LEILA MUNIZ SANTOS

CONCEPÇÕES DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2005

LEILA MUNIZ SANTOS

CONCEPÇÕES DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud**.

PUC/SP
São Paulo
2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

Agradecimentos

A
DEUS,
pela **VIDA**.

Ao
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud,
pela competentíssima orientação,
a quem tributo grande parte do mérito pelos possíveis acertos desta dissertação.

À
Profª. Dra. Ana Lúcia Manrique,
pela disponibilidade afetiva,
pela co-autoria na tessitura desta monografia.

À
Profª. Dra. Márcia Brito,
pela candura com que envolveu suas sugestões que tanto nos enriqueceram.

À
Profª. Dra. Silvia Machado, na pessoa de quem homenageio **todos os professores** da Pós-Graduação da **Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**, pela agudeza de visão.

Aos funcionários e amigos **Ângela, Thalita, Paulo, Bina, Ana, e Francisco**,
pela presteza sempre presente.

Aos colegas **Eliana, Marisa, Olga, Eliane, Raquel, Sílvio, e Conceição**
pelo estímulo sempre renovado.

A **Mariana e Rosana**, materializações da fraternidade.

A **meus pais,**
sem os quais pouco teria sido feito.

A meus **futuros alunos**,
razão mediata de tantos labores intelectuais.
À **CAPES** e ao **CNPq** pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta pesquisa investigou as concepções do professor de Matemática sobre o "Ensino de Álgebra", comparando-as às concepções sobre Álgebra propostas por Usiskin e com as abordagens para o ensino de Álgebra sugeridas por Bednarz, Kieran e Lee. Foram feitas análises qualitativa, utilizando-se o software C.H.I.C. (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva), e quantitativa das respostas dos professores ao questionário, chegando-se às seguintes conclusões: a maioria dos professores concebe a "Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas", conforme Usiskin, bem como aborda a Álgebra como "Regras de Transformações e soluções de equações", conforme Bednarz, Kieran e Lee; todos os professores concebem a Álgebra como "Aritmética generalizada", conforme Usiskin, e abordam a Álgebra como "generalização das leis que regem os números", conforme Bednarz, Kieran e Lee; uma pequena parte do grupo de professores concebem a "Álgebra como estudo de relações entre grandezas", conforme Usiskin, bem como, abordam a "Álgebra como introdução do conceito de variável e função", conforme Bednarz, Kieran e Lee. Nestas três concepções emitidas pelos professores pesquisados evidenciaram-se afirmações da teoria ausubeliana em relação à aprendizagem significativa implícita na concepção "Álgebra como Aritmética generalizada"; como também, a aprendizagem mecânica que pode associar-se à concepção de "Álgebra como procedimento", se abordada apenas como regras a serem memorizadas. Além disso, ao conceberem o "Ensino de Álgebra", segundo as três concepções citadas, os professores oportunizam a seus alunos abordar o ente algébrico em situações diversas referentes a cada uma das três concepções.

Palavras-chave: concepção, abordagem, Ensino de Álgebra.

Abstract

This research has investigated the Mathematics educators conceptions about the "teaching of Algebra" by comparing them to Algebra's conceptions proposed by Usiskin and to the approaches to the teaching of Algebra suggested by Bednarz, Kieran and Lee. Qualitative analysis has been undertaken by means of the software C.H.I.C. and quantitative ones from teacher's answers to a series of questions, taking to the following conclusions: the majority of teachers conceives "Algebra as a study of the procedures for solving a certain kind of problems", in conformity with Usiskin; these educators, according to Bednarz, Kieran and Lee, approach Algebra to "Rules for transforming and solving equations"; all the teachers inquired conceive Algebra as "generalized Arithmetic", and they think out of Algebra as a "generalization of the laws that rule the numbers", as Bednarz, Kieran and Lee; a small number of the group of teachers conceives "Algebra as a study of the relations between quantities", as stated by Usiskin, and they approach "Algebra to an introduction for the concept of variable and function", according to Bednarz, Kieran and Lee. These three conceptions issued by the teachers inquired, show clearly not only the assertions of the Ausubel theory with regard to the significant learning implied in the conception "Algebra as generalized Arithmetic", but also the mechanical learning that may be associated to the conception of "Algebra as a procedure", if thought only as rules to be memorized. Besides this, in conceiving the "Teaching of Algebra" according to the three mentioned conceptions, the teachers give to their students the opportunity of an approach to the algebraic being in different situations concerning each one of the three conceptions.

Key-Words: conception, approach, teaching of Algebra

Sumário

Introdução

O desenvolvimento da Álgebra, desde o início da construção de seus primeiros conceitos, apresenta dificuldades relacionadas à natureza epistemológica de seus entes, abstratos por natureza.

Na história da Matemática está registrada a tardia evolução da Álgebra. Courant e Robbins (1946, p. XVI) afirmam que:

> É possível que a descoberta precoce das dificuldades relacionadas a quantidades "incomensuráveis" impediu os gregos de desenvolverem a arte do cálculo numérico antes dos orientais. Em lugar disto eles dedicaram-se à pura geometria axiomática. Portanto, um dos estranhos desvios da história da ciência começou aí, e talvez uma grande oportunidade foi perdida. Por cerca de dois mil anos o peso da tradição geométrica grega retardou a inevitável evolução do conceito de número e da manipulação algébrica, que mais tarde formou as bases da ciência moderna. (tradução nossa)[1]

Além de essa afirmação apontar certa demora na evolução do conceito de número e da manipulação algébrica, também nos dá indício da existência de dificuldades na construção de conceitos algébricos.

Ao analisarmos a história do desenvolvimento do conhecimento matemático, verificamos que os primeiros conhecimentos foram fruto da necessidade dos povos antigos ao resolverem situações de sua vida cotidiana, por exemplo, medição de terras.

---

[1] It may be that the early discovery of the difficulties connected with "incommensurable" quantities deterred the Greeks from developing the art of numerical reckoning achieve before in the Orient. Instead they forced their way through the thicked of pure axiomatic geometry. Thus one of the strange detours of the history of science began, and perhaps a great opportunity was missed. For almost two thousand years the weight of Greek Geometrical tradition retarded the inevitable evolution of the number concept and of the algebraic manipulation, which later formed the basis of modern science.

Não obstante do que foi citado anteriormente em relação às dificuldades na construção dos conceitos algébricos, os professores, na pesquisa realizada por Perez (1991), declararam que seus alunos aprendem facilmente Álgebra e Aritmética.

Esse depoimento não é confirmado nas avaliações do MEC, relatadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), no que se refere à última série do quarto ciclo do Ensino Fundamental, que assim asseveram: “Nos resultados do SAEB[2] por exemplo, os itens referentes a Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país” (p. 115-116).

Perez (1991) aponta uma razão que justifica a preferência dos professores pelo ensino de Álgebra:

> A quantidade de aulas semanais de Matemática em cada série, segundo os professores, é insuficiente para cumprir todo o programa planejado […]. Neste caso, os docentes mostram preferência pelo ensino da Álgebra ou Aritmética (p. 133).

Este mesmo autor conclui que a preferência dos professores pelo ensino de Álgebra prende-se ao fato de que: “[os professores] revelam preferência por algoritmos e técnicas com ênfase em aulas expositivas” (Ibidem, p. 133).

Como vemos, apesar de uma certa predominância do ensino de Álgebra sobre o de outras áreas da Matemática, principalmente no que diz respeito ao tempo destinado para seu estudo, podemos constatar que isso não implica uma aprendizagem satisfatória por parte do aluno, conforme dados do SAEB.

Ao relacionar o ensino de Álgebra com a aprendizagem dos alunos, nesta área da Matemática, pontuamos a finalidade do ensino que é a facilitação da aprendizagem. A esse respeito Ausubel, Novak, Hanesian (1980) afirmam:

---

[2] Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica – SAEB. Dados das provas de Matemática aplicadas em 1993.

> O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é o aprendizado por parte do aluno; muito embora o insucesso na aprendizagem dos alunos não indique, necessariamente, a competência do professor, o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino (p. 12).

Assim, esse baixo rendimento dos alunos quanto à aprendizagem de Álgebra suscita o questionamento: **quais as concepções do professor de Matemática sobre o ensino de Álgebra?** Este é o propósito de nossa pesquisa na tentativa de explicar o quadro relacionado ao ensino de Álgebra que descrevemos anteriormente.

No capítulo seguinte abordaremos a fundamentação teórico-metodológica que apoiou as idéias defendidas neste trabalho.

1. Fundamentação Teórico-metodológica

Neste capítulo, no item 1.1, apresentamos alguns aspectos da origem histórica dos conhecimentos algébricos, com a finalidade de contextualizar os processos históricos que contribuíram para a evolução dos conhecimentos algébricos, e que influenciam, até hoje, o ensino de Álgebra.

No item 1.2, intitulado: Abordagens da Álgebra na perspectiva de sua origem histórica, destacamos as dificuldades encontradas na evolução dos conceitos algébricos demarcadas pelas rupturas que ocorreram durante seu desenvolvimento, e as repercussões disto na construção dos conceitos algébricos, pelos alunos.

São, também, comentadas, no item 1.3, as Abordagens para o ensino de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (1996): regras de transformação e solução de equações, generalização das leis que regem os números, solução de problemas específicos ou classes de problemas, recente introdução de conceitos de variável e função e estudo das estruturas algébricas que objetivam facilitar, para o aluno, a compreensão do ente algébrico pela diversidade de suas abordagens.

No item 1.4, os termos atitude e concepção são conceituados por considerarmos que eles permeiam as abordagens de Álgebra utilizadas pelo professor quando ensinam Álgebra; questão investigada nesta pesquisa e explicitada na pergunta: Quais as concepções do professor de Matemática sobre o ensino de Álgebra?

No item 1.5, as quatro concepções sobre Álgebra de Usiskin (1995): "Álgebra como aritmética generalizada", "Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas”, “Álgebra como estudo de relações entre grandezas” e “Álgebra como estudo das estruturas matemáticas”, são discutidas pois servirão de parâmetros para analisarmos as concepções dos professores sobre o “ensino de Álgebra”.

Enfocamos, no item 1.6, a técnica de mapas conceituais como instrumento de coleta de informações das concepções dos professores sobre o “o ensino de Álgebra”, destacando sua relação com a teoria de aprendizagem de Ausubel.

Neste enfoque são, também, discutidos, no item 1.7, os mapas conceituais na perspectiva ausubeliana mostrando que o conceito de aprendizagem de Ausubel inspirou Novak a criar mapas conceituais. São analisados da mesma forma os tipos de aprendizagem propostos por Ausubel: aprendizagem significativa, aprendizagem mecânica, aprendizagem por descoberta e aprendizagem por recepção, uma vez que tais aprendizagens estão associadas às concepções dos professores sobre o “ensino de Álgebra”, pois, como comentamos na introdução deste trabalho, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980): “O ato de ensinar não se encerra em si mesmo [...] o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino” (p. 12).

1.1 Origem Histórica dos Conhecimentos Algébricos

A história da evolução dos conhecimentos matemáticos implica a própria evolução do homem e isto se revelou em momentos de necessidades práticas que requereram a elaboração de conhecimentos capazes de solucionar situações-problema ligadas ao cotidiano dos povos antigos.

Os primeiros conhecimentos algébricos pertencem aos povos do Oriente[3] fato que nos é informado pelos escritores da História Antiga ao relatarem que os alexandrinos, muito cedo, se dedicaram às atividades mercantis, transportando mercadorias em barcos por eles construídos e equipados com invenções mecânicas que, certamente, exigiam cálculos e conhecimentos algébricos. Este não foi o único motivo que explica o fato de os alexandrinos serem os primeiros a tratar da elaboração de conhecimentos sobre Álgebra.

Alexandria mostrava-se como um porto seguro para os demais povos circunvizinhos que se mudavam para lá, fugindo das guerras que, constantemente, irrompiam em suas cidades. Como uma conseqüência natural desse êxodo, muitos matemáticos para lá se dirigiram e tornaram-se ou professores ou alunos da Universidade de Alexandria, dentre os quais estão Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio, Hiparco, Menelau, Ptolomeu, Diofanto e Papus de Alexandria, como os mais importantes.

Arquimedes e Diofanto foram matemáticos gregos que contribuíram para a construção dos conhecimentos algébricos que, presentemente, fazem parte dos currículos escolares.

Arquimedes (286-212 a.C.) tornou-se famoso por suas descobertas no campo da Mecânica (Estática e Hidrostática) aplicadas aos estudos das navegações nos séculos XVI e XVII. Segundo Eves (2002): “Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição Matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas” (p. 194).

Diofanto de Alexandria (~250 a.C.) teve uma grande importância para o desenvolvimento da Álgebra e para os europeus que, mais tarde, se dedicaram à teoria dos números. A obra *Aritmética*, de sua autoria, é considerada fundamental para os que prosseguiram no estudo da Álgebra, como: Viète, Bachet e Fermat.

[3] Em 395 d.C. o Império Romano dividiu-se em duas partes: O Império Oriental e o Ocidental, passando a Grécia a fazer parte do Império Oriental.

Trata-se de uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que, segundo os historiadores, eleva o autor à condição de gênio, em seu campo. A parte remanescente do seu trabalho é dedicada à resolução de 130 problemas, em cujas soluções aparecem equações do primeiro e do segundo graus, e só uma equação do terceiro grau. Diofanto só concebia respostas entre os números racionais positivos, por isso os problemas algébricos indeterminados que só admitem soluções racionais positivas são conhecidos por “problemas diofantinos”.

Em 1842, Nesselman caracterizou três estágios no desenvolvimento da notação algébrica.

No primeiro estágio, período anterior a Diofanto, a Álgebra era retórica, isto é, apresentava-se a resolução dos problemas em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos.

No segundo estágio, a Álgebra apresentava-se sincopada, adotavam-se abreviações para algumas quantidades e operações que se repetissem com mais freqüência. Diofanto foi o primeiro a utilizar notações algébricas, ou seja, a Álgebra sincopada. Segundo Eves (2002, p. 206), “uma das principais contribuições de Diofanto à Matemática foi a sincopação da Álgebra grega”. Ele criou abreviaturas para a incógnita, potências da incógnita até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos.

A palavra “Aritmética” provém da palavra grega *arithmetike* que se compõe de *arithmos* (número) e *techne* (ciência) e a primeira (*arithmos*) inspirou Diofanto na criação da palavra “incógnita” que é uma fusão das duas primeiras letras da palavra grega *arithmos*, em grego, $\propto$ e ρ.

O último estágio da notação algébrica foi o da Álgebra simbólica, em que as resoluções de problemas são expressas por símbolos que representam os entes algébricos. A Álgebra simbólica passou a ser utilizada na Europa Ocidental, a partir da metade do século XVII; antes usava-se, com mais freqüência, a Álgebra retórica.

O simbolismo algébrico que hoje adotamos nos textos de Álgebra Elementar tem menos de 400 anos, pois são os mesmos empregados na Europa Ocidental.

Depois do período de atuação dos matemáticos em Alexandria, os gregos deixaram de ser os principais produtores de conhecimentos desta área do saber. Surgem, então, escritores e comentadores de obras já produzidas, como: Têon de Alexandria, Hipátia, Proclo, Simplício e Eutócio.

Em 529 d.C., o imperador Justiniano decretou o fechamento da escola ateniense, pondo fim ao grupo de matemáticos que atuavam em Alexandria. Os filósofos e cientistas fugiram para a Pérsia, ali criando a “Academia Ateniense da Pérsia”, onde as sementes da ciência grega vicejaram por vários séculos em solo muçulmano.

Após o declínio do Império Romano, os Impérios Asiáticos passaram a se destacar no cenário da cultura antiga. Quando a cidade de Alexandria foi tomada pelos árabes em 641. d.C., os Impérios Asiáticos, que também já cuidavam de suas culturas letradas, como veremos a seguir, ocuparam o lugar dos gregos na produção de conhecimento.

Foram três as civilizações antigas que contribuíram com conhecimentos matemáticos após a queda do Império Romano: China, Índia e Arábia – os Impérios Asiáticos.

Dentre os povos antigos, foi a China que primeiro trabalhou na construção de conhecimentos matemáticos, destacando-se os seguintes conhecimentos relacionados à Aritmética e à Álgebra: sistema de numeração posicional decimal, números negativos, método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, métodos matriciais na resolução de sistemas de equações lineares, resolução de sistemas de congruência pelo método do Teorema Chinês dos Restos, regra de três. Muitas destas descobertas chinesas chegaram até a Europa por meio dos árabes e dos hindus.

Os matemáticos hindus mais importantes da Antiguidade (séculos VI ao XI) foram: os dois Aryabhatas, Brahmagupta, Mahavira e Bháskara. Dentre estes, destacamos Bháskara que elaborou duas obras tratando de Aritmética e de Álgebra: *Lilavati* (bela) e *Vijaganita* (extração de raízes).

Os hindus foram hábeis aritméticos e colaboraram de forma significativa para a Álgebra. Os algoritmos das operações aritméticas elementares, que hoje utilizamos, surgiram na Índia por volta dos séculos X e XI. Esses algoritmos foram levados para a Europa pelos árabes e lá sofreram modificações até chegarem à forma atual.

As maneiras de produzir conhecimentos matemáticos diferiam, significativamente, dos hindus para os gregos. Esta pode ser a razão das diferenças entre os textos de Geometria, cujas raízes são gregas, e os de Álgebra que têm raízes hindus, como afirma Eves (2002):

> Numerosos contrastes entre a Matemática Grega e a Hindu se perpetuaram até hoje nas diferenças entre muitos de nossos textos de geometria elementar e outros tantos de Álgebra: enquanto os primeiros têm um caráter dedutivo, estes últimos, não raro, são apenas coleções de regras (p. 260).

Tal conclusão baseia-se nas características diferenciadas dos matemáticos hindus e dos matemáticos gregos como mostramos, algumas, no quadro a seguir:

Quadro 1: Características dos matemáticos hindus e gregos

Matemáticos hindus	**Matemáticos gregos**
• Bons calculadores, mas geômetras medíocres	• Excelentes geômetras e desinteressados por cálculos
• Trigonometria de natureza Aritmética	• Trigonometria de natureza geométrica
• Trabalhos matemáticos poéticos e de linguagem obscura	• Clareza e organização lógica em suas exposições Matemáticas
• Matemática empírica com poucas demonstrações	• Matemática que se caracteriza pelas demonstrações rigorosas
• Matemática irregular apresentando altos e baixos na qualidade	• Matemática sempre de boa qualidade e desprezo pela de má qualidade

Fonte: EVES, 2002, p. 259-260.

A observação feita pelo escritor mulçumano Al-Birumi (apud EVES, 2002) traduz este quadro:

> Como observou o escritor mulçumano Al-Birumi em seu conhecido trabalho Índia, ao contrário da alta qualidade uniforme da Matemática grega, a Matemática Hindu era “uma mistura de conchas com pérolas e tâmaras azedas… de cristais caros e seixos comuns” (p. 260).

