

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**ANDRÉ LÚCIO GRANDE**

**Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do  
Cálculo voltado ao seu ensino**

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**São Paulo**

**2013**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**ANDRÉ LÚCIO GRANDE**

**Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do  
Cálculo voltado ao seu ensino**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com exigência parcial para a obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva**.

**São Paulo  
2013**

## Banca Examinadora

---

---

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, que com sua sabedoria, inteligência, dedicação, paciência e incentivo me orientou e ensinou incondicionalmente sobre o conhecimento matemático, mas principalmente a importância de ser um professor e educador matemático.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Aos professores da Banca Examinadora, pelas valiosas contribuições, discussões e sugestões para a elaboração deste trabalho: Prof. Dr. Frederico Reis, Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni, Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini e Profa. Dra. Celina Abar.

Aos alunos participantes do questionário-piloto e da sequência de ensino, pois sem os mesmos essa pesquisa não seria realizada. O interesse, empenho e dedicação com espírito científico os tornaram os “sujeitos da pesquisa” com quem tive o prazer de trabalhar durante esse período.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que desde o Mestrado Acadêmico e posteriormente no Doutorado foram os responsáveis por minha formação como professor, pesquisador e educador matemático.

Aos meus amigos que ingressaram no segundo semestre de 2010 no curso de Doutorado em Educação Matemática na PUC-SP. Em especial os colegas Amari Goulart e Rogério Pires, além das amigas Sandra e Sônia.

Aos colegas da FATEC Mauá, bem como do Colégio São Marcos, em especial à direção e coordenações dos cursos, pelo apoio para a realização desta pesquisa.

Aos meus familiares: meu irmão Alexandre, minha cunhada Patrícia, meus padrinhos, tios e primos pela compreensão e pelo apoio na superação de mais uma etapa da minha vida.

À Cláudia de Carvalho Guarnieri, pelas sugestões e pela revisão gramatical deste trabalho.

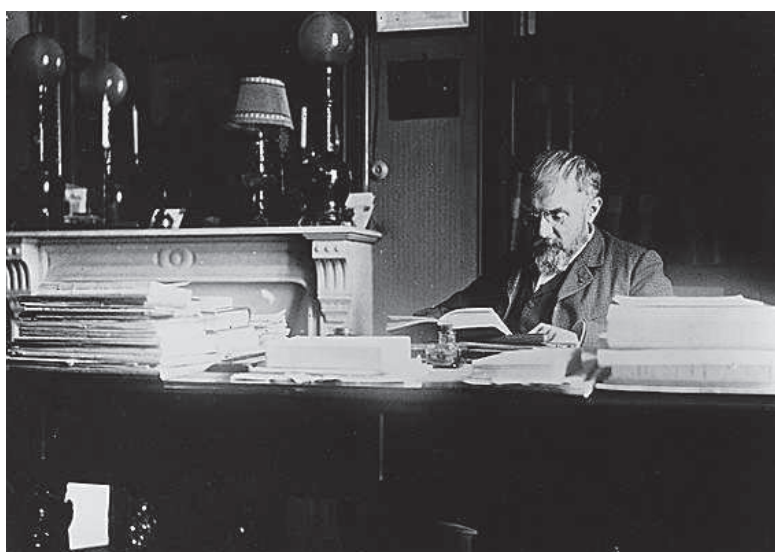
À colega Profa. Me. Renata Rodrigues, pelas contribuições da redação do texto em língua estrangeira.

A todos, cada qual com sua particularidade, que de alguma forma me auxiliaram para o desenvolvimento deste trabalho, expresso minha gratidão eterna.

Dedico este trabalho à memória dos meus pais e avós.

Força Sempre!

**O Autor**



“O objetivo principal do ensino da Matemática é o de desenvolver certas faculdades do espírito, das quais a intuição não é a menos preciosa”.

*Poincaré*

## RESUMO

---

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) ocupa uma posição de destaque no estudo do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), pois estabelece a relação existente entre as operações de integração e derivação como inversas entre si, além da sua utilização no cálculo de integrais definidas, em especial na resolução de problemas envolvendo área, volume e comprimento de arco, entre outras. Entretanto, no âmbito da Educação Matemática, quanto ao ensino e aprendizagem do Cálculo, pesquisas realizadas no Brasil e em outros países, tais como França, Inglaterra e Estados Unidos evidenciaram a incompreensão dos alunos no tocante à falta de ligação existente entre os conceitos de integral e derivada no estudo do TFC em um curso de Cálculo. Diante desse panorama, esta tese teve por objetivo realizar um estudo didático e epistemológico do TFC, apresentando como resultado a elaboração e análise de uma intervenção de ensino que procurou fazer emergir a relação entre as operações de integração e derivação e sob quais condições essa relação se estabelece, o que constitui a essência do teorema. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao uso da intuição e do rigor na construção do conhecimento matemático, segundo Henri Poincaré (1995), bem como as categorizações da intuição e as inter-relações entre os componentes: formal, algorítmico e intuitivo nas atividades matemáticas, de acordo com Efraim Fischbein (1991). A pesquisa é qualitativa, apresentando como procedimentos metodológicos a elaboração de uma intervenção de ensino, bem como a análise das resoluções das questões efetuadas por 14 estudantes do curso de Tecnologia de uma faculdade pública do Estado de São Paulo com o auxílio do *software* GeoGebra. Para análise das resoluções, além do referencial teórico citado, foram adotados os trabalhos de Tall (1991) sobre o papel da visualização no ensino do Cálculo e as inter-relações com a intuição e o rigor. Como resultados, destaca-se que explorar os conceitos de integral inicialmente por meio da ideia de acumulação, simultaneamente trabalhando-se com a questão da variação dessa acumulação, mostrou-se uma estratégia pertinente para que os estudantes compreendessem a relação mútua entre integração e derivação como operações inversas uma da outra, assim como permitiu que os estudantes interiorizassem que tal relação, como ocorreu na gênese do TFC, realizou-se posteriormente ao estudo dessas operações. Além disso, pode-se concluir que o conceito de função constituiu-se na linha condutora que norteou o entendimento dos estudantes sobre o TFC. Não obstante, as dificuldades da compreensão de continuidade de uma função, um dos pontos centrais do teorema, também foi uma questão que emergiu dos resultados da intervenção de ensino. A análise mostrou melhores resultados por parte dos estudantes nas atividades matemáticas, quando o eixo das interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo é trabalhado em conjunto com o eixo relacionado à questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo. No final das tarefas, observou-se que os estudantes começaram a mostrar indícios da preocupação de relacionar a intuição com o rigor na construção do conhecimento matemático.

**Palavras-chave:** Teorema Fundamental do Cálculo, Intuição, Rigor, Visualização.



## ABSTRACT

---

The Fundamental Theorem of Calculus (FTC) occupies a prominent position in the study of Differential and Integral Calculus (DIC) as it establishes a relationship which exists between the operations of integration and differentiation as inverse to each other in addition to its use in the calculation of definite integrals, especially in solving problems which involve area, volume and arc length, amongst others. However, in the context of Mathematics Education, regarding the teaching and learning of Calculus, researches conducted in Brazil and other countries like France, England and the United States, have shown misunderstanding on the part of the students regarding the lack of connection between the concepts of Integral and Derivatives in the study of FTC. Facing this scenario, this thesis aimed at conducting a didactic and epistemological study of FTC, presenting, as its result, the elaboration and analysis of teaching intervention of which main aim was to reveal and bring up the relationship between the operations of derivation and integration and under which conditions this relationship is established as this constitutes the essence of the theorem. As a theoretical frame of reference, one has used the ideas connected to the use of intuition and rigor in the construction of mathematical knowledge according to Henri Poincaré (1995) as well as the categorizations of intuition and the interrelations between its components: the formal, algorithmic and intuitive components in mathematical activities according to Efraim Fischbein (1991). The research presented is qualitative, presenting, as methodological procedures, the development of a teaching intervention as wells as the analysis of the solutions to questions proposed by fourteen students from a technological course in a public college in the state of São Paulo with the help of Geogebra Software. In order to analyze the resolutions, besides the already mentioned theoretical frame of reference, one has also adopted the works of Tall (1991) on the role of visualization of the teaching of Calculus and the interrelationships with intuition and rigor. As results, one highlights that exploring the concepts of integral, initially by the idea of accumulation and working simultaneously with the question related to the variation of this accumulation, has shown to be a suitable strategy so that students could understand the mutual relationship between integration and derivation as operations inverse to each other, as well as it allowed them to internalize such relationship as in the genesis of FTC which came after the study of these operations. Furthermore, one can conclude that the concept of function constituted the conducting principle which guided students on the understanding of FTC. Nevertheless, difficulties in understanding the continuity of a function, one of the central points of the theorem, was also an issue which came up in the results of the teaching intervention. Analysis has shown better results on students dealing with mathematical activities when the axis of interactions among formal, algorithmic and intuitive components is dealt with the axis regarding the question of visualization in the process of teaching and learning Calculus. At the end of tasks, one has observed that students have begun to show indications of concern in order to relate intuition with rigor in the building of mathematical knowledge.

**Keywords:** Fundamental Theorem of Calculus, Intuition, Rigor, Visualization.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 1</b> – Os problemas fundamentais do CDI (Simmons) .....                    | 19  |
| <b>Figura 2</b> – Gráfico de uma função $f$ (Artigue).....                            | 40  |
| <b>Figura 3</b> – Relação entre os gráficos de $l(x)$ e $f(x)$ (David Tall) .....     | 52  |
| <b>Figura 4</b> – Teorema Fundamental do Cálculo (David Tall) .....                   | 52  |
| <b>Figura 5</b> – Relação entre os gráficos $v \times t$ e $f \times t$ (Strang)..... | 55  |
| <b>Figura 6</b> – Relação entre área e tangente (Strang) .....                        | 56  |
| <b>Figura 7</b> – Postulado das paralelas .....                                       | 72  |
| <b>Figura 8</b> – A pseudoesfera .....                                                | 73  |
| <b>Figura 9</b> – Modelo de Klein .....                                               | 74  |
| <b>Figura 10</b> – Curvas de Peano.....                                               | 75  |
| <b>Figura 11</b> – Curva contínua sem derivada em nenhum ponto .....                  | 75  |
| <b>Figura 12</b> – O mundo imaginado por Poincaré (1984).....                         | 83  |
| <b>Figura 13</b> – Exemplo de Poincaré – apelo à visualização geométrica.....         | 84  |
| <b>Figura 14</b> – Representação gráfica – Teorema de Bolzano .....                   | 85  |
| <b>Figura 15</b> – Método de Newton .....                                             | 87  |
| <b>Figura 16</b> – Visualização geométrica - Método de Newton .....                   | 88  |
| <b>Figura 17</b> – Exemplo do Método de Newton – Sequência divergente .....           | 88  |
| <b>Figura 18</b> – Mundo Corporificado – 1º etapa (David Tall).....                   | 108 |
| <b>Figura 19</b> – Mundo Corporificado – 2º etapa (David Tall).....                   | 109 |
| <b>Figura 20</b> – Área de um segmento parabólico (Arquimedes) .....                  | 117 |
| <b>Figura 21</b> – Proposição 1 (Arquimedes).....                                     | 118 |
| <b>Figura 22</b> – Proposição 2 (Arquimedes) .....                                    | 119 |
| <b>Figura 23</b> – Proposição 5 (Arquimedes) .....                                    | 120 |
| <b>Figura 24</b> – Método da Alavanca (Arquimedes) .....                              | 120 |
| <b>Figura 25</b> – Equilíbrio de figuras planas (Arquimedes).....                     | 121 |
| <b>Figura 26</b> – Volume do cilindro e da esfera (Arquimedes).....                   | 124 |
| <b>Figura 27</b> – Equilíbrio dos sólidos (Arquimedes) .....                          | 125 |
| <b>Figura 28</b> – Quadratura da curva (Fermat).....                                  | 135 |
| <b>Figura 29</b> – O círculo e a elipse (Cavalieri) .....                             | 137 |
| <b>Figura 30</b> – O volume da esfera (Cavalieri).....                                | 139 |
| <b>Figura 31</b> – Gráfico Velocidade x Tempo (Torricelli) .....                      | 141 |
| <b>Figura 32</b> – Gráfico de Torricelli .....                                        | 142 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 33</b> – Triângulo Diferencial (Gregory) .....                       | 145 |
| <b>Figura 34</b> – Relação entre tangente e quadratura (Barrow) .....          | 148 |
| <b>Figura 35</b> – Método da quadratura de Newton .....                        | 153 |
| <b>Figura 36</b> – Método utilizado por Newton .....                           | 155 |
| <b>Figura 37</b> – O Teorema Fundamental do Cálculo segundo Newton .....       | 157 |
| <b>Figura 38</b> – Números Triangulares .....                                  | 159 |
| <b>Figura 39</b> – Quadratura e tangente (Leibniz) .....                       | 163 |
| <b>Figura 40</b> – Integral segundo Leibniz .....                              | 163 |
| <b>Figura 41</b> – Questão Piloto 01 .....                                     | 183 |
| <b>Figura 42</b> – Resolução da questão $Q_1$ feita pela dupla $D_4$ .....     | 184 |
| <b>Figura 43</b> – Resolução da questão $Q_2$ feita pela dupla $D_5$ .....     | 188 |
| <b>Figura 44</b> – Resolução da questão $Q_2 - a$ feita pela dupla $D_2$ ..... | 189 |
| <b>Figura 45</b> – Resolução da questão $Q_2 - b$ feita pela dupla $D_5$ ..... | 190 |
| <b>Figura 46</b> – Gráfico da Questão Piloto 03 – $f$ .....                    | 196 |
| <b>Figura 47</b> – Resolução da questão $Q_3 - b$ feita pela dupla $D_4$ ..... | 196 |
| <b>Figura 48</b> – Modelo do Sólido $S$ .....                                  | 210 |
| <b>Figura 49</b> – Sólido $S$ .....                                            | 211 |
| <b>Figura 50</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 1 .....                                | 214 |
| <b>Figura 51</b> – 02. Tarefa 1 – Seção 1 .....                                | 216 |
| <b>Figura 52</b> – 03. Tarefa 1 – Seção 1 .....                                | 216 |
| <b>Figura 53</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 2 .....                                | 219 |
| <b>Figura 54</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 3 – Janela de Visualização 1 .....     | 221 |
| <b>Figura 55</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 3 – Janela de Visualização 2 .....     | 221 |
| <b>Figura 56</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 3 .....                                | 222 |
| <b>Figura 57</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 3 – Gráfico $A_s \times h$ .....       | 223 |
| <b>Figura 58</b> – 02. Tarefa 1 – Seção 3 .....                                | 223 |
| <b>Figura 59</b> – 02. Tarefa 1 – Seção 3 – Gráfico $V_s \times h$ .....       | 224 |
| <b>Figura 60</b> – Triângulos VOP e VHB .....                                  | 228 |
| <b>Figura 61</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 1 .....                                | 231 |
| <b>Figura 62</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 3 – Gráfico $V \times t$ .....         | 237 |
| <b>Figura 63</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 3 – Manipulação Geométrica .....       | 237 |
| <b>Figura 64</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 3 - Visualização .....                 | 238 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 65</b> – Resolução da dupla $D_2$ – Tarefa 1 – Seção 1 – Item b.....   | 244 |
| <b>Figura 66</b> – Resolução da dupla $D_3$ – Tarefa 1 – Seção 1 – Item b.....   | 245 |
| <b>Figura 67</b> – Resolução da dupla $D_6$ – Tarefa 1 – Seção 1 – Item b.....   | 246 |
| <b>Figura 68</b> – Resolução da dupla $D_6$ – Tarefa 1 – Seção 1 – Item d.....   | 247 |
| <b>Figura 69</b> – Resolução da dupla $D_2$ – Tarefa 1 – Seção 1 – Item d .....  | 248 |
| <b>Figura 70</b> – Resolução da dupla $D_7$ – Tarefa 1 – Seção 1 – Item d .....  | 249 |
| <b>Figura 71</b> – Resolução da dupla $D_2$ – Tarefa 1 – Seção 2 – Item d .....  | 252 |
| <b>Figura 72</b> – Resolução da dupla $D_5$ – Tarefa 1 – Seção 2 – Item d .....  | 253 |
| <b>Figura 73</b> – Tarefa 1 – Seção 3 – Item a .....                             | 255 |
| <b>Figura 74</b> – Resolução da dupla $D_3$ – Tarefa 1 – Seção 4 – Item a .....  | 257 |
| <b>Figura 75</b> – Resolução da dupla $D_1$ – Tarefa 1 – Seção 4 – Item c.....   | 258 |
| <b>Figura 76</b> – Gráficos – Tarefa 2 – Seção 1.....                            | 266 |
| <b>Figura 77</b> – Resolução da dupla $D_2$ – Tarefa 2 – Seção 2 – Item b .....  | 268 |
| <b>Figura 78</b> – Resolução da dupla $D_6$ – Tarefa 2 – Seção 3 – Item g .....  | 272 |
| <b>Figura 79</b> – Estratégia da dupla $D_4$ – Tarefa 2 – Seção 3 – Item g ..... | 272 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Quadro 1</b> – Questão do Enade 2005.....                                    | 27  |
| <b>Quadro 2</b> – Questão proposta por Artigue.....                             | 41  |
| <b>Quadro 3</b> – O problema da Água .....                                      | 43  |
| <b>Quadro 4</b> – O problema do Círculo .....                                   | 44  |
| <b>Quadro 5</b> – O problema da Distância .....                                 | 45  |
| <b>Quadro 6</b> – Função contínua sem derivada em um ponto.....                 | 89  |
| <b>Quadro 7</b> – Função contínua com infinitos pontos de descontinuidade ..... | 90  |
| <b>Quadro 8</b> – Situação-Problema (categorização das intuições) .....         | 103 |
| <b>Quadro 9</b> – Questão Piloto 1 .....                                        | 181 |
| <b>Quadro 10</b> – Questão Piloto 2 .....                                       | 186 |
| <b>Quadro 11</b> – Questão Piloto 3 .....                                       | 191 |
| <b>Quadro 12</b> – Questão Piloto 4 .....                                       | 198 |
| <b>Quadro 13</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 1 .....                                 | 214 |
| <b>Quadro 14</b> – 02. Tarefa 1 – Seção 1 .....                                 | 215 |
| <b>Quadro 15</b> – 03. Tarefa 1– Seção 1 .....                                  | 217 |
| <b>Quadro 16</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 2 .....                                 | 219 |
| <b>Quadro 17</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 3 .....                                 | 222 |
| <b>Quadro 18</b> – 02. Tarefa 1 – Seção 3 .....                                 | 224 |
| <b>Quadro 19</b> – 01. Tarefa 1 – Seção 4 .....                                 | 225 |
| <b>Quadro 20</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 1 .....                                 | 228 |
| <b>Quadro 21</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 2 .....                                 | 232 |
| <b>Quadro 22</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 3 .....                                 | 234 |
| <b>Quadro 23</b> – 02. Tarefa 2 – Seção 4 .....                                 | 240 |

# SUMÁRIO

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                       | <b>17</b>  |
| <b>CAPÍTULO 1 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>                | <b>34</b>  |
| 1.1 – Principais pesquisas .....                              | 35         |
| 1.2 – Resumo e conjecturas .....                              | 60         |
| <b>CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>                | <b>64</b>  |
| 2.1 – A intuição e o rigor.....                               | 65         |
| 2.2 – A lógica, a intuição e os alicerces da Matemática ..... | 71         |
| 2.3 – A intuição segundo Poincaré.....                        | 80         |
| 2.4 – A intuição segundo Fischbein.....                       | 92         |
| 2.5 – O papel da visualização.....                            | 107        |
| <b>CAPÍTULO 3 – CONTEXTO HISTÓRICO .....</b>                  | <b>112</b> |
| 3.1– A Aurora do Cálculo.....                                 | 114        |
| 3.1.1 – Eudoxo .....                                          | 115        |
| 3.1.2 – Arquimedes.....                                       | 115        |
| 3.1.2.1 – A área do segmento parabólico .....                 | 116        |
| 3.1.2.2 – O volume da esfera .....                            | 124        |
| 3.1.3 – Apolônio de Perga .....                               | 126        |
| 3.1.4 – Considerações Parciais .....                          | 129        |
| 3.2 – O Despertar .....                                       | 130        |
| 3.2.1 – Pierre de Fermat.....                                 | 132        |
| 3.2.2 – Cavalieri.....                                        | 136        |
| 3.2.3 – Torricelli .....                                      | 140        |
| 3.2.4 – John Wallis .....                                     | 144        |
| 3.2.5 – James Gregory .....                                   | 145        |
| 3.2.6 – Isaac Barrow.....                                     | 146        |
| 3.2.7 – Considerações parciais .....                          | 149        |
| 3.3 – Integro, logo derivo .....                              | 151        |
| 3.3.1 – Isaac Newton.....                                     | 151        |
| 3.3.2 – Gottfried Wilhelm Leibniz.....                        | 158        |

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.2.1 – Leibniz e o “triângulo característico” .....            | 165        |
| 3.4 – Cálculo com rigor .....                                     | 165        |
| 3.5 – Considerações Parciais .....                                | 170        |
| <b>CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA .....</b>                             | <b>172</b> |
| 4.1 – Pesquisa Qualitativa .....                                  | 172        |
| 4.2 – O cenário da pesquisa e os procedimentos metodológicos..... | 177        |
| 4.3 – Questionário-Piloto .....                                   | 180        |
| 4.3.1 – A realização .....                                        | 180        |
| 4.3.2 – Análise das resoluções – Questão Q <sub>1</sub> .....     | 181        |
| 4.3.3 – Questão Q <sub>2</sub> .....                              | 185        |
| 4.3.4 – Questão Q <sub>3</sub> .....                              | 191        |
| 4.3.5 – Questão Q <sub>4</sub> .....                              | 197        |
| 4.4 – Considerações Parciais .....                                | 201        |
| <b>CAPÍTULO 5 – SEQUÊNCIA DE ENSINO .....</b>                     | <b>204</b> |
| 5.1 – O uso do recurso computacional .....                        | 208        |
| 5.2 – O experimento .....                                         | 209        |
| 5.3 – Tarefa 1 .....                                              | 213        |
| 5.3.1– Tarefa 1 – Seção 1 .....                                   | 213        |
| 5.3.2 – Tarefa 1 – Seção 2 .....                                  | 218        |
| 5.3.3 – Tarefa 1 – Seção 3 .....                                  | 220        |
| 5.3.4 – Tarefa 1 – Seção 4 .....                                  | 225        |
| 5.4 – Tarefa 2 .....                                              | 226        |
| 5.4.1 – Tarefa 2 – Seção 1 .....                                  | 227        |
| 5.4.2 – Tarefa 2 – Seção 2 .....                                  | 232        |
| 5.4.3 – Tarefa 2 – Seção 3 .....                                  | 233        |
| 5.4.4 – Tarefa 2 – Seção 4 .....                                  | 239        |
| <b>CAPÍTULO 6 – RESULTADOS .....</b>                              | <b>241</b> |
| 6.1 – Análise dos resultados.....                                 | 243        |
| 6.1.1 – Primeiro encontro: Tarefa 1 – Seções 1 e 2 .....          | 243        |
| 6.1.2 – Segundo encontro: Tarefa 1 – Seções 3 e 4 .....           | 254        |
| 6.1.3 – Considerações Parciais – Tarefa 1 .....                   | 259        |

|                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| 6.1.4 – Terceiro encontro: Tarefa 2 – Seções 1 e 2.....      | 263        |
| 6.1.5 – Quarto encontro: Tarefa 2 – Seções 3 e 4.....        | 269        |
| 6.1.6 – Considerações Parciais – Tarefa 2.....               | 275        |
| 6.2 – Conclusões .....                                       | 277        |
| <br><b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                        | <b>280</b> |
| <br><b>REFERÊNCIAS.....</b>                                  | <b>294</b> |
| <br><b>ANEXOS .....</b>                                      | <b>299</b> |
| Anexo A – Termo de Consentimento – Questionário-Piloto ..... | 300        |
| Anexo B – Questionário-Piloto.....                           | 301        |
| Anexo C – Termo de Consentimento – Tarefas .....             | 310        |
| Anexo D – Tarefa 1.....                                      | 311        |
| Anexo E – Tarefa 2 .....                                     | 320        |



“Se eu disser que encontrei uma demonstração de tal teorema em tais circunstâncias, o teorema pode ser um nome estranho, que muitos de vocês nem conhecem; mas isso não tem importância: o que interessa ao psicólogo não é o teorema, são as circunstâncias”.

HENRI POINCARÉ

---

## INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) constitui uma importante área do conhecimento matemático. Essa disciplina ocupa um lugar de destaque nos cursos em que ela é ministrada. De modo geral, o CDI é estudado nos primeiros anos nos cursos de graduação de diversas áreas como Matemática, Física, Química, Engenharia, Tecnologia, Economia, Biologia, entre outros.

No que diz respeito aos assuntos tratados em um curso de CDI, pode-se destacar o cálculo de taxas de variação, áreas, volumes, problemas de máximos e mínimos de uma função, estudo das equações diferenciais, e suas diversas aplicações em algumas áreas como a Física no estudo do trabalho, cálculo de velocidade, centro de gravidade de uma figura, pressão e força hidrostática.

Para Courant e Robbins (2000), o CDI propiciou uma verdadeira revolução cultural, pois inaugurou uma fase no desenvolvimento de novos conceitos, após séculos de estudos baseados na abordagem axiomática da obra *Os Elementos*, do matemático grego Euclides (séc. V a.C.). Segundo os autores:

Após um período de lenta preparação, a revolução na Matemática e na Ciência iniciou sua vigorosa fase no século XVII com a Geometria Analítica e o Cálculo Diferencial e Integral. Embora a Geometria grega retivesse um lugar importante, o ideal grego de cristalização axiomática e dedução sistemática desapareceu nos séculos XVII e XVIII (COURANT e ROBBINS, 2000, p. xii).

Mesmo com o desaparecimento, segundo os autores, do modelo grego axiomático-dedutivo nos séculos XVII e XVIII, convém destacar que esse período foi extremamente produtivo no que se refere ao desenvolvimento de ideias e conceitos que antecederam a fase do rigor com o estabelecimento da Análise.

Os problemas considerados fundamentais no desenvolvimento histórico do CDI dizem respeito ao cálculo de áreas e do traçado de tangentes em um determinado ponto de uma curva.

O problema de áreas, também denominado de quadratura, baseava-se na construção utilizando-se apenas régua e compasso do quadrado de área igual à área da figura dada. Esse problema originou-se da tentativa de solucionar a questão da quadratura do círculo, inicialmente proposta pelo filósofo grego Anaxágoras (c. 500 a.C. – 428 a.C.), que consistia em construir um quadrado de área igual à de um círculo dado. No século XIX seria demonstrada a impossibilidade de se construir, apenas com régua e compasso tal quadrado, porém algumas contribuições para a solução desse problema evidenciaram as prováveis origens do Cálculo Integral.

Arquimedes (c. 287 a.C. – 212 a.C.), utilizando-se inicialmente de argumentos intuitivos e desprovidos de rigor, obteve o cálculo de áreas e volumes de diversas figuras e sólidos geométricos, efetuando, após suas descobertas, uma rigorosa demonstração.

Para o cálculo de áreas, Arquimedes utilizou o chamado “método da exaustão”, que consistia basicamente em “exaurir” a figura dada por meio de outras figuras, por exemplo, triângulos. Esse método foi atribuído à Eudoxo (c. 370 a.C.) e aperfeiçoado pelo próprio Arquimedes.

No caso particular da área do círculo, o processo usado por ele baseou-se em inscrever e circunscrever polígonos regulares no círculo, começando pelo hexágono, dobrando-se sucessivamente o número de lados, em que a área do círculo ficava sempre compreendida entre a área do polígono regular inscrito e o circunscrito, dado que as áreas desses polígonos vão se tornando mais próximas à medida que o número de lados se torna cada vez maior.

Por seu turno, o problema da tangente diz respeito ao traçado da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. A dificuldade da obtenção da reta que passa pelo ponto de tangência reside no fato de se descobrir sua inclinação, uma vez que por um ponto é possível traçar infinitas retas. Dentre todas elas, qual será a que mais se aproxima da curva nas vizinhanças do ponto específico?

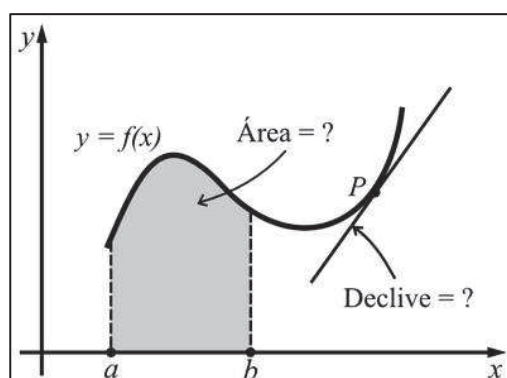
Apolônio (262 a.C. – 190 a.C.) apresentou em seu tratado *Tangências* (ou *Contatos*) o problema em que, dadas três coisas (um ponto, uma reta ou um círculo), deseja-se traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas, uma vez que tangência a um ponto significa que o círculo passa pelo ponto. Dez casos possíveis são mostrados na obra referentes a esse problema. Entretanto, Apolônio não oferece solução para eles, e alguns casos mais simples são encontrados na obra Os

*Elementos*, de Euclides, e a solução de um dos problemas mais complexos foi dada por Isaac Newton usando apenas régua e compasso<sup>1</sup>.

No entanto, pode-se considerar que a obra-prima de Apolônio, denominada *As Cônicas*, expõe um estudo sobre como traçar tangentes às curvas cônicas (elipses, parábolas e hipérboles), além do traçado de retas normais sobre elas.

Modernamente, com o estabelecimento vigoroso da Geometria Analítica e do desenvolvimento do Cálculo, esses dois problemas, a quadratura e o traçado de tangentes, em livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral como o de Simmons (2007), são apresentados da seguinte maneira:

**Figura 1** – Os problemas fundamentais do CDI (Simmons)



Fonte: Simmons, 2007, p. 69.

- o problema da área limitada sob o gráfico da função, o eixo das abscissas e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , que apresenta sua resolução no cálculo da integral definida  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , sendo  $F$  uma primitiva de  $f$ , ou seja, uma função tal que  $F' = f$  e  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ ;
- o problema da tangente consiste em encontrar a declividade  $m$  (coeficiente angular) da reta tangente num ponto  $(x_0, f(x_0))$  do gráfico de uma função, ou seja,  $m = f'(x_0)$ , sendo  $f'(x)$  a derivada da função  $f$ .

Esses dois problemas (quadratura e tangente) aparentemente não relacionados, deram origem, respectivamente a dois conceitos matemáticos considerados essenciais do Cálculo: a integral e a derivada.

<sup>1</sup> Dentre os dez problemas propostos por Apolônio, nos casos mais simples as três coisas são três pontos ou três retas, enquanto o problema considerado mais difícil resolvido por Newton consiste em traçar um círculo tangente a três círculos.

A integral fundamenta-se no cálculo do limite da soma de quantidades infinitamente pequenas, enquanto a derivada está ligada basicamente ao estudo de taxas de variação para valores também infinitamente pequenos.

Convém destacar que o conceito de uma quantidade infinitamente pequena, como segmentos de reta, áreas ou porções de volume, já era uma questão conhecida pelas teorias do atomismo, originado com Demócrito (460 a. C. – 370 a. C.), que defendia a ideia segundo a qual a matéria é constituída de elementos indivisíveis, os átomos, e que os pitagóricos entendiam que a matéria seria formada por corpúsculos de menor tamanho que qualquer coisa.

Pode-se efetuar uma comparação de que a operação de integração está para a adição, visto que apresenta em sua gênese o conceito da soma de parcelas infinitamente pequenas, assim como a derivação está para a subtração, por tratar de problemas que envolvem taxas de variação, sendo a relação mútua e recíproca entre essas operações dada por um teorema. Portanto, a integração e derivação são operações inversas uma da outra, bem como pode-se associar a relação inversa e recíproca entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes.

Nesse contexto, a descoberta dessa relação conferiu a Isaac Newton (1642-1726) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de forma simultânea e independente, e que segundo Courant e Robbins (2000, p. 453) “possuem o mérito de terem identificado claramente a estreita associação entre esses dois problemas”.

Essa relação entre tais problemas é denominada hoje Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Esse teorema estabelece que a integração e a derivação são operações inversas uma da outra, de que se pode concluir que os problemas de áreas limitadas sob o gráfico de uma função em um intervalo e o problema da determinação da inclinação da reta tangente em um ponto dessa função podem ser resolvidos juntos pois, solucionado um problema, o outro também passa a ser esclarecido.

Alguns autores de livros didáticos destacam a importância do TFC não somente pela unificação dos problemas de quadratura e traçado da reta tangente em um ponto de uma curva, mas também pelo seu legado deixado para o desenvolvimento de estudos posteriores do CDI e da Análise. De acordo com Simmons (2007):

A grande realização de Newton e Leibniz foi reconhecer e explorar a íntima conexão entre esses dois problemas, que ninguém tinha entendido completamente. Especificamente, eles foram os primeiros a entender o significado do *Teorema Fundamental do Cálculo*, o qual diz, com efeito, que a solução do problema da tangente pode ser usada para resolver o problema da área. [...] foi descoberto por cada um deles, independentemente um do outro, e eles e seus sucessores usaram-no para unir as duas metades do assunto numa arte de resolução de problemas de poder e versatilidade impressionantes (SIMMONS, 2007, p. 70).

Stewart (2010) comenta em seu livro a importância do TFC em um pequeno resumo histórico dos principais problemas relacionados ao Cálculo:

O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do Cálculo e realmente um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudócio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curvas eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram para o Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiadores são acessíveis a todos nós (STEWART, 2010, p. 364).

Pode-se considerar em grande medida a importância da concepção que Newton e Leibniz tiveram de relacionar derivação e a integração como processos inversos entre si. Esse fato pode ser observado segundo a afirmação de Grattan-Guinness (1997):

[...] os livros-textos concordam com isso e apontam para o “Teorema Fundamental”, o princípio de que diferenciação e integração são processos inversos, como principal fonte de avanço:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x)$$

para expressar o problema no simbolismo moderno. Contudo, esse teorema é somente parte de sua contribuição, e a segunda parte dela. Estes dois matemáticos primeiramente perceberam que a finalidade do cálculo era encontrar novas funções ou relações das variáveis de uma dada função ou relação:  $df(x)/dx$ , ou algo análogo, para diferenciação, e a função integral indefinida  $\int f(x) dx$ , para integração (GRATTAN-GUINNESS, 1997, p. 70, tradução de Frederico da Silva Reis).

O estudo do TFC engloba muitos outros assuntos a ele relacionados, tais como os conceitos de continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade de uma função.

De modo geral, dada uma função  $f$  contínua em um intervalo  $[a, b]$  pode-se construir uma função  $F$ , denominada como uma função primitiva de  $f$ , derivável em  $[a, b]$  e definida por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

A relação existente entre as funções  $F$  e  $f$  pelas operações de integração e derivação, dada pelo TFC, pode ser enunciada da seguinte maneira:

**8.12. Teorema Fundamental do Cálculo.** *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ . Então, a função  $F$ , definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

*é derivável nesse intervalo e  $F'(x) = f(x)$  (ÁVILA, 2006, p. 207).*

Ávila (2006) reitera ainda que nos cursos de CDI calculam-se integrais em termos de primitivas por meio de um procedimento que é consequência do TFC descrito anteriormente em 8.12 através da fórmula  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , sendo  $F'(x) = f(x)$ .

Além da conexão estabelecida pelo teorema entre as funções  $F$  e  $f$ , podem-se destacar alguns aspectos ligados à natureza dessas funções para que tal relação se verifique, por exemplo, a necessidade de a função  $f$  ser contínua e limitada (portanto integrável) para a existência de uma função primitiva  $F$ , tal que  $F'(x) = f(x)$  e, consequentemente a diferenciabilidade da função  $F$ .

Outro aspecto a se destacar diz respeito ao fato de a expressão  $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$  relacionar ao mesmo tempo uma acumulação, dada pela integral, e uma variação dessa acumulação, resultante da diferença entre dois valores da imagem de  $F$ .

Entretanto, nos últimos anos, no ensino e aprendizagem das noções do CDI, as operações de integração e derivação não têm sido relacionadas e fortemente conectadas por meio do TFC. Isso é evidenciado nas pesquisas em Educação Matemática voltadas ao Ensino Superior, em que se observa a incompreensão por parte de alunos desse teorema, a ausência da ênfase dessa relação nos livros didáticos, com indícios da pouca exploração desses elementos por parte dos professores ao lecionarem a disciplina de Cálculo. Algumas pesquisas encontradas como de Segadas Vianna (1998), Artigue (2002), Picone (2007) e Campos (2007) elucidam esse panorama, conforme será descrito posteriormente.

Em geral, no âmbito da Educação Matemática, o ensino e a aprendizagem do CDI vêm despertando o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. Observa-se um número crescente de pesquisas que tratam do tema, reflexo em grande medida da utilização de seus conceitos, teoremas e algoritmos na resolução de muitas questões e problemas da Matemática, além do fracasso escolar no que diz respeito ao desempenho dos alunos no ensino superior. Para Iglioni (2009):

É fato indiscutível que é alto o percentual de estudantes no nível superior cujo desempenho na aprendizagem da Matemática, em especial de Cálculo, tem deixado muito a desejar. A nosso ver, a pesquisa tem papel fundamental no levantamento de causas e na indicação de caminhos a serem trilhados na busca de melhorias (IGLIONI, 2009, p.13).

Lecionando Cálculo Diferencial e Integral desde 2004, percebo e concordo com o fato descrito por Iglioni (2009), pois os alunos ingressantes em um curso superior vêm demonstrando rendimento insatisfatório ao cursarem a disciplina de Cálculo, o que reitera a importância da pesquisa na busca de possíveis soluções para tal problema.

Muitas pesquisas endossam e relatam as dificuldades, a incompreensão e os obstáculos apresentados pelos alunos ao entrarem em contato com alguns conceitos abordados em um curso de Cálculo. Alguns estudantes, em muitas situações, podem se sentir como se estivessem entrando em um novo mundo que fora até então totalmente inexplorado, mesmo pressupondo-se conhecer alguns assuntos abordados no ensino fundamental e médio, como funções e números reais, dentre outros. Sobre esse fato, Silva (2009) afirma que:

Ao ingressarem no curso superior, os estudantes levam suas expectativas: como no ensino médio logravam sempre boas avaliações em matemática, esperam que o curso de Cálculo não represente problemas para o seu aprendizado. Entretanto, ao se deparar com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, e com novas questões impactantes, como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais (SILVA, 2009, p.1).

Observo, embasado na minha experiência profissional, o comentário de Silva (2009) de que no ensino médio os conteúdos são tratados de maneira isolada, baseando-se na resolução de questões por meio de algoritmos ou fórmulas memorizáveis, e que isso pode se refletir em obstáculos encontrados pelos alunos ao ingressarem no ensino superior.



Além da prática docente, essa sensação de “habitar um planeta totalmente desconhecido” ao cursar a disciplina de CDI tornou-se recorrente de maneira semelhante na minha vida escolar, o que gerou ao longo de minha experiência acadêmica algumas inquietações e questionamentos.

No tocante ao interesse pelo estudo do teorema, iniciei a formação acadêmica ingressando em um curso superior na área de Tecnologia Mecânica. Ao entrar em contato com a disciplina de CDI, dentre outros assuntos tratados, o teorema que me chamou a atenção e despertou interesse pelo seu estudo foi justamente o TFC. Todavia, para a minha frustração, basicamente sua abordagem durante as aulas se restringia à sua aplicação no cálculo de integrais definidas, sem apresentar a oportunidade de refletir sobre qual a relação existente entre as operações de integração e a derivação e qual o motivo de esse teorema ser efetivamente considerado fundamental.

Posteriormente, dando continuidade aos meus estudos, cursei Licenciatura em Matemática e minhas inquietações tornaram-se ainda maiores, pois percebi que estudar os conceitos de derivada e integral aparentava em um primeiro momento trabalhar com objetos totalmente distintos, dois “mundos isolados” que não apresentavam nenhuma relação.

Um fato importante que em grande medida despertou ainda mais o meu interesse pelo estudo do TFC ocorreu ao participar de uma aula do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática. Em uma atividade proposta pelo professor da disciplina Didática da Matemática, os alunos deveriam, a partir da representação gráfica de uma função, identificar o gráfico da sua função primitiva. Os estudantes envolvidos em tal atividade, dentre eles eu, demonstraram muita dificuldade na resolução da questão, não associando os gráficos de uma função ao de sua primitiva. Quais seriam os fatores e os conceitos relacionados que poderiam contribuir para tais dificuldades?

Refletindo sobre o assunto e pensando no cenário do ensino e aprendizagem do CDI, considerando temas fundamentais como as operações de integração e derivação, formulei o seguinte questionamento: seria possível elaborar uma sequência de ensino que fizesse emergir e evidenciar a ligação entre esses dois conceitos fundamentais do Cálculo? Posso dizer que esse fato me motivou e me encorajou a iniciar um projeto de pesquisa que procurasse buscar respostas para tal indagação.



Meu próximo passo foi iniciar o curso de Doutorado em Educação Matemática, inserindo-me no grupo de pesquisas denominado “O Elementar e o Superior em Matemática”, que possui um projeto de pesquisa em andamento supervisionado pelo professor Dr. Benedito Antonio da Silva, intitulado “Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor”. Esse projeto apresenta, dentre outras temáticas de pesquisa, o estudo do TFC, o que contemplou e possibilitou totalmente o início e o desenvolvimento da minha pesquisa.

Percebi que algumas pesquisas concluídas e outras em andamento no grupo apresentavam o TFC como tema, entretanto um número reduzido dessas pesquisas destacava o enfoque de se buscar uma intervenção no ensino que contribuísse para a compreensão da importância do teorema e a ligação existente entre as operações de derivação e integração.

Além das pesquisas desenvolvidas no grupo de estudos, observei ao efetuar uma breve revisão bibliográfica, alguns resultados importantes e pertinentes de serem destacados quanto ao ensino e aprendizagem do TFC.

Segadas Vianna (1998), em sua pesquisa, investigou a compreensão que os alunos possuíam do TFC, com o objetivo de procurar identificar as dificuldades que eles manifestaram no tocante aos conceitos envolvidos no teorema, como continuidade de uma função que interferem em sua compreensão de maneira explícita ou implícita.

A autora concluiu que os alunos não interpretam nem identificam o teorema na representação gráfica, e, segundo ela, as representações gráficas em geral são pouco utilizadas como facilitadores na resolução de alguns problemas ou como auxiliares na compreensão de uma definição ou teorema.

Em minha prática docente percebi que não somente o TFC, mas outros temas abordados em um curso de Cálculo, não são interpretados graficamente pelos alunos, o que pode, segundo a autora, auxiliar na compreensão de tais assuntos.

Artigue (2002), analisando a concepção dos estudantes sobre alguns conceitos ministrados em um curso de Cálculo e Análise Real, encontrou alguns resultados semelhantes aos de Segadas Vianna (1998), como a constatação de que os alunos não trabalham graficamente com questões relacionadas ao TFC, e eles

parecem ter dificuldade de aplicar o teorema principalmente naquelas situações referentes a relacionar o gráfico de uma função definida em um intervalo e o gráfico de sua função primitiva.

Essa falta da manipulação do registro gráfico nas questões que envolvem a aplicação do TFC pode ser encontrada na pesquisa de Campos (2007), que, ao analisar alguns livros de CDI, constatou que os autores privilegiam o registro algébrico na abordagem e na resolução de exercícios sobre o teorema.

Observei, ao revisar e elaborar as ementas dos cursos de CDI nas instituições em que ministro aulas, que muitos autores de livros-texto de Cálculo colocam em segundo plano a utilização do registro gráfico tanto no aspecto teórico quanto na resolução de exercícios. Considero que esse fato pode se tornar recorrente nas aulas ministradas pelos professores em um curso de CDI bem como nas estratégias elaboradas pelos alunos na resolução de questões.

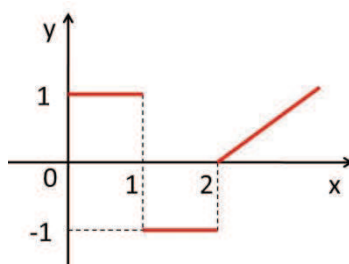
Anacleto (2007), em sua pesquisa, procurou investigar os conhecimentos mobilizados pelos alunos que cursaram a disciplina CDI e que já haviam estudado o TFC quanto à inter-relação entre derivação e integração. Dentre alguns resultados obtidos, a autora concluiu que muitos alunos envolvidos na pesquisa apresentaram uma mobilização incompleta dos conceitos de derivada, integral e continuidade de uma função, e conseqüentemente um domínio parcial do TFC, por apresentarem em suas resoluções apenas conteúdos e algoritmos memorizados.

Ademais, os resultados de pesquisa de Picone (2007) alertam que grande parte dos professores entrevistados em seus trabalhos não explora graficamente o TFC em suas aulas, fazendo com que seus alunos em grande medida fiquem restritos apenas a manipulações algébricas relacionando uma função primitiva e sua respectiva derivada e vice-versa.

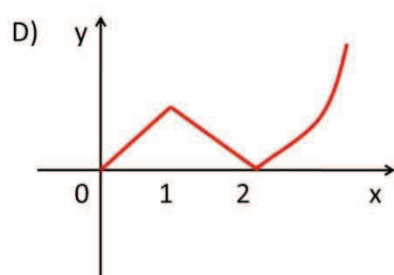
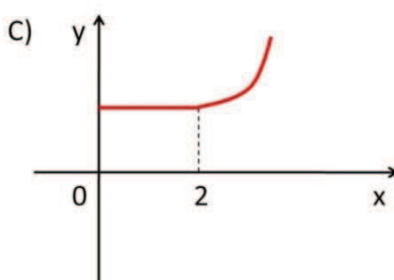
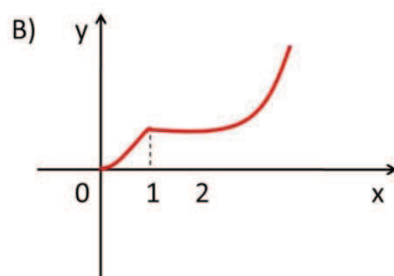
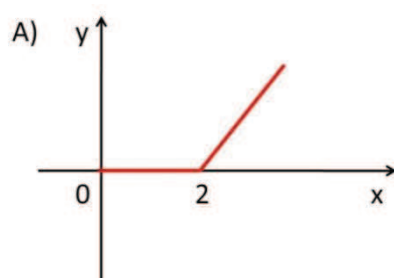
Como exemplo da incompreensão do teorema por parte dos estudantes universitários que cursaram a disciplina de Cálculo, em 2005 foi realizado o Exame Nacional de Desempenho do Estudante (Enade) cujo objetivo é avaliar os cursos de graduação das universidades públicas e privadas em todo o Brasil. Especificamente na prova destinada aos estudantes concluintes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, a prova apresentou uma questão que sugeria a manipulação de elementos ligados do TFC, conforme enunciado a seguir:

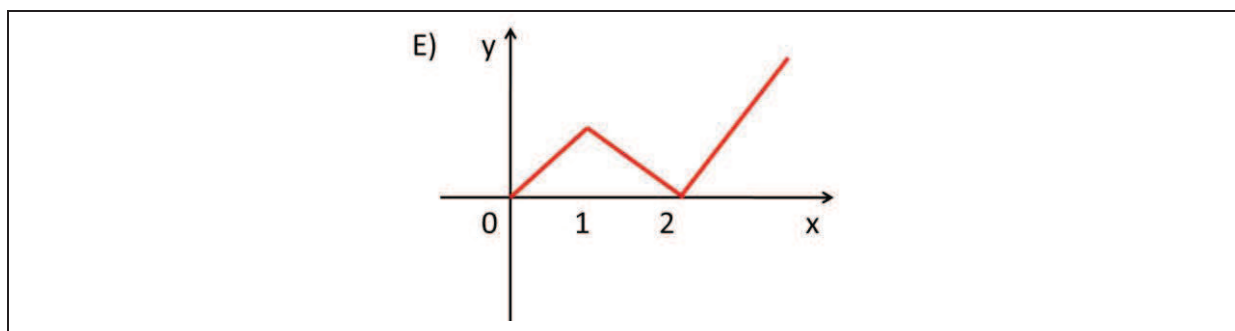
**Quadro 1 – Questão do Enade 2005**

Considere  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujo gráfico está representado a seguir:



Assinale a opção que melhor representa o gráfico da função  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ :





Fonte: Autor, 2012.

A questão procurava relacionar o gráfico de uma função definida em um intervalo e de sua respectiva função primitiva, dada por uma integral de limite superior variável.

Mesmo tratando-se de uma questão do tipo teste, em que não se analisa a resolução elaborada pelos alunos, mas somente a resposta assinalada, essa questão pode apresentar alguns aspectos interessantes na sua resolução.

Por meio da representação gráfica da função, por exemplo, é possível determinar algebricamente a lei de formação da função primitiva e posteriormente construir o seu respectivo gráfico, o que poderia tornar trabalhosa a sua resolução.

O relatório de resultados emitido pelo próprio Enade atesta que os alunos que resolveram a prova classificaram essa questão como “difícil”, o que de fato não seria nada surpreendente em virtude da ausência de sua abordagem nos livros didáticos e da falta de sua exploração pelos professores.

Além das dificuldades dos alunos na compreensão do TFC e principalmente da ligação existente entre as operações de integração e derivação, alguns resultados de pesquisas também apontam a falta de conexão entre a representação gráfica e a analítica de uma função, que de acordo com Segadas Vianna (1998), interferem na interpretação do TFC.

Segundo Tall (1991), os alunos apresentam uma compreensão tipicamente algébrica dos principais conceitos relacionados ao TFC, pois eles se utilizam apenas de algoritmos e técnicas memorizáveis, e, quando necessitam da interpretação geométrica, de acordo com Segadas Vianna (1998), são adotados imagens e esquemas interiorizados pelos alunos que nem sempre correspondem com a definição formal de um conceito.

Essa utilização de algoritmos e técnicas algébricas é decorrente, de certa forma, do modelo de ensino de Cálculo que privilegia a apresentação dos conceitos por meio de definições, demonstrações e exercícios, o que em grande medida se reflete nas propostas de ensino dos conceitos fundamentais não favorecendo inicialmente o desenvolvimento cognitivo do aluno, como o uso de analogias e da intuição na construção do conhecimento, seguido da apresentação de exemplos e contraexemplos até a etapa da demonstração.

A Matemática é uma ciência que se utiliza do raciocínio lógico-dedutivo, entretanto em muitas situações, no tocante ao ensino de seus conceitos, não são explorados alguns aspectos cognitivos como a intuição, a imaginação, o uso de recursos gráficos e geométricos, principalmente no processo de construção do conhecimento, sendo o tratamento dos objetos matemáticos feito de maneira axiomática.

Ávila (2011) explicita e defende o ponto de vista do ensino baseado em características intuitivas:

A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos – uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática – é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta. O pensamento matemático vai muito além do raciocínio dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução (ÁVILA, 2011, p. 4).

Para o autor, formular conjecturas por meio de analogias, intuições e a seguir demonstrá-las rigorosamente constitui uma tarefa essencial do pesquisador em Matemática:

O pesquisador, com sua experiência e familiaridade em determinada área de investigação, valendo-se das várias modalidades do raciocínio (indução, analogia de uma situação com outra, argumentos de plausibilidade) e da intuição, é levado a suspeitar da validade de um novo resultado ou teorema. A demonstração, em geral, é a etapa final, que completa o trabalho de investigação (ÁVILA, 2011, p. 5).

Courant e Robbins (2000) criticam o método axiomático afirmando que ele traz poucos benefícios, a não ser que os postulados sejam simples e pouco numerosos. Conforme os autores, em contrapartida ao ensino carregado de abstrações, que pode ser resumido apenas a um sistema construído por meio de axiomas e demonstrações e sem nenhuma preocupação com a exploração de

alguns aspectos cognitivos, a intuição constitui o núcleo de qualquer invenção matemática, mesmo nos campos mais abstratos, sendo o elemento da construção dos conceitos matemáticos uma importante força propulsora. Para os autores:

O ensino da Matemática tem algumas vezes degenerado em exercício repetitivo e vazio de soluções de problemas, o que pode desenvolver capacitação formal, mas não conduz a uma real compreensão ou maior independência intelectual. A pesquisa matemática tem mostrado uma tendência no sentido da superespecialização e da ênfase excessiva na abstração (COURANT e ROBBINS, 2000, prefácio do autor).

Ávila (2011) reitera a importância da intuição na construção do conhecimento matemático:

A intuição é a faculdade mental que permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a intervenção do raciocínio. Os matemáticos frequentemente se referem a algum fato como “intuitivo”, querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que “intuitivo” não é sinônimo de “fácil”. Há muitas verdades profundas e difíceis que são aprendidas pela intuição (ÁVILA, 2011, p. 4).

O autor ainda destaca que muitos matemáticos e educadores defendem a atividade matemática e o processo de criação como o resultado de uma dosagem equilibrada dos vários recursos do raciocínio. No caso específico do ensino e aprendizagem de Matemática, ele afirma que:

Muitos matemáticos ilustres, quando tratam de Pedagogia, são concordantes em insistir na importância de se estimular a imaginação dos estudantes, de se valer o professor do raciocínio heurístico, dos argumentos de plausibilidade e das analogias que possam eventualmente ser exploradas no processo de aprendizagem e descoberta. (ÁVILA, 2011, p. 15).

Apesar de diversas concepções, pontos de vista e interpretações, o uso da intuição, imaginação, raciocínio dedutivo e visualização geométrica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática vem sendo defendido e estudado por muitos pesquisadores.

O filósofo e matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912) defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento científico. O autor faz críticas à ciência concebida

como absoluta e inquestionável, e discute a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção do conhecimento matemático.

Além de Poincaré (1995), o psicólogo romeno Efraim Fischbein (1920 – 1998) demonstrou em seus trabalhos quais as características do raciocínio intuitivo, algumas possíveis classificações para este, bem como o papel e a importância do seu desenvolvimento na aquisição do conhecimento matemático.

Fischbein (1987) considera a Matemática como uma criação humana, em que os objetos matemáticos devem ser construídos em um processo de tentativas, erros, hesitações, conjecturas, demonstrações, provas e refutações. Para que os conceitos sejam desenvolvidos segundo essa perspectiva, devem-se levar em conta aspectos como os componentes intuitivo, formal e algorítmico e suas inter-relações.

Tais aspectos do uso do raciocínio intuitivo no ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos apresentados por Poincaré (1995) e Fischbein (1987) vêm ao encontro da nossa proposta de pesquisa e servirão não somente como hipótese, mas como uma lente geral, uma orientação sobre a busca de uma alternativa de ensino do TFC.

Acredita-se que, além de procurar entender quais as dificuldades e obstáculos encontrados na aquisição de um conceito matemático, buscar propostas alternativas que possam minimizar tais dificuldades também são objetos de estudo presentes em muitas pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

No tocante ao ensino e aprendizagem do TFC, percebe-se, pelos resultados de algumas pesquisas descritas, que na maioria dos casos em um curso de Cálculo não se dá um tratamento da relação mútua entre as operações de integração e derivação, seja por meio de atividades propostas pelos professores, ou até mesmo na abordagem dos livros didáticos que não enfatizam o tema.

Parece-nos que a falta de exploração dessa relação e, bem assim, a escassez em sua abordagem da utilização do registro gráfico podem contribuir para a incompreensão por parte dos alunos do teorema.

Diante do problema da ausência do enfoque da relação existente entre as operações de integração e derivação no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e, conseqüentemente, da dificuldade dos alunos na compreensão do teorema, esta pesquisa tem como objetivo realizar um estudo didático e epistemológico sobre o TFC.

A partir deste estudo, será feita uma proposta didática de uma sequência de ensino do teorema, baseada em possíveis situações-problema que auxiliem na compreensão da relação entre integração e derivação, buscando emergir tal conexão.

Com isso, de acordo com o cenário das pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do TFC e o problema de pesquisa descritos anteriormente, busca-se responder a seguinte questão:

**- Uma intervenção de ensino baseada nos princípios da intuição contribui para a compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação-problema que propicie emergir e evidenciar tais relações?**

Ao procurar responder essa pergunta, deseja-se também avaliar qual o alcance que uma intervenção desse tipo traz para o ensino e aprendizagem do TFC.

Como subsídio para o estudo, elaboração e análise da intervenção de ensino, efetuou-se uma revisão bibliográfica das principais pesquisas relacionadas à problemática bem como um estudo histórico da origem e do desenvolvimento dos principais conceitos ligados ao TFC.

Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao uso da intuição na construção do conhecimento matemático segundo a visão de Henri Poincaré (1854 – 1912), que discute em suas obras, como *A Ciência e a Hipótese* (1984), *O Valor da Ciência* (1995) e *Ciência e Método* (2004) alguns temas sobre o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento científico, bem como as noções e características do raciocínio intuitivo descritas por Efraim Fischbein em seus trabalhos *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (1987) e *The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity* (1991), por exemplo.

Para a análise dos resultados obtidos na intervenção de ensino, além dos aspectos relacionados à intuição, segundo Poincaré (1995) e Fischbein (1987), empregou-se como referencial teórico o papel da visualização no ensino do Cálculo e as inter-relações com a intuição e o rigor discutidas por David Tall nos artigos *Using Technology to Support and Embodied Approach to Learning Concepts in*



*Mathematics* (2002a) e *Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus* (1991a).

A pesquisa realizada é de caráter qualitativo, apresentando como procedimentos metodológicos uma pesquisa documental cujo resultado servirá de subsídio para a elaboração de dois instrumentos de coleta de dados: um questionário-piloto e uma sequência de ensino.

O trabalho está formatado em seis capítulos: o Capítulo 1 é destinado à **Revisão Bibliográfica**, em que são descritas e analisadas as principais pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do TFC.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação do **Contexto Histórico** das principais ideias relacionadas ao desenvolvimento do teorema.

No Capítulo 3 é apresentada a **Fundamentação Teórica** utilizada nesta pesquisa.

A **Metodologia** empregada e os procedimentos metodológicos, a descrição do instrumento de coleta de dados bem como a resolução e das questões respondidas pelos sujeitos da pesquisa constituem o Capítulo 4.

No Capítulo 5 é descrita e analisada a **Sequência de Ensino** que constitui o objetivo desta pesquisa.

Os **Resultados** referentes à intervenção de ensino empregada serão comentados no Capítulo 6, sendo sucedido pelas **Considerações Finais** da pesquisa.

# CAPÍTULO I

“Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente  
cômodas, que nos dispensam, ambas, de refletir”.  
HENRI POINCARÉ

---

## CAPÍTULO 1 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para situar a problemática da pesquisa, este capítulo é dedicado a delinear, descrever e analisar o panorama dos principais trabalhos envolvendo o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) realizados no Brasil e em outros países nos últimos anos, buscando discutir e comparar quais os resultados significativos encontrados concernentes às dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão do teorema e dos conceitos a ele relacionados, o que pode contribuir para a formulação de algumas conjecturas no sentido de procurar esboçar possíveis atividades que auxiliem na compreensão da relação existente entre integração e derivação, o que constitui a essência do teorema.

A revisão bibliográfica, de um modo geral, possui um papel importante nas pesquisas acadêmicas. Por meio dela, o pesquisador pode traçar um quadro de estudos realizados e dos resultados encontrados sobre o objeto da pesquisa, com o intuito de melhor situar o atual estágio da sua problemática no cenário acadêmico.

Creswell (2010) explicita a importância da revisão bibliográfica em um estudo qualitativo:

Uma revisão da literatura significa localizar e resumir os estudos sobre um tópico. Com frequência são esses estudos de pesquisa (desde que você esteja conduzindo um estudo de pesquisa), mas podem também incluir artigos conceituais ou reflexões que proporcionem estruturas para se pensar sobre os tópicos (CRESWELL, 2010, p.55).

Além disso, tal revisão permite ao pesquisador fazer com que, segundo Laville e Dionne (2008), um problema sentido se transforme em um problema de pesquisa. O problema sentido pode ser entendido, segundo os autores, como um problema que o pesquisador teve consciência por meio, por exemplo, de uma percepção intuitiva. A revisão bibliográfica possibilita também formular algumas hipóteses relativas ao objeto de estudo, visando alavancar novas propostas de pesquisas acerca do tema em questão. Para os autores:

Fazer a revisão da literatura em torno de uma questão é, para o pesquisador, revisar todos os trabalhos disponíveis, objetivando selecionar tudo o que possa servir em sua pesquisa. Nela tenta encontrar essencialmente os saberes e as pesquisas relacionadas com sua questão; deles se serve para alimentar seus conhecimentos, afinar suas perspectivas teóricas, precisar e objetivar seu aparelho conceitual (LAVILLE e DIONNE, 2008, p. 112).

O primeiro passo para a revisão consistiu em selecionar os principais trabalhos relacionados com a problemática. Como critério, priorizaram-se as teses e dissertações, livros didáticos e artigos publicados em revistas científicas nos últimos vinte anos, cujo tema esteja ligado ao ensino e aprendizagem do TFC.

Foi realizada uma busca nas principais bibliotecas das universidades do país, e muitos trabalhos foram obtidos por meio de *sites*, bibliotecas virtuais e anais de congressos disponibilizados em mídias eletrônicas, procurando assim produções científicas que apresentassem palavras-chave ligadas ao objeto da pesquisa.

De forma resumida, encontrou-se um número significativo de trabalhos, sendo que o estudo das dificuldades do ensino e aprendizagem do TFC é focado em pesquisas nacionais e também em outros países, como França, Inglaterra e Estados Unidos, em alguns artigos publicados em anais de congressos e publicações periódicas, porém tal como no Brasil observou-se que não há uma quantidade razoável de teses e pesquisas que fundamentem e discutam de maneira mais ampla a problemática em questão, demonstrando assim significativamente a necessidade de um estudo aprofundado do tema.

Em uma breve análise, é possível observar algumas tendências ligadas às pesquisas desenvolvidas sobre o ensino e a aprendizagem do TFC nos últimos anos, não somente no aspecto dos procedimentos metodológicos empregados nas pesquisas, como a realização de questionários e entrevistas envolvendo alunos e professores em um curso de Cálculo, mas também principalmente no que se refere aos resultados encontrados com a presente questão.

Dentre as pesquisas encontradas, os resultados relevantes foram descritos e analisados a seguir.

## **1.1 – Principais pesquisas**

Inicialmente foi analisada a tese de Segadas Vianna (1998), que investigou a compreensão dos estudantes universitários sobre o TFC com o objetivo de procurar

identificar quais as dificuldades apresentadas por eles relativas aos conceitos envolvidos nesse teorema considerados primordiais e que interferem no seu entendimento de maneira explícita ou implícita, além de uma verificação realizada sobre os aspectos formais ligados a essa compreensão, como definições e teoremas a ele relacionados.

O conceito de função, para a autora, desempenha um papel importante no desenvolvimento de outros objetos matemáticos, como limite, continuidade e inclinação de uma reta tangente. Além disso, no TFC a noção de função auxilia os estudantes a compreender o modo com que uma função primitiva e sua derivada são definidas na expressão  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , em que  $F'(x) = f(x)$ .

Em sua análise, a autora discute e apresenta a ideia de imagem de conceito e definição de conceito, elaborados por Tall e Vinner (1981), autores que trabalharam com a referida autora em grupos de estudos sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

Por imagem do conceito os autores consideram o conjunto de experiências e impressões variadas de um determinado conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos a ele associados, que se desenvolvem ao longo do tempo à medida que o indivíduo sofre novos estímulos. A definição do conceito está ligada ao uso das palavras utilizadas pelos estudantes para se referirem ou explicarem um determinado conceito.

Segundo os autores, as imagens incorretas de um conceito científico formadas mentalmente pelos alunos, decorrentes de experiências vivenciadas por eles no processo de ensino, passam a adaptar-se a uma definição formal que nem sempre corresponde à definição correta do conceito.

Para Segadas Vianna (1998), a grande dificuldade do uso dessas imagens pelos alunos ocorre ao tentarem estabelecer a conexão entre as diferentes representações de uma função, particularmente a relação existente entre a representação gráfica e a representação analítica. A autora comenta algumas pesquisas realizadas sobre a utilização incorreta dessas imagens pelos alunos.

Como exemplo, o trabalho de Tall (1991) demonstra que os alunos não observam que a derivada de uma função é também uma função, com um gráfico

associado a ela. Para eles, a imagem da derivada de uma função está relacionada com a inclinação da reta tangente em um determinado ponto do gráfico da função.

Essa dificuldade de relacionar a imagem que os alunos apresentam sobre um objeto matemático e a sua definição foi constatada de maneira semelhante, segundo Segadas Vianna (1998), no conceito de continuidade de uma função, que possui uma vital importância na discussão da interpretação visual e prova do TFC.

Em outro trabalho, elaborado por Tall e Vinner (1981) sobre a continuidade da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , dos 41 estudantes que responderam à questão, 6 destes classificaram-na como uma função contínua e 35, como uma função descontínua. A justificativa dada pelos alunos a respeito de uma função ser contínua é a imagem interiorizada por eles no sentido de o gráfico não possuir lacunas, ou de que o gráfico só pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel.

Esses problemas diagnosticados nas pesquisas citadas pela autora das imagens produzidas pelos alunos a respeito de derivada e da continuidade de uma função interferem diretamente na compreensão do TFC e na habilidade de interpretá-lo graficamente.

No que diz respeito à pesquisa desenvolvida por Segadas Vianna (1998), inicialmente realizou-se um questionário-piloto com 72 estudantes do primeiro ano de graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) provenientes dos cursos de Ciências da Computação e Engenharia contendo cinco questões que avaliavam o domínio dos alunos do TFC, os conceitos ligados a este e o conhecimento de como aplicá-lo, além de duas questões que visavam sondar suas crenças sobre a demonstração do TFC.

Após a análise do questionário-piloto, a autora elaborou um novo questionário, e sua pesquisa foi dividida em três fases:

- na primeira fase, 148 estudantes do primeiro ano de graduação da UFRJ, provenientes dos cursos de Matemática, Ciências da Computação e Engenharia e que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, responderam um questionário dividido em duas partes: a primeira parte apresentava questões envolvendo as principais estratégias utilizadas pelos estudantes ao enfrentarem questões relacionadas ao TFC e sobre a continuidade de uma função; a segunda parte visava analisar uma ideia geral dos alunos relativamente às generalizações em

Matemática, explorando as concepções dos estudantes sobre o processo de prova e demonstração do TFC;

- na segunda fase, após a análise das respostas do questionário realizaram-se entrevistas com 26 estudantes que participaram da primeira fase e foram selecionados pela autora, dado que as entrevistas foram planejadas no sentido de explorar mais profundamente alguns dos argumentos que eles usaram para resolver as questões da primeira fase. Tais questionários foram organizados de forma semiestruturada, e algumas das questões foram destinadas a todos os entrevistados e outras elaboradas a partir das respostas específicas do questionário da primeira fase;

- na terceira fase foram realizadas no computador atividades baseadas nas entrevistas com 17 estudantes utilizando o *software Graphic Calculus*, para explorar com maiores detalhes como os alunos visualizavam alguns dos conceitos relacionados ao TFC, como diferenciação e integração, bem como o teorema em si. Não houve intenção segundo a autora de avaliar o *software* ou utilizar as atividades como uma intervenção de ensino. O computador foi utilizado nesta pesquisa como outra possibilidade para examinar a compreensão dos alunos sobre os conceitos ligados ao teorema nesse ambiente.

Quanto aos resultados encontrados, a autora observou que os alunos apresentaram dificuldades na compreensão e resolução de questões que envolvem não somente o TFC, mas também com assuntos correlatos tais como integração e diferenciação de uma função, continuidade e diferenciabilidade. Mais especificamente essas dificuldades podem ser resumidas da seguinte maneira: compreensão e representação gráfica da função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , bem como suas variáveis  $x$  e  $t$  e a relação entre continuidade e diferenciabilidade de funções.

No tocante à utilização das imagens visuais associadas aos conceitos de integração e diferenciação na resolução de problemas, constatou-se que mesmo os alunos apresentando uma imagem, por exemplo, de integral definida como área, esse conceito não foi utilizado na resolução da questão  $\int_{-1}^1 |x| dx$ , pois tentaram resolvê-la de maneira algébrica por procedimentos algorítmicos. Verificou-se uma discordância entre a definição formal e a imagem de conceito apresentado pelos alunos para essa questão.

Nem todos os alunos familiarizados com as imagens de conceitos como

diferenciação e integração conseguiram visualizar os gráficos das funções  $f$  e  $F$ , sendo  $F' = f$ . Em particular observou-se uma dificuldade maior na construção do gráfico da função  $F$  a partir da função  $f$ .

Para a autora, esses conceitos não são evidentes na mente dos estudantes, pois eles fazem uso de imagens que contêm somente aspectos parciais das definições ou que eram baseadas em alguns exemplos particulares. Essa visão fragmentada prejudicou consideravelmente a visualização geométrica e a demonstração do TFC.

De modo geral, a autora concluiu que os alunos apresentam como ferramentas para resolução de problemas que envolvem de maneira implícita ou explícita a utilização do TFC apenas procedimentos algorítmicos memorizáveis, como o uso excessivo da representação algébrica.

Uma pesquisa baseada nos trabalhos de Segadas Vianna (1998) é uma dissertação de mestrado realizada por Anacleto (2007), que procurou investigar os conhecimentos mobilizados pelos alunos que cursaram a disciplina CDI e que já haviam estudado o TFC quanto à inter-relação entre derivação e integração, cuja fundamentação teórica era concernente à dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros de Douady (1987).

Baseada no questionário elaborado por Segadas Vianna (1998), a pesquisa realizada consistiu na resolução de questões por parte dos alunos de um curso em Licenciatura em Matemática em uma universidade particular de São Paulo, cujo objetivo era investigar se eles identificavam que:

- a derivada da integral é a função integranda;
- a integral (indefinida) da derivada de uma função é a própria função;
- a integral de uma função resulta do cálculo da diferença entre o valor de uma primitiva dessa função no limite superior e no limite inferior de integração;
- a derivação e a integração são operações inversas uma da outra.

Além disso, o trabalho da autora tinha como objetivo verificar como os alunos manipulavam conceitos relacionados ao TFC, quais sejam integrabilidade, diferenciabilidade, continuidade, entre outros.

A pesquisa mostrou que os alunos conseguem realizar as operações de integração e derivação de uma função no domínio algébrico, porém no geométrico eles apresentaram dificuldade na resolução de problemas envolvendo gráficos, sem a



utilização de algoritmos ou fórmulas decoradas.

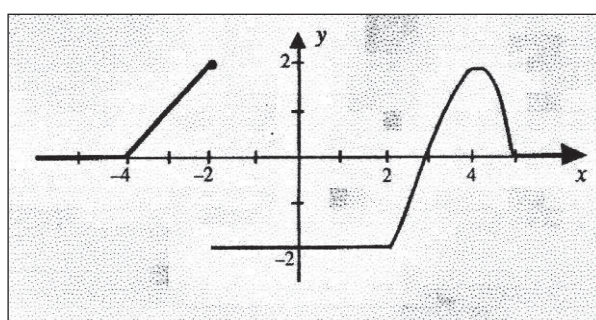
A autora evidenciou também em seus resultados que outra dificuldade dos alunos diz respeito a identificar as funções a partir dos gráficos, seja por meio de sua derivada ou de uma função primitiva.

Esses resultados permitiram à autora concluir que os alunos envolvidos na pesquisa apresentaram uma mobilização incompleta dos conceitos de derivada, integral e continuidade de uma função, e conseqüentemente um domínio parcial do conhecimento do TFC, por apresentarem em suas resoluções apenas conteúdos e algoritmos memorizados.

A autora apresenta ainda em sua conclusão para discussão e objeto de futuras pesquisas a seguinte questão: quais os obstáculos de aprendizagem de um conceito matemático quando se estuda o TFC?

Outra pesquisa que evidencia a incompreensão do uso do TFC é o trabalho efetuado por Artigue (2002), que realizou experimentos com 89 estudantes universitários de Matemática a respeito de algumas noções fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa da autora tinha por objetivo analisar a concepção dos estudantes sobre alguns conceitos ministrados em um curso de Cálculo e Análise Real. Em um teste respondido pelos estudantes, apresentou-se o gráfico de uma função definida um intervalo, conforme a figura a seguir:

**Figura 2** – Gráfico de uma função  $f$  (Artigue)



Fonte: Artigue, 2002, p. 179

De acordo com o gráfico fornecido, foram colocadas as seguintes questões:

- em quais pontos  $f$  é diferenciável? diferenciável pela direita? pela esquerda?
- descreva o comportamento do gráfico de  $f$ .
- descreva o comportamento do gráfico da função  $g$  definida por  $g(x) = \int_{-4}^x f(t)dt$ .

Dentre os erros cometidos pelos alunos na resolução do exercício, muitos



deles têm origem principalmente relacionada com a confusão entre continuidade e diferenciabilidade de uma função ou entre diferenciabilidade e existência de derivadas pela esquerda ou pela direita.

Outra dificuldade diagnosticada concerne à descrição do gráfico da função  $g$  definida por  $g(x) = \int_{-4}^x f(t)dt$ . Essa questão foi respondida corretamente somente por 35 estudantes. Como esboço de algumas respostas, foram traçados diversos gráficos, em que se observou somente uma propriedade em comum: o gráfico é um segmento de reta no intervalo  $[-2, 2]$ . Apenas 14 alunos deram a correta inclinação para a reta e outros 14 gráficos analisados eram descontínuos. Dos 35 gráficos produzidos, somente 13 consideraram a direção da variação da função  $g$ , e apenas 3 gráficos podem ser considerados corretos.

