Houve foco no processo e não no produto, como ocorre no nível elementar.

Também pudemos evidenciar que impressões e experiências foram evocadas para a construção de uma imagem mental, atribuída ao vetor  $x_k$  e  $x_{k+1}$  e ao escalar  $\lambda$ . Para Vinner (1991), para se adquirir e entender um conceito de dado objeto é necessário formar um conceito imagem do mesmo e, muitas vezes, o conceito definição torna-se dispensável. É o que ocorre nos contextos do cotidiano.

Consideramos que os três alunos entrevistados geraram respostas puramente intuitivas, construídas com base em um conceito imagem em nível incipiente. Os alunos não assumem os conceitos trabalhados como objetos matemáticos e referem-se a objetos elementares que não traduzem o conceito pretendido.

Quando tratamos das concepções inerentes ao objeto matemático, podemos afirmar que os três alunos apresentam indícios da concepção ação, já que não foi possível a identificação de qualquer característica atribuída por Stewart (2008) ou Trigueros *et al.* (2012).

Os alunos tinham consciência de suas limitações e acreditavam que tais limitações estavam diretamente relacionadas à didática do professor e ao extenso conteúdo da disciplina Álgebra Linear, Vetores e Geometria Analítica que deveria ser todo ministrado em apenas 80 horas/aula.

Portanto, defendemos ser imprescindível prover material suficiente que lhes promova a construção de novas estruturas e processos de pensamento e permita escolher quais as ações possam conduzir a construção dos objetos matemáticos pretendidos.

## 7.4 Estudo de Caso II - Segunda fase: Entrevistas com alunos do 10º. Semestre de um curso de Engenharia

### *7.4.1 O discurso e desenvolvimento do problema pelos alunos entrevistados*

Nesta fase da pesquisa, foram realizadas entrevistas com três alunos de um curso de Engenharia de uma instituição particular do Estado de São Paulo. As entrevistas ocorreram individualmente na instituição, foram gravadas e a primeira durou, aproximadamente, duas horas, e as demais, uma hora. A consulta de todos os apontamentos e livros que achassem pertinentes foi permitida. Como já havia sido dito anteriormente à entrevista, que os alunos poderiam consultar materiais, caso achassem necessário, o Aluno 1 trouxe o livro *Introdução aos Sistemas Dinâmicos* de Luiz de Queiroz Orsini. O objetivo da pesquisa foi exposto a todos os participantes e entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para assinatura.

A primeira entrevista aconteceu em outubro de 2013. O aluno participante de nossa pesquisa disse ter muita experiência na área de construção civil, pois exerce a profissão em uma construtora há mais de vinte anos. Seus relatos evidenciaram a experiência de engenheiros da área de estruturas e a distinção das especialidades em seu segmento. De acordo com o aluno entrevistado, seu departamento é composto por engenheiros de análise, engenheiros de projetos e engenheiros de *software*. Tal divisão define, claramente, os distintos papéis das profissões.

Quando apresentado o objetivo da pesquisa e discutido sobre o papel das disciplinas matemáticas no contexto da Engenharia, os alunos discorreram:

**Aluno 1:** É preciso recorrer a outra pessoa quando existem cálculos mais complexos a serem realizados. Ai entra o papel do engenheiro de análise, mas, todos os aspectos da Engenharia de Projetos e *softwares* computacionais têm uma importância significativa. Mas, poucos são os engenheiros especialistas em análise. Geralmente, são consultores em análise de problemas matemáticos e vêm da área acadêmica. Essa especialidade supre a necessidade daqueles engenheiros que não conseguem resolver um problema desses, quando ele surge. Por exemplo, na Engenharia Civil, a simples verificação de uma coluna ou viga em construção é tão complexa

que pode levar até 6 meses para sua análise. No desenho de uma aeronave, você precisa reduzir o tamanho dos componentes, garantindo uma segurança absoluta mínima. Mas, na construção de um prédio você precisa fazer aproximações enormes, porque aquilo tem que ficar pronto em um dia. E não há nada errado com isso, porque parte da arte estrutural do projeto é aprender a aproximar. Assim, os cálculos de projetos são familiares à prática dos engenheiros. São as normas técnicas. Mas, é preciso um grande esforço da equipe para produzir argumentos convincentes de que a estrutura irá comportar-se conforme o previsto. Aí, ocorre a análise do especialista em matemática. O mínimo é que saibamos analisar os resultados passados por esse especialista. É assim: a grande maioria dos engenheiros não realiza cálculos matemáticos complexos. É suficiente que eles saibam que aqueles métodos específicos existem e compreendam seus resultados.

**Aluno 2:** A matemática que o engenheiro usa é bastante diferente daquela estudada no contexto universitário. No ensino tradicional, os engenheiros aprendem as técnicas matemáticas com o objetivo de aplicá-las em problemas da Engenharia mais tarde. As habilidades táticas que surgem com a experiência na Engenharia não são as mesmas que integram as habilidades desenvolvidas nos cursos de matemática.

**Aluno 3:** Em um projeto, cada engenheiro, com sua experiência, evidencia aquilo em que ele é melhor. Pode ser na análise, no desenho ou na gestão e há uma variedade de conhecimentos relacionados a isso. O objetivo da matemática na carreira do engenheiro tem mais o papel estratégico, cujo foco passa a ser o projeto. Não é matemática pela matemática, mas a matemática pela nossa prática. O engenheiro não necessariamente fará a matemática, mas precisa compreendê-la.

Esperávamos escutar dos engenheiros a respeito da rica e explícita matemática usada na sua prática, porém o que ficou evidenciado baseado em seus discursos foi que a grande maioria não usa a Matemática ensinada na faculdade e que são poucos os que trabalham com ela, geralmente, consultores e professores de universidades. Em suas funções, é esperado que os resultados sejam compreendidos e avaliados. Mas, a Matemática estabelecida como disciplina em uso apresenta um foco bastante distinto das disciplinas matemáticas dos cursos superiores de graduação.

No próximo discurso estabelecido pelo Aluno 1, ele cita uma relação entre as disciplinas matemáticas e específicas de sua graduação. Ele faz referência ao Método dos Elementos Finitos apresentado no 4º. Semestre de sua graduação, na disciplina Computação Gráfica a partir de uma ferramenta computacional.

**Aluno 1:** Os engenheiros precisam ter uma visão do que acontece dentro da caixa preta com o objetivo de decidir o método mais apropriado. Se ele não tem isso, ele vai ficar limitado às regras, mas acho que não há a necessidade de tornar os cálculos explícitos. O julgamento final é feito pelo que ele compreende da própria Engenharia. Por exemplo, para o cálculo de elementos finitos de estruturas em que a geração de elementos automáticos ou algoritmos pode facilmente produzir elementos ruins. O *software* não, necessariamente, vai achar a melhor solução. Sempre ocorrem erros porque o computador comete falhas nos resultados. Por isso, é muito importante que analisem os resultados porque encontramos coisas que não saem como o planejado. Você precisa ter conhecimento de como e do que você espera como resultado e, assim, identificar onde está ocorrendo o problema. Há um grande ciclo: você faz o modelo, checa os resultados, checa novamente e refaz o modelo, se necessário. Na faculdade, nós tivemos uma matéria assim. Mas foi só a base porque o aprofundamento vem depois. Em Computação Gráfica nós tivemos um pouco sobre elementos finitos, CAD. Fizemos análise estrutural, de estradas, estudo topográfico com *softwares*.

De acordo com Soriano (2009), o estudo do Método dos Elementos Finitos, permite que seja analisado *o comportamento de qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais, como da mecânica dos sólidos deformáveis, da condução de calor e de massa, e do eletromagnetismo* (p.1). O autor cita que, para realizar o estudo, é necessário que haja um equilíbrio entre a consistência matemática e a conceituação física, e para tanto, o aluno deve ter conhecimento da Resistência dos Materiais e domínio de operações fundamentais da Álgebra Matricial e do Cálculo Diferencial e Integral.

O autor supracitado explica que o estudo analítico do comportamento macroscópico da matéria (sólida, líquida ou gasosa) não se mostrou adequado na maioria das aplicações de Engenharia. Para uma melhor análise, a matéria passou a ser considerada, como uma distribuição contínua em que infinitos “pontos materiais” adjacentes uns aos outros preservam suas propriedades, pois ao se afastarem não formam vazios ou ao se aproximarem não se sobrepõem. É o chamado meio contínuo, estabelecido por equações matemáticas que constituem um modelo matemático da Mecânica do Contínuo e regem o comportamento da matéria de forma aproximada, adequada.

Em outras situações, um sistema físico é constituído por um número finito de componentes, idealizados por pontos discretos. São os chamados modelos

matemáticos discretos. Tais modelos são considerados fechados quando não é considerada a alteração do fenômeno no tempo e abertos, em caso contrário.

A seguir, apresentamos o estudo do objeto matemático autovalor em um modelo aberto.

Em um modelo aberto, em que se estuda a distribuição de tensão em um sólido deformado por ações estáticas e a condução de calor em regime permanente, há o estabelecimento de certas condições do instante inicial para sua resolução, o que caracteriza um problema de condições iniciais ou de valores iniciais. O estudo é dado por equações diferenciais com parâmetros desconhecidos, além das variáveis dependentes, e é denominado de problema de autovalor.

Soriano (2009) acrescenta que não é necessário ser um matemático para utilizar a Matemática como ferramenta. A visão exposta pelo autor revela a opinião do Aluno 1 entrevistado a respeito do papel da Matemática na sua graduação.

**Aluno 1:** O papel do especialista em projeto é de, elegantemente, sintetizar problemas que podem ser expressos matematicamente. O analista de projeto passa as informações para outro especialista que tratará as relações para investigar coisas e trará as respostas como equações, que o engenheiro de projeto pode ajustar ou alterar os parâmetros de acordo com a necessidade. A matemática passa a ser usada como uma ferramenta de comunicação. É uma linguagem comum que todos devem seguir.

E acrescenta outra disciplina de importância significativa em sua formação, a Geometria.

**Aluno 1:** Um exemplo fundamental para a Engenharia de Estruturas é trabalhar com a Geometria das Estruturas. Geometria, é enormemente, importante. Por exemplo, você tem uma parábola, uma catenária ou uma curva que corresponda ao comportamento estrutural. Para realizar o cálculo da área, é necessário que haja o equilíbrio das forças em três dimensões. O engenheiro pode usar a Matemática para determinar o momento de flexão de uma viga ou as deformações dos elementos. São curvas que são desenhadas em termos estruturais. Numa situação como essa, não é importante saber o significado da Matemática pura, mas, sim, os resultados obtidos. São os resultados qualitativos, dos processos envolvidos e não os quantitativos. Isso nós deixamos para o engenheiro de análise, o da academia. É a sua “sensibilidade” estrutural com ênfase naquilo que é intuitivo.

Os Alunos 2 e 3 também citaram comentários a respeito da interdisciplinaridade que se estabelece entre a Matemática e as demais disciplinas da graduação.

**Aluno 2:** Nós tivemos muitas matérias boas e outras não tão boas assim. Lembro-me de Simulação de Sistemas e Sistemas Digitais. No nosso TCC, um professor de física nos ajudou a desenvolver os cálculos e nós aplicamos. Infelizmente, o tempo não é suficiente para aprofundar toda informação que a gente recebe. Vou tentar me aprofundar agora que sai da faculdade com uma pós-graduação. Em Simulação de Sistemas, tem muita Matemática por trás de cada resultado. Nós aprendemos a modelar um sistema, analisar os resultados e fazer ajustes. Nós trabalhamos com simulação orientada a objeto. Nas últimas aulas, nós tivemos simulação com o *software* Arena.

**Aluno 3:** É impossível você fazer Engenharia se não gostar de Matemática ou Física. É a base, o fundamento de tudo. No final da faculdade, nós tivemos Controle e Servomecanismo. É a controlabilidade, observabilidade e estabilidade. São modelos matemáticos.

Em seguida, o Aluno 1 acrescentou que as ferramentas computacionais parecem ter mudado a cultura de aprendizagem pois tudo passa a ser ensinado com base nos *softwares*. Já os Alunos 2 e 3 citaram comentários a respeito dos *softwares* computacionais e das análises e cuidados que devem ser despendidos aos resultados gerados.

**Aluno 1:** Por isso, o papel do *software* na prática da Engenharia é fazer o entendimento baseado no uso. A tecnologia tornou a Matemática mais fácil de ser usada, e isso também mudou a cultura de aprendizagem, por exemplo, a respeito das estruturas. Você pode desenvolver uma ponte ou superestimá-la e vê-la entrar em colapso, vê-la vibrar. Você não tem mais o tempo e o dinheiro para fazer isso sem os *softwares*. E nem mesmo os professores ensinam sem eles.

**Aluno 2:** Os *softwares* nos ajudam à medida que precisamos avaliar dados, desenvolver projetos com rapidez e com a maior segurança possível. Tudo tem de ser planejado e controlado em mínimos detalhes. Em nossa empresa, usamos *softwares* de análise de projetos, tem muita, muita estatística envolvida aí.

**Aluno 3:** É muito comum participarmos de treinamento pela nossa empresa. Um dia desses nós participamos de um treinamento de Análise de Confiabilidade de Sistemas. Muito bom, por sinal. E melhor ainda é que eu era um dos poucos que estavam entendendo o que o instrutor estava passando. O pessoal atrapalhava-se porque tinha muita Matemática. Trabalhamos com análise de erros, tempo

de vida útil de um produto, muita coisa interessante. Acho que a Engenharia ajudou-me muito em tudo isso.

Depois de uma discussão inicial sobre o objetivo da pesquisa e do papel da Matemática nos contextos práticos da Engenharia, partimos para a leitura do enunciado do problema.

### Intervenção da pesquisadora: Apresentação da **Questão 2**

Figura 65 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 1

$O_k$  são as cojujas no momento  $k$  (em meses).  
 $h_k$  são os ratos no momento  $k$  (em meses).  
 $O_{k+1}$  são as cojujas no momento  $k+1$ .  
 $h_{k+1}$  são os ratos no momento  $k+1$ .