No século VII d.C., os árabes afastaram-se do resto do mundo com a ascensão do islamismo, e passaram a produzir sua própria cultura. Seus dirigentes, os califas de Bagdá (considerada a capital da cultura), foram homens esclarecidos que preservaram os conhecimentos até então construídos, patrocinando traduções de textos gregos e hindus para o árabe até que, posteriormente, intelectuais europeus tivessem condições de traduzi-los para o latim ou outras línguas.

Foi assim que inúmeros trabalhos de Astronomia, Medicina e Matemática, de estudiosos gregos e hindus, sobreviveram até os nossos dias. Essa foi a maneira pela qual os numerais hindus penetraram na Matemática Árabe e nosso sistema de numeração para os inteiros é apropriadamente chamado hindu-arábico, para indicar sua origem provável na Índia e sua transmissão por meio dos árabes.

Como condição de um tratado de paz com o Império Bizantino foram traduzidos muitos manuscritos gregos por intelectuais sírios – cristãos convidados para a corte do Califa Al-Mâmûn. Muitos intelectuais escreveram sobre Matemática, sendo o mais famoso de todos Mohammed Ibn Mûsa Al-Khowârismî, que escreveu um tratado de Álgebra e um livro sobre os numerais hindus traduzido para o latim, no século XII, influenciando de maneira significativa os estudiosos europeus.

A exposição de Al-Khowârismî sobre os seis tipos de equações formadas com as três espécies de quantidades, raízes, quadrados e números, isto é, x, x^2 e números, em seu livro *Álgebra*, é tão sistemática que o fez merecer o título de “pai da Álgebra”.

O matemático Al-Khowârizmî elaborou a primeira Aritmética Árabe, seguida de outras, que ensinava regras para efetuar cálculos utilizando os algarismos hindus. Ensinavam, também, o processo dos “noves fora” para testar cálculos aritméticos e as regras de “falsa posição” e “falsa posição dupla”, com as quais se resolvem alguns problemas algébricos de maneira não-algébrica. Explicavam, também, as raízes quadradas e cúbicas, frações e regra de três.

A Álgebra de al-Khowârizmî apresenta pouca novidade. Ela explica as quatro operações elementares, resolve equações lineares e quadráticas.

Outros dois matemáticos muçulmanos Abû Kâmil e Al-Karkhî, nos séculos X e XI, notabilizaram-se por seus trabalhos no campo da Álgebra. O primeiro escreveu um comentário sobre a Álgebra de Al-Kowârizmî que mais tarde foi usado pelo matemático europeu Fibonacci, em 1202. O segundo produziu uma das mais importantes obras muçulmanas sobre Álgebra, denominada Fakhrî, inspirada em

Diofanto. A mais profunda e original contribuição dos matemáticos muçulmanos à Álgebra foi a resolução geométrica de uma equação cúbica feita por Omar Khayyam.

Os matemáticos muçulmanos contribuíram, significativamente, no campo da Álgebra Geométrica, principalmente nas resoluções geométricas das equações cúbicas feitas por Omar Khayyam.

A origem do termo Álgebra vem da palavra árabe *al-jabr* e surgiu do título de um tratado de Al-Khowârizmî sobre o assunto, *Hisâb al-jabr W'al-muqâ-balah*, cuja tradução é Ciência da transposição e do cancelamento, na Europa fez-se a tradução de *al-jabr*, ou Álgebra, para C*iência das equações*.

Duval (2003, p. 13) aponta a história das descobertas dos conhecimentos matemáticos como uma das fontes de explicação para a compreensão dos conceitos matemáticos, como também para a procura da razão dos bloqueios de compreensão de tais conceitos apresentados por muitos indivíduos.

Sendo nosso objetivo pesquisar junto aos professores de Matemática, relativamente a suas concepções sobre o ensino de Álgebra, utilizaremos, como recomenda Duval (2003), a história da descoberta dos conhecimentos algébricos como uma das fontes de explicação para a compreensão de tais conceitos por parte dos professores, bem como para a interpretação da natureza epistemológica dos entes algébricos que, certamente, permeiam suas concepções.

1.2 Abordagens da Álgebra na Perspectiva de sua Origem Histórica

Um olhar sobre a evolução da história da Álgebra nos permite apreciar melhor a complexidade dos conceitos algébricos e as rupturas que ocorreram durante sua construção.

A primeira lição da história da Matemática nos diz que a Álgebra levou um longo tempo para se desenvolver. As interpretações dos eventos históricos variam, mas muitas evidências sugerem que o processo de desenvolvimento da Álgebra foi complexo e não simples. Parece razoável supor que muito tempo foi necessário para encontrar e superar alguns desafios considerados extremamente difíceis.

Segundo Rojano (1996, apud WHEELER, 1996), a Álgebra é, em algum sentido, uma extensão da Aritmética, respondendo a questões que a Aritmética apontou, mas não pôde responder. Para Wheeler (1996), a Álgebra é uma complementação da Aritmética: A Aritmética aparece para lidar com os números reais dos problemas do cotidiano, e estes não poderiam ser inteiramente desenvolvidos sem o auxílio da Álgebra. Bell (1996, apud WHEELER, 1996) recorda que há uma multiplicidade de "álgebras", e não apenas uma. Tal fenômeno sugere que a Álgebra não se restringiu ao mundo dos números e não pode, conseqüentemente, ser vinculada somente à Aritmética.

A origem da Álgebra também está relacionada à Geometria. Uma das lições da história é que a Álgebra pode ter sido construída também em fundações geométricas. Isto talvez explica os trabalhos de Arquimedes e Diofanto sobre Geometria. Tais evidências sugerem que a introdução à Álgebra, para alunos de hoje, poderia, inicialmente, apoiar-se no seu conhecimento geométrico e nas intuições.

A Álgebra tem lugar garantido no currículo escolar. As fases iniciais da disciplina Álgebra são, muitas vezes, o fim do percurso para muitos alunos em relação ao seu esforço em aprender Álgebra, dando a idéia de que não possuem habilidades para aprender Matemática. Os que ultrapassam as fases iniciais, mais tarde, geralmente, não entendem o que a Álgebra é capaz de fazer e qual a sua utilidade. Tradicionalmente, a Álgebra é ensinada por sua importância como ferramenta para manipular outros conteúdos da Matemática que serão estudados posteriormente, como trigonometria e cálculo. Esta forma de justificar a inclusão da Álgebra no currículo apresenta os conteúdos algébricos fechados em si mesmos. Os alunos, conseqüentemente, estudam Álgebra sem saberem, ao certo, a relevância de tais conteúdos para eles.

Os dois aspectos sobre a natureza da Álgebra como Aritmética generalizada e como sistema de símbolos dificultam ainda mais a relação do aluno com a Álgebra. Como Aritmética generalizada, as variáveis são usadas para generalizar casos particulares e o aluno tende a não considerar a natureza epistemológica do ente algébrico que se caracteriza por não admitir particularidade. Já o simbolismo enfoca apenas a notação do ente algébrico deixando o aluno sem compreender o conceito algébrico do ente simbolizado. Muitos alunos apenas reconhecem, por exemplo, uma equação pelas “letras” que representam suas variáveis (x, y, z), mas não compreendem o conceito de variável.

A grande preocupação dos educadores, que é também percebida nos livros didáticos, é a exigência da fluência da linguagem formal algébrica por parte dos alunos (DAVIS, 1989). Isso faz com que a maioria dos alunos saiba, muito bem, como encontrar a solução[4] por exemplo, de uma equação quadrática e poucos saibam, como e quando, aplicar esta técnica para resolver um problema[5] do seu cotidiano É muito difícil encontrar problemas que mostrem para os alunos como

---

[4] O termo “solução”, aqui referido, está sendo considerado no sentido matemático como indicado por Polya (1978, p. 153): “solução é um termo perfeitamente claro, quando tomado no seu sentido matemático: designa qualquer objeto que satisfaça a condicionante de um problema de determinação”. Entendendo-se, segundo esse autor, por:

- **Problema de determinação** aquele que tem por objetivo “encontrar um certo objeto, a incógnita do problema. [...] podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos” (POLYA, 1978, p. 124).
- **Incógnita** é “[...] aquilo que se procura ou de que se necessita. [Como exemplo]: Em certos problemas de Álgebra, a incógnita é um número. Num problema de traçado geométrico, a incógnita é uma figura. No problema da novela policial, a incógnita é o assassino” (Polya, 1978, p. 124).

Condicionante: [É o elemento] “que liga a incógnita de um problema de determinação aos respectivos dados” (POLYA, 1978, p. 142).

[5] Segundo Polya (1978, p. 146): “Resolver um problema consiste, essencialmente, em encontrar a conexão entre os dados e a incógnita” .Ou, ainda, segundo esse mesmo autor: “Resolver problema de **qualquer tipo** é contornar um obstáculo [encontrar a incógnita]” (POLYA, 1978, p. 139).

e quando aplicar a Álgebra que eles sabem. Muitos livros didáticos, nos seus problemas propostos, exigem apenas uma manipulação da linguagem formal.A falta de problemas “reais” não permite que os alunos vejam a Álgebra como necessária para “matematizar” o mundo (FEY, 1984, apud DAVIS, 1989). Segundo Davis (1989), em uma análise de livros didáticos de Álgebra, observou-se que muitos dos seus problemas “reais” ou “artificiais” poderiam ser solucionados pela Aritmética.

O formalismo[6] da Álgebra, na escola, ou seja, a ênfase nos procedimentos utilizados na resolução de determinados problemas algébricos foi acatado pelos professores de Matemática quando ensinam Álgebra. Com o Movimento da Matemática Moderna (décadas de 1960 e 1970), as escolas seguiram rumo ao formalismo, os alunos deveriam ser fluentes em técnicas algébricas e rigorosos no seu uso, à semelhança dos matemáticos hindus no tratamento de suas primeiras descobertas algébricas, como nos relata a história. Surgiu, no cenário da educação, a “instrução programada”, dando início à era da informática aplicada à educação com as “máquinas de ensinar” (FIORENTINI, apud BRITO e MORON, 2001, p. 268). Mas os defensores do formalismo em Matemática, talvez não tenham percebido que a alta tecnologia corre o risco de diminuir o interesse, de muitos alunos, pela Matemática. Para Davis (1989), o que é bom para os matemáticos não é necessariamente bom para os que, apenas, utilizam os conceitos matemáticos sem, contudo, serem, ou desejarem ser, profissionais desta área. Desta forma, os alunos deixam de ser o alvo do ensino nos atuais currículos de Álgebra quando a tratam desvinculada de suas aplicações do cotidiano, fazendo com que o ensino de Álgebra não seja para todos os alunos.

Numa conferência realizada na Geórgia, em 1989, alguns pesquisadores participantes levantaram questões em relação ao ensino de Álgebra, como:

---

[6] O formalismo matemático tem suas raízes na concepção platônica de matemática que enfatiza as Formas matemáticas afirmando que estas “não eram idealizações de objetos empíricos, mas preexistiam, independente deles e a eles serviam de modelos” (MACHADO, 1997, p. 20).

1. O que é necessário ensinar atualmente?
2. Qual abordagem, atualmente, é mais eficaz para se ensinar Álgebra?
3. Até que ponto a *performance* do aluno em utilizar algoritmo está relacionada com o seu entendimento?

Diversas pesquisas relacionadas ao ensino de Álgebra foram realizadas com o objetivo de responder questões com as apresentadas anteriormente. Em um dos estudos das pesquisadoras Bednarz, Kieran e Lee (1996), discute-se quais as abordagens mais eficazes no ensino de Álgebra e apresentam cinco diferentes abordagens que podem ser utilizadas na introdução do ensino de Álgebra, que apresentaremos a seguir.

1.3 Abordagens para o ensino de Álgebra

Abordagem é o modo de lidar com "algo" assim, no ensino de Álgebra é necessário que o professor utilize um modo de trabalhar os conceitos algébricos de forma a facilitar a compreensão deles por parte dos alunos.

- **as regras de transformação e solução de equações** (às quais o ensino da Álgebra se reduz muitas vezes);
- **a generalização das leis que regem os números** (um ponto muito importante nos currículos);
- **a solução de problemas específicos ou classes de problemas** (que historicamente tiveram um papel importante no desenvolvimento da Álgebra e de seu ensino);

- **a recente introdução de conceitos de variável e função** (que apareceu historicamente muito mais tarde e que tem ocupado uma posição de importância crescente em alguns programas);
- **o estudo das estruturas algébricas** (que marcou os currículos escolares nos anos de 1960 sob a influência do Movimento da Matemática Moderna).

Essas diferentes opções de abordagens para o ensino de Álgebra interferem no ensino dos conceitos algébricos, como também determinam o tipo de relacionamento dos alunos com a Álgebra. Isso faz com que sejam realizados importantes estudos sobre características do pensamento algébrico, sobre as dificuldades que os alunos encontram quando se relacionam com a Álgebra, e sobre as situações que podem facilitar este desenvolvimento. O aluno que não generalizar certamente, não construirá os conceitos algébricos, uma vez que os entes algébricos são generalizações.

Vimos que a história do desenvolvimento dos conhecimentos algébricos permite compreender melhor os avanços, as oposições e os atrasos que ocorreram na evolução destes conhecimentos. Segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996), a Álgebra surgiu do elo que une a Aritmética e a Geometria quando esta é tratada como generalização. A Geometria se apóia na Álgebra quando foca a generalização dos padrões geométricos e a construção das fórmulas geométricas. E ainda quando, muitas vezes, partimos de figuras geométricas, ou seqüências numéricas, para compreender conceitos algébricos, por exemplo, as raízes de uma equação, representando-a graficamente.

Uma outra abordagem que pode servir de base para o ensino de Álgebra é a exploração de problemas, acentuando a associação entre solução de problemas com formulação e solução de equações. Durante muito tempo, solução de problemas teve um papel importante no desenvolvimento e ensino da Álgebra.

Uma análise histórica levanta questões sobre a noção exata de um problema e do papel que os problemas têm exercido no ensino e no desenvolvimento dos conhecimentos de qualquer área do saber; aqui enfocamos os conhecimentos de Álgebra. Alguns tipos de problemas que permitem estudar as continuidades e descontinuidades que podem ser encontradas nos raciocínios dos alunos ajudam a descobrir quais as situações que necessitam de conhecimentos matemáticos prévios dos alunos.

Outra abordagem também citada para a introdução da Álgebra é a modelagem que mostra a facilitação na construção de conceitos proporcionada pela “aproximação”, no desenvolvimento cognitivo dos alunos, no sentido da compreensão da variável. Uma parte do processo de modelagem é a fase da formulação que tem como resultado a criação de modelos, com base nas hipóteses que tratam analogicamente os entes e as propriedades matemáticas.

A construção do conceito de variável é designada como abordagem funcional da Álgebra, atribuída à chegada dos computadores e às possibilidades proporcionadas pelo crescente desenvolvimento tecnológico, o que nos mostra que conceitos de variável e função estão mais presentes em algumas abordagens de introdução à Álgebra.

Bednarz, Kieran e Lee (1996) sugerem a todos os interessados na aprendizagem da Álgebra o exame das fontes e dos efeitos das várias práticas educacionais que tentam dar significado a esta aprendizagem.

Diante dessas diferentes formas de abordagens para o ensino de Álgebra, surge a necessidade de investigar o que ocorre, atualmente, nas aulas de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. Para isso, realizaremos uma pesquisa que visa coletar dados sobre as concepções de professores acerca do ensino de Álgebra.

A seguir, são apresentados os significados de atitude e concepção, uma vez que tais elementos permeiam as abordagens utilizadas pelo professor no ensino de Álgebra.

1.4 Atitude e concepção

Conceituaremos os termos atitude e concepção uma vez eles serão importantes conceitos para as análises que serão realizadas buscando responder o problema de pesquisa: qual a concepção do professor de Matemática sobre o ensino de Álgebra?

Em relação à atitude, Brito e Moron (2001) afirmam: “ao se conceituar atitude, utiliza-se um ou mais, dos três seguintes componentes: cognitivo, afetivo e comportamental [ou motor]” (p. 264).

Analisaremos algumas definições para o termo atitude, considerando a presença dos componentes: cognitivo, afetivo e motor.

Na definição de atitude enunciada por Rokeach (1979, apud BRITO e MORON, 2001), observam-se os componentes cognitivo e comportamental:

> São organizações de crenças relativamente estáveis acerca de um objeto ou situação que predispõe o sujeito para responder preferentemente em um determinado sentido (p. 265).

Os componentes afetivo e comportamental estão explicitados na definição de Anderson (1988, apud BRITO e MORON, 2001):

> É uma característica afetiva que pode ser considerada como emoção moderada que predispõe o indivíduo a responder consistentemente de uma forma favorável ou desfavorável quando confrontado com determinado objeto (p. 265).

Uma definição de atitude, em que estão presentes os três componentes – cognitivo, afetivo e motor –, é expressa por Brito (1996, apud BRITO e MORON, 2001) quando diz:

> […] atitude aqui é tratada como uma “disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo” (p. 265).

Ao analisarmos essa definição de Brito, observamos a presença dos três componentes constitutivos de atitude que julgamos necessários à sua conceituação. Os componentes cognitivo, afetivo e motor estão implícitos nos seguintes termos da definição de atitude dada por Brito, e que embora tais componentes funcionem indissociavelmente serão comentadas, a seguir, separadamente, para melhor compreensão da referida definição:

- “uma disposição pessoal, idiossincrática”, essa expressão traduz os componentes afetivo e motor, pois trata-se de uma avaliação do indivíduo acerca do conteúdo abordado (objeto, eventos ou pessoas)
- “assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo”, tal expressão traduz o componente cognitivo, uma vez que os conhecimentos que o indivíduo detém são frutos de suas experiências, segundo as teorias interacionistas do conhecimento.

Atitudes e concepções se relacionam no que diz respeito ao componente cognitivo. Isto fica explícito na definição de concepção enunciada por Brito e Moron (2001, p. 266): “Concepção é definida como a maneira própria de cada indivíduo elaborar, interpretar, representar suas idéias e agir de acordo com as mesmas”. Atitude, como já mencionamos, contém também o componente cognitivo, além dos componentes afetivo e motor. Podemos, então, concluir que os termos atitude e concepção se interrelacionam.

Ao pensarmos em concepção no seu componente cognitivo, lembramos que a maioria das teorias cognitivas ressalta a importância do contato do indivíduo com o ambiente sócio-histórico-cultural no processo de aprendizagem e afirma que o homem necessita de mecanismos de interações socioculturais que promovam seu desenvolvimento bio-psico-social. Assim, a inserção do indivíduo em um grupo cultural é indispensável para sua constituição como pessoa construtora do seu próprio conhecimento.

Por essas afirmações das teorias cognitivas, relativas à aprendizagem verificamos que as atitudes e as concepções, em seu componente cognitivo, estão influenciadas por determinantes socioculturais que se refletirão nas “disposições pessoais idiossincráticas” e nas “experiências do indivíduo” presentes na definição de atitude formulada por Brito (2001).