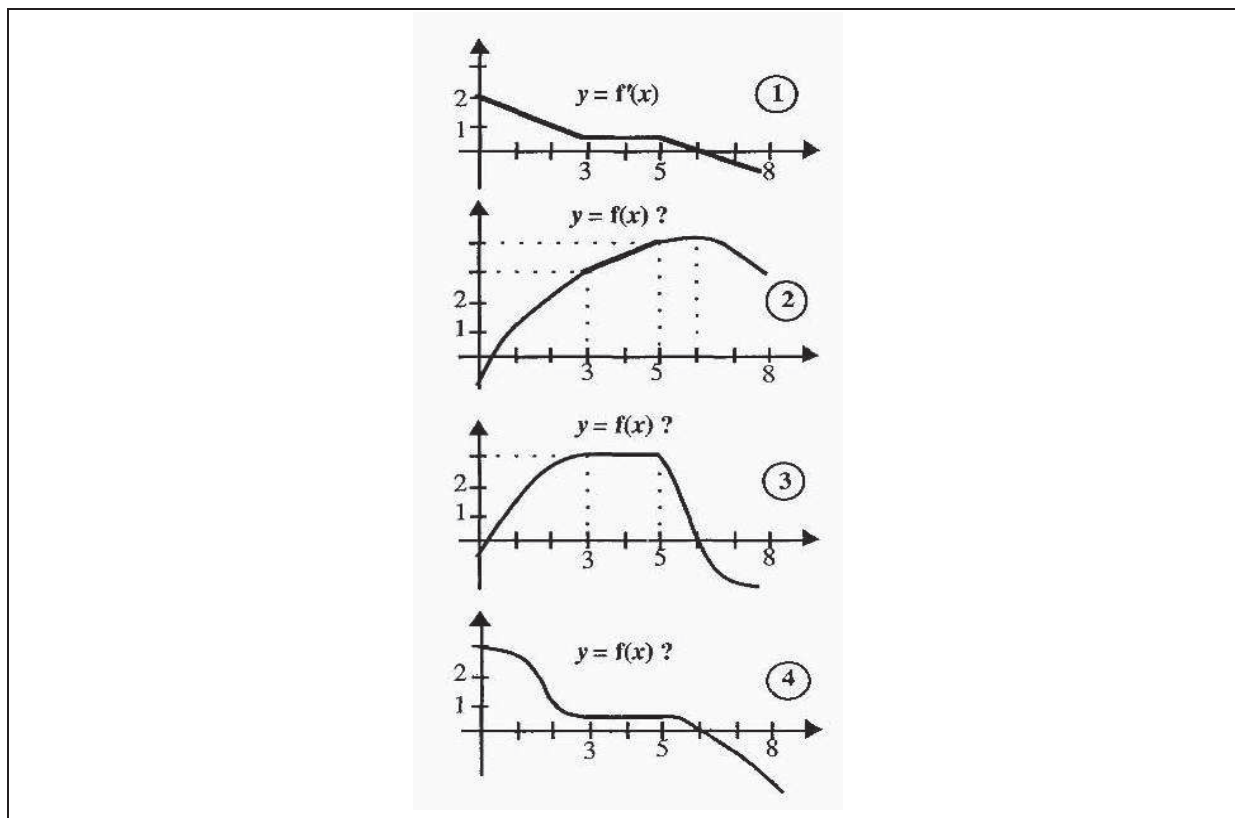
Pela análise dos erros encontrados, a autora destaca que os alunos não trabalharam diretamente com os gráficos de uma função e sua função primitiva, mas procuraram obter a expressão algébrica de  $f$  em um determinado intervalo e a partir daí obter a função derivada e primitiva, que em último caso gerou numerosos erros e conflitos com os resultados alcançados.

Essa constatação foi observada de maneira semelhante na pesquisa de Segadas Vianna (1998), em que os alunos não conseguem manipular as informações e propriedades apresentadas pelo gráfico de uma função e com isso construir o gráfico da respectiva função primitiva.

Outro teste realizado por Artigue (2002) visava exatamente explorar essas manipulações em que o aluno deveria observar, por exemplo, quando a função  $f$  é crescente, constante ou decrescente em um intervalo, o que ocorre com o gráfico da função primitiva nesses intervalos, ou, quando no intervalo a função  $f$  é negativa, como se comporta o gráfico da função primitiva. A questão apresentava o seguinte enunciado:

**Quadro 2** – Questão proposta por Artigue

O gráfico 1 é a derivada  $y = f'(x)$  de uma função  $y = f(x)$  definida de  $0 \leq x \leq 8$ .  
Qual dos gráficos 2, 3, 4 pode ser o gráfico original de  $y = f(x)$ ?  
Dê o(s) motivo(s) de sua escolha:



Fonte: Artigue, 2002, p. 190, tradução nossa.

Essa questão foi proposta e trabalhada com grupos de alunos do ensino médio, sendo um grupo denominado experimental e o outro, um grupo de controle. A autora também constatou que 67% dos alunos do grupo experimental responderam corretamente que o gráfico 2 corresponde ao da função cuja derivada está representada no gráfico 1, e no grupo de controle apenas 8% dos alunos acertaram e justificaram corretamente a resposta.

Resultados semelhantes foram encontrados nos estudos realizados por Carlson et al. (2007), que investigaram a eficiência dos estudantes do primeiro ano de um curso na área de ciências exatas em uma universidade norte-americana sobre a compreensão do significado do TFC. Sua pesquisa teve por objetivo realizar um estudo experimental no sentido de auxiliar na evidência de algumas habilidades envolvidas na compreensão do significado e utilização do teorema, privilegiando o entendimento, o raciocínio e a manipulação dos conceitos de acumulação definida pela função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  e da taxa de variação de acumulação da mesma função.

Os alunos selecionados para a pesquisa frequentaram inicialmente um curso de Cálculo Diferencial e Integral, em que se procurou, durante o desenvolvimento deste, focar no estudo dos conceitos de acumulação e taxa de variação da

acumulação. No final do curso, foram propostas três questões a 24 estudantes que cursaram essa disciplina no primeiro semestre.

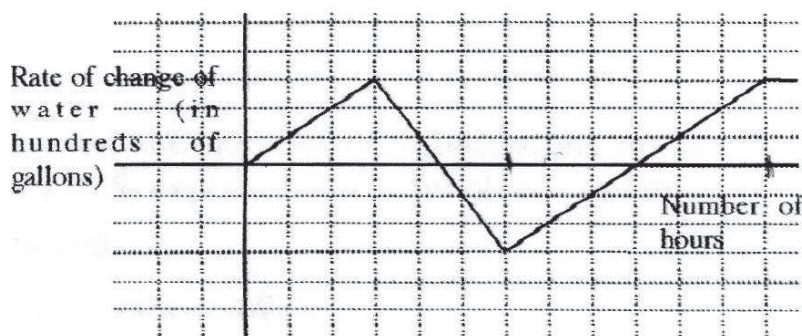
A seguir, de acordo com algumas respostas obtidas, foram selecionados quatro estudantes que participaram de uma entrevista relacionada aos comentários de algumas soluções e respostas obtidas no questionário.

Após o desenvolvimento de um curso de Cálculo que procurava, segundo os autores, focar na importância de taxa de variação e acumulação utilizando materiais curriculares para auxiliar o entendimento de determinados conceitos, tais estudos revelaram significativos avanços na compreensão de acumulação de uma função, na notação e simbologia utilizadas no TFC e na aplicação do teorema em problemas diversos e situações contextualizadas, por exemplo, o problema relacionado ao cálculo da quantidade de água acumulada num reservatório, a determinação da função área de um círculo e o problema da distância em movimentos com velocidade variada, que serão descritos a seguir.

O item 1 denominado **O Problema da Água** apresenta o seguinte enunciado:

**Quadro 3 – O Problema da Água**

Seja  $f$  a função que representa a taxa na qual a quantidade de água no tanque de água de Phoenix variou em (100 galões por hora) no período de 12 horas das 6 às 18 horas no último sábado (suponha que o tanque estava vazio às 6 da manhã ( $t = 0$ )). Use o gráfico de  $f$ , dado abaixo, para responder às seguintes questões:



- Qual a quantidade de água ao meio dia?
- Qual o significado de  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ ?
- Qual o valor de  $g(9)$ ?
- Durante qual intervalo de tempo o nível da água foi diminuindo?
- Em qual instante o tanque esteve mais cheio?
- Usando o gráfico de  $f$  dado acima, construa um esboço do gráfico de  $g$  e explique como os gráficos estão relacionados.

Como respostas das questões do item 1, os autores concluem que os alunos foram capazes de aplicar o raciocínio sobre acumulação e taxa de variação de uma função. Mais de 70% dos alunos que concluíram o curso elaboraram uma resposta completamente correta dos itens *d*, *e* e *f*, demonstrando a capacidade em coordenação do acúmulo da variável de uma função com o acúmulo da taxa de variação da função. Mais de 90% desses mesmos alunos também forneceram uma resposta correta sobre a compreensão dos aspectos notacionais do TFC (partes *b* e *c*).

A seguir, será descrito o Item 2, denominado **O Problema do Círculo**:

**Quadro 4 – O Problema do Círculo**

- Considere um círculo que se expande em tamanho de  $r = 0$  a  $r = x$ . Seja  $A$  a função que representa a acumulação da taxa de variação em aumento do círculo nos comprimentos de  $r = 0$  e  $r = x$ .
- Defina  $A(x)$  como uma função de acumulação.
  - Construa o círculo e ilustre o que  $\int_2^4 2\pi r dr$  representa.
  - Descreva o que  $\frac{d}{dx} \int_a^x 2\pi r dr$  representa em relação ao círculo.
  - Construa o gráfico de  $f$  (a taxa de variação da área do círculo), sobre os eixos do lado esquerdo e o gráfico de  $A$  (como definido anteriormente) no gráfico à direita. Identifique os seus eixos.
  - Explique como os dois gráficos estão relacionados.
  - Construa o gráfico de  $A$ . Estime a área sobre o gráfico de  $A$  de  $r = 1$  a  $r = 5$  usando a aproximação de oito retângulos e os pontos finais direitos.
  - Dado que  $n$  representa o número de subdivisões no intervalo de  $r = 1$  a  $r = 5$ , explique o que está envolvido em deixar o  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1$  para este intervalo?
  - Qual o resultado dessa avaliação?
  - O que  $A'(x) = f(x)$  significa no contexto dessa situação?

Fonte Carlson et al., 2007, p. 169-170, tradução nossa.

Os autores relataram que nesse item os estudantes tiveram um bom desempenho nas questões *a* e *b*, ligadas à compreensão dos aspectos de notação do TFC, bem como nos itens *f*, *g* e *h*, ligados à noção de acumulação. Entretanto, os itens *c*, *e* e *i* apresentaram uma moderada proficiência na compreensão da demonstração do TFC, com 60% dos alunos respondendo corretamente esses itens.

O Item 3 diz respeito a uma aplicação do TFC – **O Problema da Distância**, contendo o seguinte enunciado:

<sup>1</sup> Nesse caso, o autor se à expressão  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  como sendo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

**Quadro 5 – O Problema da Distância**

Uma partícula se move ao longo de uma linha de modo que sua velocidade varia com o tempo de acordo com a função  $v(t) = t^2 - t - 6$  (medida em pés por segundo). Encontre a distância percorrida durante os instantes de  $t = 1$  a  $t = 4$ . Mostrar os resultados.

Fonte: Carlson et al., 2007, p. 170, tradução nossa.

Eles descrevem que os alunos que concluíram o curso experimental apresentavam uma forte compreensão no aspecto notacional do TFC e no entendimento dos conceitos de acumulação e taxa de variação da acumulação.

Algumas dificuldades iniciais diagnosticadas na pesquisa são atribuídas primeiramente à visão, segundo os autores, “empobrecida” por parte dos alunos dos conceitos de função e de taxa de variação, por exemplo.

Como conclusões, os autores sugerem que a maioria dos cursos de CDI em um primeiro semestre deva contemplar o estudo e os conhecimentos envolvidos no teorema com uma forte compreensão dos aspectos notacionais de acumulação de uma função.

Essa visão adjetivada pelos autores como “empobrecida” do conceito de função por parte dos alunos também foi encontrada de maneira semelhante no trabalho de Martínez (2006), que reitera a importância desse conceito na compreensão do TFC.

Sua pesquisa realizou-se com um grupo de 14 estudantes do primeiro semestre de Engenharia e Ciências da Universidade do Valle (Cali, Colômbia), com o objetivo de proceder a uma análise sobre a forma em que se pode incidir a concepção do conceito de função na compreensão do TFC.

A pesquisa pode ser dividida em duas partes: na primeira parte efetuou-se um estudo de caráter quantitativo que refletiu as medições feitas em relação às concepções dos alunos sobre o conceito de função como processo e objeto, de acordo com Sfard (1991) e Tall e Vinner (1981). A segunda parte mostrou um estudo cognitivo que procurou explicar a forma com que os alunos ativam seus esquemas cognitivos na busca de alcançar o desenvolvimento existente perante os problemas matemáticos, segundo uma adaptação do modelo piagetiano sobre essa compreensão.

O autor destaca como conclusão que os alunos participantes da pesquisa apresentam dificuldade no entendimento do conceito de função e consequentemente

uma compreensão parcial do TFC, e a apreensão desse conceito não é alcançada pela grande maioria dos estudantes após um ensino denominado pelo autor como tradicional dos conceitos.

Alguns obstáculos encontrados pelos alunos foram descritos pelo autor, tais como:

- relação bilateral entre uma função e a expressão algébrica que a representa. Esse obstáculo se evidencia quando o estudante reconhece uma função em termos de uma equação algébrica: na visão dos alunos tem-se uma função quando a expressão algébrica apresenta uma variável escrita explicitamente em função da outra;
- a incompreensão da expressão  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  como uma função, pois somente dois dos 14 estudantes reconheceram a integral como uma função, o que prejudica a compreensão do TFC.

Pela análise dos erros encontrados, o autor destaca que os alunos não trabalharam diretamente com os gráficos de uma função e sua função primitiva, mas procuraram obter a expressão algébrica de  $f$  em um determinado intervalo e a partir daí obter a função primitiva, que em último caso gerou numerosos erros e conflitos com os resultados alcançados.

Sobre a incompreensão da função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , a pesquisa realizada por Thompson (1994) referente ao ensino e aprendizagem do TFC procurou descrever o conhecimento produzido pelos alunos nos aspectos relacionados ao teorema por meio de um ensino experimental. A pesquisa procurou evidenciar e analisar a compreensão de 19 estudantes matriculados em um curso de Licenciatura em Matemática usando computadores e que já cursaram, no mínimo, durante um ano o curso de Cálculo.

O autor considera que o conceito de acumulação é a ideia central de integração e o núcleo da compreensão de muitas aplicações no Cálculo. Esse conceito pode ser observado no dia a dia, entretanto a definição de uma função de acumulação, representada por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , envolve aspectos que provocam muitas dificuldades de compreensão por parte dos alunos.

Sua pesquisa possui como referencial teórico o conceito de imagem descrito por Piaget (1950) e suas relações com as operações mentais. Por imagem o autor define não somente como uma figura mental, mas como um tipo de conhecimento produzido, delineadas em menor grau como esquemas de ações ou operações, que

baseados nas ideias de Piaget (1950) refletem no modo com que os estudantes internalizam objetos por ações sobre eles.

Essa ideia descrita por Piaget (1950) não é a mesma, segundo Thompson (1994), criada por Tall e Vinner (1981), a qual foi utilizada na pesquisa de Segadas Vianna (1998). Para o autor, a noção de imagem do conceito descrita por Tall e Vinner (1981) focaliza a mistura de imagens mentais em categorias correspondentes ao vocabulário matemático convencional, enquanto Thompson (1994) tentou dedicar-se à dinâmica das operações mentais. Para o autor, as duas noções de imagem não são inconsistentes, elas apenas têm enfoques diferentes.

O ensino experimental apresentou um total de dez encontros, cada qual com uma duração de uma hora e meia. Tal ensino foi estruturado com foco em quatro fases do desenvolvimento conceitual dos seguintes tópicos:

- análise do comportamento dos gráficos de uma função e explicação de tal comportamento;
- taxa média de variação, funções em que é dada a taxa média de variação em um determinado intervalo;
- acumulações de variação, soma de Riemann;
- relações entre quantidades variáveis, acumulação de variações, e taxa de variação de acumulação.

É pertinente comentar alguns resultados obtidos pelo referido autor em sua pesquisa. Para ele, o conceito de função tornou-se problemático para muitos estudantes. Entretanto, a noção de acumulação é primordial e central para a ideia de integração. Do ponto de vista matemático, o conceito de acumulação no Cálculo Diferencial e Integral aparece representado por uma função, que pode ser denominada como função de acumulação, definida por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  e que envolve muitos conceitos que causam dificuldades na compreensão dos alunos.

Entretanto, os alunos que participaram da pesquisa, segundo o autor, não relacionam o conceito de acumulação do ponto de vista de uma função. Além disso, na função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , o papel da variável  $t$  na expressão é um mistério para os estudantes, sendo até considerada uma “falsa” variável, que desaparece quando a expressão é desenvolvida e calculada.

Especificamente sobre a função da acumulação, dois aspectos que tornam sua compreensão complexa são: o conceito de limite e uso da notação (representação



algébrica).

Outro item destacado na pesquisa é a ideia de calcular não só a acumulação de uma função, mas também a taxa de variação dessa acumulação, o que causa estranheza por parte dos alunos, dado que esses dois conceitos não são conectados e compreendidos.

De acordo com o autor, a compreensão do TFC envolve ações mentais de coordenação de acumulação de taxa de variação com a acumulação de variáveis independentes da função. O acúmulo de quantidades pode ser imaginado constituindo-se de acréscimos de quantidades infinitesimalmente pequenas.

Para o autor, o TFC expressa a relação entre acumulação de uma quantidade e a taxa de variação da acumulação. Ele defende que a compreensão do TFC envolve a coordenação de imagens dos respectivos acréscimos em relação ao acúmulo total. Segundo Thompson (1994), essa é a ideia que motivou Newton a desenvolver o TFC. Newton primeiro determinou a média da taxa de variação em uma área e estabeleceu que a área total poderia ser obtida pela multiplicação da taxa de variação pela acumulação da variável independente.

Sobre a dificuldade da compreensão da expressão  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , a pesquisa de Andersen (2011) descreveu atividades realizadas com 14 alunos de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular de São Paulo, concluintes dos 2.º e 3.º semestres que já cursaram as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II, em que são abordados assuntos como limite e derivada, mas que não tiveram contato com o tema integral. Tais atividades procuravam levantar questões e realizar conjecturas sobre a expressão  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , no sentido de favorecer a compreensão das ideias centrais que envolvem o TFC.

A autora realizou uma pesquisa qualitativa, tendo como fundamentação teórica o trabalho de Dreyfus (1991) sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA), utilizando-se também de algumas ideias da metodologia de pesquisa denominada engenharia didática.

Os 14 alunos selecionados para as atividades foram divididos em sete duplas, sendo que realizadas quatro sessões com atividades que podem ser divididas em duas partes:

- a primeira atividade com questões que exploravam a função área, em que os alunos, a partir de uma figura limitada pelo gráfico de uma função polinomial do primeiro grau



e pelo eixo das abscissas, deveriam expressar algebricamente a área da região limitada em função da abscissa. Outra questão apresentava uma função polinomial do segundo grau, em que os alunos deveriam obter a área por aproximações de figuras regulares;

- a segunda parte apresentou atividades no *software Winplot* explorando a soma de Riemann para integrais, além de questões que conjecturavam sobre a expressão que representava o TFC em que se  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , então  $F'(x) = f(x)$ .

Segundo a autora, algumas pesquisas indicam que o método de ensino baseado no modelo exposição teórica – exemplos – exercícios favorece a algoritmização da Matemática, o que prejudica sobremaneira a exploração de atividades que possibilitem o aluno efetuar hipóteses e conjecturas do objeto de estudo.

Como resultados, os alunos de acordo com a pesquisa apresentaram dificuldades em distinguir as funções  $f$  e  $F$ , principalmente no que diz respeito ao avaliar o comportamento da função  $F$ . Apenas uma dupla conseguiu associar o real significado de  $F$ , atribuindo-lhe uma característica acumulativa.

Por outro lado, muitos alunos conjecturaram que, se  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , então  $F'(x) = f(x)$ , ou seja, que integração e derivação são operações inversas entre si, embora alguns alunos não tenham percebido a necessidade de a função  $f$  ser contínua.

O ponto de vista da interpretação do TFC como uma variação de taxa de acumulação também pode ser encontrado no estudo realizado por Osorio (2005), fundamentada pela teoria denominada *socioepistemologia*.

A socioepistemologia pode ser definida, segundo o autor, como um marco teórico que permite tratar com os fenômenos de produção e de difusão do conhecimento matemático desde uma perspectiva múltipla, e incorporar o estudo das interações entre epistemologia do conhecimento, a dimensão sociocultural do saber, os processos cognitivos associados e os mecanismos de institucionalização do saber.

No caso da aplicação dessa teoria na Educação Matemática, especificamente no ensino do Cálculo, Osorio (2005) considera que um estudo axiomático dos conceitos não leva em conta os processos de produção do conhecimento que englobam outros fatores, conforme explicitado na teoria socioepistemológica.

Para o citado autor, o estudo da integral e da derivada, apresentado

“simplesmente” pela sua interpretação geométrica, não permite a sua utilização mais ampla no estudo de fenômenos de variação contínua de uma ou mais grandezas.

O TFC, segundo essa perspectiva de aplicação no contexto sociocultural, deve ser estudado sob o ponto de vista da noção de acumulação de diferenças que fluem em certa região, conforme se observou nos estudos dos matemáticos e físicos Green (1828) e Maxwell (1954).

Com isso, segundo Osorio (2005), o CDI constitui-se em um poderoso conjunto de algoritmos em que se procura, de modo talvez involuntário, buscar uma aplicação.

O conceito de integral, portanto, pode ser construído na perspectiva de variação contínua. Essa visão deve ser explorada, segundo o autor, pelos professores de Cálculo e pelos estudantes, para uma melhor compreensão do conceito.

O referido autor afirma que a teoria socioepistemológica procura realizar um estudo consistente em incorporar uma série de ressignificações a temas tradicionalmente discutidos em um curso de Cálculo. No caso particular de integral, essa ressignificação desse conceito deve ser interpretada, portanto, como uma acumulação de valores infinitamente pequenos, enquanto o TFC mostra a variação total dessa acumulação.

Tall (1991) disserta e analisa em seu artigo os obstáculos encontrados na compreensão da notação simbólica utilizada na representação algébrica dos conceitos de derivação e integração de uma função. O autor considera que o enfoque algébrico, privilegiando o uso de técnicas e algoritmos dados pelos professores, ao lecionarem a disciplina de Cálculo, faz com que os alunos apresentem uma compreensão tipicamente algébrica e não visual desses conceitos.

Em seu trabalho, Tall (1991) diagnosticou a confusão apresentada pelos alunos quanto ao significado da notação  $\frac{dy}{dx}$ , que não deve ser compreendido como um quociente de diferenciais, e do símbolo  $\int_a^b f(x)dx$ , em que  $dx$  possui o significado de “com relação a  $x$ ” ou como uma mudança infinitesimalmente pequena em  $x$ , ou como um limite de  $\Delta x$  tendendo a zero.

No caso de uma equação diferencial, a notação  $\frac{dy}{dx}$  pode causar confusão, pois ela não tem o significado de um quociente. Como exemplo, o autor descreve que a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ , ao ser resolvida pelo método da separação de

variáveis, produz a seguinte situação:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy = -x dx$$

$$\int y dy = \int -x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

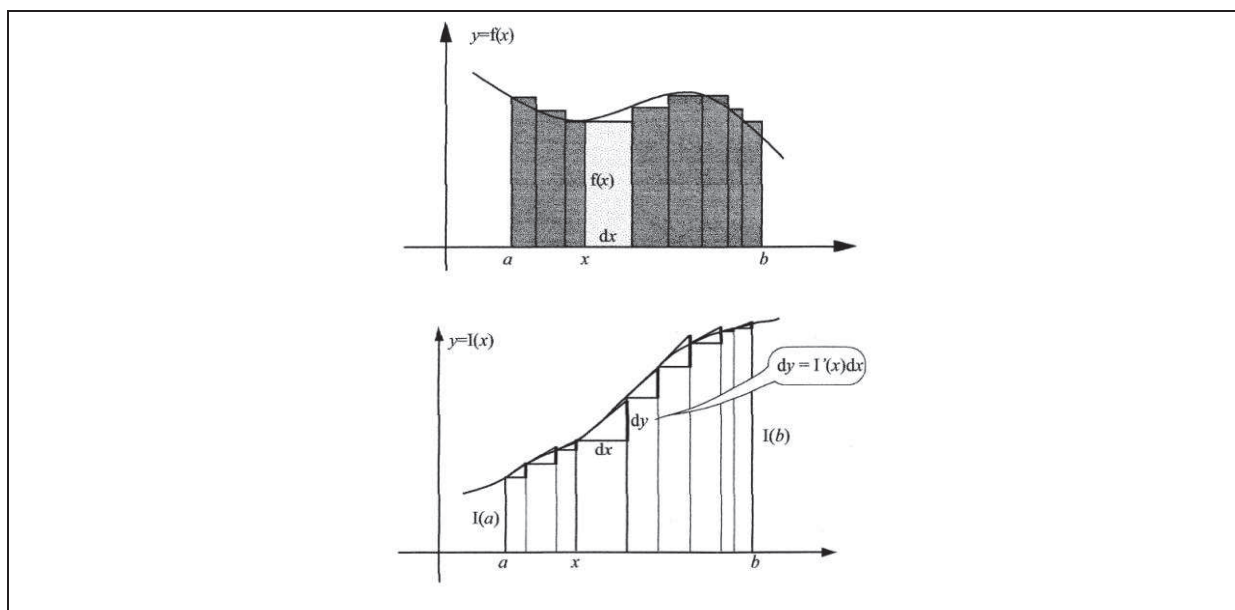
Nessa situação, qual o significado do termo  $dx$ ?

Como explicar, segundo Tall (1991), a separação do termo  $\frac{dy}{dx}$ , dado que este é indivisível e não representa um quociente? Qual o significado então do termo  $dx$  nas diferentes etapas da resolução de uma equação diferencial?

O autor mencionado discute a interpretação visual do significado do diferencial  $dx$  no TFC. A compreensão da relação entre o uso de  $dx$  no conceito de integração e derivação deve ser feita analisando o gráfico não da função  $f(x)$ , mas sim de uma função denominada pelo autor por  $I(x)$ , em que  $I'(x) = f(x)$ , ou seja, da função primitiva de  $f$ .

Nos trabalhos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, verifica-se o seu ponto de vista sobre forma com que os conteúdos são apresentados. Segundo o Tall (1991), os assuntos transmitidos aos alunos são o produto final do pensamento matemático, enquanto o processo desse pensamento no desenvolvimento de um conceito é relegado ao aluno.

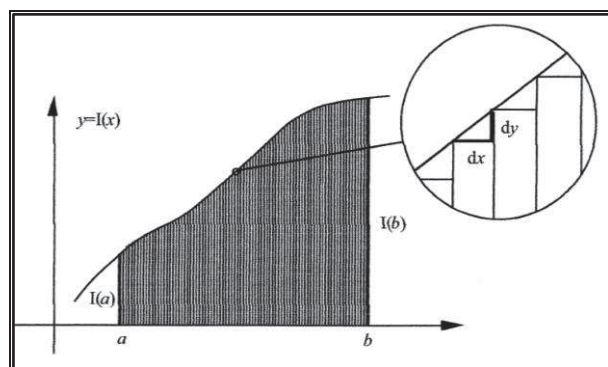
O supracitado autor descreve que, sendo uma função  $f$  definida em um intervalo  $[a, b]$ , ao ser traçada a tangente ao gráfico de  $I(x)$  em um determinado ponto  $x$  na subdivisão do gráfico conforme a figura a seguir, então o incremento correspondente  $dy$  na tangente é dado por:

**Figura 3** – Relação entre os gráficos de  $I(x)$  e  $f(x)$  (David Tall)

Fonte: Tall, 1991, p. 4

$$dy = I'(x)dx = f(x)dx$$

Com isso, a expressão  $\sum_a^b f(x)dx$  denota a soma das áreas com base de comprimento  $dx$  e altura  $f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ , e pode ser compreendida como a soma dos comprimentos  $\sum dy$  das componentes verticais do vetor tangente no gráfico de  $y = I(x)$ . O autor considera, portanto, a soma  $\sum dy$  em um intervalo  $[a, b]$  com valores  $dx$  extremamente pequenos como a diferença  $I(b) - I(a)$ , conforme mostra o gráfico representado na figura 4 a seguir. Com essa afirmação, conclui-se, segundo o Tall (1991), que o limite da soma  $\sum_a^b f(x)dx$  para valores de  $dx$  tão pequeno quanto se queira pode ser dado por:

**Figura 4** – Teorema Fundamental do Cálculo (David Tall)

Fonte: Tall 1991, p. 5

$$\int_a^b f(x)dx = I(b) - I(a)$$

Como atividade para auxiliar na visualização do TFC, o autor propõe a resolução de alguns exercícios por meio de calculadoras gráficas, utilizando algumas funções com a sua respectiva primitiva, como a função seno e cosseno. Essa atividade mostrou entre outras coisas que uma condição que deve ser analisada envolvendo o TFC é a questão da continuidade da função  $f$ .

Picone (2007) investigou que registros de representação semiótica são mobilizados por professores no ensino do TFC, buscando por meio de entrevistas destacar a importância desses registros, bem como se os professores exploram a visualização deles, com o intuito de identificar quais registros são mais mobilizados no ensino do teorema e quais são os mais utilizados. O trabalho fundamentou-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1999), ressaltando o papel das variáveis visuais pertinentes, na conversão do registro gráfico para o algébrico, e vice-versa, e nas argumentações utilizando o registro da língua natural.

A autora elaborou um questionário, baseado no trabalho de Segadas Vianna (1998), dividido em duas etapas: a primeira constituiu-se de oito questões, procurando identificar o perfil de cada professor participante da pesquisa: sua formação profissional, experiência docente na disciplina de Cálculo, livros didáticos que utiliza e como aborda o TFC.

Em uma segunda etapa foi realizada a aplicação do segundo questionário, constituído por nove questões com o objetivo de investigar qual o enfoque dado ao TFC pelos professores de Cálculo no tocante à conexão entre derivação e integração, e sua utilização como ferramenta para o cálculo de integrais definidas.

Após o questionário, realizou-se uma entrevista com os mesmos professores de Cálculo de instituições públicas e privadas do Estado de São Paulo, que responderam às questões.

Como resultados, Picone (2007) reitera que os professores entrevistados consideram pertinente a coordenação simultânea dos registros envolvidos, entretanto alguns não relevaram sua importância no ensino do TFC.

A autora, assim como Segadas Vianna (1998), conclui que o TFC pode ser utilizado como uma ferramenta, mas que essa conexão não é explorada graficamente

por todos os professores entrevistados. Alguns professores sugerem que deve ser dada uma visão do TFC “intuitiva” precedendo à demonstração e formalização, explorando propriedades entre os gráficos das funções primitiva e derivada.

Essa visão, denominada por alguns professores entrevistados por Picone (2007) como intuitiva, diz respeito em explorar, inicialmente nas aulas de Cálculo, o registro gráfico na construção dos conceitos e contrapor a seguir esse registro com o registro algébrico, sendo este último usado para os alunos confirmarem ou não o que eles já possuem, intuitivamente obtido pela visualização geométrica.

Campos (2007) pesquisou a maneira como quatro livros didáticos tratam do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), procurando explicar como os autores, em seus textos, exploram a coordenação dos registros de representação. O referencial teórico adotado foi a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2003, 1999).

Como norteador da pesquisa, o autor elaborou critérios (indicadores) de organização para a análise baseada em Bardin (2003), que sugere etapas para uma elaboração de resultado.

O autor confere que os livros didáticos não discutem explicitamente a questão referente à inter-relação entre derivada e integral. Além disso, muitos autores nos prefácios de suas obras reiteram a importância da representação gráfica na abordagem dos conceitos, sem, entretanto, explorá-los de forma incisiva.

Além da pesquisa de Campos (2007), como exemplo de um livro didático que aborda o TFC, pode-se destacar a obra *Calculus* (1991), de Gilbert Strang, publicada pela Wellesley-Cambridge Press, sem tradução no Brasil. Este livro foi analisado durante a pesquisa da revisão bibliográfica, em um *site* que apresentava um curso *on-line* produzido no Massachusetts Institute of Technology (MIT) denominado *Highlights of Calculus*, em que o autor baseado nos capítulos da mesma obra, apresentava, por meio de aulas gravadas em vídeos, exemplos sobre a importância do Cálculo na vida de todos.

Ao assistir à série de vídeos e efetuar uma breve leitura do livro, o que chamou muito a atenção, em particular, foi o fato de apresentar algumas proposições sobre como introduzir o TFC por meio de exemplos reais.

Percebeu-se com isso que alguns tópicos apresentados pelo autor podem contribuir no sentido de serem elaboradas algumas questões referentes ao ensino do TFC.

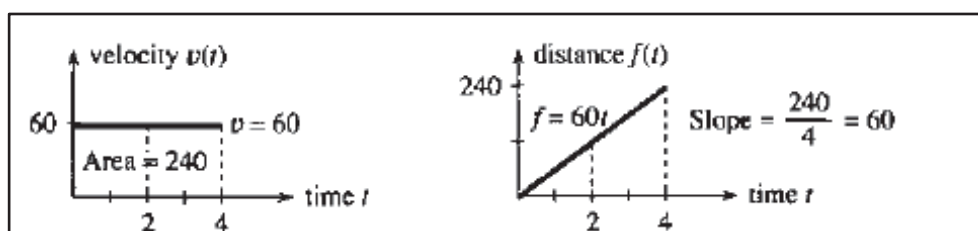
O livro apresenta no capítulo 1, denominado “Introdução ao Cálculo”, alguns exemplos que procuram inicialmente mostrar os principais conceitos relacionados em um curso de CDI, a diferenciação e a integração. O autor inicia a apresentação com um exemplo do cotidiano de como dirigir um carro e observar no velocímetro a velocidade ( $v$ ) do veículo e a distância total percorrida ( $f$ ).

Para Strang (1991), a questão central do Cálculo é a relação entre  $v$  e  $f$ . Segundo ele, o leitor pode encontrar a velocidade  $v$  se conhecer a distância total percorrida  $f$  e vice-versa. Contudo, a pergunta é: como isso é possível? Utilizando os conceitos do Cálculo para encontrar a velocidade a partir do valor da distância percorrida, utiliza-se a diferenciação, que é a ideia central do Cálculo Diferencial. Se quiser calcular a distância sabendo-se da velocidade, utiliza-se a integração, que constitui, segundo o autor, o cerne do Cálculo Integral.

Essa apresentação inicial por meio de um exemplo prático sugere que o autor procurará mostrar como essas duas ideias centrais do Cálculo – diferenciação e integração – podem ser relacionadas para encontrar respectivamente a velocidade ou a distância percorrida por um móvel em um determinado instante  $t$ .

Mediante um exemplo, o autor procura comparar os gráficos das funções velocidade  $x$  tempo ( $v \times t$ ) e da distância  $x$  tempo ( $f \times t$ ). Supondo a velocidade constante e igual a 60 milhas por hora, pode-se calcular a distância percorrida após duas horas, por exemplo, multiplicando-se  $f = 60 \times 2 = 120$  milhas, uma vez que a distância percorrida cresce linearmente com o tempo, de acordo com a figura a seguir:

**Figura 5** – Relação entre os gráficos  $v \times t$  e  $f \times t$  (Strang)



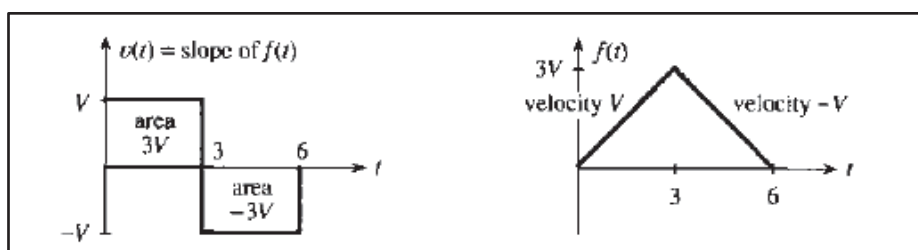
Fonte: Strang, 1991, p. 2

Em outras palavras, segundo o autor, para encontrar a distância total percorrida, basta observar o gráfico da velocidade  $x$  tempo e calcular a área limitada sob o gráfico da função e o eixo das abscissas. Para se encontrar a velocidade, calcula-se a inclinação da reta que representa a função  $f$ .

Com isso, conclui-se que a inclinação da reta do gráfico de  $f$  fornece o valor da velocidade  $v$ , assim como a área limitada sob o gráfico de  $v$  e o eixo das abscissas fornece a distância total percorrida  $f$ .

Com esse exemplo é interessante notar que o autor procura mostrar essa relação entre o cálculo da área limitada sob o gráfico e a inclinação da reta (tangente). Pode-se considerar que essa comparação tornou-se mais evidente pelo fato de a velocidade ser constante e consequentemente a distância percorrida variar linearmente. Essa comparação é feita analogamente no caso da velocidade variável em função do tempo, em particular, com velocidade  $V$  para  $0 \leq t \leq 3$  e  $-V$  para  $3 < t \leq 6$ , conforme figura a seguir, que mostra a distância percorrida crescente no primeiro intervalo e decrescente no seguinte, em que  $f(6) = 0$ .

**Figura 6 – Relação entre área e tangente (Strang)**



Fonte: Strang, 1991, p. 4

O livro apresenta a seguir o item 1.2 denominado Cálculo sem Limites, em que a relação entre  $v$  e  $f$  é deixada momentaneamente de lado dando lugar à discussão sobre sequências de números. De acordo com Strang (1991), o ponto crucial sobre essa discussão é que, a partir de uma sequência  $f$  de números reais, pode-se construir outra sequência  $v$  definida pela diferença de dois termos consecutivos de  $f$ . No primeiro exemplo, tem-se que:

**Suponha que os números são  $f =$**       0      2      6      7      4      9  
**Suas diferenças são  $v =$**                       2      4      1      -3      5

Somando-se a sequência das diferenças encontradas, tem-se:

$$2 + 4 + 1 + (-3) + 5 = 9$$



Esse valor obtido corresponde ao último número da linha de cima (da sequência dos números  $f$ ). Diante disso, o autor questiona: seria esse resultado uma mera coincidência?

Para procurar responder a questão anterior, é interessante observar, se a soma das diferenças fosse feita com menos termos, por exemplo,  $2 + 4 + 1 = 7$ , verificar-se-ia a correspondência do resultado com o valor da primeira linha.

Perante esses resultados observados, poder-se-ia elaborar uma conjectura sobre como obter a soma da sequência dada por diferenças: seria dada pelo valor do termo correspondente da linha superior, da sequência  $f$ ? O próximo exemplo descrito a seguir auxiliará na resposta de tais questionamentos:

|                                                    |   |   |    |   |    |
|----------------------------------------------------|---|---|----|---|----|
| <b>Suponha que os números são <math>f =</math></b> | 1 | 5 | 12 | 7 | 10 |
| <b>Suas diferenças são <math>v =</math></b>        | 4 | 7 | -5 | 3 |    |

Somando-se agora as diferenças tem-se:

$$4 + 7 + (-5) + 3 = 9.$$

Verifica-se que o valor encontrado não corresponde ao valor da linha superior, mas sim à diferença  $10 - 1 = 9$ , ou seja, a diferença entre o último e o primeiro valor da sequência  $f$ .

Esse exemplo também mostra que, mesmo efetuando-se alterações com alguns termos da sequência  $f$ , a soma das diferenças continua dependendo apenas do primeiro e último termos de  $f$ . A conjectura elaborada anteriormente apresenta um adendo, pois a soma das diferenças depende apenas da diferença entre os valores final e inicial de  $f$ . Com isso, tem-se que:

$$(5 - 1) + (12 - 5) + (7 - 12) + (10 - 7) = 10 - 1 = 9$$

Esse resultado permite concluir, portanto, que a soma das diferenças de  $f$  é igual a  $(f_{final} - f_{inicial})$ .

Questiona-se o que esses exemplos podem auxiliar na compreensão dos exemplos do item anterior. Nesse aspecto, Strang (1991) retoma a discussão da

relação entre velocidade e distância comparando os resultados obtidos no último exemplo com aqueles citados anteriormente. Considerando a primeira sequência denominada  $f(t)$  = sequência da distância e  $v$  como a sequência das diferenças de  $f$ , veja-se no próximo exemplo que:

**Os números variam linearmente  $f =$**     2       3       4       5       6       7  
**Suas diferenças são constantes  $v =$**        1       1       1       1       1

Nesse exemplo, a soma das diferenças é igual a 5, o que corresponde ao valor de  $f_{final} - f_{inicial}$ . O autor recorda com esse exemplo que  $v$  representa a função constante e os valores de  $f$  podem ser associados à função  $f(t) = vt + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , sendo a constante igual a 2 e a velocidade constante igual a 1. Sendo assim tem-se  $f(t) = t + 2$ .

Outro exemplo interessante apresentado a seguir diz respeito à sequência dos números quadrados perfeitos e conseqüentemente à construção da sequência das diferenças de dois números quadrados perfeitos.

**Os números são quadrados  $f =$**        0       1       4       9       16  
**Suas diferenças são constantes  $v =$**        1       3       5       7

Nesse exemplo, o autor procura ressaltar que a sequência  $f$  possui termo geral  $f_j = j^2$ , tendo como primeiro termo desta sequência  $f_0 = 0^2 = 0$ . O termo geral da sequência pode ser escrito como  $v_j = f_j - f_{j-1}$ ; portanto:

$$v_j = j^2 - (j - 1)^2 = j^2 - j^2 + 2j - 1 = 2j - 1$$

com o primeiro termo igual a  $v_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

A soma da sequência de  $v$  novamente pode ser calculada como:

$$(f_{final} - f_{inicial})$$

Esses exemplos utilizando sequências de números apresentam propriedades que foram destacadas, tais como o método utilizado para se calcular a soma dos termos da sequência formada por diferenças. Entretanto, no início do tópico o autor

afirma ter deixado um pouco de lado a discussão sobre inclinação ( $v$ ) e área ( $f$ ) para dar espaço aos cálculos relacionados às sequências de números apresentadas nos últimos exemplos.

Pode-se perguntar: qual será a conexão que o autor fará entre as sequências apresentadas e o problema da distância percorrida e da velocidade? Quais as ideias envolvidas nesses tópicos analisados e o Teorema Fundamental do Cálculo?

Tais explicações podem ser encontradas na elaboração do gráfico que representa a sequência dos números  $v = 1, 3, 5, 7$ , sendo “*constante por partes*” e o gráfico da sequência  $f$  sendo “*linear por partes*”, em que os valores de  $f$  são plotados e conectados por linhas retas. Esses dois gráficos lembram, segundo o autor, os gráficos de distância e velocidade.

A inclinação do gráfico de  $f$  é dada pela relação  $f' = \frac{\text{variação de } f}{\text{variação de } t} = v$ .

Em cada intervalo, a variação de  $t$  é igual a 1, portanto a inclinação do gráfico em  $v$  é igual a  $\frac{v}{1} = v$ . Nos pontos de interrupção ( $t = 1, 2, 3, 4$ ), a inclinação do gráfico de  $f$  não está definida, mas isso é muito discutível. A ideia principal é que entre os pontos de interrupção, a inclinação de  $f(t)$  é  $v(t)$ .

Para realizar a conexão entre as áreas, o autor enuncia a seguinte afirmação:

“A área total sob o gráfico de  $v$  é igual a  $f_{\text{final}} - f_{\text{inicial}}$ ”.

Isso pode ser comprovado analisando-se o gráfico  $v \times t$  da figura anterior, em que cada retângulo possui a medida da base igual a 1. A altura dos retângulos é igual aos valores de  $v$ , sendo a área dos retângulos a soma dos valores de  $v$ . No entanto como visto anteriormente, a soma da sequência dos valores de  $v$  é igual a  $f_{\text{final}} - f_{\text{inicial}}$ . Conclui-se, portanto, que o valor da área é igual a  $f_{\text{final}} - f_{\text{inicial}}$ .

Essas duas conclusões podem ser enunciadas da seguinte maneira:

**Os valores de  $v$  são as inclinações de  $f(t)$ . A área sob o gráfico de  $v$  é igual a  $f_{\text{final}} - f_{\text{inicial}}$ .**

Para Strang (1991) essa afirmação é nada menos que o Teorema Fundamental do Cálculo. Entretanto, salienta o autor que foi usado somente álgebra (sem curvas e gráficos nem cálculos envolvendo limites), e que no Capítulo 5 essa restrição será superada.

Nos capítulos seguintes, o autor procura manter o mesmo estilo observado nos capítulos descritos, apresentando os conceitos essenciais do Cálculo por meio de exemplos cotidianos efetuando analogias.

## 1.2 – Resumo e conjecturas

Com base nas pesquisas selecionadas e descritas anteriormente, pode-se elaborar de uma maneira geral um panorama dos resultados diagnosticados até o presente momento sobre o ensino e aprendizagem do TFC.

Foram encontradas algumas convergências das principais dificuldades apresentadas pelos alunos ao estudar e utilizar o teorema em diversas situações. Entretanto, não foi constatado nenhum trabalho ou pesquisa que de maneira explícita indicasse uma intervenção de ensino do teorema com o intuito de ressaltar a sua essência, que é a relação existente entre integração e derivação como operações inversas entre si. Tal fato mostra que o presente trabalho apresenta como diferencial o objetivo de procurar elaborar uma sequência didática que faça emergir tais relações.

Inicialmente, observa-se que muitas pesquisas apontaram a dificuldade dos alunos de modo geral na compreensão do conceito de função, e que essa dificuldade acarreta uma incompreensão do TFC, segundo indicaram Segadas Vianna (1998), Carlson et al. (2007) e Martínez (2006). Essa visão “empobrecida”, conforme destacada por alguns autores do conceito de função, afeta explicitamente no entendimento, por exemplo, de que a derivada de uma função é uma função, mas que os alunos apresentam uma imagem ou compreensão diferente dessa, sendo a imagem do conceito criada por eles da derivada de uma função como a inclinação da reta tangente em um ponto do gráfico da função.

Ainda no tocante ao conceito de função, a questão da representação desse objeto matemático continua causando confusão nos alunos. Martínez (2006) destaca a relação bilateral entre uma função e a expressão algébrica que a representa, assim como Segadas Vianna (1998), em que muitas vezes confunde-se o objeto matemático com sua própria representação.

Outro item comum dos resultados das pesquisas descritas anteriormente é a falta de conhecimento dos alunos e principalmente a incompreensão da função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , sendo uma função de acumulação, bem como o significado das

variáveis  $x$  e  $t$  e a relação entre as duas. Martínez (2006) em sua pesquisa aponta que muitos alunos não reconhecem tal expressão como uma função. Andersen (2011) coloca que em suas atividades os alunos foram capazes de concluir esse resultado sem ter o conhecimento *a priori* do conceito de integral.

Na relação entre as funções  $F$  e  $f$  do ponto de vista da representação gráfica, Artigue (2002) e Segadas Vianna (1998) observam a dificuldade dos alunos de analisar o comportamento da função  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , pois novamente eles tentam, em até alguns casos sem sucesso, obter algebricamente a expressão da função primitiva para, em seguida, construir o gráfico da função.

Um conceito primordial na compreensão do TFC está relacionado com as condições de a função  $f$  ser contínua para que seja possível a utilização do TFC, mas para muitos alunos isso é relegado, pois o próprio conceito de continuidade para os estudantes é um assunto que traz dúvidas e incertezas pelo fato da compreensão deles no sentido de que uma função contínua é aquela cujo gráfico só pode ser desenhado em um papel sem tirar o lápis deste, que uma função contínua é uma função cujo gráfico não apresenta rupturas, quebras, interrupções. Artigue (2002) também verifica essa constatação e ainda reitera a confusão feita pelos alunos entre continuidade e diferenciabilidade de uma função.

Tanto Segadas Vianna (1998) quanto Anacleto (2007) diagnosticaram que os alunos utilizam o TFC apenas no domínio algébrico, com o uso excessivo de algoritmos e fórmulas memorizáveis.

Carlson et al. (2007) sugerem que se deva abordar em um curso de Cálculo o conceito de acumulação e da variação dessa acumulação, assim como Osorio (2005) e Thompson (1994), que, segundo os autores, essa é a ideia principal do TFC.

Concorda-se com os autores no sentido de que as ideias de acumulação e a variação dessa acumulação permeiam a compreensão do TFC, mas a expressão  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  deve ser trabalhada de forma mais incisiva durante as aulas de um curso de Cálculo, pois acreditamos que a exploração inicialmente geométrica e posteriormente algébrica desse conceito constitui uma condição necessária para o estabelecimento da relação entre a integração e a derivação.

Os resultados encontrados por Picone (2007) convergem para a proposta deste trabalho, ao relatar que os professores entrevistados por ela reiteram a

importância de uma abordagem “intuitiva” utilizando a representação gráfica das funções para procurar mostrar a relação entre uma função e sua primitiva.

Entretanto, mesmo com essa constatação, no trabalho de Picone (2007), no que concerne à importância dada pelos professores ao uso da intuição no ensino do Cálculo, observou-se de um modo geral uma escassez do tratamento e discussão desse assunto nas pesquisas efetuadas tanto no Brasil quanto em outros países, o que reitera a realização do presente trabalho.

Quanto à apresentação e à abordagem do TFC nos livros didáticos, a obra de Strang (1991) descrita traz no primeiro capítulo uma introdução detalhada sobre algumas ideias relacionadas às operações de integração e derivação, que são respectivamente os conceitos de acumulação e variação, em que esse autor procura mostrar por meio de exemplos esses dois conceitos essenciais no estudo do CDI.

Adotando-se um exemplo da cinemática, ao estudar as grandezas velocidade ( $v$ ) e a distância percorrida ( $f$ ), o referido autor estabelece uma relação entre ambas em que, dada uma delas, pode-se encontrar a outra, e que essa relação é o que constitui a questão central do Cálculo. Tal relação proposta pelo autor é feita em um primeiro momento utilizando-se das representações gráficas de  $v$  e  $f$  com o cálculo de área e inclinação da reta tangente.

Posteriormente, o autor apresenta um item denominado Cálculo sem Limites, em que são discutidas sequências numéricas, e a partir de uma sequência  $f$  de números reais é possível construir outra sequência  $v$  definida pela diferença de dois termos consecutivos de  $f$ . A essência do estudo dessa sequência é que para se obter a soma dos valores de  $v$  basta calcular a diferença entre os valores final e inicial de  $f$ .

Portanto, alguns conceitos elencados nas pesquisas analisadas até então tais como função, continuidade, acumulação, variação e visualização gráfica parecem influenciar na compreensão do significado do TFC, assim como deve-se procurar inicialmente tratá-los inicialmente num curso de Cálculo por meio de uma abordagem intuitiva. Esses elementos serão ponderados ao elaborarmos a sequência de ensino do TFC.

Além dos resultados encontrados nas pesquisas analisadas sobre o ensino e aprendizagem do TFC, faz-se necessário interpretar tais resultados bem como procurar relacioná-los com o contexto histórico sob o ponto de vista de um referencial teórico, que não só auxiliará na compreensão do problema em questão como servirá de perspectiva teórica para a elaboração da intervenção de ensino que constitui a

proposta desta pesquisa. A apresentação e discussão do referencial teórico serão temas do próximo capítulo.

## CAPÍTULO II

“É das hipóteses simples que mais devemos confiar;  
Porque são aquelas que têm mais possibilidades  
de passar despercebidas”.  
HENRI POINCARÉ

---

### CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A escolha e o uso da teoria constituem um dos principais elementos no desenvolvimento de uma pesquisa. Para Laville e Dionne (2008), de um modo geral, as teorias são igualmente generalizações da ordem das conclusões ou das interpretações, mas de grande envergadura. Para os referidos autores, numerosas teorias que esclarecem o pesquisador em sua abordagem dos problemas são o fruto de pesquisas ou, pelo menos, observações metodicamente analisadas. A importância da teoria, segundo eles, pode ser expressa na afirmação a seguir:

O valor de uma teoria é, primeiramente, explicativo: é uma generalização de explicações concordantes tiradas dos fatos que foram estudados para sua construção. Mas, para o pesquisador, seu valor é sobretudo analítico, pois ela lhe servirá para o estudo e a análise de outros fatos de mesma ordem (LAVILLE e DIONNE, 2008, p. 93).

Segundo Creswell (2010, p. 90), o uso da teoria em uma pesquisa qualitativa apresenta algumas variações. Para ele, de uma maneira muito semelhante àquela utilizada em uma pesquisa quantitativa, a teoria é usada como uma explicação ampla para o comportamento e as atitudes, e pode ser completada com variáveis, constructos e hipóteses. Além disso, o autor explicita que os pesquisadores adotam cada vez mais a teoria como “uma lente ou perspectiva teórica na pesquisa qualitativa”, definindo o que é observado e as questões que podem ser formuladas.

Particularmente no caso desta pesquisa serão utilizados os seguintes referenciais teóricos: as ideias ligadas ao uso da intuição na construção do pensamento matemático segundo a visão do filósofo e matemático francês Henri Poincaré (2008; 2004; 1995; 1984), bem como as noções e características do raciocínio intuitivo nas Ciências e na Matemática descritas pelo psicólogo romeno Efraim Fischbein (1999; 1991; 1987).



Para a análise dos resultados obtidos por meio da intervenção de ensino, além dos autores citados, serão empregados como referencial teórico o papel da visualização no ensino do Cálculo e as inter-relações com a intuição e o rigor discutidos por David Tall (2002a; 1991a).

Esses referenciais teóricos foram escolhidos de acordo com a descrição de suas especificidades e adequação ao tema da pesquisa, pois envolvem aspectos ligados ao raciocínio intuitivo na criação e no pensamento matemático, servindo, conforme descreveu Creswell (2010), como uma lente, um fio condutor que auxiliará a compreender a problemática da pesquisa e indicará algumas questões que serão formuladas.

## **2.1 – A intuição e o rigor**

A teoria será empregada inicialmente na análise da evolução histórica dos conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), buscando descrever quais aspectos, ideias e contribuições foram mais significativos para o desenvolvimento do teorema. Essa análise histórica proposta envolve aspectos cognitivos ligados ao processo de criação dos conceitos matemáticos, por exemplo, o uso de analogias, intuição e rigor nas demonstrações, que acaba se refletindo nas propostas de ensino dos conceitos fundamentais do Cálculo. Tais aspectos podem ser observados de acordo com Ávila (1999):

Um curso de Análise, Cálculo ou qualquer outra disciplina matemática deve, antes de tudo, transmitir ideias. E isto, muitas vezes, é prejudicado em exposições carregadas de formalismo e rigor. Até mesmo em cursos mais avançados, a insistência excessiva nesses elementos da apresentação frequentemente dificulta a transmissão das ideias e o próprio aprendizado. O testemunho histórico nos ensina que 150 anos decorreram desde o surgimento do Cálculo, com Newton e Leibniz no século XVII, até seu início de sua formulação rigorosa por volta de 1820 (ÁVILA, 1999, prefácio do autor).

O desenvolvimento de ideias e conceitos em um curso de Cálculo torna-se prejudicado muitas vezes por aquilo que Ávila (1999) destacou anteriormente como a exposição no âmbito de seu ensino, conceitos que privilegiam o formalismo e o rigor e que não exploram outros aspectos cognitivos como a intuição.

O conceito de intuição pode em um primeiro momento ser resumido a um conhecimento imediato, uma noção considerada auto-evidente que expressa uma ideia trivial, que pode ser originada segundo uma imagem incorreta.

No dicionário Aurélio (1986)<sup>1</sup>, a palavra intuição significa uma percepção imediata, sem necessidade de intervenção do raciocínio. Pode ser considerada, por excelência, o tipo do saber espontâneo. No caso da presente pesquisa, essa definição encontrada no dicionário será levada em consideração, entretanto outras definições merecem ser analisadas conforme o ponto de vista de alguns autores.

Laville e Dionne (2008) discutem a noção de intuição: “um saber desse modo construído e aceito assim que uma primeira compreensão vem à mente” (p. 18). No entanto, os autores classificam esse tipo de conhecimento de “senso comum” e que este é com frequência enganador. O senso comum para os referidos autores não deixa de produzir saberes que nos auxiliam na compreensão do nosso mundo, contudo os autores alertam para que esse saber espontâneo seja desconfiado, uma vez que este pode ser um obstáculo à construção do saber adequado, pois seu caráter aparente de evidência reduz a vontade de verificá-lo.

Embora a intuição seja considerada pelos autores como um conhecimento de “senso comum”, e, de acordo com o dicionário descrito anteriormente, “sem a necessidade de intervenção do raciocínio”, procurar-se-á destacar a importância da intuição no processo de elaboração do pensamento matemático e a dicotomia que ela pode estabelecer com o rigor.

Davis e Hersh (1989) realizam uma discussão sobre os vários aspectos e significados do conceito de intuição, considerando o termo carregado de grande peso de mistério e ambiguidade. Os vários significados e usos dados a essa palavra podem ser descritos a seguir:

(1) Intuitivo é o oposto de rigoroso. Mesmo este uso da palavra não é completamente claro, pois o próprio significado de “rigoroso” nunca é dado precisamente. Poderíamos dizer que nesta acepção, intuitivo significa deficiente em rigor, e, no entanto o conceito de rigor é ele próprio definido intuitivamente em vez de rigorosamente.

(2) **Intuitivo significa visual.** Assim a topologia ou geometria intuitiva diferem da topologia ou geometria rigorosa em dois aspectos. Por outro lado, a versão intuitiva tem um significado, um correspondente no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que está excluído da versão rigorosa (isto é formal ou abstrata). Neste respeito, o intuitivo é superior; possui uma

---

<sup>1</sup> *Novo Dicionário da Língua Portuguesa – Aurélio Buarque de Holanda Ferreira – Editora Nova Fronteira – Rio de Janeiro – 1986.*

qualidade que falta à versão rigorosa. Por outro lado, a visualização pode conduzir-nos a considerar como óbvias ou evidentes por si próprias afirmativas que são dúbias ou mesmo falsas.

(3) **Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração.** Uma significação relacionada é “o que se esperaria que fosse verdade neste tipo de situação, baseando-se na experiência geral com situações semelhantes ou assuntos relacionados”. “Intuitivamente plausível” significa razoável como uma conjectura, isto é, como um candidato a demonstração.

(4) Intuitivo significa incompleto. Tornando-se limites sob o sinal de integração sem usar teorema de Lebesgue, representando-se uma função por uma série de potências sem verificar que a função é analítica, então a falha lógica é reconhecida chamando o raciocínio de intuição.

(5) **Intuitivo significa apoiar-se sobre um modelo físico, ou em alguns exemplos importantes.** Nesse sentido, é quase a mesma coisa que heurístico.

(6) Intuitivo significa unificado ou integrado em oposição a detalhado ou analítico. Quando pensamos em uma teoria matemática em termos globais, quando vemos que certa afirmação deve ser verdadeira por causa da maneira que se ajustaria a todo o resto do que sabemos sobre ela, estamos raciocinando intuitivamente. Para ser mais rigorosos, devemos justificar nossa conclusão dedutivamente, por uma cadeia de raciocínios em que cada passo possa ser definido das críticas, e onde o primeiro passo é considerado sabido, e o último passo é o resultado desejado (DAVIS e HERSH, 1989, p. 437-438 – grifo nosso).

Dentre os vários significados e interpretações atribuídos à intuição dada pelos autores, podem-se destacar: a mútua relação existente entre a intuição e o rigor; o apelo ao aspecto da intuição para as representações visuais; analogias com modelos físicos e o passo que a intuição pode anteceder uma demonstração. Esses elementos descritos por Davis e Hersh (1989) apresentam um ponto importante para o presente trabalho no sentido de buscar elementos e estratégias que possam auxiliar na compreensão do TFC.

Sobre o ensino e aprendizagem do teorema, Tall (1991), por exemplo, afirma que os alunos apresentam um conhecimento do TFC carregado de uma influência excessivamente algébrica, que privilegia apenas a manipulação e o uso de algoritmos e fórmulas memorizáveis na resolução de problemas em detrimento da exploração de outras habilidades cognitivas. Esse conhecimento do aluno descrito pelo autor foi influenciado pelo modo com que muitos professores ministram um curso de Cálculo, que em grande medida não propicia o desenvolvimento de alguns aspectos cognitivos no processo de ensino e aprendizagem.

Uma abordagem intuitiva, por exemplo, pode ser caracterizada pelo uso do registro da língua natural, da elaboração de imagens, representações geométricas e esquemas mentais na construção de conceitos. Essa perspectiva de ensino privilegia o desenvolvimento das faculdades intuitivas, dado que o rigor e o formalismo

constituem uma etapa final do processo de aprendizagem, pois são anteceditos de um processo inicial que se baseia na elaboração de conjecturas, esquemas mentais provisórios utilizando exemplos e contra-exemplos, recursos geométricos, uma etapa de acertos e erros, para posteriormente atingir a formalização do conceito a ser estudado por meio de uma definição, teorema e sua demonstração.

Deve-se salientar o objetivo deste trabalho não é reduzir o ensino do Cálculo a um processo de aprendizagem com características exclusivamente ligadas à intuição, pois o rigor e a intuição não podem ser segregados e dicotomizados como elementos incipientes. O que se propõe é analisar quais as implicações didáticas de uma proposta de ensino do Cálculo com uma abordagem que em uma primeira etapa procure desenvolver ligadas ao uso da intuição, para posteriormente agregar o formalismo na construção do conhecimento. Tall (2002) discute a possível “dicotomia” existente entre a intuição e o rigor considerando-as partes que se complementam no processo do pensamento matemático:

Matemáticos consideram frequentemente os termos “intuição” e “rigor” como mutuamente exclusivos sugerindo que uma explicação “intuitiva” é aquela que necessariamente carece de rigor. Não há um grão de verdade nisso, pois normalmente uma intuição ocorre por inteiro na mente e pode ser difícil separar suas componentes em uma ordem lógica dedutiva. Mas a oposição entre os dois conceitos é uma falsa dicotomia [...] (TALL, 2002, p. 13 – tradução nossa).

Bicudo (1992) critica a dicotomia entre a intuição e o rigor e reitera a dependência entre ambas, uma vez que a existência de uma está intrinsecamente ligada à outra:

É por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de diferenciação (intuição) e unificação (rigor). Não há avanço de uma sem a outra (BICUDO, 1992, p. 64).

Reis (2001) apresentou uma pesquisa que buscava compreender como a relação tensional entre rigor e intuição ocorre e manifesta-se no ensino universitário de Cálculo e Análise. Seu trabalho consistiu em verificar como essa relação encontra-se nos manuais didáticos dessas disciplinas, como ela é percebida e/ou enfrentada por quatro autores de livros didáticos e pesquisadores e quais são as suas possíveis implicações na formação matemática do professor.

Um dos resultados encontrados pelo autor demonstra que existe uma relação desigual e dicotômica entre o rigor e a intuição relativamente às abordagens dos livros didáticos de Cálculo e Análise, em que se observou privilegiar o primeiro aspecto em relação ao segundo. Consequentemente, de modo geral esses materiais foram considerados pelo autor predominantemente formalistas e procedimentais.

Dentre os quatro professores pesquisadores e autores de manuais didáticos entrevistados por Reis (2001) em sua pesquisa, alguns apresentaram uma visão que relativiza e flexibiliza essa relação, e outros corroboram com a afirmação de que a intuição deva preceder o rigor. O que se concluiu é que os professores de Cálculo devem apresentar, de acordo com o público-alvo a quem se direciona o curso, uma abordagem menos formal, baseando-se, por exemplo, em aplicações e em situações-problema, utilizando-se do formalismo e do rigor nos momentos que sentirem maior necessidade de generalizações e abstrações.

Essa situação da tensão existente no ensino do Cálculo e Análise pode ser comparada metaforicamente, segundo o referido autor, como um movimento pendular que se estabelece entre a intuição e o rigor, sem que o movimento penda mais para o lado de um ou de outro, podendo em alguns casos até estabelecer a situação de equilíbrio. Isso pode ser analisado na seguinte afirmação do autor:

Lembramos que, na prática da sala de aula do Cálculo, tanto o procedimental como o conceptual vêm carregados de aspectos intuitivos que devem ser explorados pelos professores e alunos que constroem estes conhecimentos. Cabe aos professores, então, refletir sobre uma melhor utilização, como referência para suas disciplinas, de livros que claramente apresentam uma abordagem rigorosa dos conteúdos e raramente exploram situações-problema, exemplos, contra-exemplos e ilustrações que poderiam produzir significados e melhor compreensão dos conceitos (REIS, 2001, p. 196).

Como conclusão do seu trabalho, o autor faz um questionamento concernente ao ensino do Cálculo:

Notamos, então, que a questão do excesso de rigor na abordagem dos conceitos do Cálculo é um problema tão abrangente que envolve diferentes tendências de ensino, tradicionais ou não. Mas, não existiriam alternativas para se conseguir um ensino mais intuitivamente eficiente, tanto do ponto de vista matemático como sob uma ótica pedagógica? REIS, 2001,, p. 183).

O ponto de vista dessa “ótica pedagógica” descrita por Reis (2001) foi explorado de acordo com algumas pesquisas em Educação Matemática descritas no

capítulo anterior, que diagnosticaram as dificuldades e a falta de compreensão dos alunos tocante aos conceitos elementares do Cálculo Diferencial e Integral, incluindo o TFC. Entretanto, não foram encontradas pesquisas que procuravam buscar alternativas para se conseguir um ensino denominado pelo autor como “mais intuitivamente eficiente”, que constitui a proposta desta pesquisa.

Diante dessas afirmações que refinam algumas conjecturas do presente trabalho, procurar-se-á buscar alguns subsídios para elaborar uma proposta de ensino que privilegie alguns aspectos intuitivos em relação ao uso excessivo do rigor e do formalismo.

A história da Matemática pode ser considerada um campo fértil para o estudo e a análise do uso da intuição e do rigor no processo do desenvolvimento e criação de ideias e conceitos. Particularmente, a história do Cálculo apresenta muitos fatos e exemplos, desde Arquimedes, da influência da lógica e da intuição na criação matemática, em que se podem destacar os erros e as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos.

Para Ávila (1999), o estudo do contexto histórico torna-se imprescindível para a compreensão do objeto de estudo, exercendo um papel primordial no processo de ensino e aprendizagem:

Muitas teorias matemáticas são de difícil compreensão, no seu porquê, quando vistas isoladamente ou separadas do contexto histórico em que se desenvolveram. cremos que o estudo da Matemática, auxiliado pelo acompanhamento de sua evolução histórica, de seu papel num contexto científico mais amplo, e do fascinante jogo de ideias no cenário da invenção e descoberta, é estimulante e enriquecedor na formação do aluno, sobretudo de sua capacidade de apreciação crítica da disciplina (ÁVILA, prefácio do autor, 1999).

Esse campo fértil do contexto histórico será analisado, portanto, sob o ponto de vista das ideias defendidas por Poincaré (1995) e Fischbein (1987) a respeito do uso da intuição na construção do conhecimento matemático. No entanto, como a dicotomia existente entre a intuição e o rigor emergiu no âmbito dos fundamentos da Matemática? Qual o seu papel no desenvolvimento desta? Procurar-se-á elucidar esses conceitos discutidos até então descrevendo um breve panorama histórico no qual essas ideias estão inseridas.

## 2.2 - A lógica, a intuição e os alicerces da Matemática

O final do século XIX e início do século XX vivenciaram um período de discussão sobre qual a natureza da Matemática e qual a sua relação com a realidade, cuja questão principal tratou de quais os alicerces em que a Matemática poderia ser sedimentada, em um esforço no sentido de sistematização do acúmulo de resultados práticos das fases anteriores, em um processo de axiomatização da Matemática.

Durante muitos séculos, desde a Grécia Antiga, diante da questão dos segmentos incomensuráveis e da solução proposta por Eudoxo por meio da teoria das proporções, a matemática grega exercia um papel dominante por meio da geometria, cuja obra *Os Elementos*, de Euclides, foi sua referência maior. A geometria era considerada pelos matemáticos da época como o mais firme e mais confiável ramo do conhecimento. Esse período pode ser chamado, segundo Davis e Hersh (1989), como o mito de Euclides, assim descrito pelas palavras dos autores:

O que é o mito de Euclides? É a crença de que os livros de Euclides contêm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega ao conhecimento certo, objetivo e eterno (DAVIS e HERSH, 1989, p. 366).

A geometria euclidiana possui a obra *Os Elementos*, composta por treze volumes, que apresenta uma vasta produção matemática desenvolvida desde o tempo de Tales e Pitágoras, passando por Platão e Arquimedes. Os livros de 1 a 6 tratam da geometria plana, e o livro 1 inicia-se com vinte e três definições, cinco noções comuns e cinco postulados. As definições dão nome aos objetos e conceitos elementares dos quais Euclides irá tratar. As noções comuns são regras comumente aceitas sobre raciocínio e relações que o autor explica, enquanto os postulados, ou axiomas, são afirmações sobre os objetos em estudo, consideradas verdadeiras sem demonstração.

Com a descoberta das geometrias não-euclidianas no século XIX, que mostrava ser possível criar outras geometrias imagináveis, alguns fatos abalaram a crença de a geometria constituir uma verdade absoluta e o alicerce da Matemática.

Esses fatos desencadearam uma série de questionamentos sobre a incerteza e a falibilidade de o conhecimento matemático se apoiar sobre uma intuição



geométrica. Serão apresentados alguns exemplos que demonstram essas questões que causaram conflitos com o senso comum e o raciocínio intuitivo.

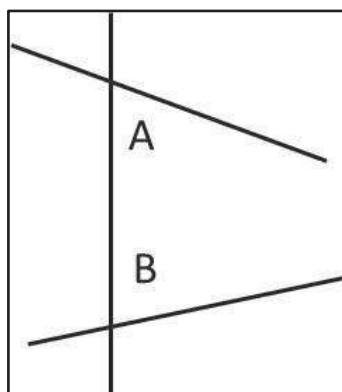
No tocante à obra *Os Elementos*, dentre os cinco postulados, exatamente o quinto mereceu discussão e contestação à parte pelos matemáticos, e pode ser enunciado da seguinte maneira:

E, caso uma linha reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, tradução de BICUDO, p. 98).

Resumidamente, pode-se interpretar que o quinto postulado afirma que, se tomar uma linha fixa, que pode ser considerada vertical, e duas outras retas que a interceptam de forma que a soma dos ângulos internos  $A$  e  $B$ , como na figura a seguir, do lado direito, seja menor que  $180^\circ$ , então as duas retas terão de se encontrar em um ponto do lado direito.

O quinto postulado é equivalente à afirmação, atualmente chamada de postulado das paralelas, assim enunciada: “Dada uma linha reta e ponto  $P$  fora dela, existe exatamente uma reta paralela à reta dada passando por  $P$ ”.

**Figura 7** – Postulado das paralelas



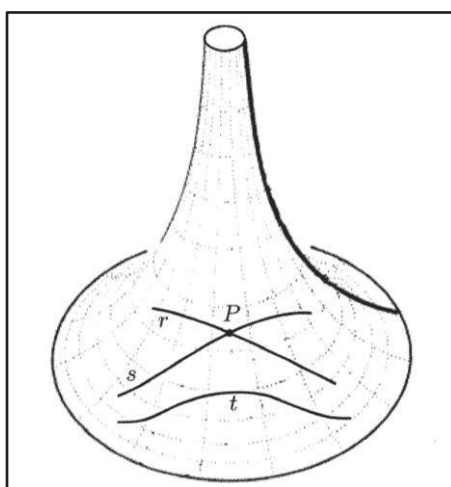
Fonte: Autor, 2012

A dúvida pairava sobre a possibilidade de deduzir o quinto postulado a partir dos outros postulados, ou seja, se ele era considerado um postulado ou um teorema que necessitava então ser demonstrado. Alguns célebres matemáticos do século XVII, como o inglês John Wallis, antecessor de Newton, tentou demonstrá-lo admitindo-o não como um postulado, e sim como um teorema.



Com a criação das geometrias não euclidianas, constituída do espaço que resulta substituindo-se o postulado das paralelas pela suposição de que, para qualquer reta, não existe não apenas uma, mas muitas retas paralelas passando por qualquer ponto externo dado. Por exemplo, em um modelo de geometria hiperbólica, baseada em fatos da própria geometria euclidiana, o matemático italiano Eugenio Beltrami (1835 – 1900) utilizou uma superfície chamada pseudoesfera para representar o plano, com o aspecto de uma corneta conforme a figura a seguir:

**Figura 8** – A pseudoesfera

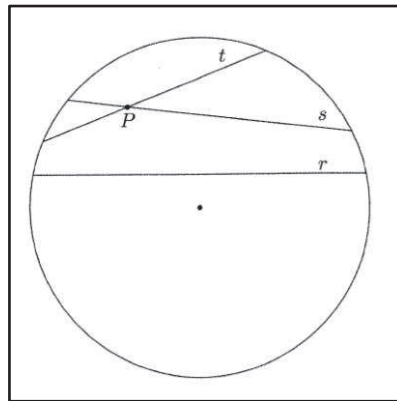


Fonte: Ávila, 2011, p. 85

Nessa superfície, conforme a figura 8, as retas são chamadas de curvas *geodésicas*, ou seja, curvas que ligam e apresentam a menor distância entre quaisquer dois de seus pontos. Nessa figura, seja a reta  $t$  e o ponto  $P$  fora dela; existem as retas  $r$  e  $s$  que passam pelo ponto  $P$  e não interceptam  $t$ , sendo assim paralelas a  $t$ .