Figura 66 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 2

Sim, os parâmetros são

$(0,5) O_k$  = somente metade das cojujas sobrevive se não houver ratos para se alimentar

$(1,1) h_k$  = sem cojujas a população de ratos cresce 10% ao mês

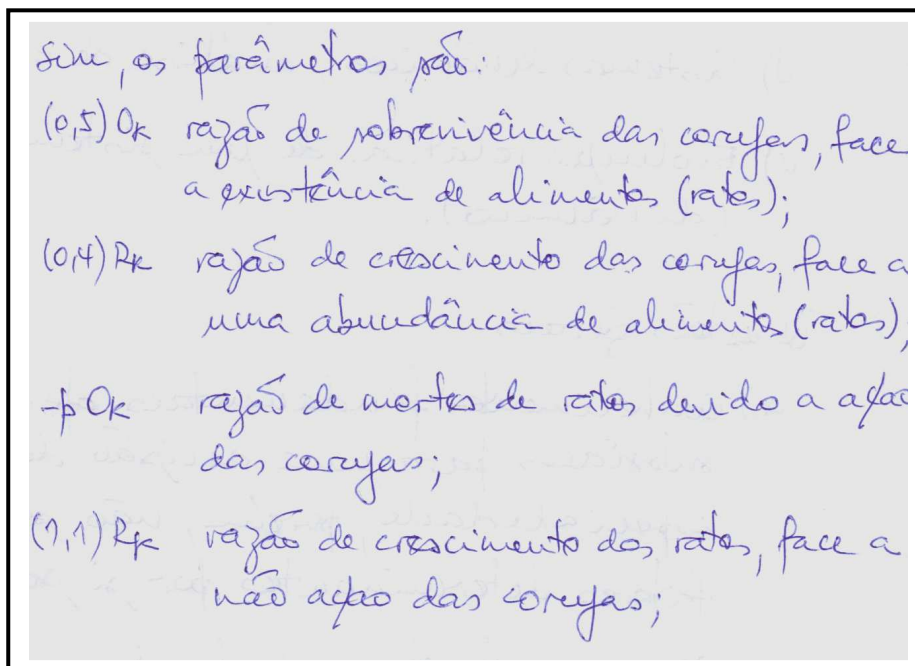
$O_{k+1}$  = relação de cojujas com ratos

$h_{k+1}$  = relação de ratos com cojujas

$-p$  = parâmetro predatório

$(0,4) h_k$  = faz com que as cojujas cresçam

Figura 67 - Resposta da Questão 2 pelo Aluno 3



Em suas respostas, o Aluno 1 confundiu os parâmetros com as incógnitas do problema e seguiu com sua resolução. Já os Alunos 2 e 3 identificaram os parâmetros corretamente e conseguiram expressar as relações entre a população de ratos e corujas.

O Aluno 2 não prosseguiu na entrevista por não se lembrar da disciplina. Assim, como os alunos da primeira fase deste estudo de caso, citou que o conteúdo ministrado foi direcionado ao estudo de Vetores e pouco a Álgebra Linear

Após a identificação dos parâmetros do sistema, o Aluno 3 escreveu-os em notação matricial e a relação estabelecida pela equação  $Ax_k = \lambda x_k$ , contudo não conseguiu prosseguir com a resolução do problema e observou que precisava encontrar  $x_{k1}$  e  $x_{k2}$  que correspondia aos autovetores e  $\lambda$  o autovalor, mas não se lembrava como.

Figura 68 - Notação matricial pelo Aluno 3

Handwritten mathematical work by a student, showing the notation for finding eigenvalues and eigenvectors of a matrix. The work is written in blue ink on a light background.

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot x_k = \lambda \cdot x_k$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot x_k = \lambda \cdot x_k$$

$A \cdot x_k = \lambda \cdot x_k$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0_k \\ R_k \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0_k \\ R_k \end{bmatrix}$$

necessário achar  $x_{k1}$  e  $x_{k2}$  (autovetores)  
e  $\lambda$  (autovalor). não me lembro como

Após a apresentação da **Questão 2**, um fato curioso e que nos chamou a atenção foi que os alunos mostraram conhecer o tema ou o conceito em estudo. Mas, todos afirmaram que o grande foco da disciplina, quando ministrada, foi Vetores. Observando a ementa da disciplina Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear, notamos que o tópico Autovalores e Autovetores é apresentado antes mesmo que se inicie o tema Subespaço Vetoriais e retorna ao final do conteúdo, após a apresentação de Transformações Lineares (ANEXO H). Percebemos, portanto, que não, necessariamente, os professores conseguem completar todo o conteúdo no semestre, tornando a aprendizagem do conceito de Autovalores e Autovetores limitada às operações com vetores. Após a primeira exposição do conceito de Autovalores e Autovetores, que ocorre por volta de meados do semestre letivo, seguem os conteúdos Espaços Vetoriais, Base e Dimensão, Transformações Lineares e, por último, Autovalores e Autovetores envolvendo os conceitos anteriores. É bem provável que essa última relação não seja estabelecida em razão da finalização do semestre.

Todos os alunos reconheceram a importância do conceito envolvido, e a leitura do enunciado do problema pôde evidenciar a todos que o objetivo foi apresentar a evolução de um sistema populacional entre predadores e presas.

Uma das primeiras perguntas realizadas pelo Aluno 1, evidenciou que intuitivamente, ele percebeu que, quando  $K+1$  tende ao infinito, o sistema irá se estabilizar. Parece que ele já deu pistas para resposta da Questão 4.

**Aluno 1:** O que acontece em  $k+1$ ,  $+1$ ,  $+1$ , etc.? Com certeza, as populações não vão crescer ou morrer infinitamente. Há um equilíbrio ecológico, não é?

Após essa fase, o Aluno 1 pediu para consultar o livro que havia trazido e abriu no Capítulo 5 que discute o conceito de Autovalores e Autovetores. Expos em voz alta seu conceito e a definição de autovalores:

Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  e elementos constantes, pertencentes a  $R$  (conjunto real), pode ser considerada como uma transformação linear que transforma um vetor  $v \in C^n$  em um outro vetor  $w$ , também de  $C^n$ , pela regra  $w = A.v$  (ORSINI, 1985, p. 82).

E prosseguiu:

Cabe agora a pergunta: existirão em  $C^n$  vetores  $u$  tais que  $A.u = \lambda u$  onde  $\lambda$  é um escalar real ou complexo? A resposta é afirmativa, e nos leva à definição de autovalores e autovetores:

Um vetor  $u$  não nulo é chamado autovetor de uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , de elementos constantes e pertencentes a  $R$  se, e apenas se,  $u$  satisfizer a  $A.u = \lambda u$  para algum escalar  $\lambda \in C$ . O correspondente escalar é chamado autovalor de  $A$  (ORSINI, 1985, p. 82).

Em seguida, o Aluno 1 partiu para a resolução do problema, representando o sistema linear homogêneo em notação matricial:

Figura 69 - Representação do sistema linear em notação matricial pelo Aluno 1

No instante  $k+1$ , a relação entre a população de ratos e de coelhos é dada por:

$$\begin{cases} O_{k+1} = (0,5)O_k + (0,4)R_k & \text{(Equação 1)} \\ R_{k+1} = -p \cdot O_k + (1,1)R_k & \text{(Equação 2)} \end{cases}$$

que é descrita por um sistema linear homogêneo.

Se existe um sistema linear com parâmetros e incógnitas, precisamos achar  $O_k$  e  $R_k$ .

Se as populações de coelhos e ratos, no instante  $k$ , são denotadas por  $x_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$ , então suponho que posso escrever o sistema como a matriz

$$\begin{bmatrix} O_{k+1} \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -p & 1,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot x_{k+1} = A \cdot x_k$$

Toda a sequência desenvolvida pelo Aluno 1 foi realizada, após a leitura do livro que tinha em mãos. Ele afirmou que não lembrava da disciplina de Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear, mas, que tendo o livro em mãos não ficava difícil compreender a matéria. *É mais fácil quando se passam os anos e adquire-se experiência* (Aluno 1).

**Aluno 1:** Eu sempre estudei assim. Quando as coisas ficam confusas nas aulas eu pego os livros e estudo em casa nos finais de semana. Consigo entender e ainda ajudar meu filho que também faz Engenharia. Vou passo a passo e reflito sobre o assunto. Isso só vem com a maturidade.

O Aluno 1 conciliou a leitura do enunciado com o livro-texto, estabeleceu a relação com a equação  $A \cdot u = \lambda u$  (explicitada na definição) e compreende que o vetor  $u$  preserva as suas propriedades quando multiplicado por uma matriz  $A$ . Contudo, não conseguiu evidenciar a relação que é estabelecida na equação seguinte, exposta no mesmo livro,  $(\lambda I - A)u = 0$ . O livro não expressa, claramente, a relação entre ambas as equações, e o Aluno 1 pareceu segui-las como uma sequência para a determinação dos valores necessários, sem considerar os conceitos envolvidos, como a Matriz Identidade.

Para o cálculo dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , o Aluno 1 identificou a possibilidade de escrever o sistema dado em notação matricial e acompanha o Exemplo 1 do livro<sup>67</sup>.

De acordo com Poole (2004, p. 232), os *autovalores e autovetores são característicos de uma matriz no sentido de conferir informações importantes sobre sua natureza.*

Figura 70 – Encontrando os autovalores e autovetores pelo Aluno 1.

Então que  $A \cdot x_k = \lambda \cdot x_k$

Então  $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,1 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0_k \\ 1_k \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0_{k+1} \\ 1_{k+1} \end{bmatrix}$

De acordo com a definição de autovetor  $x_k$  e  $\begin{bmatrix} 0_k \\ 1_k \end{bmatrix}$  para algum escalar  $\lambda$ .  $\lambda$  é o autovalor se existir uma solução não-trivial (ou seja,  $x_k \neq 0$ ).

Da equação anterior sabemos que:

$$\begin{bmatrix} 0_{k+1} \\ 1_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,1 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0_k \\ 1_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0_{k+1} = 0,5 \cdot 0_k + 0,4 \cdot 1_k \\ 1_{k+1} = -0,1 \cdot 0_k + 1,1 \cdot 1_k \end{cases}$$

$(xI - A)u = 0$  é a equação matricial.

Após estabelecer a relação entre as equações  $Au = \lambda u$  e  $(\lambda I - A)u = 0$ , o Aluno 1 acrescentou que deve haver uma solução não trivial para  $(\lambda I - A)u = 0$ , ou seja,  $u \neq 0$ . O Aluno 1 considerou  $u = x_k$ . Prosseguiu com a afirmação de é necessário e suficiente que  $\det(\lambda I - A) = 0$ , chegando à equação característica da matriz e, em seguida, às raízes do polinômio característico de grau 2.

<sup>67</sup> Exemplo 1. Calcular os autovalores das matrizes  $A_1 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$  e  $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  (ORSINI, 1985, p. 83) (O Exemplo 1 completo é apresentado no ANEXO I desta tese).

Figura 71 - A identificação do polinômio característico e suas raízes pelo Aluno 1

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} u = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 0,5 & -0,4 \\ +0,104 & \lambda - 1,1 \end{bmatrix} u = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0,5 & -0,4 \\ +0,104 & \lambda - 1,1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{porque } \det(\lambda I - A) = 0$$

$$(\lambda - 0,5)(\lambda - 1,1) - (-0,4) \cdot (+0,104) = 0$$

$$\lambda^2 - 1,1\lambda - 0,5\lambda + 0,55 + 0,0416 = 0$$

$$\lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916 = 0.$$
  

$$\lambda^2 - 1,6\lambda + 0,5916 = 0 \quad (\text{essa expressão é o polinômio característico de grau 2})$$

$$\Delta = (1,6)^2 - 4(1)(0,5916)$$

$$\Delta = 2,56 - 2,3664 = 0,1936$$

$$\lambda = \frac{1,6 \pm \sqrt{0,1936}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1,02 \text{ e } \lambda_2 = 0,58$$

Para cálculo dos autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , o Aluno 1 seguiu o Exemplo 2<sup>68</sup> do livro e chegou aos resultados desejados.

<sup>68</sup> Exemplo 2. Determinar os autovetores associados aos autovalores das matrizes  $A_1$  e  $A_2$  do Exemplo 1 (ORSINI, 1985, p. 84) (Exemplo 2 completo é apresentado no ANEXO I desta tese).

Figura 72 - A identificação dos autovetores associados a  $\lambda_1 = 1,02$ 

Chegamos nos valores de  $\lambda_1 = 1,02$  e  $\lambda_2 = 0,52$  esses são os autovalores mas precisamos achar  $O_k$  e  $P_k$  que são os autovetores.

$$\begin{bmatrix} 1,02 - 0,5 & -0,4 \\ +0,104 & 1,02 - 1,1 \end{bmatrix} \cdot X_k = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0,52 & -0,4 \\ +0,104 & -0,08 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O_k \\ P_k \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0,52 O_k - 0,4 P_k = 0 \\ 0,104 O_k - 0,08 P_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (-0,2) \ 0,52 O_k - 0,4 P_k = 0 \\ \quad 0,104 O_k - 0,08 P_k = 0 \\ \hline -0,104 O_k + 0,08 P_k = 0 \\ +0,104 O_k - 0,08 P_k = 0 \\ \hline \boxed{0 = 0} \end{array}$$

$$\begin{cases} 0,52 O_k - 0,4 P_k = 0 \rightarrow 0,52 O_k = 0,4 P_k \rightarrow \boxed{O_k = \frac{0,4 P_k}{0,52}} & \textcircled{1} \\ 0,104 O_k - 0,08 P_k = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Significa que para qualquer valor de  $P_k$ , temos um  $O_k$  correspondente.

$$0,104 \cdot \left( \frac{0,4 P_k}{0,52} \right) - 0,08 P_k = 0$$

$$\frac{0,0416 P_k}{0,52} - 0,08 P_k = 0$$

$$0,0416 P_k - 0,0416 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\boxed{O_k = 0,77 P_k}$$

A relação é a mesma com a equação 2:

$$0,104 O_k - 0,08 P_k = 0$$

$$O_k = \frac{0,08 P_k}{0,104}$$

$$\boxed{O_k = 0,77 P_k}$$

$$O_k = \vec{u}$$

$$P_k = \vec{v}$$

conjugas      ratos.

$\vec{u} = 0,77 \vec{v}$  esse é o autovetor para  $\lambda_1 = 1,02$  (isto infinito)

ou  $(0,77 \vec{v}, \vec{v})$

se  $\vec{v} = (1,1)$  então  $\vec{u} = (0,77, 0,77)$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (0,77, 1)$$

Durante a resolução do problema, o Aluno 1 conseguiu identificar que há infinitos autovetores, após destacar a relação entre  $O_K$  e  $R_K$  como  $O_K = 0,77R_K$  para  $\lambda_1 = 1,02$  e  $O_K = 5R_K$  para  $\lambda_2 = 0,58$ .

O Aluno 1 leu no livro a *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*

Convém lembrar que  $(A - \lambda_i I)u_i = 0$ , sendo um sistema homogêneo, admite infinitas soluções, de fato, multiplicando uma solução  $u_i$  por um escalar qualquer obtemos outra solução (ORSINI, 1985, p. 83).

Em seguida, acrescentou que todos os autovetores devem ser linearmente independentes, ou seja,  $u \neq 0$  e prosseguiu

Uma matriz  $A$  ( $n \times n$ ), com todos os autovetores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  distintos, pode-se associar um conjunto de  $n$  autovetores linearmente independentes. Este conjunto qualifica-se como base em  $R^n$  (ou  $C^n$ ) (ORSINI, 1985, p. 84).