O indivíduo assimila[7], do grupo cultural em que está inserido, os signos (palavras, imagens de objetos, conceitos) e os instrumentos de condutas (normas, convenções sociais) já estabelecidos e praticados neste grupo. Essa assimilação possibilitará o desenvolvimento das atividades intelectuais mediadas, isto é, aprendizagens que se realizam em colaboração com elementos do grupo social, que são tipicamente humanas.

No processo de construção de conhecimento estão envolvidos fatores individuais e sociais, que Haste (1987, apud DUARTE 2004) denominou de fatores intra-individual e interpessoal.

A influência intra-individual representa a forma como o indivíduo incorpora a experiência e como a compreende. Esta é uma atividade endógena, isto é, que se processa no interior do organismo, em que o indivíduo opera integrando a nova informação às estruturas cognitivas já existentes, ou seja, aos

[7] O termo assimilar, aqui referido, terá a conotação atribuída por Ausubel: “resultado da interação que ocorre, [...] entre o novo material a ser aprendido e a estrutura cognitiva existente”. (MOREIRA, 1983, p. 35).

conhecimentos que já detém, como afirma a teoria ausubeliana, que abordaremos mais adiante. Evidentemente que os fatores endógenos só poderão ser observados quando externados por meio das ações dos indivíduos, o que denuncia sua presença. Assim, para conhecermos as concepções dos professores sobre o ensino de Álgebra analisaremos suas respostas ao questionário e ao mapa conceitual, que construirão partindo da expressão "Ensino de Álgebra", que serão descritos no capítulo 3 desta pesquisa.

O produto da interação da nova informação com a estrutura cognitiva é o novo conhecimento construído pelo indivíduo, segundo suas possibilidades, pois estará condicionado às suas "experiências" anteriores.

A influência interpessoal é o campo da interação social, por meio da qual o indivíduo aprende as normas culturais e as convenções sociais. A interação com o outro é uma atividade exógena, que se produz no exterior do organismo, pois provém de causas externas que serão incorporadas como novos conhecimentos, sofrendo, depois, o processo endógeno de interação de novas informações às estruturas preexistentes. É o caso das leis, das condutas sociais, que são formuladas a partir da cultura de um povo, ou seja, do conjunto de padrões de comportamento relativos a crenças, conhecimentos, costumes.

Segundo Ponte (1992, apud MANRIQUE, 2003), as concepções seriam vistas como "quadros conceituais que desempenham um papel semelhante as dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas" (p. 70).

Nesta afirmação de Ponte está implícita a possibilidade de existirem várias concepções para um mesmo objeto matemático, o que está concordante com uma necessidade inerente à noção de concepção apontada por M. Artigue (1990) quando afirma:

> […] evidenciar a pluralidade dos pontos de vista possíveis num mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os modos de tratamento que lhe são associadas, evidenciar sua adaptação mais ou menos boa à resolução de problemas (tradução nossa).[8]

Segundo esta autora, a noção de concepção coloca em evidência a possibilidade de existirem várias "formas" de conceber um mesmo objeto matemático, no que se refere a maneiras diferentes de percebê-lo, de representá-lo, de utilizar suas propriedades na resolução de problemas. Assim, Artigue define concepção como um ponto de vista local sobre um dado objeto.

Artigue considera que as concepções são influenciadas pelas idéias transmitidas pelas instituições (escolares ou não), as quais o indivíduo teve acesso, bem como, pelas relações que o indivíduo foi capaz de estabelecer a partir de suas ações sobre o objeto do conhecimento, nas palavras de Artigue (1990):

> De minha parte a tendência seria pensar que a concepção, definida […] como um objeto local ancorado na análise do saber, corresponde a um nível intermediário necessário à operacionalidade da análise didática (tradução nossa).[9]

Corroborando essa idéia de Artigue ao considerar concepção como "um ponto de vista local", Duroux (1982, apud ARTIGUE, 1990) dá a seguinte definição para concepção:

> "No desenvolvimento do processo de aquisição, por causas diversas […] certas situações são privilegiadas em detrimento de outras, isso provoca a aparição de conhecimentos locais, operando sobre subconjuntos do campo conceitual e para certos valores das

---

[8] [...] mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle out telle classe de problèmes (p. 265).

[9] J'aurais pour ma part tendance à penser que la conception, définie […] comme un objet local ancré dans l'analyse du savoir, correspond à un niveau intermédiaire nécessaire à l'opérationalité de l'analyse didactique (p. 279).

> variáveis das situações estudadas, é este saber local que chamamos de concepção". (tradução nossa)[10]

Este autor atribui a causas diversas o fato de o indivíduo privilegiar certos elementos do objeto em estudo, em detrimento de outros, ao construir conhecimento o que, de acordo com ele, provoca a aparição de "conhecimentos locais", ou, segundo Artigue, "ponto de vista local", a que ambos chamam de concepção.

Comparando as definições de concepção enunciadas por Artigue – ponto de vista local sobre m dado objeto, e por Brito – disposição pessoal idiossincrática dirigida a objetos, concluímos que nessas definições fica evidenciada a subjetividade do indivíduo quando emite sua concepção sobre um dado objeto.

Buscando uma explicação na teoria vygotskyana para as causas que influenciam as concepções dos indivíduos sobre um objeto, teremos como resposta os determinantes sócio-histórico-cultural, fruto da inserção do indivíduo em um grupo cultural, o que Haste, como já comentamos, atribui aos fatores interpessoais (relações que o indivíduo elabora a partir de fatores externos, por exemplo, instituições de ensino) e intra-individuais (relações que o indivíduo elabora internamente a partir de suas ações sobre o objeto).

A seguir comentaremos as concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995), as quais nos servirão de parâmetro para analisar as concepções dos professores envolvidos nesta pesquisa, relativas ao ensino de Álgebra.

---

[10] "Dans le déroulement du processus d'acquisition, pour diverses causes […], certaines de ces situations sont privilégiées au détriment d'autres, ce qui provoque l'apparition de connaissances locales, opérantes sur des sousclans du champ conceptuel, et pour certaines valeurs des variables des situations concernées, c'est ce savoir local que nous appelons conception" (p. 270).

1.5 Concepções de Álgebra

Para Usiskin (1995) os diferentes usos das variáveis estabelecem quatro concepções da Álgebra:

- **Álgebra como Aritmética generalizada**

Nessa concepção, as variáveis são usadas para generalizar casos particulares. Por exemplo, o conceito de adição de números naturais se expressa por: sendo a, b $\in \mathcal{N}$, então a + b $\in \mathcal{N}$.

São tratadas, nessa concepção, técnicas importantes para Álgebra e também para Aritmética. Bell e Usiskin (1984, apud USISKIN, 1995, p. 14) sustentam que não é possível “estudar Aritmética adequadamente sem lidar implícita ou explicitamente com variáveis”.

Esse mesmo autor também afirmou que os alunos utilizam a Álgebra para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para linguagem matemática algébrica ou vice-versa, e generalizar. Como exemplo, temos: determinar o número cuja quinta parte somada ao seu dobro é igual a 40. Para resolver esse problema pode-se traduzir a expressão da linguagem do cotidiano para a algébrica e em seguida resolver a equação encontrada.

- **Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas**

Nessa concepção, espera-se que o aluno simplifique, por exemplo, equações chegando a expressões mais reduzidas. Dessa maneira, as variáveis são vistas como incógnitas ou constantes, ou seja, são valores desconhecidos que por meio da resolução de uma equação ou de um sistema de equações são descobertos.

Para exemplificar o autor utiliza o seguinte problema: “Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número”. Não é difícil traduzir o problema para a linguagem algébrica: $5x + 3 = 40$. Dentro da concepção da Álgebra como generalizadora de modelos, o problema estaria resolvido, pois foi encontrado o modelo geral. Mas considerando a Álgebra como estudo de procedimentos, o problema não está solucionado, temos ainda que resolver a equação encontrada empregando um procedimento. Podemos, por exemplo, somar -3 a ambos os membros: $5x + 3 + (-3) = 40 + (-3)$. Simplificando, temos: $5x = 37$, e dividindo ambos os membros por 5: $5x(\div 5) = 37(\div 5)$, temos que $x = 7{,}4$. Usiskin (1995) ressalta que muitos alunos ao resolverem problemas desse tipo apresentam dificuldades na passagem da Aritmética para Álgebra. Já que a resolução aritmética (feita mentalmente) consiste em subtrair 3 e dividir por 5, a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação de 5 e a adição de 3 (as operações inversas das realizadas na forma aritmética). Para armar uma equação raciocinamos de forma contrária à que empregaríamos para aritmeticamente resolver o problema.

- **Álgebra como estudo de relações entre as grandezas**

Considerar a Álgebra como estudo de relações entre grandezas é tratá-la como estudo de função. Nessa concepção, a variável é um argumento, isto é, representa os valores do domínio de uma função, ou é um parâmetro, representa um número do qual dependem outros números.

A principal diferença entre as concepções de Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas e de Álgebra como estudo de relações entre grandezas é que, nesta última, as variáveis assumem qualquer valor do conjunto universo. Por exemplo, quando é perguntado ao aluno: O que ocorre com o valor de $\frac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior? Não está sendo pedido para que o aluno traduza o problema, e também não está sendo pedido o valor de x, portanto x não é uma incógnita. E não se trata de um modelo aritmético, já que "não tem sentido perguntar o que aconteceria com o valor de 1/2 quando 2 se torna cada vez maior" (USISKIN, 1995, p. 16). Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.

- **Álgebra como estudo das estruturas matemáticas**

Essa concepção permite analisar e comparar relações, além disso, torna-se também importante para a caracterização e compreensão das estruturas matemáticas, tais como grupo, anel, corpo, espaço vetorial. Para Usiskin (1995), essa concepção de Álgebra, como estudo das estruturas matemáticas, é reconhecida pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios.

Ao fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$, por exemplo, a concepção de variável não coincide com nenhuma daquelas comentadas anteriormente. A variável não é um argumento, já que não se trata de uma função ou relação, nem é uma incógnita, já que não se trata de uma equação a ser resolvida. E também não se trata de um modelo aritmético a ser generalizado. Ao encontrar $(3x + 22a)(x - 6a)$, é possível substituir valores de x e de a para verificar a resposta, mas isso raramente é feito. Geralmente pede-se que os alunos testem as suas respostas multiplicando os binômios, que é o mesmo procedimento utilizado para obter a resposta. É comum que, ao resolver este tipo de problema, o aluno considere as variáveis como "sinais no papel", sem referência numérica.

A variável tem o papel de objeto arbitrário dentro de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Usiskin (1995) ao elaborar concepções sobre Álgebra, apresenta conceitos que formam o corpo de conhecimentos algébricos.

Analisando as concepções de Álgebra elaboradas por Usiskin (1995), que acabamos de comentar, verificamos que estão perfeitamente relacionados com as abordagens para a introdução do ensino de Álgebra apontadas pelas autoras Bednarz, Kieran e Lee (1996). Bednarz, Kieran e Lee (1996) ao proporem diferentes abordagens para o ensino de Álgebra, tratam da construção dos conceitos algébricos, ou seja, como se deve processar o ensino de Álgebra. Assim, concepções de Álgebra e as abordagens para o ensino de Álgebra, apresentadas por esses autores, inter-relacionam-se como podemos observar no quadro a seguir:

Quadro 2: Comparação entre as concepções de Álgebra, segundo Usiskin (1995), e as abordagens para o ensino de Álgebra, de acordo com Bednarz, Kieran e Lee (1996)

Concepções de Álgebra (Usiskin)	Abordagens para o ensino de Álgebra (Bednarz, Kieran e Lee)
• Álgebra como Aritmética generalizada	• Generalização das leis que regem os números
• Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas	• Regras de transformações e soluções de equações • Solução de problemas específicos ou classes de problemas
• Como estudo de relações entre as grandezas	• Introdução de conceitos de variável e função.
• Álgebra como estudo das estruturas matemáticas	• Estudo de estruturas algébricas

No quadro 2, em que estão apresentadas as concepções de Álgebra de Usiskin (1995) em correspondência com as abordagens para o ensino de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (1996), observamos que:

- Ao conceber a Álgebra como "Aritmética generalizada", Usiskin (1995) ressalta a utilização das variáveis para generalizar casos particulares, bem como o tratamento algébrico de situações do cotidiano. Essa concepção de Álgebra como "Aritmética generalizada" deve ser abordada, segundo as autoras Bednarz, Kieran e Lee (1996), como "generalização das leis que regem os números", por exemplo, os conceitos das operações de adição e multiplicação de números naturais podem ser expressos da seguinte forma generalizada considerando-se dois ou mais números naturais quaisquer, tem-se como resultado, destas operações, um número que é, também, natural; isto explicita a propriedade do fechamento a essas duas operações.

- A concepção de Usiskin – "a Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas" – pressupõe a Álgebra como estudo de procedimentos considerando a variável como incógnita. Nas abordagens do ensino de Álgebra sugeridas por Bednarz, Kieran e Lee, nessa concepção deve-se utilizar "regras de transformações de e soluções de equações e soluções de problemas específicos ou classe de problemas". Essa é uma abordagem muito utilizada pelos professores de Matemática no ensino de Álgebra. Ao tratar a Álgebra como procedimentos deve-se estar atento para que o aluno apenas não memorize as regras de resolução das equações, sem, contudo, conceituar raiz.

- Ao tratar a Álgebra “como estudo de relações entre grandezas”, Usiskin (1995) aponta a natureza do ente algébrico como generalização como acontece na “função”, em que a variável assume os valores do domínio gerando imagens, pela função, no contradomínio. Bednarz, Kieran e Lee (1996) sugerem que na concepção de Álgebra “como estudo de relações entre grandezas” deve-se “introduzir os conceitos de variável e de função”. Essa forma de tratar a Álgebra pontua a verdadeira natureza do ente algébrico que é uma generalização.

- A concepção de Usiskin (1995) denotando a “Álgebra como estudo das estruturas matemáticas” indica a existência de conjuntos formando sistemas ou estruturas algébricas. Essa concepção segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996) deve ser abordada pro meio de “estudo das estruturas algébricas” que consiste em considerar um conjunto A e uma operação $*$ e classificar o conjunto A, numa estrutura algébrica, de acordo com as propriedades satisfeitas pelos elementos do conjunto A quando operados por $*$, podendo ter, por exemplo, uma das seguintes estruturas: grupo, anel, corpo e espaço vetorial.

Notamos que ao enfocar a construção dos conceitos algébricos, essas autoras se preocupam com o objetivo do ensino da Matemática, em particular do ensino de Álgebra. Duval (2003, p. 11), em relação ao objetivo do ensino de Matemática, afirma:

> […] o objetivo do ensino de Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim

> contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Duval (2003) apontou a falta de compreensão dos conceitos matemáticos como a maior dificuldade para se alcançar o objetivo estabelecido para o ensino da Matemática, ou seja, desenvolvimento do raciocínio, da análise e da visualização (interpretação) dos entes matemáticos.

Muitas vezes, as dificuldades enfrentadas na construção do conhecimento matemático estão relacionadas às formas de abordagens dos conteúdos em sala de aula decorrentes do descompasso entre o desenvolvimento cognitivo do aprendiz e o tipo de operações dele requerido pela escola. Tudo indica que se exigem do aprendiz a construção e aplicação de conhecimentos matemáticos para os quais ele não possui, ainda, estruturas cognitivas adequadas aos raciocínios requeridos nas situações-problema propostas. A construção de estruturas necessárias à compreensão de conceitos matemáticos deve ser o principal objetivo do ensino dos professores de Matemática e aqui nos referimos, em particular, ao ensino de Álgebra, foco desta pesquisa.

Duval (2003, p. 12) estudou o funcionamento cognitivo “que possibilita um aluno a compreender, efetuar e controlar, ele próprio, a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino”, objeto de discussão apresentada a seguir.

Duval também aponta dois tipos de transformações de representações semióticas: os tratamentos, transformações que não mudam de registros, e as conversões, transformações que mudam de registros. Como exemplo, citamos: para se construir o conceito de raiz de uma equação do 1º grau, pode-se partir do gráfico desta equação. A visualização do ponto (ou dos pontos, no caso de solução indeterminada), que é a raiz da equação constituir-se-á em um auxiliar para a compreensão do conceito de raiz como o valor da variável que anula a equação, ou, no gráfico, o ponto de ordenada zero.

Neste exemplo verifica-se que se passou da representação semiótica (gráfico) para a representação algébrica. Neste caso, segundo Duval, efetuou-se uma “conversão”, pois houve uma “mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados” (DUVAL, 2003, p. 16). Duval denomina registro de representação os vários tipos de representações semióticas e afirma: “a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro” (2003, p. 21).

De acordo com Duval, a construção dos conceitos algébricos será facilitada mediante as representações semióticas dos entes algébricos e das conversões ou mudanças de registros destas representações.

Nas abordagens para a introdução do ensino de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (quadro 2) estão sugeridas formas que devem ser transformadas em situações-problema para trabalhar os conteúdos algébricos. Necessário se faz trabalhar as situações-problema considerando o que afirma Duval quanto ao papel fundamental das conversões ou mudanças de registros na compreensão dos conceitos algébricos.

Duval afirma que a diversidade de representações semióticas ou mudanças de registros facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos. Considerando as mudanças de registros como variações de abordagens dos conceitos algébricos sugeridos por Bednarz, Kieran e Lee (1996), as quais ampliam a compreensão dos entes algébricos, surgem as seguintes questões a serem investigadas: os professores trabalham Álgebra só como Aritmética generalizada? Ou apenas como procedimentos? Ou tão-só como relações entre grandezas? Ou somente como estrutura algébrica? Ou todos esses aspectos são contemplados?

Para responder a estas questões analisaremos os mapas conceituais, construídos pelos professores envolvidos na pesquisa, comentados a seguir, que mostrarão, hierarquicamente, os aspectos mais relevantes para os professores, quando ensinam Álgebra, explicitando, assim, suas concepções sobre o ensino de Álgebra.

1.6 Mapas Conceituais

Faria (1995) define mapa conceitual como:

> Esquema gráfico para representar a estrutura básica de partes do conhecimento sistematizado, representado pela rede de conceitos e proposições relevantes desse conhecimento (p. 1).

Nessa definição percebemos que os mapas conceituais evidenciam os "conceitos e proposições relevantes" de um conhecimento.

Podemos afirmar, então, a presença de "relevância" (que indica presença de valores) quando se trabalha algum conhecimento.

O uso da técnica dos mapas conceituais pressupõe que o indivíduo constrói os conceitos a partir dos conhecimentos que já dispõe e de sua predisposição afetiva para realizar essa construção (FARIA, 1995). Considera também que os indivíduos que os constroem têm uma participação ativa na construção do seu próprio conhecimento.

Essas afirmações apóiam-se na teoria de aprendizagem de Ausubel e na linha de psicólogos educacionais como o próprio David P. Ausubel e Joseph Novak, e os filósofos Stephen Toulmin e Thomas Kuhn.

1.6.1 Mapas Conceituais na perspectiva ausubeliana

A teoria de Ausubel tem como objetivo explicar a aprendizagem, segundo o ponto de vista cognitivista. Trata-se, portanto, de uma teoria cognitivista que busca explicar os mecanismos internos que ocorrem na subjetividade do sujeito cognoscente (sujeito que conhece) quando interage com o objeto cognoscível (objeto que se deixa conhecer), para construir conhecimento.