No modelo do matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925), o plano pode ser interpretado como um círculo, excluía a circunferência, e as retas, como cordas do círculo, sem as extremidades. De maneira análoga ao exemplo anterior, pode-se demonstrar que, dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora dela, podem-se traçar infinitas retas, como  $s$  e  $t$ , passando por  $P$ , que são paralelas à reta  $r$ , conforme a figura seguinte:

Figura 9 – Modelo de Klein



Fonte: Ávila, 2011, p. 86

Na área do Cálculo e da Análise, em 1890, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) mostrou que a Matemática podia surpreender o senso comum quando construiu curvas contínuas que recobrem a região, isto é, curvas dadas por equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , em que  $f$  e  $g$  são funções reais contínuas no intervalo  $0 \leq t \leq 1$ , cujos pontos preenchem completamente o quadrado unitário limitado por  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Esse paradoxo combina perfeitamente com a descoberta de George Cantor (1845 – 1918) de que não há mais pontos no quadrado unitário que no segmento de reta unitário.

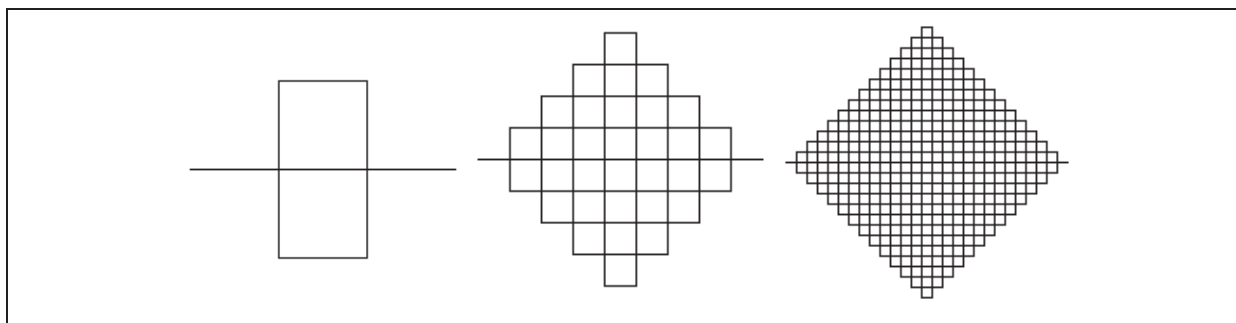
Essa curva pode ser determinada também como uma curva do tipo “*plane filling*”, isto é, uma curva que passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado. Ela é contínua em todos os pontos do seu domínio e não é derivável em nenhum ponto, e o número de iterações tendendo ao infinito faz com que a curva preencha todo o espaço do quadrado de lado unitário.

A descoberta dessa curva chocou os matemáticos da época, conduzindo a uma crise sobre o conceito de curva e causando um conflito cognitivo com o senso comum e a intuição geométrica.

O ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento de reta. Na 1.<sup>a</sup> iteração, o segmento é substituído por nove segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial, e colocados como indica a figura 10 a seguir. Esses nove segmentos constituem a 1.<sup>a</sup> iteração da construção recursiva da curva de Peano. Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos nove segmentos, até o infinito. Observe-se que as curvas obtidas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias – nos vértices dos

pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Pode-se demonstrar que no limite, isto é, na curva de Peano, se passa o mesmo, dando-se o preenchimento do plano, conforme figura a seguir:

**Figura 10** – Curvas de Peano



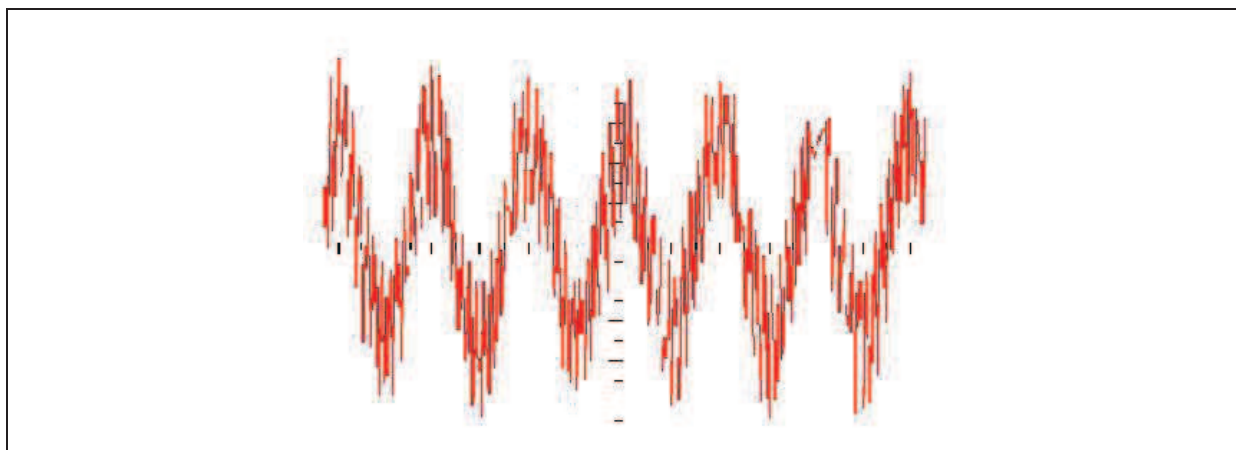
Fonte: Autor, 2012

Além das curvas de Peano e no intuito de distinguir continuidade de diferenciabilidade de uma função, o matemático alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897) construiu, em 1872, uma função contínua em toda a reta real, mas que não possui derivada em nenhum ponto do seu domínio, definida pela seguinte série convergente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)$$

em que  $a \in (0,1)$  e  $b$  é um inteiro positivo ímpar, tal que  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$  e cujo gráfico pode ser representado na figura seguinte:

**Figura 11** – Curva contínua sem derivada em nenhum ponto



Fonte: Autor, 2012

Tal função foi considerada o primeiro exemplo da contradição do senso comum de que toda função contínua é derivável nos pontos do seu domínio, pois a imagem intuitiva de uma função contínua é aquela de uma curva sem rupturas em seu gráfico e que, portanto, é possível traçar tangentes em seus pontos.

Essas descobertas, aliadas ao desenvolvimento da Análise por meio de sua aritmetização, contribuíram para a derrubada do até então alicerce da Matemática – a Geometria – e, conseqüentemente, para a perda da certeza do conhecimento verdadeiro.

Sendo assim, procurando responder novamente quais os alicerces em que toda a Matemática poderia se fundamentar, os matemáticos recorreram à aritmética e ao sistema dos números reais. Entretanto, toda a redução da análise ao conjunto dos números reais deixava um ponto ainda sem resposta: em quais alicerces os números reais se sustentavam?

No século XIX, com o movimento denominado “A Aritmetização da Análise”, embasada na construção dos números reais, e tendo como colaboradores os matemáticos alemães Karl Weierstrass (1815 – 1897) e Richard Dedekind (1831 – 1916), foi criado um sistema que possuía todas as propriedades das grandezas geométricas, o qual passou a ser o sistema que fundamentava a Matemática sem apresentar a geometria como guia e ponto de apoio.

Weierstrass defendia a ideia de que o conceito de limite deveria ser desenvolvido apenas por meio da aritmética, sem usar a geometria como referência. Sendo assim, toda a geometria e toda a análise seriam reduzidas à aritmética, introduzindo-se conjuntos infinitos nos fundamentos da Matemática.

Além da fundamentação da Análise por meio dos números reais, alguns matemáticos consideravam que a lógica utilizada na teoria dos conjuntos (conjunto vazio, relação de inclusão, relação de implicação) serviria de fundamento para toda a Matemática. Essa concepção filosófica deu origem ao programa denominado logicismo, cujo princípio se baseava em deduzir toda a Matemática somente a partir da lógica, defendida por Gottlob Frege (1848 – 1925) e Bertand Russell (1872 – 1970).

Segundo Eves (2004, p. 677), a tese do logicismo é que a Matemática é um ramo da lógica clássica. Assim, a lógica, em vez de ser apenas um instrumento da Matemática, passa a ser considerada a geradora dela. Todos os conceitos da Matemática, segundo o autor, têm que ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da Matemática devem ser desenvolvidos como teoremas da

lógica; a distinção entre Matemática e lógica passa a ser uma questão de conveniência prática.

Russel (2007), que defendia os fundamentos do logicismo, considerava que toda a Matemática pura poderia ser reduzida a um número limitado de ideias e proposições primitivas, cujo fundamento é o conjunto dos números naturais. O autor considera que:

Toda a matemática pura tradicional, incluindo a geometria analítica, pode ser encarada como consistindo inteiramente em proposições acerca dos números naturais. Isto é, os termos que ocorrem podem ser definidos por meio dos números naturais, e as proposições podem ser deduzidas das propriedades dos números naturais – com a adição, em cada caso, das ideias e proposições da lógica pura (RUSSEL, 2007, p. 20).

Para os logicistas, a construção dos números naturais poderia ser derivada de três ideias e cinco proposições primitivas. As três ideias primitivas da aritmética de Peano são: *1, número e sucessor*, em que o termo “sucessor” entende-se pelo elemento seguinte na ordem natural e “número”, a classe dos números naturais. As cinco proposições primitivas de Peano, segundo Russel (2007), são:

1. *1* é um número.
2. O sucessor de qualquer número é um número.
3. Dois números diferentes nunca têm o mesmo sucessor.
4. *1* não é o sucessor de nenhum número.
5. Qualquer propriedade que pertença a *1* e também ao sucessor de qualquer número que tenha essa propriedade pertence a todos os números.

Em contrapartida à fundamentação da Matemática por meio da lógica clássica, nesse contexto surgiu uma corrente filosófica denominada intuicionismo, que se desenvolveu no final do século XIX e principalmente no início do século XX, defendendo o uso da intuição no processo de construção do conhecimento matemático.

De acordo com Silva (2007), o intuicionismo possui o matemático e filósofo holandês L. E. J. Brouwer (1881 – 1996) como principal representante dessa escola filosófica, que se constitui em uma doutrina na qual a intuição ocupa o papel principal para a construção do conhecimento.

O referido autor afirma que o intuicionismo é uma vertente derivada do construtivismo, cujas origens podem ser encontradas na Antiguidade Clássica. Entretanto, o pioneiro na elaboração de uma filosofia construtivista, para Silva (2007), foi o filósofo alemão Immanuel Kant (1724 – 1804).

Essa vertente construtivista não acreditava que os objetos matemáticos existiam “em si”, independentes de qualquer construção, ou seja, a existência ou a verdade dependia da atividade matemática, em que as entidades ou verdades matemáticas não eram descobertas, mas sim criadas. Os intuicionistas duvidavam da existência de qualquer objeto matemático que não pudesse ser construído na consciência a partir de vivências mentais muito específicas, e recusava-se a admitir qualquer noção de verdade matemática que dispensasse a verificação efetiva por meio de procedimentos de construção.

Para o matemático holandês Brouwer, os números naturais são dados por uma intuição fundamental, como ponto de partida, e tais números não existiriam se não fossem concebidos por uma construção em um número finito de procedimentos. Portanto, seria permitido conceber um objeto, depois mais um, depois outro, mais um, e assim por diante indefinidamente.

Essa intuição fundamental, segundo Silva (2007, p. 148), resume-se na verdade à evidência de que nossas vivências mentais conscientes apresentam-se sempre em séries temporais finitas (mas em princípio ilimitadas) e discretas.

Um dos alunos de Brouwer, Arend Heyting, apresentou uma lógica subjacente aos procedimentos dessa matemática intuicionista, que foi denominada de lógica intuicionista ou lógica de Heyting. Essa lógica intuicionista derogava algumas verdades da lógica clássica, como o princípio do terceiro excluído.

Comparando-se as duas correntes filosóficas, o logicismo e o intuicionismo, percebe-se que do ponto de vista do estudo da Matemática essas vertentes caminham em direções opostas. Enquanto o intuicionismo se dirige a uma perspectiva construtivista, em que os objetos matemáticos são construídos em uma ordem de complexidade crescente, ou seja, partindo-se dos objetos mais simples e por meio de construções mentais finitas baseadas na experiência humana, como a construção dos números naturais, depois os inteiros, os racionais e irracionais e a seguir os números complexos, os logicistas tomam um sentido oposto, rumo à abstração e a uma espécie de simplicidade lógica cada vez maior, em uma busca de ideias e princípios mais

gerais nos quais todos os outros conceitos podem ser definidos e deduzidos, sem a necessidade da experiência humana.

Uma crítica que se faz ao intuicionismo e sua lógica intuicionista seria a limitação daquilo que se poderia reconstruir na Matemática sem nenhum trabalho adicional, utilizando-se dos princípios intuicionistas. Para Eves (2004), o defeito encontrado na abordagem intuicionista é o fato de se sacrificarem muitas coisas valiosas para a maioria dos matemáticos, como a noção dos conjuntos infinitos, a lei do terceiro excluído, conceitos que são considerados questionáveis e imprecisos, segundo os intuicionistas.

Todavia, para o autor citado, resta ainda uma possibilidade de reconstrução intuicionista da Matemática clássica levada a efeito de uma maneira diferente e cheia de êxito, pois uma qualidade do ponto de vista intuicionista observada pelo autor é o fato de os métodos intuicionistas não levarem a contradições.

Dentre os intuicionistas pode-se também destacar o filósofo e matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912), que considerava a Matemática como uma construção mental, em que os objetos matemáticos são elaborados dessa forma, em que o homem tem uma intuição particular que lhe permite construções mentais a partir de uma percepção imediata, uma intuição, em que existe uma participação do sujeito na construção do conhecimento.

Analisando o panorama descrito anteriormente sobre a questão da lógica e intuição nos fundamentos da Matemática, esta pesquisa não tem por finalidade apropriar-se dos princípios da lógica intuicionista, tal como foi defendida, entre outros, por Brouwer, mas sim das ideias ligadas ao uso da intuição, segundo Poincaré (1995), na construção do pensamento matemático, considerando as cognições intuitivas como fundamentais na elaboração de conjecturas para posteriormente formalizarem-se os conceitos, pois essa concepção de privilegiar alguns aspectos cognitivos ligados ao uso da intuição vem ao encontro da proposta de elaboração da sequência didática deste trabalho.

Com isso, deseja-se elaborar uma intervenção de ensino que apresente um cenário favorável ao uso da intuição na construção do conhecimento matemático, e que os conteúdos possam ser ministrados privilegiando-se a formulação de conjecturas, exemplos e contra-exemplos, e a formalização posterior por meio da demonstração.

Tal proposta deve ser elaborada e ter como contraponto o ensino baseado em uma sequência definição – teorema – demonstração – exercícios. No entanto é importante ainda discutir algumas definições sobre o uso da intuição na construção do conhecimento matemático.

Considerando o ponto de vista da construção do pensamento matemático descrito até então, este trabalho se apropriará das ideias e do uso da intuição descritas por Poincaré (1995) sobre a elaboração de conjecturas, hipóteses, refutações nessa construção, em que se procurará refletir e transportar essas ideias para o ensino e aprendizagem do Cálculo com a seguinte pergunta: há possibilidade de uma construção dos conceitos elementares do Cálculo baseados no uso da intuição de uma maneira diferenciada? Quais os fatores positivos e negativos dessa construção? Procurando respostas para essas perguntas, serão apresentados a seguir mais alguns elementos que constituem os princípios do uso da intuição, conforme Poincaré (1995).

### 2.3 - A intuição segundo Poincaré

O filósofo e matemático francês Jules Henri Poincaré pode ser considerado um dos últimos universalistas, por sua vasta contribuição em muitos ramos da Matemática, filosofia, física e das ciências de um modo geral. Nasceu na cidade de Nancy, na França, em 1854 e graduou-se na *École Polytechnique* em 1875 onde posteriormente obteve um diploma de engenheiro de minas, em 1879. Nesse mesmo ano, Poincaré efetivou o doutorado em ciências na Universidade de Paris com a tese: *"Sobre as propriedades das funções definidas por equações diferenciais parciais"*.

Poincaré lecionou diversas disciplinas na Faculdade de Ciências da Universidade de Paris, e seus escritos e trabalhos se tornaram rapidamente obras impressas que serviriam de materiais didáticos. Sua forma de escrever, simples e objetiva, constituía uma de suas características que o tornaram uma referência. Boyer (1996) destaca o domínio alcançado por Poincaré no conhecimento matemático:

O aumento do número de indivíduos ocupados com a pesquisa e ensino de matemática sugeriria que já não se pode destacar umas poucas figuras dominantes como representando o estado da arte num dado período, e que nenhuma pessoa poderia achar um caminho livre através da grande e emaranhada paisagem matemática. [...] Se alguém a partir daí provou que



essa ideia estava errada, esse alguém foi Poincaré, pois ele considerou toda a matemática no seu domínio (BOYER, 1996, p. 417).

Os comentários de Bottazzini (2007) reiteram o legado deixado por esse grande personagem e sua influência no pensamento científico:

Foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos, talvez o último a dominar e fazer progredir todas as áreas desse ramo do saber, e um cientista cujas ideias orientaram a filosofia e a cultura de seu século. Suas intuições geométricas geniais alimentaram a imaginação de gerações inteiras de matemáticos (BOTTAZZINI, 2007, p. 7).

Poincaré apresenta, de modo geral, em suas principais obras, como *A Ciência e a Hipótese* (1984), *O Valor da Ciência* (1995) e *Ciência e Método* (2004) alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do conhecimento científico.

Em sua obra *A Ciência e a Hipótese* (1984), por exemplo, o autor procura trazer à tona a análise dos principais aspectos para se considerar uma ciência válida apenas se for passível de experimentação. Essa crítica explicitada por Poincaré contrapõe a ideia de considerar a ciência como uma verdade absoluta reiterada pelo logicismo, que defendia a tese de que a Matemática era dotada de uma lógica infalível e que toda a Matemática poderia se resumir às leis da lógica, dado que o erro significava justamente o desconhecimento dessas leis.

Essa tese em reduzir a Matemática a princípios meramente lógicos sobre raciocínios analíticos acarretava no desfazimento de todos os raciocínios intuitivos e indutivos. Poincaré defendia a intuição como papel central na questão da criatividade e a invenção. A intuição, segundo o autor, é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística, de acordo com ele, é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica.

Poincaré contrapõe-se fortemente ao logicismo, criticando a ideia de submeter a Matemática à lógica, considerando esta última, assim como Aristóteles, como uma ferramenta importante e necessária, mas não uma ciência propriamente dita. Para ele, a lógica não cria o novo, pois não se recorre mais aos raciocínios como a intuição. Sendo assim, não é dela que sozinha se podem criar novas ciências. A lógica domestica a imaginação do homem, servindo como regra de funcionamento do pensamento e como critério de validação das proposições, uma ferramenta que possibilita a construção de todas as ciências.

Com isso, o autor se insere em uma corrente filosófica intuicionista inspirada na filosofia kantiana oposta à perspectiva platonista em que os objetos matemáticos são considerados eternos e independentes da mente do matemático, defendida pelos logicistas. Para estes, as coisas não são evidentes e precisam ser demonstradas; para os intuicionistas, os objetos matemáticos são criados segundo etapas que envolvem construções mentais.

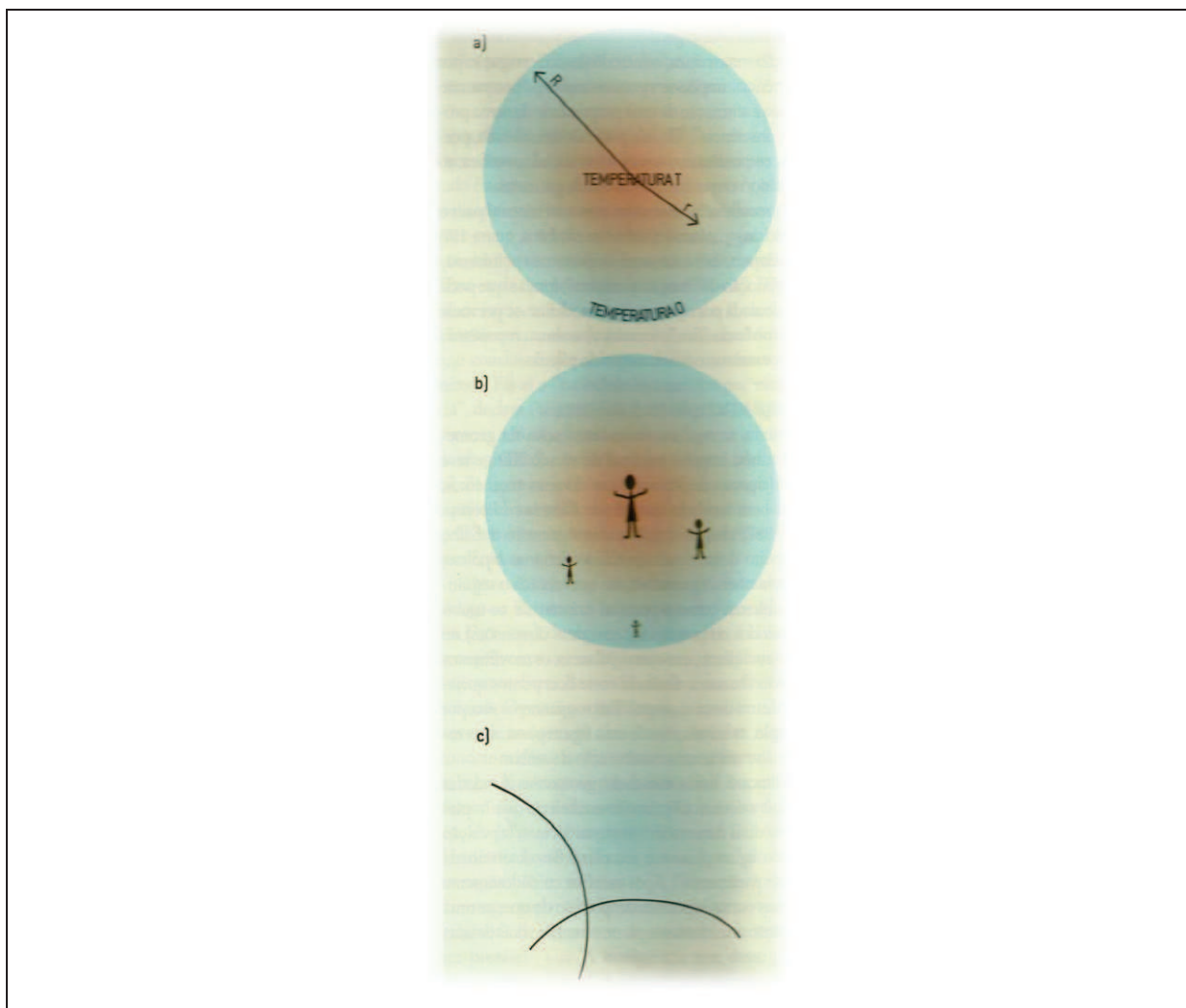
O autor considera que a lógica e a intuição são igualmente importantes para o progresso da ciência. Poincaré (1984) considerava os axiomas da geometria não como julgamentos sintéticos *a priori*, como afirmava Kant (1999), nem julgamentos analíticos, nem fatos experimentais, tampouco descrições desses fatos; elas são meras “convenções” disfarçadas de formas observadas na natureza, na física, na mecânica celeste (por exemplo, a propagação da luz, o espaço em que se vive), sendo um tipo de definição “dissimulada”. Para o autor, recorrer à intuição geométrica no processo da criação matemática torna-se fundamental, pois cada concepção é uma imagem que, uma vez compreendida seu sentido, ninguém pode esquecer. Entretanto, para o autor a intuição não está necessariamente associada a um contato com o mundo exterior, no testemunho dos sentidos. A intuição constitui-se na origem da criação, sendo o “sentimento”, a ideia inicial que gera uma hipótese que será posteriormente demonstrada pela lógica.

Sobre as convenções dos postulados na criação matemática, Poincaré (1984), por exemplo, imaginava um mundo encerrado dentro de uma grande esfera de raio  $R$ , cuja temperatura é máxima no centro e diminui em direção à periferia proporcionalmente a  $R^2 - r^2$  (em que  $r$  é a distância entre um ponto e o centro da esfera), até atingir o zero absoluto na borda da esfera.

Considere-se que, nesse mundo, todos os corpos apresentam o mesmo coeficiente de dilatação e que os comprimentos sejam proporcionais à temperatura absoluta. Por fim, imagine-se que, quando um corpo é transportado de um ponto a outro, ele assume instantaneamente a temperatura local. Suponha-se agora que os habitantes desse mundo viajem e que, à medida que se aproximam da borda, seus corpos resfriem-se e tornam-se cada vez menores, de tal maneira que não conseguirão jamais atingi-la. Esse mundo, limitado na geometria, é infinito para seus habitantes. Pode-se assumir também que nele o índice de refração seja inversamente proporcional a  $R^2 - r^2$ ; assim, por um efeito ótico, a luz não se propaga de maneira retilínea, mas, salvo em alguns casos particulares, curvada ao longo de uma

circunferência. Se os habitantes desse lugar fizerem geometria com base em sua experiência, essa geometria será não euclidiana, de acordo com a figura seguinte.

**Figura 12** – O mundo imaginado por Poincaré (1984)



Fonte: Botazzini, 2007, p. 14

Poincaré (1984) conclui que os postulados geométricos são convenções, e que a escolha entre outras convenções possíveis é guiada por fatos experimentais, mas que permanece livre e não limitada senão pela necessidade de criar qualquer convenção.

No tocante às características do raciocínio intuitivo, Poincaré (1995) distingue os tipos de intuição na seguinte classificação:

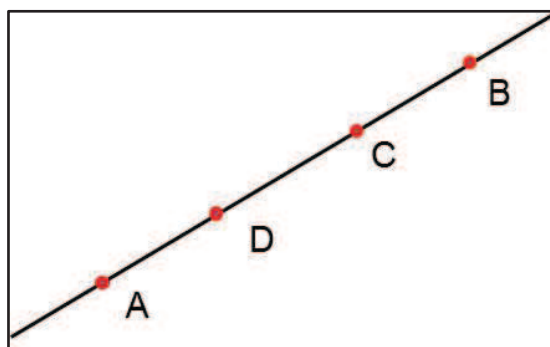
**- A intuição sensível ou geométrica:** com o apelo aos sentidos e à imaginação, com o uso de representações geométricas, por exemplo. Essa intuição, segundo Poincaré

(1995), não pode nos dar a certeza, entretanto ela possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Como exemplo dessa intuição geométrica, Poincaré considera a seguinte afirmação: “Se numa reta o ponto  $C$  está entre  $A$  e  $B$  e o ponto  $D$  esta entre  $A$  e  $C$  então o ponto  $D$  está entre  $A$  e  $B$ ”.

Para comprovar a veracidade de tal afirmação, pode-se chegar ao recurso geométrico imaginando tal situação com a seguinte representação dada:

**Figura 13** – Exemplo de Poincaré – apelo à visualização geométrica



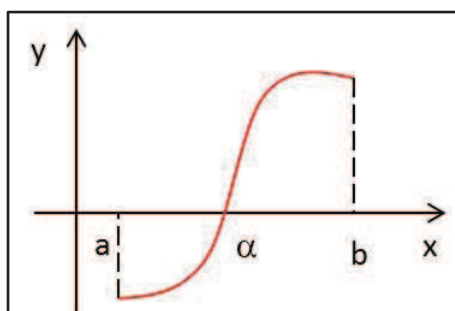
Fonte: Autor, 2012

Outro exemplo sobre a importância da representação gráfica e a visualização geométrica como forma de compreensão dos conceitos matemáticos pode ser encontrado no estudo do teorema de Bolzano, assim enunciado:

Uma função contínua de uma variável  $x$  que é positiva para algum valor de  $x$  e negativa para algum outro valor de  $x$  em um intervalo fechado  $a \leq x \leq b$  de continuidade, deve ter o valor zero para algum valor intermediário de  $x$ . Assim, se  $f(x)$  é contínua à medida que  $x$  varia no intervalo de  $a$  até  $b$ , enquanto  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , então existirá um valor  $\alpha$  de  $x$  tal que  $a < \alpha < b$  e  $f(\alpha) = 0$  (COURANT e ROBBINS, 2000, p. 260-261).

De acordo com o enunciado anterior, sendo  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  pode-se compreender melhor o teorema ao ser elaborada uma representação gráfica que mostra tal situação em que se  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , então no intervalo  $[a, b]$  a função deve necessariamente interceptar o eixo das abscissas em pelo menos um ponto. Sendo assim, pode-se encontrar nesse intervalo um número real  $\alpha$  tal que  $f(\alpha) = 0$ , conforme a figura a seguir:

**Figura 14** – Representação gráfica – Teorema de Bolzano



Fonte: Autor, 2012

Entretanto, para Poincaré (1995) a intuição não se baseia apenas na imagem geométrica, mas também física. A analogia física, segundo o autor, permite obter a solução que um matemático não poderia estabelecer pelo raciocínio dedutivo. Por esse tipo de raciocínio, o matemático pode buscar a solução. A intuição física, portanto, não pressente a solução, mas nos sugere o raciocínio necessário para encontrar uma solução.

Como exemplo do uso da analogia física, Poincaré (1995) cita o caso do matemático alemão Felix Klein, que se utilizou da eletricidade para resolver uma questão referente a funções:

Vejam, ao contrário, o Sr. Klein: estuda uma das questões mais abstratas da teoria das funções: trata-se de saber se numa determinada superfície de Wieman existe sempre uma função que admite singularidades dadas. Que fez o celebre geômetra alemão? Substitui sua superfície de Wieman por uma superfície metálica cuja condutibilidade elétrica varia segundo certas leis. Põe dois de seus pontos em contato com os dois polos de uma pilha. A corrente deverá passar – diz ele – e o modo como essa corrente se distribui na superfície definirá uma função cujas singularidades serão precisamente aquelas que são previstas pelo enunciado (POINCARÉ, 1995, p. 14).

- **A intuição ao número puro**, que pode ser a geradora do verdadeiro raciocínio matemático, sendo o número desprovido de qualquer característica geométrica, de onde se origina a generalização por indução e pode-se encontrar de forma explícita nas ciências experimentais. Esse tipo de intuição, para o referido autor, apresenta a propriedade de invenção em menor grau, sendo o instrumento da lógica formal, da demonstração. Esse raciocínio também pode ser descrito como raciocínio por recorrência, que Poincaré (1995) defende ser único instrumento que possibilita uma passagem do finito para o infinito. Essa intuição pode ser resumida no seguinte princípio conhecido como princípio da indução matemática ou lei por recorrência: Se

um teorema é verdadeiro para o número 1, e se demonstramos que ele é verdadeiro para  $n + 1$ , contando que o seja para  $n$ , será verdadeiro para todos os números inteiros (POINCARÉ, 1984, p. 18).

Essa afirmação do autor faz concluir que, ao tratar-se de números, está-se referindo ao conjunto dos números inteiros positivos.

Pode-se exemplificar essa intuição de raciocínio por recorrência para demonstrar a seguinte afirmação:

“A soma  $S_n$  dos  $n$  primeiros números naturais,  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  é igual a  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ”.

A fórmula é verdadeira para  $n=1$ , pois a soma  $S_1$  é igual a 1. Por recorrência, suponha-se que a fórmula seja verdadeira para os  $n - 1$  primeiros números. Assim, pela hipótese da indução:

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}, \text{ mas } S_n = S_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A proposição fica demonstrada, assim, para todos os valores de  $n$ .

Observa-se também que a operação de adição dos números naturais pode ser obtida por uma indução, pois segundo Poincaré (1984), ao considerar a situação de somar os números  $x + a$ , utiliza-se a seguinte lei:

**DEFINIÇÃO DE ADIÇÃO** – Suponhamos que se tenha definido, anteriormente, a operação  $x + 1$  que consiste em adicionar o número 1 a um dado número  $x$ .

Essa definição qualquer que seja aliás, não terá mais nenhum papel no desenrolar dos raciocínios.

Agora trata-se de definir a operação  $x + a$  que consiste em adicionar o número  $a$  a um número dado  $x$ .

Suponhamos que se tenha definido a operação

$$x + (a - 1),$$

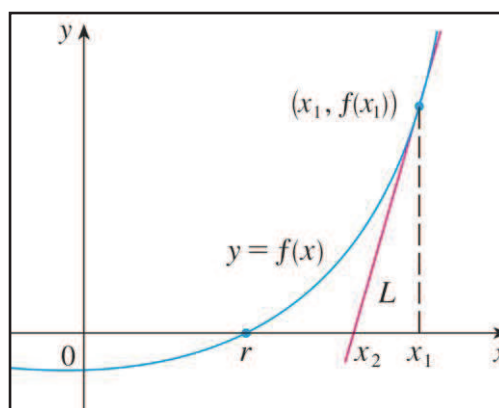
a operação  $x + a$  será definida pela igualdade:

$$(1) \quad x + a = [x + (a - 1)] + 1.$$

Então saberemos o que é  $x + a$  quando soubermos o que é  $x + (a - 1)$  e, como supus, no início, que sabemos o que é  $x + 1$ , podemos definir sucessivamente, e “por recorrência”, as operações  $x + 2, x + 3$ , etc. (POINCARÉ, 1984, p. 24).

Um exemplo que engloba os tipos de raciocínio intuitivo descritos por Poincaré pode ser dado na utilização do *método de Newton*, também denominado *método de Newton-Raphson* ou *método das tangentes* para encontrar soluções numéricas aproximadas de uma equação  $f(x) = 0$ .

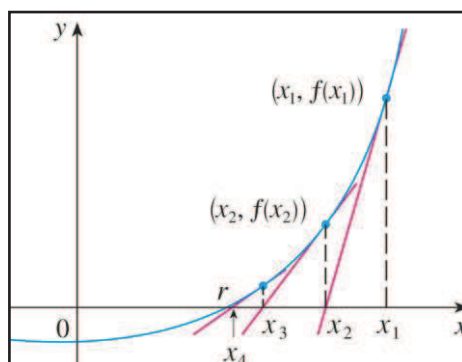
**Figura 15 – Método de Newton**



Fonte: Stewart, 2010, p. 314

Esse método utiliza-se do traçado da reta tangente em um ponto  $x_1$  convenientemente escolhido do gráfico de  $f$  e a intersecção dessa reta tangente com o eixo das abscissas originará um novo ponto  $x_2$ , que será usado no traçado de uma nova reta tangente, e assim sucessivamente, sendo que a ideia intuitiva é que a reta tangente vai se tornando cada vez mais próxima da curva e consequentemente as intersecções com o eixo das abscissas vão se aproximando cada vez mais da raiz  $r$  que se deseja encontrar com certa precisão dada. A construção de uma nova tangente, seguida de outra, e assim sucessivamente constitui o raciocínio por recorrência, que a partir de uma primeira construção existir, será possível obter outra, e assim por diante, num processo de construção finito.

Esse método apresenta um “apelo” à visualização geométrica muito evidente, porém tão somente a intuição geométrica não garante a certeza do resultado, pois necessita-se do aspecto formal para se obter a solução.

**Figura 16** – Visualização geométrica - Método de Newton

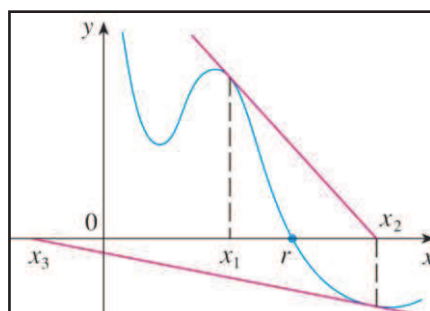
Fonte: Stewart, 2010, p. 314

Utilizando-se do raciocínio por recorrência, dado um ponto  $x_1$ , e sendo  $f'(x_n)$  a derivada da função  $f$  no ponto  $x_n$ , obtém-se uma sequência de aproximação  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}$ , dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

com  $f'(x_n) \neq 0$ .

Entretanto, utilizando-se apenas do raciocínio por recorrência com o conhecimento prévio da equação (1), não se garante encontrar a raiz  $r$  com a tolerância desejada, pois, caso o ponto  $x_1$ , conforme comentado anteriormente, não seja escolhido de maneira conveniente, a sequência  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}$  pode divergir, de acordo com a figura a seguir, em que se observa que a aproximação  $x_2$  pior que  $x_1$ . Isso ocorre geralmente quando  $f(x_1)$  está próximo de 0. Nesse caso, deve-se reiniciar o processo usando um novo ponto  $x_1$ , que pode ser criteriosamente escolhido se utilizado da intuição geométrica.

**Figura 17** – Exemplo do Método de Newton – Sequência divergente

Fonte: Stewart, 2010, p. 315

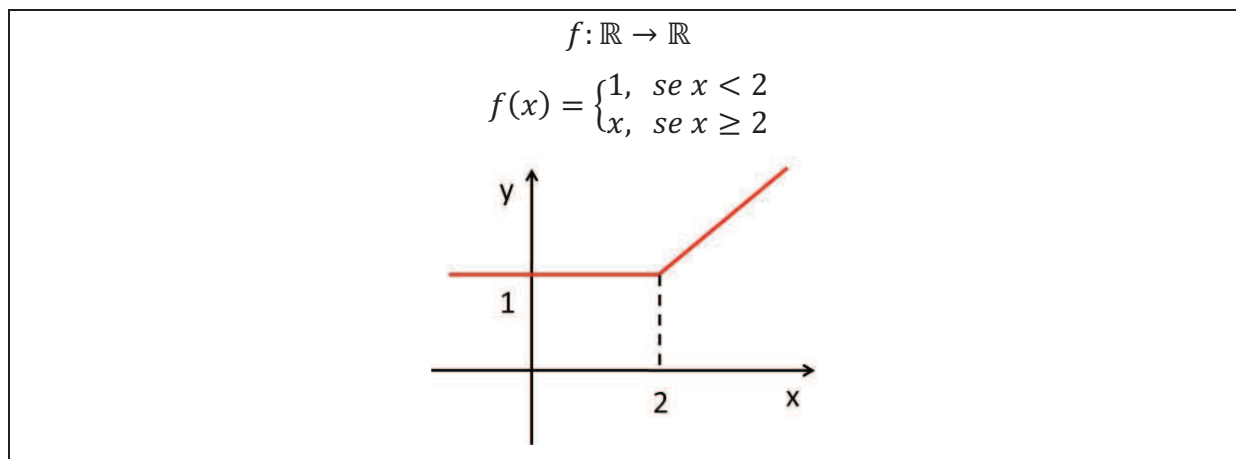


Esse exemplo mostra a interdependência entre o aspecto intuitivo (no caso geométrico) com o formal (fórmula de recorrência). Observa-se a necessidade da exploração desses dois aspectos para a compreensão e utilização do método, em que a sensibilidade da escolha do ponto inicial dada por uma intuição geométrica possibilita a convergência da sequência.

O cuidado, segundo Poincaré (1995), que se deve tomar reside no fato de que o uso da intuição pode trazer resultados inesperados, pois algumas afirmações podem ser consideradas verdadeiras por uma simples ideia ou esquema mental criado na tentativa de provar tal afirmação e que nem sempre correspondem com sua demonstração. Isso acaba criando um conflito cognitivo com aquilo que se acredita intuitivamente por meio de representações geométricas, ou o apelo aos sentidos e a sua demonstração formal.

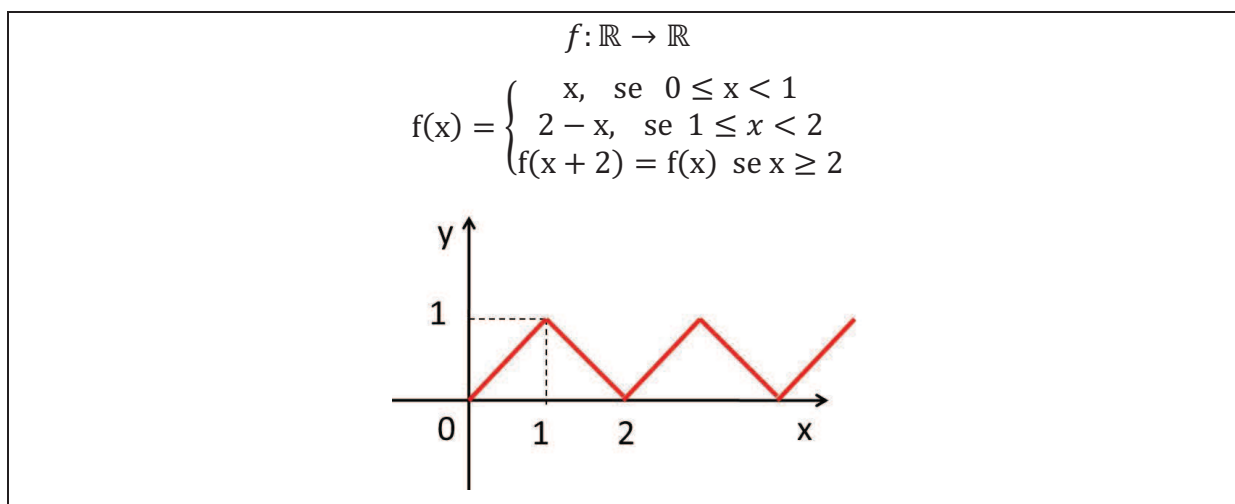
Como exemplo, o autor comenta sobre as funções contínuas desprovidas de derivada. Pela intuição, toda função contínua tem uma derivada, pois toda curva tem a sua tangente. Sendo assim, considere a função contínua definida a seguir:

**Quadro 6** – Função contínua sem derivada em um ponto



Fonte: Autor, 2012

A função representada anteriormente é contínua em todos os pontos do seu domínio, entretanto no ponto  $x = 2$  a função não é derivável. A intuição, nesse caso, de uma imagem da função contínua ser derivável em todos os pontos do seu domínio pode levar a conclusões errôneas. Outro exemplo a seguir mostra uma função contínua que possui infinitos pontos de descontinuidade:

**Quadro 7** – Função contínua com infinitos pontos não deriváveis

Fonte: Autor, 2012

A história da Matemática apresenta outros inúmeros exemplos da falibilidade do uso da intuição, conforme se observou na matemática da Grécia antiga, com a crise dos incomensuráveis. Pela intuição, pode-se raciocinar que duas grandezas sempre seriam comensuráveis. Por exemplo, dados dois segmentos A e B, pode-se encontrar sempre um segmento menor  $\sigma$ , tal que  $A = m\sigma$  e  $B = n\sigma$ , pois, se o  $\sigma$  escolhido não satisfizesse a questão, seria possível ir escolher  $\sigma$  cada vez menor até encontrar tal segmento. Entretanto, demonstrou-se que nem sempre isso seria possível, pois existem segmentos que não admitem um submúltiplo comum, ou seja, existem grandezas que são incomensuráveis, por exemplo, o lado e a diagonal do quadrado.

Poincaré (1995) comenta ainda que ao analisarem-se as obras de muitos matemáticos, podem inicialmente ser criadas duas tendências *a priori* opostas, ou, como o autor afirma, dois “espíritos matemáticos” inteiramente diferentes. Alguns poderão ser classificados como *analistas* preocupados com a lógica e o rigor, e outros denominados *geômetras*, que se deixam guiar pela intuição geométrica.

Para exemplificar e efetuar uma comparação entre os matemáticos intuicionistas, que se utilizam do uso de figuras geométricas em suas explicações, e os logicistas, que se valem dos princípios da lógica, Poincaré (1995), inicialmente, apresenta dois matemáticos franceses e seus respectivos estilos lógicos e intuicionistas: o primeiro, Joseph Bertrand<sup>2</sup>, classificado pelo autor como intuicionista,

<sup>2</sup> Joseph Louis François Bertrand (Paris, 11 de março de 1822 — Paris, 3 de abril de 1900) matemático, historiador de ciências e acadêmico francês

e o segundo Charles Hermite<sup>3</sup>, considerado um logicista, descritos da seguinte maneira:

Enquanto fala, o Sr. Bertrand está sempre em ação; ora parece às voltas com algum inimigo externo, ora desenha com um gesto da mão as figuras que estuda. Evidentemente vê, e busca representar: é por isso que recorre ao gesto. Quanto ao Sr. Hermite, é exatamente o contrário; seus olhos parecem fugir ao contato do mundo; não é fora, é dentro que procura a visão da verdade (POINCARÉ, 1995, p. 14).

No entanto, o matemático francês Jacques Hadamard (2009), aluno do Sr. Hermite, contesta o ponto de vista de Poincaré (1995), dado que, segundo o autor, o Sr. Hermite não tinha o hábito de pensar no concreto. “Ele tinha uma espécie de ódio pela geometria e, certa vez, me fez uma crítica estranha por eu ter feito uma dissertação de geometria” (p. 129). Poincaré (1995) considerava Hermite um matemático lógico, mas Hadamard (2009) adverte que, quando assistia às suas aulas, o considerava com um espírito intuitivo.

A seguir, Poincaré (1995) compara dois matemáticos alemães – Weierstrass e Riemann:

Weierstrass reduz tudo à consideração das séries e a suas transformações analíticas; melhor dizendo, reduz a análise a uma espécie de prolongamento da aritmética; pode-se percorrer todos os seus livros sem neles encontrar uma figura. Riemann, ao contrário, recorre à geometria: cada uma de suas concepções é uma imagem que, uma vez compreendido seu sentido, ninguém pode esquecer (POINCARÉ, 1995, p. 15).

Hadamard (2009) novamente comenta que apenas uma obra de cálculo funcional apresentava uma figura, o que se pode constituir uma intuição inicial precedida da lógica, em se pode concluir que não existe, portanto, uma descoberta totalmente lógica. Segundo Hadamard (2009), o caso do bom senso e o uso da intuição:

Mas, em outros casos, as vias seguidas pelo bom senso podem ser diferentes dessas que podemos formular num raciocínio explícito. Isso ocorre em particular com as questões de natureza concreta – digamos geométricas ou mecânicas. Nossas ideias sobre tais assuntos, adquiridas na infância, parecem relegadas a um inconsciente

---

<sup>3</sup> Charles Hermite (Dieuze, 24 de dezembro de 1822 - Paris, 14 de janeiro de 1901) matemático francês.

longínquo; não podemos conhecê-las exatamente, e é provável que elas impliquem razões empíricas que não vieram do verdadeiro raciocínio, mas da experiência de nossos sentidos (HADAMARD, 2009, p. 122)

Como conclusão entre as diferenças dos denominados “espíritos matemáticos” classificados por Poincaré (1995) como lógicos e analistas, e outros como intuitivos e geômetras, observa-se que essa visão e classificação não devem ser consideradas mutuamente exclusivas, pois o próprio autor assevera que muitos analistas fazem uso dos sentidos e da imaginação, quer seja com recursos geométricos ou não no processo do raciocínio matemático, e que mesmo muitas obras, como *Os elementos*, de Euclides, que aparentemente poderiam ser classificadas como intuitivas, apresentam uma estrutura lógica descrita por axiomas, noções comuns e postulados.

Portanto, a intuição sensível, fundamentada na utilização dos sentidos e da imaginação e a intuição ao número puro, no processo de indução matemática, são igualmente importantes no estudo dos objetos matemáticos. O que se deve considerar é em qual medida e em quais situações se devem usá-las como forma de criação e compreensão dos conceitos matemáticos.

Além das ideias defendidas por Poincaré (1995) a respeito da intuição, a seguir serão discutidos os pontos de vista de Fischbein (1987) relacionados ao uso da intuição no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

## **2.4- A intuição segundo Fischbein**

O psicólogo romeno Efraim Fischbein (1987) em seus trabalhos procura elucidar a importância do estudo da intuição no processo de ensino e aprendizagem, particularmente na Matemática, destacando a preocupação com as faculdades intuitivas dos alunos exigidas na aprendizagem e no contato inicial com os objetos matemáticos.

Essa primeira etapa em que o aluno entra em contato com um conhecimento matemático se sustenta em um raciocínio predominantemente intuitivo, pois a falta de familiaridade com o objeto de estudo acarreta uma dificuldade de lidar com definições formais baseadas em uma visão constituída de demonstrações e implicações.

O raciocínio intuitivo proporciona uma evolução gradual da aprendizagem dotada de uma relação baseada em estruturas mentais sucedidas de generalizações. Por estruturas mentais, para o autor, entende-se como dispositivos que tornam possíveis a assimilação e interpretação de informações e as reações adequadas a vários estímulos.

O autor alerta que o conceito de intuição apresenta definições e pontos de vista controversos na ciência e filosofia, sendo considerado para alguns estudiosos como um conceito e para outros como um método.

Para os teóricos que consideram um método, como o filósofo e matemático francês Henri Bergson (1859 – 1941), a intuição significa uma espécie de estratégia mental capaz de alcançar a essência dos fenômenos, sendo uma realidade sentida e compreendida absolutamente de modo direto, penetrando no objeto de estudo de modo imediato.

Todavia, para Kant (1999) o conceito de intuição pode ser resumido simplesmente à faculdade por meio da qual os objetos são diretamente acessados em distinção à faculdade de entendimento, pela qual se alcança o conhecimento formal.

Fischbein (1987) sustenta mesmo diante de tantas contradições e pontos de vista distintos sobre a intuição, a necessidade da certeza de tornar explícito o formal do mecanismo dedutivo que os cientistas se utilizam de mecanismos intuitivos no entendimento, solucionando problemas, criando e promovendo contribuições para a Matemática.

O autor elucida esse ponto de vista com a seguinte afirmação:

Em contraste, segundo alguns filósofos, como Spinoza, a intuição é a mais elevada forma de conhecimento através da que a própria essência das coisas, e o próprio Deus, podem ser revelados.  
De acordo com Poincaré, nenhuma atividade criativa genuína é possível na ciência e na Matemática sem intuição, enquanto para Hahn (1956) a intuição é principalmente uma fonte de equívocos e deve ser eliminada de um empreendimento científico (FISCHBEIN, 1987, p. 8 – tradução nossa).

Por ser adotada em várias áreas do conhecimento científico, não existe uma definição consensual para intuição. Esta é entendida como uma concepção geral, uma noção, um princípio, interpretação, previsão ou solução provisória para um problema. Esses conceitos sobre intuição de Fischbein (1987) serão utilizados na análise da intervenção de ensino neste trabalho.

No tocante ao conhecimento matemático, o autor destaca o renovado interesse pela intuição das ciências e da Matemática que destacam o papel desta no processo de ensino e aprendizagem.

Fischbein (1987) reitera que na história da Matemática há exemplos interessantes da passagem da intuição ao rigor no sentido de se encontrar uma estrutura axiomática. Nessa situação, surge uma dicotomia entre o formal, o abstrato e o concreto e suas limitações psicológicas. O autor assevera que:

A contribuição dos matemáticos tem sido a mais significativa, provavelmente porque a matemática, por sua própria natureza, é a mais adequada para alcançar uma estrutura axiomatizada. É no curso de matemática ao pensar que as qualidades de um modelo formal, ideal de um lado e o concreto, as limitações psicológicas, por outro, parecem tão agudamente contrastantes (FISCHBEIN, 1987, p. 8 – tradução nossa).

Ao mesmo tempo em que cria conflitos psicológicos, a intuição apresenta um papel fundamental na formação do conhecimento científico. Fischbein (1987) destaca que sob a forma de elogios ou refutações, a intuição aparece em estudos filosóficos, em trabalhos dedicados aos fundamentos da Matemática e em teorias educacionais. O autor destaca o lócus e a importância dessa cognição com a seguinte afirmação:

Intuição resume experiência, oferece uma representação, um pacto global de um grupo de dados, ajuda a superar a insuficiência de informações, introduz comportamentalmente interpretações significativas em um processo de raciocínio e, assim, confere à atividade mental, qualidades de continuidade flexível, de firmeza e eficiência que caracterizam um comportamento ativo, adaptável. Mas, ao mesmo tempo, a intuição continua sendo uma fonte potencial de erro porque ela não representa uma simples duplicata praticamente dadas as condições. Seu papel é oferecer comportamentalmente significativas representações, internamente estruturado, de credibilidade intrínseca, mesmo que estas qualidades não existam de fato em uma dada situação (FISCHBEIN, 1987, p. 12 – tradução nossa).

Além disso, o referido autor ressalta a diferença entre percepção e intuição:

É importante ressaltar que podemos distinguir entre percepção e intuição. Percepção é também uma cognição imediata. Eu percebo a tabela diante de mim. Eu não tenho nenhuma dúvida sobre sua existência. Eu não preciso provar isso. Mas isso eu não chamaria de conhecimento intuitivo. Uma intuição, nessa visão, ultrapassa sempre os fatos dados. Uma intuição é uma teoria, ela implica uma extrapolação para além da informação diretamente acessível (FISCHBEIN, 1987, p. 13 – tradução nossa).

Fischbein (1987) afirma que a Matemática pode ser considerada sob dois pontos de vista: como corpo do conhecimento formal, rigoroso e dedutivo, exposto em alguns tratados e livros didáticos, e como uma atividade humana, defendida de maneira análoga pelos construtivistas.

O citado autor discute a interação entre três componentes básicos da Matemática como uma atividade humana: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

O **aspecto formal** se refere aos axiomas, definições, notações, teoremas e demonstrações. Esses elementos são criados ou aprendidos, organizados, testados e usados nas atividades pelos estudantes.

Cabe ressaltar que se acredita na hipótese de que os teoremas, conceitos, notações e demonstrações não devem ser meramente decorados pelos estudantes, pois o rigor é um componente essencial no desenvolvimento de atividades matemáticas, no sentido de validar, dar coerência aos objetos e descobertas. O que se deve levar em conta é que o conhecimento desses elementos e suas restrições e implicações constituem um fator imprescindível no processo de ensino e aprendizagem, pois, segundo o autor, mesmo analisando a Matemática como um processo humano, não se deve deixar de considerar esse aspecto.

O **componente algorítmico** diz respeito às técnicas de resolução de problemas e às estratégias padronizadas. Segundo Fischbein (1991), é uma mera ilusão acreditar que o conhecimento de axiomas, teoremas, demonstrações, da maneira encontrada formalmente nos livros-texto de Matemática, seja condição suficiente para que um estudante resolva problemas matemáticos. Além do aspecto formal, faz-se necessário também criarem-se habilidades à compreensão dos conceitos, sendo essas habilidades adquiridas somente pela prática e o treino sistemático.

O terceiro componente diz respeito à **intuição**, sendo um tipo de cognição aceito diretamente sem o sentimento de que algum tipo de justificação é solicitado. A principal característica da intuição é a denominada auto-evidência, em que as afirmações são aceitas sem que seja demandada uma verificação ou demonstração *a priori*.

Esses componentes não podem ser analisados nem se desenvolver de maneira isolada, pois são as inter-relações entre eles que promovem o desenvolvimento das atividades matemáticas.

Fischbein (1991) alerta para a complexidade da relação entre os componentes formal, o algorítmico e a intuição. Essas interações e conflitos na atividade matemática não são facilmente identificados e compreendidos, todavia análises teóricas, observações atentas e estudos experimentais têm colaborado com as pesquisas em Educação Matemática para identificar possíveis dificuldades, interações e a importância dos componentes descritos anteriormente.

O autor exemplifica a interação entre as restrições formais dos algoritmos e os procedimentos de resolução, que às vezes sua generalização indevida pode levar a resultados incorretos.

Como exemplo, nos vários níveis de ensino, o algoritmo  $[a \cdot (b + c) = ab + ac]$  não pode ser aplicado em alguns casos, em que os alunos em muitas situações empregam o algoritmo esquecendo-se de algumas propriedades algébricas que restringem tais aplicações, como:  $\text{sen}(a + b) = \text{sen } a + \text{sen } b$  (o seno da soma de dois arcos é igual à soma dos senos desses arcos),  $\log(a + b) = \log a + \log b$  (o logaritmo da soma de dois números reais é igual à soma dos logaritmos).

Observa-se, pela experiência adquirida lecionando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que esse tipo de restrição e conflito entre o formal e o algorítmico não se restringe ao ensino básico. No ensino superior, particularmente em um curso de Cálculo algumas regras de derivação também costumam apresentar essas situações, como a regra da derivada do produto, em que se tem o emprego incorreto da regra  $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$  (derivada de um produto é o produto das derivadas), ou a derivada de um quociente  $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$  (derivada de um quociente é o quociente das derivadas).

Outro algoritmo que os alunos em muitas situações não obedecem às regras formais, segundo Fischbein (1991), é o procedimento de simplificação de uma fração, quer seja uma expressão numérica ou algébrica, em que o numerador e o denominador podem sempre ser simplificados, como na situação seguinte:

$$\frac{a+b}{a} = b \text{ ou } \frac{a+b}{a} = 1 + b$$



Para o autor, os estudantes não compreendem a base formal, ou seja, as definições e os teoremas que justificam um algoritmo são apreendidos superficialmente, o que acarreta as generalizações de sua utilização indevidas.

Um exemplo relacionado ao ensino e aprendizagem do Cálculo é dado por Fischbein (1991) sobre o conceito de limite e convergência, por se constituir, segundo ele, um tema central do raciocínio matemático. O referido autor analisa o livro-texto *O que é Matemática?*, de Courant e Robbins (2000), que apresenta as seguintes definições:

A definição da convergência de uma sequência  $a_n$  para  $a$  pode ser formulada mais concisamente da seguinte forma: a sequência  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tem o limite  $a$  à medida que  $n$  tende para o infinito se, correspondendo a qualquer número positivo  $\varepsilon$ , por menor que seja, puder ser encontrado um inteiro  $N$  (dependendo de  $\varepsilon$ ), tal que:

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

para todo

$$n \geq N.$$

Esta é uma formulação abstrata da noção de limite de uma sequência. Não constitui surpresa o fato de que, quando se confronta pela primeira vez, não se possa compreendê-la em poucos minutos. Existe uma atitude lamentável e quase esnobe da parte de alguns autores de livros didáticos, que apresentam ao leitor essa definição sem uma preparação adequada, como se uma explicação ferisse a dignidade de um matemático.

[...] Existem dificuldades psicológicas reais para aprender esta definição precisa de limite. Nossa intuição sugere uma ideia “dinâmica” de limite como o resultado de um processo de “movimento”, deslocamo-nos ao longo da sequência dos inteiros  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  e observamos então o comportamento da sequência  $a_n$ . Percebemos que a aproximação  $a_n \rightarrow a$  deveria ser observável. Mas esta atitude “natural” não é capaz de uma formulação matematicamente clara. Para chegarmos a uma definição precisa devemos reverter a ordem das etapas; ao invés de primeiro observar a variável independente  $n$  e em seguida a variável dependente  $a_n$ , devemos basear nossa observação naquilo que temos que fazer se quisermos efetivamente confirmar a proposição  $a_n \rightarrow a$ . Neste procedimento, devemos primeiro escolher uma margem arbitrariamente pequena em torno de  $a$  e depois determinar se podemos satisfazer esta condição tomando a variável independente  $n$  suficientemente grande. E então, atribuindo nomes simbólicos,  $\varepsilon$  e  $N$ , as frases “margem arbitrariamente pequena” e “ $n$  suficientemente grande”, somos conduzidos a definição precisa de limite (COURANT e ROBBINS, 2000, p.335-336).

Fischbein (1991) comenta que, intuitivamente é relativamente fácil compreender, segundo Courant e Robbins (2000), o conceito de limite e convergência, pois pode-se considerar a sequência de números  $a_n$  que vão se aproximando de certo número  $a$  quando  $n$  tende ao infinito. Sendo assim, diz-se que

o número  $a$  é o limite da sequência  $a_n$  e que ela converge para  $a$ . Utilizando-se do registro da língua natural, a definição de limite e convergência de uma sequência parece clara.

Ao se transferir a ideia intuitiva para a definição formal, ocorre uma inversão na ordem das ideias. Não é a variável independente (no caso  $n$ ) que gera uma aproximação na imagem da função (no caso o número  $\varepsilon$ ). Não se deve iniciar com um número positivo  $\varepsilon$  e depois introduz-se um número  $N$  tal que  $n \geq N$ . Sendo assim, não é o número  $\varepsilon$  que depende de  $N$ , pois o intervalo  $|a - a_n|$  torna-se cada vez menor quando se aumenta o valor de  $N$ , e na definição formal se faz  $N$  depender de  $\varepsilon$ .

Além disso, para o autor, o termo “tende” na definição de limite apresenta um significado psicológico e puramente intuitivo, pois auxilia na intuição inicial e na interpretação dinâmica do conceito de convergência e limite.

Essa situação de contraste entre a definição intuitiva e a definição formal do conceito de limite pode ser comprovada no trabalho de Barroso et al. (2009), em que os autores discutem alguns pontos relevantes do problema do ensino e aprendizagem do conceito de limite, procurando mostrar a discrepância existente entre a ideia intuitiva e a linguagem formal utilizada em sua definição. Por definição intuitiva os autores consideram a definição adotando o registro da língua natural, por exemplo.

Para analisar essa discrepância, os referidos autores realizaram uma experiência com 37 alunos do primeiro ano do curso de graduação em Engenharia de uma universidade federal do país.

Após algumas aulas utilizando-se da abordagem intuitiva do conceito de limite, foi entregue a cada aluno uma folha com a definição formal de limite de uma função em um ponto, retirada de alguns livros didáticos, e em seguida pediu-se que eles expressassem por escrito a sua compreensão a respeito desse conceito. Essa explicação poderia ser em forma de gráficos, números e tabelas, por exemplo.

Dentre as respostas obtidas pelos alunos observou-se que eles tentaram encontrar a definição intuitiva dentro da definição teórica. Os autores relatam e confirmam os comentários de Fischbein (1991), de os alunos em sua atividade não perceberam que entre a definição formal e a definição intuitiva existe uma inversão do processo de aproximação, tal como descrito anteriormente na obra de Courant e Robbins (2000).

Além da análise da relação entre o aspecto formal, algorítmico e intuitivo, quanto à descrição do raciocínio intuitivo, Fischbein (1987) identifica as seguintes

características gerais das cognições ligadas à intuição, dentre as quais podem-se destacar:

- As cognições **auto-evidentes** são aquelas intuições aceitas pelos indivíduos sem que eles manifestem a necessidade de uma checagem ou prova *a posteriori*, ou seja, são aquelas declarações intuitivamente evidentes, em que as afirmações são verdadeiras por si mesmas e aceitas diretamente sem novas verificações e comprovações. Essa é a característica fundamental da intuição descrita por Fischbein (1987). Como exemplos dados pelo autor, podem ser citados:
- Cada número tem um sucessor (a intuição do número puro, segundo Poincaré (1995), e que a ideia de número precede iteração ilimitada);
- Dois pontos distintos determinam uma única reta;
- O todo é maior que cada uma de suas partes (pois tem-se a ideia de que o todo é formado pela soma das partes);
- A propriedade transitiva  $A = B$  e  $B = C$  então  $A = C$ ;
- A menor distância entre dois pontos é uma reta.

Como exemplo de uma cognição não evidente, o autor destaca a seguinte questão: três pontos determinam uma circunferência?

Muitos questionamentos podem ser feitos pelos alunos sobre essa afirmação, como a possibilidade de se construir a circunferência com apenas dois pontos, sendo esses dois pontos, por exemplo, o centro e um ponto para determinar o raio, de maneira análoga utilizada em geometria analítica para a equação da circunferência  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , sendo  $(a, b)$  as coordenadas do centro e  $r$  o raio.

Entretanto há de observar que o centro não constitui um ponto que pertença à circunferência, e, mesmo que se tenham dois pontos distintos, deve-se observar cuidadosamente que por dois pontos é possível traçar inúmeras circunferências distintas.

Atribui-se ao significado intuitivo implícito uma auto-evidência que se opõe a um esforço lógico-analítico. As afirmações intuitivamente evidentes ou auto-evidentes são aceitas diretamente. No século XIX, por exemplo, observaram-se esforços para se atingir o rigor. No Cálculo, a função contínua que não é derivável em nenhum ponto divergia da ideia de que toda função contínua possuía derivada em todos os seus pontos. Esses assuntos aparentavam ser auto-evidentes, o que levavam a conflitos cognitivos. Os problemas de cognição intuitiva tornaram-se um aspecto fundamental do esforço científico.

- **Convicção intrínseca** – diz respeito a uma cognição intuitiva usualmente associada ao sentimento da certeza, convicção de segurança. Essa cognição está relacionada ao convencimento da crença de que os teoremas matemáticos aprendidos na escola são verdadeiros, mesmo não sendo auto-evidentes.

Segundo Fischbein (1987), os teoremas da geometria euclidiana, por exemplo, de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , possuem uma certeza intrínseca, assim como o teorema de Tales e o teorema de Pitágoras, porém não são auto-evidentes, pois precisam ser demonstrados.

Um exemplo interessante citado pelo autor sobre essa característica revela a certeza intrínseca:

Vamos considerar um segmento AB e sobre ele, escolhido aleatoriamente, um ponto C. Vamos dividir segmento AB em duas partes iguais e deixe-nos novamente dividir cada uma das partes em duas metades. Vamos continuar a se dividir da mesma maneira. Será que vamos chegar a uma situação tal que um dos pontos de divisão será exatamente acertar o ponto C? Sete por cento dos entrevistados responderam corretamente: "Depende". Eles têm uma alta pontuação em "óbvio" e muito pouca "confiança". Em outras palavras, os sujeitos sentiam que a sua resposta apareceu a eles como auto-evidente, mas por causa da complexidade do problema não foram convencidos de que eles realmente estavam corretos (FISCHBEIN, 1987, p. 12 – tradução nossa).

- **Efeito coercitivo** – afeta as estratégias de raciocínio do indivíduo e sua seleção de hipótese e soluções (tendem a rejeitar interpretações alternativas). Essa estratégia é utilizada pelos professores no modelo de aula, na qual eles adotam estratégias no ensino de conceitos e fazem com que os alunos apenas reproduzam nos exercícios e provas aquilo que foi apresentado. Isso pode ser retratado como Tall (1991) afirma no pensamento algorítmico no ensino do Cálculo.

O exemplo anterior, dado por Fischbein (1987), ainda corrobora com essa característica sobre a intuição primitiva do infinito na compreensão da questão anterior:

Considere as divisões sucessivas de um segmento em fragmentos iguais. Será que um dos pontos da divisão atingiu um ponto no segmento aleatoriamente escolhido? Mais de 77% dos entrevistados responderam afirmativamente – o que é uma resposta incorreta. Se o ponto escolhido é um irracional, nenhum ponto de divisões sucessivas vai coincidir, porque estes são todos pontos racionais. Esses alunos, a partir de 7ª série, aprenderam sobre os números irracionais. Apesar disso, eles responderam incorretamente. Se a operação de divisão é infinita, então, intuitivamente, deve alcançar todos os pontos potencialmente! O efeito coercitivo da intuição primitiva do infinito impede o aluno de aceitar que existem pontos que nunca seriam alcançados. Infinito é equivalente,

nesta concepção, com uma absoluta falta de restrições. Não se pode pensar em pontos ou linhas geométricas, sem visualizá-los (usando alguma representação gráfica fina). Estamos presos nestas representações intuitivas (FISCHBEIN, 1987, p. 13 – tradução nossa).

- As Intuições possuem a propriedade da **globalidade**, ou seja, as intuições são cognições globais em oposição às cognições adquiridas por uma via de sequência inferencial e lógica ou analítico-inferencial.

Como exemplo descrito pelo autor, pode-se destacar a situação em que os alunos, ao procurarem encontrar a fórmula para o volume do prisma, obtêm-na por analogia com a fórmula da área do retângulo, pois, segundo o autor, globalmente as duas situações são semelhantes, a multiplicação da base pela altura, e a transferência dessa situação é feita não por uma dedução, mas sim por uma intuição.

Uma dicotomia que se pode estabelecer concerne ao uso da intuição, pois os cientistas necessitam da intuição para novas descobertas, estratégias e modelos teóricos, enquanto a intuição não é um meio ou garantia da descoberta absoluta.

O autor reitera o renovado interesse pelo conhecimento intuitivo das ciências e Matemática, que destacam o papel da intuição no processo de ensino e aprendizagem.

O conhecimento que se transmite aos alunos colide com as crenças e interpretações, que são muito resistentes e conflitantes cientificamente.

Com isso, não se devem identificar, classificar e descrever as contribuições das estruturas intuitivas, e sim explicar os mecanismos de atribuir forma e do funcionamento das intuições.

Fischbein (1987) destaca os tipos de intuição, que possui as seguintes categorizações:

**a) Intuições afirmativas:** são representações ou interpretações de vários fatos aceitos como certos, evidentes e auto-consistentes, em que inclui o conhecimento do mundo externo, aceito como evidente.

Exemplos:

- Dois pontos determinam uma única reta;
- O todo é maior cada uma de suas partes.

As intuições afirmativas podem ser classificadas em três categorias: *semântica*, *relacional* e *inferencial*.

A intuição afirmativa **semântica** está relacionada ao significado do conceito, na qual há uma divisão entre o significado axiomático e suas interpretações. Por exemplo, o significado axiomático de uma linha reta na geometria plana de acordo com um sistema de axiomas, apresenta-se em vários contextos, como um comportamento (a menor distância entre dois pontos) ou físico (um feixe de luz). Um ponto pode conter um significado axiomático na geometria, mas há também uma correspondência intuitiva.

Além desses exemplos, pode-se citar o significado semântico de uma função contínua cujo gráfico intuitivamente não revela rupturas, sendo que o mesmo pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel.

Por seu turno, a intuição **relacional** é expressa aparentemente como a auto-evidência, pois são consideradas declarações auto-consistentes. Como exemplo, tem-se a afirmação de que, “dada uma reta e um ponto fora dela existe apenas uma reta paralela a essa reta dada” ou que “o todo é maior que cada uma de suas partes”. Dentro de um sistema axiomático essas afirmações podem ser consideradas como corretas e outras como incorretas, mas acaba-se tendendo a aceitá-las como auto-evidentes.

Da mesma forma, pode-se considerar, por exemplo, que a menor distância entre dois pontos é dada pelo comprimento de um segmento de reta, o que é válido em determinados sistemas axiomáticos, porém tem-se a assumi-lo como verdadeiro em qualquer situação.

Por fim, a intuição **inferencial** apresenta um efeito indireto dedutivo. Essa característica está relacionada com o indivíduo que, depois de entrar em contato com vários objetos de estudo (matemáticos, por exemplo), passa a extrair propriedades comuns e começa a realizar generalizações afirmando que toda categoria desses objetos possui essa propriedade. Essa generalização, segundo Fischbein (1987), aparece como um sentimento de confiança. Poincaré (1995) considerava esse tipo de intuição por generalização, ou por indução, uma das categorias básicas das intuições.

Em um curso de Cálculo, por exemplo, após o estudo de que toda função derivável é contínua, passa-se a inferir por indução que a recíproca é verdadeira, ou seja, que toda função contínua também é derivável.

**b) Intuições conjecturais:** apresentam a característica expressa pela própria natureza – uma suposição sobre eventos futuros – sendo associadas a um sentimento de dúvida. São avaliações e previsões geralmente não incluídas em uma atividade

sistemática de problemas. Essa intuição, segundo Fischbein (1987), representa uma visão preliminar, global, que antecede uma solução analítica e completamente desenvolvida de um problema.

**c) Intuições antecipatórias:** são aquelas que representam o ponto de vista preliminar e global na resolução de um determinado problema, identificada pela formulação de uma hipótese ligada ao sentimento de uma certeza. São construções mentais realizadas pelo indivíduo, que antecipam a solução detalhada do problema. Essa intuição pode ser caracterizada, portanto, como uma fase em processo de resolver um problema.

Há uma distinção entre a intuição afirmativa e a antecipatória, segundo Fischbein (1987). Enquanto a intuição antecipatória está relacionada à atividade de busca para a resolução de um problema, na qual se empregam estratégias, fórmulas, elaboração de desenhos que auxiliam a resolução de problemas, a intuição afirmativa é aceita vista como a auto-evidência de determinada noção.

**d) Intuições conclusivas:** fornecem uma visão definitiva, conclusiva e global da solução do problema.

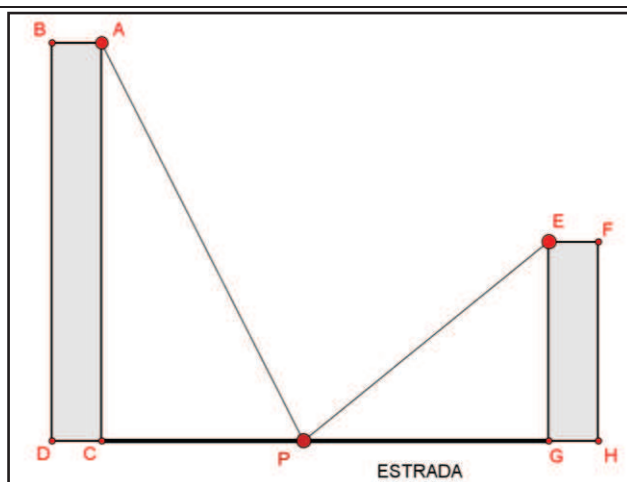
Entretanto Fischbein (1987) alerta e chama atenção para o fato de que as manifestações intuitivas não ocorrem de maneira isolada, por se tratar de manifestações mentais. A distinção entre os tipos de intuição classificados pelo autor apresenta inter-relações. Essa classificação pode manifestar-se com o estabelecimento das intuições e a resolução de problemas.