Figura 73 - A identificação dos autovetores associados a  $\lambda_2 = 0,58$ 

$$\lambda_2 = 0,58$$

$$\begin{bmatrix} 0,58 - 0,5 & -0,4 \\ 0,104 & 1,02 - 1,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} OK \\ PK \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0,08 & -0,4 \\ 0,104 & -0,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OK \\ PK \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0,08 OK - 0,4 PK = 0 \\ 0,104 OK - 0,08 PK = 0 \end{cases}$$

$$(-0,77)(0,08 OK - 0,4 PK) = 0$$

$$-0,0615 OK + 0,308 PK = 0$$

$$-0,0615 OK = -0,308 PK$$

$$OK = \frac{-0,308 PK}{-0,0615} = 5PK$$

$OK = 5PK$  Novamente temos uma indeterminação. Qualquer que seja o valor de PK temos o OK correspondente.

$$OK = \vec{w}$$

$$PK = \vec{z}$$

$$\vec{w} = 5\vec{z} \text{ esse é o autovetor para } \lambda_2 = 0,58 \text{ (são infinitos)}$$

ou  
 $(5\vec{z}, \vec{z})$  se  $\vec{z} = (1,1)$  então  $\vec{w} = (5,5)$

$$(\vec{w}, \vec{z}) = \boxed{(5,1)}$$

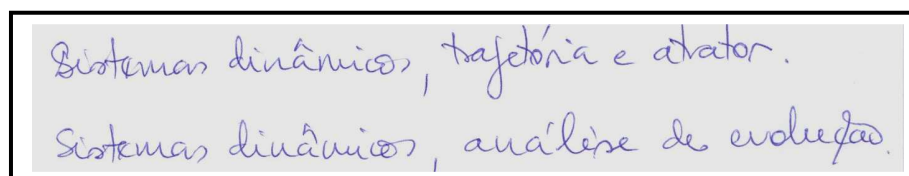
Após encontrarmos os valores de maneira correta, partimos para a **Questão 3**.  
 Obtivemos as seguintes respostas dos Alunos 1 e 3.

**Aluno 1:** A base de tudo são Vetores. Sistemas Lineares Homogêneos. Matrizes. Equação Característica. Polinômio Característico.

**Aluno 3:** Sistemas dinâmicos, análise de evolução.

Já o Aluno 3 atribuiu a seguinte resposta à Questão 3:

Figura 74 - Resposta da Questão 3 pelo Aluno 3



Sistemas dinâmicos, trajetória e atrator.  
Sistemas dinâmicos, análise de evolução.

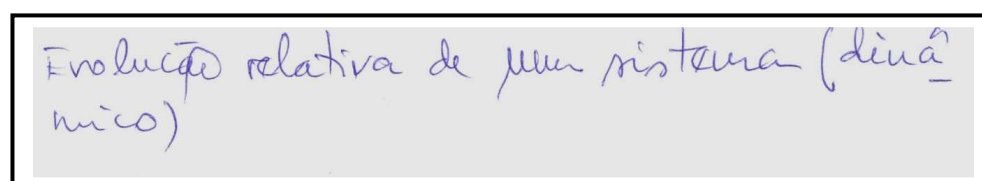
Identificamos que o Aluno 3 tem uma imagem mental do objeto matemático autovalor e autovetor como Sistemas Dinâmicos, trajetória, atrator e análise de evolução. Afirma lembrar-se vagamente que teve a “matéria” em determinado momento do curso, contudo, não prosseguiu no discurso.

Quanto à Questão 4, o Aluno 1 respondeu:

**Aluno 1:** É o ecossistema entrando em equilíbrio.  $K$  não pode crescer infinitamente. Vai chegar num momento que, independente do valor de  $K$ , o valor não muda mais. Isso é o crescimento assintótico.

O Aluno 2 não respondeu a esta questão e o Aluno 3 apresentou a resposta escrita:

Figura 75 - Resposta da Questão 4 pelo Aluno 3



Evolução relativa de um sistema (dinâmico)

#### 7.4.2 *Resumo e Conjecturas*

A discussão iniciou-se com a exposição dos alunos participantes a respeito de suas percepções sobre as disciplinas matemáticas em suas formações e suas vivências em ambientes de trabalhos. Todos citaram e reconheceram a importância das disciplinas matemáticas e destacaram os diferentes papéis que devem ser considerados em contextos de projetos ou de aplicações. A Matemática quando discutida em contextos de projetos pode evidenciar seu aspecto tático e estratégico,

para que os engenheiros compreendam e realizem análises em relação aos parâmetros, cabendo-lhes alterações e ajustes, caso considerem necessários.

Um fato distinto e de relevância que foi considerado em nossa análise em relação ao Estudo de Caso I, ocorreu entre os planos de ensino da disciplina Álgebra Linear, relativo ao tema autovalores e autovetores. Destacamos que no Estudo de Caso II o tema, em um primeiro momento, abordou o estudo de vetores, produto escalar, produto vetorial e produto misto, retas e planos. O tema autovalor e autovetor voltou a ser abordado no final da ementa, após o estudo de espaços vetoriais, base e dimensão e transformações lineares.

No discurso dos alunos entrevistados, foi perceptível que é muito difícil o professor cumprir todo o conteúdo de Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear em um único semestre. Em face disso, o tema autovalores e autovetores recebe uma abordagem relacionada apenas às operações com vetores.

Após a exposição do problema a todos os alunos, foi possível que os Alunos 1 e 3 ilustrassem seus pensamentos procedimentais com base na: (a) representação

matricial  $\begin{bmatrix} O_{K+1} \\ R_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_K \\ R_K \end{bmatrix}$  em que  $\begin{bmatrix} O_{K+1} \\ R_{K+1} \end{bmatrix}$  é a matriz que denota a

população de ratos e corujas no instante  $K+1$ ;  $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix}$  é a matriz que denota

os parâmetros iniciais e  $\begin{bmatrix} O_K \\ R_K \end{bmatrix}$  é a matriz que denota as populações de ratos e

corujas no instante  $K$ ; e (b) representação algébrica  $A \cdot x_k = \lambda \cdot x_k$ . Mas, evidenciamos que, em nenhum momento, houve referências às representações geométricas em relação ao tema. Em nossa análise, concluímos não ser comum nem tampouco habitual que os alunos representem os autovetores geometricamente.

Não foi possível continuarmos a entrevista com o Aluno 2, após ele afirmar que não sabia a matéria, nem teria condições de resolver o problema.

Acrescentamos que, embora o Aluno 2 tenha citado a disciplina de Simulação de Sistemas, ele não conseguiu estabelecer qualquer relação com os conteúdos estudados e o objeto matemático autovalor e autovetor.

Já as respostas do Aluno 1 destacaram um conjunto de instruções para encontrar os autovalores e autovetores e pouco evidenciaram a respeito de real compreensão dos conceitos envolvidos. Para o Aluno 1, o conceito foi encarado de

forma operacional, isto é, ele em um primeiro momento limita-se à realização de procedimentos de cálculo. Embora não explicitasse verbalmente as relações entre os vários componentes conseguiu ter um desempenho bastante satisfatório. Assim, com base na definição obtida no livro, ele conseguiu discutir o papel da matriz  $A$ , do autovetor  $x$  e autovalor  $\lambda$ , relacionando-os à equação  $A.x_k = \lambda.x_k$  e com base nesses elementos realiza os cálculos corretos dos autovalores e autovetores.

Apesar do Aluno 3 não ter prosseguido com os cálculos para encontrar os autovalores e autovetores associados, destacamos que ele também conseguiu identificar a ideia por trás do estudo da equação  $A.x_k = \lambda.x_k$  que é encontrar vetores que são transformados por  $A$  em múltiplos escalares deles mesmos. Assim, afirmamos que ambos os Alunos 1 e 3 têm o conceito imagem de que há preservação de direção, mas não de comprimento e que um vetor é transformado por uma matriz preservando suas características. Acrescentamos que o Aluno 1 também tinha o conceito imagem de que os vetores não podiam ser paralelos, ou seja, eram linearmente independentes.

Assim, entendemos que o Aluno 1 conseguiu evidenciar os passos dos processos, mas estes ainda não estavam interiorizados.

No instante em que o Aluno 1 encontrou a relação  $O_K = 0,77R_K$  para  $\lambda_1 = 1,02$  e  $O_K = 5R_K$  para  $\lambda_2 = 0,58$ , ele considerou que há infinitos autovetores para qualquer múltiplo escalar de  $R_K$  e que esse múltiplo escalar também era um autovetor.

Ressaltamos que o Aluno 1 buscou a definição do conceito para expressar os autovalores e autovetores desejados e encontrou-os de modo correto. Assim, defendemos a ideia de que as definições têm um papel fundamental na compreensão dos conceitos em estudo.

Vinner acrescenta que

não importa o quanto o seu sistema de associação reage quando um problema se coloca para você em um contexto técnico, você não deveria formular sua solução antes de consultar a definição do conceito. Isto é, evidentemente, o processo desejável. Infelizmente, a prática é diferente. É difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra sua natureza e para força-lo a consultar definições ou quando se forma um conceito imagem ou quando se trabalha numa tarefa cognitiva<sup>69</sup> (VINNER, 1991, p. 72)

<sup>69</sup> Tradução nossa: *no matter how your association system reacts when a problem is posed to you in a technical context, you are not supposed to formulate your solution before consulting the concept*

Assim, Vinner (1991) considera que as definições nos mantêm no caminho certo. O autor acrescenta que podem ocorrer enganos na construção do conceito imagem caso os conceitos imagem e definição não caminhem juntos. Entendemos que a relação entre ambos os conceitos foi trabalhada e desenvolvida baseada na exposição do problema e obtenção dos resultados dos autovalores e autovetores pelo Aluno 1.

Evidenciamos que o Aluno 1 buscou estabelecer relações entre os conceitos imagem e definição.

De acordo com as ideias de Domingos (2003), consideramos que o Aluno 1 estabeleceu o conceito imagem em nível instrumental, com base na relação e compreensão dos conceitos envolvidos nas equações  $Ax = \lambda x$  e  $(A - \lambda I)x = 0$ . Foi possível que ele pensasse proceitualmente e atribísse significado ao contexto da definição simbólica. Contudo, os processos e conhecimentos necessários eram incompletos, para que houvesse plena interiorização em objetos mentais.

É possível afirmar que o Aluno 1 partiu do conceito definição e este lhe permitiu compreender, mesmo que de modo ainda limitado, o objetivo principal do problema e os demais conceitos envolvidos (Figura 7). Como afirmou em seu discurso *quando eu não entendo uma matéria eu parto da definição, leio, releio e consigo entender o objetivo do problema. Eu ajudava muito os meus colegas de classe assim* (Aluno 1).

Vinner (1991) discute que em processos que envolvam a solução de problemas é possível que as células do conceito definição e imagem sejam ativadas e interajam em um fluxo contínuo de estímulo-resposta. Defendemos que problemas como o exposto poderiam ser apresentados como uma tarefa cognitiva estimulada baseada no conceito definição. Assim, conforme expõe a Figura 7, todas as impressões, experiências e imagens mentais são ativadas com base no conceito definição apresentado pelo professor, tendo como saída um ambiente intelectual, uma resposta.

Quando apresentamos a relação com a Teoria APOS, seguindo as ideias de Stewart (2008) e Trigueros (2012) foi possível considerar que Aluno 1 apresentou

---

*definition. This is, of course, the desirable process. Unfortunately, the practice is different. It is hard to train a cognitive system to act against its nature and to force it to consult definitions either when forming a concept image or when working on a cognitive task.*

elementos, tanto da concepção ação como da concepção processo. Ressaltamos que nem todos os elementos constantes nos Quadros 5 e 6 estiveram presentes no desenvolvimento do problema pelo Aluno 1.

Para o Aluno 3, o grande obstáculo evidenciado foi em equacionar os objetos dos processos, baseando-se na equação  $A.x = \lambda.x$  para  $A.x - \lambda.x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ . Essa passagem pareceu ser um entrave para compreender como a definição de um autovetor relaciona-se à sua representação algébrica. Assim, assumimos que o Aluno 3 apresentou indícios da concepção ação, conforme as ideias de Stewart (2008) e Trigueros (2012).

Na mesma equação anterior, para o Aluno 1 ficou evidente que a passagem foi realizada de maneira procedimental e que ele não identificou a natureza da matriz identidade, simplesmente, acrescentando o  $I$  na equação característica.

Apesar dos Alunos 2 e 3 tentarem desenvolver o problema, suas desistências para encontrar as soluções do problema ocorreram, após alegarem que nem todos os aspectos dos autovalores e autovetores foram discutidos nas aulas. Eles afirmaram que os autovetores são estudados apenas como múltiplos escalares de um vetor. Ficou evidente que lhes faltavam os conceitos fundamentais da Álgebra Linear e que se sentiram frustrados com a situação.

Destacamos que, embora os Alunos 2 e 3 não tenham chegado aos resultados desejados, em seus discursos, houve evidência da importância das disciplinas matemáticas em suas formações e o desejo de aprofundar seus conhecimentos em estudos futuros.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

---

A proposta desta pesquisa de doutoramento foi investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor na fase inicial e final da formação do aluno de curso de Engenharia.

Para tanto, assumimos como sujeitos de nossa investigação estudantes de duas instituições de ensino privadas do Estado de São Paulo, sendo os primeiros, estudantes que haviam concluído a disciplina de Álgebra Linear e ainda estavam em início de sua formação acadêmica e os segundos, estudantes que estavam concluindo a graduação. Dessa forma, denominamos de Estudo de Caso I para a primeira instituição investigada e Estudo de Caso II, para a segunda.

A análise conjunta de ambos os estudos de caso evidenciou os processos relacionados à construção do objeto matemático autovalor e autovetor pelos estudantes dos cursos de Engenharia.

Nosso propósito foi identificar como os processos são construídos na *mente matemática* desses estudantes, considerando diferentes fases de sua formação acadêmica com base na investigação das estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor.

Esta descrição sistemática foi apresentada, mediante uma decomposição genética, nas quais as concepções ação-processo-objeto-esquema são evidenciadas, conforme as ideias de Stewart (2008) e Trigueros (2012). Além das concepções destacadas anteriormente, também foram considerados os conceitos imagem e definição de acordo com os estudos de Vinner (1991) e Domingos (2003).

E questionamos:

- (1) Quais concepções (ação-processo-objeto-esquema) são evidenciadas nos alunos, após o estudo do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de sua formação acadêmica em cursos de Engenharia?
- (2) Nessas mesmas fases, quais conceitos imagem e definição são evidenciados no estudo do objeto matemático autovalor e autovetor?

Nossa hipótese foi que as estruturas cognitivas presentes nos alunos em fase final de formação expõem aspectos que evidenciam relações presentes em disciplinas específicas do curso com as disciplinas matemáticas, contrariamente ao que é exposto nas *mentes matemáticas* dos alunos que iniciam o curso de Engenharia. Dessa maneira, as diferentes *mentes matemáticas* poderiam evidenciar diferentes esquemas mentais.

Nesta investigação, defendemos as ideias de Dorier (2002) que discute a questão da flexibilidade cognitiva, como centro da problemática da Álgebra Linear. Algumas mudanças podem ser observadas com base na flexibilidade cognitiva citada pelo autor, como por exemplo, diferentes níveis de descrição, de modos de raciocínio ou de representações de um objeto matemático.

Afirmamos que o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear relacionam-se a questões discutidas em grupos de estudo, dentre eles, o LACSG. De acordo com as recomendações do grupo, é importante que para o ensino e aprendizagem da disciplina, alguns aspectos devam ser considerados, como por exemplo, tempo suficiente para o ensino da Álgebra Linear, o papel das novas tecnologias educacionais, o conteúdo, além da necessidade, da generalização e concretização.

De acordo com Stewart (2008), o estudo da Álgebra Linear exige um tipo de pensamento que lide com as dificuldades cognitivas e conceituais dos estudantes. É importante que professor e aluno desprendam-se de métodos específicos para resolver problemas e considerem os aspectos interdisciplinares e específicos de cada curso de formação.