Para Ausubel, apud Jesus (1999) aprendizagem implica:

> […] organização e integração do material na estrutura cognitiva e esta é entendida como corpo de conhecimento estabelecido, organizado hierarquicamente e adquirido de forma cumulativa (p. 8).

Ao afirmar a estrutura cognitiva como "corpo de conhecimento, organizado hierarquicamente" Ausubel deixa clara a ordenação existente na estrutura cognitiva, ou seja, os conhecimentos que o sujeito possui sobre o assunto, com predominância dos mais recentes sobre os mais antigos, resultando numa hierarquização conceitual. Essa forma de tratar o conhecimento, como um sistema hierarquicamente organizado, inspirou Novak a criar mapas conceituais.

No mapa conceitual só estarão representadas as "proposições relevantes" do conhecimento, isto é, os atributos comuns a todos os elementos conceituados. Isso naturalmente tratará o conceito na sua extensão, ou seja, indicará cada elemento do conjunto de elementos caracterizados pelo conceito.

A idéia de "proposição relevante", ou atributos comuns, presente na definição de mapa conceitual está, também, na definição de aprendizagem significativa dada por Ausubel, Novak e Hanesiam (1980):

> […] a aprendizagem será significativa se as idéias expressas simbolicamente (por exemplo, em uma frase) forem

> relacionadas às informações relevantes, previamente adquirida pelo aprendiz (p. 47).

Essas informações prévias do aprendiz podem ser evocadas por uma imagem mental do objeto, um símbolo, um conceito ou uma proposição.

Ausubel, em sua teoria, enfatiza que as estruturas cognitivas só darão suporte ao novo conhecimento, se forem construídas de forma significativa, isto é, se forem fruto de relações que o aprendiz for capaz de estabelecer a partir de suas ações sobre o objeto.

Ausubel, Novak e Hanesiam (1980) enfatizam a necessidade de “detectar” a estrutura cognitiva que o aprendiz já tem construída para que possa assimilar os novos conhecimentos. Nas palavras desses autores:

> Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diríamos: o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isto e ensine-o de acordo (p. 137).

Isso remete o professor a um trabalho de mapeamento das idéias, dos conceitos, das proposições disponíveis na mente do aprendiz.

A recomendação de Ausubel para que ocorra uma aprendizagem significativa é a necessidade de se adequar à metodologia a ser utilizada pelo professor, ao que “o aprendiz já sabe”, ou seja, considerar a etapa de desenvolvimento cognitivo em que ele se encontra.

1.7 Teoria de Ausubel

Ausubel ressalta, em sua teoria, a aprendizagem significativa como resultado de um processo de interação de uma nova informação com conhecimentos prévios do aprendiz, presente em sua estrutura cognitiva. Neste processo a nova informação interage com o “conceito subsunçor” que é representado por uma idéia, um conceito, uma proposição já existente na estrutura cognitiva, e que serve de “ancoradouro” ao novo conhecimento que está sendo construído pelo indivíduo de acordo com suas possibilidades cognitivas. Se o indivíduo possui subsunçores capazes de “ancorar” as novas informações, então a aprendizagem é dita significativa. Nas palavras de Ausubel, Novak, Hanesian (1980):

> […] a aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma, não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder (p. 23)

Nessa definição, fica explícito, segundo estes autores, que a aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para esta aprendizagem – ou seja, uma disposição para relacionar, […] o novo material à sua estrutura cognitiva (p. 34), assim, o indivíduo tem participação ativa no processo de aprendizagem, pois, é ele quem busca relacionar a nova informação aos conhecimentos já existentes em sua estrutura cognitiva, isto explica a maneira não arbitrária a que Ausubel faz referência. Conforme Ausubel, Novak, Hanesian (1980):

> a aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para a aprendizagem significativa – ou seja, uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva o novo material a sua estrutura cognitiva (p. 34).

Além disso, ao relacionar a nova informação aos conhecimentos já existentes em sua estrutura cognitiva, o indivíduo estabelece uma nova proposição que é o conhecimento por ele construído, segundo suas possibilidades cognitivas, isto explica a relação substantiva (não literal) a que Ausubel se refere na definição de aprendizagem significativa. Como exemplo disso, temos na criança de meses de nascida que deseja pegar a bonequinha do seu móbile acima de sua cabeça, porém, fora do seu alcance. Esta criança já possui em sua estrutura cognitiva os esquemas[5] de pegar, de preensão e de puxar, então, ela combina esses três esquemas e consegue pegar, prender e puxar o cordão que pende do móbile e, assim, colocar a bonequinha ao seu alcance que agora passa a ser um novo esquema por ela dominado, ou seja, o de aproximar.

A aprendizagem mecânica, ou automática, segundo Ausubel, é aquela que ocorre sem apoiar-se em conceitos subsunçores, isto é, a nova informação é apenas "armazenada" sem interagir com os conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo, isto é, a nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal. Como exemplo de aprendizagem mecânica, em matemática, podemos citar a memorização do procedimento para a "resolução de equações do 1º grau", sem compreensão das propriedades que explicam cada passo deste procedimento.

Quando a aprendizagem mecânica é requerida, na forma de memorização, por exemplo, das tabuadas, é necessário que seja precedida de uma compreensão de construção dos fatos fundamentais, a fim de que o indivíduo recorra a esta construção quando falhar a memória. Neste caso, mesmo sendo mecânica, a aprendizagem tem uma conotação significativa. Ausubel, não considera dicotômicas as aprendizagens significativa e mecânica, diferenciando-as pela posição que ocupam em um *continuum*. Por exemplo, a memorização do teorema

[5] Esquema é tudo que é generalizável em uma ação. Como exemplo a criança que construiu o esquema de pegar generalizá-o para, pegar uma cadeira, pegar um brinquedo, pegar a água que sai da torneira, "pegar" o vento,…

de Pitágoras em seu produto final é uma aprendizagem mecânica, e está em um nível de aprendizagem menos elevado que a demonstração deste teorema, em que se recorre a conhecimentos geométricos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, o que caracteriza uma aprendizagem significativa mais consolidada.

Ausubel define aprendizagem por recepção ou aprendizagem receptiva, como aquela em que se apresenta ao aprendiz, apenas, o produto final do que deve ser aprendido. Em contraposição a esta aprendizagem, a aprendizagem por descoberta é aquela em que o aprendiz participa do processo de construção do conhecimento. Entretanto, a aprendizagem por descoberta só será significativa se o aprendiz possuir conceitos subsunçores em sua estrutura cognitiva que “ancorem” as novas descobertas. Portanto, tanto a aprendizagem receptiva quanto a aprendizagem por descoberta podem ser significativas, o que fica demarcado pela existência, ou não, de subsunçores ancorando os novos conhecimentos.

A aprendizagem receptiva é a mais utilizada na escola, talvez, por ser a menos laboriosa. Mas isto não significa que tal aprendizagem seja menos importante que a aprendizagem por descoberta, uma vez que, como comentamos anteriormente, a aprendizagem receptiva pode ser significativa. Exemplo disto temos quando o aluno utiliza uma propriedade matemática, não demonstrada por ele, mas que compreendeu (daí poder aplicá-la), pois tinha em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados.

Por outro lado, a aprendizagem por descoberta poderá não ser significativa, como acontece com os cálculos realizados, por exemplo, pelos feirantes que não apóiam suas descobertas em subsunçores (matemáticos) que, presumivelmente, não estão presentes em sua estrutura cognitiva.

2. Trabalhos correlatos ao tema da presente pesquisa

O presente trabalho teve como tema central o estudo das concepções do professores de Matemática sobre o Ensino de Álgebra, à luz das concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995) e das abordagens sobre o ensino de Álgebra, apontadas pelas autoras Bednarz, Kieran e Lee (1996). Assim, apresentaremos nesse capítulo estudos relacionados ao tema dessa pesquisa.

Yamada (1997), em sua pesquisa, discute o ensino de Álgebra no que se refere às principais dificuldades que ocorrem nos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos, a partir da ótica de professores de Matemática. Yamada inicia o estudo com o resgate da sua própria trajetória. Questões como: por que os alunos têm dificuldades em aprender Álgebra? Por que os professores encontram dificuldades no ensino de Álgebra? Por que as dúvidas e erros dos alunos têm sido as mesmas em Álgebra, no decorrer dos anos? Tais questionamentos levaram-na a investigar a seguinte questão: Como os professores aprenderam a Álgebra que ensinam?

Na fundamentação teórica a autora apresenta também a história do ensino da Matemática hoje e percorre a história do ensino da Álgebra mostrando as mudanças ocorridas no ensino da Álgebra no Brasil, o grande destaque que a Álgebra tem na escola elementar e, conseqüentemente, a grande preocupação com o ensino dessa área da Matemática, atualmente.

O estudo de Usiskin (1995) sobre as concepções de Álgebra também é apresentado, já que o conceito de variável é considerado essencial para o ensino de Álgebra.

Ao discutir os erros dos alunos, em Álgebra, é apresentada uma lista dos erros mais comuns que foi elaborada, em 1990, em uma reunião para planejamento escolar da 12ª Delegacia de Ensino de São Paulo. São enumerados trinta erros comuns que foram observados nos alunos quando estudam Álgebra. Em alguns dos erros citados fica clara a falta de domínio do conceito de variável, bem com o fato dos alunos não conseguirem operar termos algébricos. Por fim, são citadas algumas atividades que podem corrigir ou não permitir que os alunos cometam tais erros.

Para investigar as dificuldades dos professores no ensino de Álgebra foi escolhida uma abordagem qualitativa. E os dados foram coletados utilizando análise documental, questionário e entrevista coletiva.

A escola selecionada para esse estudo foi escolhida pelo fato da pesquisadora ter sido professora por dezenove anos em tal instituição. A escola possui treze professores de Matemática que foram os sujeitos da pesquisa.

Foi aplicado um questionário contendo cinco questões abertas junto a dez professores da escola selecionada. Como os professores ministravam aulas na mesma escola, foram realizadas entrevistas coletivas durante as reuniões de área, onde foram discutidas as perspectivas dos professores, suas dificuldades e sua visão sobre o ensino de Álgebra.

Com base nos resultados obtidos, Yamada pôde constatar que as concepções dos professores influenciam suas aulas quanto a escolha do livro didático e a metodologia utilizada.

Yamada ressalta que o ensino de Álgebra tem e terá uma destacada posição devido a crescente matematização da sociedade, fazendo-se necessário tornar o ensino de Álgebra mais significativo e menos monótono. Muitas vezes é necessário que os alunos 'visualizem' as situações algébricas, como por exemplo, com a utilização de balanças, de valores numéricos,…

Yamada conclui que há uma urgente necessidade de revisão na formação do professor atendendo, assim, as novas mudanças de valores da sociedade, o que é um desafio com a atual desvalorização da educação e do professor como profissional.

Assim, como Pinto (1999), Yamada também explicita a importância da formação continuada do professor em serviço, ao citar Freire (1993, apud YAMADA, 1997), ao dizer:

> A responsabilidade ética, política e profissional do ensinante lhe coloca o dever de se preparar, de se capacitar, de se formar antes mesmo de iniciar sua atividade docente. Esta atividade exige que sua preparação, sua capacitação, sua formação se tornem processos permanentes. Sua experiência docente, se bem percebida e bem vivida, vai deixando claro que ela requer uma formação permanente do ensinante. (pg. 62)

Outro trabalho encontrado, também relacionado ao nosso tema de pesquisa, foi o de Pinto (1999), que em sua pesquisa, teve como objetivo investigar as concepções de Álgebra e de educação algébrica que eram dominantes entre professores de Matemática. Sua investigação buscou relacionar as concepções dos professores e sua prática em sala de aula no momento de ensinar Álgebra, ou seja, questionou se a forma do professor "ver" a Álgebra determina a sua forma de ensinar.

No estudo das concepções, é também adotada a proposta de Usiskin (1995) que associa o ensino da Álgebra elementar com a compreensão do significado das letras, das operações realizadas com tais letras. Assim, Usiskin considera quatro concepções, que são: a Álgebra como aritmética generalizada, como um estudo de procedimentos para resolução de problemas, como um estudo de relações entre grandezas, e como um estudo das estruturas da Matemática. Pinto justificou a adoção desse estudo de Usiskin, em sua pesquisa, por acreditar que parte de elementos internos aos conteúdos e atividades da Matemática.

Cita também os autores Lins e Gimenez (1997) no estudo sobre concepções de educação algébrica. Estes autores sugerem que as atividades algébricas desenvolvidas atualmente por professores de Matemática podem ser classificadas entre as três seguintes concepções de educação algébrica: concepções letristas, concepções letrista-facilitadoras e as concepções de modelagem Matemática.

As concepções letristas determinam atividades algébricas que se configuram como cálculo letrista. Segundo Lins e Gimenez (1997, apud PINTO, 1999) muitos dos livros didáticos estão “impregnados” dessa concepção, bem como muitos currículos de Matemática; e também conduz a prática pedagógica de muitos professores que concebem a atividade algébrica como, apenas, manipulação de letras para a resolução de problemas.

Nas concepções letrista-facilitadoras, a Álgebra é vista com um alto grau de abstração sendo, então, necessário utilizar situações facilitadoras que tornem o ente algébrico mais concreto, facilitando, desta forma, sua compreensão.

A última concepção, da modelagem Matemática, sugere que o estudo da Álgebra tenha como ponto de partida a realidade dos alunos. O professor deve considerar as situações da realidade dos alunos e “produzir conhecimento algébrico”. Dessa forma, os objetos algébricos são ferramentas que explicam, organizam,… a realidade. E assim, os alunos desenvolvem a capacidade e a habilidade de resolver problemas, investigar e explorar situações; tematizar situações e desenvolver diferentes modos de produzir significados para tais situações; aprimorar o uso da Aritmética e da Álgebra como ferramentas.

No referencial teórico, Pinto discute a perspectiva sócio-histórica do conhecimento, citando Lefebvre (1991), e também sobre o significado da atividade algébrica, tendo Vigotsky (1993) como referência.

Para investigar as concepções de Álgebra e educação algébrica dos professores de Matemática, Pinto optou por uma abordagem qualitativa, mas também considerou aspectos quantitativos dos dados obtidos. Foram utilizados dois instrumentos: questionários e entrevistas.

Em um primeiro momento, foram aplicados questionários que visavam colher informações iniciais sobre as concepções de trinta e seis professores participantes da pesquisa. No segundo momento, foram realizadas entrevistas, com sete professores participantes do primeiro momento, com a intenção de aprofundar questões que foram respondidas no questionário.

Na análise dos dados coletados Pinto constata que os professores investigados manifestam a concepção de Álgebra como meio de resolver problemas matemáticos.

Foram estabelecidos dois grupos de professores: os que possuem uma concepção limitada do conhecimento algébrico e o grupo dos professores que possuem uma concepção ampla desse conhecimento.

Do primeiro grupo concluiu-se que os professores dão preferência ao desenvolvimento de atividades algébricas letrista-facilatoras, ou seja, utilizam situações facilitadoras que tornam o ente algébrico mais concreto. De acordo com Pinto, essa preferência dos professores acarreta um ensino pouco significativo para o aluno.

No segundo grupo, o dos professores que possuem uma visão mais ampla da Álgebra, é proporcionado um ensino mais significativo, tais professores desenvolvem atividades que focam o aprendizado da linguagem articulada ao desenvolvimento do pensamento, mas não são atividades que retratam a realidade do seu aluno.

Também foi verificado que todos os professores pesquisados não tiveram uma boa experiência com Álgebra, quando foram alunos. Tais professores destacaram que durante a formação específica (nos cursos de licenciatura) foi dada pouca ênfase às disciplinas pedagógicas e uma ênfase exagerada às disciplinas matemáticas, assim acarretando em uma formação em Matemática dissociada dos seus processos de ensino e aprendizagem.

Nas entrevistas, todos os sujeitos da pesquisa consideram que o ensino de Álgebra não é adequado a uma aprendizagem significativa para o aluno e assumem uma parcela de culpa por esse fato. Apenas em um sujeito da pesquisa, foi percebida uma mudança de concepções e de atitudes em relação ao ensino de Álgebra, uma maior preocupação em propiciar um ensino significativo para os seus alunos. Pinto ressalta que este sujeito foi o único que declarou participar de cursos para a 'formação em serviço', e isso foi decisivo para uma mudança nas suas concepções e práticas em sala de aula.

Outra pesquisa também relacionada com o nosso estudo é a realizada por Lellis (2002). Essa pesquisa trata do conhecimento matemático do professor de Matemática, discutindo sobre a formação do professor em relação ao conhecimento matemático como também, sobre o a relação do conhecimento matemático do professor e a tarefa de ensinar Matemática.

Segundo Thompson (1997, apud LELLIS, 2002), há uma forte correlação entre as concepções do professor sobre a Matemática e sua atuação (atitude) na sala de aula, inspirado nessa afirmação, Lellis buscou detectar como os professores vêem objetos matemáticos que fazem parte do ensino de Matemática.

Na pesquisa são apresentados trabalhos que abordam a atuação do professor e alguns depoimentos que indicam dificuldades no conhecimento matemático dos professores. Um dos estudos citados por Lellis (2002) é o de Lorenzato (1993, apud LELLIS, 2002) realizado com 1.188 professores dos Ensinos Fundamental e Médio de algumas nações latino-americanas, entre elas o Brasil. Nesse estudo, Lorenzato avaliou o conhecimento do professor relativo a alguns "por quês?" em Matemática. Para isso, foi requerido dos professores a explicação de algumas questões como: "Por que não dividir por zero?, Por que a área do losango é dada pela fórmula $A = \frac{d.D}{2}$?, Por que, na divisão de duas frações, multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda?” (LORENZATO, 1997 apud LELLIS, 2002, p. 14). Nas questões apresentadas houve somente 5% de acertos, resultado que, para Lellis (2002), mostra uma carência de “sólidos conhecimentos” da disciplina devida, “em grande parte, à deficiência nos cursos de licenciaturas” (p. 15).

Lellis (2002) afirma que os problemas relativos ao conhecimento matemático do professor, não se resumem apenas a falta de tal conhecimento, mas também, “envolvem elementos qualitativos, concepções ou formas de conhecer a matemática (p. 22).

O autor aponta que as concepções de Matemática do professor influenciam o ensino da mesma e para estudar tais concepções, apresenta um levantamento sobre os cursos de formação dos professores de Matemática (cursos de licenciaturas em Matemática), no Brasil, nos últimos anos. Lellis observa elementos problemáticos no conhecimento de Matemática do professor que são, segundo o autor, provenientes de limitações na compreensão da Matemática. Esses elementos são observados em professores que oriundos de licenciaturas considerados de alto nível, como também de licenciaturas com pretensões mais modestas. De acordo com o autor, tais elementos problemáticos independem da quantidade de saberes matemáticos, mas sim, das concepções de Matemática, da forma que o professor a compreende.