Para procurar elucidar as categorizações das intuições dadas por Fischbein (1987), será apresentado um exemplo relacionado ao Cálculo, que consiste na resolução de um problema de otimização, proposto pelo professor pesquisador em um minicurso ministrado na faculdade em que lecionamos, durante um encontro da Semana de Tecnologia, em que os alunos participantes, todos oriundos dos cursos de graduação na própria instituição, deveriam analisar a seguinte situação-problema:

**Quadro 8** – Situação-problema (categorização das intuições)

**01.** Numa estrada, com 9 km de comprimento será construída uma estação de tratamento de água (ETA), localizada no ponto  $P$ , para abastecer duas cidades  $A$  e  $E$ , localizadas ao norte dos pontos  $C$  e  $G$  cujas distâncias são 8 km e 4 km respectivamente da estrada, conforme a figura a seguir:





Determine a que distância  $x$  do ponto C deve ser instalada a estação de tratamento de modo que a soma das distâncias da estação às cidades  $L = |\overline{AP}| + |\overline{PE}|$  seja mínima.

Fonte: Autor, 2013

Esse problema apresenta vários tipos de solução, por exemplo, a algébrica e a geométrica, bem como o uso dos recursos computacionais de um *software* como o *GeoGebra*, que será adotado na intervenção de ensino desta pesquisa, e que, portanto, será discutido com detalhes posteriormente.

Os alunos, ao procurarem solucionar o problema, poderiam mover o ponto P livremente, em que se observam alguns aspectos cognitivos da intuição, do estabelecimento de conjecturas e do formalismo em sua resolução.

Nessa questão, os alunos, por meio da intuição conjectural, poderiam formular mesmo com o sentimento de incerteza de que o ponto P poderia localizar-se no ponto médio do segmento  $\overline{CG}$ , dependendo da posição do ponto P, como o segmento  $\overline{AC}$  tem comprimento maior que o segmento  $\overline{EG}$ , então quanto mais afastado o ponto P estiver do ponto C, o comprimento do segmento  $\overline{AP}$  torna-se maior, portanto o ponto P deve localizar-se mais próximo do ponto C. Além disso, os alunos poderiam conjecturar também se o ponto P não poderia coincidir com o ponto C ou G.

Como estratégia ou intuição antecipatória, alguns alunos poderiam alocar o ponto P em uma posição arbitrária, e, posteriormente, aplicando-se o teorema de Pitágoras nos triângulos ACP e EGP para se calcularem, respectivamente, os comprimentos das hipotenusas  $\overline{AP}$  e  $\overline{PE}$ , podem observar se as conjecturas elaboradas anteriormente são verdadeiras. Essa fase se constituiria como preliminar para a solução do problema.



Por fim, na busca da solução definitiva e global para o problema, os alunos deveriam utilizar-se, como uma intuição conclusiva, do modelamento algébrico do problema, empregando-se alguns teoremas e definições ou até mesmo outros conceitos do Cálculo, para encontrarem a solução do problema proposto.

Além das categorizações das intuições descritas por Fischbein (1987), de acordo com as fontes e origens, as intuições afirmativas podem ser classificadas como primárias e secundárias.

As **intuições primárias** são aquelas que se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática, como um efeito de sua experiência pessoal, sujeita a variações culturais. Podem ser subdivididas em operacional e pré-operacional. Segundo Fischbein (1987):

Intuições pré-operacionais são baseadas em configurações enquanto intuições operacionais são baseadas em estruturas operacionais (por exemplo, aceitação de diversos tipos de conservação evidente, *a priori*, a compreensão intuitiva da mecânica causalidade). Intuições operacionais que se desenvolvem durante o período operacional concreto permanecem estáveis com aquisições para o conjunto da vida (FISCHBEIN, 1987, p. 202 – tradução nossa).

As **intuições secundárias** são aquelas adquiridas, não por meio de experiências naturais, mas por meio algum sistema educacional. Em certos casos, elas contrariam uma atitude ou crença habitual do indivíduo com respeito a alguma questão.

Entretanto, há de destacar que, em muitas situações, o conhecimento que se pode produzir por meio das faculdades intuitivas gera conflitos cognitivos com as crenças e saberes adquiridos pelos alunos por meio de experiências empíricas, percepções sensoriais, entre outras. Tais problemas de cognição intuitiva tornam-se um aspecto fundamental do esforço científico, no sentido de auxiliar na elaboração de novas descobertas, estratégias e modelos teóricos.

Resumidamente, podem-se organizar as características, categorizações e fontes e origens da intuição dadas por Fischbein (1987) da seguinte maneira:

**- Características principais das cognições intuitivas:**

- auto-evidência;
- convicção intrínseca;
- efeito coercitivo;
- globalidade.

**- Categorizações das intuições:**

- afirmativas
  - semântica
  - relacional
  - inferencial
- conjecturais;
- antecipatórias.
- conclusivas.

**- Fontes e origens das intuições:**

- primárias
  - semântica
  - relacional
- secundárias.

Observa-se que tanto no papel da intuição no processo de invenção matemática discutida por Poincaré (1995) quanto nas classificações da intuição dadas por Fischbein (1987) a questão da visualização constitui um elemento de destaque na manifestação das intuições.

Poincaré (1995), ao se referir à intuição sensível ou geométrica, confere às imagens e representações gráficas ou geométricas um *status* fundamental em seus estudos, constituindo-se de uma solução provisória para um problema. O autor, como descrito, chegou a classificar os matemáticos que se utilizam da intuição sensível como “geômetras”, como os exemplos dados por Poincaré (1995) como Félix Klein.

Fischbein (1987) adverte que a visualização incorporada em uma atividade cognitiva adequada continua como um fator essencial para uma compreensão intuitiva. Para o autor, as representações visuais contribuem para a organização de informações em representações sintéticas e, portanto, constituem um importante fator de globalização.

Diante do exposto, será analisado a seguir, com maiores detalhes, a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo sob o ponto de vista de David Tall (1991a; 2002a), que apresenta muitos estudos específicos relacionados ao tema bem como sua relação com a intuição e o rigor.

## 2.5– O papel da visualização

De modo geral, deve-se considerar que a questão da visualização na Matemática foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores. Mesmo com o processo de rigorização da Matemática, sobretudo no século XIX, essa questão faz parte de um tema abordado em muitas pesquisas em Educação Matemática, sobretudo naquelas dedicadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo.

Tall (1991a; 2002a) discute em seus trabalhos o papel da visualização do contexto do ensino de Cálculo nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor. Para o autor, refutar a importância da visualização é negar as raízes de muitas das mais profundas ideias matemáticas. Para ele, nas fases iniciais do desenvolvimento da teoria de funções, limites e continuidade, a visualização provou ser uma fundamental fonte de ideias. Recusar, portanto, essas ideias para os alunos significa cortá-los das raízes históricas do assunto. Esse fato pode ser observado de acordo com a seguinte afirmação:

Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002a, p. 20 – tradução nossa).

Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que se pensou. Tall (2002a) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática.

A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do Cálculo permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais, de *softwares*, entre outros recursos didáticos.

Para o referido autor, o desenvolvimento do pensamento matemático pode ser categorizado nos modos de representação na Matemática, ou os “três mundos” em que o conhecimento matemático se desenvolve:

- **conceitual corporificado:** também denominado de mundo incorporado, baseado em experiências sensoriais, percepções humanas e ações em um mundo real,

incluindo o uso de imagens visuais e espaciais. Para o autor, nesse “mundo” são coordenadas as percepções e ações relacionadas a objetos físicos e mentais, em que ele está relacionado ao processo de representar e visualizar a partir de processos estruturados, e por meio da intuição e da visualização é possível validar tais ações;

- **simbólico proceptual**: ou simplesmente simbólico, formado pelo uso de símbolos e suas combinações, em que se pode destacar o papel desses símbolos na Aritmética, Álgebra e Cálculo;

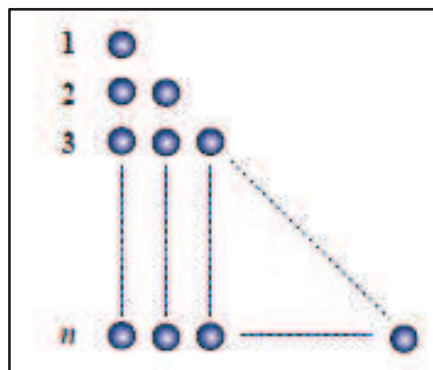
- **formal – axiomático**: constituído por definições e demonstrações, sendo uma abordagem formal a partir de axiomas selecionados, realizando deduções lógicas para provar teoremas.

O autor ressalta ainda a diferença do termo corporificado, utilizado por ele, do conceito da Matemática corporificada empregada por Lakoff e Nuñez (2000). Segundo Tall (2002), o significado que os autores atribuem é adotado apenas sob a percepção sensorial, sobre o pensamento construído, enquanto Tall utiliza o termo de uma maneira mais ampla, ou seja, a todo o pensamento matemático.

Como exemplo sobre os modos de representação nesses três mundos, Tall (2002a) apresenta o exemplo descrito a seguir.

Para provar que a soma dos  $n$  primeiros números inteiros é igual a  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , a primeira demonstração é representada no mundo corporificado, em que se pode elaborar uma figura colocando-se uma pedra na primeira fileira, duas na segunda, três na terceira e assim por diante, conforme o esquema seguinte:

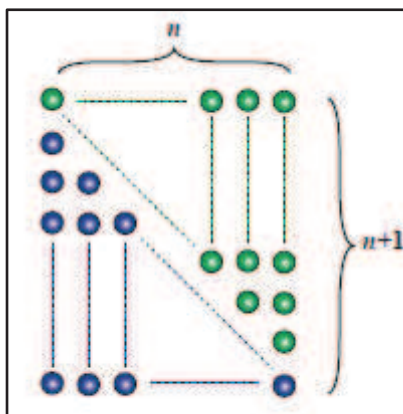
**Figura 18** – Mundo Corporificado – 1.ª etapa (David Tall)



Fonte: Tall, 2002a, p.8

Em seguida deve-se pegar uma disposição conforme realizada anteriormente, transformá-la de modo a “inverter” a figura, encaixando-a na disposição anterior, conforme a figura a seguir:

**Figura 19** – Mundo Corporificado – 2.<sup>a</sup> etapa (David Tall)



Fonte: Tall, 2002a, p.8

Observa-se com isso que a figura obtida é formada por um retângulo de tamanho  $n$  por  $n+1$ , apresentando uma quantidade de pedras igual a  $n(n+1)$ , de modo que a quantidade de pedras solicitada inicialmente corresponda à metade dessa disposição, ou seja,  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Para Tall (2002a), a validade dessa prova está na imagem visual produzida intuitivamente.

Por outro lado, a segunda demonstração no mundo simbólico-proceptual ao se escrever a soma:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad (1)$$

Reescrevendo a soma (1) ao contrário, tem-se:

$$n + \cdots + 3 + 2 + 1 \quad (2)$$

Ao adicionarem-se as somas (1) e (2) juntas em ordem, par a par:

$$(1 + n) + (2 + n - 1) + \cdots + (n + 1)$$

obtêm-se assim  $n$  parcelas iguais a  $n+1$ , isto é,  $n(n+1)$  pedras, e o montante inicial é exatamente metade destas, ou seja,  $\frac{1}{2}n(n+1)$ .

A terceira prova, denominada axiomática, segundo autor citado deve ser realizada pelo método da indução finita.

Tall (2002a) com esse exemplo comenta que a representação corporificada e a simbólica proceptual têm um claro significado sensível, em que o primeiro é traduzido naturalmente no segundo. Já a prova de indução, por outro lado, muitas vezes se torna obscuro para os estudantes, destacando a diferença que ocorre entre os primeiros dois mundos e o mundo formal.

No caso específico do Cálculo, o autor defende que uma abordagem corporificada ou incorporada incide sobre as ideias fundamentais de percepção antes de se introduzir qualquer simbolismo, evitando-se inicialmente um tratamento dos conceitos do ponto de vista formal, mas com ideias incorporadas de representações gráficas de funções. A ideia central de uma abordagem corporificada do Cálculo, portanto, baseia-se na interação com a imagem física do gráfico de uma função.

Essa abordagem, segundo o autor, não se resume unicamente em aplicações do mundo real, embora estas sejam componentes naturais no processo. Deve abranger ideias da Matemática, bem como ideias sensoriais das aplicações desta. Cada aplicação real pode envolver, por exemplo, o cálculo de comprimento, área, velocidade, aceleração, densidade, peso, entre outros, pois essas ideias apresentam percepções sensoriais específicas.

O autor coloca que, antecedendo uma demonstração matemática, há de considerar uma fase exploratória em que se pode elaborar um quadro geral e provisório dos conceitos abordados constituído por imagens e construções mentais por meio de percepções e intuições.

Tall (2002a) afirma que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um “organizador genérico” de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contra-exemplos desses conceitos. Por meio de um *software*, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Para obtermos algumas ideias e noções que servirão de embasamento na elaboração da intervenção de ensino do TFC, de acordo com os conceitos e definições apresentados sobre o uso da intuição e suas relações com a construção do conhecimento matemático, bem como do papel da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo, o próximo capítulo abordará uma descrição e análise da gênese e do desenvolvimento dos principais conceitos relacionados ao TFC, com a perspectiva teórica de algumas ideias apresentadas neste capítulo.

## CAPÍTULO III

"Assim como casas são feitas de pedras, a ciência é feita de fatos. Mas uma pilha de pedras não é uma casa e uma coleção de fatos não é, necessariamente, ciência".  
HENRI POINCARÉ

---

### CAPÍTULO 3 - CONTEXTO HISTÓRICO

Este capítulo abordará de forma sintética a evolução histórica dos conceitos ligados ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), procurando descrever e analisar quais as ideias e os fatos mais significativos envolvidos no teorema, buscando assim as origens da relação existente entre as operações de integração e derivação.

Essa descrição e análise foram realizadas sob dois pontos de vista teóricos: o uso da intuição na construção do conhecimento matemático, segundo a visão de Henri Poincaré (2008; 2004; 1995; 1984), bem como as noções e características do raciocínio intuitivo descritas por Efrain Fischbein (1999; 1991; 1987).

O estudo do contexto histórico dos conceitos matemáticos possibilita, de modo geral, formular conjecturas acerca do objeto de estudo, utilizar dados relacionados à gênese das noções ligadas, além de fazer melhor previsão sobre o problema de pesquisa. O papel da evolução histórica na compreensão da invenção e descoberta desses conceitos para o ensino e aprendizagem pode ser observado na afirmação de Ávila (1999):

Muitas teorias matemáticas são de difícil compreensão, no seu porquê, quando vistas isoladamente ou separadas do contexto histórico em que se desenvolveram. Cremos que o estudo da Matemática, auxiliado pelo acompanhamento de sua evolução histórica, de seu papel num contexto científico mais amplo, e do fascinante jogo de ideias no cenário da invenção e descoberta, é estimulante e enriquecedor à formulação do aluno, sobretudo de sua capacidade de apreciação crítica da disciplina (ÁVILA, 1999, prefácio do autor).

Além disso, para o presente trabalho o estudo do contexto histórico tem a finalidade de trazer elementos da história que possam contribuir para a elaboração de uma intervenção de ensino do TFC.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) possui um ponto de destaque datado no século XVII, com o estudo do TFC, realizada por Newton e Leibniz de forma independente. Nesse período, pode-se considerar que a Matemática teve seu



período extremamente produtivo na criação de novas áreas de pesquisa, por exemplo, o estudo das equações diferenciais nos diversos ramos da Física.

Todavia, o estudo das noções fundamentais do CDI, como o conceito de integral, limite e derivada de uma função, tem suas origens cerca de dois mil anos antes dos estudos efetuados por Newton e Leibniz. Pode-se afirmar que o desenvolvimento do CDI não foi um acontecimento isolado, atribuído apenas a uma pessoa, mas o resultado de estudos, métodos e teoremas que foram ao longo do tempo se aperfeiçoando e trazendo contribuições significativas.

Inicialmente, destaca-se que o desenvolvimento do CDI encontrou-se muito ligado à resolução de problemas geométricos, como o problema da quadratura do círculo e o traçado de tangentes. O estudo da mecânica, particularmente do movimento dos corpos, acarretou uma mudança do ponto de vista no estudo das curvas, em que estas foram interpretadas como o movimento contínuo de um ponto material. Com o desenvolvimento da Álgebra e da Geometria Analítica, esses problemas passaram a ser resolvidos com o auxílio de equações e notações simbólicas.

Um fato importante que deve ser colocado é a ligação intrínseca do desenvolvimento do CDI com o seu contexto histórico no que diz respeito à necessidade de novas descobertas no campo das ciências de modo geral. O desenvolvimento tecnológico, iniciado de forma embrionária, teve como um de seus principais representantes Arquimedes, que no século V a. C. foi responsável pela construção de diversos engenhos e máquinas simples tais como alavanca, parafuso e alguns artefatos de guerra.

Segundo Eves (2004, p. 424), no período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até praticamente os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi ativada. Isso se deve ao fato de somente por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes terem chegado à Europa Ocidental por meio de uma tradução, encontrada em Constantinopla, de uma cópia (datada aproximadamente do século IX) de seus manuscritos.

Outro impulso significativo pode ser observado no século XV pelas grandes navegações e, bem assim, pelos avanços científicos dos estudos da mecânica realizados pelos matemáticos Evangelista Torricelli, Johannes Kepler e Galileu Galilei, entre outros, constituindo-se como algumas evidências das descobertas e

aplicações que colaboraram sobre maneira para os conceitos que convergiram para o surgimento do TFC.

Para descrever a origem dos conceitos de uma maneira cronológica, o estudo das noções ligadas ao TFC será classificado em quatro fases, denominadas pelos seguintes termos criados pelo próprio autor: **A aurora do Cálculo; O despertar; Integro, logo derivo; e Cálculo com rigor.**

### 3.1 – A Aurora do Cálculo

Nesse primeiro período procurar-se-á destacar alguns indícios da gênese do Cálculo Integral, por meio do Método da Exaustão elaborado por Eudoxo e aperfeiçoado por Arquimedes, bem como do Cálculo Diferencial com a descrição do método de traçado de tangentes desenvolvido por Apolônio.

Os primeiros estudos que apontam para o surgimento dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral remetem à Antiguidade Clássica, a partir do século V a. C., nos trabalhos dos matemáticos gregos Eudoxo, de Alexandria (c. 370 a. C.), Arquimedes, de Siracusa (c. 287 a. C.), e Apolônio, de Pergamo (262 a. C. – 190 a. C.). Uma possível gênese da introdução desses conceitos estava relacionada com problemas de cálculos de volumes, áreas e particularmente a quadratura do círculo – que consiste na construção de um quadrado de área igual à área de um círculo dado – e também do traçado de tangentes em um ponto de uma curva dada qualquer.

Antífon, o Sofista (c. 430 a. C.), contemporâneo do filósofo grego Sócrates, contribuiu inicialmente com a ideia de que no círculo era possível construir um polígono regular inscrito, e, ao duplicar-se o número de lados do polígono regular, a diferença entre a área do círculo e do polígono regular torna-se cada vez menor. Como se pode construir um quadrado de área igual à de qualquer polígono, essa ideia levou Antífon à conclusão de que seria então possível construir um quadrado de área igual à do círculo.

Para a conjectura de Antífon, os gregos apresentavam um obstáculo para a época: a noção de uma grandeza ser subdividida indefinidamente. No entanto, segundo Boyer (1996), o método idealizado por Antífon constituiu a gênese do que se chamaria *Método da Exaustão*, que será discutido a seguir.

### 3.1.1 – Eudoxo

Muitos autores creditam a Arquimedes como o primeiro estudioso a antecipar os conceitos relacionados ao Cálculo Integral. Entretanto, verificou-se que o método utilizado por ele baseia-se nos estudos anteriores de Eudoxo, de Alexandria (c. 370 a. C.). O denominado *Método da Exaustão* de uma maneira sintética admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente, fundamentada na seguinte proposição formulada por Eudoxo:

Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (EVES, 2004, p. 419).

Essa proposição, chamada por Boyer (1996) de “propriedade da exaustão” equivale, à seguinte formulação moderna:

Se  $M$  é uma grandeza dada,  $\epsilon$  uma grandeza prefixada de mesma espécie e  $r$  é uma razão tal que  $\frac{1}{2} \leq r < 1$ , então podemos achar um inteiro  $N$  tal que  $M(1 - r)^n < \epsilon$  para todo  $n > N$ . Isto é, a propriedade da exaustão equivale a dizer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(1 - r)^n = 0$  (BOYER, 1996, p. 63).

O resultado do método da exaustão intuído foi utilizado na resolução de problemas de áreas de figuras curvilíneas e volumes. Entretanto, tal método necessitava de uma demonstração rigorosa do resultado intuído conhecida como “dupla redução ao absurdo”.

O método da exaustão foi aperfeiçoado por Arquimedes, que utilizava o método mecânico para descobrir certos resultados e os demonstrava pela dupla redução ao absurdo. Analisar, portanto sua obra constitui uma tarefa imprescindível para a compreensão da gênese do Cálculo Integral.

### 3.1.2 – Arquimedes

Arquimedes (287 – 212 a. C.) nasceu na cidade de Siracusa, mas também segundo relatos de alguns historiadores da antiguidade, passou um período da sua vida na cidade de Alexandria, no Egito. O acesso que se tem atualmente no tocante às obras desse notável matemático grego são manuscritos copiados uns dos outros ao longo dos séculos pelos escribas, pois muitas obras se perderam durante as

invasões dos povos na cidade de Alexandria, considerada na época o grande centro cultural.

Sobre os trabalhos de Arquimedes, segundo Eves (2004), dos matemáticos gregos da antiguidade, quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração sem dúvida foi Arquimedes. Com isso, destacam-se a análise e alguns aspectos da importância e o real significado de seus trabalhos na compreensão das noções do Cálculo.

Tais trabalhos apresentavam uma estrutura lógica que merece ser realçada, em que suas descobertas eram obtidas por meios mecânicos, conhecido como *O Método* utilizando-se da intuição, da imaginação e de alguns objetos físicos e geométricos, sendo posteriormente demonstradas rigorosamente pela dupla redução ao absurdo.

Algumas características, segundo Ávila (1986), são peculiares nas obras de Arquimedes: o estilo elíptico da linguagem, apresentando uma densidade de referências internas, como, algumas propriedades geométricas, a dificuldade nas demonstrações pela dupla redução ao absurdo, a apresentação dos seus resultados expostos por um duplo método, o mecânico (escrito em forma de carta a Eratóstenes) e o geométrico. Como exemplo dessas características citadas pelo autor, na obra *A quadratura da parábola*, são omitidas algumas demonstrações de proposições inteiras, apresentando uma demonstração “mecânica” (o método) e uma demonstração “geométrica” (o método da exaustão). Esse método foi utilizado também para o problema do volume da esfera, desempenhando um papel preponderante no desenvolvimento do Cálculo Integral. Decidiu-se, a seguir, colocar detalhadamente o método para a questão da quadratura da parábola.

### 3.1.2.1 – A área do segmento parabólico

Alguns resultados obtidos por Arquimedes foram escritos e enviados à Eratóstenes. Dentre as cartas enviadas, no início do livro *O Método* encontra-se o seguinte trecho:

Arquimedes a Eratóstenes,  
Saudações.

Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas [...] Vendo em você dedicado estudioso, de

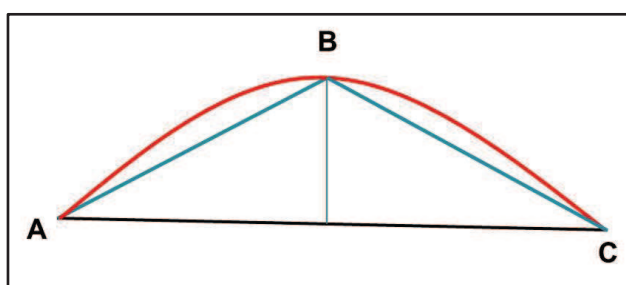
considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos [...] Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivesse de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não condisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento. Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram (ÁVILA, 1986, p. 31).

Essa carta evidencia a visão sobre o método e sua utilidade para as descobertas de Arquimedes e sua preocupação em demonstrá-las segundo o rigor matemático da época.

Como exemplo, destaca-se a quadratura da parábola, que consiste em calcular a área limitada sob um segmento parabólico, escrita por Arquimedes da seguinte maneira: “Enunciarei o primeiro teorema que descobri por métodos mecânicos, isto é: qualquer segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura” (ÁVILA, 1986, p. 32). O teorema anteriormente descrito pode ser representado conforme a figura a seguir:

Sendo  $A_P$  = área do segmento parabólico e  $A_T$  = área do triângulo ABC, tem-se que:

**Figura 20 – Área de um segmento parabólico (Arquimedes)**



Fonte: Autor, 2012

$$A_P = \frac{4}{3} \cdot A_T$$

Para demonstrar o teorema, Arquimedes utilizou-se de algumas proposições sobre as propriedades geométricas da parábola. Tais proposições podem ser

encontradas no livro *The Works of Archimedes*, de Thomas L. Heath (1912). Das proposições, nessa obra, destacaremos aquelas consideradas mais diretamente ligadas à demonstração do problema da área do segmento parabólico. Essas propriedades, como, a determinação do vértice da parábola, são necessárias para a demonstração e, segundo Ávila (1986), são omitidas especificamente na obra *O Método*. São elas:

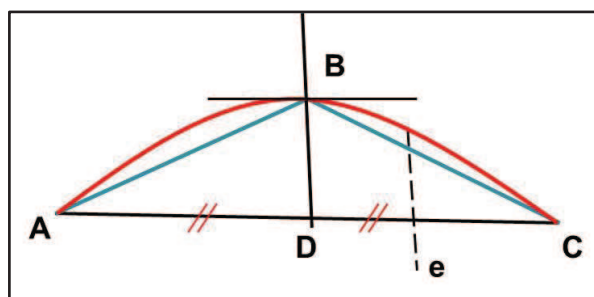
**- Proposição 1:**

*Se por um ponto de uma parábola for traçada uma reta, de maneira que ela seja o eixo ou paralela ao eixo, como BD, e se AC é uma corda paralela a tangente à parábola em B, encontrando BD em D, então:*

$$AD = DC.$$

*Consequentemente D é o ponto médio de AC.*

**Figura 21** – Proposição 1 (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2012

**- Proposição 2:**

*Se em uma parábola, AC for uma corda paralela a tangente à B e, se uma reta for traçada em B de tal forma que seja o eixo ou paralela ao eixo e esta reta encontrar AC em D e encontrar a tangente à parábola pelo ponto C em E, então:*

$$DB=BE$$

Consequentemente, aplicando a mesma proposição para os segmentos KI e AF, tem-se que:

$$IJ = JK \text{ e } AG = GF$$



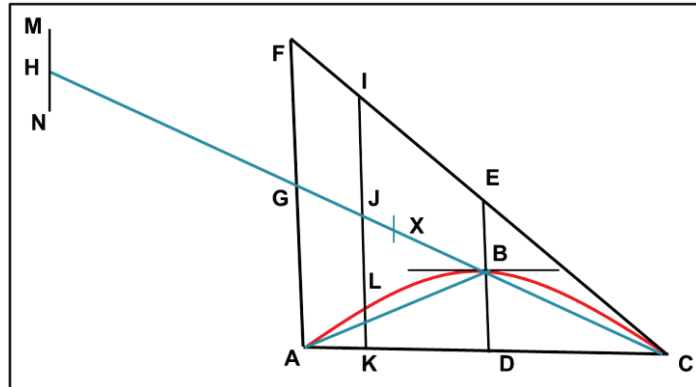




segmentos do tipo  $KI$  e o segmento de parábola como união de todos os segmentos do tipo  $KL$ .

O triângulo  $ABC$  (reunião dos infinitos segmentos  $KI$ ) se equilibrará onde ele se encontra com o centroide  $X$  e o segmento de parábola  $ABC$  (reunião dos infinitos segmentos  $KL$ ) com seu centroide em  $H$ , conforme figura a seguir:

**Figura 25** – Equilíbrio de figuras planas (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2012

O centro de gravidade (baricentro) do triângulo  $AFC$  é dado por:

$$GX = \frac{GC}{3} = \frac{GH}{3}$$

A área do triângulo  $AFC$  é quatro vezes a área do triângulo  $ABC$ , pois pela *Proposição 2*,  $BD = BE$ . Sendo  $AF \parallel DE$ , os triângulos  $BCD$  e  $GCA$  são semelhantes pelo caso  $AA$ .

Portanto,  $\frac{GA}{BD} = \frac{AC}{DC}$  e  $AG = 2 \cdot BD$ .

Como  $AG = GF$ , temos que  $AF = 4 \cdot BD$ .

Com isso,  $A_{\Delta AFC} = 4 \cdot A_{\Delta ABC}$ .

Sendo  $A_{\Delta AFC}$  a área do triângulo  $AFC$  e  $A_p$  a área do segmento parabólico, pela lei do equilíbrio da alavanca:

$$A_{\Delta ABC} \cdot GX = A_p \cdot GH$$

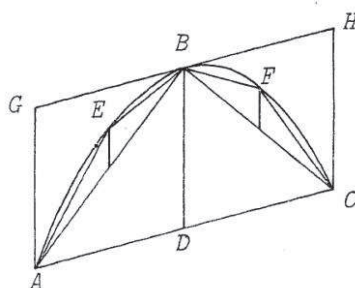
Como  $GX = \frac{GH}{3}$  e  $A_{\Delta AFC} = 4 \cdot A_{\Delta ABC}$ , temos que:

$$4 \cdot A_{\Delta ABC} \cdot \frac{GH}{3} = A_p \cdot GH \Leftrightarrow A_p = \frac{4}{3} A_{\Delta ABC}$$

Nesse sentido, Arquimedes, partindo do resultado encontrado pelo método mecânico, demonstrou que a área do segmento parabólico é igual a quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura.

Para a demonstração do resultado intuído sobre a área do segmento parabólico, Arquimedes apresenta o lado rigoroso de sua obra utilizando-se do chamado “método da exaustão”, que já fora utilizado por Eudoxo, argumentado por “dupla redução ao absurdo”. Esse método, de acordo com Ávila (1986), pode ser assim descrito:

[...] pelo ponto médio  $D$  da base  $AC$  do segmento de parábola  $ABC$  traçamos a paralela ao eixo da parábola, que vai cortar a parábola em  $B$ . Repetimos a mesma construção referente aos segmentos  $AB$  e  $BC$ , obtendo os pontos  $E$  e  $F$  respectivamente, e assim por diante. A ideia é aproximar a área da parábola pela soma das áreas dos triângulos  $ABC$ ,  $AEB$ ,  $BFC$ , etc. (ÁVILA, 1986, p. 40).



(ÁVILA, 1986, p. 40).

De acordo com a proposição 1 enunciada anteriormente, a reta tangente  $GH$  em  $B$  é paralela a  $AC$ , portanto a área do triângulo  $ABC$  removida do segmento de parábola é maior que a metade deste, pois tal área, que é igual à soma das áreas dos triângulos  $ABE$  e  $BCF$  supera a metade das áreas dos respectivos segmentos de parábola em que se inscrevem; esse processo repete-se sucessivamente.

Arquimedes utiliza-se então do método da exaustão para concluir que, após sucessivas retiradas dos triângulos inscritos, a área restante do segmento de parábola será menor que qualquer área dada de antemão. Ele mostra por raciocínios puramente geométricos que as áreas dos triângulos removidos de cada etapa somam  $1/4$  do total das áreas dos triângulos removidos na etapa imediatamente precedente.

Sendo assim, denominando-se por  $a_n$  as somas das áreas dos triângulos removidos na  $n$ -ésima etapa, com  $a_1 = \text{área do triângulo } ABC$ ,  $a_2 = \text{área do triângulo } ABE + \text{área do triângulo } BCF$ , etc., tem-se que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + \frac{a_1}{4} + \frac{a_1}{4^2} + \dots + \frac{a_1}{4^n}$$

Se se adicionar a soma  $1/3$  do último termo  $a_n$  obtém-se o valor  $4a_1/3$  independentemente de  $n$ , pois:

$$a_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4a_n}{3} = \frac{a_{n-1}}{3}$$

Com isso, tem-se que:

$$S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} = \dots = a_1 + \frac{a_1}{3} = \frac{4a_1}{3}$$

Assumindo  $K = S_n = \frac{4a_1}{3}$ , pela dupla redução ao absurdo, sendo a área do segmento parabólico  $S$ , de acordo com Ávila (1986), Arquimedes considera as seguintes hipóteses:

**1) Hipótese:**  $Z > K$ . Pelo lema (2) do método da exaustão, dadas as grandezas  $Z$  e  $Z - K$ , depois de certo número  $n$  de etapas de remoções de triângulos, obteremos

$$Z - S_n < Z - K; \quad \text{logo, } S_n > K,$$

o que é absurdo, pois  $S_n + \frac{a_n}{3} = K$ .

**2) Hipótese:**  $Z < K$ . Pela forma (4) do Postulado de Arquimedes, dadas as grandezas  $\alpha$  e  $K - Z$  podemos chegar a um  $a_n = a_1/4^n$  menos que  $K - Z$ . Então,

$$K - S_n = \frac{a_n}{3} < K - Z; \quad \text{logo } S_n > Z.$$

Mas isto também é absurdo. (ÁVILA, 1986, p. 41).

Como as hipóteses  $Z > K$  e  $Z < K$  conduzem a absurdos, demonstra-se então que  $Z = K$ .

A partir daí no trabalho de Arquimedes encontra-se de maneira semelhante o cálculo do volume da esfera pelo método mecânico, do qual será feita uma breve descrição a seguir.

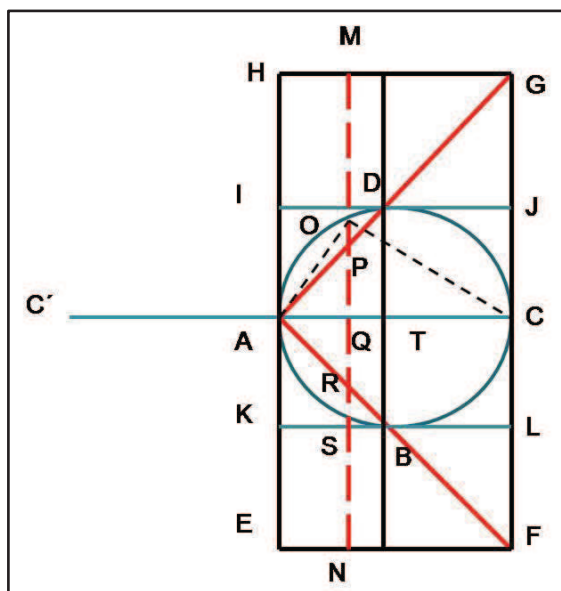
### 3.1.2.2 - O volume da esfera

Para o cálculo do volume de uma esfera, Arquimedes enuncia a seguir na proposição 2 que:

- I) O volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da mesma esfera; e
- II) O volume do cilindro com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro é  $1\frac{1}{2}$  vezes o volume da esfera (ÁVILA, 1986, p. 34).

Utilizando-se do método mecânico, Arquimedes procede da seguinte maneira:

**Figura 26** – Volume do cilindro e da esfera (Arquimedes)



Fonte: Autor, 2012

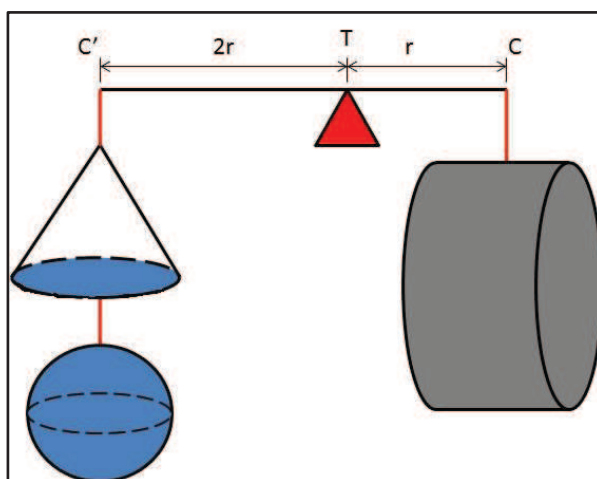
- Seja  $ABCD$  um círculo máximo da esfera, com diâmetros perpendiculares  $AC$  e  $BD$ . Imagine-se outro círculo máximo no plano que passa por  $BD$  e é perpendicular a  $AC$ . Considere-se o cone dos segmentos de reta originando em  $A$  (vértice do cone) e passando pelo segundo círculo descrito acima, cone este cuja base é o círculo de diâmetro  $FG$  e que jaz em um plano perpendicular a  $AC$ . Finalmente, seja  $EFGH$  o cilindro de base coincidente com a do cone descrito e eixo  $AC$ . Feitas essas construções, seja  $MN$  uma reta do plano  $ABD$ , perpendicular a  $AC$  e que corta o segmento  $AC$  no ponto  $Q$ .

Assim como na quadratura da parábola, Arquimedes utiliza o método mecânico considerando que os círculos de diâmetros PR e OS, quando transferidos para C', equilibram o círculo de diâmetro MN localizado em Q.

Novamente, vale destacar na demonstração a seguir a intuição de Arquimedes: considerar o cilindro, o cone e a esfera como união infinita de círculos e concluir que o cone e a esfera equilibrarão o cilindro.

Com isso, Arquimedes intuiu que o cilindro se equilibrará no ponto T a uma distância igual a  $AT = r$  do apoio em T, enquanto o cone e a esfera do outro lado se equilibrarão no ponto C' a uma distância igual a  $2r$  do fulcro, conforme esquema a seguir.

**Figura 27 – Equilíbrio dos sólidos**



Fonte: Autor, 2012

Na situação de equilíbrio, Arquimedes demonstra o resultado I de que o volume da esfera  $V_{ESF}$  é igual a:

$$V_{ESF} = 4 \cdot V_{cone} \Leftrightarrow V_{ESF} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$

E para provar o resultado II basta considerar:

$$vol(cil. IJKL) = 2 vol(cil. BDIK) = 6 vol.(cone ABD) = \frac{3}{2} V_{ESF}$$

No final de sua demonstração, Arquimedes faz o seguinte comentário:

Deste teorema, segundo o qual o volume da esfera é quatro vezes o do cone tendo por base um círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera, eu concebi a ideia de que a superfície da esfera é quatro vezes a de um de seus círculos máximos; pois, a julgar pelo fato de que a área do círculo é igual à do triângulo que tem por base a circunferência e altura igual ao raio, vejo que, do mesmo modo, o volume da esfera é igual ao do cone com base igual a superfície da esfera e altura igual ao raio. (ÁVILA, 1986, p. 36).

Além do cálculo do volume da esfera, Arquimedes determinou o volume do parabolóide de revolução que, segundo Boyer (1996), é muito semelhante ao processo de integração que se conhece hoje. Mesmo com a falta do conceito de limite de uma função, que seria criado séculos mais tarde, Arquimedes pode ser considerado, para Boyer (1996), o homem que mais chegou perto de consegui-lo.

Assim como foram descritas as origens do Cálculo Integral com as contribuições de Eudoxo e Arquimedes, destacar-se-ão a seguir alguns trabalhos de Apolônio sobre o traçado de tangentes que podem estar relacionados com a gênese do Cálculo Diferencial.

### 3.1.3 - Apolônio de Perga

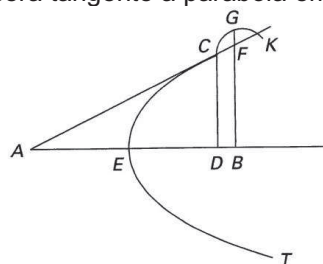
Apolônio (262 a. C. – 190 a. C.) nasceu na cidade de Perga na Panfília (sul da Ásia Menor), e pode ser considerado, com Euclides e Apolônio, um dos grandes matemáticos do período de 300 a 200 a. C., denominado como a “Idade Áurea” da matemática grega.

Conforme comentado na apresentação da presente pesquisa, dentre suas obras, o tratado *Tangências* apresenta o problema conhecido hoje como “Problema de Apolônio” em que dadas três coisas (um ponto, uma reta ou um círculo), traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas, em que especificamente tangência a um ponto significa que o círculo passa pelo ponto. Dez casos possíveis são mostrados na obra referentes a esse problema, entretanto Apolônio não oferece solução para os eles, e alguns casos mais simples são encontrados na obra *Os Elementos*, do matemático grego Euclides (360 a. C. – 295 a. C.), e a solução de um dos problemas mais complexos, que consiste em traçar um círculo tangente a três círculos dados, foi dada por Isaac Newton usando apenas régua e compasso.

Entretanto, sua obra-prima, denominada *As Cônicas*, apresenta um estudo sobre como traçar tangentes às curvas cônicas (elipses, parábolas e hipérboles), além de traçados de retas máximas, mínimas e normais sobre elas.

O problema do traçado de tangentes em seções cônicas é discutido na obra *As Cônicas* no Livro I. Naquele período, os matemáticos gregos não tinham uma definição satisfatória de tangentes a uma curva  $C$  em um ponto  $P$ , pensando nela como uma reta  $L$  tal que nenhuma outra podia ser traçada por  $P$  entre  $C$  e  $L$ . Sobre a proposição do traçado da tangente em um ponto da parábola, pode-se descrevê-la da seguinte maneira:

**Proposição I - 33.** Seja  $C$  um ponto sobre a parábola  $CET$  com  $CD$  perpendicular ao diâmetro  $EB$ . Se o diâmetro for prolongado para  $A$  com  $AE = ED$ , então a reta  $AC$  será tangente a parábola em  $C$ .

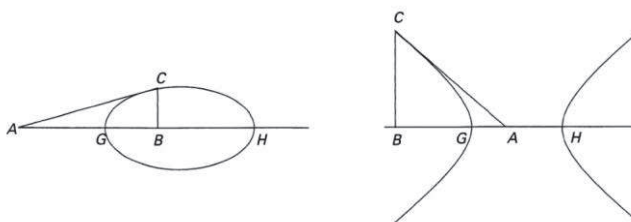


(KATZ, 1998, p.133-134)

Essa proposição, afirma que se  $DC = y$ ,  $DE = x$  e  $AE = t$ , e se  $x = t$ , então a reta  $AC$  é tangente à curva em  $C$ , o que em outras palavras significa que a tangente pode ser encontrada pelo prolongamento pelo ponto  $E$  do diâmetro  $EB$  a uma distância igual ao segmento  $EB$ , obtendo-se assim o ponto  $A$  e ligando-se o ponto  $A$  com o ponto  $C$  encontra-se a reta tangente à curva em  $C$ .

A proposição do traçado da tangente em um ponto de uma elipse ou hipérbole pode ser enunciada da seguinte maneira:

**Proposição I – 34.** Seja  $C$  um ponto em uma elipse ou hipérbole,  $CB$  a perpendicular do ponto  $C$  para o diâmetro ou o prolongamento deste. Sejam  $G$  e  $H$  as interseções do diâmetro com a curva e escolha  $A$  no diâmetro ou no prolongamento do diâmetro tal que  $AH:AG = BH:BG$ . Então  $AC$  será tangente a curva em  $C$ .



(KATZ, 1998, p.134)

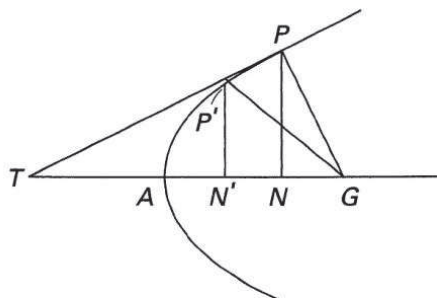
Para obter o resultado algebricamente, no caso da elipse considere o segmento  $AG = t$ ,  $BG = x$  e  $GH = 2a$ . Sendo assim,  $BH = 2a - x$  e  $AH = 2a + t$ . Utilizando a proposição de Apolônio, tem-se:

$$\frac{2a + t}{t} = \frac{2a - x}{x} \Leftrightarrow 2ax + tx = 2at - tx \Leftrightarrow 2at - 2tx = 2ax \Leftrightarrow t = \frac{ax}{a - x}$$

De maneira análoga, para a hipérbole tem-se  $BH = 2a + x$  e  $AH = 2a - t$ , e, utilizando a mesma proposição, tem-se  $t = \frac{ax}{a+x}$ .

No traçado da reta normal em um ponto da parábola, segundo Boyer (1996), a insatisfação com a definição de tangente fez Apolônio evitar definir uma normal a uma curva  $C$  por um ponto  $Q$ , como uma reta por  $Q$  que corta a curva  $C$ , em um ponto  $P$  e é perpendicular à tangente a  $C$  por  $P$ . Em vez disso, Apolônio usou o fato de ser a normal de  $Q$  a  $C$  uma reta tal que a distância de  $Q$  a  $C$  é um máximo ou mínimo relativo. A proposição pode ser assim enunciada:

**Proposição V-8, V-13, V-27.** Em uma parábola com vértice  $A$  e equação  $y^2 = px$ , seja  $G$  o ponto sobre o eixo tal que  $AG > p/2$ . Seja  $N$  tomado entre  $A$  e  $G$  tal que  $NG = p/2$ . Então  $NP$  é traçado perpendicular ao eixo que encontra a curva em  $P$  e  $PG$  é reta mínima de  $G$  para a curva. Reciprocamente, se  $PG$  é a reta mínima de  $G$  para curva e  $PN$  é traçada perpendicular ao eixo,  $NG = p/2$ . Finalmente,  $PG$  é perpendicular a tangente  $TP$ .



(KATZ, 1998, p.135)

De maneira semelhante, Apolônio demonstrou a propriedade para a elipse e a hipérbole. Cabe ressaltar que a condição de  $PG$  ser máximo ou mínimo para ser a reta normal serve para Apolônio como uma definição, e a perpendicularidade da reta normal com a reta tangente é provada como um teorema.



### 3.1.4 - Considerações Parciais

O método da exaustão, cuja origem pode ser encontrada na conjectura de Antífon e nos trabalhos de Eudoxo e posteriormente aperfeiçoado por Arquimedes, constitui um rigoroso procedimento que, sustentado nas proposições de Eudoxo sobre a teoria das proporções, tornou-se um recurso eficaz para descobertas de teoremas geométricos, como a área de um segmento parabólico, o volume de alguns sólidos, entre outros, considerando-se as limitações da falta de recursos algébricos até então, o que se podem inferir alguns indícios do surgimento do Cálculo Integral.

A ideia intuitiva de se construir um polígono regular inscrito dobrando-se cada vez mais o número de lados apresentava a dificuldade na compreensão da divisão indefinidamente, e traz no seu bojo a noção do infinito.

Essa característica do método da exaustão da divisão do polígono regular permitindo-se sempre dobrar o número de lados tornando a diferença entre as áreas “tão pequena quanto desejar”, pode ser descrita por Fischbein (1987) como uma intuição auto-evidente, pois para os gregos a divisão se tornaria sempre possível, e essa afirmação não necessitava de uma demonstração.

Para Poincaré (1995), a ideia de divisão de uma grandeza (no caso o número de lados de um polígono) indefinidamente utilizada pelos geômetras gregos pode ser caracterizada como um raciocínio por recorrência, em que a duplicação do número de lados do polígono regular é válida para o próximo polígono, para o seguinte, e assim válida para todos.

A teoria das proporções utilizada por Eudoxo já se constitui, de acordo com Fischbein (1987), como uma característica da intuição inferencial, pois Eudoxo, ao entrar em contato com diversos objetos matemáticos (no caso segmentos comensuráveis e incommensuráveis), passou a inferir e generalizar pela teoria das proporções resultados válidos a todos esses objetos.

Quanto ao método mecânico criado por Arquimedes observa-se fortemente o apelo aos sentidos, à imaginação e a analogia com objetos físicos (alavancas, equilíbrio estático) que, segundo Poincaré (1995), constitui-se de um instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Essas descobertas realizadas por Arquimedes embasadas em sua intuição geométrica e posteriormente demonstradas pela dupla redução ao absurdo, podem

ser classificadas por Fischbein (1987) como intuições antecipatórias, pois representavam uma solução ainda preliminar e global do problema (a quadratura da parábola, o volume da esfera) que, por meio do uso de propriedades e teoremas da geometria, formulou-se uma hipótese ligada ao sentimento de uma certeza (no caso, que a área de um segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura, e que o volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da mesma esfera).

No tocante à demonstração pela dupla redução ao absurdo empregada por Arquimedes em suas demonstrações, alguns pontos devem ser analisados. Se, por um lado, o método mecânico que possibilitava o uso da intuição geométrica pode ser considerado um instrumento de invenção, a demonstração pela redução ao absurdo não permite novas descobertas, pois sua utilização obriga que se conheça previamente o resultado que se deseja demonstrar.

Pode-se concluir que a gênese do CDI esteve presente mesmo de forma implícita nos estudos de Arquimedes no século III a. C. relativamente ao cálculo de áreas e volumes, adotando-se o método mecânico e o método da exaustão, com a aplicação da soma de parcelas infinitamente pequenas sem recorrer à noção de limite, até então desconhecida.

Além disso, o exagero do rigor das demonstrações utilizando a “redução ao absurdo” nos trabalhos dos matemáticos gregos mostrou-se um método complicado, que constituiu um fator que não permitia a generalizações das descobertas de Arquimedes.

Portanto, apesar das dificuldades conjuntamente encontradas para um maior desenvolvimento do CDI na Antiguidade, pode-se considerar que os trabalhos de Arquimedes apoiados no método da exaustão utilizado também por Eudoxo constituiu a verdadeira aurora do Cálculo, que contribuiu de forma incisiva nos estudos posteriores que serão relatados a seguir.

### **3.2 – O Despertar**

Durante muito tempo a matemática foi dominada pela influência da geometria grega até então, porém alguns séculos mais tarde observaram-se alguns avanços significativos de alguns conceitos relacionados ao CDI.

Após o desenvolvimento da álgebra realizado pelos árabes, verifica-se que nos séculos XIV e XV a teoria do Cálculo Integral apresentou poucos resultados novos daqueles produzidos por Arquimedes.

No século XIV, destaca-se o trabalho realizado pelo francês Nicole Oresme, que apresentou a ideia de traçar uma figura ou gráfico que representasse a variação de uma grandeza em função da outra, bem como estudou a taxa de variação dessas grandezas. Tais ideias produziram em grande medida muitas contribuições para a gênese da geometria analítica e para o “despertar” do estudo de trabalhos posteriores conforme será analisado a seguir.

No século XVI, após a tradução das obras *Os Elementos*, de Euclides e *As Cônicas*, de Apolônio, muitos matemáticos procuraram utilizar o método da exaustão criado por Eudoxo e aperfeiçoado por Arquimedes na resolução de problemas relacionados com áreas, volumes e comprimentos de arcos. Foram obtidos novos resultados e criados novos métodos no sentido de substituir a demonstração pela dupla redução ao absurdo, que não se objetivava para novas descobertas, pois esse método era utilizado conhecendo-se previamente algum resultado obtido por outro método.

Dentre os matemáticos interessados na aplicação dos conceitos e métodos desenvolvidos por Arquimedes, dois importantes cientistas merecem destaque: Galileu Galilei, que se interessou, dentre outros assuntos, pelo estudo do movimento dos corpos, e Johannes Kepler, com o cálculo de áreas utilizadas em suas leis no estudo do movimento dos planetas bem como na determinação do volume dos barris de vinho.

Esses dois personagens podem ser considerados os primeiros a abandonar o método de demonstração utilizada por Arquimedes e passaram a empregar o conceito dos “indivisíveis”, ou de quantidades infinitamente pequenas. Embora esse termo não tenha apresentado uma definição rigorosa ou um conceito claro sobre o seu significado, Kepler adotou a ideia de que as figuras e os sólidos geométricos eram formados por uma quantidade infinita de retas ou planos, enquanto Galileu, de maneira semelhante, fez uso dessa noção no estudo do movimento na cinemática.

Observa-se, segundo Baron e Bos (1985, p. 3), que “os métodos de quadratura e tangentes tenham-se desenvolvido separadamente, entretanto os matemáticos que se interessavam por um, interessavam-se também pelo outro”. Para os autores, séculos mais tarde, o elemento motivador principal para a união

desses dois problemas inicialmente que acabou resultando no TFC foi a questão da retificação de arcos (resolvido por integração), que proporcionou de maneira natural, por meio da associação de arco e tangente, o relacionamento da quadratura com a tangente.

Todavia, um aluno de Galileu, inspirado no uso dos indivisíveis por Kepler, por exemplo, elaborou um conjunto de técnicas baseado na comparação de áreas e volumes, produzindo mais um salto na direção do método da integração: trata-se do matemático italiano Boaventura Cavalieri.

Além de Cavalieri, outra técnica inspirada no estudo das curvas interpretadas fisicamente como o movimento de um ponto material despertou a atenção da relação, mesmo de forma implícita, entre os problemas de tangente e quadratura. Esse método foi desenvolvido por outro matemático italiano Evangelista Torricelli.

Outro aspecto interessante que será analisado a seguir diz respeito à determinação de máximos e mínimos de uma função, bem como à quadratura de curvas utilizando-se das séries infinitas realizadas pelo matemático francês Pierre de Fermat.

### **3.2.1 - Pierre de Fermat**

A determinação de máximos e mínimos de funções pode ser considerada, segundo Eves (2004), a gênese do conceito de derivação, embora os problemas de traçado de tangentes a curvas antecedam a essa noção, cujo desenvolvimento pode ser encontrado na antiguidade grega, com os trabalhos realizados por Apolônio em sua obra *As Cônicas*. No entanto, para o autor, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias do matemático francês Pierre de Fermat (1601 – 1665), expostas em 1629 em uma obra que não fora publicada durante sua vida, denominada *Método para achar máximos e mínimos*.

Deve-se ressaltar que algumas propriedades de máximos e mínimos eram do conhecimento dos gregos na obra de Apolônio, por exemplo, embora os resultados fossem enunciados sem uma tentativa real de prova.

A ideia de se aperfeiçoar, otimizar algo, deve ser compreendida como uma necessidade natural do ser humano, o que constitui um problema que desperta o interesse dos matemáticos desde a Grécia Antiga.

Fermat tornou-se um dos primeiros matemáticos a resolver problemas dessa natureza utilizando métodos gerais de uma maneira analítica, enquanto os gregos resolviam de uma maneira geométrica.

Ele elaborou um processo para encontrar valores extremos de uma função apropriando-se da ideia de Kepler de que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou mínimo comum.

O procedimento de Fermat pode ser descrito resumidamente da seguinte maneira: se  $f(x)$  tem um máximo ou mínimo em  $x$  e se  $e$  é muito pequeno, então o valor de  $f(x - e)$  é quase igual ao de  $f(x)$ . Portanto, pode-se experimentar fazer  $f(x - e) = f(x)$  e, para tornar essa igualdade correta, impor que  $e$  assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de  $x$  para os quais  $f(x)$  assume um máximo ou mínimo.

Em outras palavras, Fermat apresentou o seguinte raciocínio algébrico: sendo  $f(x - e) = f(x)$ , tem-se:

$$f(x - e) - f(x) = 0$$

Dividindo toda a equação por  $e$ , e a seguir fazendo  $e = 0$ , tem-se que:

$$\left[ \frac{f(x - e) - f(x)}{e} = 0 \right]_{e=0}$$

Sobre esse método criado por Fermat, Eves (2004) comenta que a lógica do processo deixa muito a desejar, entretanto podemos considerar o mesmo equivalente utilizando na linguagem algébrica uma expressão igual a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0$$

Eves (2004) lembra que o método de encontrar pontos de máximo e mínimo de uma função em alguns livros de Cálculo é conhecido como método de Fermat,

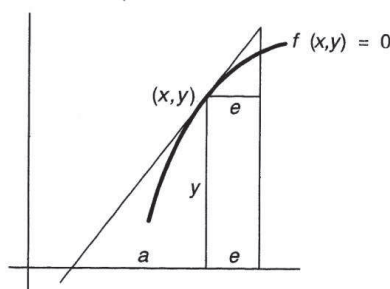
embora ele ignorasse que a condição de uma derivada de  $f(x)$  é anular para ter um máximo ou mínimo de uma função. Além disso, o método de Fermat também não distinguia entre valor máximo ou valor mínimo.

Para determinar a tangente por um ponto de uma curva, Fermat descobriu um método geral que consistia em achar a *subtangente* relativa a esse ponto. Por subtangente Fermat entendia como o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo  $x$  e a intersecção da tangente com esse eixo.

Basicamente, Fermat usou a ideia da tangente como a posição-limite de uma secante quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir. Eves (2004) descreve o procedimento usado por Fermat:

Seja  $f(x, y) = 0$  a equação da curva e procuremos sua subtangente a relativa a  $(x, y)$ . Por semelhança de triângulos, facilmente se estabelece que as coordenadas de um ponto da tangente, próximo do ponto de tangência, são  $x + e, y(1 + e/a)$ . Tratando-se esse ponto como se ele fosse da curva, obtém-se

$$f\left[x + e, y\left(1 + \frac{e}{a}\right)\right] = 0$$



E, para que essa igualdade possa ser considerada correta, faz-se com que  $e$  assumo o valor zero. Determina-se, então, a partir da equação resultante, a subtangente  $a$  em função das coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto de tangência. Isso, obviamente, equivale a fazer

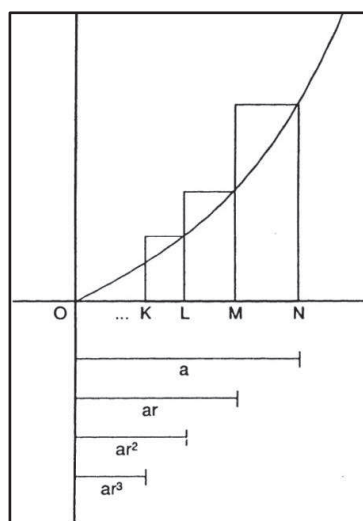
$$a = -y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

uma fórmula que apareceu posteriormente num trabalho de Sluse (EVES, 2004, p. 439).

Além da determinação de máximos e mínimos e o traçado de tangentes, Fermat interessou-se no estudo da quadratura de curvas do tipo  $y = x^n$ , em que  $n$  é um número inteiro positivo, entre os pontos  $x = 0$  até  $x = a$ .

Fermat utilizou o seguinte artifício: subdividiu o intervalo de 0 até  $n$  em uma infinidade de subintervalos pelos pontos ...  $K, L, M, N$ , sendo  $ON = a$ ,  $OM = ar$ ,  $OL = ar^2$  e assim por diante, sendo  $0 < r < 1$ . Nesses pontos obtidos sobre o eixo  $x$  levantam-se as ordenadas dos pontos correspondentes na curva e a área é conseguida aproximando-se a soma das áreas dos retângulos obtidos, conforme a figura abaixo:

**Figura 28** – Quadratura da curva (Fermat)



Fonte: Maor, 2006, p. 90

A soma das áreas dos retângulos, iniciando-se pelo de base MN é dada pela soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica infinita convergente:

$$S_n = a^n(a - ar) + (ar)^n(ar - ar^2) + (ar^2)(ar^2 - ar^3) + \dots$$

$$S_n = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{1 - r^{n+1}} \quad (I)$$

Fermat notou que, quando a largura de cada retângulo tornava-se cada vez menor, a curva encaixava-se melhor entre os retângulos, ou seja, isso seria possível à medida que  $r$  se aproximasse de 1.

Entretanto, quando o valor de  $r$  se aproxima de 1 equação (I) tornava-se a indeterminação  $\frac{0}{0}$ . Fermat solucionou tal situação fatorando o termo  $1 - r^{n+1}$  na

expressão  $(1 - r)(1 + r + r^2 + r^3 + \dots r^n)$ , o que torna a equação (I) simplificada da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{1 - r^{n+1}} = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{(1 - r)(1 + r + r^2 + r^3 + \dots r^n)} = \frac{a^{n+1}}{1 + r + r^2 + r^3 + \dots r^n}$$

À medida que  $r$  se aproxima de 1, teremos:

$$S_n = \frac{a^{n+1}}{1 + r + r^2 + r^3 + \dots r^n} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Fermat provou que essa relação valia também para  $n$  fracionário. Entretanto, para  $n = -1$  para o processo falha, sendo resolvido esse caso particular por um contemporâneo de Fermat, Gregório de St. Vincent.

Utilizando-se de Integral, observa-se que Fermat obteve o resultado equivalente à:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

De maneira semelhante ao procedimento utilizado por Fermat, Gregório de St. Vincent (1584 – 1667) em sua obra *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum con* (1647), descreve um método para a quadratura da hipérbole.

Além de Fermat e St. Vincent, outros matemáticos apresentaram a ideia de dividir uma figura ou um sólido em quantidades infinitamente pequenas, conforme se verá a seguir.

### 3.2.2 – Cavalieri

A utilização do método dos indivisíveis, desenvolvido por Cavalieri é tratado em sua obra *Geometria indivisibilibus*, publicada em 1635. Cavalieri compreendia o termo indivisível de uma porção plana como uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado como uma secção deste objeto.



A ideia de Cavalieri residia no fato de que uma porção plana seria formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seria constituído por uma infinidade de secções planas paralelas. Cavalieri argumentava que ao se fazer deslizar cada um dos elementos do conjunto de cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo do seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Esse procedimento pode ser utilizado analogamente para um sólido dado, em que o conjunto das secções planas paralelas daquele formará outro sólido com o mesmo volume deste.

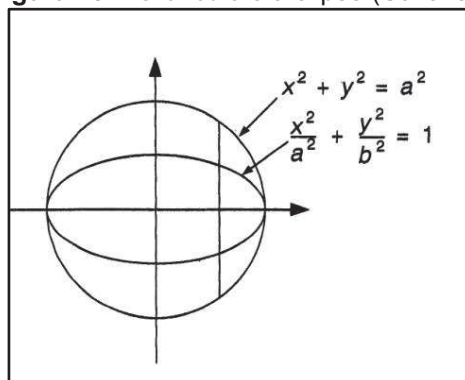
Os princípios de Cavalieri podem ser descritos da seguinte maneira:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre essas áreas dessa porção é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2004, p. 426).

Um exemplo da utilização dos princípios de Cavalieri descritos por Eves (2004) pode ser dado a seguir, na determinação da área da região limitada por uma elipse de semieixos  $a$  e  $b$ .

Para o primeiro princípio, considere a elipse e a circunferência em um mesmo sistema de coordenadas retangulares, conforme a figura a seguir:

**Figura 29** – O círculo e a elipse (Cavalieri)



Fonte: Eves, 2004, p. 427

Utilizando a representação algébrica, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

E a equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Nas equações da elipse e da circunferência, escrevendo  $y$  em função de  $x$ , tem-se que:

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2} \text{ e } y = (a^2 - x^2)^{1/2}$$

De acordo com o Princípio de Cavalieri, a razão entre duas cordas verticais é dada pela razão entre duas ordenadas correspondentes. No caso da elipse e da circunferência, tem-se nessa ordem que:

$$\frac{\frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{b}{a}$$

Essa razão sendo igual à razão entre as áreas resulta que:

$$\frac{\text{área da elipse}}{\text{área do círculo}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{área da elipse} = \frac{b}{a} \cdot (\pi a^2) = \pi ab$$

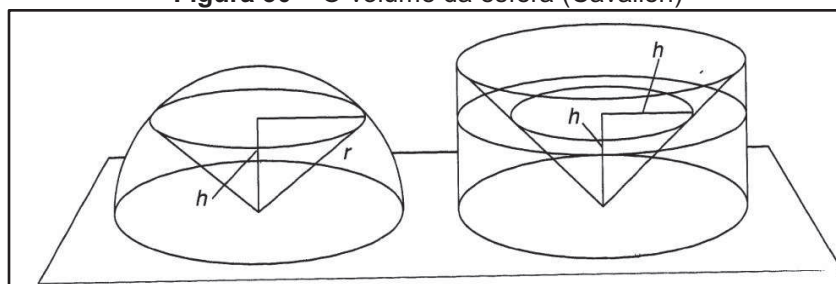
Esse resultado ( $A_{\text{elipse}} = \pi ab$ ) foi encontrado de maneira análoga por Kepler utilizando-se do método dos indivisíveis. Kepler considerava que a elipse poderia ser formada a partir de um círculo de raio  $a$  por meio de uma transformação segundo a qual a ordenada do círculo em cada ponto pode ser diminuída por uma razão dada, por exemplo,  $b:a$ . Tanto a área da elipse quanto a área do círculo podem ser imaginadas como a soma de todas as ordenadas dos pontos sobre as curvas; como a razão entre essas ordenadas é igual a  $b:a$ , então a razão entre as áreas da elipse e do círculo também será a mesma. Como a área do círculo é igual a  $\pi a^2$ , temos que a área da elipse  $A_e$  será dada por:

$$\frac{A_e}{A_c} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{A_e}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow A_e = \pi ab$$

O segundo Princípio de Cavalieri pode ser utilizado para se calcular, por exemplo, o volume de uma esfera de raio  $r$ . Observando-se a figura a seguir, tem-se à esquerda um hemisfério de raio  $r$  e, à direita, um cilindro circular reto de raio  $r$  e altura  $h$ . Desse cilindro remove-se um cone circular reto cuja base é equivalente à base do cilindro e cujo vértice é o centro de sua base inferior. Os três sólidos possuem as bases coplanares, seccionando-se ambos os sólidos com um plano paralelo de suas bases a uma distância  $h$  dele. Esse plano corta o hemisfério segundo um círculo e o outro sólido segundo uma coroa circular, de acordo com a figura a seguir:

**Figura 30 – O volume da esfera (Cavalieri)**



Fonte: Eves, 2004, p. 428

Demonstra-se que ambas as secções têm áreas iguais a  $\pi(r^2 - h^2)$ . Pelo segundo Princípio de Cavalieri, se os sólidos têm áreas iguais, então os volumes são iguais. Portanto, sendo  $V$  o volume da esfera, tem-se que:

$$V_{\text{hemisferio}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}}$$

$$\frac{V}{2} = \pi r^2 r - \frac{\pi r^2 r}{3}$$

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

A demonstração do cálculo do volume dos sólidos geométricos, segundo Eves (2004), pode simplificar grandemente a dedução de muitas fórmulas de volumes incluídas nos tratamentos iniciais da geometria sólida. Para o autor, esse procedimento foi utilizado por muitos autores de textos de geometria e costuma ser adotado por razões pedagógicas.

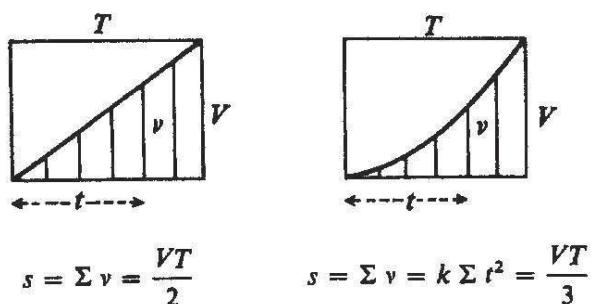
Sua obra *A Geometrica indivisibilibus*, que tanto facilitou o problema das quadraturas, apareceu novamente em uma segunda edição em 1653, mas já então os matemáticos haviam obtido resultados notáveis em direções novas, conforme se verá a seguir nos trabalhos de Torricelli, que pode ser considerado um dos primeiros matemáticos a observar a relação existente entre quadratura e traçado de retas tangentes.

### 3.2.3 – Torricelli

Segundo Baron e Bos (1985), o matemático italiano Marco Evangelista Torricelli (1608 – 1647) tentou relacionar tangentes e quadraturas (que constituiu a gênese do conceito de integral) de maneira direta. Ele baseou o seu trabalho em duas noções: o conceito de movimento na descrição de curvas, generalizando e estendendo ideias já desenvolvidas por Galileu e Oresme, e a resolução do problema da quadratura estudado por Cavalieri, que constituiu a gênese desde Arquimedes do Cálculo Integral. Essa relação entre tangente e quadratura pode ser considerada o primeiro estágio embrionário para o surgimento do TFC.

Torricelli basicamente utilizou-se das seguintes noções para encontrar tal relação:

1. A noção medieval do gráfico velocidade-tempo, do qual a distância total percorrida é representada pela área sob a curva.

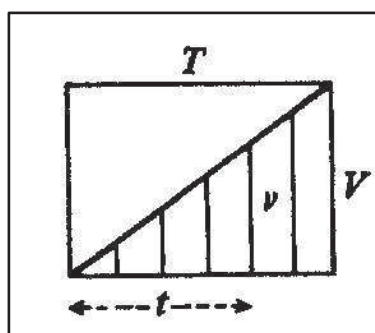


(BARON e BOS, 1985, v.2, p. 41).

Essa noção já havia sido estudada por Galileu, bem como por Oresme, que imaginou a descrição da velocidade em relação ao tempo de um corpo que se move com aceleração constante. Para Oresme, a representação dessas grandezas poderia ser feita da seguinte maneira: ao longo de uma reta horizontal, ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou, como ele denominava, “longitudes”), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (“latitudes”), cujo comprimento representava a velocidade. A soma dos segmentos (“velocidades”) para Oresme constituiria a área de uma região plana, sendo a soma desses segmentos equivalente à distância percorrida. Os termos latitude e longitude utilizados por Oresme correspondem, respectivamente, aos termos usuais ordenada e abscissa de um ponto.

A análise do diagrama geométrico segundo Boyer (1996) no estudo da lei do movimento pode ser atribuída a Galileu, que, de maneira análoga ao estudo realizado por Oresme, considerava a velocidade variando em função do tempo de um corpo que se movimenta com aceleração constante, que pode ser dado pela seguinte figura:

**Figura 31** – Gráfico Velocidade x Tempo (Torricelli)



Fonte: Baron e Bos, 1985, v. 2, p. 41

Pela figura anterior pode-se concluir, por semelhança de triângulos, que ao dividir o segmento em dois intervalos de tempos iguais, a área na primeira metade está para a área na segunda metade na razão de 1 para 3. Sendo assim, como as áreas representam numericamente as distâncias totais percorridas, a razão entre as mesmas será 1:3. Se dividirmos o gráfico em três intervalos de tempos iguais, a razão entre as distâncias percorridas será 1:3:5; em quatro partes a razão será 1:3:5:7, o que fez Galileu concluir mais tarde que, conseqüentemente, as distâncias estão na razão dos números ímpares, como a soma dos  $n$  primeiros números



Os autores continuam conforme descreve a seguinte situação:

[...] considere um ponto movendo-se ao longo de uma curva OPQ com duas componentes de velocidade: uma horizontal e uma vertical. Suponha que a velocidade horizontal seja uniforme de tal modo que a distância horizontal pode ser considerada “como uma medida de tempo”, isto é,  $x = t$ ,  $u = 1$  (onde  $x$  é a distância horizontal percorrida no tempo  $t$ , e  $u$  a velocidade uniforme horizontal). Agora, seja a velocidade vertical no tempo  $t$  denotada

por  $v$ , onde  $v = kt^n = kx^n$ .

Suponha que depois de um tempo  $T$  o ponto alcance  $Q(X,Y)$  com velocidade horizontal e vertical  $U$  e  $V$ , respectivamente. Como  $U=u=1$ ,  $V = kt^n$ , a construção da tangente será feita por  $V/U = V = kT^n = ZR/X$ .

Mas  $X=T$ ,  $Y = \sum kt^n = VT/(n+1) = \frac{kT^{n+1}}{n+1}$ , logo  $Y = \frac{kx^{n+1}}{n+1}$ . (BARON e BOS, 1985, v. 2p. 42).

Torricelli com isso conseguiu, a partir do traçado da tangente, encontrar um resultado para obter a quadratura da curva, pois, ao descobrir o modo de obter a velocidade do ponto movendo-se ao longo da curva citada, ele achou a distância total percorrida. Em notação moderna, se se considerar a função velocidade  $V(t) = kt^n$ , para obter a função da distância total percorrida  $Y(t)$ , tem-se:

$$Y(t) = \int_0^x V(t)dt = \int_0^x kt^n dt = \frac{kt^{n+1}}{n+1}$$

Paralelamente, Torricelli não explicita diretamente qual a relação existente entre a resolução dos problemas de quadratura e o traçado de tangentes a uma curva, porém pode-se considerar que seus resultados contribuíram sobremaneira para outros matemáticos, tais como os ingleses Isaac Barrow, John Wallis e Isaac Newton, cujos trabalhos serão analisados posteriormente.

Após a morte de Torricelli, muitos de seus trabalhos e ideias foram transmitidos e utilizados por outros matemáticos, como Isaac Barrow e James Gregory, que por meio da relação intuitiva baseada no movimento iniciada por Torricelli entre tangente e quadratura obtiveram novas descobertas no desenvolvimento do TFC.

### 3.2.4 – John Wallis

O matemático inglês John Wallis (1616 – 1703) publicou em sua obra *Arithmetica infinitorum* (1655) o que se pode considerar como a “arimetização” do método dos indivisíveis, de Cavalieri.

Pode-se destacar que a contribuição para o desenvolvimento do CDI feita por Wallis foi o abandono da linguagem geométrica, dando um tratamento aos valores das integrais de um modo mais numérico, associando aos infinitamente pequenos de Cavalieri nas figuras valores numéricos.

Para elucidar a abordagem dada por Wallis aos indivisíveis, Boyer (1996) apresenta o seguinte exemplo em que são comparados os quadrados dos indivisíveis de um triângulo e de um paralelogramo:

Se, por exemplo, queremos comparar os quadrados dos indivisíveis no triângulo com os quadrados dos indivisíveis no paralelogramo, toma-se o comprimento do primeiro indivisível no triângulo como sendo zero, o segundo um, o terceiro dois e assim até o último, que terá comprimento  $n - 1$  se há  $n$  indivisíveis. A razão dos quadrados dos indivisíveis nas duas figuras seria então:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} \text{ ou } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

se houvesse apenas dois indivisíveis em cada um; ou

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

se houvesse três; ou

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

se houvesse quatro. Para  $n + 1$  indivisíveis o resultado é

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^2+n^2+n^2 + \dots + n^2+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

e se  $n$  é infinito, a razão evidentemente é  $1/3$ . (Para  $n$  infinito, o termo resto  $1/6n$  fica  $1/\infty$  ou zero. Wallis aqui foi o primeiro a usar o símbolo para infinito agora familiar). Isso, é claro, é o equivalente de dizer que  $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ . Wallis entendeu o processo a potências inteiras superiores de  $x$ . Por indução incompleta ele concluiu que:



$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

para todos os valores inteiros de  $m$ .