Assim, a instituição e os professores que lecionam disciplinas matemáticas devem considerar os aspectos inerentes à formação específica do estudante, favorecendo uma didática da Matemática para a formação dos futuros profissionais.

Tais aspectos evidenciam a necessidade que os cursos de Álgebra Linear sejam repensados com base nas situações matemáticas problemáticas, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constroem em face de determinada situação.

Dentre as leituras que incentivaram a escolha do problema está a pesquisa de Pedersen (2006) que tratou de modelos de crescimento populacional com base no estudo de Sistemas Dinâmicos. Para tanto, encontramos na apresentação do

capítulo de autovalor e autovetor, do livro-texto de David C. Lay, um problema que, como o da pesquisa de Pedersen (2006), também discutia o papel de um sistema dinâmico discreto relacionado ao comportamento de longo prazo descrito pela equação de diferenças  $x_{k+1} = Ax_k$ . Esse foi o impulso final que necessitávamos para a escolha de nosso instrumento diagnóstico (o problema da pesquisa).

Em nossa análise, identificamos a constituição de dois grupos distintos formados pelos estudantes das primeiras e segundas fases de ambos os estudos de caso.

Na primeira fase, consideramos que os alunos buscaram solucionar o problema baseados nas ações e procedimentos que atingissem o resultado esperado. Retratamos que os três estudantes entrevistados do primeiro estudo de caso não buscaram a definição formal do conceito durante a resolução do problema, porém, destacaram em seus discursos que houve a apresentação de definições, teoremas e demonstrações durante suas aulas pelo professor ministrante da disciplina.

Os autores do livro-texto adotado nessa instituição identificam que as definições, teoremas e demonstrações constituem boas ferramentas de comunicação para a efetiva apreensão dos conceitos apresentados. Assim, assumimos que os teoremas, suas demonstrações e provas constituíram um papel fundamental para a construção do conceito imagem desses estudantes, apesar delas não terem sido enfatizadas durante a solução do problema.

Já na segunda fase de ambos os estudos de caso, identificamos que os alunos que solucionaram o problema, prontamente, buscaram a definição do conceito e apoiados nela identificaram os elementos-chave envolvidos, como a matriz  $A$ , ao autovetor  $x_{k+1}$  e  $x_k$  e ao autovalor  $\lambda$  na equação de diferenças  $x_{k+1} = Ax_k$ .

Evidenciamos que, apesar dos caminhos distintos seguidos pelos estudantes citados anteriormente, os processos e sequências desenvolvidos para a solução do problema foram muito parecidos, inclusive, no que tange às dúvidas e discussões.

De acordo com Vinner (1991), não é possível formular uma solução sem antes consultar o conceito definição. É possível afirmarmos que caso o conceito definição não seja consultado, poderá haver erros relacionados à construção do

conceito imagem. Portanto, é necessário que ambos os conceitos estejam próximos e que haja um fluxo contínuo de estímulo-resposta entre as células.

Dessa maneira, assumimos que o maior grau de maturidade dos estudantes da segunda fase de ambos os estudos de caso atribuídos a uma postura de independência e interdependência desenvolvida ao longo da vida acadêmica possibilitou que eles buscassem livros, anotações, ou seja, as definições formais.

Explicitamos, portanto, que esses estudantes evidenciaram construir o conhecimento como mostra a Figura 7, na qual a célula do conceito definição é, primeiramente, consultada, para que haja a construção de uma imagem mental posterior.

Quanto às representações, consideramos que elas constituem as imagens mentais dos alunos e exercem um papel significativo no ensino e na aprendizagem da Matemática. As representações mentais constituem esquemas internos que uma pessoa usa para interagir com o meio externo e são individuais, podendo se diferenciar de pessoa para pessoa. Assim, a *mente matemática* deve considerar o impacto educacional e a maturidade do cérebro na organização das representações mentais.

Dentre as imagens mentais explicitadas pelos alunos houve a ideia de “direção” de vetor que, não é alterada. Em suas respostas esteve presente a ideia de multiplicação por escalar.

Identificamos que os Alunos 2 e 3 citaram que havia a ideia limitada de um número finito de vetores. Já o Aluno 1 afirmou que *o autovalor só pode assumir um único escalar, ele não assume um outro resultado [...] Assim, cada um tem seu valor fixo, podendo ter vários autovetores*. A discussão e a intervenção da pesquisadora permitiu que expandissem a compreensão sobre os infinitos autovetores durante a solução do problema.

Identificamos que para se obter sucesso na solução de um problema são necessárias ao menos duas representações, sendo importante que se transfira a informação obtida de uma representação a outra, transitando entre elas.

Dentre os alunos entrevistados, apenas o Aluno 1 da segunda fase (Estudo de Caso I) buscou representar geometricamente os autovetores como uma trajetória, sem que houvesse qualquer intervenção da pesquisadora.

Em ambos os estudos de caso, e em ambas as fases, a ênfase à representação geométrica foi negligenciada. Os alunos enfatizaram os aspectos algébricos e matriciais, contudo, afirmaram que pouco foi apresentado em aula a respeito das representações geométricas.

É possível afirmarmos que o tema autovalor e autovetor recebe forte apelo geométrico nos livros-texto indicados, contudo isso não é prática comum nas aulas tradicionais de Álgebra Linear.

Quanto à equação  $A.x = \lambda.x$  foi possível identificar que não houve clareza quanto à relação entre  $A.x = \lambda.x$  e  $(A - \lambda I)x = 0$ . O papel da matriz identidade não foi explicitado.

Contudo, evidenciamos que, apesar das atitudes diferenciadas entre os alunos das Fases 1 e 2 dos estudos de caso que chegaram à solução final do problema, houve a observação de um mesmo nível de concepção final do objeto matemático, a concepção processo. É perfeitamente cabível assumirmos que tais concepções possam evoluir à concepção objeto, com base nos problemas aplicados que recebam o suporte explícito do professor.

Quando questionados a respeito dos exemplos e problemas propostos nos livros-texto inseridos nas referências bibliográficas básicas e complementares da disciplina, somente os alunos do primeiro estudo de caso, citaram ter usado o livro-texto referenciado pela instituição. Já os alunos do segundo caso, afirmaram que eles são apresentados somente no primeiro dia de aula, e não foram usados, de fato, no decorrer do semestre letivo.

Consideramos que atitudes, como a exposta anteriormente pelos alunos do segundo caso, podem não incentivar a pesquisa, a leitura e a constituição de pensamentos críticos dos alunos.

De acordo com o discurso dos alunos participantes do primeiro estudo de caso, o livro-texto trabalhado em aula, embora apresente aplicações a respeito de cada tópico, estas não são exploradas na classe. O estudo e a discussão desses problemas ficam a critério da investigação e iniciativa de cada estudante.

Identificamos que todos os alunos do Estudo de Caso I e o Aluno 1 do Estudo de Caso II (Fase 2) estabeleceram relações com outros objetos matemáticos a partir da interação de suas respectivas imagens mentais. Dentre esses objetos,

evidenciamos: combinação linear, dependência e independência linear, espaços e subespaços vetoriais e base de um subespaço.

No Estudo de Caso II, identificamos que os diversos conceitos constituíram elementos isolados e não foram inter-relacionados para formar uma imagem concebida, como objeto mental. Apenas o Aluno 1 da segunda fase buscou especificar o objeto matemático com base em suas propriedades, porém não consideramos que tais objetos estavam plenamente encapsulados como entidades mentais.

Observamos que os alunos de ambas as fases identificaram relações com as demais disciplinas da graduação, dentre elas: Cálculo Numérico, Introdução à Computação, Circuitos Elétricos, Sistemas de Controle ou Computação Gráfica. Portanto, é pertinente considerarmos que os estudantes de ambas as fases evidenciaram relações da Álgebra Linear com as disciplinas específicas da graduação, confirmando parcialmente nossa hipótese.

Afirmamos, parcialmente, nossa hipótese pelo fato de considerar que todos os alunos (de ambas as fases) conseguiram identificar relações com a disciplina Álgebra Linear, e não só os concluintes da graduação. No entanto, as relações identificadas pelos alunos da segunda fase evidenciaram um maior conhecimento sobre assuntos específicos, não só adquiridos por um maior grau de maturidade, como também uma maior vivência profissional percorrida.

Na segunda fase do Estudo de Caso I, identificamos que o aluno entrevistado apresentou maior familiaridade com o tema em estudo, pois, como citou *Uma vez eu vi um problema parecido, mas foi num curso que fiz. Eram raposas e coelhos e buscou no livro-texto lembrar a solução do problema.*

Consideramos que esse aluno estabeleceu relações com outras disciplinas e apresentou uma imagem mental de autovalor, como trajetória que atingirá um ponto de equilíbrio estável. Ele cita *É o vetor (0,0). Olha só, todos esses vetores são os autovetores, eles são as trajetórias.*

Seu discurso evidenciou uma maior compreensão do tema Sistemas de Controle e identificou a necessidade de haver uma boa base conceitual e matemática que auxiliem a analisar, projetar e melhorar o sistema.

É possível identificar algumas características que o aproximem de uma concepção objeto, de acordo com Stewart (2008) e Trigueros (2012), como por exemplo, sua representação geométrica, a preservação de direção do vetor por um escalar, a identificação do objeto comum de ambos os membros da equação e a compreensão de sua definição. Baseado na dedução da definição, foi possível que o aluno pudesse refletir sobre as propriedades dos conceitos, propiciando a abstração inerente ao Pensamento Matemático Avançado.

Contudo, como evidenciado nas considerações parciais desse estudo de caso, não podemos assumir que tais objetos encontram-se plenamente encapsulados como objetos mentais.

Foi percebido que os alunos da segunda fase consideraram aspectos bastante relevantes da disciplina e destacaram palavras-chave para o conceito de autovalor e autovetor, como por exemplo, estabilização do sistema, matriz de entrada-saída e vetor estacionário.

Identificamos que os alunos que chegaram à solução final do problema de ambos os estudos de caso apresentam nível de conceito imagem instrumental. Algumas características conforme expõe Domingos (2003) foram identificadas como: (a) a coordenação de processos que, por vezes, resulta na criação de objetos matemáticos: encontrar as raízes do polinômio característico ou os autovalores; (b) os processos são realizados sobre objetos concretos: notação matricial dos parâmetros do sistema de equações dado pelo enunciado do problema; (c) uso adequado de processos algébricos: manipulações algébricas para encontrar as raízes do polinômio; (d) uso de símbolos como proceitos que representam objetos matemáticos ainda elementares, dentre outros.

Quando tratamos do PMA, foi percebido que os alunos têm a habilidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas.

Para tratar de objetos matemáticos como o de nossa pesquisa, o estudante necessita lidar com sua complexidade, abstração e representação.

Ressaltamos que todos os Alunos do Estudo de Caso I e o Aluno 1 da segunda fase do Estudo de Caso II evidenciaram elementos citados por Tall (1991) que caracterizam o PMA, como: uma participação ativa na construção do conhecimento, uma fundamentação cognitiva adequada e uso de múltiplas

representações. Nesse último item, a representação geométrica ficou restrita ao Aluno 1 (Fase 2 – Estudo de Caso I).

É possível considerar que esses alunos constituem casos de sucesso como José, o típico aluno de Engenharia, descrito por Domingos (2003). O nível de conceito imagem instrumental permitiu-lhes que tivessem notas elevadas na disciplina.

Percebemos que os alunos buscam por um novo enfoque de ensino da Álgebra Linear e valorizam seu estudo. Mas, o estudo pode considerar as ideias conceituais evidenciando as relações que se estabelecem entre as disciplinas da graduação.

Eles têm plena consciência da necessidade de uma formação consistente com as necessidades do mercado de trabalho e dos aspectos que fundamentam sua formação, dentre eles, os aspectos relacionados às disciplinas matemáticas. Consideram que as disciplinas matemáticas constituem a base, para que se estabeleça um pensamento centrado em processos que tratarão da formação dos conceitos.

Percebemos que os alunos participantes do segundo estudo de caso sentiram-se frustrados por não conseguirem solucionar o problema proposto. Eles atribuíram essa “falha” a situações específicas da IES.

Dentre as possíveis situações específicas da IES, identificamos que a carga horária reduzida da disciplina, dividida entre os conteúdos de Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear, negligencia este último estudo. Além disso, ressaltamos que essa disciplina ocorre no primeiro semestre letivo, quando os alunos estão adentrando no mundo universitário e ainda podem apresentar dificuldades com conteúdos elementares da Matemática, quanto mais, aos conteúdos da Álgebra Linear.

Como identificado nas entrevistas realizadas com os alunos em fase final de formação do segundo estudo de caso, essa “falha” é algo que pôde ter refletido ao longo de toda sua formação acadêmica e que poderá impactar sua vida profissional.

Uma exceção foi identificada pela entrevista realizada com o Aluno 1 da Fase 2 (Estudo de Caso II) que afirmou buscar aquilo que lhe interessava em livros e,

ainda, explicar a seus colegas de classe. Consideramos que esses não são casos comuns, e sim isolados.

Esse aluno estabeleceu a relação e a significativa importância com a disciplina Computação Gráfica em sua formação, sobretudo em sua experiência profissional. Entretanto, consideramos que a atitude do Aluno 1 representou um caso isolado e de grande esforço.

Os Alunos 2 e 3 não continuaram a solução do problema pelos mesmos motivos que os alunos participantes da Fase 1. Alegaram não haver tempo suficiente para que o professor tratasse todo o conteúdo presente na ementa e que as dificuldades presentes nos alunos que ingressam em um curso de Engenharia são muito grande, o que tornam o ensino e a aprendizagem ainda “mais trabalhosos”.

É possível considerarmos que a “defasagem” em relação à disciplina foi extensiva por todo o curso de Engenharia e foi evidenciada na situação proposta.

Consideramos que com base nas intervenções da pesquisadora foi possível que os alunos aprofundassem suas discussões e observações a respeito do tema. Assim, foi-lhes permitido o momento e a prática da discussão, momento este que é raro ou mesmo inexistente em uma sala de aula.

Assumimos que tanto os cálculos como os conceitos devam ser enfatizados. É fundamental que os resultados saibam ser interpretados, analisados e explicados àqueles alunos interessados.

Em nossa pesquisa com os estudantes da segunda instituição de ensino, identificamos apoiados na ementa da disciplina que, provavelmente, haveria dificuldades dos alunos para a solução do problema. Nossa confirmação efetivou-se a partir do momento que o expusemos. Embora os alunos se mostrassem pró-ativos ao encontrarem os objetos relacionados ao contexto, acabaram por desistir, alegando que não poderiam solucionar algo sem, pelo menos, saber o que é um autovetor.

Contudo, foi possível identificarmos alguns elementos do Pensamento Matemático Avançado como a participação ativa dos alunos na busca da solução, pensamentos intuitivos, abstratos e dedutivos e a busca de um padrão, a estabilização do sistema.

Consideramos que tais alunos apresentam indícios da concepção ação e um conceito imagem em nível incipiente, mas não faltou-lhes vontade ou iniciativa em aprender.

As limitações apresentadas ao solucionar o problema foram, plenamente, reconhecidas pelos alunos e parecem ter se estendido ao longo do curso. É o que pudemos evidenciar nas entrevistas realizadas com os alunos do último semestre da graduação.