Assim, Lellis (2002), propõe um perfil desejável para os cursos de licenciatura em Matemática, que é a formação básica do professor. São propostas alguns métodos de ensino e aprendizagem, como a resolução de problemas, modelagem, a utilização de livros paramatemáticos.

Lellis reforça a necessidade da construção da identidade individual e profissional do professor de Matemática de forma a favorecer a educação como um todo.

3. Metodologia e Procedimentos Metodológicos

3.1 Tipo de Pesquisa

Como pretendíamos analisar as concepções do professor de Matemática sobre o ensino de Álgebra, à luz das concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995) e das abordagens sobre o ensino de Álgebra, apontadas pelas autoras Bednarz, Kieran e Lee (1996), optamos por realizar uma pesquisa descritiva, definida por Gil (1991) como se segue: “As pesquisas descritivas têm por objetivo primordial […] o estabelecimento de relações entre variáveis” (p. 46).

Visto que o nosso objetivo foi investigar as concepções dos professores em relação ao ensino de Álgebra, essa pesquisa se configurou como uma investigação cujos dados foram fornecidos pelos professores através dos instrumentos de coleta de dados, questionário e mapa conceitual, aos quais foi dado um tratamento qualitativo e quantitativo. Na análise qualitativa os dados foram interpretados de forma discursiva, considerando a subjetividade das respostas dos professores participantes da pesquisa. Esses mesmos dados foram analisados quantitativamente para posterior comparação entre as conclusões das análises qualitativa e quantitativa. Caracterizando a pesquisa qualitativa pela aplicação dos instrumentos de coleta de dados, Lüdke e André (1986, apud PINTO 1999) afirmam:

> As pesquisas cujos resultados baseiam-se em dados descritivos são denominadas qualitativas e caracterizam-se por envolver dados […] obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes (p. 69).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), “os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre” (p. 48). Assim, pode-se melhor compreender as concepções dos professores sobre o ensino de Álgebra, quando são levados em consideração suas crenças, valores e percepções.

Na pesquisa qualitativa todos os dados da realidade são considerados importantes. Assim, o investigador deve ter em mente que nada da situação estudada deverá ser considerado trivial, mas sim que qualquer elemento pode ser uma pista para compreender melhor o objeto estudado.

Caracterizando a pesquisa quantitativa consideramos o que destaca Minayo (1997, p. 23), quando afirma que está “no cerne da defesa do método quantitativo [as condições] para explicarmos [as nuances] da realidade, [assim] a linguagem das variáveis oferece a possibilidade de expressar generalizações com precisão e objetividade”. Analisamos as respostas dos professores às questões formuladas no questionário, e suas idéias sobre o ensino de Álgebra registradas nos mapas conceituais, por eles construídos, buscando compreender suas concepções sobre o ensino de Álgebra.

Os dados recolhidos não são para confirmar ou refutar hipóteses definidas previamente, mas que supomos poderão ocorrer segundo uma das possibilidades apontadas a seguir: o professor de Matemática considera que nas abordagens para o ensino de Álgebra deve-se trabalhar situações-problema cujas soluções denotam a Álgebra:

- como Aritmética generalizada;

ou

- como procedimentos;

ou

- como relações entre grandezas;

ou

- como estrutura algébrica;

ou

- como duas ou três das concepções anteriores;

ou ainda

- como a concebeu Usiskin contemplando as quatro concepções: Aritmética generalizada, procedimentos, relações entre grandezas, estrutura algébrica.

Os investigadores qualitativos se interessam em compreender como as pessoas dão sentido às suas vidas, em apreender as perspectivas dos participantes. E para isso, é necessário que o registro dos dados seja o mais rigoroso possível. Para tanto as perguntas que compuseram o questionário foram formuladas visando obter dados que possibilitassem ao pesquisador concluir sobre as concepções dos professores, participantes da pesquisa, sobre o ensino de Álgebra. Isto foi complementado com as interpretações dos mapas conceituais por eles construídos a partir da expressão-chave: “Ensino de Álgebra”.

3.2 População

Os sujeitos envolvidos nesta pesquisa foram 28 professores que atuam nos níveis de Ensino Fundamental e Médio, cujas características serão descritas a seguir.

3.2.1 Caracterização da população

As questões de 1 a 6 do questionário (descrito no item 3.3.1), aplicado aos 28 professores, levantaram informações que objetivou caracterizá-los quanto a:

- gênero;
- informações profissionais, como: grau que leciona, número de aulas que ministra por semana, tempo de serviço no magistério e tipo de escola em que trabalha;
- tipo de aula que ministra.

Os dados que caracterizaram os professores foram tabulados e analisados como se segue:

Na tabela 1, estão registrados os dados relativos ao gênero dos professores pesquisados.

Tabela 1: Gênero dos professores

Gênero	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Masculino	12	42,86
Feminino	16	57,14

Analisando os dados da tabela 1, verificamos que os 28 professores, em relação ao gênero, estão assim distribuídos:

- 12 são do sexo masculino;
- 16 são do sexo feminino.

Na tabela 2 estão registrados os dados relativos ao(s) grau(s) de ensino que os professores lecionavam no ano de execução desta pesquisa (2005)

Tabela 2: Grau(s) de ensino em que o professor leciona

Grau de ensino	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Ensino Fundamental	12	42,86
Ensino Médio	9	32,14
Ensino Fundamental e Médio	7	25

Nos dados da tabela 2, observamos que, dos 28 professores:

- 12 atuam em classes do Ensino Fundamental;
- o restante, dos professores, atua em classes do Ensino Médio (9) ou dos Ensinos Fundamental e Médio (7).

Na tabela 3, estão mostrados os dados relativos ao número de aulas semanais ministradas pelos professores.

Tabela 3: Número de aulas ministradas, por semana, pelos professores

Número de aulas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Até 10 aulas	2	7,14
11 – 20 aulas	3	10,71
21 – 30 aulas	14	50
31 – 40 aulas	8	28,58
Mais de 40 aulas	1	3,57

Analisando os dados da tabela 3 concluímos que, dos 28 professores:

- 14 ministram de 21 a 30 aulas por semana;
- no restante, sobressaem-se os professores que ministram de 31 a 40 aulas semanais (8).

Na tabela 4 estão registrados os tipos de escolas em que os professores participantes desta pesquisa lecionam.

Tabela 4: Tipos de escolas em que os professores lecionam

Tipo de escola	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Escola Municipal e Estadual	2	7,14
Escola Estadual	24	85,72
Escola Particular e Estadual	2	7,14

Analisando os dados da tabela 4, concluímos que, dos 28 professores:

- 24 só lecionam em Escola Estadual;
- 4 ensinam em Escolas mistas, sendo: 2 em Escolas Municipal e Estadual; e 2 em Escolas Particular e Estadual.

Na tabela 5, está registrado o número de anos de exercício no magistério dos professores pesquisados.

Tabela 5: Anos de exercício no magistério dos professores

Nº de anos no magistério	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Até 10 anos	13	46,43
11 –20 anos	8	28,57
21 – 30 anos	7	25

Analisando os dados da tabela 5, concluímos que, dos 28 professores:

- 13 têm, no máximo, 10 anos de exercício no magistério;
- o restante, dos professores, possui 11 a 20 anos de magistério (8) e entre 21 a 30 anos (7).

Na tabela 6, estão registrados os tipos de aulas ministradas pelos professores.

Tabela 6: Tipos de aulas

Tipos de aulas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Aula expositiva	12	42,86
Aula contextualizada[11]	15	53,57
Aula dialogada	1	3,57

Analisando os dados da tabela 6, verificamos que os tipos de aulas ministradas pelos 28 professores, segundo declararam, são:

- 13 ministram aulas do tipo expositiva;
- 15 ministram aulas do tipo contextualizada;

[11] Os professores consideram aula contextualizada quando utilizam aspectos figurativos: situações do cotidiano do aluno, desenhos, leitura de jornais, figuras geométricas, etc.

- 1 ministra aula do tipo dialogada.

As características que mais se evidenciaram nessa população de professores foram:

Professores de ambos os gêneros que atuam em classes do Ensino Fundamental da rede Estadual, ministrando entre 21 a 30 aulas semanais do tipo expositiva ou contextualizada, que têm, no máximo, 10 anos no exercício do magistério.

3.3 Instrumentos de coleta de dados

Para relacionar as concepções de professores dos Ensinos Fundamental e Médio da rede pública de São Paulo acerca do ensino de Álgebra, os instrumentos de coleta de dados que utilizamos na pesquisa foram questionário e mapa conceitual, como já mencionamos, os quais passaremos a descrever.

3.3.1 Questionário

O questionário foi aplicado com o objetivo de coletar dados que caracterizaram o professor e que nos permitiram conhecer suas concepções sobre o ensino de Álgebra.

As questões de 1 a 6 levantaram dados que caracterizaram o professor quanto a:

- gênero;

- informações profissionais, como: grau que leciona, números de aulas que ministra por semana, tempo de serviço no magistério e tipo de escola em que trabalha;
- tipo de aula que ministra.

Consideramos importante caracterizar o professor segundo estes fatores sócio-econômicos, de gênero e profissional, pois, serviram para concluirmos que fatores externos, ou “fatores locais”, segundo Artigue e Duroux, podem influenciar as concepções do professor sobre o ensino de Álgebra.

Na questão 7, o professor escreveu palavras que vinham à sua mente, relacionadas ao ensino de Álgebra. Nesta questão, o professor explicitou os conhecimentos que detém, ou conhecimentos prévios, segundo Ausubel, sobre o ensino de Álgebra. Na questão 8, o professor deveria construir um esquema gráfico, ou mapa conceitual, organizando as palavras que escreveu na questão anterior. Buscamos com este mapa conceitual, verificar quais os conceitos e proposições relevantes que tem o professor sobre o ensino de Álgebra.

As questões 9 e 10 coletaram dados sobre a opinião do professor relativa a influência da linguagem formal da Álgebra e da história do desenvolvimento dos conceitos algébricos, nas dificuldades de aprendizagem dos alunos, nesta área do conhecimento. Ao responder essas questões o professor explicitou “fatores intra-individuais”, segundo Haste, frutos de suas reflexões sobre os conceitos algébricos, os quais estão norteando suas concepções sobre o ensino de Álgebra.

As questões de 11 a 16 estão formuladas visando coletar dados sobre os conhecimentos do professor acerca das concepções de Álgebra apresentadas por Usiskin (1995), embora isto não esteja explicitado nas questões. A análise destas questões mostrou que concepções tem o professor sobre o ensino de Álgebra, uma vez que pretendeu-se analisar suas respostas à luz das concepções de

Álgebra apresentadas por Usiskin (1995) comparando-as, também, com as abordagens de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (1996).

As questões 17 e 18 revelaram se o professor diferenciava as situações-problema que exigem soluções só algébricas das que poderão ter soluções aritméticas ou algébricas. Nessas questões o professor evidenciou seus conhecimentos sobre a natureza dos entes algébricos, que são generalizações, enquanto os entes aritméticos são particulares.

Relacionando todos os dados coletados pelo questionário, concluímos sobre as concepções que tem os professores pesquisados sobre o ensino de Álgebra, o que respondeu ao questionamento que deu origem a esta pesquisa.

Para analisar as respostas dadas às questões de 9 a 18, utilizamos o software C.H.I.C. (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva), que possibilitou o estabelecimento de relações entre tais repostas. O programa C.H.I.C. é uma ferramenta informática que possibilita o uso do método estatístico da análise implicativa desenvolvida por Régis Grãs e da análise de similaridade de Israel César Learman. O software C.H.I.C. teve sua primeira versão desenvolvida por Saddo Ag Almouloud e que hoje se encontra em sua sexta versão trabalhada por Raphael Conturier.

O software C.H.I.C. tem como funções extrair de um conjunto de informações, cruzando sujeitos (ou objetos) e variáveis (ou atributos), regras de associação entre variáveis, fornecer um índice de qualidade de associação e de representar uma estruturação das variáveis.

Nessa pesquisa as variáveis são binárias, pois assumem unicamente dois valores, 0 ou 1, por exemplo, um sujeito ou é do gênero feminino (quando a variável “gênero feminino” assume o valor 1), ou não é gênero feminino (quando a variável “gênero feminino assume o valor 0). O software C.H.I.C. estabelece uma distinção entre as variáveis principais e suplementares (ou secundárias). As variáveis principais, nessa pesquisa, são as variáveis relacionadas às concepções sobre Álgebra dos professores pesquisados e as variáveis suplementares (ou secundárias) são as descritivas, e não interferem no cálculo das contribuições das categorias.

Os tratamentos de dados disponibilizados pelo C.H.I.C. são: a árvore coesitiva, o grafo implicativo e a similaridade (que utilizamos nessa pesquisa).

Com a utilização do software C.H.I.C. foi realizada uma análise hierárquica de similaridade, o que permitiu estudar e interpretar classes de variáveis.

A similaridade se define a partir do cruzamento do conjunto V das variáveis (nessa pesquisa, são as respostas dadas ao questionário) e um conjunto E de sujeitos (nessa pesquisa, são 28 professores participantes).

Para a utilização do programa C.H.I.C. nesse trabalho, as respostas dadas pelos professores às questões formuladas, no questionário, foram codificadas. As respostas dadas às questões de 1 a 6 (que visam à caracterização dos sujeitos participantes da pesquisa) foram admitidas como variáveis suplementares.

As respostas das questões de 9 a 18 (que formam o conjunto V de variáveis) foram categorizadas tendo como critério as concepções de Álgebra citadas por Usiskin (1995). Tais variáveis foram codificadas da seguinte forma:

Na questão 9:

9. A exigência da linguagem formal no estudo de Álgebra é um dos fatores que explica a diminuição do interesse dos alunos por Álgebra. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Observa-se que os professores, nessa questão, tinham a possibilidade de concordar, concordar parcialmente, discordar, ou ainda não responder. Sendo assim, as variáveis binárias são:

1	09 Concordo	Concordo - a exigência da linguagem formal no estudo de Álgebra é um dos fatores que explica a diminuição do interesse dos alunos por Álgebra
2	09 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - a exigência da linguagem formal no estudo de Álgebra é um dos fatores que explica a diminuição do interesse dos alunos por Álgebra
3	09 Discordo	Discordo - a exigência da linguagem formal no estudo de Álgebra é um dos fatores que explica a diminuição do interesse dos alunos por Álgebra
4	09 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 10:

10. Conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos permite compreender melhor as dificuldades dos alunos ao estudar Álgebra.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

As variáveis são:

5	10 Concordo	Concordo - Conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos permite compreender melhor as dificuldades dos alunos ao estudar Álgebra
6	10 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - Conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos permite compreender melhor as dificuldades dos alunos ao estudar Álgebra
7	10 Discordo	Discordo - Conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos permite compreender melhor as dificuldades dos alunos ao estudar Álgebra
8	10 Não respondeu	Não respondeu

11. A Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Na questão 11:

As variáveis binárias são:

9	11 Concordo	Concordo - A Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa.
10	11 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - A Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa.
11	11 Discordo	Discordo - A Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa.
12	11 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 12:

12. Os problemas de Álgebra devem sempre partir de situações particulares para depois serem generalizados. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

As variáveis binárias são:

13	12 Concordo	Concordo - Os problemas de Álgebra devem sempre partir de situações particulares para depois serem generalizados.
14	12 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - Os problemas de Álgebra devem sempre partir de situações particulares para depois serem generalizados.
15	12 Discordo	Discordo - Os problemas de Álgebra devem sempre partir de situações particulares para depois serem generalizados.
16	12 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 13:

13. O estudo de Álgebra reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

As variáveis binárias são:

17	13 Concordo	Concordo - O estudo de Álgebra reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações.
18	13 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - O estudo de Álgebra reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações.
19	13 Discordo	Discordo - O estudo de Álgebra reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações.
20	13 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 14:

14. Os problemas de Álgebra podem ser resolvidos considerando apenas resoluções numéricas. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

As variáveis binárias são:

21	14 Concordo	Concordo - Os problemas de Álgebra podem ser resolvidos considerando apenas resoluções numéricas.
22	14 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - Os problemas de Álgebra podem ser resolvidos considerando apenas resoluções numéricas.
23	14 Discordo	Discordo - Os problemas de Álgebra podem ser resolvidos considerando apenas resoluções numéricas.
24	14 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 15:

15. Alguns problemas de Álgebra podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos ou algoritmos. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

As variáveis binárias são:

25	15 Concordo	Concordo - Alguns problemas de Álgebra podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos ou algoritmos.
26	15 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - Alguns problemas de Álgebra podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos ou algoritmos.
27	15 Discordo	Discordo - Alguns problemas de Álgebra podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos ou algoritmos.
28	15 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 16:

16. Os problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

As variáveis binárias são:

29	16 Concordo	Concordo - Os problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas.
30	16 Concordo Parcial	Concordo Parcialmente - Os problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas.
31	16 Discordo	Discordo - Os problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas.
32	16 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 17:

17. Um professor apresentou o seguinte problema aos seus alunos:
"Prove que a soma de dois números impares é um número par."
Dois alunos apresentaram as seguintes soluções:

Aluno 1:

3 + 5 = 8

9 + 3 = 12

11 + 7 = 18

13 + 15 = 28

99 + 123 = 222

Assim, somando dois números ímpares sempre teremos um número par.

Aluno 2:

Com n, n' $\in$ N

(2n + 1) + (2 n' + 1) =

= 2n + 1 + 2 n' + 1 =

= 2n + 2n' + 2 =

= 2 [(n + n') + 1] = 2 n"

Com (n + n' + 1= n") $\in$ N,

então 2n" é um número par.

Quem errou? Quem acertou?

As variáveis binárias são:

33	17 AL1	Apenas o aluno 1 acertou
34	17 AL2	Apenas o aluno 2 acertou
35	17 AL12	Os dois alunos acertaram
36	17 NAL12	Nenhum dos alunos acertou
37	17 Não respondeu	Não respondeu

Na questão 18:

<table>
<tr><td>
18. Um professor propôs o seguinte problema aos seus alunos:

O perímetro de um triângulo mede 27cm. As medidas dos lados são expressas por três números inteiros e consecutivos. Quais são as medidas dos lados do triângulo?

Um aluno resolveu a questão da seguinte forma:

Se todos os lados tivessem a mesma medida, então seria: 27 $\div$ 3 = 9. Assim , os lados mediriam 9cm, mas não seriam números inteiros consecutivos.
Os lados poderiam medir 9cm, 10cm, 11cm, mas o perímetro não seria 27cm, pois 9 + 10 + 11 = 30.
Se fosse 8cm, 9cm, 10cm, o perímetro seria 27cm, pois: 8 + 9 + 10 = 27.
Logo, as medidas dos lados são 8cm, 9cm e 10cm.

Você considera essa solução algébrica?
</td></tr>
</table>

As variáveis binárias são:

38	18 É uma solução algébrica	É uma solução algébrica
39	18 Não é uma solução algébrica	Não é uma solução algébrica
40	18 Não respondeu	Não respondeu

Após categorizarmos todas as respostas, foi realizada uma análise hierárquica de similaridade, com auxílio do software C.H.I.C.