(BOYER, 1996, p. 262)

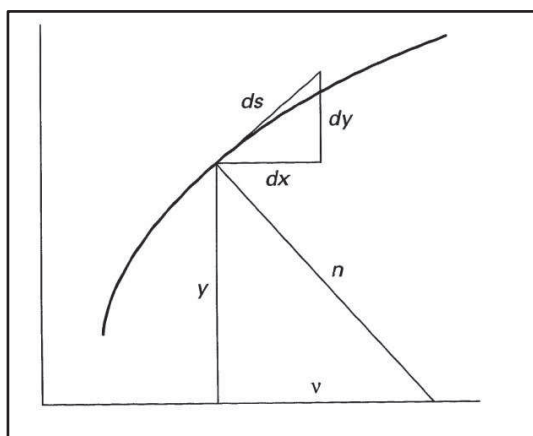
O exemplo descrito anteriormente refere-se a uma das principais contribuições de Wallis ao Cálculo Integral. Entretanto, observam-se, por outro lado, poucos trabalhos desse matemático para a teoria da derivação. O estabelecimento da relação entre integração e derivação seria apresentado, portanto, por dois outros matemáticos ingleses, conforme será analisado a seguir.

### 3.2.5 – James Gregory

James Gregory (1638 – 1675), em seu trabalho *Geometriae pars universalis* (1668), é considerado, segundo Baron e Bos (1985), o primeiro tratado sistemático com todas as operações para a determinação de arco, tangente, área e volume, que apareceriam em um trabalho de cálculo infinitesimal. Pode-se salientar que o tratamento dado aos assuntos é todo verbal e geométrico e a estrutura da demonstração é calculada baseando-se no método de exaustão associado à redução por absurdo.

Gregory utilizou-se da construção de um triângulo diferencial  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$  no ponto dado de maneira semelhante àquela utilizada posteriormente por Leibniz, conforme a figura a seguir:

**Figura 33 – Triângulo Diferencial (Gregory)**



Fonte: Katz, 1998, p. 534

O avanço obtido por Gregory foi construir uma nova curva cuja ordenada em algum valor de  $x$  era igual à área sob a curva original a partir de um ponto fixo até  $x$ .

Uma vez que esta ideia foi concebida, descobriu-se que não foi difícil construir novamente a tangente a essa curva e mostrar que a inclinação em  $x$  era sempre igual a ordenada original naquele lugar.

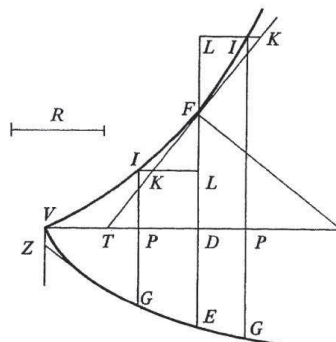
Para Baron e Bos (1985), não existe nenhuma dúvida de que Gregory tinha clara compreensão da relação inversa entre tangente e quadratura. Na proposição VI, ele passa diretamente da quadratura de uma curva à construção da tangente de outra curva (isto é,  $ku = \int_0^x z dx \Leftrightarrow k \frac{du}{dx} = z$ ). Esse resultado pode ser considerado como a primeira afirmação publicada, em forma geométrica, do que agora se conhece como o Teorema Fundamental do Cálculo.

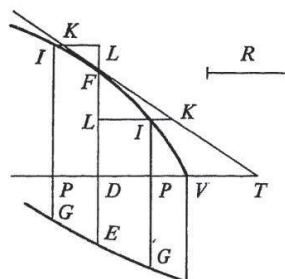
### 3.2.6 – Isaac Barrow

Isaac Barrow (1630-1677) em sua obra *Geometrical Lectures* (1670) descreve um tratamento de curvas baseado no conceito de movimento, de maneira análoga aquela utilizada por Torricelli, preferindo não adotar em seus trabalhos o método dos indivisíveis de Cavalieri.

Será apresentada a seguir uma tradução da proposição 11, lição X da obra *Lectures*, da forma como Barrow, de modo geométrico, teria encontrado a relação entre o traçado de tangente e o problema da quadratura, de maneira muito semelhante àquela presente no trabalho *Geometriae*, de Gregory.

Seja qualquer curva  $ZGE$ , com eixo  $VD$ ; suponhamos primeiro que as ordenadas  $VZ$ ,  $PG$ ,  $DE$  perpendiculares a  $VD$ , cresçam continuamente a partir do primeiro  $VZ$ . Seja a curva  $VIF$  tal que, traçando-se qualquer reta  $EDF$  perpendicular a  $VD$  (que corta as curvas nos pontos  $E$ ,  $F$  e  $D$  em  $VD$ ), o retângulo sob  $DF$  e qualquer reta dada  $R$  pode ser igual ao espaço interceptado  $VDEZ$ ; faça agora  $DE::DF::R::DT$ , e trace a reta  $TF$ : esta tocará a curva  $VIF$ .





Tome qualquer ponto  $I$  na curva  $VIF$  (primeiro acima do ponto  $F$ , em direção ao início  $V$ ) e, através disto, trace as retas  $IG$ ,  $KL$  paralela a  $VZ$ ,  $VD$  (cortando a curva, como o esquema) então  $LF:LK::(DF:DT::) DE:R$ ; então  $LF \times R = LK \times DE$ . Mas (por suposição)  $LF \times RE$  igual ao espaço  $PDEG$ . Portanto  $LK \times DE = PDEG < DP \times DE$ . Dai  $LK < DP$ , ou  $LK < LL$ .

Novamente tome qualquer ponto  $I$ , abaixo do ponto  $F$ , e faça o mesmo procedimento anterior. Então, por razões semelhantes, parece que  $LK \times DE + PDEG > DP \times DE$ ; portanto  $LK > DP$ , ou  $LI$ . Donde se conclui que a reta inteira  $TKFK$  cai dentro (ou fora) da curva  $VIFI$ .

As coisas continuam como antes se as ordenadas  $VZ$ ,  $PG$ ,  $DE$  continuam a decrescer; a conclusão e o raciocínio serão os mesmos, com uma única diferença – e que a curva  $VIF$  e côncava com relação ao eixo  $VD$  (BARON e BOS, 1985, p. 45).

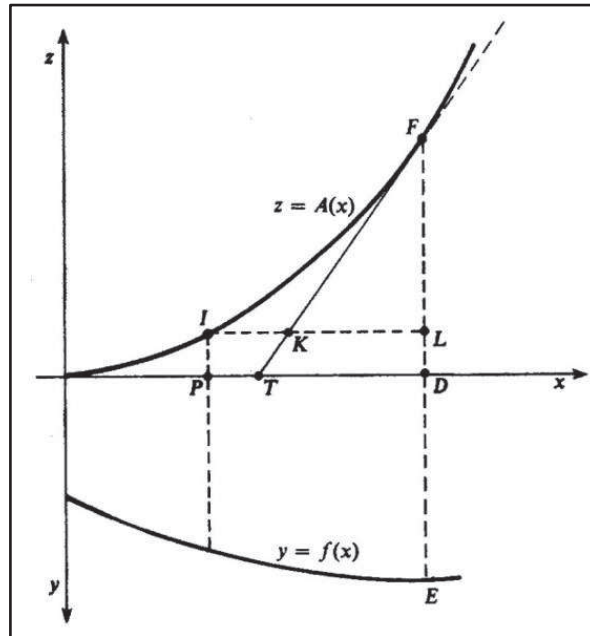
Assim como Gregory, Barrow iniciou com uma curva  $ZGE$ , escrita em notação moderna como  $y = f(x)$ , construindo uma nova curva  $AIF = g(x)$ , de tal forma que  $Rg(x)$  é sempre igual à área delimitada por  $f(x)$  entre um ponto fixo e um ponto variável  $x$ . Em notação moderna:

$$Rg(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Barrow então provou que o comprimento  $t(x)$  da subtangente  $g(x)$  é dada por  $Rg(x)/f(x)$ , ou que:

$$g'(x) = \frac{g(x)}{t(x)} = \frac{f(x)}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(x)dx = f(x)$$

Por conveniência, sejam  $y$  e  $z$  eixos orientados opostamente conforme mostra a figura a seguir. Seja uma função crescente de  $y = f(x)$ , denotado por  $z = A(x)$  a área entre a curva  $y = f(x)$  e o segmento  $[0, x]$  no eixo  $x$ . Seja um ponto  $D = (x_0, 0)$  no eixo  $x$ , e seja  $T$  um ponto no eixo  $x$  tal que  $DT = \frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}$ .

**Figura 34** – Relação entre tangente e quadratura (Barrow)

Fonte: Katz, 1998, p. 501

Então, Barrow afirma que a linha  $TF$  toca a curva  $z = A(x)$  somente no ponto  $F = (x_0, A(x_0))$ .

Note que a inclinação de  $TF$  é dada por:

$$\frac{DF}{DT} = \frac{A(x_0)}{A(x_0)/f(x_0)} = f(x_0)$$

Se Barrow afirmava que  $TF$  é tangente à linha da curva  $z = A(x)$  em um senso analítico, como apropriadamente é definida a inclinação  $A(x)$ , este resultado consequentemente resulta em  $A'(x_0) = f(x_0)$ . Entretanto, ele somente afirma (e prova) que  $TF$  é tangente a  $z = A(x)$  em um antigo sentido grego de linha reta que toca a curva em apenas um ponto.

A prova é que ele considera um ponto  $I = (x_1, A(x_1))$  na curva com  $x_1 < x_2$  e passa a mostrar que o ponto  $K$ , da intersecção da linha horizontal  $IL$  com  $TF$ , situada à direita de  $I$ , como mostra a figura. Para observar isso, veja que  $\frac{LF}{LK} = \frac{DF}{DT} = DE$  (pela definição do ponto  $T$ ), então  $LF = LK \cdot DE$ . Mas:

$$LF = DF - PI = A(x_0) - A(x_1) < DP \cdot DE$$

pois  $f(x)$  é uma função crescente. Portanto  $LK \times DE \times DP \times DE$ , então  $LK < DP = LI$  como descrito. O caso  $x_1 > x_0$  é similar.

No entanto uma leitura atenta das afirmações no início mostra que ele muitas vezes pensou em curvas como se fossem geradas por um movimento de um ponto móvel. Fazendo essa analogia, ele associou a inclinação da reta tangente com a velocidade do móvel, bem como a distância percorrida com a área limitada pela curva em um intervalo e o eixo coordenado, tal como se fez atualmente. Essa associação de ideias como fizeram Galileu e Torricelli, entre outros, no estudo do movimento, permitiu a Barrow compreender a relação inversa entre os processos de derivação e integração.

Boyer (1996) considera que, de todos os matemáticos que anteciparam alguns resultados, nenhum deles chegou mais perto do TFC que Barrow, dando sinais de que reconheceu claramente a relação inversa entre os problemas de tangentes e quadraturas.

### 3.2.7 – Considerações parciais

O método dos indivisíveis desenvolvido por Kepler e Cavalieri apresentou a oportunidade de novas descobertas, pois trazia um valor heurístico utilizando-se de demonstrações diretas, possibilitando grandes contribuições para o desenvolvimento do conceito de integral. O rigor na fundamentação do CDI viria posteriormente, contudo a construção dos teoremas e resultados de Cavalieri apresentam algumas características ligadas e defendidas pelos intuicionistas.

O rigor da demonstração pela dupla redução, considerada estéril e criticada por Poincaré (1984), foi substituído por Cavalieri por uma abordagem predominantemente geométrica e intuitiva.

Em seu princípio destinado ao cálculo de áreas, Cavalieri mostrou uma das características da intuição segundo Fischbein (1987): a convicção intrínseca, em que Cavalieri raciocinou que, se duas porções planas fossem formadas por segmentos indivisíveis iguais, que descrevessem um movimento contínuo, então as áreas dessas porções seriam iguais. Esse sentimento de convicção presente no resultado estendeu-se no caso da determinação do volume de dois sólidos.

Torricelli não possuía um método geral e rigoroso para a descrição de tangentes, mas, efetuando comparações com elementos físicos e fazendo uso de algumas propriedades geométricas, conseguiu determinar tangentes a várias curvas. No entanto ele utilizou-se, segundo a intuição sensível descrita por Poincaré (1995), permitindo fazer uma analogia entre o estudo de uma curva algébrica e o movimento de um ponto material, atribuindo-lhe grandezas físicas como velocidade e espaço percorrido.

John Wallis apresenta uma característica em seus trabalhos que agrega o desprendimento geométrico priorizando uma abordagem aritmética dos resultados. Ele se utiliza da intuição ao número puro, conforme defendia Poincaré (1995), em que o princípio da indução finita permitiu inferir resultados importantes sobre a relação  $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ .

A demonstração geométrica de Barrow indica que o uso da imaginação e dos recursos geométricos, assim como afirmava Poincaré (1995), constitui-se de um excelente exemplo da intuição geométrica como instrumento de criação. Entretanto, a falta de uma linguagem e de uma simbologia da época tornou-se um obstáculo.

Poincaré (1995) atribuía à linguagem a capacidade de gerar, por meio de definições, os objetos matemáticos. Uma vez definidos, esses objetos passam a habitar o contexto cultural dessa linguagem, pois esses objetos definidos passam a ter existência apenas no mundo da linguagem, que no caso do TFC seria a linguagem algébrica.

Todas as descobertas e contribuições realizadas até então foram motivadas pelo “despertar” da curiosidade e da necessidade que muitos matemáticos tiveram do estudo do movimento dos corpos e da busca da relação entre velocidade e distância percorrida, que propiciou de maneira implícita o surgimento dos primeiros indícios do desenvolvimento do TFC.

No entanto, a relação entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes, em que, ao se resolver um dos problemas, conseqüentemente o outro estará resolvido, acarretando a conclusão de que as operações de integração e derivação são inversas entre si, ainda seria descoberto, de maneira simultânea e independente, por dois matemáticos que apresentaram ideias e raciocínios intuitivos nunca elaborados até então, sendo considerados os criadores do TFC, em um

período que pode ser considerado como o mais fecundo do desenvolvimento do Cálculo, conforme será apresentado a seguir.

### 3.3 – Integro, logo derivo

Após alguns notáveis resultados e avanços obtidos relacionados com a gênese do TFC, como os trabalhos de Wallis, Gregory e Barrow – sendo que esse último apresentou de forma mais explícita a relação existente entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes – serão apresentadas a seguir os trabalhos de dois matemáticos que souberam reconhecer de maneira independente a relação entre esses problemas.

#### 3.3.1 – Isaac Newton

O matemático e físico inglês Isaac Newton (1642-1727) foi aluno de Barrow e com ele discutiu muitos problemas referentes à questão do estudo do movimento, tornando-se um elemento central nos seus primeiros trabalhos relacionados com as origens do Cálculo, principalmente no seu tratado denominado “método dos fluxões”.

Sua obra *Principia* (1687) apresenta um capítulo dedicado ao estudo da quadratura das curvas, em que se procurará destacar quais foram as principais ideias que levaram o autor ao estabelecimento da relação inversa entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes.

Já no trabalho denominado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1665), ou simplesmente *De analysi*, Newton elaborou um método algébrico de expressar funções de uma variável por meio de séries infinitas.

O autor, ao analisar a obra *Arithmetica infinitorum* (1655), de John Wallis sobre a determinação da área sob curvas do tipo  $y = (1 - x^2)^n$  da reta  $x = 0$  até  $x = 1$ , interessou-se pelo cálculo da área limitada pela curva de  $x = 0$  até  $x = x$  afirmando que o problema poderia ser solucionado por séries infinitas e que elas não se resumiam apenas a instrumentos de aproximação, mas a uma forma de representar funções. Para os binômios com expoente fracionário, o autor desenvolveu séries infinitas que auxiliaram na resolução da quadratura de curvas do tipo  $y = (1 - x^2)^{m/n}$ , por exemplo.

Retomando o fato, inicialmente o autor elaborou uma investigação sistemática das propriedades das curvas, classificando em primeiro lugar problemas que foram resolvidos pelo que hoje se conhece por derivação, e, em segundo lugar, os problemas resolvidos por integração.

Para encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto, Newton utilizou-se de métodos muitos semelhantes ao executado por Fermat e Barrow. Ele empregou o termo  $o$  para representar um intervalo de tempo muito pequeno e  $op$  e  $oq$  para pequenos incrementos, pelos quais  $x$  e  $y$  variam nesse intervalo, respectivamente. Trabalhando posteriormente com funções explícitas de  $x$ , Newton abandonou os termos  $p$  e  $q$  e passou a adotar definitivamente  $o$  como um pequeno acréscimo da variável independente. Na obra *De analysi*, utilizando as séries infinitas, ele provou que a área sob a curva  $y = ax^{m/n}$  é dada por:

$$\frac{ax^{(m/n)+1}}{(m/n) + 1}$$

Denominando a área obtida por  $z$ , tem-se:

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{(m+n)/n}$$

Newton interessou-se pelo cálculo da taxa de mudança da área. Para isso, seja  $o$  acréscimo infinitesimal da abscissa. A nova abscissa será  $x + o$  e a área aumentada será:

$$z + oy = \frac{n}{m+n} a(x + o)^{(m+n)/n}$$

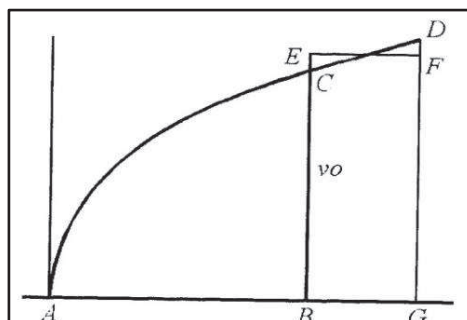
Nessa situação, calculando-se a variação da área e dividindo tudo por  $o$  e cancelando os termos que contêm  $o$  considerado infinitamente pequeno, ao fazer essa divisão por  $o$  chega-se ao resultado  $z = ax^{m/n}$ , que corresponde à ordenada da função considerada. Isso possibilitou Newton a achar a área utilizando-se do processo de derivação, considerado mais fácil do que encontrar a quadratura por séries infinitas.

Para exemplificar o método elaborado por Newton, de acordo com a figura a seguir, considere uma curva que passa pela origem dada por uma função  $y$  e  $x$ ,



sendo  $z$  a área ABC sob a curva de equação  $y = x^{1/2}$ . Utilizando as séries finitas, Newton mostrou que a área ABC é dada por  $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ .

**Figura 35** – Método da quadratura de Newton



Fonte: Ávila, 1999, p. 199

Sendo  $AB = x$ ,  $BC = y$  e  $BE = v$ , a área da figura  $BCDG$  é igual à área do retângulo  $BEFG$ . Dando a  $x$  um acréscimo infinitesimal  $o = BG$ ,  $z$  sofrerá um acréscimo infinitesimal  $vo$  (igual à área do retângulo  $BEFG$ ). Com essas informações, tem-se que:

$$z = \frac{2}{3}x^{3/2} \Rightarrow z^2 = \frac{4}{9}x^3 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad (z + vo)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3 \quad (2)$$

Desenvolvendo a expressão (2), tem-se:

$$z^2 + 2zvo + (vo)^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3)$$

Substituindo (1) e dividindo-se a última expressão por  $o$ , obtemos:

$$2zv + v^2o = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$$

Cancelando-se os termos que apresentam o fator infinitesimal  $o$  e considerando-se a diferença  $v - y$  muito pequena, o que implica  $v = y$ , vem:

$$2zy = \frac{4}{3}x^2$$

Sendo  $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$  tem-se:

$$y = x^{1/2}$$

Newton mostrou, em linguagem moderna, que a taxa de mudança da área (derivada) é igual à ordenada  $y$  e que a soma da série de potência de  $y$  (integral) é igual a  $z$ .

Para Boyer (1996), foi a primeira vez na história da Matemática que uma área fora achada pelo inverso do que se chama de derivação, embora a possibilidade de usar tal processo evidentemente fosse conhecido por Barrow e Gregory, e talvez por Torricelli e Fermat (p. 273). A grande realização de Newton nesse período foi ligar esses dois problemas: quadratura por meio de séries infinitas e taxas de variação, que pode ser considerado o estágio embrionário do TFC.

Além do problema de quadratura utilizando séries infinitas, Newton estudou a taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, mais tarde denominada de fluentes, por exemplo, comprimentos, áreas, volumes e outras grandezas, em sua obra conhecida como *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, escrita em 1671.

Newton utilizou-se da seguinte notação em seus trabalhos:

- $a, b, c, \dots$  – representavam constantes;
- $x, y, z, \dots$  – variáveis denominadas fluentes;
- $\dot{x}, \dot{y}, \dots$  – fluxo ou fluxão referente às variáveis  $x, y, \dots$  ;
- $o$  – quantidade ou acréscimo infinitamente pequeno;
- $\dot{x}o$  – acréscimo da variável  $x$ .

De maneira semelhante aos seus predecessores como Galileu, Torricelli e outros, que realizaram estudos do movimento, Newton interpretou uma curva como o movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. O autor denominou uma dessas quantidades variáveis de “fluentes” como quantidades que “fluem” crescentemente ao longo do tempo e “fluxões”, como a taxa de variação, ou fluxo dessa grandeza. Por exemplo, se o fluente como a ordenada do ponto gerador era indicado por  $y$ , o fluxo desse fluente era denominado por  $\dot{y}$ . Em notação moderna, esse fluxo equivale a  $dy/dt$ , em que  $t$  representa o tempo.

Newton utilizou-se como ferramenta matemática para o método da integração as séries infinitas, assim como fizeram Torricelli e Leibniz.

Em 1666, Newton elaborou um tratado no sentido de procurar resolver diversos problemas do Cálculo, tais como quadratura de curvas, traçado de tangentes e retificação de arcos, tendo como base a geração de curvas por movimentos.

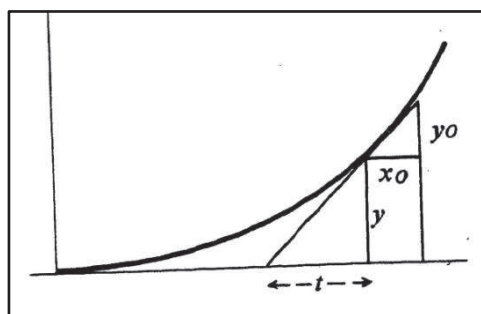
Pode-se salientar, segundo Baron e Bos (1985), que a preocupação de Newton era estabelecer regras, fórmulas, algoritmos que possibilitassem a integração e a derivação no sentido de facilitar a resolução de problemas que envolvessem tais conceitos.

Após reconhecer que os problemas de derivação e integração são inversos entre si, Newton formulou no tratado de 1671 os dois problemas correspondentes:

1. Dada a relação mútua entre as quantidades fluentes, determine as relações entre os fluxões.
2. Quando for exibida uma equação que envolva os fluxões das quantidades, determine a relação das quantidades entre si.

Para resolver o problema 1 apresentado anteriormente, tem-se a relação entre os fluentes  $x$  e  $y$ , e deseja-se obter uma relação entre esses fluentes e seus fluxos. Geometricamente, o método utilizado por Newton de traçar tangentes a curvas foi usar a relação  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{y}{t}$ , em que  $f(x, y) = 0$  e a equação da curva e  $t$  a subtangente e as expressões  $f_x$  e  $f_y$  correspondem as derivadas parciais de  $f(x, y)$ .

**Figura 36** – Método utilizado por Newton



Fonte: Baron e Bos, 1985, v. 3, p. 36

Como exemplo, considere-se a curva cúbica  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ . Esta equação apresenta a relação existente entre as quantidades fluentes (no caso  $x$  e  $y$ ). Para Newton encontrar a relação entre os seus fluxões, inicialmente faz-se a substituição de  $x$  por  $x + \dot{x}o$  e de  $y$  por  $y + \dot{y}o$ , em que tem-se:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - ax^2 - 2ax(\dot{x}o) - a(\dot{x}o)^2 + axy + ay(\dot{x}o) \\ + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) + ax(\dot{y}o) - y^3 - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0 \end{aligned}$$

Considerando que  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  e desprezando os termos em que o apresenta expoente maior ou igual a dois, dividindo-se tudo por  $o$  tem-se:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

Reordenando os termos algébricos, obtém-se a seguinte relação entre os fluxos:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Essa igualdade corresponde ao processo de derivação e as expressões  $3x^2 - 2ax + ay$  e  $3y^2 - ax$  correspondem, respectivamente, às derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$ , respectivamente.

Para a solução do segundo problema, e a partir da relação entre os fluxões obter a relação entre os fluentes, pode-se considerar em grande medida que o raciocínio utilizado por Newton levou-o ao desenvolvimento do que viria a se tornar o Teorema Fundamental do Cálculo, no qual se buscou relacionar os problemas de derivação e integração.

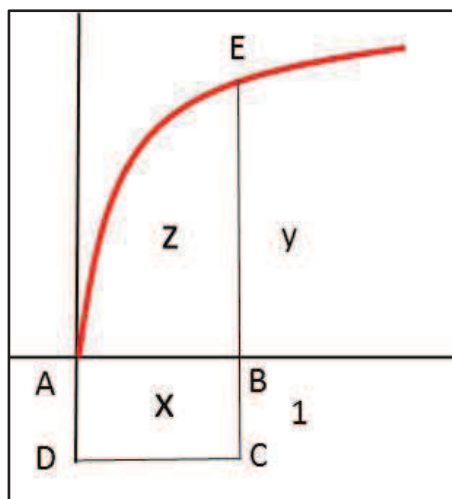
Anteriormente a Newton, foram empregadas técnicas da determinação de uma área como limite da soma de quantidades infinitamente pequenas ou elementos indivisíveis de área.

Em combinação com o estudo dos fluxões, observa-se que Newton pela primeira vez reconheceu a natureza precisa da relação inversa entre os problemas de tangente e de área, e o fato de ambos os problemas se tratar de um único ente matemático. Newton introduziu uma técnica diferente. Primeiro ele determinou a taxa

de variação da área solicitada (em relação a  $x$ ), e então calculou a área pelo processo inverso da derivação.

De acordo com a figura a seguir, Newton pensou na região limitada  $ABE$  como gerada pelo movimento de  $x$  e  $y$ , e consequentemente que a área  $ABE$  era originada pelo deslocamento do movimento da ordenada  $BE$ , que se move com velocidade unitária  $\dot{x} = 1$ . O autor considerava que a razão dos fluxões das áreas da região  $ABE$  e do retângulo  $ABCD$  estava para razão entre as ordenadas  $BE$  e  $BC$ . Em outras palavras:

**Figura 37** – O Teorema Fundamental do Cálculo segundo Newton



Fonte: Autor, 2012

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{y}{x}$$

Sendo  $y = f(x)$  e considerando  $x = 1$  consequentemente  $\dot{x} = 1$  – pois Newton considerava que a ordenada  $BE$  se movimentava com velocidade constante – tem-se que:

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = f(x)$$

Essa equação traduz em parte o que consiste o TFC, pois, em notação moderna, se  $A(x)$  representa a área sob  $y = f(x)$  de 0 a  $x$ , então  $dA/dx = f(x)$ .

Newton observa que a área  $z$  pode ser encontrada explicitamente da equação  $\dot{z}/\dot{x}=y$ .

Para  $\dot{x} = 1$  conclui-se que a taxa com que varia a área  $z$  é igual ao valor da ordenada de  $f(x)$ .

Com esses dois problemas resolvidos, Newton foi capaz de compreender a relação recíproca existente entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes na linguagem geométrica, e na linguagem algébrica ele traduziu a reciprocidade entre as variáveis fluentes e os fluxões.

Os trabalhos de Newton podem ser considerados como a descoberta do TFC de maneira explícita, entretanto pode-se destacar que suas principais obras *De analysi* e *Principia*, contém conceitos cujo significado carecia de rigor, como fluxões, fluentes, além da utilização de uma notação muito específica, pois a obra *Principia*, por exemplo, aplicava a geometria ao estudo do sistema solar, apresentando poucos termos adotados no Cálculo, dado que se tratava de uma obra da aplicação da Matemática no estudo da mecânica celeste.

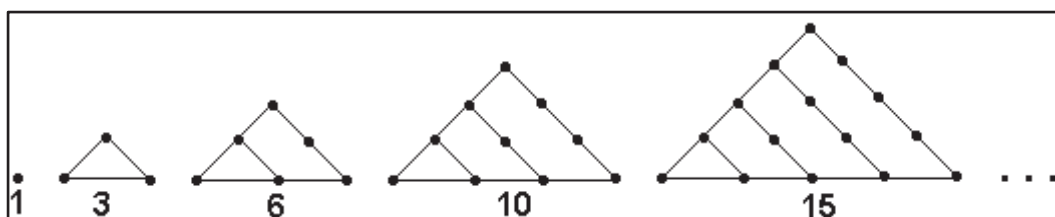
Outro autor que de forma independente desenvolveu o Cálculo e apresentou uma nova linguagem e simbologia será exposto no próximo item.

### 3.3.2 – Gottfried Wilhelm Leibniz

Assim como Newton teve como referências em seus estudos os trabalhos de Galileu e Isaac Barrow, em contrapartida o filósofo e matemático alemão Leibniz (1646-1716) interessou-se pelas obras do matemático francês Blaise Pascal. Durante sua viagem a Paris, ele se deparou com um problema que culminou em 1675 no que pode ser considerado como a “descoberta” do TFC, observando de maneira peculiar a relação existente entre os problemas de quadratura e tangentes, culminando consequentemente com o desenvolvimento das operações de integração e derivação.

De acordo com Baron e Bos (1985), em 1672 o matemático inglês Huygens pediu a Leibniz que resolvesse o problema de somar séries cujos termos são os valores recíprocos dos números triangulares. Os números triangulares são definidos como os números 1, 3, 6, 10, 15, ... e representados geometricamente conforme a figura a seguinte:

Figura 38 – Números Triangulares



Fonte: Autor, 2012

Esses números são um exemplo dos denominados “números figurativos” estudados por Pitágoras e constituem uma das primeiras formas da união entre a aritmética e a geometria. Algumas propriedades geométricas e aritméticas podem ser demonstradas com essa sequência. O termo geral dos números triangulares pode ser obtido como a soma dos  $n$  primeiros números naturais, visto que  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3 = 1 + 2$ ,  $a_3 = 1 + 2 + 3, \dots$ ,  $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ .

Huygens pediu para Leibniz somar a série dos termos recíprocos dos números triangulares. Os termos recíprocos são os números do tipo  $1/a_n$ , sendo  $a_n$  um número triangular, com  $n \in \mathbb{N}^*$ . Sendo assim tem-se a série:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r(r+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{2}{r(r+1)} + \dots$$

Entretanto, na tentativa de resolução desse problema, Leibniz, de modo particular, estudou as denominadas sequências de diferenças, que podem ser assim definidas: dada uma sequência  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  define-se a sequência  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  em que  $b_1 = a_1 - a_2$ ,  $b_2 = a_2 - a_3$ ,  $b_n = a_n - a_{n+1}$ , e assim por diante. Leibniz observou que:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$$

Sua descoberta reside no fato de que a soma de uma sequência finita de diferenças pode ser obtida facilmente por um resultado dado também por uma diferença, e esse resultado só depende dos valores dos termos final e inicial da sequência destacada.

Essa ideia da soma foi aplicada por Leibniz ao problema proposto por Huygens. Sendo a sequência cujo termo geral é dado por  $\frac{2}{r(r+1)}$ , pode ser considerada uma sequência de diferenças da sequência dos números  $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots$  pois  $\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}$ . Esse brilhante raciocínio utilizado por Leibniz possibilitou deduzir a soma da sequência de uma série infinita. Portanto, chega-se ao seguinte resultado para o problema proposto por Huygens, na notação atual, em que Leibniz percebeu que se  $n$  for muito grande, conforme descrito a seguir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r(r+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1} \right) = 2 - \frac{2}{n+1} = 2$$

Leibniz utilizou também esse raciocínio para deduzir alguns resultados interessantes no chamado triângulo harmônico, o qual foi obtido a partir do triângulo de Pascal, também denominado triângulo aritmético ou triângulo de Pascal, em que os números binomiais  $\binom{n}{k}$  são escritos da seguinte maneira:

### ***Triângulo de Pascal***

|     |     |     |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1   |     |     |     |     |     |     |      |
| 1   | 1   |     |     |     |     |     |      |
| 1   | 2   | 1   |     |     |     |     |      |
| 1   | 3   | 3   | 1   |     |     |     |      |
| 1   | 4   | 6   | 4   | 1   |     |     |      |
| 1   | 5   | 10  | 10  | 5   | 1   |     |      |
| 1   | 6   | 15  | 20  | 15  | 6   | 1   |      |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .... |

No triângulo aritmético, algumas propriedades podem ser enunciadas:

- Em qualquer linha, a partir da segunda, dois números equidistantes dos extremos são iguais;
- A soma de todos os números da linha  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  é  $2^n$ ;



- A soma dos  $n$  primeiros números de uma determinada coluna é igual ao número localizado na próxima linha e na próxima coluna;

- A soma dos  $n$  primeiros números de uma diagonal paralela ao lado oblíquo do triângulo é igual ao número localizado abaixo da última parcela.

Leibniz construiu o triângulo harmônico a partir do triângulo aritmético em que os números do tipo  $\left[ \frac{1}{(n+1) \cdot \binom{n}{k}} \right]$  são dispostos da seguinte maneira:

### ***Triângulo harmônico***

|               |                |                 |                 |                 |                |               |      |
|---------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------|------|
| $\frac{1}{1}$ |                |                 |                 |                 |                |               |      |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  |                 |                 |                 |                |               |      |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$  | $\frac{1}{3}$   |                 |                 |                |               |      |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$  | $\frac{1}{4}$   |                 |                |               |      |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$  | $\frac{1}{20}$  | $\frac{1}{5}$   |                |               |      |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{60}$  | $\frac{1}{60}$  | $\frac{1}{30}$  | $\frac{1}{6}$  |               |      |
| $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{140}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{7}$ |      |
| ...           | ...            | ...             | ...             | ...             | ...            | ...           | .... |

Uma propriedade importante observada por Leibniz é que toda sequência dos termos na diagonal é a sequência das diferenças da diagonal situada acima; cada elemento localizado em uma coluna consiste nas diferenças dos elementos na coluna da esquerda, e assim por diante, de tal modo que todas as espécies de fórmulas sobre a adição podem ser obtidas diretamente pela diferença entre o primeiro e o último elemento da sequência que gerou tais diferenças. Se, por exemplo, tivermos relativamente à segunda coluna:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

A soma dos termos de cada coluna, a partir do primeiro termo pode ser dada por:

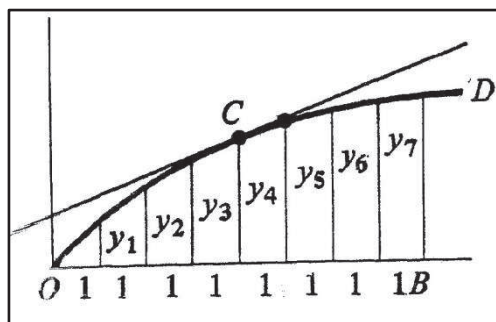
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{7} &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

O estudo sobre séries de seqüências das diferenças levou Leibniz ao seguinte raciocínio: somar os termos da seqüência e tomar as suas seqüências de diferenças são operações mutuamente inversas em um certo sentido.

Munido dessas ferramentas Leibniz passou a tratar dos problemas de quadratura e tangentes. Inicialmente, a percepção de Leibniz sobre somas e diferenças de séries como operações inversas estava ligada ao domínio aritmético. A expansão dos seus resultados tornou-se cada vez mais significativa para o desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo, quando ele estendeu suas ideias para o campo geométrico. Leibniz relacionou suas conclusões sobre séries para os problemas de quadratura, assim como Cavalieri e outros matemáticos o fizeram, em que a área da região limitada sob uma curva pode ser dada pela soma de uma seqüência de ordenadas equidistantes.

Um exemplo, segundo Baron e Bos (1985), na figura seguinte mostra que, se a distância entre as ordenadas é igual a 1, então a soma das ordenadas é aproximadamente igual à área da curva. As diferenças das ordenadas consecutivas na seqüência dão aproximadamente o declive das tangentes. Se a unidade 1 escolhida fosse menor, as aproximações da área e do declive da tangente tornar-se-iam exatas.

**Figura 39** – Quadratura e tangente (Leibniz)

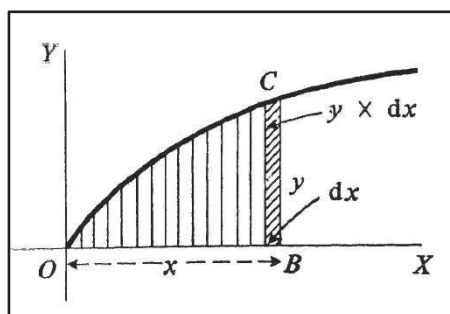
Fonte: Baron e Bos, 1985, v.3, p. 46

Leibniz fez uma analogia dos resultados aritméticos e geométricos da seguinte maneira: a adição dos termos das sequências corresponderia à quadratura das curvas, ou seja, calcular áreas, enquanto efetuar as diferenças corresponderia à determinação das tangentes.

Nesse sentido, Leibniz chegou à conclusão que as determinações de áreas e de tangentes também são operações inversas entre si. Essas relações podem ser utilizadas criando-se um método nas resoluções de problemas sobre quadraturas de curvas em geral.

Leibniz considerou a curva como um polígono com infinitos lados, em cada ponto de intersecção de cada ordenada  $y$  é desenhada no eixo. As diferenças infinitesimais das ordenadas serão designadas por  $dy$  e, sendo a soma das infinitas ordenadas  $\int y$ , tem-se que  $\int dy = y$  assim como  $d \int y = y$ .

Geometricamente, a soma ou integral,  $\int y dx$  é a soma dos retângulos infinitamente pequenos  $y dx$ ; portanto  $\int y dx$  é a área da curva  $y(x)$ .

**Figura 40** – Integral segundo Leibniz

Fonte: Baron e Bos, 1985, v.3, p. 60

O diferencial da área OCB (a diferença de dois valores consecutivos daquela área) e o retângulo  $ydx$  na extremidade direita na linguagem usual pode ser dado por:

$$d \int ydx = ydx$$

O que mostra a relação inversa entre  $d$  e  $\int$ .

Reciprocamente:

$$\int dy = y$$

que é imediatamente evidente.

Cabe ressaltar que Leibniz era muito rigoroso no que diz respeito às notações. Ele utilizou o símbolo  $\int$  para indicar soma de quantidades contínuas e  $d$  para representar diferenças.

Dessa forma, surgiria ali, por meio de demonstrações no domínio aritmético, a importante relação entre os problemas de quadratura de curvas e a determinação de tangentes.

Leibniz mostrou essas ideias de uma maneira mais explícita em 1693 em seu trabalho *Acta Eruditorum* da seguinte maneira: “que o problema geral de quadraturas pode ser reduzido em encontrar a curva que tem uma dada lei de tangência” (Katz, p. 529 – tradução nossa). Como ele demonstrou se, dada uma curva, em que cada ponto possui como coordenadas  $(x, y)$  com ordenadas  $y$ , pode-se encontrar a curva  $z$  tal que  $dz/dx = y$  (uma curva com uma dada lei de tangência), então  $\int ydx = z$ , ou em moderna notação, considerando  $z(0) = 0$ :

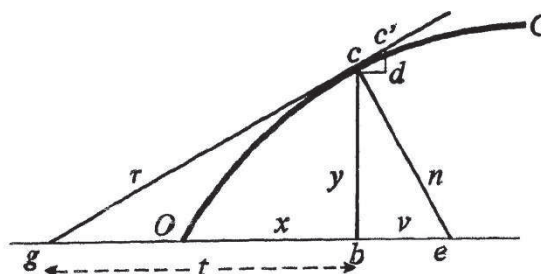
$$\int_0^b ydx = z(b)$$

Com isso, segundo Baron e Bos (1985), apesar de estar indefinida, a ideia de um cálculo de diferenças infinitamente pequenas e de somas de sequências de

ordenadas que servisse para resolver os problemas de quadraturas e de tangentes, a reciprocidade foi reconhecida.

### 3.3.2.1 – Leibniz e o “triângulo característico”

Depois do sucesso dos seus resultados sobre a soma de sequência e o cálculo de suas diferenças, relacionados com os problemas de quadratura e tangentes, Leibniz, aconselhado por Huygens, estudou as obras de Descartes, Sluse, Pascal, Gregory e outros importantes matemáticos, no intuito de compreender outros conceitos estudados anteriormente sobre o cálculo infinitesimal. Um conceito que despertou o interesse de Leibniz diz respeito ao “triângulo característico”, cujas ideias encontram-se nos trabalhos de Pascal em problemas ligados a círculos. Leibniz inventou o termo “característico” e sua intenção era utilizá-lo no estudo de curvas quaisquer, obtendo-se assim um método mais geral. Uma descrição do triângulo característico é dada por Baron e Bos (1985) a seguir:



Seja na figura acima uma curva arbitrária  $OcC$ ,  $\tau = cg$  uma tangente em  $c$  e  $n = ce$  a normal em  $c$ . Tome ainda  $c'$  na tangente perto de  $c$ , tal que, numa boa aproximação,  $cc'$  possa ser considerado coincidente com a curva. O triângulo pequeno  $cdc'$  é o “triângulo característico” em  $c$ . Sendo os triângulos semelhantes  $cde$  e  $gbc$ , teremos:

$$cd:dc':ccl' = y:v:n = t:y:\tau \quad (\text{BARON e BOS, 1985, v.3, p. 47}).$$

## 3.4 - Cálculo com rigor

Após a publicação dos trabalhos de Newton e Leibniz sobre suas descobertas referentes à relação recíproca realizada de forma independente, alguns termos tais como diferencial, infinitamente pequeno, fluxões, empregados na

construção e fundamentação dos resultados passaram a sofrer críticas e questionamentos em virtude da falta de consistência e dificuldade de compreensão. Dentre os críticos destaca-se o bispo George Berkeley (1685 – 1753), que em seus trabalhos mostrou que os princípios utilizados no Cálculo necessitavam de maior clareza e segurança, carecendo de um entendimento real dos seus fundamentos e indicando inconsistências nos conceitos criados por Newton e Leibniz.

Como exemplo desses questionamentos referentes aos métodos empregados nas deduções de alguns resultados, Berkeley critica o fato de Newton utilizar uma quantidade infinitamente pequena denominada por ele de  $o$  em suas deduções, considerada diferente de zero (ao dividir uma expressão) por ele  $e$ , depois, considerada igual a zero, em que são anulados os termos com potências de  $o$ . Como um termo pode não ser  $e$  ao mesmo tempo ser considerado nulo?

É de supor que Newton estivesse tomando o termo  $o$  como um infinitésimo, que é uma quantidade menor que qualquer número sem ser igual a zero.

Observou-se com isso a falta de ferramentas que permitissem uma fundamentação mais rigorosa para o Cálculo, pois muitos conceitos elaborados até então, como infinitamente pequenos, limite, continuidade, foram elaborados e influenciados por uma intuição geométrica.

Conforme afirmava Poincaré (1995), a intuição não pode dar o rigor, nem mesmo a certeza, e que em muitas situações se é levado a conclusões errôneas. Para o autor, a questão do rigor aparece como uma “evolução” do raciocínio científico que deve ser realizada na construção do conhecimento por meio de um instrumento da demonstração, utilizando-se das leis da Lógica.

Além do ponto de vista de Poincaré, neste trabalho vai-se também apropriar do conceito de rigor, segundo Reis (2001), que considera tal conceito como um refinamento ou conceptualização das intuições, em um processo de “cristalização” do conhecimento. Para o autor, o rigor pode ser concebido como uma grandeza que varia em função da intuição, sendo esta última uma variável independente, enquanto o rigor é uma variável dependente.

Pode-se destacar que vários matemáticos já apontavam para a necessidade do rigor no Cálculo no século XVIII, como Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), que procurou banir a intuição da análise, além de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que buscou romper com as ideias intuitivas e estabelecer padrões de rigor mais elevados para a Matemática.

Essa preocupação com o rigor do Cálculo nesse período não se concretizou, fruto do uso excessivo das manipulações algébricas efetuadas pelos matemáticos guiados pela intuição geométrica, e o que se observou foi que o modelo geométrico começava a apresentar falhas, o que não contemplava muitos conceitos matemáticos que necessitavam de uma fundamentação.

No entanto, no século XIX o corpo da análise sedimentou-se com o estabelecimento do conceito de limite, e os resultados passaram a ser fundamentados não mais pela ideia das quantidades infinitamente pequenas, mas pelo significado do conceito de limite, solucionando em parte os problemas existentes até então.

Com isso, em 1821 o matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) desenvolveu um novo enfoque do Cálculo, percebendo a necessidade de uma fundamentação universal e rigorosa, passando a construir os principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral por meio da noção de limite de uma função.

Em sua obra *Cours D'Analyse* (1821) Cauchy apresenta o conceito de integração, definindo-a não mais como o inverso de derivação, mas considerando-a uma somatória quando o número tende a um limite. O autor foi responsável, a partir dessa definição, por criar uma teoria de integração separadamente da derivação.

Consequentemente, o Teorema Fundamental do Cálculo, que mostra a relação entre as operações de integração e diferenciação, passa a ser provado por Cauchy. A demonstração dada por Cauchy, segundo a tradução feita por Baron e Bos (1985), pode ser expressa a seguir:

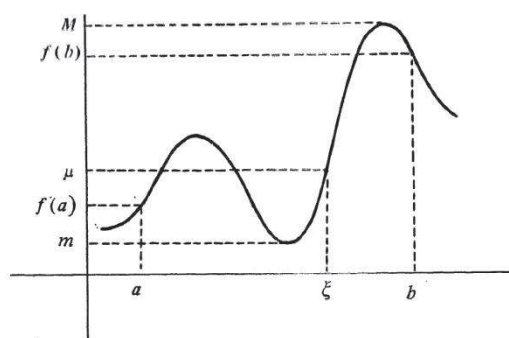
Se um dos dois limites da integral definida  $\int_{x_0}^x f(x)dx$ , digamos, a quantidade  $X$ , puder variar, a própria integral variará com esta quantidade. E, se substituirmos o limite  $X$ , que se tornou variável, por  $x$ , teremos uma nova função de  $x$ , que é chamada uma integral da origem  $x = x_0$ . Seja:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx \quad (1)$$

essa nova função.

Agora Cauchy emprega o seguinte teorema: se  $f$  é uma função no intervalo  $[a, b]$ , existe um valor  $\xi$  no intervalo, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$$



(BARON e BOS, 1985, v. 4, p. 52).

De acordo com Baron e Bos (1985), Cauchy realizou a seguinte demonstração:

$M$  e  $m$  são, respectivamente, o valor máximo e mínimo que  $f$  assume no intervalo,  $\int_a^b f(x)dx$  é a área sob a curva. Logicamente

$$(b - a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)M.$$

Portanto, deve existir um valor  $\mu$  entre  $m$  e  $M$ , tal que

$$f(\xi) = \mu \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi). \quad (2)$$

Como  $a \leq \xi \leq b$ , podemos dizer que  $\xi = a + \theta(b - a)$ , para algum número  $\theta$  entre 0 e 1. Esta é a forma como Cauchy usa o teorema. Ele descobre que

$$F(x + \alpha) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^x f(x)dx = \int_x^{x+\alpha} f(x)dx$$

e, aplicando o teorema (2),

$$F(x + \alpha) - F(x) = \alpha f(x + \theta\alpha)$$

Ele conclui:

[...] segue-se que, se a função  $f(x)$  é finita e contínua, nas vizinhanças de um valor determinado da variável  $x$ , a nossa função  $F(x)$  será contínua e finita nas vizinhanças desse valor, já que um acréscimo infinitamente pequeno em  $x$  ocasionará um acréscimo infinitamente pequeno em  $F(x)$ . Assim, se a função  $f(x)$  é finita e contínua, de  $x = 0$  a  $x = X$ , o mesmo podemos dizer da função  $F(x)$ . Além disso, se dividirmos ambos os lados de (3) por  $\alpha$  e tomarmos os limites, obteremos  $F'(x) = f(x)$  (4). Assim, a integral (1), considerando como função de  $x$ , tem derivada a função  $f(x)$ , que está sob o sinal  $\int$  na integral. (BARON e BOS, 1985, v. 4, p. 53).

Enquanto Newton e Leibniz provaram a relação recíproca entre integração e derivação baseando-se na geometria, Cauchy lançou mão para demonstrar o TFC no conceito de limite.

Pode-se considerar, entretanto que a Análise desenvolvida por Cauchy estava ainda muito impregnada da intuição geométrica e o conceito de limite deveria



ser desenvolvido apenas por meio da aritmética, sem usar a geometria como fio condutor.

O matemático alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897) possui o mérito de tentar fundamentar o Cálculo por meio do sistema dos números reais, buscando apresentar uma definição “topológica” para o conceito de limite. Ele passou a defender um programa em que os números reais seriam uma estrutura interna, e não grandezas intuitivamente dadas, sendo considerado um sistema rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na Análise inspirasse segurança.

Weierstrass publicou em seus trabalhos um exemplo de uma função contínua e não derivável em uma infinidade de pontos, o que corresponde a uma curva contínua que não admite tangente em nenhum de seus pontos. Esse exemplo contrariava a intuição geométrica em que se baseou o conceito de limite elaborado por Cauchy, o que demonstrou a necessidade de um entendimento mais profundo para os fundamentos da Análise.

Esse período de fundamentação da Análise por meio do sistema dos números reais foi denominado *Aritmetização da Análise*, e o século XIX passou a ser conhecido como o século do rigor.

Cabe ressaltar que o conceito de rigor mudou com o tempo e com a Aritmetização da Análise atingiu um novo patamar com o refinamento de vários conceitos concebidos até então com a influência da intuição geométrica.

No final do século XIX, Richard Dedekind (1831 – 1916) observou, de maneira análoga a Weierstrass, que, em virtude da definição de proporções dada por Eudoxo, a Matemática passou a ser revestida e a se destacar como a geometria, constituindo o modelo geométrico um modelo contínuo.

Entretanto, Dedekind, ao tentar demonstrar um teorema de Cálculo, percebeu que o modelo geométrico não dava conta e satisfaria suficientemente, procurando encontrar um modelo numérico que além da densidade apresentasse todas as características geométricas. Inicialmente, ele percebeu que, mesmo apresentando a propriedade da densidade, o conjunto dos números racionais não formava um *continuum* tal como apresentava o modelo geométrico. Efetuando um procedimento hoje conhecido como *cortes de Dedekind*, estabeleceu-se o completamento do conjunto dos racionais construindo o corpo dos números reais.

Por outro lado, o matemático alemão Georg Cantor (1845 – 1918) construiu o conjunto dos números reais partindo da ideia das sequências de Cauchy, fundamentando-se na teoria dos conjuntos.

### 3.5 – Considerações Parciais

É pertinente analisar alguns aspectos relacionados aos trabalhos de Newton e Leibniz, no que diz respeito à descoberta da relação entre os problemas de quadratura e o traçado de tangentes e o legado deixado por essas descobertas no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Newton preocupou-se em reconhecer a necessidade de um tratamento sistemático com o objetivo de estabelecer uma estrutura unificada destinada à resolução dos problemas relacionados às curvas, pois seus predecessores, como Fermat e Wallis, entre outros, desenvolveram métodos muito restritos.

Tanto Newton quanto Leibniz possuem o mérito de reconhecerem a relação inversa existente os problemas de quadratura e traçado de tangentes às curvas em um ponto, estabelecendo o conceito de que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra, o que constitui a ideia central do TFC.

Convém destacar que alguns antecessores como Torricelli e Barrow, já apresentavam alguns resultados do que se constituiria posteriormente o TFC, mas Newton e Leibniz passaram dos problemas de quadratura e traçado de tangentes concomitantemente.

Uma característica peculiar dos resultados de Leibniz foi o seu apelo ao simbolismo e uso de uma notação que posteriormente passou a ser usada e adotada por outros matemáticos, como os símbolos  $dx$  e  $dy$  para diferenciais e  $\int$  para integrais.

Newton apresentou em seus trabalhos uma linguagem e uma notação mais sintética, como os termos “fluxão”, “fluente”, e o símbolo usado para o fluxo de uma quantidade  $\dot{x}$  passou a ser utilizado pelo próprio Newton.

O interesse particular por Leibniz de criar uma notação própria é uma característica reiterada pelos intuicionistas, que defendiam a existência dos objetos matemáticos somente a partir do instante em que se pudessem “transitar” por meio de uma linguagem própria.

Quanto à representação das variáveis, percebe-se uma distinção dos pontos de vista de Newton e Leibniz. O primeiro considerava uma curva como um movimento contínuo gerado pelas coordenadas  $x$  e  $y$ , o que demonstra o forte apelo à geometria e ao mundo físico como forma de intuir suas descobertas e resultados. O autor considerava que as variáveis dependiam do tempo. Por seu turno, Leibniz considerava que as variáveis percorriam sequências infinitamente próximas.

No tocante ao estabelecimento do TFC, Leibniz intuiu a relação inversa entre as operações de derivação e integração fazendo uma analogia entre somar os termos da sequência e tomar as suas diferenças.

Diante dos resultados obtidos na revisão bibliográfica, bem como a análise da gênese e do desenvolvimento dos principais conceitos relacionados ao TFC, sob o ponto de vista da intuição segundo Poincaré (1995) e Fischbein (1987), o próximo capítulo tem como finalidade apresentar a metodologia que será empregada na presente pesquisa, assim como descrever os procedimentos metodológicos para a construção da intervenção de ensino.

## CAPÍTULO IV

“O pensamento é apenas um lampejo entre duas longas  
noites, mas esse lampejo é tudo.”  
HENRI POINCARÉ

---

### CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA

O presente capítulo abordará a metodologia empregada nesta pesquisa, bem como serão descritos os procedimentos metodológicos adotados, com o objetivo de auxiliar a responder ao seguinte questionamento:

- Uma intervenção de ensino baseada nos princípios da intuição contribui na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação-problema que propicie emergir e evidenciar tais relações?

Ao procurar responder essa questão, deseja-se também avaliar qual o alcance que uma intervenção desse tipo traz para o ensino e aprendizagem do TFC.

Com isso, para refinar e aprimorar algumas ideias e conjecturas na elaboração da intervenção de ensino, foi realizado inicialmente um questionário piloto e, de acordo com os resultados obtidos com algumas hipóteses efetuadas na revisão bibliográfica bem como no contexto histórico, serão construídas as tarefas que compõem tal intervenção.

Todos os elementos que constituem o instrumento de coleta de dados serão descritos a seguir segundo a metodologia e procedimentos metodológicos que foram adotados.

#### 4.1 – Pesquisa Qualitativa

As características deste trabalho basearam-se nos fundamentos de Creswell (2010), e ele constitui-se do tipo qualitativo em virtude de suas especificidades no tocante às estratégias de investigação e análise de dados que serão efetuadas. Tais especificidades e características serão analisadas e discutidas a seguir.

No cenário das pesquisas em Educação Matemática, observa-se de modo geral um volume significativo de pesquisas qualitativas. Para Ludke e André (2011), é cada vez mais evidente o interesse que os pesquisadores da área de educação

vêm demonstrando pelo uso das metodologias qualitativas. Bogdan e Biklen (1994) reiteram o fato afirmando que a influência dos métodos qualitativos no estudo de várias questões educacionais é cada vez maior. Segundo os autores, muitos dos investigadores educacionais manifestam uma atitude positiva em face das mudanças verificadas nas estratégias de investigação, contemplando a abordagem qualitativa tanto em nível pedagógico como em nível de condição da investigação.

Esse fato pode ser explicado em grande medida por algumas características peculiares desse tipo de pesquisa, por exemplo, a flexibilidade quanto aos métodos e procedimentos adotados, que podem variar de acordo com as estratégias empregadas pelo pesquisador.

Creswell (2010, p.26) sustenta que: “a pesquisa qualitativa pode ser compreendida como um meio de explorar e entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano”. Para o autor, uma forma de caracterizar uma pesquisa qualitativa e diferenciá-la da pesquisa quantitativa é a sua estruturação se basear em termos do uso de palavras em vez de números, assim como o uso de questões dissertativas em contrapartida de questões do tipo fechada, como testes de múltipla escolha.

Entretanto, essa diferenciação pode ser feita apenas em uma análise preliminar e superficial. A pesquisa qualitativa possui algumas características peculiares que as diferenciam dos outros tipos de pesquisa. Em um primeiro momento, essa diferença pode ser explicada segundo Bicudo (2006):

No senso comum, o qualitativo é entendido como o oposto ao quantitativo. Um falando de qualidade e tendo a ver com o subjetivo, com o sentimento, com opiniões acerca das coisas do mundo. O outro, quantificando aspectos objetivos sobre essas mesmas coisas (BICUDO, 2006, p. 101).

No entanto, ao se buscarem explicações que vão além do senso comum, a referida autora procura um campo de significados para os termos quantitativo e qualitativo. O primeiro é descrito por Bicudo (2006) da seguinte maneira:

O *quantitativo* tem a ver com o *objetivo* passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência e da razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa (BICUDO, 2006, p. 105).

Quanto ao enfoque do significado do termo qualitativo, a autora coloca que:

O *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essas concepções de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão ao vermelho, etc. (BICUDO, 2006, p. 106).

Com isso, uma característica marcante da pesquisa qualitativa, segundo a autora, são as estratégias de pesquisa que privilegiam descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas aos questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, entre outras. Essas estratégias possuem o objetivo de atingir aspectos do ser humano sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de método previamente definido e, portanto, sem ficar preso a quantificadores e aos cálculos decorrentes.

Para Creswell (2010), outra característica da pesquisa qualitativa diz respeito à função de o pesquisador procurar estabelecer o significado de um fenômeno a partir dos pontos de vista dos participantes por meio de um processo indutivo. Como instrumento de coleta de dados, podem ser utilizados, por exemplo, questões abertas, abordagens emergentes, dados de texto ou imagem, além de entrevistas abertas.

O autor apresenta outras características da pesquisa qualitativa da seguinte maneira:

- Ambiente natural – Os pesquisadores qualitativos tendem a coletar dados no campo e no local em que os participantes vivenciam a questão ou problema que está sendo estudado. [...] Esse fechamento de informações coletadas por meio da conversa direta com as pessoas e da observação de como elas se comportam e agem dentro do seu contexto é uma característica importante da pesquisa qualitativa. No ambiente natural, os pesquisadores têm interações face a face no decorrer do tempo.
- O pesquisador como instrumento fundamental – Os pesquisadores qualitativos coletam pessoalmente os dados por meio de um exame de documentos, de observação de comportamento ou de entrevista com os participantes. Eles podem utilizar um protocolo – instrumento para a coleta de dados – mas são eles próprios

que coletam as informações. Não tendem a usar ou se basear em questionários ou instrumentos desenvolvidos por outros pesquisadores.

- Múltiplas fontes de dados – Os pesquisadores qualitativos geralmente coletam múltiplas formas de dados, tais como entrevistas, observações e documentos, em vez de confiarem em uma única fonte de dados. Depois os pesquisadores examinam todos os dados, extraem sentido deles e os organizam em categorias ou temas que cobrem todas as fontes de dados.
- Significado dos participantes – Em todo o processo de pesquisa qualitativa, o pesquisador mantém um foco na aprendizagem do significado que os participantes dão ao problema ou questão, e não ao significado que os pesquisadores trazem para a pesquisa ou que os autores expressam na literatura.
- Interpretativo – A pesquisa qualitativa é uma forma de investigação interpretativa em que os pesquisadores fazem uma interpretação do que enxergam, ouvem e entendem. Suas interpretações não podem ser separadas de suas origens, história, contextos e entendimentos anteriores.

Resumidamente pode-se destacar, segundo as características descritas pelo autor anteriormente, que na pesquisa qualitativa o pesquisador possui o contato direto com o ambiente e os sujeitos da pesquisa, e os dados coletados são predominantemente descritivos por meio de questionários, entrevistas, entre outros instrumentos, cujo objetivo do pesquisador é procurar compreender por meio dos dados o significado expresso pelos participantes. O pesquisador nesse tipo de estudo deve se preocupar como o seu objeto de pesquisa é evidenciado nas atividades elaboradas, dado que a análise e a interpretação dos resultados seguem um processo indutivo, em que se criam categorias de tais resultados obtidos no sentido de se generalizarem estes influenciados por suas concepções.

O método indutivo apresenta algumas características importantes de serem analisadas para uma correta interpretação dos resultados. Para compreender melhor tal situação, faz-se necessário discutir o conceito de indução nas pesquisas científicas. Segundo Marconi e Lakatos (2010):

Indução é um processo mental por intermédio do qual, partindo de dados particulares, suficientemente constatados, infere-se uma verdade geral ou universal, não contida nas partes examinadas. Portanto, o objetivo dos argumentos indutivos é levar a conclusões cujo conteúdo é muito mais amplo do que o das premissas nas quais se basearam (MARCONI e LAKATOS, 2010, p. 68).

Analisando-se a definição anterior percebe-se que por meio do método indutivo obtêm-se conclusões gerais a partir de dados particulares observados e analisados por meio de premissas e afirmações adotadas inicialmente.

Os autores ainda concluem resumidamente que o método indutivo possui como primeiro passo a observação atenta de certos fatos ou fenômenos, e a seguir realiza-se um processo de classificação, ou seja, agrupamento dos fatos ou fenômenos da mesma espécie, segundo a relação constante que se nota entre eles, obtendo-se uma classificação, fruto da generalização da relação observada.

Ainda no tocante às pesquisas qualitativas, Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999) destacam três características essenciais nesses tipos de estudo: visão holística, abordagem indutiva e investigação naturalística. Segundo os autores, a visão holística parte do princípio de que a compreensão do significado de um comportamento ou evento só é possível em função do entendimento das inter-relações que emergem de um dado contexto. Para eles, a abordagem indutiva pode ser definida como aquela em que o pesquisador parte de observações mais livres, deixando que as dimensões e categorias de interesse emerjam progressivamente durante os processos de coleta e análise de dados. Por fim, a investigação naturalística é aquela em que a intervenção do pesquisador no contexto observado é reduzida ao mínimo.

De acordo com as características descritas pelos autores analisados anteriormente, tais como a busca do significado atribuído a um problema dado pelos sujeitos da pesquisa, utilizando-se de um método indutivo e coletando-se os dados no ambiente dos participantes, a abordagem qualitativa será adotada para a presente pesquisa.

Creswell (2010) ressalta ainda que existem basicamente três componentes que diferenciam de maneira mais completa uma pesquisa qualitativa da quantitativa: as concepções filosóficas básicas que os pesquisadores levam para os estudos, as estratégias de pesquisa utilizadas e os métodos específicos empregados na condução dessas estratégias.

Por concepção filosófica Creswell (2010) considera o termo com o significado de “um conjunto de crenças básicas que guiam a ação” (Guba, apud Creswell, 2010, p. 17). O autor considera as concepções filosóficas como uma orientação geral sobre o mundo e sobre a natureza da pesquisa defendidas por um



pesquisador. Tais concepções são moldadas pela área da disciplina do aluno, pelas crenças dos orientadores e dos professores em uma área do aluno e pelas experiências que tiveram em pesquisa.

Essas concepções podem ser compreendidas, segundo afirmações do autor, como as crenças trazidas pela experiência profissional do pesquisador, da área em que ele atua, sua visão a respeito de um determinado problema, bem como das experiências dos sujeitos da pesquisa.

A concepção filosófica adotada nesta pesquisa será a construtivista social, que segundo Creswell (2010) apresenta a ideia de defender suposições de que os indivíduos procuram entender o mundo em que vivem e trabalham. O objetivo da pesquisa de acordo com o autor, segundo essa concepção é se basear o máximo possível nas visões que os participantes têm da situação, a qual está sendo estudada. Para o autor, as questões tornam-se amplas e gerais, para que os participantes possam construir o significado de uma situação caracteristicamente baseada em discussões ou interações com outras pessoas.

A expressão construtivismo social, segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999), serve para distinguir e não gerar confusões com as teorias construtivistas de aprendizagem. Conforme os autores, o construtivismo social enfatiza a intencionalidade dos atos humanos e o “mundo vivido” pelos sujeitos, privilegiando as percepções dos atores.

Esses pressupostos defendidos por essa concepção filosófica serão utilizados nesta pesquisa, pois o objetivo desta é buscar as estratégias adotadas pelos alunos na discussão da resolução de questões abertas sobre alguns tópicos de Cálculo e procurar compreender o significado dado pelos alunos a tais questões.

#### **4.2 – O cenário da pesquisa e os procedimentos metodológicos**

A pesquisa realizou-se em duas fases: na **primeira fase** efetuou-se um questionário-piloto contando com a participação de 14 alunos de uma faculdade pública do Estado de São Paulo. Após a análise dos resultados obtidos, realizou-se a **segunda fase** com uma sequência de ensino envolvendo outros 14 alunos da mesma instituição que não participaram da primeira fase.

Todos os sujeitos envolvidos nas duas fases pertencem à mesma faculdade pública de Tecnologia localizada em uma cidade da região metropolitana do Estado de São Paulo, na qual leciono as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, II e Geometria Analítica, e que possui cursos de graduação em tecnologia nas seguintes modalidades: Polímeros, Logística, Fabricação Mecânica e Informática para Negócios.

Dos 14 alunos que participaram do questionário piloto na **primeira fase**, dez estão regularmente matriculados no curso de Tecnologia em Polímeros enquanto os outros quatro estão matriculados no curso de Tecnologia em Logística.

Todos os participantes do curso de Polímeros concluíram a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I e dentre esses dez alunos participantes quatro deles já concluíram também a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II.

O componente curricular Cálculo Diferencial e Integral I possui uma carga horária semestral de 80 horas-aula (quatro aulas semanais), em que são ministrados os seguintes conteúdos: conjuntos numéricos, funções, limite, continuidade e derivada de uma função, aplicações de derivadas, enquanto o componente Cálculo Diferencial e Integral II possui a mesma carga-horária, apresentando a seguinte ementa: integrais, teorema fundamental do cálculo, aplicações de integral, funções de duas ou mais variáveis, derivadas parciais, aplicações de derivadas parciais, integrais duplas, introdução ao estudo das equações diferenciais.

Por sua vez, os quatro alunos do curso de Logística concluíram Cálculo I e Cálculo II, entretanto a disciplina de Cálculo II possui uma carga horária menor (40 horas-aula), em que o curso aborda o conceito de limites, derivadas, integral e suas aplicações.

Para a **segunda fase** foram convidados 14 alunos oriundos da mesma instituição e que não participaram da primeira fase, e todos estão regularmente matriculados no curso de Tecnologia em Polímeros, cursaram a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I e atualmente cursam Cálculo Diferencial e Integral II.

A **primeira fase** realizou-se no mês de Junho de 2012, em um único encontro para a resolução do questionário-piloto enquanto a **segunda fase** foi realizada nos meses de março e junho de 2013 e constituiu-se de quatro encontros, todos eles efetuados na própria instituição.

De modo geral, os cursos de tecnologia, com duração mínima prevista de três anos, apresentam o perfil de um denominado “curso de serviço”, em que as disciplinas ministradas tais como Cálculo Diferencial e Integral, possuem a característica de não somente discutir o aspecto formal e algorítmico dos conteúdos, mas principalmente apresentar aos alunos suas possíveis aplicações em diversas áreas, com ênfase em tecnologia.

Durante as aulas ministradas por mim de Cálculo Diferencial e Integral II, constatei o hiato existente entre o estudo de derivadas de uma função e integral, dado que esses conteúdos não são conectados e inter-relacionados em nenhum momento, e o TFC simplesmente é tratado como se fosse um algoritmo para se calcular integrais definidas, e sua essência – da ideia de derivação e integração como operações inversas entre si e sob quais condições essa inversão é possível – fica em segundo plano.

Baseado nessa constatação e após a análise da revisão bibliográfica, assim como o estudo da gênese e o desenvolvimento do TFC sob o ponto de vista do referencial teórico adotado, procurou-se inicialmente elaborar um questionário-piloto envolvendo alguns conceitos do Cálculo que auxiliaram na construção de uma sequência didática, cujo objetivo era preencher o abismo existente no ensino e aprendizagem do TFC.

Esse questionário-piloto procurou aferir os procedimentos, estratégias e recursos utilizados pelos alunos, bem como as dificuldades apresentadas na resolução de questões que envolviam alguns tópicos relacionados ao Cálculo, buscando fornecer alguns subsídios para a elaboração da intervenção de ensino em que o uso da intuição foi levado em consideração.

Para a realização do questionário, consultou-se a coordenação dos cursos em que os alunos participantes estão matriculados na faculdade, obtendo-se prontamente a autorização para a realização da pesquisa.

Dessa forma, os alunos foram convidados a participar da pesquisa e um número significativo se interessou em colaborar com tal atividade, que foi realizada em um horário extraclasse para que todos pudessem comparecer. Sendo assim, 14 alunos se prontificaram em responder as questões.

Esses 14 estudantes participantes se organizaram em sete duplas, que se formaram por escolha própria, elas foram convidadas e compareceram em um único encontro que foi agendado previamente. Nesse encontro, os alunos responderam a um questionário-piloto constituído por quatro questões dissertativas. A resolução das questões feita em duplas tem por finalidade gerar discussões entre os alunos de cada dupla a respeito de quais elementos são utilizados e quais as dificuldades encontradas na resolução dessas questões.

Cabe ressaltar que todos os participantes envolvidos na pesquisa provavelmente em nenhum momento foram colocados em situação de resolver esse tipo de tarefa antes, o que constituiu uma experiência inédita para eles.

O questionário-piloto será descrito em seguida, bem como comentadas as resoluções elaboradas pelos alunos.

#### **4.3 – Questionário-Piloto**

Os dados referentes à primeira fase foram coletados por meio de um questionário piloto envolvendo alguns conceitos do CDI. Este questionário constituiu-se de quatro questões dissertativas, respondidas em um único encontro pelos alunos, em que foi solicitado justificar as respostas produzidas.

A análise das resoluções será feita sob as concepções e o ponto de vista da intuição de acordo com Poincaré (1995) e nas classificações das intuições dadas por Fischbein (1987), que servirão como uma lente ou perspectiva teórica na pesquisa, que de acordo com Creswell (2010) proporciona uma visão geral de orientação para o estudo de questões do gênero, classe e raça, analisando-se assim quais aspectos, elementos e estratégias foram utilizados para a resolução.

##### **4.3.1 – A realização**

O encontro realizou-se no mês de junho de 2012, na faculdade localizada na região metropolitana do estado de São Paulo. Todos os alunos que se prontificaram em participar da atividade compareceram conforme combinado por volta das 10 horas. Cada dupla foi designada então para análise pelos códigos **D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>, D<sub>3</sub>,..., D<sub>7</sub>**, assim como as perguntas do questionário piloto foram chamadas de **Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub> e Q<sub>4</sub>**.

Todos os participantes envolvidos no questionário-piloto assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declarando concordar em participar da presente pesquisa, e uma cópia desse termo encontra-se no Anexo A.

Antes de iniciar a sessão de atividades, foi informado aos alunos que eles receberiam uma folha de cada vez com o enunciado das questões, e a resolução seria feita na própria folha recebida; as duplas, ao concluírem a resolução, deveriam chamar o professor para efetuar a entrega e receber a próxima questão. As versões impressas do questionário-piloto encontram-se no Anexo B.

A atividade iniciou-se no dia 16 de junho de 2012 às 10h10min, não havendo nenhuma interrupção durante a sessão; a última dupla concluiu a resolução da última atividade às 12h40min.

#### 4.3.2 – Análise das resoluções – Questão $Q_1$

A primeira questão  $Q_1$  foi sugerida baseando-se em uma das atividades propostas por Fischbein (1987), que em seus trabalhos diagnosticou e classificou quais os níveis de raciocínios intuitivos que seus alunos demonstraram na resolução de algumas questões. Ela tem por finalidade observar como o aluno utiliza os conceitos geométricos, tais como segmento de reta, ponto médio de um segmento para justificar sua resposta, além do conhecimento sobre números racionais, irracionais e a incomensurabilidade de segmentos.

**Quadro 9** – Questão Piloto 1

**01.** Considere um segmento de reta  $\overline{AB}$  e sobre esse segmento escolhe-se aleatoriamente um ponto  $C$ , entre  $A$  e  $B$ , conforme a figura a seguir:



Divida o segmento  $\overline{AB}$  em duas partes iguais, e novamente, divida cada uma das partes obtidas em duas metades. Repita novamente a divisão nas outras partes obtidas anteriormente. Se continuarmos dividindo cada uma das novas partes obtidas em duas outras partes iguais, será que chegaremos a uma situação tal que um dos pontos da divisão coincida com o ponto  $C$ , ou seja, será que conseguiremos acertar ou atingir o ponto  $C$ ? Justifique a sua resposta.

Embora o enunciado seja igual ao apresentado nos estudo de Fischbein (1987), serão descritas a seguir algumas sugestões de resoluções por nós elaboradas, que não foram citadas nos trabalhos do autor.

Na tentativa de responder a questão, por exemplo, um aluno, por meio de um raciocínio intuitivo pode concluir que, se for possível sempre dividir cada segmento obtido em duas partes iguais, indefinidamente, em uma determinada divisão o ponto  $C$  será alcançado, pois, dividindo-se o segmento em partes infinitamente pequenas, o ponto  $C$  será alcançado, embora, se não houvesse um segmento, “sobraria” apenas um ponto, que poderia ser o ponto  $C$ .