De acordo com Dreyfus (1991), a Matemática é criada com base na tentativa e erro, apoiada nas afirmações parcialmente corretas, a partir do formalismo intuitivo em que termos desconhecidos e imprecisos são intencionalmente apresentados. Além disso, cabe a nós, professores, prover os diferentes pontos de vista, para que o aluno adquira sua independência ao longo da vida acadêmica com base na variedade de fontes de informação e diferentes perspectivas.

Apoiados nos resultados obtidos dos estudos de caso, evidenciamos ser possível que cursos apresentados pelas IES sejam concebidos para focar uma concepção ação/processo pautadas em representações matriciais e algébricas. Além disso, as avaliações, as tarefas desenvolvidas parecem exigir maneiras semelhantes de pensamento e solução dos problemas, o que tem restringido, ainda mais, a evolução da concepção do objeto matemático pelo estudante. Consequentemente, os estudantes desenvolvem habilidades muito semelhantes, com o objetivo de visar a obtenção de resultados corretos, pautados em procedimentos de cálculo. Mas, é possível que tais alunos possam obter bons resultados em suas avaliações finais, como o caso do aluno José, um típico aluno de Engenharia, citado por Domingos (2003).

Assim, as práticas de aula enfatizam “a maneira de calcular”, refletindo nos exames, o que foi exposto nas aulas, e não os processos envolvidos na construção e compreensão conceitual dos objetos matemáticos em estudo.

O LACSG considera que, para haver um primeiro curso de Álgebra Linear, devem ser considerados dois semestres do ensino de Cálculo, a fim de que o aluno adquira maturidade suficiente para lidar com os aspectos concretos e/ou abstratos que envolvam a Álgebra Linear.

É necessário que o profissional aprenda a identificar o impacto das soluções de Engenharia, contextos sociais e globais, e esses primeiros passos, acompanham a escolha da instituição de ensino na qual o aluno fará parte.

Esperamos que essa investigação possa ter contribuído com o repensar de uma disciplina que possui aspectos peculiares. É possível que as instituições reflitam sobre a real formação de seus alunos, enfatizando a constituição e os processos envolvidos na construção do conhecimento. Tais aspectos poderão incidir sobre a maior ênfase nas definições dos conceitos, suas diversas representações, construções e constituições de suas imagens mentais.

Além disso, é pertinente refletirmos sobre o grau de maturidade que um aluno poderá ter para trabalhar com disciplinas com esses aspectos e o tempo necessário e concedido pela instituição para que o professor possa, efetivamente, criar um ambiente de aprendizagem.

Nos resultados evidenciados na investigação piloto, convencemo-nos de que problemas que relacionam conceitos matemáticos ao estudo dos temas específicos da Engenharia podem propiciar a construção de novas conjecturas pelo estudante, além da sua participação ativa e crítica na construção do conhecimento.

Com base na metodologia de investigação, dois estudos de caso foram analisados e pautados nos discursos dos alunos participantes, identificamos "como" e "porque" a disciplina é ministrada em suas instituições de ensino, e o impacto que esses fatores acarretam ao longo de suas formações acadêmica e profissional.

Ressaltamos que o estudo de caso revelou uma visão particularista, única e especial dos sujeitos da investigação, e que seus resultados não podem ser estendidos a todos os sujeitos e/ou instituições de ensino.

Como afirma Ponte (2006), os estudos de caso permitem que haja uma reflexão mais aprofundada por parte dos atores envolvidos, como também seja observado o modo contraditório, nos quais os projetos institucionais são desenvolvidos, evidenciando sua realidade, quer de natureza social ou sistêmica.

Contudo, os resultados evidenciaram razões, para que investigações futuras no ensino e aprendizagem da Álgebra Linear sejam realizadas.

Destaco três questões que, particularmente, me inquietam e que foram aguçadas nesta pesquisa. A primeira pergunta refere-se ao Resumo e Conjecturas do Capítulo 2, em que nos questionamos: caberá ao aluno, individualmente, escolher entre avançar ou não suas concepções e construções mentais para o nível

de conceito imagem relacional? E, prosseguimos: é possível identificar quais os níveis do conceito imagem são, verdadeiramente, pretendidos pelo professor e/ou instituição de ensino que os alunos devem alcançar em cursos de Engenharia?

E a terceira questão evidencia se é possível a identificação das lacunas existentes entre as concepções ação-processo-objeto-esquema e quais os mecanismos necessários para preenchê-las?

Outro assunto que nos instigou foi sobre a relevância e possíveis contribuições da Neurociência Cognitiva na construção das concepções ação-processo-objeto-esquema dos objetos matemáticos. Propomos, portanto, um estudo futuro que investigue as estruturas biológicas subjacentes de indivíduos nas diferentes concepções, identificando como o papel da abstração, generalização e manipulação de símbolos pode alterar os aspectos que regem um circuito neuronal.

Não temos dúvida de que problemas aplicados como o proposto, além de instigarem os aspectos críticos e de descoberta dos estudantes podem promover uma evolução nas concepções dos objetos matemáticos investigados.

Assim, afirmamos que é possível considerar como prática comum o desenvolvimento de problemas como o proposto na investigação, ou, pelo menos, que os alunos reflitam sobre os já existentes nos livros-texto recomendados pelas instituições. Eles não podem ser desconsiderados pelos professores, e sim assumidos como novos enfoques e perspectivas de ensino.

## REFERÊNCIAS

---

- BAZZO, W. A.; PEREIRA, L. T. V. *Introdução à Engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos*. 3ª. ed. revista. Florianópolis, UFSC, 2012.
- BRASIL. MEC/Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES no. 1362/2001. <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf>>. Acesso em: 22.07.2012.
- BRASIL. MEC/Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES no. 11/2002. <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES112002.pdf>>. Acesso em: 22.07.2012.
- CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. *O ensino de Matemática em um curso de Engenharia de sistemas digitais*. In: Cury, H. N. et al. *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos, Propostas*. Rio Grande do Sul: EDIPUCRS, 2004. p. 139-183.
- CAMARGO, L. de. *Um estudo sobre a abordagem de Matrizes no Caderno do Professor do programa "São Paulo faz Escola"*. Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP), 2010.
- CAMARENA, P. *La matemática em el contexto de las ciencias y la modelación*, Instituto Politécnico Nacional – México. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.
- CARLSON, D, JOHNSON, C. R., LAY, D.C. e PORTER, D. *The Linear Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra*. The College Mathematics Journal, Vol. 24, no. 1 (Jan. 1993), pp. 41-46
- CELESTINO, M. R. *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2000.
- COHEN, L., MANIOR, L. MORRISON, K. *Research Methods in Education*, 6a. edição, 2005.
- COOLEY, L. et al. *Learning Theory and Linear Algebra*, 2006.
- DAMÁSIO, A. R. *O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano*. 2ª. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.
- DEHAENE, S. *The Number Sense: How the Mind creates Mathematics*. New York: Oxford, 1997.
- DEHAENE, S. *The Cognitive Neuroscience of Consciousness*. Amsterdam: Elsevier, 2008.

DEVLIN, K. *O Gene da Matemática: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático*. São Paulo: Record, 2008.

DEVLIN, K. *Goodbye Descartes: The end of logic and the search for a new cosmology of the mind*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1997.

DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In: TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. 1991.

DOMINGOS, A. D. M. *Compreensão dos conceitos matemáticos avançados – a Matemática no início do superior*. Tese de Doutorado em Ciências da Educação. Lisboa: Universidade de Nova Lisboa, 2003.

DORIER, J-L. *Teaching Linear Algebra at University*, ICM, Vol. III, 1 – 3, 2002, pp. 875-884.

DORIER, J. *et al., L'enseignement de l'algèbre linéaire em question*. França: La Pensée Sauvage Editions, 1997.

DUBINSKY, E. *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. In: TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. 1991.

DUBINSKY, E. *Some thoughts on a first course in linear algebra on the college level*. Em D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins e W. Watkins (eds). *Resources for Teaching Linear Algebra*, pp. 107-126, 1997.

DUBINSKY, E., MC DONALD, M. A. *APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research*. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series. V. 7, pp. 275 – 282, 2002.

FAZENDA, I. C. A. *Interdisciplinaridade: História, Teoria e Pesquisa*. São Paulo: Papirus, 2009.

FERRARI, A. H. *O senso numérico na criança: formação e características*. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP. 2008. 192p.

FUENTES, D. S. R. *Construcciones y Mecanismos Mentales Asociados al Concepto Transformación Lineal*. Dissertação de Mestrado. México D. F., abril de 2008.

GRANDE, A. L. *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear*. Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP), 2006.

HAYKIN, S. *Redes Neurais: Princípios e prática*. Artmed: São Paulo, 2004.

- HILLEL, J. *Modes of description and the problem of representation in linear algebra*. In: J-L-Dorier (Ed.), *on the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp 191 – 207, 2000.
- HOWSON, A. G. *et al. Mathematics as a Service Subject*. A. G. Howson, J., P. Kahne (Eds). ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- JORDÃO, A. L. I. *Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2º ano do ensino médio*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. 2011.
- KARRER, M. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria – um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. Tese de Doutorado em Educação Matemática (PUC-SP), 2006.
- LAKATOS, E. M., MARCONI, M. de A. *Fundamentos da Metodologia Científica*. 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2003.
- LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas aplicações*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas aplicações*. 4ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear – Teoria e Problemas*. 3ª. ed. São Paulo: Pearson, 2002.
- LORETO, A. C. da C.; LORETO JR., A. P.; SILVA, A. A. da. *Álgebra Linear e suas aplicações – Teoria e Exercícios*. 3ª. edição. São Paulo: LTC, 2011.
- LUDKE, M., ANDRÉ, E.D.A.M. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: E.P.U, 2005.
- MAHARAJ, A *et al. Applying APOS Theory as a theoretical framework for collaborative learning in teacher education, 2006*.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 2ª. ed. São Paulo: Mack Pesquisa, 2006.
- NICOLELIS, M. *Muito além do nosso eu: a nova Neurociência que une cérebro e máquinas – e como ela pode mudar nossas vidas*. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
- NOMURA, J. I. *Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. 2008.
- OLIVEIRA, L. C. B. *Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear?* Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP), 2005.

ORSINI, L. de Q. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1985.

PADREDI, Z. L. do N. *As “Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear*. Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP), 2003.

PEDERSEN, T. V. *A didactic situation eigenvalues and -vectors discovered through mathematical experiments*. In Proceedings of the ICTM 3, the 3<sup>rd</sup> International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, Istanbul, Turkey, 2006.

POOLE, D. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2004.

PHILLIPS, C. L., HARBOR, R. D. *Sistemas de Controle e Realimentação*. São Paulo: Makron Books, 1997.

PONTE, J. P. *Estudos de caso em educação matemática*. *Bolema*, v.25, p. 105-132, 2006.

PRADO, E. A. *Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP), 2010.

ROMO, A., OKTAÇ, A. *Herramienta para el analisis de los conceptos matemáticos em el ejercicio de La ingeniería*. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*, V. 10, no. 1, março, p. 117-143, 2007.

RUGARCIA, A., WOODS, D. R., STICE, J. E. *The future of Enginnering Education (I. A vision for a new century)*, *Chem. Engr. Education*, 34 (1), p. 16-25, 2000.

RUGG, M. D. *Cognitive Neuroscience*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, 1997.

RUGGIERO, M. A. G, LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2<sup>a</sup> ed. Pearson. São Paulo, 2012.

SIERPINSKA, A. *On some aspects of students thinking of linear álgebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 209 – 246, 2000.

SILVA, C. E. da. *A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como “ferramenta explícita” para os assuntos de Ciência da Computação?*. Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP), 2005.

SILVA, G. S., VELOZO, L. T., *O problema de autovalor e suas aplicações à Engenharia de Pontes*. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia, FEN. Cobenge 2003.

SILVA, P. A. S., BERNARDEN, D. P., RECK, W. M. *Aplicação do método AHP para a tomada de decisões multicritérios no restabelecimento automático de energia*, Universidade Federal do Pampa, Alegrete, RS, 2010.

[http://alegrete.unipampa.edu.br/gesep/wpcontent/uploads/2010/05/CRICTE2010\\_AHP\\_Corrigido.pdf](http://alegrete.unipampa.edu.br/gesep/wpcontent/uploads/2010/05/CRICTE2010_AHP_Corrigido.pdf). Acesso em: 25 de janeiro de 2013.

SORIANO, H. L. *Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica de Estruturas*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

STEWART, S. *Understanding Linear Algebra concepts through the Embodied, Symbolic and Formal worlds of mathematical thinking*. Tese de Doutorado em Filosofia da Ciência em Educação Matemática (Universidade de Auckland), 2008.

TALL, D. . *Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning)*. University of Warwick, UK, 2000.

\_\_\_\_\_. *Reflections on APOS Theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking*. Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, 1, p. 111-118, 1999.

\_\_\_\_\_. *Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking*. Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics, Recife, Brasil, Julho de 1995.

\_\_\_\_\_. *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind*. Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisboa, julho, 1994.

\_\_\_\_\_. *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking in Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publisheres, 1991.

TRIGUEROS, M.G., OKTAÇ, A., MANZANERO, L. *Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra*. D. F. México. Anales CERME 5, p. 2359-2368, 2007.

TRIGUEROS, M. G. *et al. Relatório de Projeto de Pesquisa nº. 62375, 2012 (não publicado)*.

VINNER, S. *The Role of Definitions in teaching and learning*. In: *Advanced Mathematical Thinking*. UK: Kluwer, p. 65 – 81, 1991.

YIN, R. *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*, 3a. edição, 2005.



## *ANEXO A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido*

---

NOME DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL:

ENDEREÇO:

FONE:

### **TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

O Sr. (a) está sendo convidado (a) como voluntário (a) a participar da pesquisa ***Esquemas Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro***. Neste estudo pretendemos investigar os processos cognitivos envolvidos na construção do objeto matemático autovalor e autovetor na fase inicial e final de formação do aluno do curso de Engenharia.

Para este estudo adotaremos os seguintes procedimentos: aplicação de um problema que envolva o conceito em estudo, relacionado à disciplina Álgebra Linear, juntamente, com entrevista com os participantes; a entrevista será gravada para posterior análise. Os dados e informações coletadas na pesquisa serão divulgados em trabalhos acadêmicos de cunho científico

A pesquisadora irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo.

Os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a sua permissão.

O (A) Sr (a) não será identificado em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

Asseguramos que não há danos decorrentes ou riscos envolvidos com a realização dessa pesquisa.

Eu, \_\_\_\_\_, portador do documento de Identidade \_\_\_\_\_ fui informado (a) dos objetivos do estudo, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participar se assim o desejar.

Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada à oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

São Paulo, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura participante: \_\_\_\_\_

Assinatura da pesquisadora: \_\_\_\_\_

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC-SP

Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Campus Consolação

E-mail: [edmat@pucsp.br](mailto:edmat@pucsp.br)

ou diretamente com a pesquisadora: \_\_\_\_\_

## ***ANEXO B - Dissertações do GPEA - PUC-SP***

**Quadro 7** - Dissertações do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA - PUC-SP).  
 Projetos: Sobre a noção de base de um espaço vetorial (2002 a 2006) e Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear (2007 a 2013).