Depois da análise das relações hierárquicas entre as variáveis realizamos a análise dos mapas conceituais (questões 7 e 8 do questionário), objetivando identificar quais conceitos algébricos são relevantes para os professores quando ensinam Álgebra. Efetuando um cruzamento entre os resultados das duas análises citadas pudemos ter indícios de quais concepções têm os professores de Matemática sobre o Ensino de Álgebra, que comentaremos no item a seguir.

3.4 Análise dos Dados da Pesquisa

Para discutir as informações dos professores obtidas no questionário foram feitas análises qualitativa e quantitativa dos dados relativos às suas concepções sobre o Ensino de Álgebra. Desta forma, pudemos concluir sobre quais eram as concepções dos professores quando ensinam Álgebra, comparando-as às concepções sobre Álgebra propostas por Usiskin (1995) e com as abordagens para o ensino de Álgebra enunciadas por Bednarz, Kieran e Lee (1996).

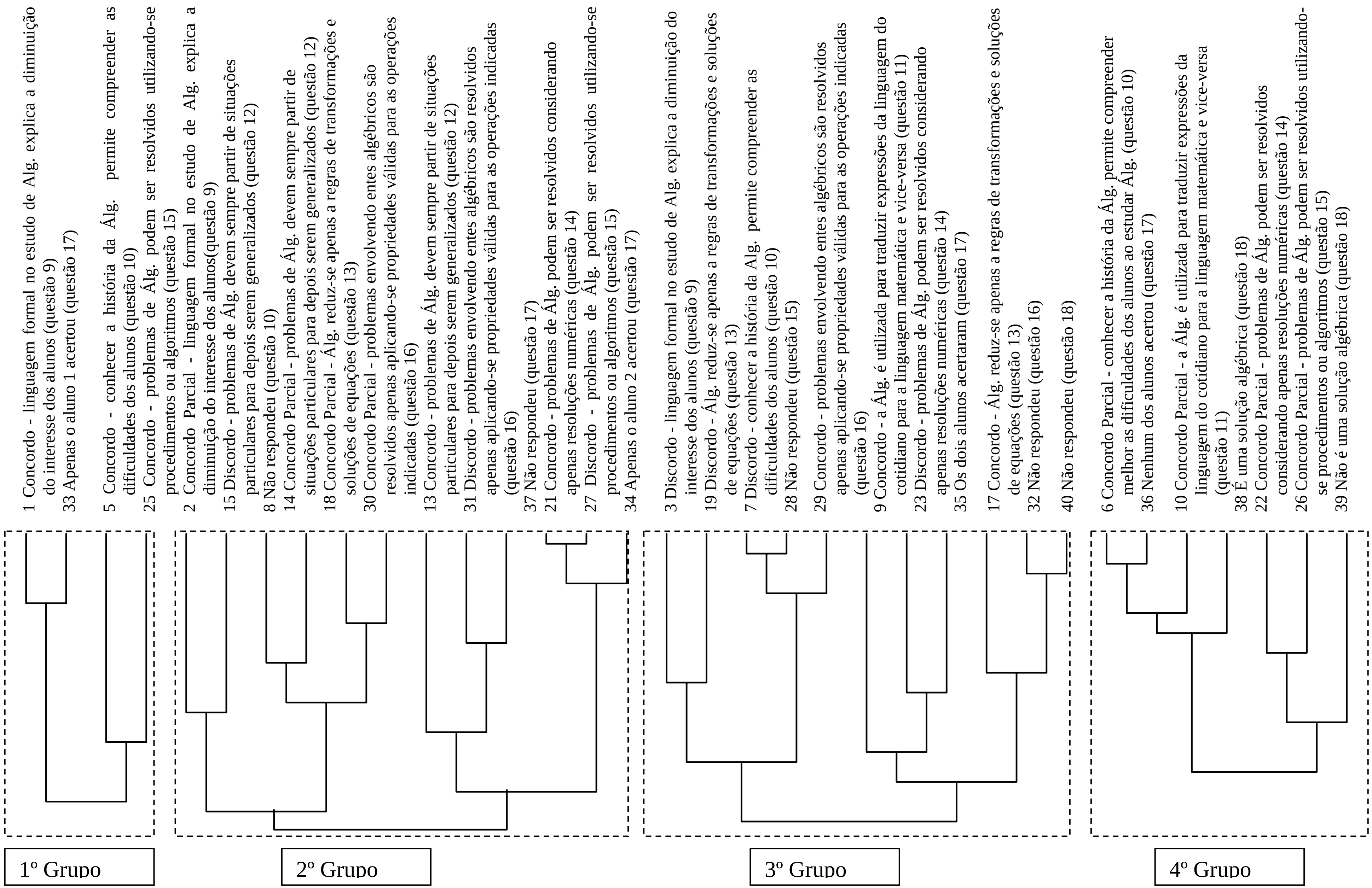
3.4.1 Análise Qualitativa dos Dados

a) Utilizando a árvore de similaridade do software C.H.I.C.

Para analisar qualitativamente as respostas dos professores ao questionário, utilizamos o software C.H.I.C. (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva). A aplicação do software C.H.I.C., nos permitiu traduzir graficamente em uma "árvore de similaridade" as semelhanças e diferenças entre as variáveis. Nessa "árvore de similaridade" pode-se visualizar quatro grupos (ou classes) de variáveis.

Lembramos que as variáveis não aparecem na “árvore de similaridade” quando não houver ocorrência das mesmas, como as variáveis 4, 11, 12, 16, 20 e 24

Árvore de similaridade



Na árvore de similaridade podemos observar quatro grupos (ou classes) de similaridade.

O *primeiro grupo* está composto por dois subgrupos, assim denominados: subgrupo 1.1 e subgrupo 1.2.

No subgrupo 1.1 (composto pelas varáveis 1 e 33), os professores são caracterizados por lecionarem em escolas estaduais e há, no máximo, 10 anos de exercício no magistério.

Esses professores concordam que "a linguagem formal, no estudo da Álgebra, explica a diminuição do interesse dos alunos" (questão 9) e também consideram correta a resolução aritmética (caso particular) onde seria necessária uma generalização (questão 17 do questionário: *Prove que a soma de dois números ímpares é um número par*). Como exemplos de justificativas para essas opiniões temos, respectivamente, as seguintes declarações dos professores:

- "a linguagem formal é para eles [alunos] sinônimo de algo que não está ao seu alcance, logo não é interessante."
- "o aluno 1 [que resolveu o problema, aritmeticamente] desenvolveu o problema de forma lógica e não há o que contestar."

Os professores desse subgrupo não apresentam nenhuma das concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995), tratando problemas algébricos como se fossem aritméticos. Não compreendem o ente algébrico como generalização.

Os professores do subgrupo 1.2 (composto pelas varáveis 5 e 25) lecionam no Ensino Fundamental, em Escolas Municipais e ministram de 21 a 30 aulas por semana.

Tais professores concordam com "a importância de conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos para a compreensão das dificuldades dos alunos ao estudarem Álgebra" (questão 10). Também concordam que "alguns problemas algébricos são resolvidos utilizando-se procedimento e algoritmos" (questão 15), como atestam as seguintes justificativas dos professores para esta questão:

- "Na resolução de problemas são utilizados algoritmos que permitem chegar à solução dos problemas".
- "[…] sim, pois poderia ajudar mais na compreensão".
- "Para tornar prática a solução do cálculo".
- "Sim, pois facilita o desenvolvimento do raciocínio do aluno nos conteúdos".

Neste subgrupo observamos a presença da concepção proposta por Usiskin (1995), Álgebra como um "estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas". Nas respostas dos professores desse grupo, nota-se a preocupação em facilitar a aprendizagem de seus alunos recorrendo aos algoritmos que, se não forem trabalhados adequadamente, no sentido da compreensão, poderão ser memorizados, recaindo em uma aprendizagem mecânica, segundo Ausubel. Isto pode ser interpretado das respostas dos professores deste grupo quando utilizaram em suas respostas à questão 15, expressões como: "são utilizados algoritmos", ou "para tornar prática a solução do cálculo", ou ainda "pois facilita o raciocínio", poderão enquadrar-se como "aprendizagem mecânica", segundo Ausubel. Isto acontecerá caso o aluno, apenas, memorize os procedimentos para resolver problemas, sem compreender as propriedades matemáticas aplicadas em cada etapa deste. O procedimento é apenas "armazenado", e tende a ser esquecido, ou a não se generalizar a problemas semelhantes (Polya, 1978); pois não foi compreendido, portanto, não se constituindo em um conceito subsunçor que o aprendiz utilizará para construir um novo conhecimento (Ausubel, Novak e Hanesian, 1978).

No *segundo grupo*, observam-se quatro subgrupos que denominamos: subgrupo 2.1, subgrupo 2.2, subgrupo 2.3 e subgrupo 2.4.

Constatamos que, no subgrupo 2.1 (composto pelas varáveis 2 e 15), os professores são do gênero feminino e lecionam em Escolas Estaduais de Ensino Fundamental.

Os professores cujas respostas compuseram esse subgrupo concordam parcialmente que “a linguagem formal não é o único fator que provoca o desinteresse do aluno por Álgebra” (questão 9), e, discordam que “os problemas algébricos devem sempre partir de casos particulares para depois serem generalizados” (questão 12). Assim, concluímos que tais professores consideram a existência de outras concepções da Álgebra além da concepção Álgebra como “Aritmética generalizada” ao explicitarem que o estudo da Álgebra nem sempre se dá a partir de casos particulares.

Os professores do subgrupo 2.2 (composto pelas varáveis 8, 14, 18 e 30) são caracterizados por serem do gênero masculino, lecionarem em Escolas Estaduais e terem, no máximo, 10 anos de exercício no magistério.

Esses professores não opinaram sobre a importância de “conhecer a história do desenvolvimento dos entes algébricos para compreensão das dificuldades dos alunos” (questão 10), alegam que assim o fizeram, por desconhecerem a história da Álgebra, como explica um professor:

- “Não posso opinar porque não conheço realmente. Apenas sei informações isoladas.”

Apesar dos professores desse subgrupo não conhecerem a história da Álgebra, percebem que muitos alunos apresentam dificuldades no estudo de Álgebra e em uma tentativa de amenizar tais dificuldades concordam parcialmente em introduzi-la como “Aritmética generalizada” (questão 12), como justifica um professor:

- “Devido à dificuldade inicial do aluno com o uso das letras, o estudo introdutório deve partir de exemplos numéricos.”

Nesse subgrupo 2.2, os professores concordam parcialmente que a Álgebra “reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações” (questão 13). As respostas com as quais justificaram a opção “concordo parcialmente” à questão 13, foram:

- “Nem sempre, às vezes é preciso aprofundamento.”
- “Nem sempre.”

Analisando essas respostas não se pode concluir qual a concepção sobre o Ensino de Álgebra está nelas implícita, vez que não trazem nenhuma indicação sobre a natureza da variável.

Os professores desse subgrupo parecem concordar parcialmente com a questão 16 que afirmou: “Problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas”. As respostas dos professores a essa questão, foram:

- “Podem ser resolvidos por tentativa”.
- “A associação de problemas para as operações auxiliam na resolução do problema, mas reitero que a interação e abstração, também, são importantes”.

- “Assim como para as operações numéricas, mas, levar em consideração a especificidade nos cálculos.”
- “Depende da situação”.
- “Porque às vezes fica muito fácil para o aluno”.

Estas respostas não nos possibilitam concluir qual a concepção de Álgebra está sendo evidenciada pelos professores, pois, também aqui, nenhuma referência ao significada da variável pode ser delas depreendido.

Assim, nesse subgrupo 2.2, observamos, apenas, a presença da concepção “Álgebra como Aritmética generalizada”.

No subgrupo 2.3 (composto pelas varáveis 13, 31 e 37), os professores são do gênero masculino, lecionam no Ensino Médio e possuem de 21 a 30 anos de tempo de serviço no magistério.

Tais professores concordam parcialmente que “os problemas de Álgebra devem sempre partir de situações particulares para depois serem generalizados” (questão 12), o que denota que tais professores admitem outras concepções sobre o Ensino de Álgebra, além de sua concepção como “Aritmética generalizada”. Analisando as justificativas dos professores, constatamos, mais uma vez, a tentativa de facilitar a aprendizagem de Álgebra para os alunos, nas seguintes respostas para a questão 12:

- “Muitas vezes com um exemplo específico os alunos ficam mais tranqüilos para ver e entender situações mais amplas”,
- “[partir de situações particulares e depois generalizar] fica mais fácil a compreensão dos alunos”,
- “Princípio da boa aprendizagem”.

Mas, essa tentativa de facilitação do estudo de Álgebra, nem sempre é possível, pois, em alguns casos, não se pode particularizar uma situação matemática que só tem sentido em sua forma generalizada, como exemplifica Usiskin (1995): “O que ocorre com o valor de $\frac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior?”. De acordo com Usiskin (1995), não se trata de um modelo aritmético, já que “não tem sentido perguntar o que aconteceria com o valor de 1/2 quando 2 se torna cada vez maior” (USISKIN, 1995, p. 16).

Tais professores discordam que “problemas algébricos são resolvidos apenas aplicando propriedades válidas para as operações indicadas” (questão 16). As respostas dos professores para justificar suas discordâncias a essa questão, foram:

- “Mostramos apenas onde o aluno deve chegar. O caminho ele mesmo pode resolver, ou, até mesmo criar”.
- “Necessário desenvolver o pensamento algébrico, que deve ser iniciado nas 1ª e 2ª séries, através de desafios com problemas ou atividades estruturadas”.
- “Podemos usar geometria”.

Essas respostas dos professores, também, não possibilitam concluir qual a concepção sobre o Ensino de Álgebra está nelas implícita, por ausência de indicativo quanto ao significado da variável na situação algébrica.

Nesse subgrupo pode, também, ser observada a presença da concepção de Álgebra como “Aritmética generalizada”.

No último subgrupo, 2.4 (composto pelas varáveis 21, 27 e 34), os professores são do gênero feminino e lecionam em Escolas Estaduais de Ensino Fundamental e concordam com “uma solução aritmética para um problema algébrico” (questão 14), e discordam que “problemas algébricos podem ser resolvidos utilizando procedimentos ou algoritmos” (questão 15), apresentando justificativa como a que se segue:

- “Não são explicações mais detalhadas que levarão a criança à compreensão. O ideal é fornecer à criança problemas de situações variadas (Ex: concretas para o aluno) que estimulem o raciocínio.”

Na justificativa desse professor percebemos que há a preocupação de que o estudo de Álgebra não se reduza a regas de transformações e algoritmos, e que para uma aprendizagem significativa da Álgebra é necessário que sempre concebam a Álgebra como “Aritmética generalizada”.

Concluímos após analisar os quatro subgrupos que os professores componentes do *segundo grupo* admitem no ensino de Álgebra a concepção “Álgebra como Aritmética generalizada”, de Usiskin.

No *terceiro grupo*, observam-se 2 subgrupos, o subgrupo 3.1 e o subgrupo 3.2.

No subgrupo 3.1 (composto pelas varáveis 3, 19, 7, 28 e 29), os professores são do gênero feminino, lecionam no Ensino Fundamental e ministram de 21 a 30 aulas por semana.

Esses professores discordam que “a linguagem formal no estudo de Álgebra explica a diminuição do interesse dos alunos” (questão 9). Discordam, também, que a Álgebra “reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações” (questão 13), dessa forma negam a unicidade da concepção de Álgebra como um “estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas”. Ainda, discordam que “conhecer a história da Álgebra permite compreender as dificuldades dos alunos” (questão 10).

Esses mesmos professores concordam que “os problemas algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas” (questão 16). As justificativas para suas concordâncias com essa questão, foram:

- “Porque cada operação tem suas propriedades”.
- “Penso eu que sim, pois se você calça 35, jamais um sapato 32 irá servir-lhe”.

Verifica-se que os professores não relacionam suas respostas com alguma concepção sobre o Ensino de Álgebra, considerando a variável (como sugere Usikin) como argumento, ou como incógnita, ou ainda, como um modelo aritmético a ser generalizado, portanto, não necessitando apenas de formar estruturas estabelecidas por propriedades determinadas.

Com isso, concluímos que esses professores parecem não conceber a Álgebra como “estudo das estruturas matemáticas”, que, segundo Usiskin (1995), essa “é a visão da variável na Álgebra abstrata” (p. 18), onde a variável torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Segundo esse mesmo autor, essa concepção de Álgebra é, geralmente, abordada em cursos superiores.

Os professores do subgrupo 3.2 (composto pelas varáveis 9, 23, 35, 17, 32 e 40), são do gênero feminino, lecionam em Escolas Estaduais de Ensino Fundamental Esses professores que concebem a Álgebra como “Aritmética generalizada”, assim como “generalização das leis que regem os números”, segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996), pois concordam que “a Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa” (questão 11). Nessa concepção, segundo Usiskin (1995), as variáveis são entendidas como generalizadoras de modelos. Esses professores discordam que "problemas algébricos sejam resolvidos aritmeticamente" (questão 14), demonstrando, assim, distinguirem Aritmética de Álgebra. Mas, tais professores, ao analisarem a questão 17 (Prove que a soma de dois números ímpares é um número par), consideraram as duas resoluções corretas onde, em uma, o aluno 1 testava alguns casos particulares (resolução aritmética) e, em outra, o aluno 2 fez uma demonstração (resolução algébrica). Nas justificativas dos professores observamos que os mesmos parecem não querer descartar algo feito pelo aluno, como atestam as seguintes respostas:

- "Partindo do princípio que devemos valorizar todos os procedimentos, o 1º aluno não errou, embora não utilizou exemplos suficientes para uma generalização (caso muito particular). O 2º aluno utilizou uma dedução mais aceitável para generalizar qualquer que seja".
- "Não obteve erro, o aluno 1 apresentou alguns casos particulares, o que não se afirma a sentença, contudo, o aluno 2 apresentou uma resposta completa".

Ao aceitarem as duas resoluções os professores, numa tentativa de considerar válido o que o aluno faz, aceitam uma resolução aritmética para uma demonstração, mesmo sabendo que essa deve conduzir a uma generalização.

O professor que concordou com a questão 13: "Álgebra reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações", denota não entendimento desta questão, pois suas opiniões anteriores, nesse mesmo grupo, estão discordantes desta sua última opinião, como se observa na seguinte resposta a esta questão:

- "As expressões algébricas são vistas pelas variáveis ou incógnitas".

Concluímos que no *terceiro grupo* a concepção dos professores sobre o Ensino de Álgebra é, também, como no *segundo grupo*, a concepção “Álgebra como Aritmética generalizada”, de Usiskin, o que fica bastante explícito nas respostas dos professores à questão 11:

- “[partir de situações particulares e depois generalizar] fica mais fácil à compreensão do aluno”.
- “A partir de situações próximas dos alunos se chega com eficiência à construção do conceito”.
- “Sim, traga a vivência para a sala de aula e o aluno aprenderá com maior facilidade.”
- “Muitas vezes com um exemplo específico os alunos ficam mais tranqüilos para ver e entender situações mais amplas”.