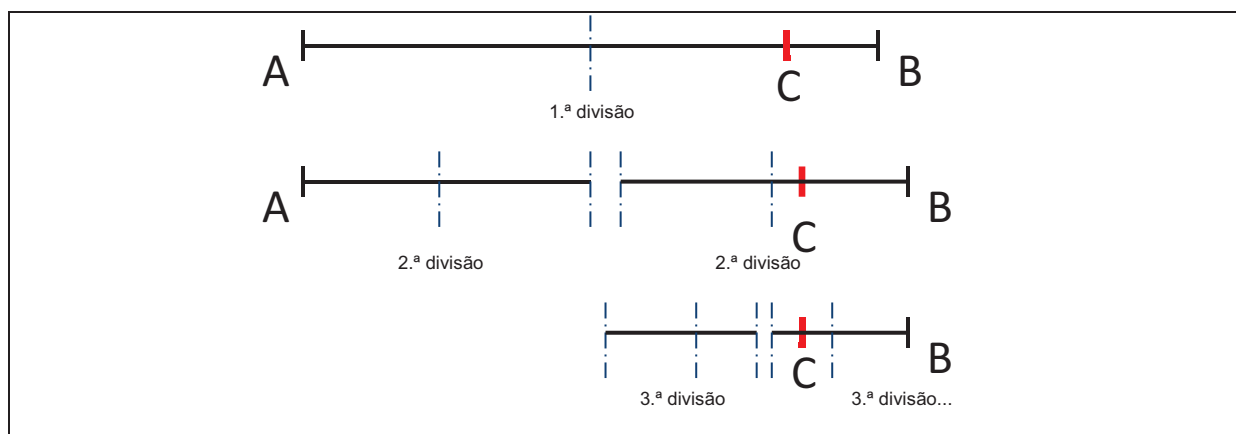
Esse raciocínio constitui-se de uma cognição intuitiva denominada convicção intrínseca, na qual o aluno tem o sentimento de certeza mesmo que a questão aparentemente não se constitua como auto-evidente. Entretanto, o modo com que os professores trabalham em sala de aula conceitos como infinito, divisão de um segmento indefinidamente pode causar o que Fischbein (1987) descreveu como efeito coercitivo, que afeta a compreensão de o ponto  $C$  ser possível ou não de se alcançar.

Algumas estratégias podem ser utilizadas no intuito de encontrar a solução para a questão, como o uso de uma sequência numérica por meio de um raciocínio por recorrência, e constata-se que, se o comprimento segmento  $\overline{AB}$  for dado por número racional e o segmento obtido  $\overline{AC}$  por um número irracional ou vice-versa, o ponto nunca será alcançado. Essa situação traz em sua essência, mesmo os alunos não pensando em tal conceito, o conhecimento da incomensurabilidade de segmentos, que constitui um exemplo da falibilidade do raciocínio intuitivo, conforme se verificou no contexto histórico, e que foi resolvido com a teoria das proporções elaborada por Eudoxo.

Como outro exemplo de uma possível resolução para tal questão pode-se utilizar a sequência numérica  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$  pode ser dada a seguir.

De acordo com a situação descrita no enunciado anterior, seja a figura 41 a seguir em que o segmento  $\overline{AB}$  e o ponto  $C$  entre  $A$  e  $B$ :

Figura 41 – Questão Piloto 1



Fonte: Autor, 2012

Supondo que o segmento  $\overline{AB}$  tenha comprimento igual a 1 u.c. (unidade de comprimento), após a primeira divisão têm-se dois segmentos de comprimentos iguais a  $1/2$ , após a segunda divisão têm-se quatro segmentos de comprimentos iguais a  $1/4$ , e assim sucessivamente; após  $n$  divisões têm-se  $2^n$  segmentos de comprimentos iguais a  $1/2^n$  u.c.

No tocante ao ponto C, podem ser considerados os seguintes casos:

- a) Se o comprimento do segmento  $\overline{AC}$  for dado por um número *irracional*, o ponto C nunca será atingido, pois  $\frac{1}{2^n} \in \mathbb{Q}$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- b) Se o comprimento do segmento  $\overline{AC}$  for dado por um número *racional*, o ponto C será atingido se, e somente se,  $med(\overline{AC}) \in \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Se a medida do segmento  $\overline{AC}$  for igual, por exemplo, a  $1/3$ , o ponto C nunca será atingido, pois  $\frac{1}{3} \neq \left( \frac{1}{2^n} \right)$ .

Portanto, para que o ponto C possa ser atingido, deve-se analisar a comensurabilidade dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .

Essa questão foi respondida parcialmente correta por apenas uma dupla (D<sub>4</sub>) dentre as sete participantes. As outras seis duplas afirmaram que se a divisão for feita indefinidamente, ou “tendendo ao infinito”, o ponto C será atingido.

Quanto às resoluções elaboradas pelas duplas, a dupla D<sub>4</sub> utilizou-se do seguinte argumento para responder à questão:

Figura 42 – Resolução da questão Q<sub>1</sub> feita pela dupla D<sub>4</sub>**01. Resolução:**

não atinge nem o ponto C, porque se pegarmos o segmento  $\overline{CB}$  e dividirmos a reta  $\overline{AB}$  com mesmo tamanho de  $\overline{CB}$ , não obtemos a metade da reta  $\overline{AB}$

Durante a resolução dessa questão, observou-se que essa dupla utilizando-se de uma régua graduada procurou “medir” os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CB}$ , o que corresponde a uma estratégia incorreta. Essa tomada de decisão pela dupla manifesta duas características: o uso da intuição geométrica como técnica de resolução do problema e a falta do componente formal necessário para a elaboração da resposta. Esse tipo de intuição não foi previsto como uma possível resolução para a questão.

Dentre as respostas apresentadas por outras duplas, algumas estratégias merecem ser destacadas e que revelam em grande medida uma das principais características da intuição descritas por Fischbein (1987): a auto-evidência, que no caso de a questão de efetuar o número de divisões tender ao infinito, é possível atingir todos os pontos do segmento  $\overline{AB}$ .

A dupla D<sub>1</sub> colocou que o segmento  $\overline{AB}$  possui um número de pontos, e o ponto C em um instante será atingido, com a ressalva de que se devem conhecer as medidas dos segmentos para que isso seja possível. Provavelmente essa dupla utilizou o termo limitado como sinônimo de finito. Essa mesma dupla ainda afirmou que se a divisão fosse efetuada em uma semi-reta ou reta, o ponto C não seria atingido, por não serem entes geométricos ditos “limitados”. De maneira análoga a dupla pode ter considerado ilimitado como sinônimo de infinito. Isso pode ser explicado em grande medida quando operações que são realizadas com grandezas finitas são processadas de maneira análoga com infinitas.

Essas concepções de finito como limitado e infinito como ilimitado possuem implicações na compreensão do conceito de limite, em que um conjunto sendo finito o limite pode ser alcançado e, sendo infinito, nada se pode concluir.

Essas afirmações parecem refletir o aspecto intuitivo do poder coercitivo no modo com que o conceito de infinito, limite e limitado são ensinados pelos



professores em sala de aula e como essa abordagem pode ser interiorizada pelos alunos. No caso particular do infinito, os alunos demonstraram uma visão do denominado “infinito potencial”, ou seja, que o segmento de reta sendo formado por infinitos pontos, todos esses pontos podem ser alcançados potencialmente.

A maioria das duplas, por meio de suas respostas, demonstrou o aspecto da intuição da convicção intrínseca, da certeza que a divisão feita indefinidamente atinge todos os pontos do segmento, conforme afirmaram as duplas  $D_5$  e  $D_7$ .

Apenas uma dupla ( $D_3$ ) tentou estabelecer algebricamente a resolução da questão na tentativa de demonstrar a possibilidade de atingir o ponto C, porém não obteve sucesso. Os alunos dessa dupla se valeram do rigor algébrico para justificar a sua resposta.

Com isso, conclui-se de modo geral que os participantes, no tocante à noção de infinitas divisões de um segmento, não utilizam o aspecto rigoroso e que apenas fazendo uso do componente intuitivo procuraram responder a questão de maneira parcialmente correta.

#### 4.3.3 – Questão $Q_2$

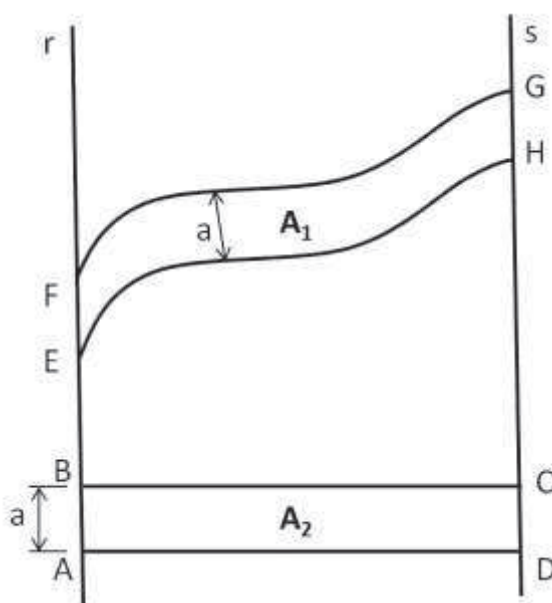
A segunda questão  $Q_2$  é constituída de duas partes: a primeira foi realizada em um dos testes efetuados por Fischbein (1987), que, por meio de uma questão semelhante proposta a alguns alunos, diagnosticou o raciocínio intuitivo da convicção intrínseca, em que os alunos pelo aspecto visual estabelecem a conjectura de que, pelo fato de os arcos  $FG$  e  $EH$  apresentarem comprimento maior que os segmentos  $AD$  e  $BC$ , a área limitada por essas curvas é maior que a área do retângulo  $ACBD$ , ou seja, que a área  $A_1$  é maior que a área  $A_2$ , porém os alunos não conseguiram demonstrar tal situação.

A segunda parte proposta foi inspirada na primeira parte e diz respeito à comparação de duas pilhas formadas por moedas de mesma massa e tamanho.

## Quadro 10 – Questão Piloto 2

**02.**

a) Sejam as retas  $r$  e  $s$  paralelas e os pontos  $A, B, E$  e  $F$  pertencentes à reta  $r$  e os pontos  $C, D, G$  e  $H$  pertencentes à reta  $s$ , com os segmentos  $AD$  e  $BC$  paralelos cuja distância entre eles é igual a  $a$ . Ligando-se os pontos  $E$  e  $H$  assim como  $F$  e  $G$  por meio de curvas de modo que a distância entre as mesmas seja constante e igual a  $a$ , conforme a figura a seguir:



Determine qual a região que apresenta maior área, a área  $A_1$  da região limitada pelas curvas  $EH, FG$  e as retas  $r$  e  $s$  ou a área  $A_2$  do retângulo  $ABCD$ . Justifique a sua resposta.

b) Na foto a seguir têm-se dois sólidos formados por 12 moedas iguais de R\$ 1,00 cada um, empilhados de maneiras distintas. Qual dos dois sólidos possui volume maior? Justifique a sua resposta.



Fonte: Autor, 2012

A resolução dessas questões envolve a utilização – embora de modo geral não seja um assunto abordado no Ensino Médio e Superior – do princípio de Cavalieri, que de acordo com o contexto histórico mostrou ser um fator imprescindível para a compreensão do conceito de integral, considerando-se no item **a** em que se têm duas regiões tal que, se se traçar qualquer reta secante a elas e paralela às retas  $r$  e  $s$ , serão determinados nas regiões segmentos de reta de comprimentos iguais, conclui-se que a área dessas duas regiões também será igual. O raciocínio análogo pode ser feito no item **b**, em que os dois sólidos são formados por moedas iguais independentemente do plano paralelo à base, serão obtidas secções iguais e, portanto, volumes iguais.

O objetivo dessa questão é observar que, mesmo de forma implícita, se o princípio de Cavalieri é utilizado tanto no cálculo de áreas de figuras planas quanto no volume dos sólidos, observando-se também que, se os sólidos são formados por “elementos indivisíveis iguais”, no caso moedas, eles apresentarão volumes também iguais.

A questão apresenta um predomínio do conhecimento teórico de um princípio em detrimento da utilização de algoritmos, fórmulas ou algum outro recurso aritmético. O que se pode esperar é o possível uso de outros elementos, como a manipulação de objetos físicos, ou o emprego de analogias.

Com isso, deseja-se analisar quais as estratégias utilizadas pelos alunos para demonstrar que tanto as áreas quanto os volumes são iguais e qual questão pode ser considerada mais difícil, se uma dessas questões pode ser mais evidente

de resolver e quais as implicações na resolução de uma questão que pode auxiliar a compreensão da outra.

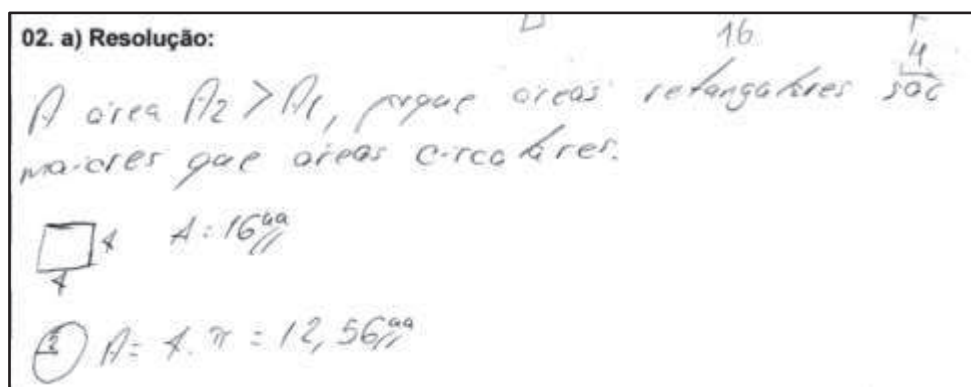
No tocante às resoluções da questão  $Q_2$ , na parte **a** duas duplas responderam que as áreas são iguais, porém apresentando justificativas diferentes. Cinco duplas consideraram que as áreas não são iguais e grande parte das duplas respondeu que pelo fato de a curva  $EH$  ter comprimento maior que o segmento  $\overline{AD}$ , então a área  $A_1$  é maior que a área  $A_2$ .

A dupla  $D_1$  procurou traçar retas tangentes às curvas, respondendo que por meio de derivadas seria possível provar, mesmo sem saber de que forma, que  $A_1 > A_2$ , pois segundo a resposta da dupla isso era “perceptível”. Esse tipo de afirmação parece indicar o aspecto da convicção intrínseca da intuição, em que os alunos apresentam uma crença de que uma área é maior que a outra, mesmo sem a possibilidade de comprovação.

A dupla  $D_4$  manifestou um recurso diferenciado. Um dos integrantes da dupla retirou um fio de cabelo para tentar provar que o comprimento da curva  $EH$  era maior que o segmento de reta  $\overline{AD}$ . Isso é um indício da utilização do apelo aos objetos físicos como estratégia de resolução da questão.

A dupla  $D_5$  argumentou, por meio de um exemplo, efetuando-se uma analogia geométrica, que figuras retangulares têm área maior que as circulares, em que, dado um quadrado cujo lado tem a mesma medida do diâmetro de um círculo, a área  $A_2$  por ser retangular é maior que a área  $A_1$  conforme a resolução a seguir:

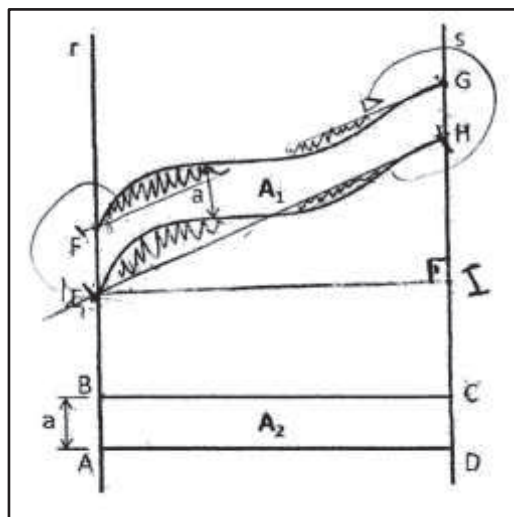
**Figura 43** – Resolução da questão  $Q_2$  feita pela dupla  $D_5$



Das duplas que procuraram elaborar intuitivamente por recursos geométricos uma solução correta para o problema, a dupla  $D_2$  observou que a área

$A_1$  poderia ser “completada” tornando-se igual à área  $A_2$ , conforme a resolução a seguir:

**Figura 44** – Resolução da questão  $Q_2$  – a feita pela dupla  $D_2$



Entretanto, a dupla apesar de apresentar uma estratégia intuitivamente interessante, não conseguiu demonstrar que a área do paralelogramo EFGH é igual à área  $A_2$ , pois ele possui a mesma base (no caso  $EF = a$ ) e a mesma altura (medida do segmento  $\overline{AD}$ ). Essa dupla acabou afirmando que, pelo fato de o segmento  $\overline{EH}$  ser maior que a medida do comprimento  $\overline{AD}$ , então a área  $A_1$  é maior que a área  $A_2$ .

Uma ideia intuitiva semelhante a essa foi apresentada pela dupla  $D_3$ , respondendo que as áreas são iguais sem, entretanto, apresentar maiores justificativas, afirmando apenas que as regiões possuem as medidas “proporcionais” e que por isso se justificaria a igualdade das áreas.

Outra dupla que respondeu corretamente a questão sem justificar foi a  $D_6$ , que tentou inicialmente resolver a questão utilizando-se do conceito de integral, afirmando que, se tiver as leis de formação das funções representadas geometricamente pelas curvas  $EH$  e  $FG$ , então poder-se-á provar que as áreas são iguais. Esse sentimento de certeza constitui-se uma convicção intrínseca, sem possuir argumentos para demonstrar.

A dupla  $D_7$  também cita a possibilidade de se provar por integral. Isso pode levar a concluir sobre a forte compreensão do conceito de integral como técnica de resolução de problemas de área.

Diferentemente da questão 2a, parte b da questão Q<sub>2</sub> foi respondida corretamente por todas as duplas, que em sua maioria justificou que, se as moedas são todas iguais, então o volume também deverá ser igual, independentemente da forma em que elas estarão dispostas.

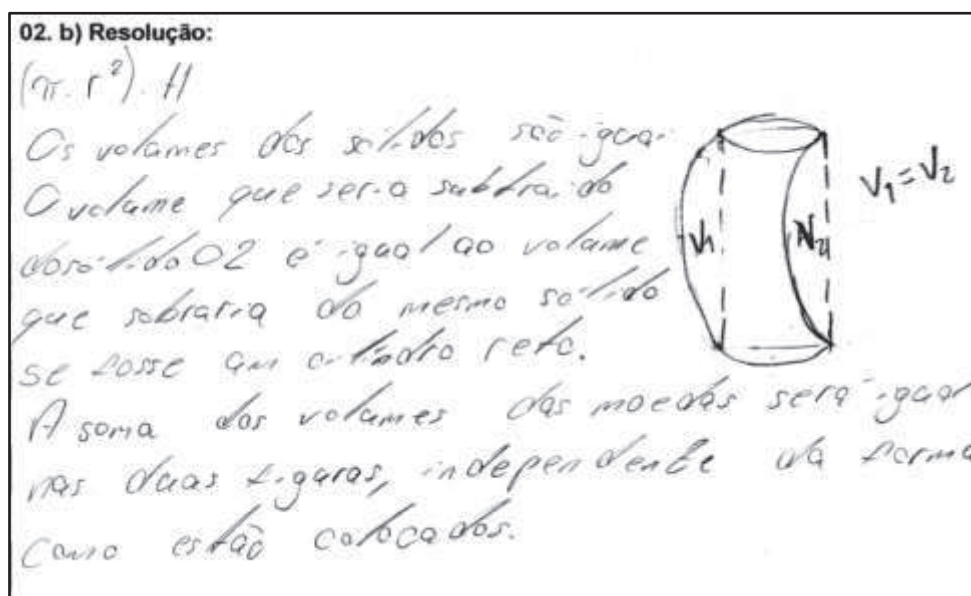
A dupla D<sub>1</sub>, por exemplo, tentou “medir” as dimensões do bloco para tentar comprovar que os volumes são iguais. Com o uso de uma régua fizeram aproximações para as medidas e tentaram assim justificar sua resposta.

Já a dupla D<sub>2</sub> afirmou que se as áreas da base e as alturas dos dois sólidos são iguais, então os volumes serão iguais, não percebendo a imprecisão dessa justificativa, pois como contraexemplo podem-se considerar um cone e um cilindro circular reto, com a mesma base e a mesma altura que apresentam volumes diferentes.

Para a dupla D<sub>3</sub>, pode-se provar por meio de uma balança a medição para tal demonstração, pois se forem feitas do mesmo material e tiveram massas iguais, terão volumes iguais.

Muitas duplas utilizaram-se da técnica de perceber que no sólido 2 a parte que “falta” do sólido pode ser completada, conforme a dupla D<sub>5</sub> realizou o raciocínio geométrico a seguir:

**Figura 45** – Resolução da questão Q<sub>2</sub> - b feita pela dupla D<sub>5</sub>



De modo geral pode-se observar que o mesmo procedimento utilizado pelas duplas na resolução da questão 2b não foi usado em grande medida na segunda

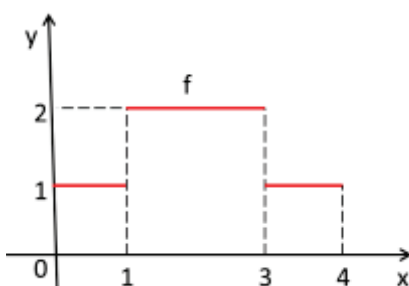
questão, na qual pode-se concluir que a comparação entre os volumes parece mais “perceptível” para os estudantes.

#### 4.3.4 – Questão Q<sub>3</sub>

A questão Q<sub>3</sub> apresenta na elaboração de sua resolução o conceito da função área apresentando algebricamente em sua essência a ideia de acumulação ou a soma de parcelas de uma grandeza, que no caso específico diz respeito à área da região limitada sob o gráfico de uma função, o eixo das abscissas e as retas  $x = 0$  e  $x = t$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .

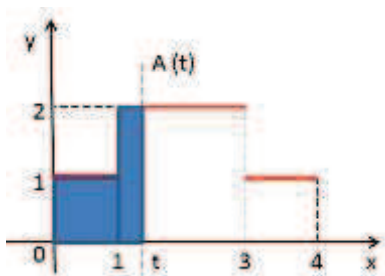
Quadro 11 – Questão Piloto 03

**03. a)** Considere a representação gráfica da função  $f$  definida no intervalo  $[0, 4]$ , conforme a figura a seguir:

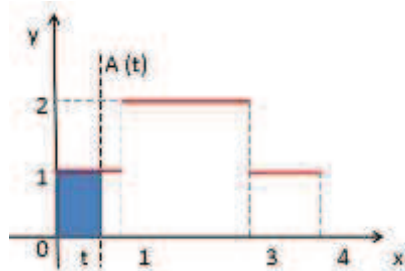


Calcule o valor da área da região limitada sob o gráfico de  $f$  e os eixos coordenados no intervalo  $[0, 4]$ .

**b)** Seja  $A(t)$  a função que associa a cada valor de  $t \in [0, 4]$  a área da região limitada sob o gráfico de  $f$ , os eixos coordenados e a reta  $x = t$ .

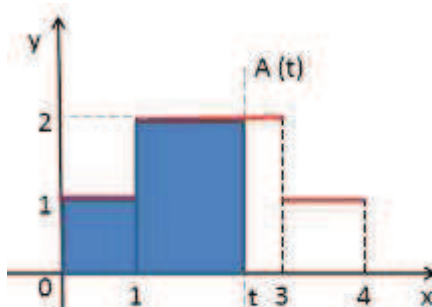


Seja inicialmente a reta vertical  $x = t$ , com  $0 \leq t \leq 1$  conforme a figura a seguir:



De acordo com os dados da figura anterior, determine a medida da base e da altura da figura hachurada. Qual é o valor da área dessa mesma figura? Essa área obtida depende de alguma variável?

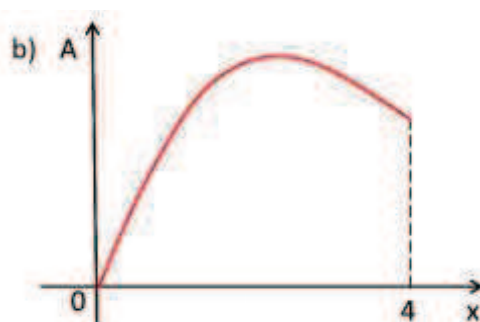
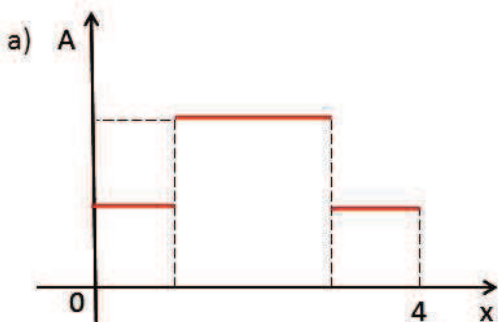
**c)** Considere agora a reta vertical  $x = t$ , com  $1 \leq t \leq 3$ , de acordo com a figura a seguir:



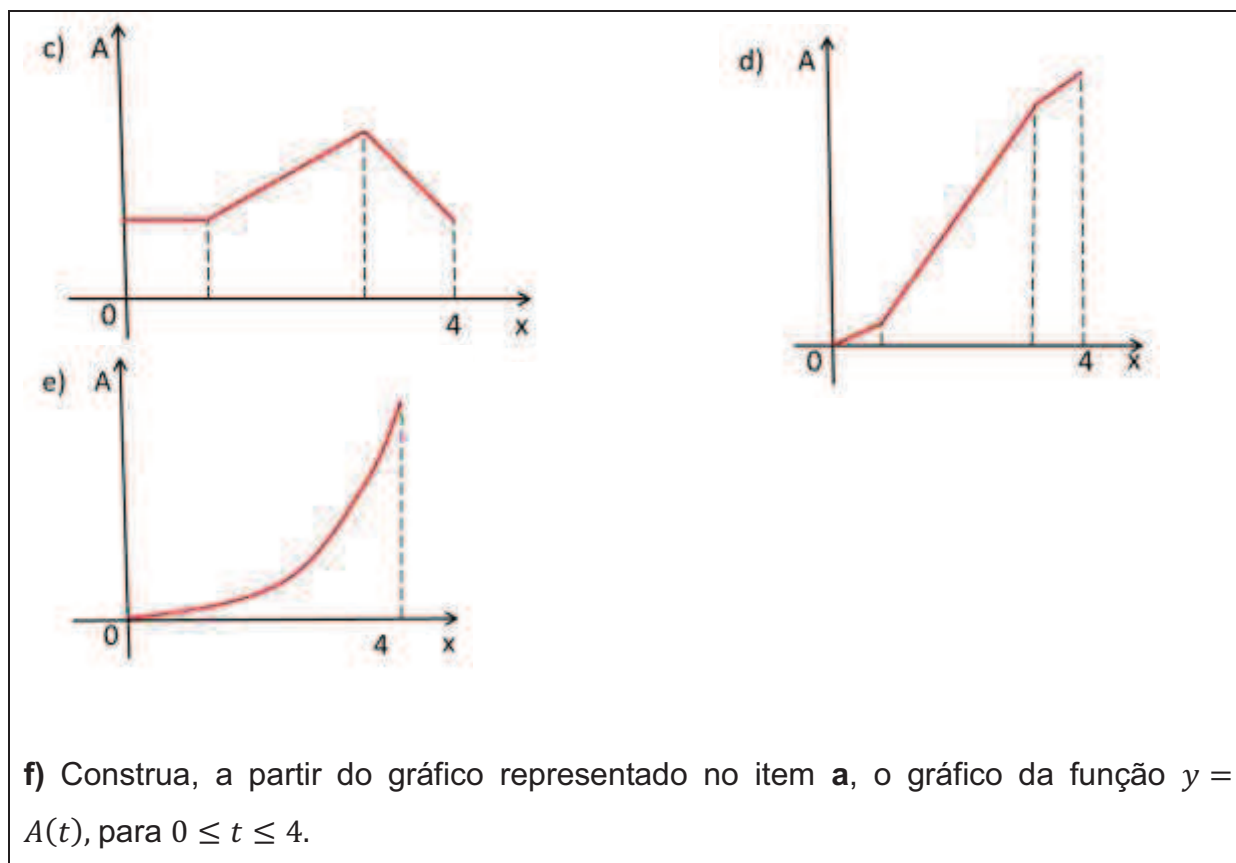
Como você faria para calcular a base do retângulo cuja base está localizada entre 1 e 3? Determine a área da figura hachurada. Essa nova área obtida depende de alguma variável?

**d)** Repita o procedimento calculando-se a área considerando  $3 \leq t \leq 4$ .

**e)** Se você fosse construir o gráfico da função  $A(t)$ , sendo  $A$  a área limitada pelo gráfico de  $f$ , os eixos coordenados e a reta vertical  $x = t$ , sendo  $t \in [0, 4]$ , qual dos gráficos a seguir estaria mais próximo do que você pensou? Justifique a sua escolha.







Fonte: Autor, 2012

O item a pode ser resolvido considerando-se a área limitada solicitada como a soma das áreas dos retângulos formados. Sendo assim, a área total  $A_T$  será dada por:

$$A_T = 1.1 + (3 - 1).2 + (4 - 3).1 = 6 \text{ u. a.}$$

Para a resolução do item b, o aluno deve considerar que no intervalo  $[0, 1]$  a base do retângulo é variável, cuja altura é igual a 1. A área, portanto, depende da variável  $t$  e vale:

$$A = (t - 0).1 \Rightarrow A(t) = t$$

com  $0 \leq t \leq 1$ .

De maneira análoga os itens c e d nos intervalos, respectivamente, iguais a  $1 \leq t \leq 3$  e  $3 \leq t \leq 4$  podemos calcular a área considerando-se novamente a área em função de  $t$  da seguinte maneira:

- No item c:  $A = 1.1 + (t - 1).2 = 1 + 2t - 2 \Rightarrow A(t) = 2t - 1$ .
- Para o item d:  $A = 1.1 + (3 - 1).2 + (t - 3).1 = 1 + 4 + t - 3 \Rightarrow A(t) = t + 2$ .

O gráfico solicitado no item **e** pode ser construído considerando-se, por exemplo, o cálculo da área dos polígonos formados nos intervalos  $[0, 1]$ , bem como nos intervalos  $[1, 3]$  e  $[3, 4]$ , observando que a área varia linearmente em função de  $t$ .

Essa questão baseou-se em alguns resultados de pesquisas observados na revisão bibliográfica, especificamente nos trabalhos de Carlson et al. (2007) e Thompson (1994), que por meio de questionários e atividades desenvolvidas com alunos que cursaram a disciplina de Cálculo nas universidades norte-americanas, mostrou qual era o conhecimento que eles apresentavam sobre os conceitos de acumulação de uma função.

Algumas conjecturas relacionadas com as possíveis estratégias de resolução, bem como as dificuldades encontradas pelos alunos podem ser formuladas.

Inicialmente, deseja-se diagnosticar se os estudantes apresentam alguma confusão na compreensão das variáveis independentes  $x$  e  $t$  das funções  $f$  e  $A$ , respectivamente, conforme observado nos trabalhos de Thompson.

Outro aspecto que será analisado está relacionado com as características do gráfico  $y = A(t)$  solicitado no item **a**, tais como a variação linear da área em função de  $t$  nos intervalos considerados, como se obtém o valor das imagens da função área para os valores  $t = 1$ ,  $t = 3$  e  $t = 4$ .

Pode-se supor que algumas analogias podem ser efetuadas, como a comparação do gráfico fornecido com a relação entre grandezas físicas, como o espaço em função do tempo no estudo do movimento retilíneo e uniforme.

Outro elemento que poderá ser encontrado diz respeito à intuição da convicção intrínseca, em que o aluno pode obter o valor das imagens do gráfico nos intervalos e não conseguir determinar o “aspecto” do gráfico, se a representação gráfica é uma reta, uma parábola, ou uma curva exponencial.

Uma possível resolução para a construção do gráfico pode ser dada a seguir:

**a)** Nos intervalos considerados tem-se o seguinte valor para as áreas:

- no intervalo  $[0, 1] \rightarrow A_1 = (1-0). (1-0) = 1 \text{ u.a.}$

- no intervalo  $[1, 3] \rightarrow A_2 = (3-1) \cdot (2-0) = 4 \text{ u.a.}$

- no intervalo  $[3, 4] \rightarrow A_3 = (4-3) \cdot (1-0) = 1 \text{ u.a.}$

Portanto, a área no intervalo  $[0, 4]$  é igual a:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \Rightarrow A = 1 + 4 + 1 = 6 \text{ u.a.}$$

**b)** Para  $t \in [1, 3]$  a área da região limitada será dada por:

$$A(t) = 1 \cdot 1 + (t - 1) \cdot 2 = 1 + 2t - 2 \Rightarrow A(t) = 2t - 1.$$

**c)** De acordo com as informações do enunciado anterior, tem-se a seguinte situação:

i) No intervalo  $0 \leq t \leq 1$ , tem-se que a área varia linearmente com o valor de  $t$ , pois a área pode ser calculada como  $A_1(t) = (t - 0) \cdot 1 \Leftrightarrow A_1(t) = t$ . Para  $x = 0$ ,  $A_1(0) = 0$  e para  $t = 1$ ,  $A_1(1) = 1$ .

ii) No intervalo  $1 \leq t \leq 3$ , a área varia e pode ser obtida somando-se o valor acumulado do item (i) com a área do segundo quadrado da seguinte maneira:

$$A_2(t) = 1 + (t - 1) \cdot 2 \Leftrightarrow A_2(t) = 2t - 1$$

Para  $t = 1$ ,  $A_2(1) = 1$  e para  $t = 3$ ,  $A_2(3) = 5$ .

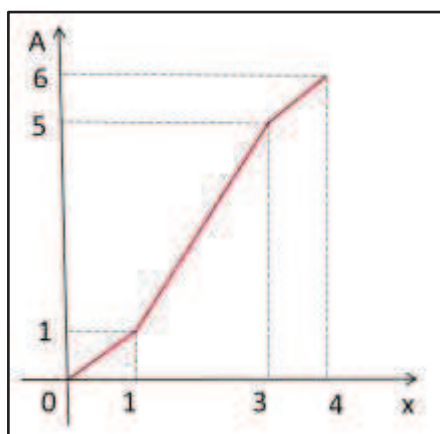
iii) No intervalo  $3 \leq t \leq 4$ , a área varia e pode ser obtida somando-se o valor acumulado do item (ii) com a área do terceiro quadrado da seguinte maneira:

$$A_3(t) = 5 + (t - 3) \cdot 1 \Leftrightarrow A_3(t) = t + 2$$

Para  $t = 3$ ,  $A_3(3) = 5$  e para  $t = 4$ ,  $A_3(4) = 6$ .

A partir dos valores encontrados, constrói-se o gráfico da figura a seguir, como se intencionava.

Figura 46 – Gráfico da Questão Piloto 03 - f



Fonte: Autor, 2012

Sobre essa questão, composta por seis itens, observou-se de modo geral que as duplas mostraram algumas dificuldades na compreensão e resolução dela, o que suscita a análise e interpretação de alguns tópicos pertinentes.

Para o item 3a, que solicitava a determinação da área da região limitada sob o gráfico de  $f$ , apenas uma dupla apresentou a resposta incorreta. A dupla  $D_4$  interpretou que a área de  $f$  tem altura igual a 0 e base 2, logo a área é igual a zero. Provavelmente essa dupla não compreendeu o significado da área limitada sob o gráfico de  $f$  e os eixos coordenados no intervalo considerado.

Outro aspecto relevante a ser destacado é a confusão com a variável  $t$  sendo o tempo, bem como perceber que a área solicitada nos próximos itens depende da variável  $t$ . Para a resolução dos itens 3b, 3c e 3d o nome da variável não importava, e algumas duplas mesmo respondendo que a área dependia da variável  $t$ , mostraram algumas dificuldades na compreensão de variáveis.

Duas duplas ( $D_1$  e  $D_4$ ) afirmaram que para calcular a área, necessitava-se de um valor numérico. A dupla  $D_4$  chegou a “medir” a base atribuindo-lhe o valor de  $2/3$ . Esse procedimento foi utilizado por essa dupla novamente nos itens 3c e 3d, conforme a figura a seguir:

Figura 47 – Resolução da questão  $Q_3$  - b feita pela dupla  $D_4$ 

**03. b) Resolução:** a área da figura é base  $\cdot$  altura  $= 1 \cdot \frac{2}{3}$ , pela análise visual  $\frac{2}{3}$  é igual  $\frac{2}{3}$  então  $1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  que será a área. Sim a área depende da posição da variável  $t$ , para cada  $t$  tem uma área diferente.

Mesmo considerando-se alguns cálculos efetuados incorretamente, todas as duplas perceberam que a área solicitada nos itens 3b, 3c e 3d está em função da variável  $t$ .

Um aspecto curioso a ser destacado é o fato de a dupla  $D_3$  calcular a área solicitada por integral, o que pode ser um indício da forte interpretação que os alunos fazem da integral como sinônimo de área. Esse fato foi observado nas resoluções dessa dupla em outras questões anteriores, sempre procurando associar o cálculo de áreas com integral.

No tocante à escolha do gráfico que representa  $A \times t$ , no item 3e, quatro das sete duplas fizeram a escolha correta do gráfico, assinalando corretamente a alternativa “d”, com a justificativa para tal escolha de que o valor da área sempre aumenta à medida que o valor de  $t$  aumenta.

As duplas  $D_2$  e  $D_5$  perceberam que o aumento da área torna-se mais acentuado no intervalo  $1 \leq x \leq 3$ , dado que a altura do retângulo formado nesse intervalo possui uma altura maior relativamente aos outros retângulos.

A dupla  $D_3$  procurou associar a simetria existente entre o gráfico solicitado e o gráfico apresentado no enunciado.

Apenas a dupla  $D_6$  assinalou a alternativa “E”, interpretando de maneira incorreta o crescimento da área como exponencial. A dupla  $D_7$  assinalou incorretamente a alternativa “B”.

Finalizando a questão 3, no item f, as duplas que assinalaram a alternativa incorretamente no item anterior repetiram o procedimento para a resolução desse item.

Especificamente a dupla  $D_4$  assinalou corretamente na questão 3e a alternativa correta, entretanto no item f construiu um gráfico que não correspondia com o item anterior, assim como procedeu a dupla  $D_6$ .

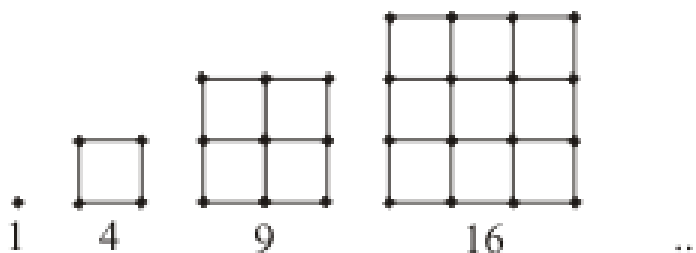
#### 4.3.5 – Questão $Q_4$

O objetivo principal da questão  $Q_4$  consiste em explorar as propriedades operatórias existentes entre duas sequências numéricas, a saber, a sequência dos números quadrados e a sequência das diferenças de dois números quadrados consecutivos.

Esta atividade tem como base os resultados descritos no contexto histórico obtido por Leibniz no século XVII na relação existente entre as operações de adição e subtração de sequências numéricas que analogamente foram utilizadas na descoberta da relação inversa entre os problemas da quadratura de curvas e o traçado de tangentes a curvas, culminando com o estabelecimento do TFC.

**Quadro 12 – Questão Piloto 4**

**04.** Os números figurativos, cuja origem pode ser creditada aos pitagóricos, expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. Os números quadrados, por exemplo, são representados geometricamente de acordo com a figura a seguir:



Denominando os números quadrados por  $q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , têm-se  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 4$ ,  $q_3 = 9$  e assim por diante, obtendo a sequência dos números quadrados  $\{1, 4, 9, 16, \dots, q_n, \dots\}$ .

Responda em ordem as seguintes questões, justificando cada resposta:

**Parte I**

- Determine os números quadrados  $q_7$  e  $q_{10}$ .
- Elabore uma lei para se calcular  $q_n$ .
- Como você pode fazer para encontrar o termo 16 a partir do seu termo anterior 9?

**Parte II**

Vamos formar uma nova sequência denominada sequência das diferenças  $d_n$ , dada por  $d_n = q_{n+1} - q_n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$  em que cada termo pode ser obtido pela subtração de um número quadrado, a partir do segundo termo, com o seu antecessor.

Por exemplo:

$d_1 = q_2 - q_1 = 4 - 1 = 3$ ,  $d_2 = q_3 - q_2 = 9 - 4 = 5$ , e assim por diante obtendo-se a sequência  $\{3, 5, 7, 9, \dots, d_n, \dots\}$ .

Responda as seguintes questões, justificando a sua resposta:

**a)** Determine os números  $d_8$  e  $d_{12}$ .

**b)** Determine a soma dos cem primeiros termos da sequência  $d_n$ , ou seja, determine  $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{100}$ . É possível obter essa soma a partir dos números quadrados, obtidos na Parte I? Como você obteria esse resultado?

Fonte: Autor, 2012

Pode-se supor que para a resolução dessa questão o aluno utilize inicialmente o raciocínio por recorrência na obtenção dos termos das sequências e que posteriormente seja feita a generalização desses termos.

O que será pertinente observar é a possível utilização da representação geométrica dos números figurados para a elaboração de algumas conjecturas, bem como a exploração de algumas propriedades geométricas existentes.

Na **Parte I** da questão, especificamente no item **c**, pode-se estabelecer uma conjectura da obtenção de um número quadrado por recorrência, observando-se que um termo dessa sequência pode ser conseguido a partir do anterior pela adição de um número ímpar. De maneira análoga, na Parte II, item b, a soma da sequência de diferenças pode ser obtida geometricamente.

Como alternativa de resolução, na **Parte I** dessa questão, basta observar que  $q_7 = 7^2 = 49$  e  $q_{10} = 10^2 = 100$  e elaborar a lei de formação para a sequência dos números quadrados, dada por  $q_n = n^2$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Para obter um número quadrado a partir do anterior, considere encontrar um termo  $q_{n+1}$  a partir do seu antecessor  $q_n$  adicionando-se sempre uma constante  $k \in \mathbb{R}$ . Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + k \\ (n+1)^2 &= n^2 + k \\ n^2 + 2n + 1 &= n^2 + k \\ k &= 2n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Com isso, qualquer número quadrado, a partir do anterior, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$q_{n+1} = q_n + 2n + 1$$

Como exemplo, para se calcular o quinto número quadrado  $q_5 = 25$  a partir do quarto termo  $q_4 = 16$ , tem-se:

$$q_5 = q_4 + 2 \cdot 4 + 1 \Rightarrow q_5 = q_4 + 9$$

Na **Parte II** os números obtidos pela diferença de dois números quadrados consecutivos podem ser assim calculados:

$$d_7 = q_8 - q_7 = 64 - 49 = 15$$

$$d_{10} = q_{11} - q_{10} = 121 - 100 = 21$$

Observa-se que essa sequência forma uma progressão aritmética cujo primeiro termo é igual a 3 e razão igual a 2.

Para elaborar a lei basta utilizar o resultado obtido do item **c** da Parte I, em que:

$$q_{n+1} - q_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}^*$$

Como  $d_n = q_{n+1} - q_n$  tem-se então  $d_n = 2n + 1$ .

Esse resultado pode ser obtido também utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Esse resultado é muito útil para calcular o item **c**, considerando que:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{100} = (q_2 - q_1) + (q_3 - q_2) + \dots + (q_{101} - q_{100}) = q_{101} - q_1$$

Conclui-se que a soma dos termos da sequência dada pela diferença de dois números quadrados pode ser dado pela diferença de dois números quadrados. Sendo assim, tem-se:



$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{100} = q_{101} - q_1 = 101^2 - 1^2 = 10200$$

Quanto às resoluções efetuadas, os itens a e b foram respondidos corretamente por todas as duplas.

O item c foi a questão que apresentou um número relativamente elevado de erros, seis das sete duplas não conseguiram relacionar um termo da sequência dada como o seu antecessor.

Dentre alguns erros apresentados pelas duplas pode-se considerar, por exemplo, a dupla D<sub>2</sub>, que confundiu o termo apresentado com a sua ordem na sequência (no caso, o termo dado era igual a 16, e não a sua ordem ser igual ao décimo sexto termo).

A dupla D<sub>4</sub> mostrou como recurso o apelo geométrico percebendo que para obter o próximo termo basta ampliar o quadrado acrescentando-se uma linha e uma coluna em sua representação geométrica.

Em sua **Parte II**, a questão **Q<sub>4</sub>** apresentou o item a ser respondido corretamente por todos os alunos, entretanto eles não conseguiram associar a soma dos termos dada pela diferença de dois números quadrados.

Apenas a dupla D<sub>4</sub> conseguiu resolver o item associando a sequência dada no item anterior.

A dupla D<sub>1</sub>, por exemplo, lembrou-se que os termos formavam uma progressão aritmética, porém não conseguiram lembrar de que forma isso poderia ser calculado.

Por seu turno, dupla D<sub>2</sub> resolveu o item b por meio da soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética.

#### 4.4 - Considerações Parciais

De modo geral, a descrição das resoluções das questões elaboradas pelas duplas propiciou inferir alguns pontos importantes que podem refinar ainda mais as hipóteses e conjecturas a respeito da elaboração da intervenção de ensino.

Observou-se que os alunos mostraram uma intuição geométrica que favoreceu a resolução da questão relacionada com o volume dos sólidos, porém, no que diz respeito ao cálculo de áreas, eles não apresentaram raciocínio análogo,

manifestando predominantemente uma convicção intrínseca na resolução desse tipo de questão sem efetivamente chegar ao resultado correto.

Pode-se concluir que, provavelmente, o volume dos sólidos geométricos seja mais “intuitivo” para os alunos do que o cálculo de áreas. Como devem ser construídas tarefas que privilegiem a intuição e o apelo aos objetos geométricos, segundo Poincaré (1995), serão utilizados os conceitos de acumulação e variação por meio do cálculo de volumes e áreas, que podem servir como ponto de partida na elaboração das questões.

Ao se observar que muitos alunos apresentaram a característica intuitiva do efeito coercitivo, assim como constatou Fischbein (1987) na questão em que, dado um ponto  $C$ , entre um segmento de reta  $\overline{AB}$ , perguntou-se se o ponto poderia ser alcançado por divisões sucessivas, os estudantes deduziram que, pelo fato de o segmento de reta apresentar infinitos pontos que sempre podem ser alcançados, deseja-se verificar se essa característica será recorrente, em virtude de os alunos apenas reproduzirem aquilo que os professores comentam em suas aulas e não refutarem algumas ideias ou conceitos envolvidos.

A questão que necessitava da interpretação e construção do gráfico de uma função área, trazendo em sua essência o conceito de acumulação, revelou muitos resultados que podem ser destacados.

Os alunos apresentaram dificuldade na compreensão da variação da área de acordo com o deslocamento da reta  $x = t$  e o significado dessa variável. Mesmo demonstrando um entendimento parcial do problema, ao se construir o gráfico, observou-se que muitos não perceberam que tanto a acumulação quanto a variação podem ser representadas segundo funções não lineares.

Isso remete a refletir sobre como elaborar uma tarefa concernente ao TFC que explore e contemple a questão da representação gráfica, tanto no caso de acumulação quanto no de variação e suas representações.

Além disso, os alunos não apresentam uma visão “dinâmica” necessária para a compreensão dessas relações, o que suscita a utilização de um *software* gráfico como recurso auxiliar na resolução das tarefas que contenham os conceitos de acumulação e variação, pois eles não são estáticos, e uma manipulação dinâmica e interativa por parte dos alunos com os objetos de estudo pode facilitar a compreensão daqueles.

No que diz respeito à relação da soma de sequências dada por diferenças, conforme solicitou-se na última questão, a relação pode ser estabelecida de maneira análoga utilizando-se as representações gráficas da relação entre duas grandezas, por exemplo, volume e área.

Diante dos resultados encontrados, a elaboração e a realização da intervenção de ensino relacionada ao ensino e aprendizagem do TFC baseando-se nas análises da revisão bibliográfica, contexto histórico, fundamentação teórica e na descrição do questionário-piloto, serão tratadas no próximo capítulo.

## CAPÍTULO V

Provamos através da lógica, mas descobrimos a partir da intuição.

HENRI POINCARÉ

---

### CAPÍTULO 5 – SEQUÊNCIA DE ENSINO

Após a análise do questionário-piloto e procurando unir e interpretar os resultados encontrados na revisão bibliográfica com o contexto histórico ligado à gênese e ao desenvolvimento do TFC, este capítulo destina-se a descrever uma sequência de ensino que apresente como objetivo fazer a relação mútua e recíproca entre dois conceitos fundamentais do Cálculo: a integração e a derivação.

A elaboração dessa intervenção de ensino teve como fundamentação teórica as ideias ligadas à intuição expostas por Poincaré (1995) e Fischbein (1987) relacionadas aos mecanismos da construção do conhecimento matemático, que leva em conta no processo de ensino e aprendizagem os aspectos da formulação de conjecturas, tentativas e erros, hesitações, refutações, para posteriormente abordar o aspecto formal do objeto matemático por meio de definições, teoremas, provas e demonstrações.

Ao refletir inicialmente sobre alguns resultados encontrados na revisão bibliográfica, especificamente no trabalho de Segadas Vianna (1998), inferimos que o fato de os alunos não interpretarem nem identificarem o TFC na representação gráfica é preponderante para o entendimento do teorema. A autora enfatiza que a compreensão do significado da representação gráfica não só facilita, como também auxilia na resolução de questões que envolvam de maneira explícita ou até mesmo implícita o teorema.

Esse resultado pode ser encontrado de maneira semelhante nas resoluções do questionário-piloto elaboradas pelos alunos descritas no capítulo anterior, especificamente na questão 3, em que os estudantes apresentaram dificuldades ao interpretarem um gráfico que envolvia implicitamente o conceito de acumulação de uma função, em que foi solicitada a compreensão da representação gráfica da função área.

Picone (2007) também descreveu que alguns professores entrevistados sugerem uma abordagem intuitiva do TFC por meio, por exemplo, da relação gráfica entre uma função e sua respectiva função primitiva.

Todas essas informações convergem para a importância dada por Poincaré (1995) sobre a intuição geométrica, no apelo aos objetos físicos e geométricos que facilitam a visualização e promovem a elaboração de hipóteses e conjecturas na formulação dos conceitos matemáticos.

Com isso, decidiu-se tomar como ponto de partida na construção da sequência de ensino a elaboração de tarefas que procurem explorar os conceitos de acumulação e variação de duas grandezas por meio da representação gráfica de funções, pois acredita-se, conforme os resultados apontados pelas pesquisas, que essa abordagem gráfica pode ser considerada mais intuitiva no estabelecimento da relação entre as operações de integração e derivação.

Essa escolha pode ser justificada também pela pouca exploração dos autores dos livros didáticos de Cálculo dessa representação, de acordo com Campos (2007), que reitera o privilégio dos autores na utilização do registro algébrico, assim como Picone (2007), que observou a falta do uso do registro gráfico por parte de alguns professores de Cálculo ao ministrarem suas aulas.

Como instrumento da coleta de dados da pesquisa nessa segunda fase, por questões didáticas, a sequência de ensino constitui-se em duas tarefas, designadas por  $T_1$  e  $T_2$ , que serão divididas em seções de acordo com as suas especificidades.

A questão que deve ser colocada é qual situação-problema pode ser criada e quais conceitos devem ser explorados inicialmente nessa situação para auxiliar a compreensão das relações presentes no TFC.

Constatou-se no contexto histórico que o cálculo de áreas e volumes realizado por Arquimedes, e posteriormente por Kepler e Cavalieri, constituiu o que de denominou como “O Despertar” para a gênese do TFC. Tal como analisado, a manipulação de objetos concretos, no caso, o cálculo do volume dos sólidos, parece ser mais “intuitiva” conforme se observou na questão 2 do questionário-piloto, em que os alunos encontraram uma facilidade maior em relação ao cálculo de áreas. Explorar alguns elementos dessas duas grandezas, área e volume, no sentido de auxiliar a compreensão do TFC, se torna uma escolha que nos parece correta.

Portanto, como ponto de partida para a **Tarefa 1**, serão utilizadas algumas relações existentes entre o volume e a área da seção transversal de um sólido com

a altura, procurando explorar geométrica e graficamente essas relações destacando os conceitos de acumulação e variação, variáveis dependentes e independentes de uma relação ou função, além da questão da continuidade destas.

A exploração dos conceitos de acumulação e variação nessa primeira tarefa se sustenta nos resultados obtidos por Carlson et al. (2007) e Thompson (1994), ao reiterarem que tais conceitos constituem o cerne do teorema, pois a igualdade  $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$  apresenta simultaneamente esses dois conceitos relacionados.

A questão da continuidade de uma função, conforme diagnosticou Segadas Vianna (1998), constitui um elemento importante na compreensão do TFC e será analisada nessa primeira tarefa, e como ela é interpretada pelos alunos.

Além disso, deseja-se avaliar nas tarefas qual o efeito coercitivo da intuição descrito por Fischbein (1987), em que as ideias transmitidas pelos professores em sala influenciam e se manifestam nas estratégias dos alunos na resolução de questões, conforme constatou-se no questionário-piloto nas questões envolvendo o infinito, e também na questão sobre a determinação de uma área em que algumas duplas associaram-na com o cálculo de uma integral, bem como a interpretação de derivada como reta tangente.

Para relacionar o volume e a área da seção transversal de um sólido por meio da representação gráfica, recorre-se ao contexto histórico em que se constatou, após os trabalhos de Arquimedes, o estudo realizado por Nicole Oresme da variação de uma grandeza em função da outra e, bem assim, estudar a taxa de variação dessas grandezas.

Serão consideradas para a elaboração da **Tarefa 1** as ideias contidas no princípio de Cavalieri, em que um sólido seria formado por uma infinidade de seções planas paralelas, no caso a área das seções paralelas.

Deseja-se construir o gráfico que represente o volume do sólido em função da altura de um plano que o secciona, assim como o gráfico da área da seção transversal obtida em função da altura desse plano. O intuito é estabelecer a relação entre o volume, como a acumulação das infinitas áreas de seção transversal, e a variação dessa acumulação, que no caso é igual à área da seção transversal.

A resolução questão 3 do questionário-piloto – referente à construção de um gráfico que representava uma função área – evidenciou que alguns alunos não

observaram que essa acumulação era obtida de maneira dinâmica pelo movimento contínuo de uma reta, o que gerou dúvidas na construção do gráfico solicitado.

Todavia, assim como consideravam Galileu, Torricelli e até mesmo Barrow, uma curva era intuitivamente gerada pelo movimento contínuo de um ponto móvel.

Sendo assim, conforme será detalhado posteriormente, utilizar-se-á na primeira tarefa um *software* como recurso auxiliar no intuito de observar, por meio da manipulação dinâmica, a construção e a variação das grandezas envolvidas adotando-se simultaneamente dois ou mais registros de representação do objeto matemático, por exemplo, o geométrico, gráfico ou o algébrico.

Após o estabelecimento de algumas conjecturas sobre a relação entre as grandezas envolvidas na **Tarefa 1**, bem como a relação entre seus gráficos de maneira intuitiva, será desenvolvida uma segunda tarefa para se comprovarem algumas conjecturas, testarem algumas hipóteses e efetuarem essas ligações procurando generalizar os resultados para o estabelecimento do TFC ao compreender a relação entre as operações de integração e derivação.

A **Tarefa 2**, portanto, buscou formalizar os resultados obtidos na tarefa anterior após a resolução de um problema que envolve alguns conceitos desenvolvidos na tarefa anterior bem como alguns resultados, utilizando-se do rigor na demonstração do TFC.

Em ambas as tarefas serão observadas nas respostas dos alunos os aspectos ligados à intuição descritos por Poincaré (1995), a relação entre os componentes formal, algorítmico e intuitivo, assim como descreveu Fischbein (1987), para avaliar quais desses componentes foram mais relevantes para a compreensão das tarefas, além da questão da visualização com a utilização do *software* e a relação com a intuição e o rigor conforme os trabalhos de Tall (1991a).

Com isso, em síntese, a **Tarefa 1** teve por objetivo, por meio do registro gráfico, desenvolver intuitivamente os conceitos de acumulação e variação, buscando uma relação mútua entre ambas e auxiliando na compreensão do TFC.

A **Tarefa 2** procurou explorar a relação de acumulação e variação em um contexto mais geral utilizando-se da representação gráfica e algébrica, buscando assim obter algumas formalizações a respeito de como se processa a relação entre operações de integração e derivação e sob quais condições isso é possível para posteriormente estabelecer-se o TFC.

Conforme explicitado, para explorar algumas propriedades gráficas e geométricas relacionadas ao TFC nas seções, fez-se necessário o uso auxiliar de um recurso computacional, conforme será descrito a seguir.

### 5.1 – O uso do recurso computacional

Do ponto de vista do contexto histórico, o estudo da variação de uma grandeza, especificamente do espaço em função do tempo, estava ligado à questão do movimento, em que os matemáticos como Torriceli e Galileu, interpretavam uma curva como o movimento contínuo de um ponto ao longo do tempo. A ideia de a variação e a acumulação estarem relacionada ao movimento parece ser um fator a ser relevado na elaboração da intervenção de ensino, pois tais conceitos são dinâmicos e não estáticos, o que suscita a utilização de um recurso computacional a fim de que os alunos possam intuitivamente perceber essa conexão sob um aspecto dinâmico.

Sendo assim, selecionou-se o *software* GeoGebra para a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos, visando trabalhar com os alunos a ideia intuitiva de variação e acumulação por meio da Geometria Dinâmica, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso.

O GeoGebra<sup>1</sup> é um *software* gratuito de Geometria Dinâmica, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra. Ele possui a vantagem de dispor, ao mesmo tempo, de duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático: a geométrica e a algébrica, por exemplo, e essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

---

<sup>1</sup> Para maiores informações: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)



No Brasil foi criado pelo grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e o Curso de Ciência da Computação o Instituto GeoGebra de São Paulo, com sede na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP e presidida pela prof. Dra. Celina A. A. P. Abar.

Em linhas gerais, os Institutos GeoGebra, por meio do *software* livre, compartilham experiências sobre capacitação para o uso do *software*, oferecem suporte para o desenvolvimento de materiais por estudantes e professores para o aprimoramento da Educação Matemática, Ciência e Tecnologia, procuram promover a colaboração entre os profissionais e pesquisadores, buscando estabelecer parcerias e a formação de uma comunidade de usuários desse *software*.

Para a presente pesquisa, o uso do GeoGebra está ligado à questão da interação, manipulação dinâmica e visualização e a relação desses elementos com a intuição e o rigor, e não ao desenvolvimento dos conceitos do Cálculo associados com um curso sobre o *software*, pois todos os sujeitos da pesquisa envolvidos não tiveram nenhum contato ou manuseio com o GeoGebra.

Alguns arquivos utilizados pelas duplas foram construídos no GeoGebra pelo próprio autor, e alguns serão acessados diretamente no próprio *software*, onde serão usados alguns comandos de acordo com as necessidades da seção, e outros serão acessados por meio de um navegador de internet, em que os recursos do GeoGebra serão limitados, segundo a proposta ou necessidade da tarefa.

## 5.2 – O experimento

Os alunos que participaram das tarefas elaboradas possuem o mesmo perfil dos sujeitos da pesquisa do questionário-piloto: foram convidados e aceitaram participar 14 estudantes oriundos da mesma instituição de ensino (uma faculdade pública de tecnologia da região do grande ABC), e todos os alunos envolvidos não participaram do questionário-piloto e estão regularmente matriculados em Tecnologia em Polímeros e cursam atualmente a disciplina Cálculo II.

De maneira análoga ao questionário-piloto, todos os participantes envolvidos na intervenção de ensino assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (uma cópia desse termo encontra-se no Anexo C) declarando concordar em participar da presente pesquisa.

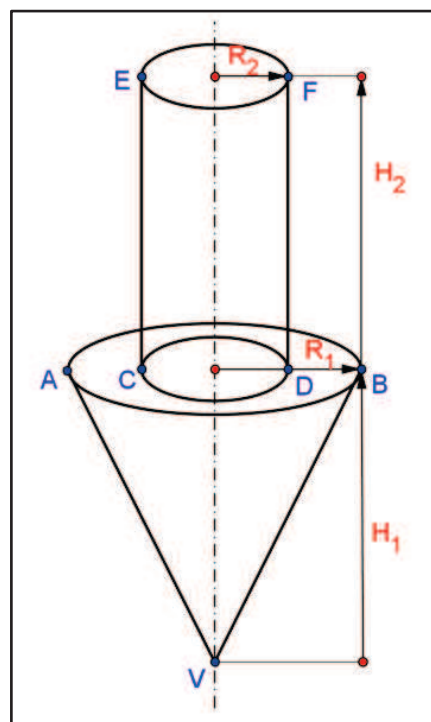
Na ementa do curso de Cálculo II são abordados os seguintes assuntos: Integrais Indefinidas, Técnicas de Integração, Teorema Fundamental do Cálculo, Aplicação de Integrais, Funções de Duas ou mais Variáveis, Limite, Continuidade, Derivadas Parciais, Máximos e Mínimos Relativos, Noções de Equações Diferenciais, Integrais Duplas e Triplas.

No período em que foram realizadas as tarefas, todos os participantes não tiveram contato até então com o TFC. As tarefas foram desenvolvidas fora do seu horário de aula, sendo que cada uma foi dividida em seções de aproximadamente cinquenta minutos, realizando-se em cada encontro duas seções.

Todas as seções ocorreram no Laboratório de Informática da faculdade, em horários agendados previamente, utilizando-se o *software* GeoGebra 4.0.

Na **Tarefa 1**, as questões se basearam em torno de considerações sobre um sólido obtido pelo conjunto de um cone e um cilindro circular reto. O sólido, denominado S, compõe-se do cilindro circular reto apoiado na base cone, e essas bases são concêntricas, porém de raios distintos, conforme a representação de seu modelo em 2D construído no GeoGebra, conforme a figura a seguir.

**Figura 48** – Modelo do Sólido S



Fonte: Autor, 2013

Esse sólido, a título de curiosidade, foi construído em um equipamento fornecido pela faculdade conhecido como Impressora 3D, em que, por meio de uma programação específica baseada em comando numérico computadorizado (CNC), insere-se gradativamente o material (teflon), por meio de camadas sobrepostas, obtendo-se a peça conforme a figura a seguir:

**Figura 49 – Sólido S**



Fonte: Autor, 2013

Cabe ressaltar que, para as investigações desta pesquisa, o GeoGebra serviu como ferramenta na elaboração da intervenção de ensino na construção do modelo de uma situação-problema, no caso um sólido de revolução com altura e seção transversal variáveis, e os alunos puderam manipular de maneira dinâmica apenas alguns elementos, conforme serão descritos posteriormente.

Como objeto de estudo para a primeira tarefa, analisou-se a variação da área da seção transversal obtida pela intersecção de um plano  $\pi$  paralelo à base com o sólido S, bem como o volume do sólido formado pelo tronco que vai desde o vértice V até a área da seção transversal em questão.

A escolha do sólido S se deve ao fato de que a área da seção varia inicialmente segundo uma função quadrática, e a seguir conforme uma função constante, e há nesse gráfico um ponto de descontinuidade. O volume do sólido S

varia segundo uma função quadrática e a seguir por uma função afim, com a diferença de que o gráfico nesse caso é uma linha contínua.

Ao analisar o contexto histórico ligado ao conceito de integral como sinônimo de acumular quantidades, observou-se a ideia intuitiva de acumulação ligada ao princípio de Cavalieri, de que um sólido é constituído por uma quantidade indefinida de superfícies paralelas denominadas “indivisíveis”, e que pode ser adequada aos propósitos iniciais dessa tarefa.

Ademais, a exploração das propriedades geométricas de um sólido se deve ao fato de que, do ponto de vista da intuição, de acordo com os resultados do questionário-piloto, especificamente na questão 2, em que se solicitava o cálculo da área de uma figura e do volume de um sólido irregular, os alunos apresentaram maior facilidade de manipulação dos sólidos em detrimento das figuras planas.

Com isso, os conceitos explorados, como a acumulação e a variação de uma grandeza, parecem mais perceptíveis trabalhando-se com um sólido geométrico as noções de área de uma seção transversal e o volume do sólido, procurando inicialmente formular intuitivamente algumas conjecturas do comportamento das duas grandezas e a relação que se pode estabelecer, tanto algébrica quanto graficamente, entre as elas.

Na **Tarefa 2**, após a validação de algumas conjecturas obtidas pelos alunos da tarefa anterior, eles resolveram um problema que trata de um gráfico representando a taxa da variação de água em um reservatório ao longo do tempo, em que se deseja obter o gráfico do volume de água nesse reservatório.

Essa tarefa teve também o intuito de manipular os registros gráfico e algébrico, objetivando verificar como se processam as condições para o estabelecimento do TFC.

De modo geral, as tarefas possuem alguns elementos relacionados ao TFC que, de acordo com as pesquisas analisadas e diante de alguns resultados obtidos no questionário-piloto, são primordiais para a compreensão do teorema, tais como: monotonicidade, taxa de variação, acumulação e continuidade de uma função.

Em todas as tarefas e seções, os alunos participantes receberam um material impresso com os enunciados das questões que seriam trabalhadas em cada seção, que, para fins de pesquisa, serão denominados de protocolos impressos da sequência de ensino.

Além desse protocolo impresso, os alunos tiveram acesso aos arquivos em extensão *html* e *ggb*<sup>2</sup> gerados pelo *software* GeoGebra contendo as questões que seriam respondidas nos protocolos em cada seção e que deveriam, de acordo com as suas necessidades, serem manipuladas utilizando-se o *software*.

Tais tarefas, bem como suas respectivas seções, serão descritas com maiores detalhes a seguir (as versões impressas encontram-se nos Anexos D e E).

### 5.3 - Tarefa 1

A primeira tarefa pode ser dividida em quatro seções com objetivos distintos, a saber:

- A **Seção 1** dessa atividade procura explorar de modo intuitivo a variação da área da seção transversal em função da distância de um plano paralelo à base no sentido de elaborar algumas conjecturas para a construção dos gráficos da relação entre essas grandezas.
- Na **Seção 2**, de maneira análoga à seção anterior, será analisada a relação entre o volume do sólido e a altura deste.
- Na **Seção 3**, serão verificadas as conjecturas realizadas manipulando-se e explorando-se as propriedades geométricas do problema em questão em um ambiente computacional.
- A **Seção 4** terá como objetivo relacionar os aspectos de variação e acumulação dos dois gráficos e de que forma essa relação pode ser estabelecida.

Quanto aos arquivos eletrônicos disponibilizados para os alunos, os arquivos referentes às **Seções 1 e 2** encontram-se na extensão *html* e serão acessados por meio de um navegador de internet, enquanto nas **Seções 3 e 4** os arquivos serão manipulados com o uso do GeoGebra na extensão *ggb*.

#### 5.3.1 - Tarefa 1 - Seção 1

A primeira tarefa apresentou numa primeira seção o seguinte enunciado:

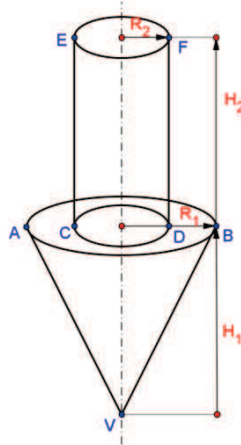
---

<sup>2</sup> *html*= HyperText Markup Language, que significa Linguagem de Marcação de Hipertexto é uma linguagem e *ggb* = extensão do arquivo GeoGebra

**Quadro 13 – 01. Tarefa 1 – Seção 1**

**01. TAREFA 1 – SEÇÃO 1**

Seja  $S$  o sólido formado por um cone circular reto  $VAB$  de raio de base  $R_1 = 2$  e altura igual a  $H_1 = 4$  e um cilindro circular reto  $CDEF$  de raio de base  $R_2 = 1$  e altura igual a  $H_2 = 4$  conforme a figura a seguir:

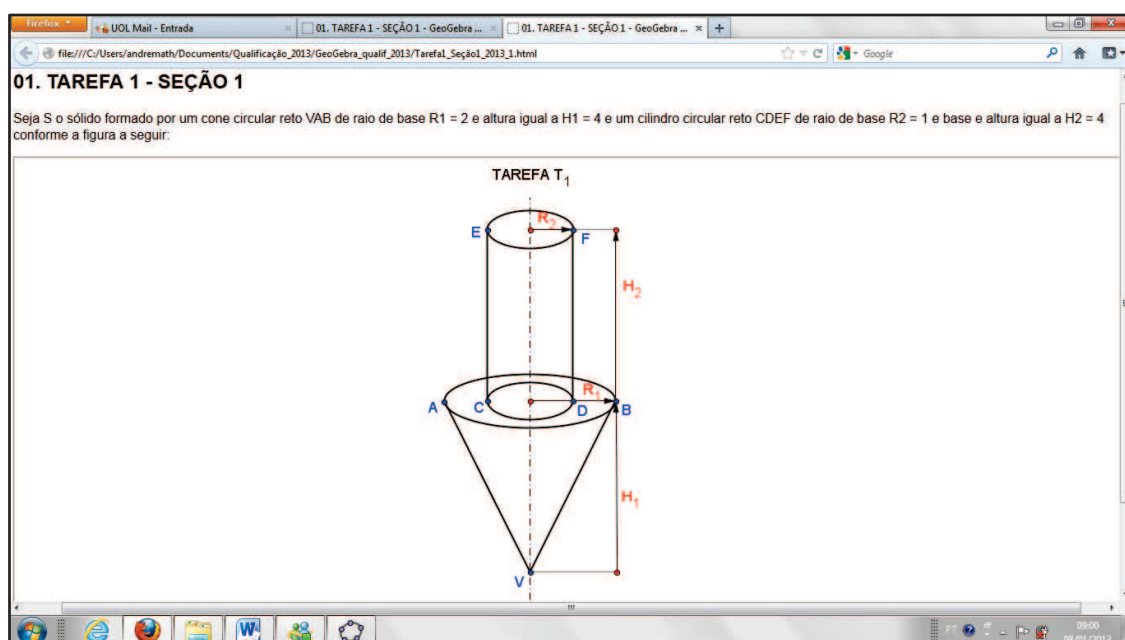


Fonte: Autor, 2013

Esse enunciado constitui uma apresentação da primeira tarefa em que são fornecidas as dimensões do sólido que será o objeto de estudo.

Os alunos participantes da sequência de ensino poderiam visualizar a tarefa ao abrirem no navegador de internet o arquivo correspondente, conforme a figura a seguir:

**Figura 50 – 01. Tarefa 1 – Seção 1**



Fonte: Autor, 2013

Ao abrirem o arquivo dessa seção, os alunos anotaram os dados referentes às dimensões do sólido no material impresso fornecido para cada um dos participantes.

O sólido em questão foi representado por meio de um modelo construído no GeoGebra no plano afim, e em um primeiro momento os alunos não teriam acesso a um sistema de coordenadas.

Nessa seção, os sujeitos da pesquisa ainda não têm acesso a nenhum recurso do GeoGebra, pois o arquivo foi aberto em extensão *html* por meio de um navegador de internet.

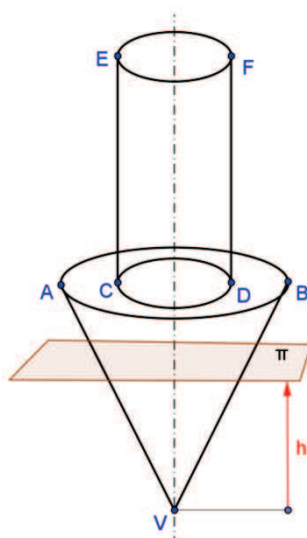
Esse procedimento teve por objetivo evocar e estimular a intuição geométrica por parte dos alunos, ao imaginarem, de acordo com os dados, o sólido de maneira tridimensional, bem como a situação-problema representada.

Após anotarem os dados referentes à tarefa, os alunos efetuaram a leitura do próximo enunciado, e, de maneira análoga, sem a possibilidade de utilizar algum comando do GeoGebra.