### *Dissertações - Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA)*

Nível	Mestrado
Autor	<b>Marcos Roberto Celestino</b>
Título	<b>Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90</b>
Ano	2000
Objetivo	Coletar e apresentar as pesquisas de autores brasileiros sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear na década de 90
Projeto	Sobre a noção de base de um espaço vetorial
Fundamentação Teórica	Não apresentada
Metodologia	Estudo de pesquisas do estado da arte da área de Educação Matemática. Também foram apresentadas fichas de trabalho que seguiram um padrão expondo o objetivo da pesquisa, o tipo e metodologia empregada, referências teóricas e indicação dos problemas ainda em aberto.
Alguns resultados	As pesquisas brasileiras evidenciaram resultados coerentes com as pesquisas “mundiais”. Algumas contribuíram com resultados inéditos e trouxeram sugestões para futuras investigações na área de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear

Nível	Mestrado
Autor	<b>Zoraide Lúcia do Nascimento Padredi</b>
Título	<b>As “Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear</b>
Ano	2003
Projeto	Sobre a noção de base de um espaço vetorial
Objetivo	Investigar recursos “meta” sugeridos por professores para facilitar a compreensão da noção de base de um espaço

	vetorial
Fundamentação Teórica	Dorier, Robert, Robinet, Rogalski sobre “alavancas-meta” e os princípios de Harel para ensino e aprendizagem de Álgebra Linear
Metodologia	Entrevistas com 60 professores universitários
Alguns resultados	Diversos recursos “meta” são passíveis de se tornarem “alavancas meta”. Um dos recursos “meta” apresentados por Dorier como uma possível “alavanca-meta” é o de fornecer informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas, relacionando a Álgebra Linear com noções de outras disciplinas do curso como Equações Diferenciais ou Cálculo

Nível	Mestrado
Autor	<b>Carlos Eduardo da Silva</b>
Título	<b>A Noção de Base de um Espaço Vetorial é trabalhada como “ferramenta explícita” para os assuntos de Ciência da Computação?</b>
Ano	2005
Projeto	Sobre a noção de base de um espaço vetorial
Objetivo	Obter informações sobre a noção de base de um espaço vetorial em assuntos de outras disciplinas que não a Álgebra Linear de um curso de Ciência da Computação
Fundamentação Teórica	Grupo francês composto por Dorier, Robert, Robinet e Rogalski, sobre recursos-meta e a Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady
Metodologia	Sete entrevistas com professores do curso de Ciência da Computação
Alguns resultados	A noção de base é utilizada implícita e explicitamente em alguns assuntos abordados na Ciência da Computação como Teoria da Computação, Programação Linear, Computação Gráfica, Autômatos e Grafos

Nível	Mestrado
Autor	<b>Luis Carlos Barbosa de Oliveira</b>
Título	<b>Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear?</b>
Ano	2005
Projeto	Sobre a noção de base de um espaço vetorial
Objetivo	Investigar os recursos-meta utilizados por um professor de Álgebra Linear, em sala de aula, que ajudaram alguns de

	seus alunos na compreensão da noção de base
Fundamentação Teórica	Alavancas-meta de Jean Luc Dorier e Aline Robert e os três princípios para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear de Guershon Harel
Metodologia	Entrevista semi-estruturada em uma amostra de alunos
Alguns resultados	Apenas um dos recursos selecionados tornou-se alavanca-meta para a maioria dos alunos entrevistados, como os exemplos e contra-exemplos.

Nível	Mestrado
Autor	<b>André Lucio Grande</b>
Título	<b>O conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear</b>
Ano	2006
Projeto	Sobre a noção de base de um espaço vetorial
Objetivo	Investigar nos livros didáticos de Álgebra Linear os registros de representação semiótica mais utilizados no estudo das noções e atividades propostas sobre Independência Linear
Fundamentação Teórica	Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003)
Metodologia	Não apresentada
Alguns resultados	Os capítulos que abordam as noções de independência e dependência linear apresentam uma escassez da utilização de alguns registros de representação como, por exemplo, o geométrico e o de linguagem natural na resolução de exemplos e exercícios propostos que envolvem demonstração. Também foi verificada a falta de conversão de registros nas definições, exemplos e exercícios

Nível	Mestrado
Autor	<b>Joelma Iamac Nomura</b>
Título	<b>Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições</b>
Ano	2008
Projeto	Em busca de situações propícias para a aprendizagem de Álgebra Linear
Objetivo	Propõe encontrar elementos que respondam às questões inerentes a esta investigação: Por que e Como deve ser lecionada a disciplina Álgebra Linear em uma graduação de

	Engenharia Elétrica?
Fundamentação Teórica	Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999)
Metodologia	Os resultados foram obtidos a partir de pesquisas bibliográficas, documentos oficiais vigentes para os cursos de Engenharia Elétrica, entrevistas com professores da graduação e exercícios aplicados citados nas entrevistas
Alguns resultados	Dentre os resultados obtidos foi constatado que a aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear como Matrizes, Sistemas Lineares e Transformações Lineares está atrelada às relações existentes com outras disciplinas da graduação como Circuitos Elétricos, Processamento de Sinais, Teoria Eletromagnética, dentre outras. Também foi identificada a busca pela formação do engenheiro conceitual e generalista que prime por conhecimentos matemáticos vinculados à pesquisa. A análise das informações obtidas faz referência à antecipação de determinados conteúdos específicos da graduação que poderia ser trabalhada a partir de exemplos propostos em livros atuais de Álgebra Linear. Outra sugestão, apontada no discurso dos professores, faz referência a projetos integrados que tratem a interdisciplinaridade inerente a este curso.

Nível	Mestrado
Autor	<b>Lauro de Camargo Junior</b>
Título	<b>Um estudo sobre a abordagem de Matrizes no Caderno do Professor do programa “São Paulo faz Escola”</b>
Ano	2010
Projeto	Em busca de situações propícias para a aprendizagem de Álgebra Linear
Objetivo	Investigar como o Caderno do Professor de Matemática, material integrante da Proposta Curricular do Estado de São Paulo implantada em 2008, aborda o conteúdo de matrizes
Fundamentação Teórica	Não apresentada
Metodologia	A coleta de dados foi realizada seguindo a análise de conteúdo de Bardin (2009) a partir da investigação de documentos oficiais que regem o ensino de Matemática, os cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 e dois livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio
Alguns resultados	Foi constatado que a abordagem de matrizes nos cadernos se apresenta de acordo com as propostas dos documentos oficiais que regem o ensino de Matemática no ensino médio e que sua abordagem assemelha-se com aquela

	apresentada em um dos livros didáticos aprovados no PNLEM 2006
--	--

Nível	Mestrado
Autor	<b>Eneias de Almeida Prado</b>
Título	<b>Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial</b>
Ano	2010
Projeto	Em busca de situações propícias para a aprendizagem de Álgebra Linear
Objetivo	Identificar a concepção de base de um R-espaço vetorial finitamente gerado de alunos que concluíram um curso de extensão em Álgebra Linear
Fundamentação Teórica	Teoria APOS desenvolvida por Dubinsky e colaboradores que permitiu o refinamento de uma decomposição genética que abordou os três pontos de vista da noção: conjunto maximal de vetores linearmente independentes; conjunto minimal de vetores gerador e a justaposição entre as duas anteriores
Metodologia	Entrevistas semi-estruturadas a 10 sujeitos concluintes de um mesmo curso de extensão, caracterizando-se como um estudo qualitativo de caso
Alguns resultados	Cinco sujeitos entrevistados construíram uma concepção objeto e incorporaram a noção de dimensão a seu esquema, utilizando indistintamente a dimensão a uma das três noções de base. Um estudante mostrou ter construído a concepção processo e outro, concepção ação. Após dois cursos de Álgebra Linear, os estudantes concebem base, sobretudo, como sendo um conjunto gerador linearmente independente. Somente dois dos entrevistados perceberam a equivalência entre os pontos de vista abordados

Nível	Mestrado
Autor	<b>Ana Lúcia Infanzozzi Jordão</b>
Título	<b>Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2º ano do ensino médio</b>
Ano	2011
Projeto	Em busca de situações propícias para a aprendizagem de Álgebra Linear
Objetivo	Elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares quadrados com o auxílio do <i>software</i> educacional Winplot

Fundamentação Teórica	Teoria de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003)
Metodologia	Pressupostos da Engenharia Didática, segundo descrição de Michele Artigue (1996)
Alguns resultados	Os resultados identificaram a relevância do uso do <i>software</i> educacional Winplot como contribuição para a visualização e compreensão da resolução de sistemas em 3D

Fonte: Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica - GPEA – PUC – SP (2012)

## ANEXO C - Teoremas do Capítulo Valores e Vetores Próprios - David Poole

---

### O Teorema da Fatoração

Sejam  $f$  um polinômio e  $a$  uma constante. Então,  $a$  é uma raiz de  $f$  se, e somente se,  $x - a$  é fator de  $f(x)$ .

**Demonstração:** Pelo algoritmo da divisão,  $f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$  onde ou  $r(x) = 0$  ou  $\text{gr } r < \text{gr } (x-a) = 1$ . Em qualquer caso,  $r(x) = r$  é uma constante. Por sua vez,  $f(a) = (a - a)q(a) + r = r$  e, portanto,  $f(a) = 0$  se, e somente se,  $r = 0$ , que é equivalente a  $f(x) = (x - a)q(x)$  como queríamos provar. ♦

### (a) O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Todo polinômio de grau  $n$  com coeficientes reais ou complexos possui exatamente  $n$  raízes em  $C$  (contando com as multiplicidades).

### (b) O Teorema do Determinante de uma Matriz Triangular

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da sua diagonal principal. Especificamente, se  $A = [a_{ij}]$  é  $n \times n$ , então  $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .

### (c) Teorema

Os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da sua diagonal principal.

### (d) Teorema

Uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $0$  não for um autovalor de  $A$ .

**Demonstração:** Seja  $A$  uma matriz quadrada. Pelo Teorema (ANEXO C - (f)),  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det A \neq 0$ . Mas  $\det A \neq 0$  é equivalente a  $\det (A - 0I) \neq 0$ , o que diz que  $0$  não é uma raiz da equação característica de  $A$  (isto é,  $0$  não é um autovalor de  $A$ ). ♦

**(e) Teorema**

*Uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det A \neq 0$ .*

**Demonstração:** Considere  $A$  como uma matriz  $n \times n$  e  $R$  como a forma escalonada (escalonamento de linhas) de  $A$ . Mostraremos primeiro que  $\det A \neq 0$  se, e somente se,  $\det R \neq 0$ . Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_r$ , as matrizes elementares correspondentes às operações elementares com linhas necessárias para transformar  $A$  em  $R$ . Então:  $E_r \dots E_2 E_1 A = R$

Tomando determinantes dos dois lados e aplicando o Lema 5 sucessivamente, obtemos  $(\det E_r) \dots (\det E_2)(\det E_1)(\det A) = \det R$

Pelo Teorema (g), os determinantes de todas as matrizes elementares são diferentes de zero. Concluimos, assim que  $\det A \neq 0$  se, e somente se,  $\det R \neq 0$ . ♦

**(f) Teorema**

*Seja  $E$  uma matriz elementar  $n \times n$ .*

- a. Se  $E$  é obtida pela troca de duas linhas em  $I_n$ , então  $\det E = -1$ .*
- b. Se  $E$  é obtida por multiplicação de uma linha de  $I_n$  por  $k$ , então  $\det E = k$ .*
- c. Se  $E$  é obtida pela soma de um múltiplo de uma linha de  $I_n$  com outra linha, então  $\det E = 1$ .*

**(g) Teorema**

*Uma matriz  $A$  é invertível se, e somente se,  $0$  não for um autovalor de  $A$ .*

**Demonstração:** Seja  $A$  uma matriz quadrada. Pelo Teorema (ANEXO C - (f)),  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det A \neq 0$  é equivalente a  $\det (A-0I) \neq 0$ , o que diz que  $0$  não é uma raiz da equação característica de  $A$  (isto é,  $0$  não é um autovalor de  $A$ ). ♦

**(h) O Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis: Versão 3**

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- a.  $A$  é invertível.
- b.  $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  tem uma única solução para todo  $\mathbf{b}$  no  $\mathbb{R}^n$ .
- c.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  admite somente a solução trivial.
- d. A matriz escalonada obtida por escalonamento de linhas de  $A$  é  $I_n$ .
- e.  $A$  é um produto de matrizes elementares.
- f.  $\text{posto}(A) = n$
- g.  $\text{nulidade}(A)=0$
- h. Os vetores coluna de  $A$  são linearmente independentes.
- i. Os vetores coluna  $A$  geram  $\mathbb{R}^n$ .
- j. Os vetores coluna de  $A$  formam uma base para  $\mathbb{R}^n$ .
- k. Os vetores linha de  $A$  são linearmente independentes.
- l. Os vetores linha de  $A$  geram  $\mathbb{R}^n$ .
- m. Os vetores linha de  $A$  formam uma base para  $\mathbb{R}^n$ .
- n.  $\det A \neq 0$ .
- o.  $0$  não é um autovalor de  $A$ .

**Demonstração:** A equivalência (a)  $\Leftrightarrow$  (n) é o Teorema (ANEXO (f)), e acabamos de mostrar (a)  $\Leftrightarrow$  (o) no Teorema (ANEXO (h)).♦

**(i) Teorema**

Seja  $A$  uma matriz quadrada com autovalor  $\lambda$  e um correspondente autovetor  $\mathbf{x}$ .

- (a) Para qualquer inteiro positivo  $n$ ,  $\lambda^n$  é um autovalor de  $A^n$  correspondente ao autovetor  $\mathbf{x}$ .
- (b) Se  $A$  é invertível, então  $\frac{1}{\lambda}$  é um autovalor de  $A^{-1}$  correspondente ao autovetor  $\mathbf{x}$ .
- (c) Para qualquer número inteiro  $n$ ,  $\lambda^n$  é um autovalor de  $A^n$  correspondente ao autovetor  $\mathbf{x}$ .

**Demonstração:** É dado que  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

(a) Faremos uma prova por indução em  $n$ . Para  $n = 1$ , o resultado coincide com o que foi dado. Vamos assumir que o resultado seja verdadeiro para  $n = k$ , ou seja, que, para algum inteiro positivo  $k$ ,  $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$ .

Precisamos provar o resultado para  $n = k + 1$ . Mas

$$A^{k+1}\mathbf{x} = A(A^k\mathbf{x}) = A(\lambda^k\mathbf{x})$$

pela hipótese de indução. Utilizando a propriedade (d) do Teorema (ANEXO C – (k)), temos que

$$A(\lambda^k \mathbf{x}) = \lambda^k (A\mathbf{x}) = \lambda^k (\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{k+1} \mathbf{x}$$

Assim,  $A^{k+1} \mathbf{x} = \lambda^{k+1} \mathbf{x}$ , como desejado. Por indução o resultado é verdadeiro para todos os inteiros  $n \geq 1$ . ♦

### (j) Teorema – Propriedade da Multiplicação de Matrizes

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes (cujas ordens possibilitem que as operações indicadas sejam realizadas) e  $k$  um escalar. Então:

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| a. $A(BC) = (AB)C$                             | Associativa                 |
| b. $A(B+C) = AB + AC$                          | Distributiva à esquerda     |
| c. $(A+B)C = AC + BC$                          | Distributiva à direita      |
| d. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$                     |                             |
| e. $I_m A = A = A I_n$ se $A$ for $m \times n$ | Identidade da multiplicação |

### (o) Teorema – Matrizes Semelhantes

Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  matrizes  $n \times n$ .