Nas respostas destes professores à questão 11 que buscou verificar se os professores admitiam a “Álgebra como Aritmética generalizada”, observamos que as expressões que compõem suas justificativas como: “partir de situações próximas dos alunos” ou “traga a vivência para a aula” ou ainda “com um exemplo específico”, denotam a preocupação da efetivação de uma aprendizagem significativa que para Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 23): “ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar [...] uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado”. A “Álgebra como Aritmética generalizada” efetiva um tipo de aprendizagem significativa, pois, os problemas de Aritmética que são resolvidos algebricamente exigem do aluno um raciocínio operativo que evoca conhecimentos prévios, para interagir com a nova informação e assim processar o novo conhecimento, ou seja, proceder à solução do problema, o que caracteriza uma aprendizagem significativa, como Ausubel, Novak e Hanesian a definem.

No *quarto grupo*, observamos 2 subgrupos que denotamos subgrupo 4.1 e subgrupo 4.2.

Os professores do subgrupo 4.1 (composto pelas varáveis 6, 36, 10 e 38) são caracterizados por serem do gênero feminino, lecionarem em Escolas Estaduais e por trabalharem os conteúdos de Álgebra em aulas do tipo expositiva.

Tais professores concordam parcialmente com a questão 10, pois, alegam que “conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos” não é sempre importante no ensino de Álgebra, justificando que:

- “Nem sempre, pois quando se quer aprender o conteúdo a história não importa”.

Uma parte desses professores não parece aceitar como corretas as resoluções propostas na questão 17 que solicitou a dois alunos que provassem a proposição: a soma de dois números ímpares é um número par. Os professores justificaram que o aluno 1 não acertou, pois provou apenas para alguns casos particulares, sendo assim não provou para dois números quaisquer. E, alegando que a resolução do aluno 2 estava confusa, rejeitaram-na. Tudo leva a crer que esses professores não reconheceram o termo 2n (n sendo um inteiro positivo) como a forma geral do número natural par, e, por isso, não aceitaram a resolução do aluno 2, embora estivesse correta, como mostramos a seguir:

- “A 1ª explicação ficou incompleta pois fica parecendo que apenas esses números servem. A 2ª explicação não ficou muito clara.”
- “Não está especificado n e n’ (aluno 2). O aluno 1 partiu de experimentação mas, deveria no final fazer a generalização.”
- O aluno 2 errou porque considerou 2n = 2n’ao somá-lo em seguida colocou em evidência, não entendi o que exatamente ele fez.”

No subgrupo 4.2 (composto pelas variáveis 22, 26 e 39), os professores ministram mais de 40 aulas por semana, e concordam parcialmente que “os problemas algébricos podem ser resolvidos considerando apenas resoluções numéricas” (questão 14), alegando que tal resolução facilita a compreensão do aluno, como se evidencia na seguinte resposta:

- “Devemos ter como referência as resoluções numéricas para melhor compreensão”

Tais professores também concordaram parcialmente que “problemas algébricos podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos e algoritmos” (questão 15). Nas justificativas percebemos que na tentativa de ajudar a compreensão do aluno, o professor propõe que a resolução de problemas algébricos seja iniciada com o teste de alguns casos particulares, em seguida generalize, e, também, utilize procedimentos e algoritmos. Dessa forma, concebem a Álgebra como “Aritmética generalizada” e como “estudo para resolver certos tipos de problemas”.

Analisando as respostas dos professores à questão 17, tanto no subgrupo 3.2, quanto no subgrupo 4.1, apesar dos comentários já efetuados, inferimos de suas respostas a concepção “Álgebra como estudo de relações entre grandezas”, de Usiskin, como atestam suas afirmações:

- “[…] o 2º aluno utilizou uma dedução mais aceitável para generalizar qualquer que seja.”.
- “O aluno 2 apresentou uma resposta ampla, geral válida no conjunto especificado.”.

- "O aluno 2 acertou, pois generalizou o caso, dando uma abrangência a solução".
- "[…] o aluno 2, demonstrou a afirmação, ele conseguiu generalizar".

Nas respostas deste grupo de professores à questão 17, onde ficou evidente a compreensão que tem o professor sobre a natureza do ente algébrico e que explicitou sua concepção de "Álgebra como estudo de relações entre grandezas", verificamos que as expressões utilizadas em suas justificativas, como: "utilizou uma dedução" ou "resposta ampla", ou "generalizou o caso", ou ainda, "demonstrou a afirmação", evidenciam que tais professores compreendem o ente algébrico como generalização e que numa dedução, o raciocínio hipotético-dedutivo requer variáveis que são elementos quaisquer de um conjunto, portanto, generalizações. A "Álgebra como generalização" enquadra-se no tipo de aprendizagem (denominada por Ausubel) de aprendizagem significativa, podendo ser por recepção ou por descoberta. Estas aprendizagens, como vimos, requerem que o aprendiz interaja com a nova informação de forma a introduzi-la na teia de conhecimentos que já dispõe, para construir o seu próprio conhecimento, ao que Ausubel denominou "forma não-arbitrária" de produzir conhecimento. Além disso, como o novo conhecimento é produzido pelo próprio aprendiz estará condicionado às suas possibilidades, o que explica a forma substantiva, ou não literal, de produzir conhecimento, própria da aprendizagem significativa.

Da análise qualitativa das respostas dos quatro grupos de professores constituídos pela "árvore de similaridade", através do software C.H.I.C., concluímos que o grupo de professores, participantes desta pesquisa, evidenciou três das quatro concepções sobre Álgebra de Usiskin, são elas: "Álgebra como Aritmética generalizada", "Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas" e "Álgebra como estudo de relações entre as grandezas".

b) Utilizando mapa conceitual

Foi solicitado aos professores palavras que caracterizassem o ensino de Álgebra (questão 7).

As palavras citadas pelos professores para caracterizar o "Ensino de Álgebra" foram, por nós, classificadas em três grupos, segundo os critérios:

Grupo A – estar associada às concepções sobre Álgebra de Usiskin (1995), e às abordagens para o ensino de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (1996);

Grupo B – pertencer à linguagem algébrica, se não classificadas no grupo A;

Grupo C – nenhuma associação com as concepções de Usiskin (1995) ou com as abordagens de Bednarz, Kieran e Lee (1996).

No quadro 3, a seguir, estão mostrados os grupos A, B e C de palavras citadas pelos professores.

Quadro 3: Palavras citadas pelos professores para caracterizar o Ensino de Álgebra

Grupo A – associadas às concepções de Usiskin (1995) e às abordagens de Bednarz, Kieran e Lee (1996)	Grupo B – associadas a linguagem algébrica	Grupo C – não associação com as concepções de Usiskin (1995) ou com as abordagens de Bednarz, Kieran e Lee (1996)
Variável	Substituição	Qual
Generalização	Operações	Onde
Procedimentos, Regras	Processo, Fórmulas	Como
Função	Teorema	Assim
Transformação	Forma	Quanto
Equação	Raciocínio	Situação motivadora
Soluções	Lógica	Atenção
Problemas	Conceito	Experimento
Números	Resultado	Observação
	Abstrato	Dificuldade
	Letras, símbolos	Entendimento
	Fatoração	Paciência
	Linguagem	Persistência
	Representação	Tabuada
	Expressão	Treino
	Inequações	Contexto
	Conjuntos	Leitura
	Comparações	Interpretação
	Sinais	Desenvolvimento
	Radicais	Análise
	Fatoração	Atenção
	Fração	Perguntas
	Monômios	Respostas
	Polinômios	Dedicação
	Sentença	Vontade
	Redução	Ordem
	Dedução	Seqüência
	Associação	Disciplina
	Cálculos	Prática
	Representar	Teoria
	Igualdade	Organização
	Correlação	Base
	Substituição	Subsídios
	Intervalo	Melhoria
	Sinais	Aprendizagem
	Coeficiente	Reformulação
	Incógnita	Problematização
	propriedades	Interessante
		Trabalho
		Dúvidas
		Imaginação
		Intuição
		Desafio
		Dinâmica
		Necessidade
		Busca
		Parênteses
		Colchete
		Chaves
		Compreensão

Após citarem as palavras para caracterizar o Ensino de Álgebra (questão 7) foi solicitado aos professores a organização das palavras citadas em um esquema gráfico (mapa conceitual). Examinado os mapas conceituais organizados pelos professores (questão 8) não foi possível detectar as “proposições relevantes” que norteavam suas concepções sobre o Ensino de Álgebra, pelos seguintes motivos:

- esquemas gráficos incompreensíveis;
- palavras citadas desconectadas do Ensino de Álgebra e por isso de difícil associação;
- os professores, em sua maioria, não organizaram as palavras em um esquema gráfico;

ficando a análise das questões 7 e 8, pelos motivos mencionados, restrita a interpretação das palavras citadas pelos professores e mostradas no quadro 3, categorizadas nos grupos A, B e C.

Analisando as palavras dos grupos A, B e C concluímos que:

Grupo A

Este grupo de palavras reflete a presença de “elementos” das concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995), bem como, das abordagens conforme Bednarz, Kieran e Lee (1996), exibidas no quadro 2 (página 28 deste trabalho). Nestas palavras estão implícitas as concepções dos professores sobre o “Ensino de Álgebra”, bem como as abordagens que utilizam quando trabalham conceitos algébricos. Associando as referidas palavras (quadro 3) com as concepções de Usiskin (1995) e com as abordagens de Bednarz, Kieran e Lee (1996) (quadro 2), concluímos estar presentes nas concepções e nas abordagens dos professores, quando trabalham Álgebra:

- A concepção de “Álgebra como Aritmética generalizada” e a abordagem para o Ensino de Álgebra: “generalização de leis que regem os números”. As palavras que denunciam as presenças desta concepção e desta abordagem são: variável, generalização e números.

- A concepção de “Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas” e a abordagem para o Ensino de Álgebra: “regras de transformações e soluções de equações”. As palavras que denunciam as presenças desta concepção e desta abordagem são: procedimentos, regras, transformação, equação, soluções e problemas.
- A abordagem para o Ensino de Álgebra: “introdução de conceitos de variável e função”. As palavras que denunciam a presença desta abordagem são: variável e função.

Grupo B

Este grupo de palavras citadas pelos professores para caracterizar o Ensino de Álgebra mostra que esta questão foi compreendida pelo professor como palavras que utilizam quando ministram aulas de Álgebra, mas não classificadas no grupo A por não serem palavras explicitadas nas concepções de Álgebra de Usiskin (1995) ou nas abordagens de Álgebra de Bernarz, Kieran e Lee (1996).

Grupo C

Neste grupo as palavras citadas não têm conexão com as concepções de Usiskin (1995) ou com as abordagens de Berdnarz, Kieran e Lee (1996).

Concluímos que os professores que citaram palavras classificadas no Grupo A por apresentarem associações com as concepções sobre Álgebra de Usiskin

(1995) e com as abordagens para o ensino de Álgebra de Bednarz, Kieran e Lee (1996), demonstram uma disposição para tratarem a Álgebra, segundo as referidas concepções e abordagens. Isto reforça as conclusões a que chegamos, após a análise qualitativa das respostas dos professores às questões de 9 a 18, relatadas anteriormente.

A dificuldade dos professores em elaborar mapa conceitual, denota não dominarem a hierarquização dos conceitos algébricos não conseguindo perceber as relações entre os atributos constitutivos dos conceitos. Além disso, podemos inferir da não elaboração do mapa conceitual, das palavras por eles citadas para caracterizar o ensino de Álgebra, o não conhecimento do pensamento matemático de seus alunos na construção de conceitos algébricos. Esta constatação pode justificar, em parte, o porquê dos alunos, em geral, não efetivarem uma aprendizagem significativa, conforme Ausubel, dos conceitos algébricos.

3.4.2 Análise Quantitativa dos Dados

Na análise quantitativa foram comentadas as respostas dos professores ao questionário, questões 11, 15, 16 e 17 que recolheram informações sobre as concepções dos professores relativas ao “Ensino de Álgebra” com o objetivo de compará-las com as concepções de Usiskin (1995) e as abordagens para o ensino de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (1996). Levantamos o quantitativo de respostas, que serão comentados adiante.Ressaltamos que as demais respostas dos professores não sofreram esta análise quantitativa por terem sido pensadas como complementações para clareza das respostas que interrogavam diretamente as concepções de Usiskin (1995) sobre Álgebra e as abordagens de Bednarz, Kieran e Lee (1996) sobre o ensino de Álgebra.

Na tabela 7 estão registradas as respostas dos professores à questão 11:

11. A Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa.
A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Esta questão objetivou recolher informação do professor sobre a utilização, quando ensinam Álgebra, da concepção de Álgebra como "Aritmética generalizada" de Usiskin.

Tabela 7: Respostas dos professores sobre a concepção de Álgebra como "Aritmética generalizada" de Usiskin (questão 11)

Respostas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Concordo	20	71,43
Concordo Parcialmente	8	28,57
Discordo	—	—

Na tabela 7, (questão 11) observa-se que, dos 28 professores:

- 20, mais da metade, concordam que a Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática;
- 8 concordam parcialmente que utilizam a Álgebra para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática. As respostas desses professores evidenciam que admitem a concepção "Álgebra como Aritmética generalizada" de Usiskin (1995). O quê os fez concordar parcialmente foi considerar esta a única forma de conceber a Álgebra, fica evidente a má interpretação da questão.

A concepção de “Álgebra como Aritmética generalizada”, de Usiskin (1995), foi expressa pela totalidade dos professores (considerando a ressalva feita para os que concordaram parcialmente). Pela análise do conteúdo de suas respostas à questão 11 , conclui-se que, no ensino levado a efeito em suas classes, está presente a abordagem: “generalização das leis que regem os números”, de Bednarz, Kieran e Lee (1996). Esta concepção caracterizou os professores que compuseram os grupos 2, 3, 4 representados na árvore de similaridade do software C.H.I.C. (página... deste trabalho).

Na tabela 8 estão registradas as respostas dos professores à questão 15:

15. Alguns problemas de Álgebra podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos ou algoritmos.
A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Esta questão objetivou recolher informações dos professores sobre a utilização da concepção de “Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas” de Usiskin, quando ensinam Álgebra.

Tabela 8: Respostas dos professores sobre a concepção de "Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas", de Usiskin (questão 15)

Respostas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Concordo	23	82,15
Concordo Parcialmente	2	7,14
Discordo	1	3,57
Não Respondeu	2	7,14

Os dados da tabela 8 (questão 15), mostram que, dos 28 professores:

- 23 admitem a concepção de Álgebra como procedimento;

- 2 admitem, parcialmente, a Álgebra como procedimento;
- 3 discordaram ou não responderam.

A maioria dos professores, 23, admite a concepção de "Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas", de Usiskin (1995). Suas respostas à questão 15 denotam a abordagem de Álgebra como "regras de transformações e soluções de equações", segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996). Este resultado está concordante com os grupos 2, 3 e 4 e o subgrupo 1.2 representado na árvore de similaridade (página deste trabalho) .

Na tabela 9 estão registradas as respostas dos professores à questão 16:

16. Os problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Nesta questão buscou-se informação dos professores sobre a utilização da concepção de "Álgebra como estudo das estruturas algébricas" de Usiskin, quando ensinam Álgebra.

Tabela 9: Respostas dos professores sobre a concepção de "Álgebra como estudo das estruturas algébricas", de Usiskin (questão 16)

Respostas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Concordo	7	25
Concordo Parcialmente	11	39,29
Discordo	8	28,57
Não Respondeu	2	7,14

Na tabela 9 (questão 16), observa-se que, dos 28 professores:

- 7 concordaram que os problemas algébricos são sempre resolvidos como estruturas algébricas;
- 11concordaram parcialmente com o tratamento do problema algébrico sempre como estrutura algébrica;
- 10 discordam em resolver problemas algébricos como estruturas algébricas, ou não responderam.

Nesta questão 16, que buscou obter informações para inferir se a concepção "Álgebra como estudo das estruturas algébricas" estava presente na concepção dos professores sobre o "Ensino de Álgebra", suas respostas evidenciaram um total desconhecimento desta concepção de Usiskin (1995) sobre Álgebra, como atestam algumas respostas típicas transcritas a seguir:

- "a depender da expressão, algumas são resolvidas mentalmente" (resposta de um professor que concordou ser os problemas algébricos, sempre, resolvidos como estruturas algébricas);
- "em alguns casos pode-se usar o raciocínio lógico" (resposta de um professor que concordou parcialmente com a questão);
- "não: abrange mais conteúdo envolvendo matemática" (resposta de um professor que descordou da questão).

Verificamos, também, que a maioria das respostas a esta questão não foi justificada comprovando, a nosso ver, que os professores por não trabalharem a concepção de "Álgebra como estudo das estruturas matemáticas", nas séries dos Ensinos Fundamental e Médio, pouca familiaridade têm com esta concepção. Tal concepção, em geral, é trabalhada em cursos de graduação, como atesta Usiskin

(1995, p. 17): “O estudo de Álgebra nos cursos superiores envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais”.

Na tabela 10 estão registradas as respostas dos professores à questão 17:

17. Um professor apresentou o seguinte problema aos seus alunos:
“Prove que a soma de dois números impares é um número par.”
Dois alunos apresentaram as seguintes soluções:

Aluno 1:

3 + 5 = 8

9 + 3 = 12

11 + 7 = 18

13 + 15 = 28

99 + 123 = 222

Assim, somando dois números ímpares sempre teremos um número par.

Aluno 2:

Com $n, n' \in N$

$(2n + 1) + (2n' + 1) =$

$= 2n + 1 + 2n' + 1 =$

$= 2n + 2n' + 2 =$

$= 2\,[(n + n') + 1] = 2n''$

Com $(n + n' + 1 = n'') \in N$, então $2n''$ é um número par.

Quem errou? Quem acertou? Explique por que errou e por que acertou?

Esta questão objetivou recolher informações dos professores sobre a utilização da concepção “Álgebra como relações entre grandezas” de Usiskin, quando ensinam Álgebra.

Tabela 10: Respostas dos professores sobre a concepção de "Álgebra como relações entre grandezas", de Usiskin (questão 17)

Respostas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Aluno 1 acertou	7	25
Aluno 2 acertou	4	14,29
Alunos 1 e 2 não acertaram	2	7,14
Alunos 1 e 2 acertaram	14	50
Não Respondeu	1	3,57

Na tabela 10 (questão 17), observa-se que, dos 28 professores:

- 14 consideram que os problemas de Álgebra podem ser resolvidos por Aritmética;
- 2 dos professores aceitam soluções aritméticas ou algébricas para problemas de Álgebra;
- 7 confundem Álgebra com Aritmética considerando que pode-se provar em Matemática, com casos particulares;
- 4 consideram a Álgebra como generalização;
- 1 não respondeu a questão.

Observa-se que, apenas, 4, dos 28 professores denotam a concepção de "Álgebra como estudo de relações entre grandezas" , de Usiskin (1995). Infere-se das respostas à questão 17 que os professores que só aceitam soluções generalizadas para problemas algébricos (4) abordam a Álgebra associando-a ao "conceito de variável e função", de acordo com Bednarz, Kieran e Lee (1996). Tais professores enquadram-se nos grupo 4 da árvore de similaridade produzida pelo C.H.I.C. (página ... deste trabalho).