#### Quadro 14 – 02. Tarefa 1 – Seção 1

##### 02. TAREFA 1 – SEÇÃO 1

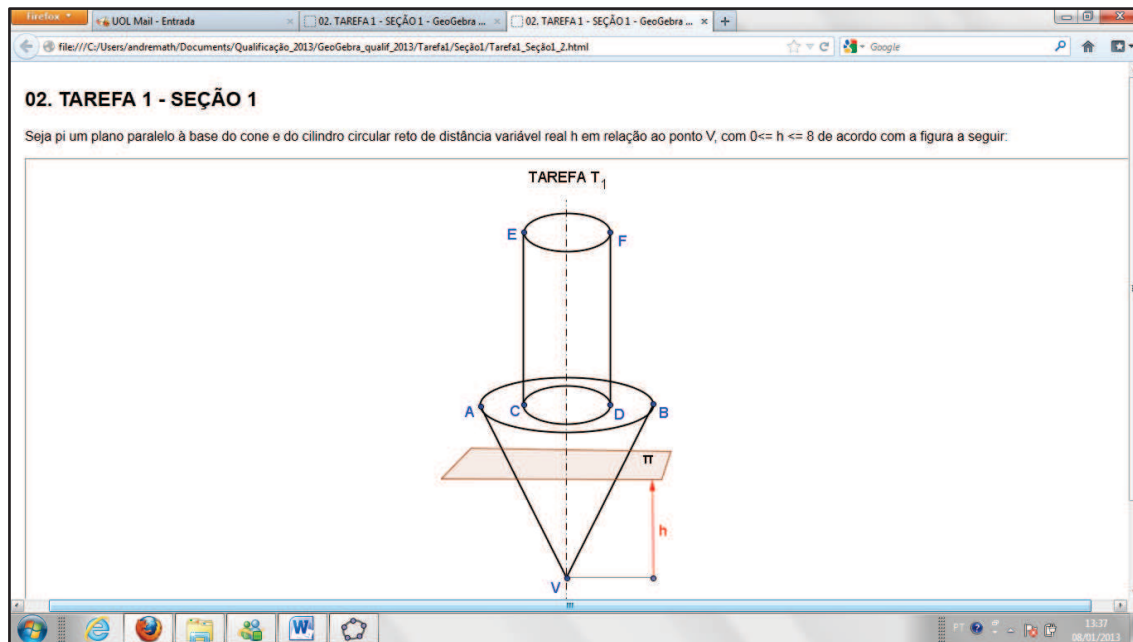
Seja  $\pi$  um plano paralelo à base do cone e do cilindro circular reto de distância variável real  $h$  em relação ao ponto  $V$ , com  $0 \leq h \leq 8$  de acordo com a figura a seguir:



Fonte: Autor, 2013

Esse enunciado encontra-se disponível no arquivo correspondente e pode ser visualizado de acordo com a figura a seguir:

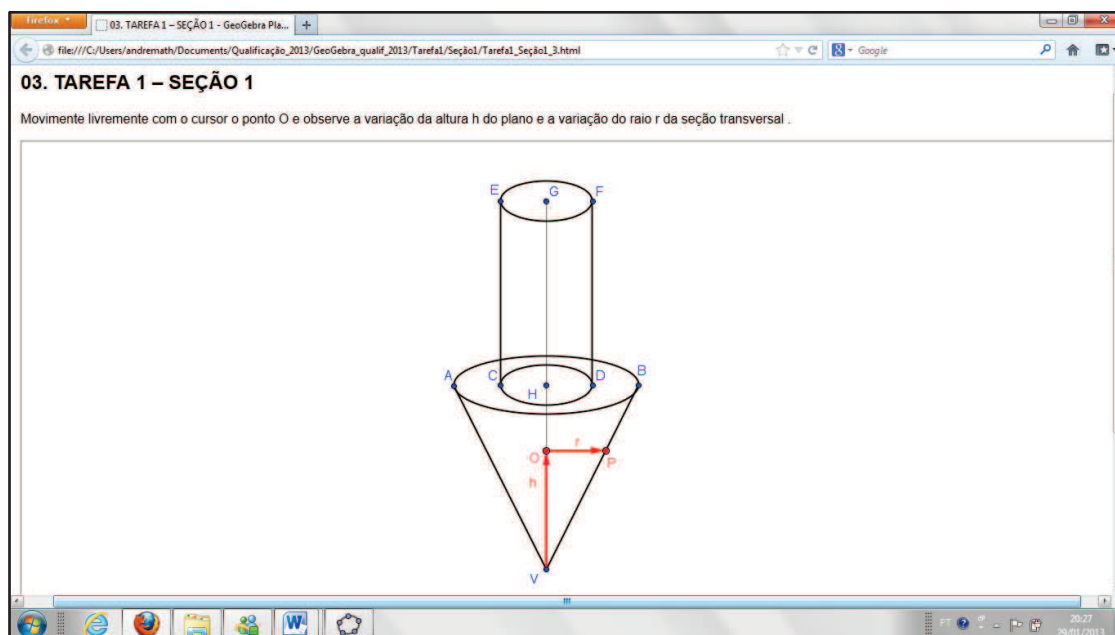
**Figura 51 – 02. Tarefa 1 – Seção 1**



Fonte: Autor, 2013

Após lerem as informações e anotarem no material impresso os dados fornecidos, os alunos podem acessar o seguinte arquivo:

**Figura 52 – 03. Tarefa 1 – Seção 1**



Fonte: Autor, 2013

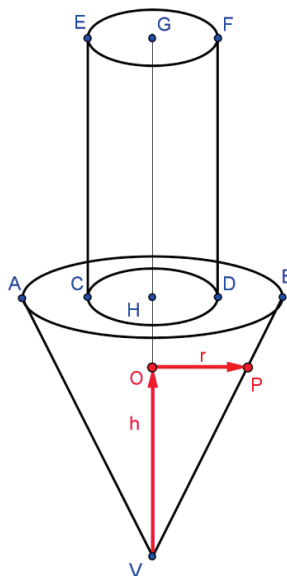


Esse arquivo apresenta o seguinte enunciado:

**Quadro 15 – 03. Tarefa 1 – Seção 1**

**03. TAREFA 1 – SEÇÃO 1**

Movimente livremente com o cursor o ponto O e observe a variação da altura  $h$  do plano e a variação do raio  $r$  da seção transversal.



Com as informações contidas no enunciado, responda às seguintes questões justificando a sua resposta.

- Como você faz para determinar o volume do sólido? Qual é o volume desse sólido?
- Considere a seção transversal  $A_S$  obtida pela interseção do plano  $\pi$  a uma distância  $h$  com o sólido  $S$ . Que figura é essa? Como você obtém a medida do raio  $r$  dessa seção em função de  $h$ ?
- Calcule a área da seção transversal para  $h = 1,5$  e  $h = 3,5$ . A seguir, calcule a área considerando  $h = 4$  e  $h = 5$ .
- Se você fosse construir o gráfico da variação  $A_S(h)$ , sendo  $A_S$  a área da seção transversal obtido pela interseção do plano  $\pi$  e  $h$  a distância desse plano ao vértice  $V$ , como você imagina que seria um gráfico que represente aproximadamente essa relação? Tente construir um esboço desse gráfico.

Fonte: Autor, 2013

O objetivo da **Seção 1** é procurar explorar intuitivamente, por meio de propriedades geométricas, a relação entre a área da seção transversal do sólido e a

distância do plano  $\pi$  ao vértice  $V$  do sólido. A ideia principal dessa seção é estabelecer o esboço de um gráfico que mostre o comportamento dessas grandezas.

Cabe destacar que a relação solicitada entre a área da seção transversal e a altura não se constitui rigorosamente uma função, pois no ponto  $h = 4$  o aluno pode obter duas respostas ao considerar a área da seção tanto do cone quanto do cilindro circular reto.

Diante do exposto, há o interesse em observar como o aluno vai se comportar diante de tal questão e se ele percebe a possibilidade de existirem duas respostas.

Segundo Lima (2012), até o final da década de 50, os cursos de Cálculo Diferencial e Integral, ministrados nas universidades de São Paulo, como a USP, apresentavam como referência bibliográfica a obra *A Course of Pure Mathematics*, de G. H. Hardy (1957), que considera função uma relação entre duas variáveis, podendo um mesmo elemento do domínio possuir mais de uma imagem. Nesse caso, essa relação recebia o nome de função polídroma, em contraposição àquelas em que cada elemento do domínio possui uma imagem, denominada função monódroma.

Essa questão, no sentido de a relação apresentada nessa seção se constituir ou não de uma função, é uma expectativa que se pode formular relativamente às possíveis respostas dos sujeitos da pesquisa.

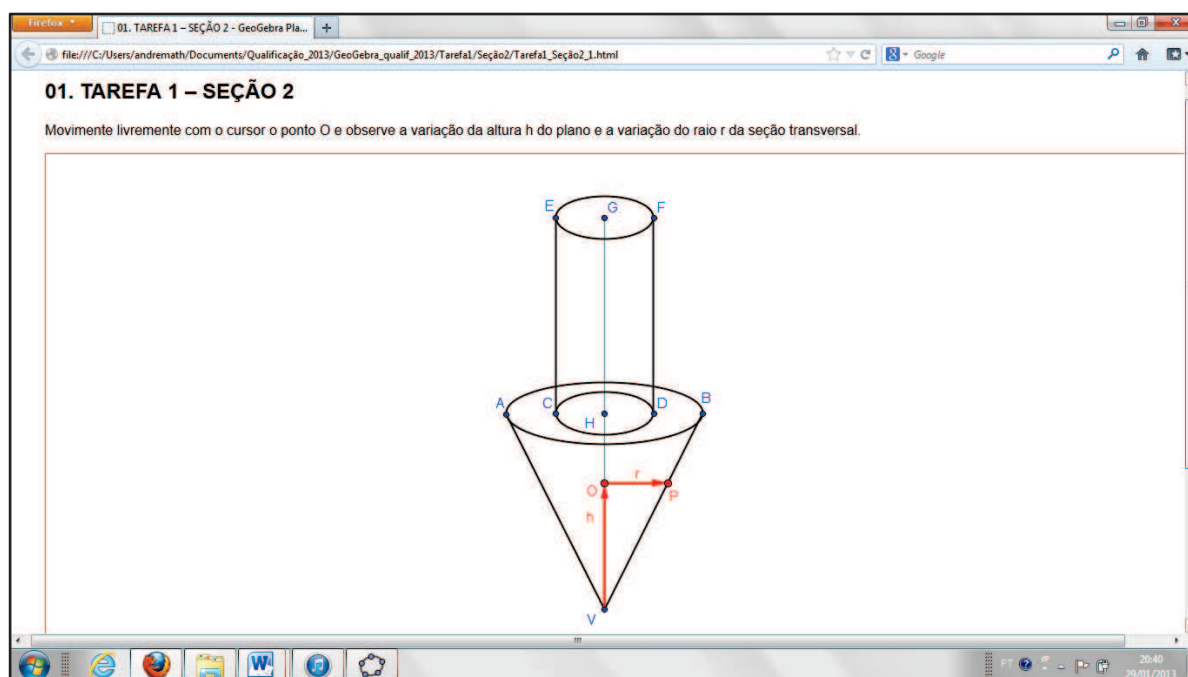
### 5.3.2 – Tarefa 1 – Seção 2

A segunda seção apresentou basicamente o mesmo objetivo da seção anterior, e as conjecturas foram feitas baseadas no cálculo do volume do sólido obtido pela interseção do plano  $\pi$  com o sólido  $S$ .

Um fato que deve ser observado nessa seção diz respeito à relação solicitada se constituir uma função e o gráfico dela ser uma linha contínua, ao contrário da seção anterior em que o gráfico apresenta uma descontinuidade.

Com isso, a **Seção 2**, também acessível aos alunos por meio do navegador da internet, apresenta inicialmente o mesmo enunciado da seção anterior, da seguinte forma:

Figura 53 – 01. Tarefa 1 – Seção 2

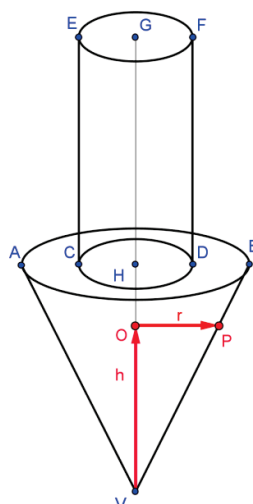


Fonte: Autor, 2013

Quadro 16 – 01. Tarefa 1 – Seção 2

**01. TAREFA 1 – SEÇÃO 2**

Movimente livremente com o cursor o ponto O e observe a variação da altura  $h$  do plano e a variação do raio  $r$  da seção transversal.



De acordo com as informações contidas no enunciado, responda às seguintes questões justificando a sua resposta:

a) Calcule o volume do sólido para  $h = 1$  e  $h = 3$ . A seguir, calcule o volume para  $h = 4$  e  $h = 6$ .

**b)** Se você fosse construir o gráfico da variação  $V_S(h)$ , sendo  $V_S$  o volume do sólido obtido pela interseção do plano  $\pi$  e  $h$  a distância desse plano ao vértice  $V$ , como você imagina que seria um gráfico que represente aproximadamente essa relação? Tente construir um esboço desse gráfico.

Fonte: Autor, 2013

### 5.3.3 – Tarefa 1 – Seção 3

Após realizar algumas conjecturas sobre o comportamento do gráfico da área da seção transversal e do volume e em função da altura, a terceira seção tem por objetivo explorar de maneira dinâmica o comportamento dos gráficos em questão com os recursos computacionais do *software* GeoGebra 4.0 para se comprovarem algumas conjecturas e testarem algumas hipóteses elaboradas na seção anterior.

O adendo nessa seção consiste na utilização de um sistema de coordenadas cartesianas em contrapartida ao plano afim utilizado anteriormente, no sentido de o aluno manipular os objetos geométricos e observar a coordenação entre o registro geométrico e o registro gráfico, procurando facilitar a compreensão do problema.

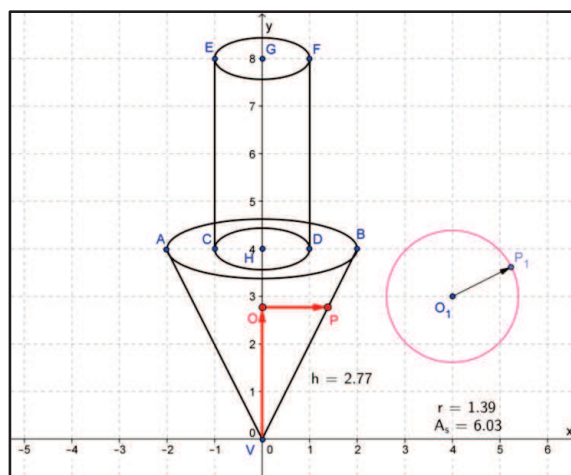
Por meio de um modelo que representa geometricamente o cone circular reto VAB, cujo raio de base possui medida igual a  $\overline{HB} = 2$  e altura igual a  $\overline{VH} = 4$ , e o cilindro circular reto CDEF, cuja base é concêntrica e sobreposta à base do cone, cujo raio da base é igual a  $\overline{GF} = 1$  altura igual a  $\overline{HG} = 4$ .

Sobre o eixo  $\overline{VG}$  do sólido têm-se o ponto  $O$ , que pode deslocar-se livremente pelo mesmo eixo, e o ponto  $P$  que se movimenta ao longo dos segmentos  $\overline{VB}$  e  $\overline{DF}$ , dado que o segmento  $\overline{OP}$  representa o raio da seção transversal obtida pela intersecção do plano  $\pi$  paralelo à base.

Além disso, para estudar a variação do raio da área da secção e, consequentemente, a área da seção transversal e o volume do sólido  $S$ , construiu-se o segmento  $\overline{OP}$  de comprimento variável que representará o raio  $r$  em questão, bem como foi construído um círculo de centro  $O_1$  e raio  $O_1P_1$  cuja medida é igual ao comprimento do segmento variável  $r = \overline{OP}$ .

Ao movimentar o ponto  $O$  sobre o eixo  $\overline{VG}$  observa-se a medida da altura variar e consequentemente a medida do raio  $r = \overline{OP}$  e da área  $A_S$  da seção transversal, conforme a figura a seguir:

**Figura 54** – 01. Tarefa 1 – Seção3 – Janela de Visualização 1

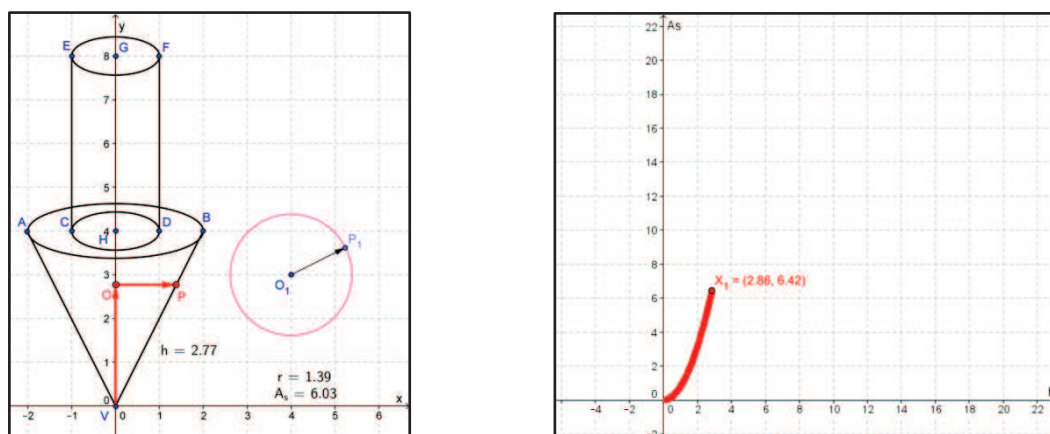


Fonte: Autor, 2013

Para mostrar o comportamento dos gráficos da relação  $A_S(h)$  manipulando-se as propriedades geométricas do sólido  $S$  de maneira dinâmica, construiu-se o ponto variável  $X_1$  cuja abscissa é numericamente igual ao valor da altura  $h$  e a ordenada ao valor da área da seção transversal. Esse ponto descreverá a variação da área  $A_S$  da seção transversal em função da altura do plano de intersecção.

Ao movimentar o ponto  $O$ , o ponto  $X_1$  desloca-se simultaneamente no plano cartesiano, conforme a figura a seguir:

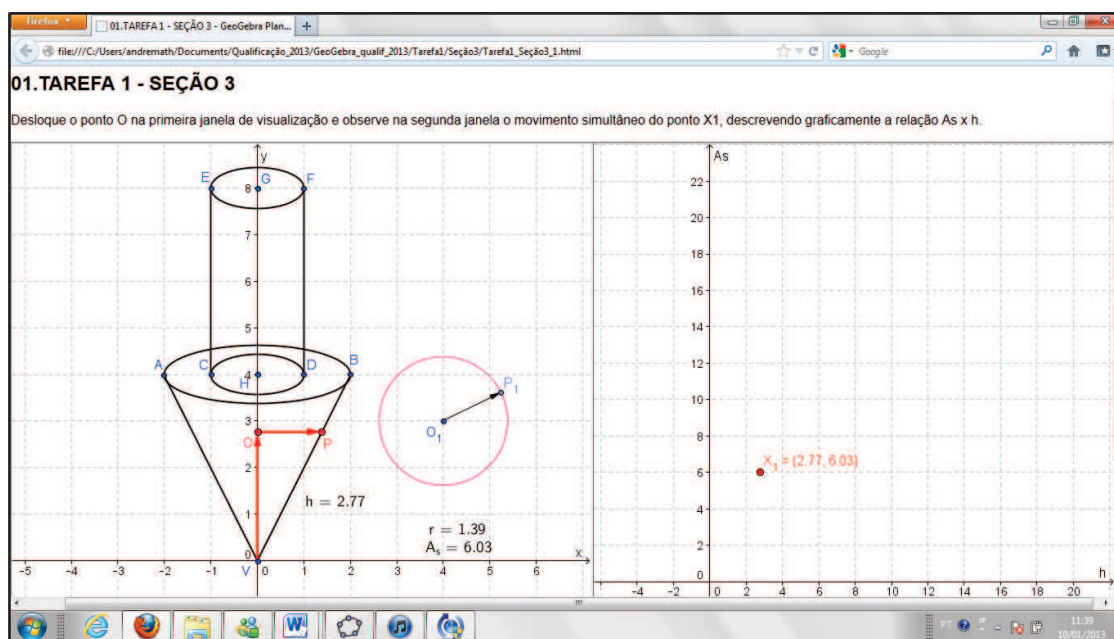
**Figura 55** – 01. Tarefa 1 – Seção3 – Janela de Visualização 2



Fonte: Autor, 2013

Dessa forma, a **Seção 3** apresenta as seguintes questões de acordo com o quadro a seguir:

**Figura 56 – 01. Tarefa 1 – Seção 3**



Fonte: Autor, 2013

**Quadro 17 – 01. Tarefa 1 – Seção 3**

Desloque o ponto O na primeira janela de visualização e observe na segunda janela o movimento simultâneo do ponto  $X_1$ , descrevendo graficamente a relação  $A_s \times h$ .

Responda:

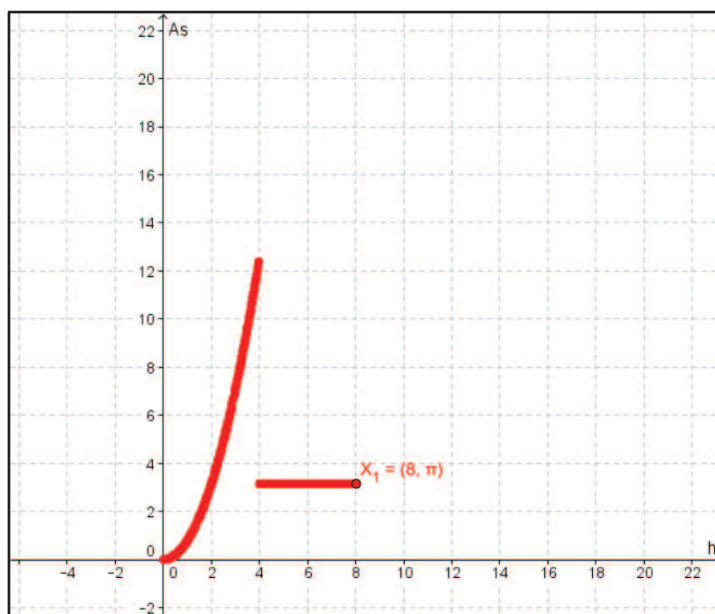
- Observe que ao movimentar o ponto P no intervalo  $0 \leq h \leq 4$ , qual o comportamento do gráfico? E para o intervalo  $4 \leq h \leq 8$ ?
- No ponto de abscissa  $h = 3$ , qual o valor da área da seção?
- Qual é o valor da área da seção no ponto de abscissa  $h = 4$ , a que possui raio igual a 1 ou igual a 2?

Fonte: Autor, 2013

Observa-se que ao deslocar o ponto O no intervalo  $0 \leq h \leq 4$ , a área da seção transversal aumenta não de maneira linear, talvez segundo uma função polinomial do segundo grau. Já no intervalo  $4 \leq h \leq 8$  a seção transversal é constante, pois trata-se da seção transversal do cilindro circular reto. O gráfico apresenta no ponto de abscissa  $h = 4$  uma “descontinuidade”, conforme a figura a seguir:



**Figura 57 – 01. Tarefa 1 – Seção3 – Gráfico  $A_s \times h$**

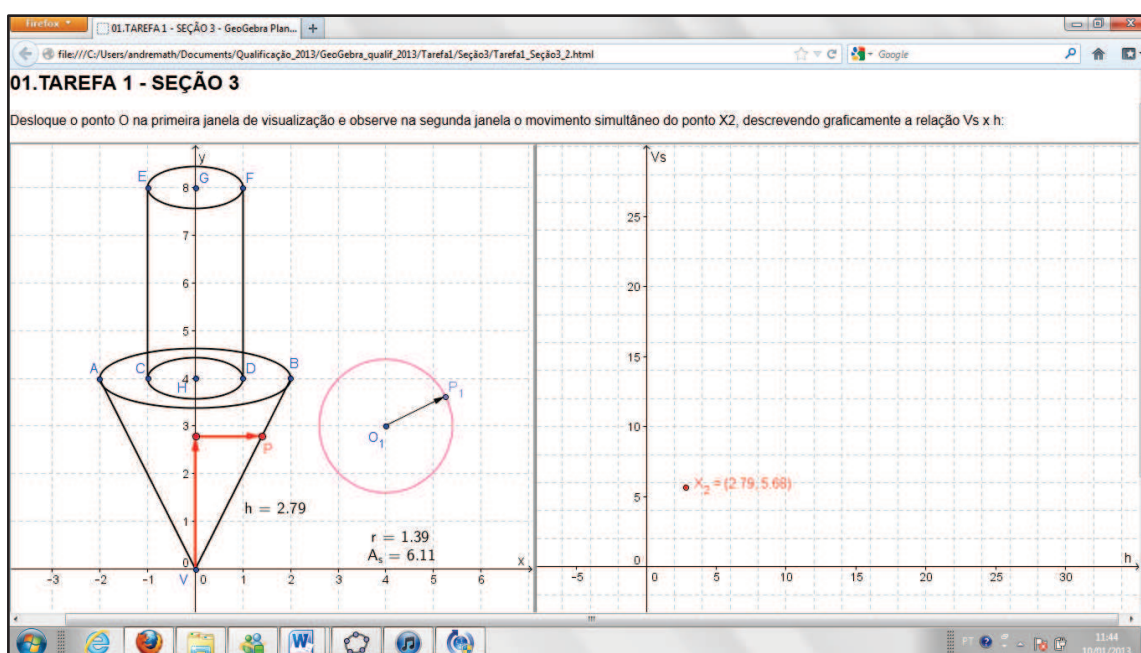


Fonte: Autor, 2013

De maneira análoga, para o gráfico do volume do sólido  $V_s$  em função da altura  $h$ , pode-se criar um ponto de coordenadas variável  $X_2$ , cuja abscissa é numericamente igual ao valor da altura  $h$  e a ordenada ao valor do volume do sólido  $S$ .

Com isso, a segunda parte da seção apresenta os seguintes itens:

**Figura 58 – 02. Tarefa 1 – Seção 3**



Fonte: Autor, 2013

**Quadro 18 – 02. Tarefa 1 – Seção 3**

Desloque o ponto O na primeira janela de visualização e observe na segunda janela o movimento simultâneo do ponto  $X_2$ , descrevendo graficamente a relação  $V_s \times h$ :

Responda:

**d)** Observe que ao movimentar o ponto P no intervalo  $0 \leq h \leq 4$ , qual o comportamento do gráfico? E para o intervalo  $4 \leq h \leq 8$ ?

**e)** No ponto de abscissa  $h = 2$ , qual o valor do volume do sólido?

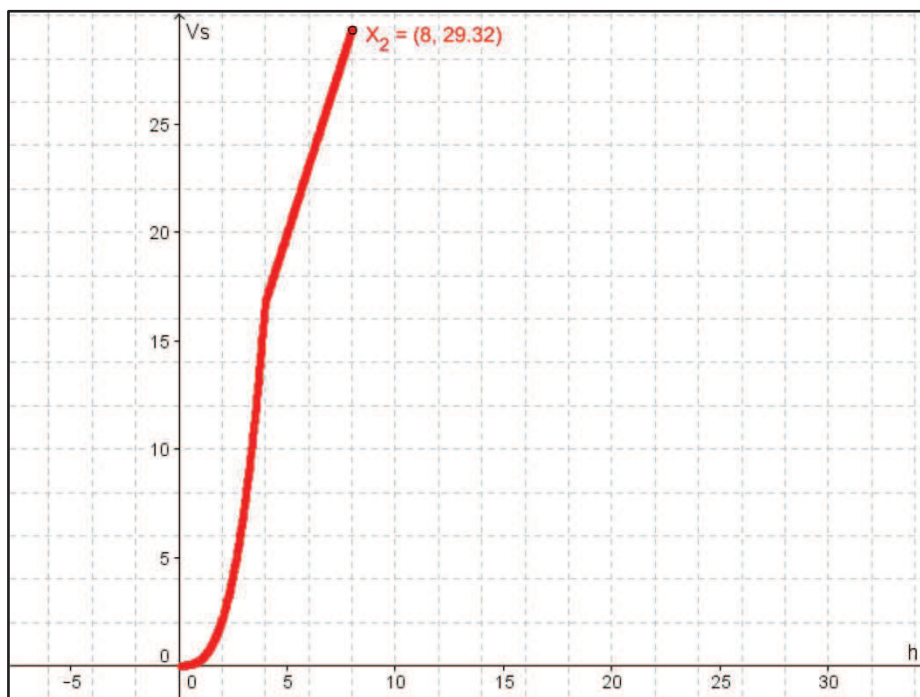
**f)** Qual é o valor do volume do sólido no ponto de abscissa  $h = 4$ ?

Fonte: Autor, 2013

No caso da relação  $V_s \times h$ , ao deslocar o ponto O no intervalo  $0 \leq h \leq 4$ , o volume do sólido aumenta provavelmente por meio de uma função polinomial de terceiro grau, e no intervalo  $4 \leq h \leq 8$  o aumento é dado segundo uma função polinomial do primeiro grau.

Conforme reiterado, esse gráfico representa uma função contínua no intervalo considerado e no ponto de abscissa  $h = 4$  a função não é derivável, segundo o esboço a seguir:

**Figura 59 – 02. Tarefa 1 – Seção3 – Gráfico  $V_s \times h$**



Fonte: Autor, 2013



### 5.3.4 – Tarefa 1 – Seção 4

De acordo com os resultados obtidos na seção anterior, na quarta e última sessão da primeira tarefa, após a construção dos gráficos das relações no GeoGebra, os alunos deverão responder às seguintes questões que constituem a Seção 4:

**Quadro 19** – 02. Tarefa 1 – Seção 4

#### **02. TAREFA 1 – SEÇÃO 4**

Considere os gráficos das relações obtidos anteriormente. Vamos denominar o gráfico da relação  $A_S(h)$  por gráfico 1 e o gráfico da relação  $V_S(h)$  por gráfico 2. Responda às seguintes questões justificando a sua resposta:

- a) O que você acha sobre o fato de que no intervalo  $[4, 8]$  o gráfico 1 é constante e no gráfico 2 isso não ocorrer? Por que nesse intervalo no gráfico 2 o crescimento é linear?
- b) Segundo o gráfico 2, o crescimento tem o mesmo comportamento? Se alterar em algum ponto, por que isso acontece?
- c) Sobre o gráfico 1, avalie aproximadamente a área limitada sob o gráfico no intervalo  $[1, 3]$ . A seguir calcule a variação do volume no mesmo intervalo considerado no gráfico 2. O que você conclui?
- d) Calcule agora a área limitada no intervalo  $[5, 6]$  bem como a variação do volume nesse intervalo.
- e) Calcule no gráfico 2 a variação de volume no intervalo  $[2, 4]$ . Como eu poderia fazer para obter essa variação a partir do gráfico 1?
- f) Que relação que você observa você pode estabelecer entre os gráficos obtidos 1 e 2?

Fonte: Autor, 2013

O item **a** procura discutir a ideia de que, para se determinar o volume do sólido, devem ser acumuladas quantidades infinitamente pequenas, enquanto para se calcular a área da seção transversal basta observar a variação do volume em um intervalo infinitamente pequeno.

Para responder esse item, o aluno pode perceber que a área da seção é constante no intervalo  $[4, 8]$ , por se tratar da seção transversal do cilindro circular

reto. Já para o cálculo do volume do sólido obtido, observa-se, de acordo com o sólido  $S$ , que ele é sempre acumulativo, e não sendo constante.

Essas conclusões podem ser utilizadas para responder o item **b**, percebendo que o aumento do volume no intervalo considerado é sempre igual, pois a área da seção transversal é constante.

O gráfico 2 apresenta no ponto de abscissa  $h = 4$  uma mudança de comportamento; no intervalo  $[0, 4]$  o volume varia segundo uma função polinomial do terceiro grau e no intervalo  $[4, 8]$ , segundo uma variação linear. Isso se deve ao fato de que o gráfico 1 apresenta nesse ponto uma “descontinuidade”. Consequentemente, nesse ponto, no gráfico 2 a função não é derivável.

O objetivo dos próximos itens é procurar explorar a propriedade de que, para se obter a área sob o gráfico 1 em um intervalo, basta calcular a variação do volume no gráfico 2 e vice-versa.

A relação de acumulação (volume) e variação (área da seção transversal) pode ser explorada de forma intuitiva pelos alunos ao resolver o item **c**.

O aluno, ao efetuar o cálculo dos itens solicitados, pode perceber que os valores são iguais, e, para o cálculo aproximado da área no intervalo considerado, pode obtê-la de diversas maneiras: aproximando a região com a construção de retângulos ou procurando determinar o valor por meio da integral. Por seu turno, para a variação do volume, a área pode ser calculada diretamente pelo gráfico 2. Esse procedimento pode ser repetido para o item **d**.

Esperou-se que os alunos considerassem o cálculo aproximado da área mais trabalhoso do que simplesmente o cálculo de uma variação. Essa relação mútua e recíproca, mesmo testada de forma intuitiva, pode ser conjecturada no item **e**.

Por fim, no item **f**, os alunos estabeleceram uma conjectura sobre a relação entre a acumulação e a variação entre as duas grandezas envolvidas para, posteriormente na próxima tarefa serem comprovadas.

## 5.4 – Tarefa 2

A próxima tarefa procura explorar algumas propriedades obtidas nas seções anteriores, com o objetivo de refinar algumas conjecturas elaboradas sobre a relação entre os conceitos de acumulação e variação, utilizando-se dos registros

gráfico e algébrico de uma função e sua respectiva função primitiva. Ela pode ser dividida nas seguintes seções:

- A **Seção 1** foi dedicada ao estabelecimento da lei algébrica das relações da tarefa anterior, bem como a construção dos seus respectivos gráficos no GeoGebra, contando com a participação e a intervenção do professor;
- Na **Seção 2** os alunos deveriam redigir uma conclusão a respeito das relações obtidas na seção anterior, por meio do registro da língua natural e do registro algébrico.
- Na **Seção 3** os alunos resolveram um problema envolvendo os conceitos de acumulação e variação. Essa questão baseia-se no trabalho de Carlson et al. (2007) que, por meio de um ensino experimental, desenvolveram com os alunos os conceitos de acumulação e a taxa de variação dessa acumulação, e, de acordo com algumas pesquisas analisadas, constitui o cerne do TFC.
- A **Seção 4** teve como objetivo estabelecer a relação entre as operações de integração e derivação, formalizando-se com isso o TFC; essa fase foi realizada com a participação do examinador.

#### 5.4.1 - Tarefa 2 - Seção 1

Na primeira seção da segunda tarefa, os alunos, a partir das conjecturas elaboradas sobre o comportamento dos gráficos construídos no GeoGebra na seção anterior, formalizaram algebricamente a lei de formação, bem como estabeleceram uma relação entre ambas.

Essa seção inicia-se com a intervenção do professor, que apresentou e discutiu com a participação das duplas a obtenção da lei de formação das relações  $A_S(h)$  e  $V_S(h)$ , ressaltando-se como essas expressões algébricas podem ser obtidas nos intervalos considerados, procurando testar e comprovar algumas conjecturas formuladas pelos alunos nas seções anteriores.

Nesse primeiro momento, os alunos devem anotar no material impresso recebido alguns subsídios para que possam responder ao seguinte item, conforme será descrito a seguir.

**Quadro 20 – 02. Tarefa 2 – Seção 1**

**01. TAREFA 2 – SEÇÃO 1**

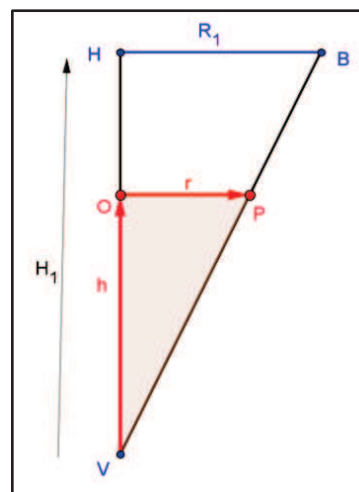
a) Determine a expressão algébrica para o cálculo da área da seção transversal e do volume do sólido S da seção anterior em função da altura  $h$  no intervalo  $[0, 8]$ .

Fonte: Autor, 2013

A primeira relação estabelecida, ou seja, a área  $A_s$  em função da altura  $h$ , pode ser obtida da seguinte maneira:

i) Para  $0 \leq h \leq 4$ , os triângulos  $VOP$  e  $VHB$  são semelhantes pelo caso  $AA$  (ângulo-ângulo), em que se tem:

**Figura 60 – Triângulos  $VOP$  e  $VHB$**



Fonte: Autor, 2013

Sendo  $R_1 = 2$  e  $H_1 = 4$ , tem-se:

$$\frac{r}{R_1} = \frac{h}{H_1} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

A área da seção transversal  $A_1$  é um círculo de raio  $r$  e pode ser calculada da seguinte maneira:

$$A_1 = \pi r^2 \Rightarrow A_1 = \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1(h) = \frac{\pi h^2}{4}$$

ii) Para  $4 \leq h \leq 8$ , a área da seção transversal é constante e igual a  $A_2(h) = \pi \cdot 1^2 = \pi$ , tem-se a seção transversal constante e igual à área da base do cilindro circular reto, com raio da base igual a 1. Sendo assim, pode-se escrever a relação solicitada da seguinte maneira:

$$A_S(h) = \begin{cases} \frac{\pi h^2}{4}, & \text{se } 0 \leq h \leq 4 \\ \pi, & \text{se } 4 \leq h \leq 8 \end{cases}$$

Em outras palavras, no intervalo  $[0, 4]$  a área da seção transversal é diretamente proporcional ao quadrado do valor da altura, e no intervalo  $[4, 8]$  tem-se o valor constante para a referida área.

Cabe ressaltar, conforme comentado anteriormente, que no ponto de abscissa  $h = 4$  podem ser obtidos dois valores para a área da seção. Para que essa relação seja uma função, pode-se atribuir o valor que corresponde à base do cone, ou seja,  $A(4) = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi$ . Sendo assim, tem-se a seguinte função:

$$A_S = \begin{cases} \frac{\pi h^2}{4}, & \text{se } 0 \leq h \leq 4 \\ \pi, & \text{se } 4 < h \leq 8 \end{cases}$$

Para o cálculo da relação do volume do sólido em função da altura, tem-se:

iii) Para  $0 \leq h \leq 4$ , o volume do sólido  $V_1$  é igual ao volume de um cone circular reto de altura igual a  $h$  e raio da base igual a  $r$ . Com isso:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot r^2 h}{3}$$

Sendo  $r = \frac{h}{2}$ , vem:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi h^3}{12}$$

iv) Para  $4 < h \leq 8$ , tem-se a seguinte situação: o volume do sólido corresponde ao volume  $V_1$  do cone circular reto de raio de base igual a 2 e altura de medida igual a 4 somado ao volume do cilindro circular reto de raio de base igual a 1 e altura igual a  $(h - 4)$ , da seguinte maneira:

$$V_2 = V_1 + \pi r^2(h - 4)$$

Sendo  $V_1 = \frac{\pi h^3}{12} = \frac{\pi 4^3}{12} \Rightarrow V_1 = \frac{16\pi}{3}$ , tem-se:

$$V_2 = \frac{16\pi}{3} + \pi 1^2(h - 4) \Rightarrow V_2 = \frac{16\pi}{3} + \pi h - 4\pi \Rightarrow V_2 = \frac{4\pi}{3} + \pi h$$

Com isso:

$$V_S = \begin{cases} \frac{\pi h^3}{12}, & \text{se } 0 \leq h \leq 4 \\ \frac{4\pi}{3} + \pi h, & \text{se } 4 < h \leq 8 \end{cases}$$

Observa-se que o volume do sólido no intervalo  $[0, 4]$  é diretamente proporcional ao cubo da medida da altura, e no intervalo  $]4, 8]$  a variação é linear.

Depois de anotarem todas as informações e da obtenção da lei de formação das relações, os alunos tiveram acesso aos comandos do GeoGebra no sentido de se trabalharem com algumas ferramentas necessárias na construção dos gráficos solicitados.

No *software*, essas duas relações podem ser representadas graficamente no *Campo de Entrada* do GeoGebra, no qual os alunos devem inserir as seguintes expressões:

$$- A_1(h) = \frac{\pi h^3}{12}$$

$$- A_2(h) = \pi$$

$$- \text{Função } A = \text{Se}[0 \leq x \leq 4, A_1, A_2]$$

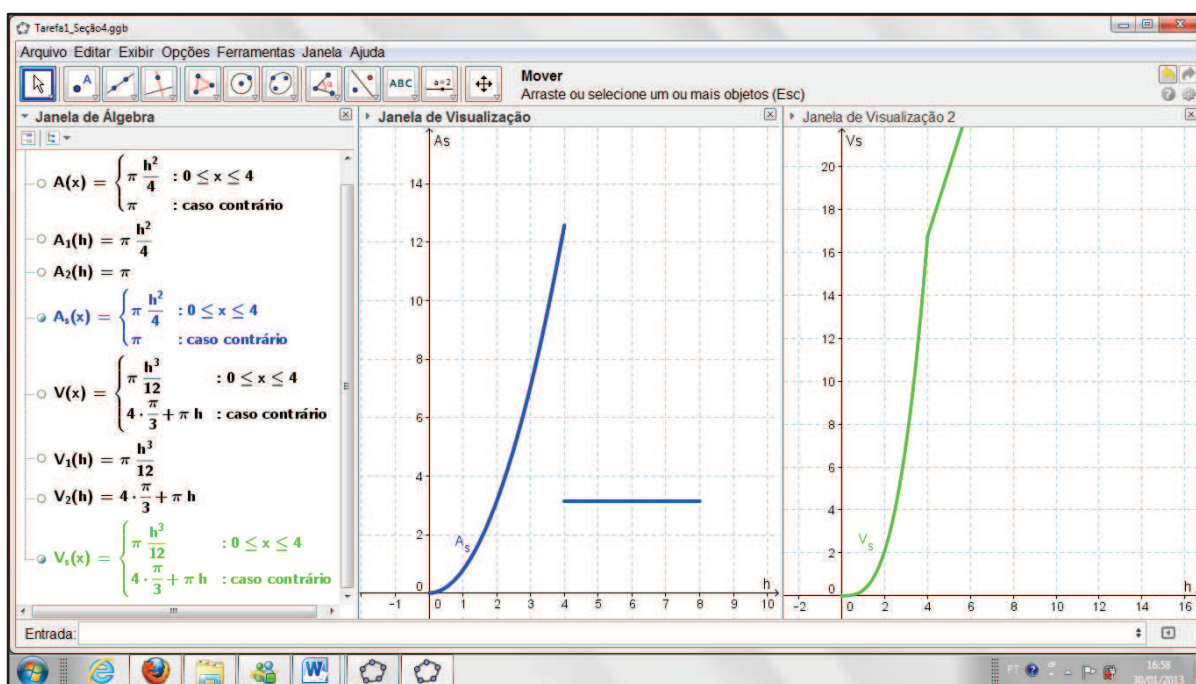
Para construir-se no *software* o gráfico da relação desejada  $A_s(h)$  no intervalo  $0 \leq h \leq 8$  basta inserir  $\text{Função}[A, 0, 8]$  e renomeá-la para  $A_s$ . Todas essas alterações são visíveis na opção *Janela de Álgebra* disponível no *software*.

De maneira análoga, para o gráfico do volume, são inseridas no Campo de Entrada as seguintes expressões:

- $V_1(h) = \frac{\pi h^3}{12}$
- $V_2(h) = \frac{4\pi}{3} + \pi h$
- $\text{Função } V = \text{Se}[0 \leq x \leq 4, V_1, V_2]$
- $\text{Função } [V, 0, 8]$  e renomeá-la para  $V_s$ .

Os dois gráficos podem ser manipulados simultaneamente nas duas janelas de visualização do *software*, conforme a figura a seguir:

Figura 61 – 02. Tarefa 2 – Seção 1



Fonte: Autor, 2013

O próximo passo consiste em estabelecer a relação entre os dois gráficos esboçados na seção anterior. Isso pode ser feito, em grande medida, explorando-se os conceitos de acumulação e variação de duas grandezas.

Pode-se considerar, conforme se observou no contexto histórico, especificamente nas ideias ligadas ao princípio de Cavalieri, que o volume do sólido pode ser obtido pela soma das “camadas” de seções infinitamente pequenas e que a variação desse volume em relação à altura apresenta como resultado a área da seção.

#### 5.4.2 - Tarefa 2 - Seção 2

A próxima seção tem como objetivo procurar estabelecer algumas conclusões sobre os gráficos obtidos na seção anterior considerando a relação existente entre o volume do sólido e a área da seção transversal.

Para isso, a seção foi dividida em duas questões, de acordo com a descrição a seguir:

**Quadro 21 – 02. Tarefa 2 – Seção2**

#### **02. TAREFA 2 – SEÇÃO 2**

**a)** Vamos elaborar uma conclusão provisória a respeito das tarefas envolvendo o cálculo da área da seção transversal e o volume do sólido S.

**- Conclusão provisória:**

**- Definição:**

Fonte: Autor, 2013

Essa seção foi coordenada e contou com a intervenção do professor pesquisador, no sentido de procurar organizar as ideias e conjecturas formuladas pelas duplas, procurando formalizar os resultados obtidos.

No primeiro item, as duplas deveriam redigir de forma resumida uma conclusão provisória sobre os resultados inferidos, observando o aspecto acumulativo do volume dado pela soma de camadas “infinitamente pequenas”, que no caso correspondem à área da seção transversal.



Essa conclusão, conforme solicitada na tarefa anterior, seria intuída pela relação entre os dois gráficos construídos em que para se obter a soma das áreas em um dado intervalo bastava calcular a variação de volume nesse mesmo intervalo e vice-versa, e o volume poderia ser obtido, portanto, por uma acumulação e a área da seção transversal, por uma diferença dessa acumulação, assim como intuíram Newton e Leibniz ao perceberem a relação recíproca entre integral e derivada.

Após a formalização de uma conclusão provisória, no próximo item espera-se que as duplas elaborarem uma definição sobre a relação encontrada entre a área da seção transversal e o volume do sólido  $S$ , privilegiando-se o registro algébrico para o estabelecimento dessa relação.

As duplas poderiam descrever que, se o volume é obtido pela soma das camadas “infinitamente pequenas”, então um diferencial desse volume corresponderia à área da seção transversal, ou seja:

$$\text{Se } V(h) = \int_0^h A(x)dx, \text{ então } V'(h) = A(h)$$

Devem ser ressaltados os intervalos em que essa relação é verdadeira, pois no ponto de abscissa  $h = 4$  tem-se uma descontinuidade do gráfico de  $A_S$ .

Esse item objetivou evidenciar a relação entre acumulação e variação, que, posteriormente, na última seção, por analogia, será estabelecida a relação entre integração e derivação, respectivamente.

### 5.4.3 - Tarefa 2 - Seção 3

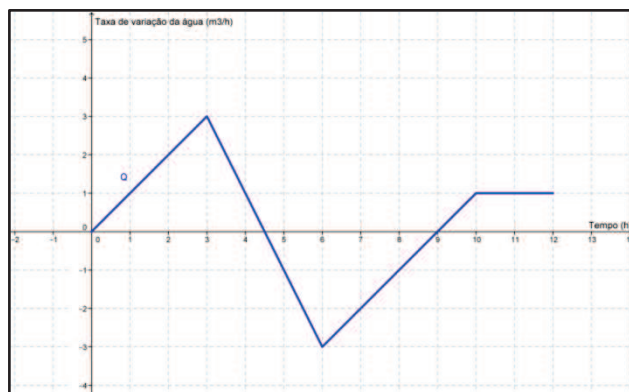
Depois de algumas conclusões formuladas na seção anterior sobre a relação existente entre o volume e a área da seção transversal do sólido  $S$ , os alunos na **Seção 3** devem explorar os conceitos de acumulação e variação na resolução de um problema elaborado, baseando-se em uma das questões propostas no trabalho de Carlson et al. (2007), conforme descrito na revisão bibliográfica.

As duplas inicialmente responderam as questões no protocolo descrito a seguir e posteriormente utilizaram o GeoGebra para confirmar as respostas obtidas:

## Quadro 22 – 02. Tarefa 2 – Seção 3

**TAREFA 2 – SEÇÃO 3**

O gráfico a seguir representa a taxa, em  $m^3/h$  na qual a quantidade de água variou, num reservatório inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, durante um determinado dia do mês:



Sendo  $Q$  a função que representa a taxa na qual a quantidade de água variou no reservatório em função do tempo  $t$ , responda às seguintes questões, justificando a sua resposta:

- Quais são as variáveis dessa função?
- Dê o domínio e a imagem dessa função.
- Essa função é contínua em seu domínio? Caso contrário, há algum ponto de descontinuidade?
- Como você faria para encontrar a lei de formação dessa função?
- Como você faria para calcular o volume de água no reservatório num determinado instante?
- Determine a quantidade de água no reservatório nos instantes  $t=3$ ,  $t=6$ ,  $t=9$  e  $t=12$ .
- Como você faria para traçar o gráfico que represente o volume no reservatório em função do tempo? Faça um esboço desse gráfico.

Fonte: Autor, 2013

Essa questão procurou abordar a utilização do conceito de acumulação e variação das grandezas envolvidas em um contexto geral, e as duplas deveriam a

partir do gráfico apresentado construir o gráfico da função de acumulação que corresponderia ao volume do reservatório em função do tempo.

Alguns conceitos como variáveis, conjunto domínio, imagem e continuidade de uma função são explorados nessa questão, pois consideram-se que são fundamentais no estabelecimento do TFC.

Sobre as variáveis da função, as duplas devem perceber que estão envolvidos o tempo como variável independente e o volume de água no reservatório como variável dependente.

Sobre o domínio e a imagem da função representada pelo gráfico dado, podem ser considerados, respectivamente, os intervalos  $[0, 12]$  e  $[-3, 3]$ .

Trata-se de uma função contínua, e para elaborar a lei de formação dessa função deve-se considerar que ela pode ser escrita da seguinte maneira:

Sendo  $Q$  a função que representa a taxa na qual a quantidade de água variou no reservatório em função do tempo  $t$ , tem-se:

$$Q(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ -2t + 9, & \text{se } 3 < t \leq 6 \\ t - 9, & \text{se } 6 < t \leq 10 \\ 1, & \text{se } 10 < t \leq 12 \end{cases}$$

Para se determinar a quantidade de água no reservatório em um determinado instante, as duplas poderiam utilizar-se basicamente de dois procedimentos.

A primeira opção seria intuir que o volume pode ser dado por uma acumulação e, portanto, calculado pela integral da função  $Q$  nos pontos considerados.

Outro procedimento consiste em considerar que o volume no reservatório pode ser obtido pelo produto da taxa de variação da água pelo intervalo de tempo dado; isso equivaleria numericamente ao cálculo da área limitada pelo gráfico e o eixo das abscissas no intervalo, com o cuidado de que nos intervalos em que  $Q(t) < 0$ , ou seja, a taxa de variação é negativa, tem-se uma redução da quantidade de água no reservatório.

Para exemplificar a utilização dos procedimentos, para se calcular a quantidade de água no reservatório nos instantes solicitados, tem-se:

- Para  $t = 3 h$ :

$$V_1 = \int_0^3 Q(t)dt = \int_0^3 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^3 = 4,5 - 0 = 4,5 m^3$$

- Para  $t = 6 h$ :

$$V_2 = V_1 + \int_3^6 Q(t)dt = 4,5 + \int_3^6 (-2t + 9) dt = 4,5 + \left. (-t^2 + 9t) \right|_3^6 = 4,5 + (0 - 0) \Rightarrow$$

$$V_2 = 4,5 + 0 = 4,5 m^3$$

- Para  $t = 9 h$ :

$$V_3 = V_2 + \int_6^9 Q(t)dt = 4,5 + \int_6^9 (t - 9) dt = 4,5 + \left. \left( \frac{t^2}{2} - 9t \right) \right|_6^9 \Rightarrow$$

$$V_3 = 4,5 + [-40,5 - (-36)] \Rightarrow$$

$$V_3 = 4,5 - 4,5 = 0 m^3$$

- Para  $t = 12 h$ :

$$V_4 = \int_9^{10} (t - 9)dt + \int_{10}^{12} 1 dt = \left. \left( \frac{t^2}{2} - 9t \right) \right|_9^{10} + t \Big|_{10}^{12} \Rightarrow$$

$$V_4 = [-40 - (-40,5)] + 2 \Rightarrow$$

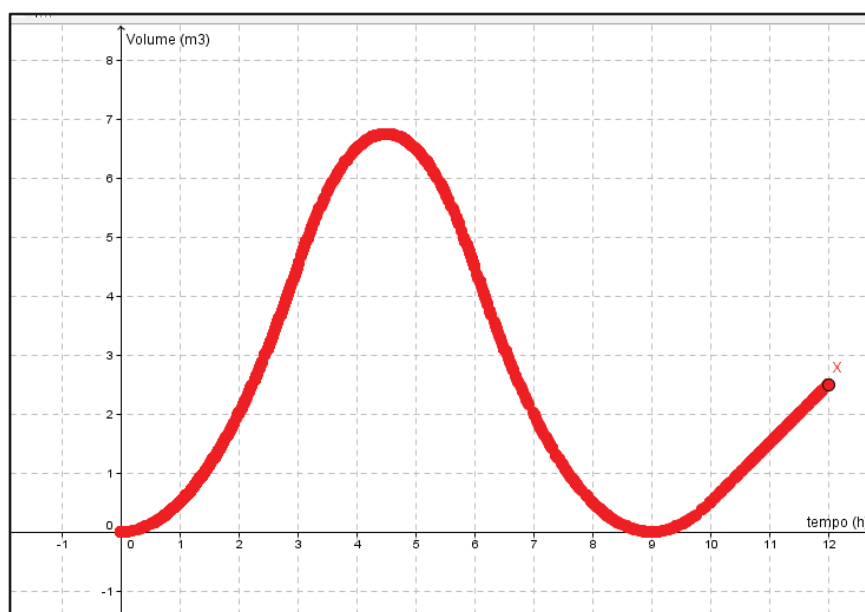
$$V_4 = 0,5 + 2 = 2,5 m^3$$

Com isso, para a quantidade de água no reservatório pode-se associar uma função  $V$  dada por  $V(t) = \int_0^t Q(x)dx$  em cada intervalo considerado, ressaltando que a ela é crescente no intervalo  $[0, 4,5]$  e  $[9, 12]$  e decrescente no intervalo  $[4,5, 9]$ , e no instante  $t = 4,5 h$  tem-se a quantidade máxima de água e no instante  $t = 9 h$  o reservatório encontra-se vazio.

A função  $V$  é contínua em todos os pontos do seu domínio, bem como derivável, consequência de a função  $Q$  ser contínua e limitada, portanto, integrável.

O esboço do gráfico desejado pode ser obtido de acordo com a figura a seguir:

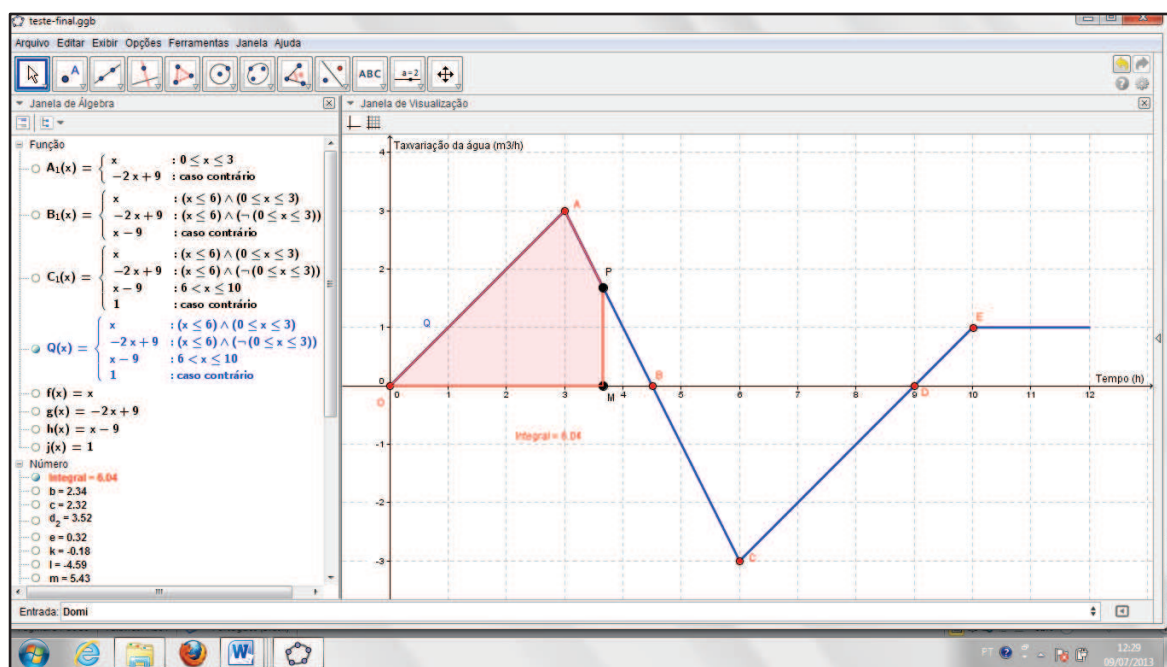
**Figura 62** – 02. Tarefa 2 – Seção 3 – Gráfico V x t



Fonte: Autor, 2013

Para confirmar as respostas obtidas nessa seção, as duplas devem observar no GeoGebra todos os itens trabalhados acessando o arquivo disponibilizado segundo a tela a seguir:

**Figura 63** – 02. Tarefa 2 – Seção 3 – Manipulação Dinâmica



Fonte: Autor, 2013

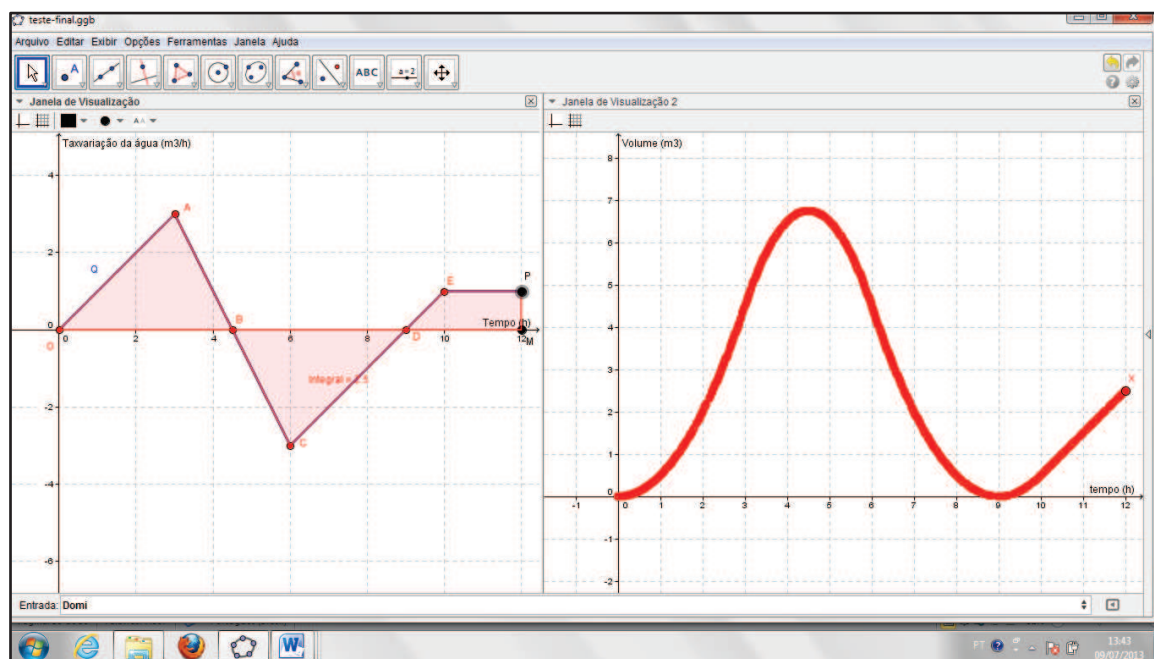
Para a manipulação dinâmica, foi criado um ponto P pertencente ao gráfico da função  $Q$ , que pode movimentar-se livremente sobre ele.

Para a proposta da intervenção de ensino, considerando-se o ponto P de abscissa variável denotada por  $t$ , em que  $t \in [0, 12]$ , para se obter o volume acumulado  $V(t) = \int_0^t Q(x) dx$  no GeoGebra, foi utilizado o comando Integral em que, ao selecionar-se a função  $Q$  e o intervalo em que se deseja calcular, obteve-se o valor da integral definida.

Ao movimentar o ponto P sobre o gráfico de  $Q$ , as duplas tiveram a oportunidade de constatar que o volume de água no reservatório assume os valores encontrados anteriormente, destacando-se que ele atinge o valor máximo para  $t = 4,5 h$  e mínimo para  $t = 9 h$ .

Para esboçar o gráfico da função  $V$  ao abrir uma nova janela de visualização no GeoGebra, criou-se um ponto X que descreve o volume de água no reservatório em função do tempo, conforme a figura a seguir:

**Figura 64 – 02. Tarefa 2 – Seção 3 - Visualização**



Fonte: Autor, 2013

Ressaltou-se ainda nessa seção que, assim como se formalizou nas seções anteriores, que, se  $V(t) = \int_0^t Q(x) dx$ , com  $t \in [0, 12]$ , então,  $V'(x) = Q(x)$ , e a função  $V$  é derivável nesse intervalo e que a taxa de variação instantânea do volume

de água no reservatório em um determinado instante é igual ao valor numérico da função  $Q$  nesse instante. Destaca-se o papel que as variáveis  $t$  e  $x$  desempenham na expressão  $V(t) = \int_0^t Q(x) dx$ , que na verdade trata-se da mesma grandeza (o tempo), variam no mesmo intervalo e são criadas distintamente para que não surja algum equívoco.

Portanto, essa seção em um âmbito mais geral exigiu das duplas desenvolver os conceitos de acumulação e variação que serão preponderantes para a compreensão e formalização do TFC, discutidos na próxima seção.

#### 5.4.4 - Tarefa 2 - Seção 4

A última sessão da intervenção de ensino consiste em estabelecer a relação entre as operações entre integração e derivação, observando sob quais condições isso se torna possível.

Para isso, inicialmente serão retomados alguns pontos e conceitos explorados nas seções anteriores que compõem a compreensão do TFC, a saber: relação entre as variáveis, domínio e continuidade de uma função, acumulação e variação.

Como forma de efetuar algumas analogias, foram utilizados os dois problemas desenvolvidos anteriormente.

Para se estabelecer a relação entre integração e derivação, deve-se inicialmente apresentar aos alunos quem são os elementos ou “atores” envolvidos no teorema e sob quais condições eles devem “se apresentar”, tais como:

- uma função  $f$  definida em um domínio como contínua e limitada (integrável). Na primeira tarefa observou-se que a relação da área da seção transversal não se constitui um exemplo de função, além de o gráfico dessa relação apresentar um ponto de descontinuidade. Na última seção a função  $Q$  constituiu-se como uma função;
- a partir da função  $f$  pode-se associar uma função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , sendo essa função definida como uma função de acumulação;
- observar como essas duas funções se relacionam por meio das operações de integração e derivação, e conseqüentemente, como essas operações estão ligadas.

A **Seção 4** apresenta, portanto, os seguintes questionamentos:

**Quadro 23 – 02. Tarefa 2 – Seção 4****02. TAREFA 2 – SEÇÃO 4**

Vamos estabelecer a relação existente entre as operações de derivação e integração.

**- Conclusão provisória:**

**- Teorema:**

Fonte: Autor, 2013

Essa relação solicitada foi estabelecida e redigida com as duplas inicialmente com uma conclusão provisória, sucedida da elaboração do enunciado do TFC.

Com o término da apresentação das tarefas e suas respectivas seções, o próximo capítulo descreverá os resultados obtidos das seções, além de uma análise detalhada desses resultados.



## CAPÍTULO VI

“A maior figura produzida pela França nos tempos modernos”.

BERTRAND RUSSEL, sobre Henri Poincaré

---

### CAPÍTULO 6 – RESULTADOS

Este capítulo tem por objetivo descrever e analisar os resultados das tarefas realizadas na sequência de ensino embasados no referencial teórico adotado. As tarefas que constituíram a intervenção foram analisadas segundo dois eixos, levando em consideração os seguintes aspectos:

**a)** as interações entre os componentes: formal, algorítmico e intuitivo, que segundo Fischbein (1991) não são facilmente encontrados e compreendidos nas atividades matemáticas e são importantes na identificação das dificuldades encontradas pelos estudantes na construção do conhecimento. O objetivo é observar durante a realização das seções como ocorreram as inter-relações entre esses componentes no desenvolvimento das tarefas, de que forma esses componentes se contrapõem, e suas implicações na aquisição dos conceitos envolvidos. Esse eixo de análise apresentou como elementos as classificações das intuições descritas por Fischbein (1987), bem como as características do raciocínio intuitivo segundo Poincaré (1995);

**b)** a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a intuição e o rigor: deseja-se avaliar o desenvolvimento ou a manifestação das intuições a partir das explorações ou representações proporcionadas pela atividade com o *software* GeoGebra. Essa análise foi pautada nos artigos de Tall (2002a, 1991a) que investigou em seus trabalhos a questão da visualização no Cálculo com a utilização de recursos computacionais, procurando relacioná-la com as noções de intuição e rigor. Para o autor, a questão da visualização permeia as raízes e a gênese de muitas ideias e conceitos matemáticos, pois essas ideias presentes em um conceito em grande medida não são percebidas pelos alunos, no entanto podem auxiliar na construção do conhecimento matemático. Tall (1991a) alerta que em muitas situações as imagens interiorizadas pelos alunos podem produzir falsos conceitos ou levar a contradições.

Esses dois eixos auxiliaram na análise e compreensão das respostas obtidas durante as seções, conforme serão detalhas a seguir.

Para o desenvolvimento das tarefas foram convidados todos os alunos do primeiro ano regularmente matriculados no curso de Tecnologia em Polímeros que estão cursando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, e que até então não tiveram contato com o TFC, dos quais 14 se prontificaram em participar da sequência de ensino. Cabe ressaltar que essa disciplina é ministrada pelo próprio professor pesquisador.

A escolha desse público-alvo está relacionada com a oportunidade de se utilizar uma sequência de ensino que privilegie alguns aspectos cognitivos ligados à intuição e ao rigor na construção do conhecimento matemático, analisando-se posteriormente se esse tipo de abordagem influencia na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação. Além disso, serão discutidas quais as contribuições e implicações dessa intervenção no ensino e aprendizagem do TFC.

Os 14 alunos que participaram das seções formaram duplas organizadas aleatoriamente, e cada dupla qual designada para fins de análise pelos códigos **D<sub>1</sub>**, **D<sub>2</sub>**, **D<sub>3</sub>**,..., **D<sub>7</sub>**.

Alguns gravadores foram colocados, com a autorização de todos os participantes, no sentido de se captarem as discussões geradas entre as duplas a respeito da resolução das questões, e os pontos mais pertinentes de maneira resumida foram transcritos no decorrer da análise.

Ao iniciar a primeira seção, os alunos receberam uma versão impressa das tarefas a serem realizadas, na qual a resolução seria feita.

Tais questões puderam ser visualizadas e manipuladas nos computadores do laboratório por meio do *software* GeoGebra 4.0 e dos navegadores de *internet*, e cada aluno teria o direito de utilizar um equipamento com os arquivos nomeados de acordo com as seções nas extensões *ggb*, disponível no GeoGebra, assim como a extensão *html* nos navegadores de *internet*.

Com isso, para responder a questão de pesquisa, procurou-se analisar minuciosamente os resultados buscando avaliar cada resolução elaborada pelas duplas sob a ótica dos eixos ou categorias de análise.

## 6.1 – Análise dos resultados

### 6.1.1 – Primeiro encontro: Tarefa 1 – Seções 1 e 2

As **Seções 1 e 2** da **Tarefa 1** foram realizadas no dia 2 de março de 2013, com a duração total de duas horas.

De modo geral, analisando-se as resoluções elaboradas pelas duplas nessas duas primeiras seções, podem ser inferidos alguns resultados pertinentes de comentários sobre o desenvolvimento das tarefas.

Observou-se que algumas duplas apresentaram um estilo, segundo descreveram Fischbein (1987) e Poincaré (1995), com características extremamente formalistas, utilizando-se excessivamente de procedimentos, algoritmos e fórmulas memorizáveis, principalmente no início das seções.

Além disso, a interação entre os participantes e o GeoGebra constituiu um fator preponderante para a realização das tarefas, no tocante à exploração das cognições intuitivas dos alunos.

Muitas duplas inicialmente não buscaram utilizar, por exemplo, a intuição geométrica, no sentido de manipular os objetos matemáticos para a elaboração de conjecturas. Sem essa exploração, mesmo procurando efetuar alguns cálculos, esses alunos não encontraram a solução correta para alguns itens solicitados.

Esse fato, em grande medida, nos dá indícios de que um amontoado de conteúdos ministrados sem a discussão prévia com os alunos, buscando a construção do conhecimento matemático com a participação deles, pode acarretar a incompreensão de alguns conceitos fundamentais do Cálculo.

Na **Seção 1** da **Tarefa 1**, o primeiro item, apresentado na tela do computador e na versão impressa, solicitava que as duplas explicassem como elas fariam para determinar o volume do sólido S.

Nesse item as duplas não demonstraram nenhuma dificuldade em compreender que o volume do sólido S pode ser obtido pela soma do volume do cone de revolução com o cilindro circular reto.

Todas as duplas calcularam corretamente o volume do sólido de acordo com as informações fornecidas e, conseqüentemente, não se verificou nenhum obstáculo referente a esse item. Apenas convém ressaltar que foi registrado o uso repetido do termo “fórmula” por muitas duplas ao se referirem à maneira de se determinar o

volume do sólido, o que pode indicar que os alunos se utilizam em muitas situações da memorização de uma “fórmula” na resolução da questão.

No item seguinte, foi solicitado aos alunos, a partir de um modelo do sólido criado em 2D, determinar o raio da seção obtida pela interseção do plano  $\pi$  a uma distância  $h$  do vértice do sólido  $S$ .

Durante essa seção, observou-se, com o auxílio da gravação do áudio de algumas duplas – também evidenciado pelos resultados – que todas elas responderam que a seção obtida pela interseção do plano  $\pi$  com o sólido  $S$  no intervalo considerado é um círculo, entretanto algumas duplas não conseguiram encontrar a medida do raio  $r$  em função da altura  $h$ .

Nesse caso, percebeu-se que o componente intuitivo contribuiu para os alunos conjecturarem qual era a seção obtida, porém algumas duplas careceram do aspecto algorítmico e formal para encontrar o raio da seção em função da altura.

A dupla  $D_1$ , por exemplo, utilizou-se de uma generalização abusiva que poderia levá-los a uma resposta incorreta ao afirmar que a altura do sólido  $S$  varia duas vezes em relação ao raio, apresentando um exemplo particular de que quando o raio é igual a 2 a altura é igual a 4. Essa resposta expressa uma intuição afirmativa constituída por uma auto-evidência, em que a dupla, depois de entrar em contato com alguns objetos e dados preliminares fornecidos passou a inferir um resultado intuído sem a devida demonstração formal.

Observou-se que o componente algorítmico foi utilizado na resposta dada pela dupla  $D_2$ , que mesmo manipulando numérica e algebricamente a expressão do volume do cone circular reto, também não conseguiu encontrar corretamente a medida do raio em função da altura, conforme mostra a resolução a seguir:

**Figura 65** – Resolução da dupla  $D_2$  – Tarefa 1 – Seção 1 – Item b

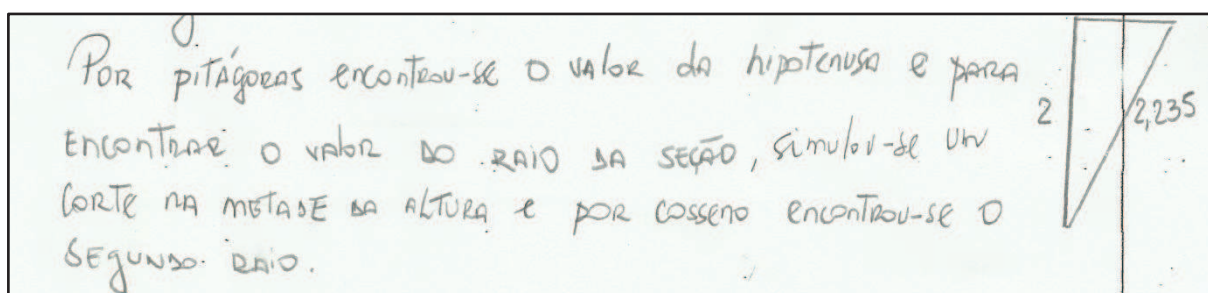
**Resposta** A figura obtida será um círculo, cujo raio pode ser obtido através da fórmula:

$V = \frac{1}{3} A \cdot h$  O raio é igual para todo  $h \Rightarrow$  no caso do cilindro

$V = \frac{1}{3} A \cdot h \therefore V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \therefore R(h) = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}} \Rightarrow$  no caso do cone

Por sua vez, a dupla D<sub>3</sub>, utilizando-se do teorema de Pitágoras, procurou encontrar um resultado particular considerando-se a metade da altura do cone circular reto; entretanto, ela não apresentou o conhecimento formal necessário para a elaboração da resolução e obtenção do resultado, de acordo a solução a seguir:

**Figura 66** – Resolução da dupla D<sub>3</sub> – Tarefa 1 – Seção 1 – Item b

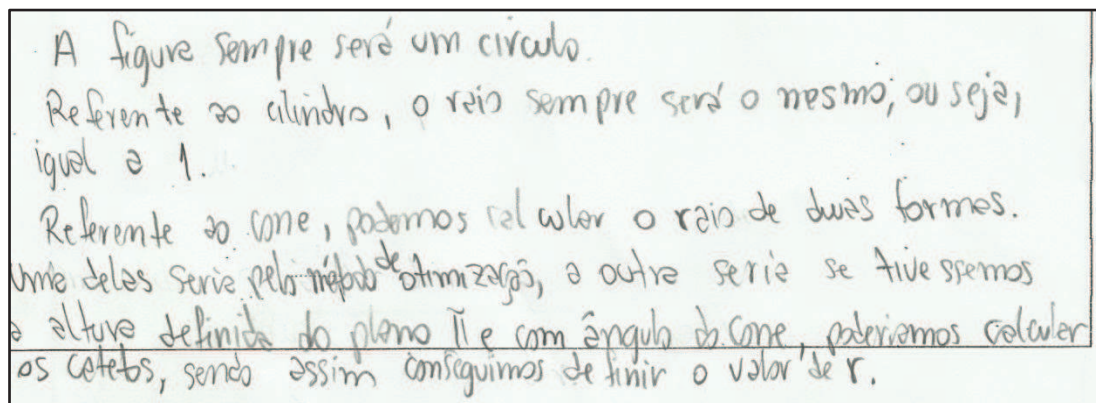


Essa tentativa de resolução considerando um caso particular para a questão proposta foi observada de maneira semelhante pela dupla D<sub>4</sub>, que também não conseguiu encontrar a solução. Isso faz concluir que a dupla não efetuou a passagem do domínio aritmético para o algébrico.