- $A \sim A$ .
- Se  $A \sim B$ , então  $B \sim A$ .
- Se  $A \sim B$  e  $B \sim C$ , então  $A \sim C$ .

**Demonstração:** a) Essa propriedade decorre do fato de que  $I^{-1}AI = A$ .

c) Se  $A \sim B$ , então  $P^{-1}AP = B$  para alguma matriz invertível  $P$ . Como diz a primeira das observações anteriores, isto é equivalente a  $PBP^{-1} = A$ . Fazendo  $Q = P^{-1}$ , temos  $Q^{-1}BQ = (P^{-1})^{-1} = PBP^{-1} = A$ . Portanto, pela definição  $B \sim A$ .

c) A prova da propriedade **c** está atrelada à resolução do Exercício 30 (p. 271). ♦

**(p) Teorema**

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$  com  $A \sim B$ . Então:

- a.  $\det A = \det B$
- b.  $A$  é invertível se, e somente se,  $B$  for invertível.
- c.  $A$  e  $B$  têm o mesmo posto.
- d.  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinômio característico.
- e.  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores.

**Demonstração:** Provaremos (a) e (d), deixando as demais propriedades para serem provadas como exercício. Se  $A \sim B$ , então  $P^{-1}AP = B$  para alguma matriz invertível  $P$ .

(a) Tomando determinantes nos dois lados da igualdade, temos

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P)$$

$$\left(\frac{1}{\det P}\right)(\det A)(\det P) = \det A$$

(b) O polinômio característico de  $B$  é

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

onde a última passagem é análoga à do item (a). Assim,  $\det(A - \lambda I)$ ; ou seja, os polinômios característicos de  $A$  e de  $B$  são iguais. ♦

**(q) Teorema**

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Então,  $A$  será **diagonalizável** se, e somente se, tiver  $n$  autovetores linearmente independentes.

Mais precisamente, existem uma matriz invertível  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  de maneira que  $P^{-1}AP = D$  se, e somente se, as colunas de  $P$  forem  $n$  autovetores de  $A$ , linearmente independentes, e os elementos da diagonal de  $D$  forem os autovalores correspondentes àqueles, colocados na mesma ordem.

**Demonstração:** Primeiro, suponha que  $A$  seja semelhante à matriz diagonal  $D$  via  $P^{-1}AP=D$ , ou equivalentemente,  $AP=PD$ . Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_n$  os vetores colunas de  $P$ , e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , os elementos da diagonal de  $D$ . Então:

$$A[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[Ap_1 \ Ap_2 \ \dots \ Ap_n] = [\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ \dots \ \lambda_n p_n] \quad (2)$$

ou

onde o lado direito da equação é exatamente a representação coluna-linha do produto  $PD$ . Temos, assim  $n$  equações, uma para cada coluna:

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

o que comprova que os vetores coluna de  $P$  são autovetores de  $A$ , cujos autovalores correspondentes são os elementos da diagonal de  $D$ , na mesma ordem. Como  $P$  é invertível, seus vetores coluna são linearmente independentes pelo Teorema Fundamental das Matrizes Inversíveis.

Reciprocamente, se  $A$  tem  $n$  autovetores  $p_1, p_2, \dots, p_n$  linearmente independentes, com os autovalores correspondentes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , respectivamente, então

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

Isso acarreta a equação (2) anterior, a qual é equivalente à equação (1). Consequentemente, se chamamos de  $P$  a matriz  $n \times n$  com colunas  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , então a equação (1) pode ser escrita como  $AP = PD$ . Como as colunas de  $P$  são linearmente independentes, o Teorema Fundamental das Matrizes Inversíveis implica que  $P$  é invertível, logo,  $P^{-1}AP = D$ . Portanto,  $A$  é diagonalizável.  $\blacklozenge$

## ANEXO D - Teoremas do Capítulo Autovalores e Autovetores - David Lay

### TEOREMA 1

*Os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da sua diagonal principal.*

**Demonstração:** Para simplificar, vamos considerar o caso 3 x 3. Se A é uma matriz triangular superior, então  $A - \lambda I$  é da forma

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

O escalar  $\lambda$  é um autovalor para A se e somente se a equação  $(A - \lambda I)x = 0$  tem solução não trivial, isto é. Se e somente se a equação tem variável livre. Por causa dos elementos nulos de  $A - \lambda I$ , é fácil ver que  $(A - \lambda I)x = 0$  tem variável livre se e somente se pelo menos um dos elementos da diagonal principal de  $(A - \lambda I)x = 0$  for igual a zero. Isso acontece se e somente se  $\lambda$  for igual a um dos elementos  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  de A. ♦

### TEOREMA DA MATRIZ INVERTÍVEL (CONCLUÍDO)

*Se  $v_1, \dots, v_r$  são autovetores associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de uma matriz A n x n, então o conjunto  $\{v_1, \dots, v_r\}$  é linearmente independente.*

### TEOREMA 2

*Seja A uma matriz n x n. Então A é inversível se e somente se:  
s. O número 0 não é autovalor para A.*

**Demonstração:** Se  $\{v_1, \dots, v_r\}$  é linearmente dependente, então existe um menor índice p tal que  $v_{p+1}$  é uma combinação linear dos vetores (linearmente independentes) que o precedem, e existem escalares  $c_1, \dots, c_p$  tais que

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = v_{p+1} \quad (1)$$

Multiplicando os dois lados da equação por A e usando o fato de que  $Av_k = \lambda_k v_k$  para cada k, obtemos

$$c_1 v_1 + \dots + c_p A v_p = A v_{p+1} \quad (2)$$

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_p \lambda_p v_p = \lambda_{p+1} v_{p+1}$$

Multiplicando os dois lados de (1) por  $\lambda_{p+1}$  e subtraindo o resultado de (2), temos

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) v_1 + \dots + c_p (\lambda_p - \lambda_{p+1}) v_p = 0 \quad (3)$$

Como  $(v_1 + \dots + v_p)$  é linearmente independente, os pesos em (3) são todos iguais a zero. Mas nenhum dos fatores  $\lambda_i - \lambda_{p+1}$  é igual a zero, porque os autovalores são distintos. Portanto,  $c_i = 0$  para  $i = 1, \dots, p$ . Mas, então (1) diz que  $v_{p+1} = 0$ , o que é impossível. Assim,  $\{v_1 + \dots + v_r\}$  não pode ser linearmente dependente e, portanto, tem que ser linearmente independente. ♦

### TEOREMA 3

#### Propriedades do Determinante

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ .

- $A$  é inversível se e somente se  $A \neq 0$ .
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .
- $\det A^T = \det A$ .
- Se  $A$  é matriz triangular, então  $\det A$  é o produto dos elementos da diagonal principal.
- Uma operação de substituição de linhas em  $A$  não altera o valor do determinante. Uma operação de troca de linhas muda o sinal do determinante. Um reescalonamento de linha muda o determinante pelo mesmo fator.

### TEOREMA 4

Se  $A$  e  $B$  são matrizes similares  $n \times n$ , então elas têm o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores (com as mesmas multiplicidades).

**Demonstração.** Se  $B = P^{-1}AP$ , então

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda I)P$$

Usando a propriedade multiplicativa (b) do Teorema 3, temos

$$\det(B - \lambda I) = \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \quad (1)$$

$$\det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P) \quad (2)$$

Como  $\det(P^{-1}) \cdot \det(P) = \det(P^{-1} \cdot P) = \det I = 1$ , vemos, de (2), que  $\det(B - \lambda I)$ . ♦

### TEOREMA 5 (TEOREMA DA DIAGONALIZAÇÃO)

*Uma matriz  $A$   $n \times n$  é diagonalizável se e somente se  $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes.*

*De fato,  $A = PDP^{-1}$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal se e somente se as colunas de  $P$  são  $n$  autovetores linearmente independentes. Nesse caso, os elementos da diagonal principal de  $D$  são os autovalores de  $A$  associados, respectivamente, aos autovetores em  $P$ .*

**Demonstração.** Primeiro, observe que se  $P$  for matriz  $n \times n$  com colunas  $v_1, \dots, v_n$  e se  $D$  é qualquer matriz diagonal com elementos da diagonal principal  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , então

$$AP = A[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] = [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n] \quad (1)$$

enquanto

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n] \quad (2)$$

Suponha, agora, que  $A$  seja diagonalizável e que  $A = PDP^{-1}$ . Então, multiplicando essa relação à direita por  $P$ , obtemos  $AP = PD$ . Nesse caso, (1) e (2) implicam que

$$[Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n] \quad (3)$$

Igualando as colunas, obtemos

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \ Av_2 = \lambda_2 v_2, \ \dots, \ Av_n = \lambda_n v_n \quad (4)$$

Como  $P$  é invertível, suas colunas  $v_1, \dots, v_n$  têm que ser linearmente independentes. Mais ainda, como essas colunas são não nulas, (4) mostra que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são autovalores e  $v_1, \dots, v_n$  são autovetores associados. Essa argumentação prova as partes “somente se” das primeiras duas afirmações e mais a terceira afirmação do teorema.

Finalmente, dados quaisquer  $n$  autovetores  $v_1, \dots, v_n$ , use-os para montar as colunas de  $P$  e use os autovalores associados  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , para montar  $D$ . Por (1) – (3),  $AP = PD$ . Isso é verdade sem impor qualquer condição adicional sobre os autovetores. Se, de fato, os autovetores forem linearmente independentes, então  $P$  é invertível (pelo Teorema da Matriz Invertível) e  $AP = PD$  implica que  $A = PDP^{-1}$ . ♦

**TEOREMA 6**

*Uma matriz  $n \times n$  com  $n$  autovalores distintos é diagonalizável.*

**Demonstração.** Sejam  $v_1, \dots, v_n$  autovetores associados aos  $n$  autovalores distintos da matriz  $A$ . Então  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é linearmente independente, pelo Teorema. Portanto,  $A$  é diagonalizável pelo Teorema 5. ♦

**TEOREMA 7**

*Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  cujos autovalores distintos são  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .*

- Para  $1 \leq k \leq p$ , a dimensão do Autoespaço para  $\lambda_k$  é menor ou igual que a multiplicidade do autovalor  $\lambda_k$ .*
- A matriz  $A$  é diagonalizável se e somente se a soma das dimensões dos Autoespaços distintos é igual a  $n$ , e isso acontece se e somente se a dimensão do Autoespaço para cada  $\lambda_k$  for igual à multiplicidade de  $\lambda_k$ .*
- Se  $A$  é diagonalizável e  $B_k$  é uma base para o Autoespaço associado a  $\lambda_k$  para cada  $k$ , então a coleção total dos vetores de  $B_1, \dots, B_p$  forma uma base de autovetores para  $\mathbb{R}^n$ .*

**TEOREMA 8****Representação da Matriz Diagonal**

*Suponha que  $A = PDP^{-1}$  onde  $D$  é uma matriz diagonal  $n \times n$ . Se  $B$  é a base do  $\mathbb{R}^n$  formada pelas colunas de  $P$ , então  $D$  é a  $B$ -matriz da transformada  $x \mapsto Ax$ .*

**Demonstração:** Vamos denotar as colunas de  $P$  por  $b_1, \dots, b_n$ , de modo que  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  e  $P = [b_1, \dots, b_n]$ . Nesse caso,  $P$  é a matriz mudança de coordenadas  $P_B$  discutida na Seção 4.4. (Sistemas de Coordenadas), onde

$$P[\mathbf{x}]_B = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad [\mathbf{x}]_B = P^{-1} \mathbf{x}$$

Se  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x}$  do  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} [T]_B &= [[T(b_1)]_B \quad \dots \quad [T(b_n)]_B] && \text{Definição de } [T]_B \\ &= [[Ab_1]_B \quad \dots \quad [Ab_n]_B] && \text{Já que } T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \\ &= [P^{-1}Ab_1 \quad \dots \quad P^{-1}Ab_n] && \text{Multiplicação de Matrizes} \\ &= P^{-1}A[b_1 \quad \dots \quad b_n] \\ &= P^{-1}AP \end{aligned}$$

Como  $A = PDP^{-1}$ , temos

$$[T]_B = P^{-1}AP = D. \quad \blacklozenge$$

**TEOREMA 18 – SEÇÃO 4.9**

*Se  $P$  é uma matriz estocástica regular  $n \times n$ , então  $P$  tem um único vetor estacionário  $q$ . Além disso, se  $x_0$  for qualquer estado inicial e  $x_{k+1} = Px_k$ , para  $k=0,1,2,\dots$ , então a cadeia de Markov  $\{x_k\}$  converge para  $q$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

A demonstração é apresentada nos livros-texto sobre a cadeia de Markov.



## ANEXO E - Comentários Numéricos

1. Programas de computador como Mathematica e Maple podem usar cálculos simbólicos para determinar o polinômio característico de uma matriz de tamanho moderado. Mas não existe fórmula nem algoritmo finito que resolva a equação característica de uma matriz genérica  $n \times n$  para  $n \geq 5$ .
2. Os melhores métodos numéricos para calcular autovalores evitam por completo o polinômio característico. De fato, o MATLAB calcula o polinômio característico de uma matriz  $A$  calculando primeiro os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e, depois, expandindo o produto  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ .
3. Diversos algoritmos conhecidos para estimar os autovalores de uma matriz  $A$  se baseiam no teorema 4. O poderoso algoritmo QR é discutido nos exercícios. Outra técnica, conhecida como método de Jacobi, funciona quando  $A=A^T$  e calcula uma sequência de matrizes da forma

$$A_1 = A \text{ e } A_{k+1} = P_k^{-1} A_k P_k \quad (k=1,2,\dots)$$

Cada matriz na sequência é semelhante a  $A$  e, portanto, tem os mesmos autovalores que  $A$ . Os elementos fora da diagonal principal de  $A_{k+1}$  tendem a zero quando  $k$  cresce e os elementos da diagonal principal tendem para os autovalores de  $A$ .

4. Outros métodos para obter estimativas dos autovalores são discutidos na Seção 5.8.



## ANEXO F - Plano de Ensino - Investigação Piloto

### Plano de Ensino de Disciplina Engenharia 2013

Disciplina:– Álgebra Linear	Sigla: AL
Código: 005326/2	Período: 3º
Semestre: 1º	
Carga Horária Semanal: 2 h/a	
Carga Horária Semestral: 36 h/a (18 semanas)	
Professor(a):	
<b>OBJETIVOS</b>	
<p><b>Gerais:</b> Utilizar, de forma rigorosa, a linguagem algébrica. Utilizar a notação matricial nas definições. Reconhecer a estrutura de espaço vetorial.</p> <p><b>Específicos:</b> Identificar subespaço vetorial. Conceituar combinação linear e subespaço gerado. Determinar base e dimensão de um espaço vetorial. Identificar uma transformação linear dada por meio da lei de formação, por meio de uma matriz, por meio de uma representação gráfica, manipulando a mudança de registro de representação. Identificar isomorfismo/ automorfismo. Aplicar o Teorema do núcleo e da Imagem. Determinar vetores próprios e valores próprios de uma transformação linear. Conceituar ortogonalidade.</p>	
<b>METODOLOGIA</b>	
Aulas teóricas expositivas com eventual uso de recursos audiovisuais.	
<b>INSTRUMENTOS E CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO</b>	
Ao longo do curso o aluno será continuamente avaliado por meio de relatórios, questionários, atividades individuais e/ou em grupo, para comporem a nota de atividade (A). Obrigatoriamente deverão existir duas provas presenciais no semestre ( $P_1$ e $P_2$ ), além da prova substitutiva ( $P_s$ ), que pode substituir, ou não, qualquer das provas de modo a maximizar a média final. A média é obtida fazendo-se $0,3A+0,2P_1+0,5P_2$ e, caso o aluno faça a $P_s$ , esta pode substituir qualquer uma das duas provas. Para ser aprovado, o aluno deverá atingir pelo menos 75% de presença e média final igual ou superior a 5.0 (cinco).	
<b>EMENTA</b>	
Transformações Lineares. Matriz de Transformação Linear. Noção de espaço vetorial e de espaço euclidiano. Produto Interno. Vetores e valores próprios.	