Os demais professores (23) demonstraram não entendimento da natureza do ente algébrico:

- alguns considerando o ente algébrico como particularidade. Tratando a Álgebra como Aritmética;
- outros considerando o ente algébrico como particularidade e também como generalização. Não fazendo distinção entre o que é Álgebra e o que é Aritmética.

Na tabela 11, estão registradas as respostas dos professores à questão 9.

9. A exigência da linguagem formal no estudo de Álgebra é um dos fatores que explica a diminuição do interesse dos alunos por Álgebra. A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Esta questão coletou informações dos professores sobre a influencia da linguagem formal da Álgebra como fator impeditivos da aprendizagem dos alunos.

Tabela 11: Respostas dos professores sobre o fato da exigência da linguagem formal diminuir o interesse dos alunos por Álgebra (questão 9)

Respostas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Concordo	10	35,72
Concordo Parcialmente	14	50
Discordo	4	14,28

Na tabela 11 observa-se que dos 28 professores:

- 10 concordaram que a linguagem formal da Álgebra dificulta a aprendizagem dos alunos;
- 14 concordaram parcialmente que a linguagem formal da Álgebra seja um fator que dificulta a aprendizagem dos alunos;
- 4 discordam que a linguagem foram da Álgebra dificulta a aprendizagem dos alunos.

Assim, verificamos que, apenas, 4 professores discordaram com o fato da linguagem formal da Álgebra ser um fator impeditivo da aprendizagem do aluno. Os demais professores, 24, concordaram ou concordaram parcialmente com este fato. Isto, certamente, explica a situação dos 23 professores que demonstraram o não entendimento do ente algébrico como generalização, como acabamos de comentar.

Na tabela 12, estão mostradas as respostas dos professores à questão 10.

10 Conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos permite compreender melhor as dificuldades dos alunos ao estudar Álgebra.
A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Esta questão colheu informações dos professores sobre a necessidade de se conhecer a história do desenvolvimento dos conceitos algébricos para se avaliar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, quando trabalham nesta área da Matemática.

Tabela 12: Respostas dos professores sobre o conhecimento da história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos para compreender as dificuldades dos alunos (questão 10).

Respostas	F. absoluta	F. relativa (%)
Total	28	100
Concordo	17	60,71
Concordo Parcialmente	7	25
Discordo	2	7,14
Não respondeu	2	7,14

Na tabela 12, verificamos que dos 28 professores:

- 17 concordaram, que conhecer a história do desenvolvimento dos conhecimentos algébricos ajuda a compreender a dificuldade de aprendizagem dos alunos, neste campo;

- 7 concordaram parcialmente que se compreende a dificuldade de aprendizagem dos alunos, em Álgebra, quando se conhece a história do desenvolvimento dos conceitos algébricos.
- 2 discordaram que a história dos conhecimentos algébricos ajuda a compreender as dificuldades de aprendizagem dos alunos nesta área da Matemática.

Verificamos que 24 professores concordaram ou concordaram parcialmente que o conhecimento da história do desenvolvimento dos conceitos algébricos ajuda a compreender as dificuldades de aprendizagem dos alunos, em Álgebra.

Na análise, dos dados da tabela 8 (página 86) concluímos que 23, dos 28 professores, admitem a concepção “Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas“, de Usiskin, inferimos que: provavelmente, para facilitarem a aprendizagem dos alunos, os professores trabalham a Álgebra, essencialmente, como procedimentos para resolver, por exemplo, equações.Para justificarem esta preferência na forma de conceber Álgebra como “procedimento” os professores, provavelmente, valem-se do fato histórico dos primeiros conhecimentos algébricos, elaborados pelos hindus, terem sido “apenas coleções de regras”, até hoje perpetuadas nos livros didáticos, como nos informa Eves (2002).

Conclusão

Esta pesquisa buscou investigar as concepções do professor sobre o "Ensino de Álgebra" e admitiu como hipótese, uma das seguintes possibilidades: o professor de Matemática considera que nas abordagens para o ensino de Álgebra deve-se trabalhar situações-problema cujas soluções denotam a Álgebra:

- Como Aritmética generalizada;

ou

- Como procedimento;

ou

- Como relações entre grandezas;

ou

- Como estrutura algébrica;

ou

- Como duas ou três das concepções anteriores;

ou ainda

- Como a concebeu Usiskin contemplando as quatro concepções: Aritmética generalizada, procedimentos, relações entre grandezas e estruturas algébricas.

As conclusões a que se chegou após as análises, qualitativa e quantitativa, dos dados nos leva a afirmar que dentre as possibilidades, supracitadas, que compuseram a hipótese da pesquisa e, considerando o "ou" exclusivo, que os professores evidenciaram, tanto em suas respostas ao questionário, quanto nas questões relativas aos mapas conceituais, por eles elaborados, que três concepções de Usiskin (1995) sobre Álgebra estão implícitas em suas concepções sobre o Ensino de Álgebra. Isto foi mostrado na análise qualitativa dos quatro grupos que compuseram a árvore de similaridade construída pelo software C.H.I.C., e pelos mapas conceituais elaborados pelos professores e, ainda, pela análise quantitativa dos dados coletados chegando-se a seguinte conclusão: os professores de Matemática consideram que nas abordagens para o Ensino de Álgebra deve-se trabalhar situações-problema cujas soluções denotam a Álgebra como Aritmética generalizada, como procedimentos e como relações entre grandezas. Assim, concluímos que a hipótese estabelecida na pesquisa, foi comprovada, pois admitiu como uma possibilidade de ocorrência os professores evidenciarem três concepções abordadas por Usiskin, quando ensinam Álgebra, sendo este o resultado a que chegamos após as análises qualitativa e quantitativa dos dados.

As abordagens para o Ensino de Álgebra propostas por Bednarz, Kieran e Lee (1996), também ficaram, evidentes nas justificativas das respostas dos professores às questões de 09 a 18. Segundo nosso critério de análise os professores denotam uma atitude positiva em relação à Álgebra.

Referenciando aos fundamentos teórico-metodológicos as conclusões das análises qualitativa e quantitativa dos dados sobre as concepções e as abordagens dos professores relativas ao Ensino de Álgebra, efetuamos as seguintes observações:

- O grupo de professores (grupos 2, 3 e 4, e subgrupo 1. 2, da árvore de similaridade) que conceberam “Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas”, segundo Usiskin (1995), bem como abordam a Álgebra como recomendam Bednarz, Kieran e Lee (1996), “regras de transformações e soluções de equações”, representam a maioria dos professores pesquisados (23 dos 28 professores pesquisados).

Interpretando este significativo número de professores que trabalham a Álgebra como "procedimento" à luz da história da descoberta dos conhecimentos algébricos, como recomenda Duval (2003) diremos que tais professores podem estar influenciados por fatores externos que são os textos de Álgebra dos livros didáticos que têm raízes hindus e por isso, "são apenas coleções de regras" (EVES, 2002, p. 260), uma vez que os matemáticos hindus caracterizavam-se por apresentar uma "matemática empírica com poucas demonstrações" (EVES, 2002, p. 259 – 260). Ainda, admitindo que os professores estejam influenciados pelos textos dos livros didáticos, portanto fatores externos, ou, fatores inter-pessoais segundo Haste (1987, apud DUARTE 2004) interpretamos esta concepção dos professores para o "Ensino de Álgebra (Álgebra como procedimento) com base na definição de Artigue (1990) como "ponto de vista local" e na definição de Duroux (apud Artigue, 1990) como "conhecimentos locais". Como esta concepção para o Ensino de Álgebra não foi a única evidenciada pelos professores pesquisados admitimos que o significativo percentual de professores que a utilizam em suas abordagens no Ensino de Álgebra, trabalham também a Álgebra não só como "regras de transformações" o que conduziria seus alunos a uma visão particularizada dos entes algébricos que, por natureza, são generalizações. E, assim procedendo poderiam estar contribuindo para efetivação de uma "aprendizagem por recepção" não significativa, de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980). Quiçá poder-se-ia, também, possibilitar ao aluno uma aprendizagem mecânica cujo material, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980) "é mais facilmente esquecido".

- O grupo de professores (distribuídos nos grupos 2, 3 e 4 da árvore de similaridade) que concebeu a "Álgebra como Aritmética generalizada", de acordo com Usiskin (1995), e evidenciou abordar a Álgebra como "generalização das leis que regem os números", segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996), representou na análise quantitativa, a totalidade dos 28 professores pesquisados.

O estudo de Álgebra "como Aritmética generalizada" conduz o aluno a uma aprendizagem significativa pois depende de conhecimentos prévios de Aritmética para que se processe a generalização. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980) trata-se de uma aprendizagem significativa, pois, neste caso: "a tarefa de aprendizagem implica relacionar […] uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado" (p. 23).

- O grupo de professores (representado pelos grupos 3 e 4 da árvore de similaridade) que evidenciou, em suas respostas, conceberem a Álgebra como "estudo de relações entre grandezas", de acordo com Usiskin (1995), e abordou a Álgebra, como "introdução do conceito de variável", segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996), está representado, por 4, dos 28 professores pesquisados.

Concluímos pelos resultados que acabamos de comentar que as concepções dos professores sobre o "Ensino de Álgebra" evidenciam que a Álgebra é tratada, principalmente, em situações que enfocam a "Álgebra como Aritmética generalizada" (pelos 28 professores pesquisados) e como "procedimentos para resolver certos tipos de problemas" (por 23, dos 28 professores pesquisados) sendo um menor número de professores (4, dentre os 28 professores pesquisados) que concebem a Álgebra como "relações entre grandezas". Estas constatações vislumbram uma situação promissora no Ensino de Álgebra, pois, abordar a Álgebra das três formas diversificadas: Aritmética generalizada, procedimentos e generalização, facilita, para o aluno a construção dos conceitos algébricos como afirma Duval (2003): “a compreensão em Matemática implica a capacidade de registro” (p. 21).

Porém, ao responder a pergunta que se constituiu no problema da pesquisa, assim formulada: “Quais as concepções dos professores de Matemática sobre o ensino de Álgebra?”, concluímos que um pequeno número de professores (4 dos 28 professores pesquisados) evidencia a concepção “Álgebra como estudo de relações entre grandezas”, de Usiskin. Tal constatação nos preocupa porque essa concepção trata o ente algébrico desvinculado de qualquer particularidade, ou seja, trata-o como generalização, diferentemente do que acontece na concepção “Álgebra como Aritmética generalizada”, evidenciada pelos 28 professores. Essa concepção, como vimos na análise qualitativa, é a abordagem de Álgebra preferida pelos professores que na tentativa de facilitar a aprendizagem dos alunos, partem sempre de casos particulares para depois generalizar.Tal procedimento poderá habituar o aluno a recorrer, sempre, a casos particulares deixando de generalizar, ou seja, não desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo, tão necessário à demonstração.

Constatamos, também, que um número significativo de professores (23 dos 28 professores pesquisados) evidencia a concepção “Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas”, de Usiskin, em detrimento da concepção “Álgebra como estudo das relações entre grandezas”, de Usiskin. Essa primeira concepção poderá desenvolver, no aluno, apenas a habilidade de memorização, que, segundo Ausubel, é o nível mais elementar de ocorrência de aprendizagem, pois, tende a ser facilmente esquecida.

4.2 Recomendações

Diante das conclusões a que chegamos ficou evidente, pelas respostas dos professores ao questionário que suas concepções sobre o Ensino de Álgebra contemplam três das quatro concepções de Usiskin (1995): “Álgebra como Aritmética generalizada”, “Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas” e “Álgebra como estudo das relações entre grandezas”, e que tais resultados demonstram uma atitude positiva em relação à Álgebra, mas, o que observamos, como comentamos na introdução deste trabalho, são alunos que “fracassam” nos exames que avaliam seus conhecimentos de Álgebra; é pois necessário que:

- Se investigue diretamente a prática pedagógica dos professores quando abordam a Álgebra.

- Se detecte os conhecimentos prévios dos alunos para possibilitar a construção de conceitos algébricos como recomenda Ausubel.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag, GRAS, Régis. **A implicação estatística usada como ferramenta em um exemplo de análise de dados multidimensionais**. Revista de Educação Matemática, vol. 4, nº. 2, pp. 75-88, 2002.

ARTIGUE, Michèle. **Épistémologie et Didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. vol. 10, nº 2.3, pp. 241-286, 1990.

BEDNARZ, Nadine, KIERAN, Carolyn, LEE, Lesley. Introduction. In: BEDNARZ, Nadine, KIERAN, Carolyn, LEE, Lesley. **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Ed. Kluwer Academic: Dordrecht, Holanda 1996. Cap. 1, p. 3 – 12.

BOGDAN, Robert C., BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. (coleção Ciências de Educação, 12).

BOYER, Carl. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1991.

BRITO, Márcia R. F. de, MORON, Claúdia F. Atitudes e Concepções dos Professores de Educação Infantil em Relação à Matemática. In: BRITO, Márcia R. F. de (Organizadora). **Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Pesquisa**. Florianópolis: Editora Insular, 2001.

DAVIS, Robert B. Research Studies in How Humans Think about Algebra. In: WAGNER, Sigrid, KIERAN, Carolyn (Editors). Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Vol. 4, p. 266-274, 1989.

DUARTE, A. C. Santos. **Educar e Aprender na Diversidade: um caminho para a inclusão**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador/Bahia, 2004.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Organizadora). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 3 ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.

FARIA, Wilson de. **Mapas Conceituais: aplicações ao ensino, currículo e avaliação**. São Paulo: EPU, 1995.

GIL, Antonio de Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

JESUS, Marco Antonio Santos de. **Jogos na Educação Matemática: Análise de uma Proposta para a 5ª Série do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

LELLIS, Marcelo Cestari Terra. **Sobre o Conhecimento Matemático do Professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

LÜDKE, M., ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade:** análise dos pressupostos, filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 4ª ed. São Paulo: Cortez, 1997.

MANRIQUE, Ana Lúcia. **Processo de Formação de Professores em Geometria: mudanças em concepções e práticas**. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 1994.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

MOREIRA, Marco Antonio. **Uma abordagem cognitiva ao Ensino de Física**. Porto Alegre: Ed. da Universidade, UFRGS, 1983.

PEREZ, Geraldo. **Pressupostos e Reflexões Teóricas e Metodológicas da Pesquisa Participante do Ensino de Geometria para as Camadas Populares**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1991.

PINTO, Antonio Henrique. **As Concepções de Álgebra e Educação Algébrica dos Professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 1999.

POLYA, G. **A Arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis. In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. (Organizadores). **As Idéias da Álgebra**. Ed. Atual: São Paulo, 1995. p. 9-22.

WHEELER, David. Backwards and forwards: Reflections on Different Approaches to Algebra. In: BEDNARZ, Nadine, KIERAN, Carolyn, LEE, Lesley. **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Ed. Kluwer Academic: Dordrecht, Holanda 1996. Cap. 21, p. 317 – 325.

YAMADA, Vilma Keiko. **Dificuldades que os professores encontram no Ensino da Álgebra: das concepções à superação dessas dificuldades.** São Paulo: PUC/SP, 1997. Dissertação de mestrado. Orientadora: Mere Abramowicz.

APÊNDICE

Apêndice (A)

Questionário **___/___/___**

Caro Professor

Este questionário tem por objetivo fornecer subsídios para estudar as dificuldades de alunos em Álgebra e para futuramente propor situações de formação.

Estamos preocupados com a qualidade do ensino, por isso acreditamos que suas respostas poderão nos ajudar a pensar em melhorias para o processo de ensino-aprendizagem da Álgebra.

1. Gênero: ( ) Feminino ( ) Masculino

2. Em que grau(s) de ensino você está lecionando neste ano?

   ( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio

3. Quantas aulas você ministra por semana? ______________________________

4. Em que tipo de escola você leciona?

   ( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Particular

5. Há quantos anos você leciona? ____

6. Como você trabalha os conteúdos de Álgebra em sua sala de aula?

____

____

____

____

____

7. Cite dez palavras para caracterizar o Ensino de Álgebra.

____

____

____

____

8. Agora faça um esquema gráfico organizando as palavras citadas na questão acima.

Nas afirmações a seguir assinale uma das letras A, B ou C conforme a legenda, em seguida justifique a resposta que você assinalou.

9. A exigência da linguagem formal no estudo de Álgebra é um dos fatores que explica a diminuição do interesse dos alunos por Álgebra.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

10. Conhecer a história do desenvolvimento dos conteúdos algébricos permite compreender melhor as dificuldades dos alunos ao estudar Álgebra.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

11. A Álgebra é utilizada para traduzir expressões da linguagem do cotidiano para a linguagem matemática e vice-versa.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

12. Os problemas de Álgebra devem sempre partir de situações particulares para depois serem generalizados.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

13. O estudo de Álgebra reduz-se apenas a regras de transformações e soluções de equações.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

14. Os problemas de Álgebra podem ser resolvidos considerando apenas resoluções numéricas.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

15. Alguns problemas de Álgebra podem ser resolvidos utilizando-se procedimentos ou algoritmos.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

16. Os problemas envolvendo entes algébricos são resolvidos apenas aplicando-se propriedades válidas para as operações indicadas.

A) Concordo B) Concordo Parcialmente C) Discordo

Explique: ____

____

____

17. Um professor apresentou o seguinte problema aos seus alunos:
"Prove que a soma de dois números impares é um número par."
Dois alunos apresentaram as seguintes soluções:

Aluno 1:

$3 + 5 = 8$

$9 + 3 = 12$

$11 + 7 = 18$

$13 + 15 = 28$

$99 + 123 = 222$

Assim, somando dois números ímpares sempre teremos um número par.

Aluno 2:

Com $n, n' \in N$

$(2n + 1) + (2n' + 1) =$

$= 2n + 1 + 2n' + 1 =$

$= 2n + 2n' + 2 =$

$= 2[(n + n') + 1] = 2n''$

Com $(n + n' + 1 = n'') \in N$, então $2n''$ é um número par.

Quem errou? Quem acertou? Explique por que errou e por que acertou?

18. Um professor propôs o seguinte problema aos seus alunos:

O perímetro de um triângulo mede 27cm. As medidas dos lados são expressas por três números inteiros e consecutivos. Quais são as medidas dos lados do triângulo?

Um aluno resolveu a questão da seguinte forma:

Se todos os lados tivessem a mesma medida, então seria: $27 \div 3 = 9$. Assim , os lados mediriam 9cm, mas não seriam números inteiros consecutivos. Os lados poderiam medir 9cm, 10cm, 11cm, mas o perímetro não seria 27cm, pois $9 + 10 + 11 = 30$. Se fosse 8cm, 9cm, 10cm, o perímetro seria 27cm, pois: $8 + 9 + 10 = 27$. Logo, as medidas dos lados são 8cm, 9cm e 10cm.

Você considera essa solução algébrica? Explique por que? Que outras soluções você proporia para esta questão?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____