**CONTEÚDO PROGRAMÁTICO**

Transformações lineares. Matriz de uma transformação linear. Teorema do isomorfismo entre matrizes e transformações lineares. Produto interno em espaços vetoriais reais. Norma e distância. Ortogonalidade. Processo de Gram-Schmidt. Complemento ortogonal. Vetor próprio e valor próprio. Polinômio característico. Diagonalização.

**BIBLIOGRAFIA BÁSICA**

SALAHODDIN S. *Introdução à Álgebra Linear*. UNB, 2004.

POOLE, D. *Álgebra Linear* CENGAGE LEARNING, 2003.

DOMINGUES, H.H.; CALLIOLI, C.A.; COSTA, R.C.F. *Álgebra Linear e Aplicações*. Atual, 1982.

**BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR**

SALAHODDIN S. *Exercícios em Álgebra Linear*. Ciência Moderna, 2009

LAY, D.C. *Álgebra linear e suas aplicações*. 2 ed. LTC, 1999.

LIPSCHULTZ, S. *Álgebra Linear*. MAKRON, 1994.

BOLDRINI, J.L. *Álgebra Linear*, 3 ed. HARBRA. 1986.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. MAKRON, 1987.

## ANEXO G - Plano de Ensino - Estudo de Caso I

### Plano de Ensino da Disciplina Álgebra Linear

<b>PLANO DE ENSINO DE DISCIPLINA</b>	
<b>1. NOME DA DISCIPLINA</b> ÁLGEBRA LINEAR	<b>2. CÓDIGO:</b> MA2220 – 2ª PERÍODO (Diurno) NA3220 – 3ª PERÍODO (Noturno)
<b>3. DEPARTAMENTO</b> MATEMÁTICA	<b>4. CURSO(S)</b> ENGENHARIA
<b>5. TEORIA :</b> ( 4 ) <b>6. PRÁTICA :</b> ( 0 )	<b>7. PROFESSOR COORDENADOR</b>
<b>8. OBJETIVOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>GERAIS:</b> A importância da Álgebra Linear nos recentes avanços tecnológicos mostra a necessidade de operar com vetores em um espaço além do tridimensional, com ênfase na sua representação matricial. Isso possibilita a utilização de técnicas computacionais em problemas que surgem nas disciplinas de Programação Linear, Pesquisa Operacional, Engenharia Elétrica, Teoria do Controle, Computação Gráfica, Teoria dos Fractais e Criptografia, entre outras.</li> <li>• <b>ESPECÍFICOS:</b> a) <b>Cognitivos:</b> adquirir informações essenciais levando em conta uma visão global e integrante do assunto e adquirir informações sobre o contexto histórico nos quais os conhecimentos matemáticos se produziram; b) <b>De Habilidades:</b> relacionar os conhecimentos matemáticos com outras áreas, transferir e aplicar os conhecimentos adquiridos; levantar hipóteses, deduzir, concluir, generalizar, comparar e sintetizar. 3) <b>De Atitudes:</b> assumir o compromisso com o rigor matemático, desenvolver sua criatividade e valorizar o conhecimento como instrumento de transformação social.</li> </ul>	
<b>9. METODOLOGIA ADOTADA</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aulas expositivas e dialogadas com a participação dos discentes.</li> <li>• Resolução de exercícios do livro texto (básico) e de listas complementares, como reforço.</li> </ul>	
<b>10. PROGRAMA</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Matrizes: Definições, operações, sistemas lineares</li> <li>2. Espaços vetoriais: definição, exemplos, propriedades e exercícios.</li> <li>3. Subespaços vetoriais: definição e exemplos; soma e intersecção de subespaços.</li> <li>4. Combinações lineares: definição, propriedades e aplicações.</li> <li>5. Espaços vetoriais finitamente gerados; definição, exemplos e aplicações.</li> <li>6. Dependência linear; definição, exemplos, propriedades e aplicações.</li> <li>7. Bases e dimensões de espaços vetoriais finitamente gerados: definição, propriedades e aplicações.</li> <li>8. Transformações lineares: definição, exemplos e propriedades.</li> <li>9. Núcleo de uma transformação linear; Imagem de uma transformação linear; Teorema do Núcleo e da Imagem; Automorfismos e isomorfismos; aplicações.</li> <li>10. Operações com transformações lineares. Matriz de uma transformação linear.</li> </ol>	

**10. PROGRAMA (CONT.)**

11. Valores próprios e vetores próprios de uma transformação linear: definição e exemplos.
12. Espaços vetoriais euclidianos: definição e exemplos. Propriedades e aplicações. Norma e distância: definição, propriedades e aplicações.

**11. CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO**

- Provas dissertativas individuais: P1, P2 e P3.
- Média final:  $MF=0,4P1+0,6P2$ , a nota P3 pode substituir ou a nota de P1 ou a nota de P2.
- Para aprovação MF deve ser mínimo igual a 5,0 e frequência às aulas de pelo menos 75%.

**12. ATIVIDADES DISCENTES**

- Participação nas aulas expositivas.
- Participação nas aulas de exercícios.
- Realização das atividades de avaliação de aprendizado.
- desenvolvimento das tarefas complementares indicadas: leituras, discussão e análise de problemas.

**13. BIBLIOGRAFIA BÁSICA**

- LORETO, A.C da C., Silva, A.A & LORETO JUNIOR, A.P., Álgebra Linear e suas Aplicações. 3ª ed., São Paulo: Ed. LTCE, 2011, 188 p.
- BOLDRINI, L.J., COSTA, S.I.R., FIGUEIREDO, V.L. & WETZLER, H.G., Álgebra Linear. 3ª ed., São Paulo: Ed. HARBRA Ltda, 411 p.

**14. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR**

- DOMINGUES, H. H., Carlos Alberto Garcia Callioli & Roberto Costa. Álgebra linear e aplicações. São Paulo: Ed. Atual, 1990.
- KOLMAN, B., Introdução à Álgebra linear com Aplicações. São Paulo: LTC Livros Técnicos e Cient. Editora, 1998.
- LAY, D. C., Álgebra linear e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Cient. Editora, 1999.

## ANEXO H - Plano de Ensino - Estudo de Caso II

### Plano de Ensino da Disciplina Álgebra, Vetores e Geometria Analítica

<b>Disciplina:</b> Álgebra, Vetores e Geometria Analítica	<b>Carga Horária:</b> 80 h	<b>Semestre 1</b>	<b>Grade / Ano:</b> 2011/2011
<p><b>Ementa:</b></p> <p>O aluno usará os vetores, tirando-se proveito de sua grande simplicidade notacional e seu forte apelo geométrico, ou seja, a Geometria Euclidiana no plano e espaço. Os sistemas lineares são mostrados ao discente, como um exemplo de conexão da Álgebra com a Geometria, motivando a consideração de matrizes e dependência linear entre suas linhas e colunas em arranjos matemáticos. Áreas e volumes levam ao estudo das determinantes, cônicas e quádricas; conduzem às formas quadráticas, às matrizes simétricas e seus autovalores, tratando eficientemente e elegantemente os problemas de Geometria Analítica.</p>			
<p><b>Conteúdo Programático:</b></p> <p>1-Introdução à disciplina – objetivos e importância da disciplina para o curso de engenharia, matemática e áreas afins;</p> <p>-Matrizes – matrizes, determinantes e suas propriedades, multiplicação de matrizes, cofatores; operações com matrizes; matrizes inversíveis;</p> <p>-Sistemas Lineares –sistemas equações lineares; sistemas equivalentes; sistemas escalonados; discussão e resolução de sistemas lineares, sistemas de equações homogêneas.</p> <p>- Autovalores e Autovetores - Definição; polinômio característico; Determinação dos autovalores e autovetores de um operador. Vetores (livres e suas operações). Vetores: Produto escalar, Produto vetorial Produto misto. Retas: Formas das equações de retas no plano e no espaço, Ângulo entre retas. Paralelismo e perpendicularismo, Retas coplanares. Planos: Equação geral do plano, Determinação de um plano. Cônicas: parábola, A elipse. A circunferência, A hipérbole, Equação geral das cônicas.</p> <p>- Espaços vetoriais – introdução; espaços vetoriais; propriedades; sub – espaços vetoriais; combinações lineares; espaços vetoriais gerados.</p> <p>- Base e dimensão : dependência linear; propriedades dos conjuntos Linearmente Independente (LI) e dos conjuntos Linearmente Dependentes (LD); base de um espaço vetorial finitamente gerado, dimensão, base de um sub-espaço; dimensão de soma de dois subespaços; coordenadas ; mudança de base .</p> <p>- Transformações lineares – noções sobre aplicações : transformações lineares; propriedades das transformações lineares. Transformações não Lineares: conceituação.</p> <p>- Autovalores e Autovetores - Definição; polinômio característico; Determinação dos autovalores e autovetores de um operador.</p>			
<p><b>Metodologia:</b> Aulas expositivas dialogadas com apresentação dos conteúdos relevantes e potencialmente significativos, exemplificações e discussão dos resultados. Resolução de exercícios, objetivando desenvolver competências.</p>			
<p><b>Bibliografia Básica:</b></p> <p>SIMMONS G. F. Cálculo com geometria analítica. Vol. 1. São Paulo: Makron, 1987.</p> <p>FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2 ed. São Paulo: Pearson, 2007.</p> <p>FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6 ed. São Paulo: Pearson, 2006.</p> <p><b>Bibliografia Complementar:</b></p> <p>BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall do Brasil, 2005.</p> <p>ANTON, HOWARD; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações . Tradução de Claus Ivo DOERING. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.</p> <p>LEITHOLD, LOUIS. Cálculo com geometria analítica. Vol. 1. 3ª ed. São Paulo,Harbra, 1990.</p> <p>WINTERLE, Paulo. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo: Makron Books, 2000.</p> <p>FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas,</p>			

## ANEXO I - Exemplos do Livro Introdução aos Sistemas Dinâmicos

**Exemplo 1** observado pelo Aluno 1 (2ª. Fase – Estudo de Caso II) durante a solução do problema para cálculo dos autovalores:

### Exemplo 1

Calcular os autovalores das matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para a matriz  $A_1$ , temos

$$(\lambda I - A_1) = \begin{bmatrix} \lambda + 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & \lambda + 0,1 \end{bmatrix}$$

Portanto seu polinômio característico é

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^2 + 0,3\lambda - 0,01$$

A equação  $\det(\lambda I - A_1) = 0$

resultando os autovalores reais

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0,2618 \\ \lambda_2 = -0,0382 \end{cases}$$

Para a matriz  $A_2$ ,

$$(\lambda I - A_2) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

de modo que o polinômio característico é

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

e seguem-se os autovalores complexos

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 + j1 \\ \lambda_2 = -1 - j1 \end{cases}$$

**Exemplo 2** observado pelo Aluno 1 (2ª. Fase – Estudo de Caso II) durante a solução do problema para cálculo dos autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

### Exemplo 2

Determinar autovetores associados aos autovalores das matrizes  $A_1$  e  $A_2$  do Exemplo 1 desta seção.

a) Os autovalores da matriz  $A_1$  são  $\lambda_1 = -0,2618$  e  $\lambda_2 = -0,0382$ .

Os autovetores associados a  $\lambda_1$  satisfazem então à equação

$$(A_1 - \lambda_1 I) \cdot u_1 = 0$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} 0,0618 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira equação resulta

$$u_{11} = -\frac{0,1}{0,0618} u_{21}$$

Escolhendo, por exemplo,  $u_{21} = 1$ , vem

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1,618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para o segundo autovetor, devemos obter uma solução de

$$(A_1 - \lambda_2 I) \cdot u_2 = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} -0,1618 & 0,1 \\ 0,1 & -0,0618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$u_{12} = \frac{0,1}{0,1618} u_{22}$$

Escolhendo  $u_{22} = 1$  resulta  $u_{12} = 0,618$ , de modo que um autovetor associado

$$\text{com } \lambda_1 \text{ é } u_2 = \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar que  $u_1$  e  $u_2$  são de fato linearmente independentes, basta verificar que a matriz  $[u_1, u_2]$  é não singular, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} -1,618 & 0,618 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2,236 \neq 0$$

b) Os autovalores da matriz  $A_2$ , são

$$\lambda_1 = -1 + j1, \quad \lambda_2 = -1 - j1$$

Portanto,

$$A_2 - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1+1-j1 & 1 \\ -1 & -1+1-j1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix}$$

e os autovetores associados a  $\lambda_1$ , devem satisfazer a

$$\begin{bmatrix} -j1 & 1 \\ -1 & -j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma solução deste sistema é

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

Para o autovalor  $\lambda_2$  obtemos

$$A_2 - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix}$$

e os autovetores associados a  $\lambda_2$ , devem satisfazer a

$$\begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estas equações são satisfeitas, por exemplo, por

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

Note-se que os autovalores conjugados corresponderam autovetores também conjugados.

Este exemplo mostra a necessidade de usar o conjunto dos complexos  $\mathbb{C}$  como conjunto escalar e  $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$  como espaço vetorial.

## *ANEXO J - Valores Próprios e Vetores Próprios de acordo com LORETO; LORETO, Jr.; SILVA (2011)*

### Valores Próprios e Vetores Próprios

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $R$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. O vetor não nulo  $v \in V$  é chamado de vetor próprio do operador linear  $T$  se  $\exists \lambda \in R \mid T(v) = \lambda v$ . O número  $\lambda$  (real ou complexo) é o valor próprio associado ao vetor próprio  $v$ . Nos casos particulares em que  $V = R^2$  ou  $V = R^3$ , os vetores próprios de um operador linear  $T$  podem ser entendidos como aqueles vetores  $v$  cuja imagem  $T(v)$  é paralela ao vetor  $v$ .

**Proposição 65:** Se  $v$  é um vetor próprio de  $T$ , associado ao valor próprio  $\lambda$ , então para  $\forall \alpha \in R$  o vetor  $\alpha \cdot v$  também é um vetor próprio de  $T$ , associado ao valor próprio  $\lambda$ .

**Proposição 66:** Se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$ , então o conjunto  $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$  é um subespaço vetorial do espaço vetorial  $V$ , chamado subespaço próprio de  $V$ .

**Proposição 67:** Se  $v \in V$  é um vetor próprio de  $V$  e  $\lambda$  é um valor próprio associado, então o operador linear  $T - \lambda \cdot I_n$  não é bijetor.