Dentre as duplas que procuraram elaborar uma técnica para a resolução desse item, quatro delas não relacionaram o raio da seção em função da altura corretamente, e algumas duplas concluíram que o raio varia de acordo com a altura no cone circular reto e se torna constante no cilindro circular reto.

Algumas duplas afirmaram que, à medida que o ângulo do cone circular reto aumenta, o raio também aumenta, e muitos perceberam que o raio é diretamente proporcional à altura na razão 1:2, considerando, por exemplo, alguns valores particulares para  $h$ , e que o raio no cilindro circular reto é constante e igual a 1.

A dupla D<sub>6</sub>, em especial, mostrou o excesso do formalismo contrário ao raciocínio intuitivo, procurando descrever um procedimento incorreto para o cálculo do raio em função da altura, conforme a descrição a seguir:

**Figura 67** – Resolução da dupla D<sub>6</sub> – Tarefa 1 – Seção 1 – Item b

Essa dupla, de certa forma, procurou relacionar alguns conteúdos ministrados no curso de Cálculo I com o item em questão como, em particular, o tópico otimização de funções utilizando a noção de derivada, o que não condiz com a questão proposta. Nesse caso, o componente formal se contrapõe ao intuitivo, prejudicando a elaboração da resposta da dupla.

Essa certeza da possibilidade de encontrar o valor do raio em função da altura constitui uma característica da intuição denominada convicção intrínseca, pois observou-se que a maior parte das duplas revelou o sentimento de certeza, de segurança sem, no entanto, apresentar o resultado correto.

De modo geral, a resolução elaborada pelas duplas nesse item evidenciou que o fato de os alunos conhecerem alguns teoremas ou algoritmos não foi suficiente para que eles conseguissem resolver determinados problemas. Este resultado corrobora com a afirmação de Fischbein (1987) ao explicitar que o conhecimento de teoremas, algoritmos e definições não é uma condição suficiente para que o aluno seja capaz de resolver problemas matemáticos.

Além disso, detectou-se que mesmo algumas duplas, em contrapartida, também não apresentavam elementos formais para encontrar o raio da seção quando a parte do sólido era cônica, embora quando a parte do sólido era cilíndrica eles desenvolveram normalmente. Essa constatação pode levar a observar a dificuldade encontrada pelos alunos com questões envolvendo variações entre duas grandezas, que no caso específico tratava do raio da seção transversal de um cone em função da altura da seção.

Constatou-se com isso a falta da inter-relação entre os componentes formal e algorítmico necessária para que as duplas elaborassem a relação solicitada,

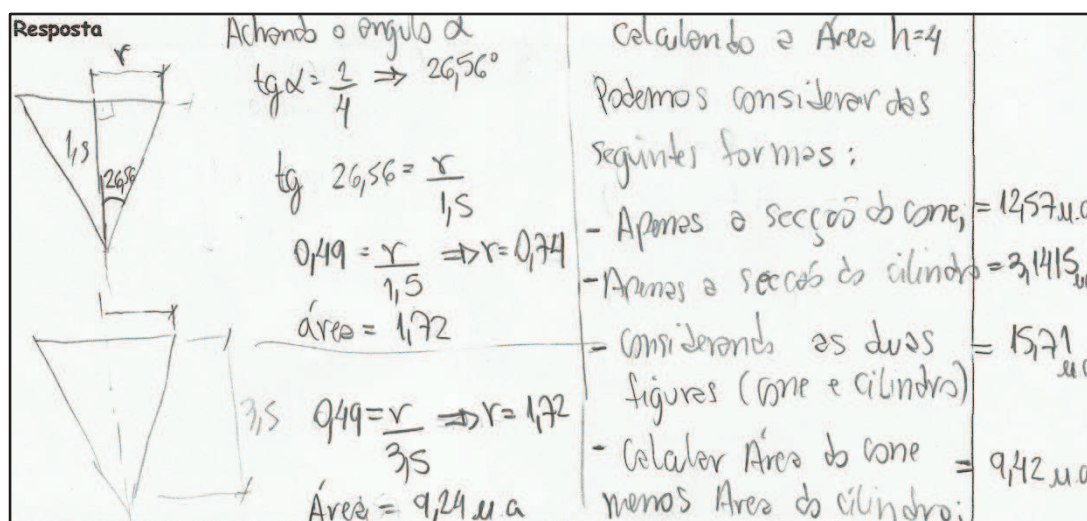


mesmo observando-se que nos itens seguintes algumas duplas conseguiram encontrar a área da seção para valores particulares da altura, dado que a falta do rigor tornou-se um obstáculo na obtenção de maiores generalizações.

Isso se mostrou evidente na questão seguinte, em que as duplas deveriam calcular a área da seção transversal para  $h = 1,5$  e  $h = 3,5$  e posteriormente considerando  $h = 4$  e  $h = 5$ .

Nesse item a dupla  $D_6$ , por exemplo, calculou a tangente do ângulo formado pelo eixo de simetria do cone circular reto e sua geratriz, conforme a figura a seguir, e a utilizou para valores da altura solicitados, mesmo não conseguindo generalizar o resultado do item anterior.

**Figura 68** – Resolução da dupla  $D_6$  – Tarefa 1 – Seção 1 – Item d



Uma observação relevante diz respeito ao valor do raio para a altura igual a 4. Cinco duplas consideraram o raio da seção transversal igual a 2, ou seja, utilizaram a base do cone circular reto. Apenas a dupla  $D_6$  afirmou que se podem obter dois valores para a área, tanto para o cone quanto para o cilindro circular reto.

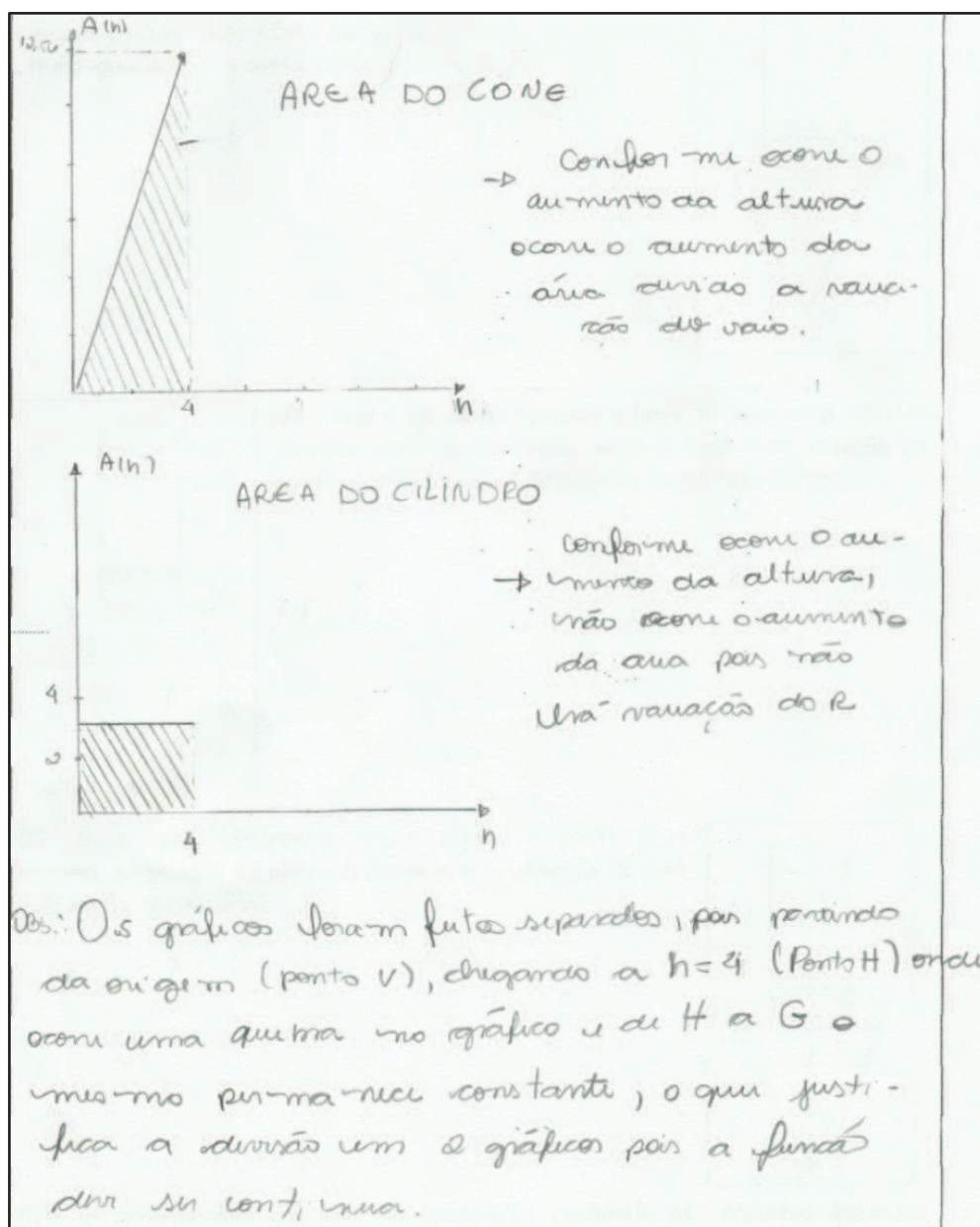
No tocante ao último item dessa seção, referente à elaboração de um esboço do gráfico que represente a variação da área da seção transversal em função da altura, muitas duplas observaram que a área aumenta em função da altura no intervalo  $[0, 4]$ , e depois se mantém constante no intervalo  $[4, 8]$ , entretanto não perceberam que a variação não é linear no primeiro intervalo.

Quanto ao esboço do gráfico, especificamente sobre a questão da continuidade dele, cinco das sete duplas consideraram que o gráfico deve ser uma

linha contínua. Apenas as duplas  $D_1$  e  $D_6$  perceberam que no ponto de abscissa  $h = 4$  o gráfico apresenta uma descontinuidade.

A dupla  $D_2$  apresentou uma resposta que pode ser considerada inusitada em relação às demais. A mesma verificou que os gráficos deveriam ser separados, em virtude justamente da continuidade da função sem apresentar maiores justificativas, conforme descrito na resolução a seguir:

**Figura 69** – Resolução da dupla  $D_2$  – Tarefa 1 – Seção 1 – Item d



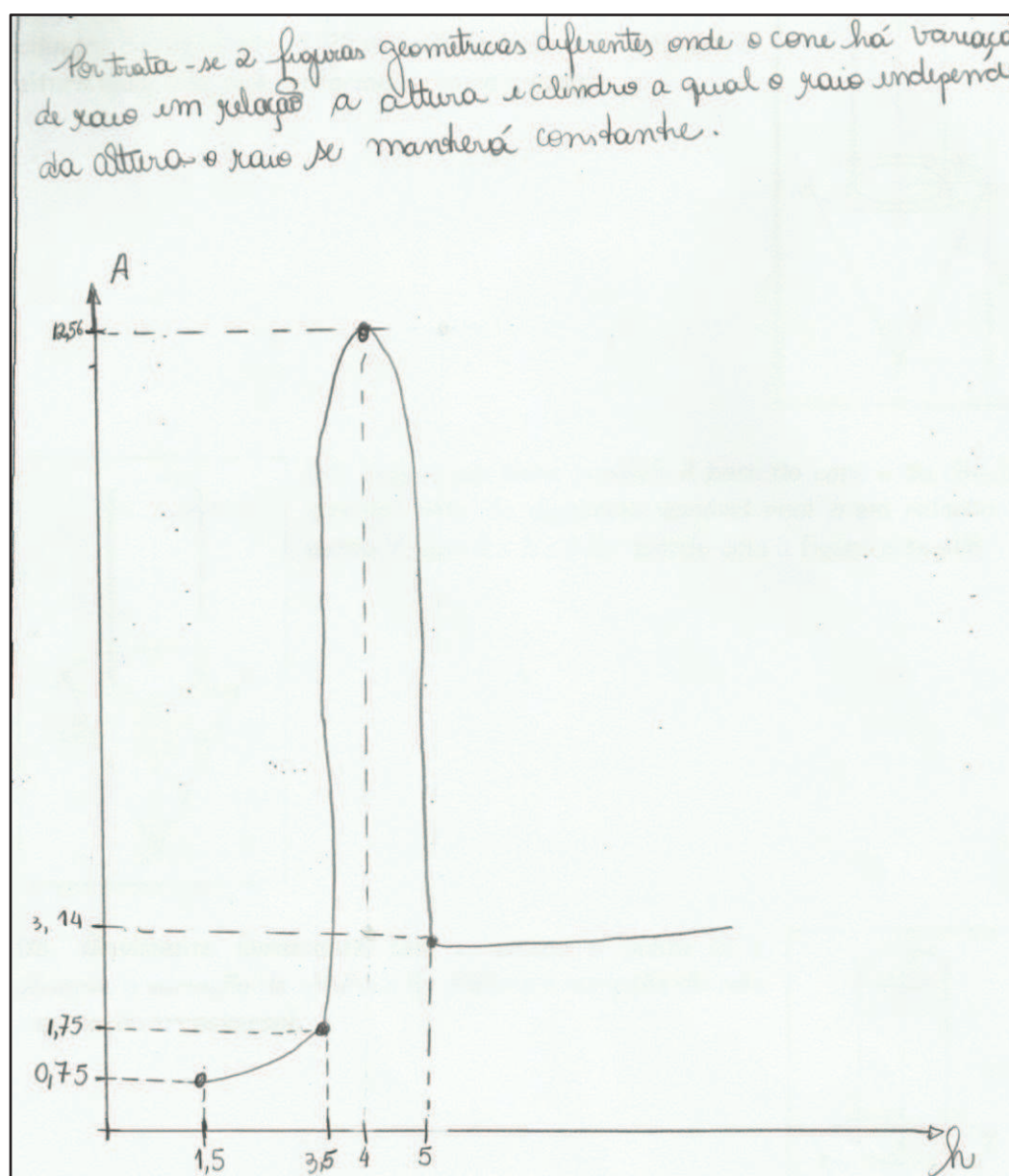
Esta ideia expressa pela dupla, no sentido de que, quando o gráfico representa um fenômeno baseado em uma situação real, ele é obrigatoriamente



contínuo foi observada no contexto histórico nos trabalhos de Fermat (século XVI) e Newton (século XVII) ao afirmarem que um gráfico era obtido pelo movimento contínuo de um ponto, bem como Euler (século XVIII) ao definir uma função contínua como aquela que apresentava apenas uma lei de formação.

Outras duplas também interpretaram como obrigatório que a função deve ser sempre contínua, pois o gráfico não pode apresentar “quebras” ou interrupções, como a dupla D<sub>7</sub> expôs a seguir:

**Figura 70** – Resolução da dupla D<sub>7</sub> – Tarefa 1 – Seção 1 – Item d



Analizando o fato não observado pelas duplas da descontinuidade da função, infere-se que tal circunstância pode evidenciar uma característica da intuição relacionada ao efeito coercitivo, em que a falta da exploração por parte dos professores com relação às funções descontínuas ao ministrarem aulas de Matemática, principalmente no Ensino Médio, pode fazer com que os alunos concluam que todo gráfico não pode apresentar pontos de descontinuidade.

Observou-se que algumas duplas utilizaram como procedimento de resolução, tanto para a construção do gráfico da área da seção transversal quanto para o volume do sólido o fato de a variação entre as grandezas envolvidas ser linear, não percebendo que essa variação ocorre somente entre o raio da seção transversal e a altura do plano  $\pi$  em relação ao vértice.

Esse procedimento nos remete ao uso de generalizações indevidas que podem levar a resultados incorretos, destacando assim uma categorização da intuição como inferencial, em que os alunos, ao entrarem em contato com variações lineares, concluem que outras funções também são representadas graficamente por uma reta. No caso do item em questão, mesmo as duplas calculando corretamente as coordenadas de alguns pontos para a obtenção dos gráficos, ao construí-los procuram ligar os pontos obtidos por uma linha reta.

No que tange ao eixo de análise referente à visualização e suas relações com a intuição e o rigor, constatou-se nessa primeira seção que, mesmo limitado à utilização do plano afim, o uso do *software* GeoGebra exerceu duas funções: tornou-se um local ou “habitat” em que o sólido  $S$  – objeto de estudo das seções – pode ser concretizado pelos alunos, mesmo sua representação sendo feita em 2D, além da possibilidade do estudo dinâmico do conceito de variação por meio da manipulação de objetos geométricos, o que permitiu a elaboração, por parte das duplas, de conjecturas que posteriormente poderiam ser confirmadas ou refutadas. Essa importância sobre o uso de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo foi discutida e defendida por Tall (2002a) em suas pesquisas.

Portanto, nessa primeira seção a questão da visualização esteve mais diretamente ligada à “concretização” do objeto de estudo e com isso possibilitou-se de modo geral a exploração das cognições intuitivas, com grande apelo ao geométrico e aos sentidos, que segundo Poincaré (1995) contribui na elaboração de hipóteses e conjecturas no processo de construção do conhecimento.

De forma resumida, a **Seção 1** explorou por meio da área de uma seção, o conceito de variação de uma grandeza, no caso a área da seção transversal de um sólido, e que, ao representar essa variação por meio de um gráfico, constatou-se um ponto de descontinuidade.

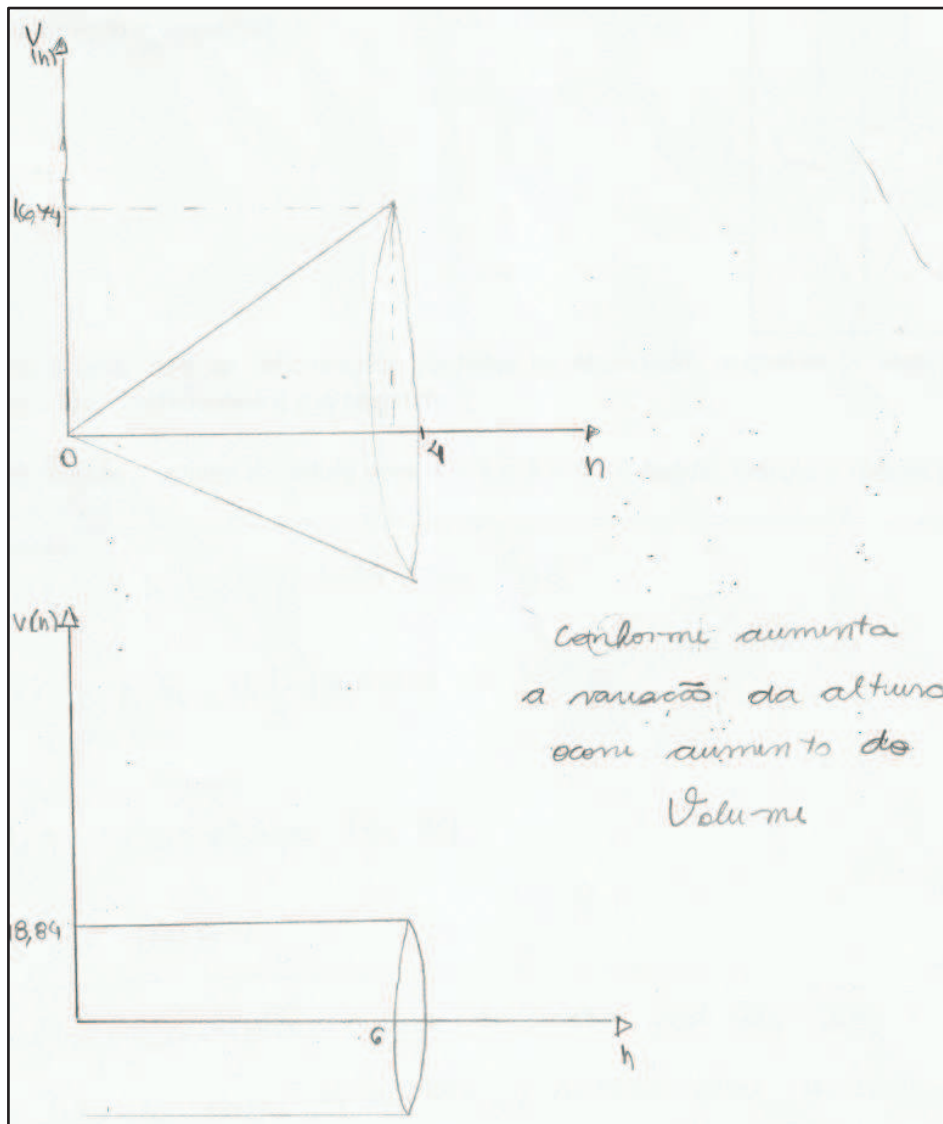
Depois de as duplas elaborarem por meio das resoluções algumas conjecturas referentes ao conceito de variação da área da seção do sólido em função da altura, a **Seção 2** procurou explorar a ideia de acumulação por meio do cálculo do volume, que conforme discutido anteriormente, se constitui elemento fundamental para a compreensão do conceito de integral e consequentemente o TFC.

No primeiro item dessa seção, as duplas deveriam calcular o volume do sólido para  $h = 1$  e  $h = 3$ , bem como para os valores de  $h = 4$  e  $h = 6$ .

Constatou-se pelas resoluções que duas das sete duplas não perceberam o caráter acumulativo do volume do sólido para a altura  $h = 6$ , que consistia em somar os volumes do cone e do cilindro circular reto, enquanto as cinco duplas restantes efetuaram procedimentos algorítmicos inadequados, acarretando posteriormente um esboço incorreto do gráfico do volume em relação à altura.

Apenas três duplas elaboraram um esboço correto, e as outras quatro duplas construíram um gráfico semelhante ao exibido na seção anterior, como a dupla  $D_2$  que novamente construiu duas partes separadas do gráfico considerando-as como um cone e um cilindro circular reto.

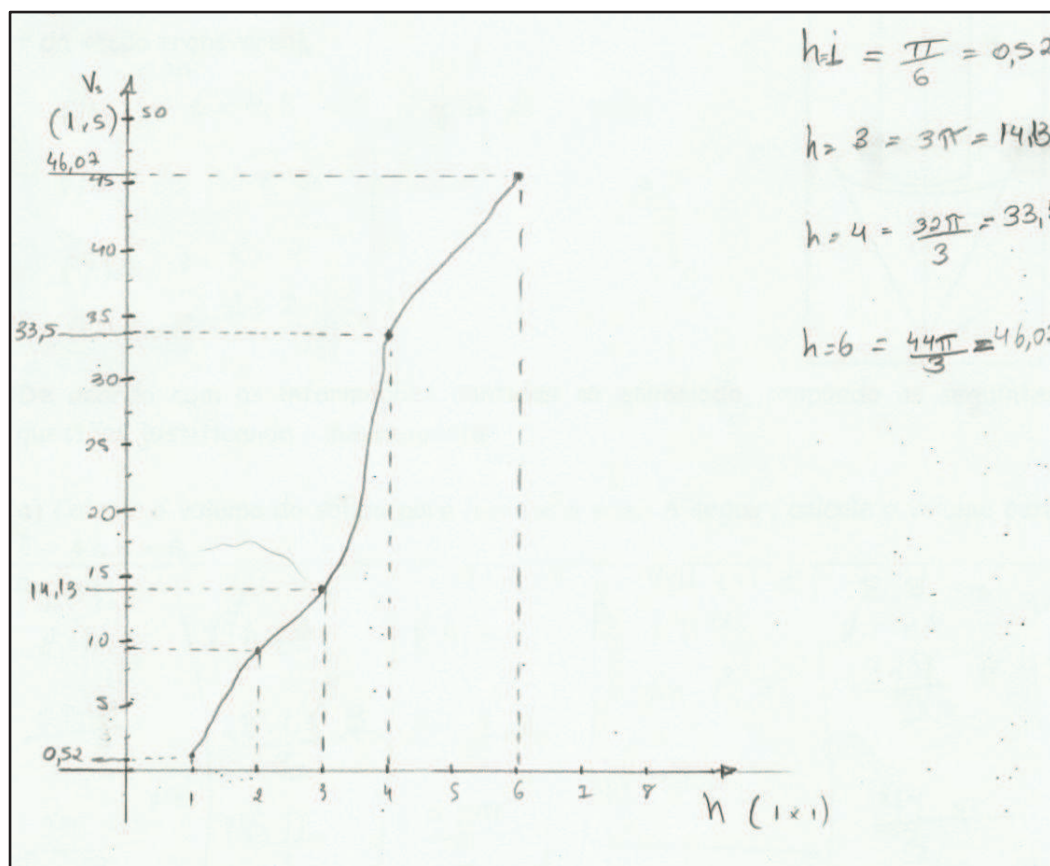
Esse tipo de resolução apresentado pela dupla  $D_2$  pode estar relacionado provavelmente com a imagem interiorizada por ela de um tema comentado na apresentação do curso de Cálculo, especificamente sobre uma das aplicações de integral definida: volume de um sólido de revolução, conforme o esboço a seguir:

**Figura 71** – Resolução da dupla D<sub>2</sub> – Tarefa 1 – Seção 2 – Item d

Essa ideia intuitiva de associar uma imagem com um conceito indica que o componente intuitivo se sobrepõe ao componente formal e que pode ter levado a uma interpretação errônea da questão.

Dos gráficos esboçados corretamente, a dupla D<sub>5</sub> observou que ele em todo o seu intervalo é crescente, de acordo com a figura seguinte:

Figura 72 – Resolução da dupla D<sub>5</sub> – Tarefa 1 – Seção 2 – Item d



Dentre os erros encontrados no esboço do gráfico solicitado, duas duplas consideraram que o volume é crescente no intervalo  $[0, 4]$ , e a seguir é constante no intervalo  $[4, 8]$ , conforme haviam esboçado o gráfico da área da seção transversal em relação à altura. Muitas duplas atribuíram o crescimento do volume como sempre linear, além da falta de identificação das variáveis no esboço do gráfico.

De maneira semelhante ao que foi observado na seção anterior, o GeoGebra foi utilizado novamente como uma ferramenta facilitadora na visualização da situação proposta e como um elemento que permitiu explorar muitas ideias e intuições geométricas relacionadas aos conceitos de variação e acumulação não de maneira estática, sem entretanto ainda nessa fase chegar a alguma formalização.

Com a conclusão das **Seções 1 e 2** o primeiro encontro encerrou-se duas horas após o seu início.

### 6.1.2 – Segundo encontro: Tarefa 1 – Seções 3 e 4

O segundo encontro ocorreu na semana seguinte para a resolução das **Seções 3 e 4 da Tarefa 1**. Todos os alunos que participaram do primeiro encontro compareceram no mesmo local e horário combinados previamente, e as mesmas duplas se formaram novamente para a resolução das questões.

Essas seções, de um modo geral, evidenciaram alguns aspectos descritos na fundamentação teórica relativamente às falsas conclusões de que o uso da intuição pode promover na obtenção de resultados, conforme será comentado a seguir.

Após a elaboração de conjecturas sobre a variação e acumulação das grandezas envolvidas nas seções anteriores, na **Seção 3** as duplas utilizaram alguns recursos do GeoGebra permitindo de um modo dinâmico obter os gráficos solicitados nas seções anteriores.

Disponibilizaram-se os arquivos com os enunciados do encontro anterior para que as duplas retomassem as discussões relativas ao sólido S e as conclusões obtidas até então, dado que os protocolos das **Seções 1 e 2** respondidos no último encontro não foram entregues para as duplas.

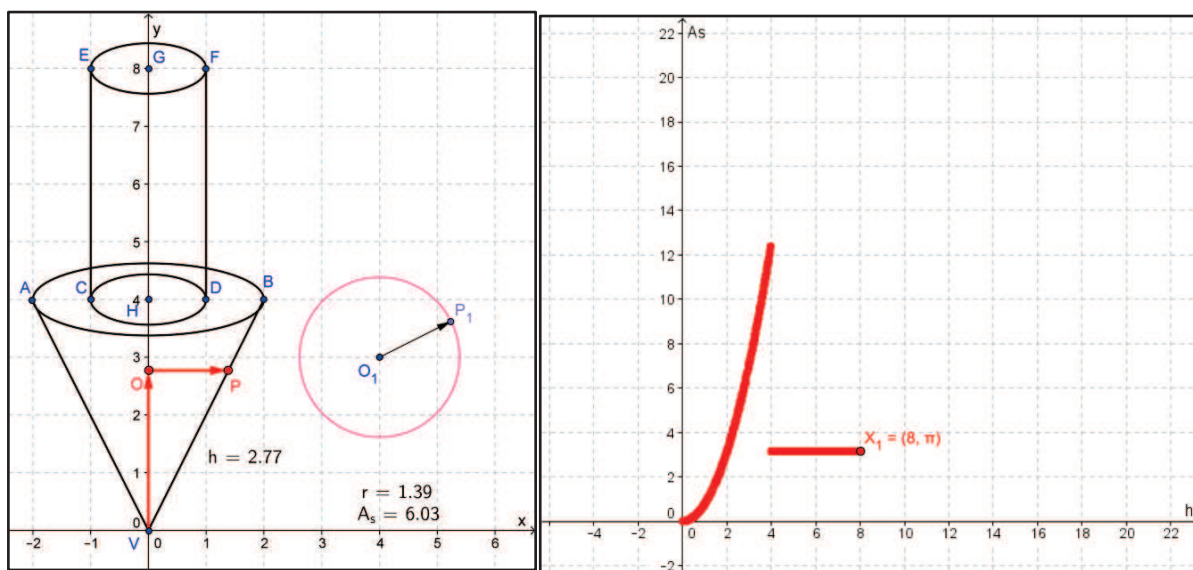
Nesse encontro os alunos foram requisitados para que pudessem comprovar ou não as conjecturas elaboradas a respeito da variação da área da seção transversal e do volume do sólido S, por exemplo, a variação tanto da área quanto do volume ser linear em relação à altura, a questão da continuidade dos gráficos esboçados, entre outras.

Nas duas primeiras seções realizadas anteriormente os alunos elaboraram conjecturas e esboçaram alguns resultados utilizando-se de um modelo do sólido S representado no plano afim, visto que a manipulação geométrica ocorreu de forma dinâmica. Já nas **Seções 3 e 4 da Tarefa 1** os alunos efetuaram explorações e manipulações geométricas no GeoGebra no plano cartesiano.

No primeiro item solicitado da **Seção 3**, ao movimentar o ponto O por meio do GeoGebra nos intervalos considerados, as duplas tiveram a oportunidade de comprovar algumas conjecturas formuladas constatando que no intervalo  $[0,4]$  o aumento da área da seção transversal  $A_S$  não é linear, como verificou-se nas respostas dos alunos nas **Seções 1 e 2**, e que no intervalo  $[4, 8]$  o gráfico apresenta o valor da área da seção constante, conforme a figura a seguir:



Figura 73 – Tarefa 1 – Seção 3 – Item a



Fonte: Autor, 2013

Solicitou-se nesse item que ao movimentar o ponto  $O$  no intervalo  $[0,4]$  que fosse identificado qual seria o comportamento dos gráficos, assim como no intervalo  $[4,8]$ , tanto para a área quanto para o volume, além de calcular a área e o volume para alguns valores particulares de  $h$ .

Ao movimentarem o ponto  $O$  e observarem o contorno do gráfico, a explicação de este não ser linear no intervalo  $[0,4]$  apresentou diversas versões dadas pelas duplas.

A dupla  $D_2$ , por exemplo, afirmou que no cálculo da área da seção transversal, em razão de o “raio estar elevado ao quadrado”, o gráfico não se constitui do tipo linear. Nesse caso, a dupla inferiu que a área da seção transversal variava de acordo com o raio, e não com a altura.

A dupla  $D_5$  afirmou que o gráfico tende a ser crescente em escala proporcional de 1:2, da mesma forma como ela observou essa proporção existente entre o raio e a altura. Essa expressão utilizada pelos alunos, de o gráfico tender a ser crescente, evidenciou a falta de rigor sobre a explicação desse conceito.

Todas essas justificativas elaboradas por grande parte das duplas demonstraram um conflito cognitivo entre o componente intuitivo e o formal, pois nas seções anteriores muitas duplas conjecturaram, ao manipularem o sólido no plano afim que o gráfico apresentava uma variação linear e nessa seção observou-se que a variação é dada por uma função quadrática.

No item seguinte, levando-se em conta a altura  $h = 3$ , todas as duplas calcularam corretamente a área da seção considerando o valor dado. Esse aspecto indica que, apesar de os alunos apresentarem o conhecimento de fórmulas e algoritmos para resolver esse item, eles não conseguiram justificar a não linearidade do gráfico no item anterior.

Como foi constatado nas seções anteriores, o componente algorítmico e o intuitivo não foram suficientes para que os alunos pudessem justificar o comportamento do gráfico solicitado. Isso permitiu verificar que eles passam a intuir sobre uma questão, porém não conseguem efetuar maiores generalizações.

Sobre o fato de área da seção no ponto de abscissa  $h = 4$  apresentar dois valores possíveis, nesse item apenas duas duplas consideraram o raio da seção igual a 2, e as outras duplas restantes adotaram o raio de medida igual a 1. Como resposta para se utilizar o raio igual a 2, a dupla  $D_5$ , por exemplo, afirmou que ao visualizar-se o sólido “por cima” obtém-se o raio de medida maior.

Essa justificativa pode ser explicada pelo fato de os alunos apresentarem em sua matriz curricular a disciplina Desenho Técnico, em que são abordados temas como a representação das vistas de um objeto tridimensional (superior, lateral direita e frontal) e com isso a influência do aprendizado dessa disciplina na resolução desse item pela dupla.

Da mesma forma como observado relativamente ao gráfico da área da seção transversal, ao movimentarem o ponto  $O$  no GeoGebra nos intervalos considerados, as duplas responderam que o gráfico da relação  $V_S \times h$  também não é linear, entretanto elas não apresentaram o componente formal necessário para responder corretamente a questão.

A dupla  $D_3$ , por exemplo, respondeu que no intervalo  $[0, 4]$  a variação é “muito maior” em  $y$  do que em  $x$  e que no intervalo  $[4, 8]$  o aumento é de forma proporcional. Essas afirmações em grande medida retratam um componente intuitivo, mas carece do aspecto formal para justificar as conjecturas elaboradas.

A dupla  $D_7$  considerou que o volume cresce segundo uma função polinomial do segundo grau associando o termo “parábola” à função citada.

Quanto aos dois últimos itens dessa seção, nos pontos de abscissa  $h = 2$  e  $h = 4$ , efetuando-se a manipulação dinâmica do ponto  $O$ , os alunos, sem dificuldades calcularam os volumes solicitados corretamente utilizando o valor fornecido para a altura.



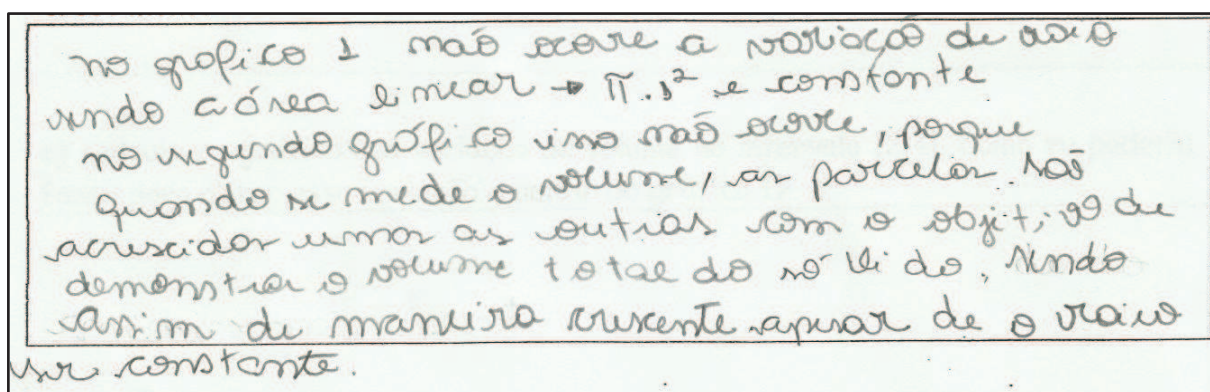
Sob o eixo da análise referente à questão da visualização, inferiu-se que se, por um lado, nas duas primeiras seções realizadas anteriormente o GeoGebra esteve mais ligado aos aspectos intuitivos no sentido de se elaborarem conjecturas, nessa última seção o *software* apresentou a função de testar e validar as conjecturas formuladas, procurando de certa forma estabelecer uma ligação entre o intuitivo e o rigoroso, pois, mesmo não se obtendo algebricamente as leis de formação dos gráficos estudados, os alunos tiveram a oportunidade, por meio das imagens dos gráficos geradas pelo GeoGebra, de obter alguns resultados significativos na busca da formalização da relação existente entre variação e acumulação, que constitui a essência do TFC.

Portanto, na **Seção 4** dessa tarefa procurou-se estabelecer uma relação entre os dois gráficos conjecturados na seção anterior construídos por meio da manipulação dinâmica no GeoGebra.

No que diz respeito ao primeiro item, na justificativa do comportamento do gráfico 1 no intervalo  $[4,8]$  como constante e no gráfico 2 isso não ocorrer, observou-se que muitas duplas procuraram explicar esse fato com a questão de o volume variar proporcionalmente com a altura, sem apresentar maiores explicações. Isso pode refletir de certa forma a incompreensão por parte de algumas duplas da questão do conceito de acumulação, e nesse caso a acumulação da área da seção fornece o volume do sólido.

Algumas duplas perceberam que o gráfico 1 é constante, pois a área é a mesma no cilindro circular reto, e que no caso do volume é dado por uma soma ou acumulação. Isso pode ser evidenciado pela resposta dada pela dupla  $D_3$  que apresentou a seguinte afirmação:

**Figura 74** – Resolução da dupla  $D_3$  – Tarefa 1 – Seção 4 – Item a



Sobre a explicação do comportamento do crescimento do gráfico relacionado com o volume do sólido, muitas duplas afirmaram que, pelo fato de o sólido ser constituído por duas partes diferentes (no caso um cone e um cilindro), então o gráfico apresenta comportamento diferente.

Essa afirmação se constitui como uma intuição afirmativa, em que se conclui que se os sólidos são diferentes, então os volumes também o serão, sendo essa sustentação caracterizada como auto-evidente, sem a checagem de sua veracidade posterior.

Com o intuito de procurar estabelecer uma relação entre os dois gráficos, no próximo item foi solicitado para que se calculasse no intervalo  $[1, 3]$  a área limitada no gráfico 1, bem como a variação do volume do gráfico 2.

Para o cálculo da área, de modo geral, muitas duplas efetuaram uma aproximação utilizando-se de figuras como trapézios.

Um fato interessante diz respeito à resolução elaborada pela dupla  $D_1$  que, ao solicitar-se o cálculo da área limitada sob o gráfico no intervalo considerado, utilizou-se, mesmo com imprecisões, o conceito de integral definida, conforme explicação a seguir:

**Figura 75** – Resolução da dupla  $D_1$  – Tarefa 1 – Seção 4 – Item c

The image shows a handwritten solution for the area under a curve and volume change. The calculations are as follows:

$$A = \int_1^3 \pi \left( \frac{h^2}{5} \right) dx \rightarrow A = \pi \frac{h^3}{12} \Big|_1^3 \rightarrow \left( \frac{\pi 3^3}{12} \right) - \left( \frac{\pi}{12} \right) \rightarrow$$

$$A = \left( \frac{\pi 27}{12} \right) - \left( \frac{\pi}{12} \right) \rightarrow A = 7,07 - 0,26 \rightarrow A \approx 6,81$$

$$V = (7,38 - 0,26) \rightarrow 7,12$$

A variation of volume is approximately equal to the area. We can say that there is an inverse relationship between both graphs.

Essa resolução evidencia o aspecto algorítmico do uso de integrais definidas quando se solicitam o cálculo de áreas. Provavelmente a relação inversa citada pela dupla pode ser considerada que ela esteja se referindo a uma relação biunívoca.

A dupla em questão, mesmo utilizando-se de modo incorreto do conceito de integral definida, inferiu que a variação do volume corresponde aproximadamente à

área solicitada, o que significa que deve existir uma relação entre ambas. Esse sentimento de certeza se constitui de uma convicção intrínseca.

Para reforçar a relação existente entre os gráficos, o próximo item solicitou o cálculo da área e a variação do volume no intervalo  $[5, 6]$ .

Muitas duplas concluíram, por meio de cálculos aproximados, que a variação do volume é numericamente igual à área limitada no intervalo considerado.

Isso pode ser reforçado com a próxima questão, que procurava relacionar de forma inversa o gráfico 2 com o gráfico 1. Apenas duas duplas não concluíram que a variação do volume no intervalo  $[2, 4]$  era aproximadamente igual à área limitada no gráfico 1 no intervalo dado.

Buscando formalizar essa relação, o último item da tarefa solicitou que as duplas escrevessem sobre tal relação existente.

Nesse caso, todas as duplas conseguiram, efetuando os cálculos solicitados nos itens anteriores, concluir que a área limitada no gráfico 1 corresponderia aproximadamente à variação de volume no gráfico 2 no intervalo considerado, e por conseguinte o item foi respondido corretamente.

De modo sintético, constatou-se que nas quatro seções realizadas da **Tarefa 1** os alunos puderam com o uso do GeoGebra estabelecer e comprovar algumas conjecturas, utilizando-se predominantemente da intuição geométrica. Entretanto, a formalização da relação existente entre os dois gráficos construídos e o estabelecimento do TFC seria feita na tarefa seguinte.

Sendo assim, aproximadamente duas horas após o seu início, as **Seções 3 e 4 da Tarefa 1** foram finalizadas pelas duplas, e a **Tarefa 2** foi dedicada ao refinamento das conjecturas obtidas intuitivamente em todas as seções até então.

### 6.1.3 – Considerações Parciais – Tarefa 1

Após a realização da primeira tarefa, constituída por quatro seções e desenvolvida em dois encontros, conclusões obtidas na análise fundamentada pelos dois eixos podem ser destacadas.

Um fato a ser salientado inicialmente é que a proposta do desenvolvimento das seções em que os alunos tiveram a oportunidade de participar em duplas, por meio de manipulações geométricas em um ambiente informatizado, possibilitando a elaboração de conjecturas, não é um procedimento habitual já vivenciado pelos

estudantes. Pode-se afirmar que os alunos envolvidos na tarefa sentiram certo “rompimento” com os procedimentos do ensino tradicional, em que os conteúdos nas aulas geralmente são apresentados por meio de definições, demonstrações, exemplos e exercícios.

No tocante ao eixo de análise referente à questão da visualização e do recurso computacional como facilitador no ensino e aprendizagem do Cálculo, observou-se a importância do uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar na visualização dos conceitos em todas as seções propostas, tornando-se um campo fértil não somente para a elaboração de conjecturas por meio das cognições intuitivas, como também para testar, confirmar e validar essas proposições. Pode-se inferir que a interação dos alunos com o GeoGebra tornou-se o principal elemento para a exploração das intuições na resolução das questões propostas, mesmo que os resultados obtidos não sejam formalizados.

O *software* permitiu que alguns conceitos como acumulação e variação, essenciais para a compreensão do TFC, se tornassem “concretos” com a criação do modelo de um sólido S representado em duas dimensões e a exploração dinâmica por meio do cálculo da área da seção transversal e o volume desse sólido. Esse estudo dinâmico foi embasado conforme descrito no contexto histórico com a questão do movimento nos trabalhos de Oresme, Galileu, Torricelli e Newton, dado que tal abordagem vai ao encontro das ideias defendidas por Tall (1991a), que considera alguns conceitos do Cálculo como função, limite e derivada, dinâmicos e não estáticos, e que, no caso com os recursos do GeoGebra esse procedimento tornou-se possível.

A preocupação de relacionar e explorar quantidades ou grandezas geométricas como área e volume com o registro gráfico e posteriormente efetuar um tratamento algébrico também pode ser observada de certa forma no desenvolvimento histórico do Cálculo: nos períodos denominados nesta pesquisa como “A Aurora do Cálculo” e “O Despertar”, relatou-se a preocupação de Arquimedes, Apolônio, Torricelli e Cavalieri, entre outros, com os problemas de natureza geométrica e posteriormente com a questão do estudo de curvas; já no período “Integro, logo Derivo”, os problemas tratados por Newton e Leibniz, por exemplo, envolviam de maneira mais explícita esses problemas de modo analítico ou algébrico.

A questão da exploração por meio do GeoGebra do registro gráfico se tornou preponderante, conforme ressaltaram Segadas Vianna (1998) e Artigue (2002), pelo fato de os alunos não interpretarem ou identificarem o TFC graficamente, e essa questão, conforme esses autores, se tornou essencial para a compreensão do teorema. Essa abordagem inicial do TFC já havia sido sugerida por alguns professores de Cálculo entrevistados por Picone (2007).

Sob o ponto de vista do eixo de análise sobre a questão da visualização envolvendo a utilização do *software*, percebeu-se em comparação com a questão 3 do questionário-piloto, ao abordar de maneira semelhante o conceito de acumulação por meio da função área, que os alunos participantes das seções, depois de manipularem os objetos envolvidos de maneira dinâmica, permitindo estabelecer-se algumas conjecturas, apresentaram uma melhor compreensão do referido conceito, produzindo alguns resultados considerados satisfatórios, mesmo carecendo ainda dos aspectos formal e rigoroso explorados na próxima tarefa.

Ademais, o fato de o estudo dos conceitos envolvidos no TFC ser realizado no GeoGebra permitiu uma concretização utilizando-se de um modelo do sólido S. O fato de se propor a exploração das propriedades geométricas de um sólido por meio de sua representação bidimensional já remeteu as duplas ao uso de uma intuição geométrica.

A percepção de que os alunos poderiam evocar que o sólido S era composto por infinitas camadas ou porções de área, conforme observou-se no contexto histórico com as ideias ligadas ao “Princípio de Cavalieri”, se tornou um fator de destaque na análise. Notou-se, assim como ocorrera na questão 2 do questionário-piloto, que os alunos parecem ter uma maior habilidade em manusear e compreender algumas propriedades dos objetos tridimensionais em decorrência dos bidimensionais. Isso se tornou mais evidente quando eles esboçaram o gráfico da variação do volume em função da altura com maior facilidade do que a área da seção transversal.

Como o GeoGebra possui uma variedade de ferramentas e registros de representação para um mesmo objeto matemático, procurou-se utilizar, de acordo com a tarefa, tais recursos da maneira mais apropriada possível.

Nas duas primeiras seções o GeoGebra auxiliou na elaboração de conjecturas sobre os conceitos de variação e acumulação das grandezas geométricas de um sólido modelado e representado no próprio *software*. A

manipulação dinâmica dos objetos talvez se tornou o principal benefício oferecido pelo *software* no estudo dos conceitos em todas as seções.

O uso pelas duplas na primeira tarefa do plano afim para a representação do modelo de um sólido permitiu evocar uma intuição sensível, que merece ser destacada. Além disso, conceitos como variação e acumulação, que podem ser considerados dinâmicos e que de um modo geral são tratados de maneira estática, foram explorados de forma que se julga mais adequada num ambiente computacional.

Já nas duas últimas seções da primeira tarefa o GeoGebra possibilitou refinar e comprovar algumas conjecturas estabelecidas nas primeiras seções e a manipulação simultânea do modelo geométrico com o registro gráfico auxiliou na compreensão do comportamento dos conceitos essenciais do TFC: variação e acumulação.

No tocante ao eixo das inter-relações dos componentes formal, algorítmico e intuitivo, algumas conclusões podem ser extraídas.

O componente algorítmico foi um dos elementos mais evidentes nas resoluções elaboradas pelas duplas, em que se observou um número considerável de manipulações algébricas, uso de algoritmos, explicitando fórmulas e teoremas sem chegar-se a um resultado desejado. Pode-se concluir, portanto, com isso que os alunos realizam conjecturas com valores particulares, mas parece que não conseguiram generalizar os resultados encontrados.

Resumidamente, observou-se nessa primeira tarefa, durante as quatro sessões, que algumas ideias impregnadas nos alunos afetaram a compreensão resolução das questões, tais como:

- uma função deve sempre ser contínua e conseqüentemente o seu gráfico não pode apresentar “rupturas” ou pontos de descontinuidade;
- a variação entre duas grandezas sempre ocorre de forma linear e, portanto, o gráfico que representa tal relação é uma reta;
- o cálculo de áreas ligado a um conteúdo (otimização) ou ao conceito de integral e o volume ligado à ideia da rotação de um sólido.

Esses resultados podem remeter ao efeito coercitivo da intuição, em que os alunos evocam imagens de alguns conceitos elaborados por eles na tentativa da resolução de outras questões. Nesse caso, pode-se inferir que o uso da intuição



nessa situação não propiciou nenhum benefício na elaboração de conjecturas para posteriormente ser refinada.

Por conseguinte, diagnosticou-se o predomínio de um aspecto ou componente se sobrepondo em relação ao outro nas seções desenvolvidas até então. No caso, nas primeiras seções constatou-se o que o componente algorítmico, por meio do uso de procedimentos e fórmulas memorizáveis se sobrepôs ao componente intuitivo, possivelmente decorrente da influência do ensino no quais os alunos estão inseridos.

Acredita-se que se faz necessário, nesse caso, desenvolver algumas habilidades e cognições intuitivas dos alunos como estratégias de resolução de questões e que estas cognições sejam refinadas com o desenvolvimento dos componentes algorítmico e formal.

A relação entre duas grandezas, no caso a área da seção transversal e altura, assim como volume e altura, talvez tenha sido o conceito em que as duplas tiveram maior dificuldade. Mesmo na relação entre o raio da seção e a altura do plano que intercepta o sólido, a falta do componente formal contribuiu para que as duplas não conseguissem estabelecer tal relação.

Nesse caso, as noções de relação e função parecem constituir um aspecto a ser destacado para uma maior compreensão dos conceitos fundamentais do Cálculo, sobretudo no que diz respeito ao tratamento algébrico, na obtenção da lei de formação da função.

Observa-se, analisando-se de maneira geral, consequentemente, em um curso de Cálculo que alguns obstáculos não são detectados e devem ser trabalhados com maior ênfase, pois as seções realizadas pelos alunos evidenciaram algumas dificuldades que talvez em uma aula não são levados em consideração pelos professores e que podem influenciar no processo de ensino e aprendizagem.

#### **6.1.4 – Terceiro encontro: Tarefa 2 – Seções 1 e 2**

Uma semana após o término da última tarefa, a **Seção 1** da **Tarefa 2**, foi realizada no mesmo local e horário das outras seções com o intuito de fazer um resumo das conjecturas e resultados obtidos na tarefa anterior, bem como formalizar alguns conceitos explorados nas questões.

Essa fase contou com a intervenção do professor pesquisador para organizar as ideias apresentadas pelos alunos e refletir sobre as respostas discutidas pelas duplas no sentido de elaborar conclusões sobre os conceitos envolvidos.

Para isso, foi utilizado novamente um gravador de áudio para captar as discussões geradas entre as duplas e o professor pesquisador. Todas as duplas aceitaram em comum acordo deixar um gravador de áudio para registrar as gravações, e os pontos mais pertinentes foram transcritos de maneira resumida no decorrer da análise.

No primeiro item dessa seção, para se determinar a expressão algébrica da relação entre a área da seção transversal em função da altura  $h$  no intervalo  $[0, 8]$ , bem como do volume do sólido  $S$  da seção anterior, a discussão girou em torno de se obter, por meio do registro algébrico a lei de formação para as duas relações.

Foi reiterado que o raio da seção transversal variava em função da altura segundo a relação  $r = \frac{h}{2}$ . Algumas duplas comentaram que chegaram a esse resultado com alguns valores particulares do raio e da altura e que não tinham a convicção dessa relação para quaisquer valores da altura, conforme observado nas seções anteriores.

Após uma discussão geral obteve-se o consenso de que a área da seção transversal  $A_S$  no intervalo  $[0, 4]$  é diretamente proporcional ao quadrado do valor da altura e no intervalo  $[4, 8]$  tem-se o valor constante para a referida área.

Sendo  $A_S = \pi r^2$ , tem-se que:

$$A_S = \begin{cases} \frac{\pi h^2}{4}, & \text{se } 0 \leq h \leq 4 \\ \pi, & \text{se } 4 \leq h \leq 8 \end{cases}$$

Ressaltou-se que essa relação obtida não se constitui uma função, pelo fato de que para  $h = 4$  tem-se a possibilidade de dois valores para a área da seção transversal.

Esse resultado obtido contrastou com alguns gráficos esboçados pelas duplas, por exemplo, no caso da descontinuidade do gráfico no ponto em que  $h = 4$



e a variação entre as grandezas no intervalo  $[0, 4]$  não se comportar de maneira linear.

Para o caso da variação do volume em função da altura, concluiu-se que o volume do sólido no intervalo  $[0, 4]$  é diretamente proporcional ao cubo da medida da altura e no intervalo  $]4, 8]$  a variação é afim, obtida pela acumulação do volume do cone com o cilindro circular reto conforme a relação a seguir:

$$V_S = \begin{cases} \frac{\pi h^3}{12}, & \text{se } 0 \leq h \leq 4 \\ \frac{4\pi}{3} + \pi h, & \text{se } 4 < h \leq 8 \end{cases}$$

Observou-se que a relação obtida constitui uma função contínua, ao contrário da relação anterior.

Nos dois casos foi constatado que os componentes intuitivo e algorítmico inter-relacionados não possibilitaram a passagem para a formalização algébrica da lei de formação das relações estudadas.

Para visualizar os gráficos dessas relações, no caso da primeira, solicitou-se que as duplas criassem um novo arquivo no GeoGebra, e no comando *Campo de Entrada* deveriam inserir as seguintes expressões:

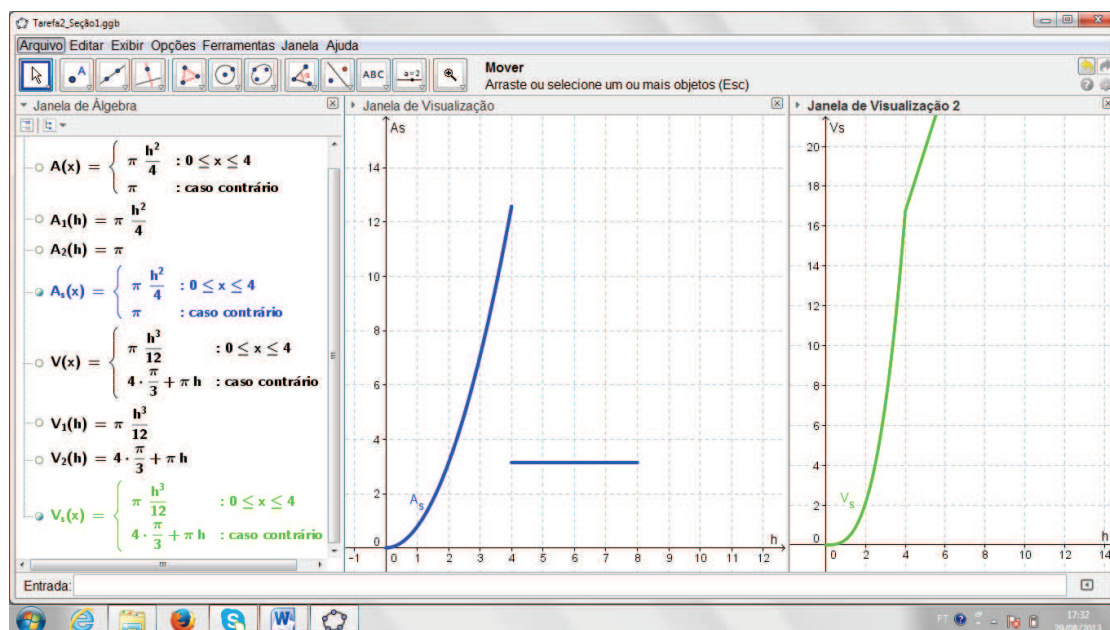
- $A_1(h) = \frac{\pi h^2}{4}$
- $A_2(h) = \pi$
- Função  $A = Se[0 \leq x \leq 4, A_1, A_2]$
- Função  $[A, 0, 8]$  e renomeá-la para  $A_S$ .

Em relação à segunda relação  $V_S$ , para o gráfico do volume, foram inseridas no Campo de Entrada as seguintes expressões:

- $V_1(h) = \frac{\pi h^3}{12}$
- $V_2(h) = \frac{4\pi}{3} + \pi h$
- Função  $V = Se[0 \leq x \leq 4, V_1, V_2]$
- Função  $[V, 0, 8]$  e renomeá-la para  $V_S$ .

Com essa sequência de dados digitados, as duplas puderam observar simultaneamente os gráficos das relações  $A_S$  e  $V_S$  nas janelas 1 e 2 de visualização, respectivamente, de acordo com a figura a seguir:

**Figura 76 – Gráficos – Tarefa 2 – Seção 1**



Fonte: Autor, 2013

Ao visualizarem os gráficos, as duplas puderam confirmar algumas conjecturas, bem como refinar alguns resultados intuídos.

Foi ressaltado para os alunos que apesar de o gráfico da primeira relação não ser uma linha contínua no intervalo  $[0,8]$ , o segundo gráfico apresentou-se como contínuo.

Nessa seção observou-se que tanto as intuições afirmativas quanto as conjecturais foram confrontadas com o componente formal no sentido de validar as respostas elaboradas pelas duplas.

Para essa seção, o GeoGebra se constituiu em um instrumento útil de validação das conjecturas elaboradas anteriormente, porém convém destacar que o registro algébrico nessa seção passou a ser utilizado no *software* para a representação das relações estudadas em contrapartida com o registro geométrico explorado com maior ênfase nas seções anteriores.

Após estabelecer a expressão algébrica para as relações estudadas no GeoGebra, a **Seção 2** teve por objetivo elaborar uma conclusão a respeito das tarefas envolvendo o cálculo da área da seção transversal e o volume do sólido  $S$ .

Nessa seção contou-se novamente com a intervenção do professor pesquisador no sentido de se organizarem os resultados obtidos até então.

No primeiro item, solicitou-se das duplas uma conclusão provisória sobre a relação existente entre o volume e a área da seção transversal do sólido. Essa conclusão deveria ser descrita no registro da língua natural, constituindo-se de uma intuição antecipatória, representando um ponto de vista global do problema, em que se formulou uma hipótese ligada a um sentimento de certeza. Essa solução preliminar foi formalizada posteriormente.

Para isso, os alunos tentaram observar como a relação estabeleceu-se graficamente: ao calcular a área limitada sob o gráfico de  $A_S$ , esse resultado seria numericamente equivalente ao cálculo da diferença do volume no segundo gráfico e vice-versa.

Com isso, elaborou-se a seguinte comparação: a diferença entre porções do volume pode ser obtida pela “soma” das áreas da seção transversal do sólido em um determinado intervalo.

Intuindo geometricamente esse resultado, passou-se a analisar essa questão com a seguinte conjectura: o sólido foi obtido pela sobreposição de pequenas camadas de alturas “infinitamente pequenas”, que no caso, por exemplo, do equipamento em que a peça foi fabricada – uma impressora 3D –, corresponderia à precisão de inserção do material, e que isso poderia ser considerado uma parcela infinitamente pequena do volume.

Por meio dessa intuição geométrica, elaborou-se uma conclusão provisória correspondente a uma intuição antecipatória, que se sobreporia às intuições afirmativas realizadas anteriormente.

Sendo assim, concluiu-se que se o volume é obtido pela soma de “camadas infinitamente pequenas de porções de áreas”, então uma pequena variação de volume equivaleria à área da seção transversal. Como os alunos fizeram duas operações, uma inversa da outra, esperou-se que isso pudesse contribuir para a percepção da relação inversa entre a derivada e integral.

O próximo passo consistiu em buscar uma formalização dos resultados e conclusões obtidas no sentido de procurar estabelecer a relação existente entre as operações de integração e derivação.

Nessa fase, muitas duplas fizeram a analogia de que soma está relacionada com a integral, assim como a variação ou diferença com a questão da derivada.

Algumas duplas, influenciadas pelo componente algorítmico, simplesmente chegaram a esse resultado afirmando que algebricamente derivou e integrou as expressões e constatou isso.

A dupla  $D_1$  enunciou um resultado diferenciado, percebendo a relação existente pela “dimensão” dos elementos envolvidos: o volume possui três dimensões e a área duas; por isso, segundo a dupla, ao “derivar” o volume obtém-se a área e, “integrando” a área, acha-se o volume.

Tais resultados foram captados pela gravação de áudio, em que as duplas ao procurarem redigir uma conclusão fizeram esse comentário testando essa conjectura por meio das operações de integração e derivação.

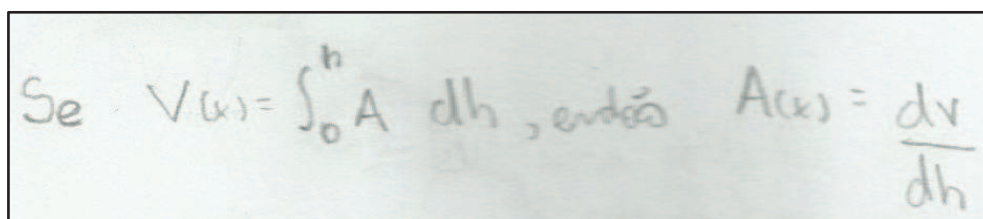
Nesse instante, o professor pesquisador interveio destacando que as duplas na primeira tarefa tiveram a oportunidade de trabalhar com dois dos conceitos considerados imprescindíveis no estudo do Cálculo: acumulação e variação, e que a relação entre esses conceitos constitui a essência do TFC.

Ressaltou-se também que as condições para que o teorema fosse válido eram as seguintes: que a relação correspondente à área da seção fosse contínua e limitada, portanto integrável e que a função correspondente ao volume fosse derivável, fato esse que se percebeu não ocorrer justamente no ponto em que  $h = 4$ .

Mesmo com essas ressalvas, após obterem uma conclusão provisória, solicitou-se que as duplas apresentassem no próximo item uma definição sobre essa conclusão, utilizando-se dessa vez do registro algébrico. As duplas puderam, portanto, isso relacionar o aspecto formal com o que haviam intuído anteriormente.

A dupla  $D_2$ , por exemplo, redigiu a seguinte definição:

**Figura 77** – Resolução da dupla  $D_2$  – Tarefa 2 – Seção 2 – Item b



Se  $V(x) = \int_0^h A \, dh$ , então  $A(x) = \frac{dV}{dh}$

Nesse caso, observou-se que essa dupla não apresentou o rigor necessário na escolha das variáveis, ao confundir a variável  $x$  com a variável  $h$ .

A dupla D<sub>5</sub>, por exemplo, comentou que a integral possuía os limites de integração  $a$  e  $b$ , e outra disse que o limite inferior de integração é igual a zero variando até um determinado valor  $h$ .

Algumas duplas mencionaram que só perceberam esse fato também do modo algébrico, por exemplo, a dupla D<sub>1</sub>, ao dizer que o volume era sempre dado por uma soma, o que levava a mesma a essa conclusão.

Sendo assim, com uma duração aproximada de duas horas e quinze minutos, as duas primeiras seções da **Tarefa 2** foram concluídas, e nessa fase os componentes intuitivo, algorítmico e formal foram confrontados no sentido de se elaborarem algumas conclusões sobre a relação existente entre os conceitos de acumulação e variação.

#### 6.1.5 – Quarto encontro: Tarefa 2 – Seções 3 e 4

As duas últimas sessões da **Tarefa 2** ocorreram no dia 10 de junho de 2013. O intervalo de tempo desde a última sessão realizada, há três meses, foi programada de modo que após esse hiato as duplas fossem avaliadas sobre qual compreensão que elas interiorizaram no que diz respeito às ideias sobre a relação entre acumulação e variação desenvolvidas nas últimas seções, bem como refinar e formalizar alguns conceitos explorados até então.

Solicitou-se que os alunos formassem duplas aleatoriamente, e todos em comum acordo manifestaram interesse em permanecer com a mesma formação dos encontros anteriores.

Na **Seção 3** da **Tarefa 2** a primeira questão teve como objetivo avaliar de que modo as duplas trabalhavam os conceitos de variação e acumulação a partir de um problema que envolvia a taxa de variação da água em um reservatório ao longo do tempo.

Em um primeiro momento, todas as questões dessa seção foram respondidas nas folhas entregues para as duplas, e posteriormente o problema seria discutido com a utilização do GeoGebra.

Observou-se que as duplas, no primeiro item solicitado, souberam reconhecer as variáveis envolvidas no problema (no caso a taxa de variação de

água e o tempo). Entretanto, ao identificarem o domínio e a imagem da função cujo gráfico era fornecido, todas as duplas participantes de maneira semelhante responderam que o domínio era formado por: “todos os valores de  $x$ ” ou “são os valores do eixo  $x$ ” assim como para o conjunto imagem: “todos os valores de  $y$ ”, ou seja, não relacionaram as variáveis descritas no item anterior.

Além disso, nenhuma das duplas utilizou corretamente a simbologia algébrica necessária para representar tais conjuntos solicitados, e várias duplas mesclaram o uso da notação de intervalos em  $\mathbb{R}$  com o registro da língua natural.

Apenas a dupla  $D_3$  descreveu que o domínio e a imagem da função eram formados por pares ordenados  $(0,0)$ ,  $(3,3)$ ,  $(4,5,0)$ ,  $(6, -3)$ ,  $(9,0)$ ,  $(10,1)$  e  $(11,1)$  fornecidos no gráfico.

A descrição dessas respostas nos primeiros itens observados suscita alguns comentários.

A dificuldade dos alunos na representação simbólica dos conjuntos remete à relação existente entre o componente intuitivo e o formal, pois se por um lado as duplas intuíram o modo de encontrar os elementos dos conjuntos solicitados (domínio e imagem), por meio da visualização dos eixos percebeu-se que elas careciam de uma linguagem simbólica adequada para responder as questões.

Essa estratégia intuitiva utilizada pelos alunos de “visualizar os eixos” exerceu um efeito coercitivo na resolução das questões, pois o simples conhecimento retratado pelos alunos de atribuir ao domínio de uma função o eixo das abscissas, e ao conjunto imagem o eixo das ordenadas, influenciou na resposta dada por eles, sem procurar nenhuma ligação com as variáveis envolvidas na questão.

O fato de a dupla  $D_3$  ter relacionado o domínio e a imagem da função apenas aos pontos apresentados no gráfico pode trazer indícios de outro aspecto coercitivo da intuição relacionada com o que se pode denominar “discretização” na construção do gráfico de uma função por meio de uma tabela em que são atribuídos alguns valores aleatórios para a variável independente para obter o valor de sua imagem correspondente, sem o devido cuidado de observar a questão da continuidade da variável.

No tocante à questão sobre a continuidade da função, todas as duplas afirmaram que ela é contínua no intervalo considerado, tendo se verificado várias justificativas para tal questionamento.

Além da observação feita pelas duplas no sentido de o gráfico não apresentar quebras ou rupturas, a dupla D<sub>4</sub>, por exemplo, afirmou que a função é contínua, “pois todos os x e y têm os seus pares”. Já a dupla D<sub>5</sub> justificou que o gráfico não pode ter quebras por conta da variável tempo.

Para o item seguinte, em que se questionou a maneira da obtenção da lei de formação da função, grande parte das duplas respondeu que procuraram encontrar uma relação entre as variáveis de acordo com os pontos apresentados no gráfico.

Sobre a questão de elaborar a lei de formação dessa função, apenas duas duplas procuraram esboçar uma lei sem, entretanto obtê-la, e uma delas afirmou que o gráfico se comporta como uma função quadrática e a outra como uma função afim.

Desses dois itens descritos anteriormente podem ser inferidas algumas conclusões. A continuidade de uma função para os alunos parece estar relacionada com uma questão semântica, pois o significado da continuidade do gráfico atribuído pelos alunos está ligado ao fato de ele não apresentar rupturas.

Para determinar o volume do reservatório em um determinado instante, todas as duplas associaram o resultado com o cálculo da área limitada pelo gráfico e o eixo das abscissas no intervalo considerado.

A dupla D<sub>3</sub> utilizou-se do aspecto algorítmico ao descrever que se a taxa é dada em  $m^3/h$  e o tempo em horas, ao se multiplicar  $\left(m^3/h\right) \cdot h = m^3$ , obtém-se o volume, que é dado na unidade usada na questão.

A associação do cálculo de áreas com a integral definida foi observada na resposta das duplas D<sub>1</sub> e D<sub>2</sub>. Todavia essa associação causou um conflito cognitivo com o aspecto algorítmico, pois no item em que se solicitou a determinação da quantidade de água no reservatório nos instantes  $t=3$ ,  $t=6$ ,  $t=9$  e  $t=12$  essas duplas não perceberam que no instante  $t=9$ , por exemplo, o volume do reservatório é igual a zero, e o cálculo utilizando-se a área sob o gráfico não obtém esse resultado.

O fato de os alunos relacionarem a área limitada por um gráfico como sinônimo de integral nessa situação causou um conflito cognitivo entre o componente intuitivo e o algorítmico.

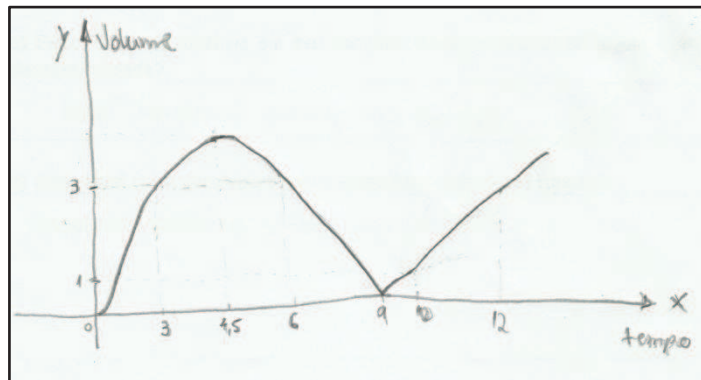
Quanto ao último item solicitado, referente ao esboço do gráfico que representa o volume do reservatório em função do tempo, constatou-se que quatro



das sete duplas conseguiram relacionar o aspecto da acumulação em função do tempo, considerando acumulações com valores positivos e negativos e consequentemente o gráfico apresentar-se crescente ou decrescente em alguns intervalos.

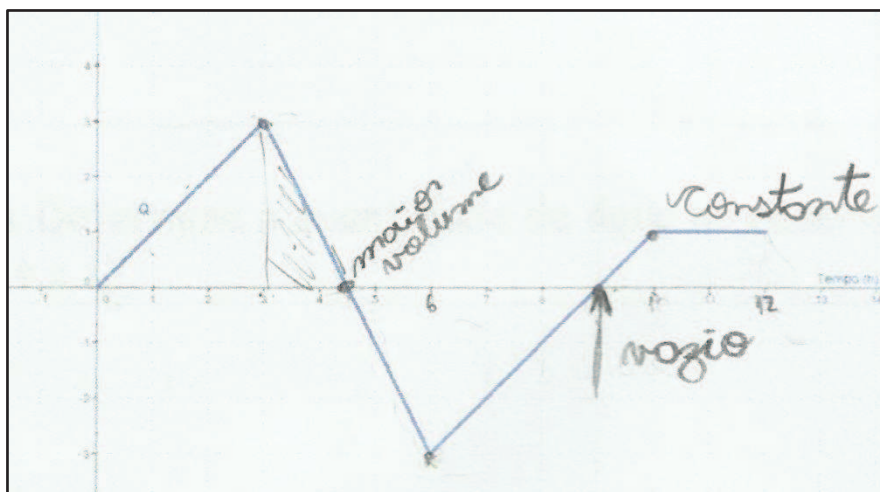
A dupla D<sub>6</sub>, por exemplo, esboçou o seguinte gráfico, considerando os aspectos envolvidos:

**Figura 78** – Resolução da dupla D<sub>6</sub> – Tarefa 2 – Seção 3 – Item g



Outro fato que pode ser ressaltado diz respeito à dupla D<sub>4</sub>, que, com o intuito de obter o gráfico da acumulação da água no reservatório, destacou os pontos em que se tem o volume máximo e mínimo do reservatório, conforme resolução a seguir:

**Figura 79** – Estratégia da dupla D<sub>6</sub> – Tarefa 2 – Seção 3 – Item g





Essa estratégia utilizada pela dupla evidencia que eles não estavam efetuando apenas procedimentos formais e algorítmicos, pois perceberam intuitivamente o significado ao redigirem algumas respostas corretamente.

Após a confecção do gráfico solicitado, os alunos entregaram os protocolos referentes à seção e acessaram o arquivo no GeoGebra com a tarefa proposta.

Ao visualizarem o arquivo com a questão correspondente, os alunos, ao movimentarem o ponto  $P$  deslizando-o sobre o gráfico puderam observar como este se comportava, o qual mostrava o volume total no reservatório em função do tempo.

Nesse instante, os alunos poderiam inferir que sendo o volume de água no reservatório dado por uma acumulação, tem-se pelos dados fornecidos no gráfico que essa acumulação ora tornava-se positiva, ora negativa ou igual a zero.

Ao utilizarem o GeoGebra, no sentido de confirmarem ou não os resultados, percebeu-se, como constatado anteriormente, que o modo dinâmico constituiu-se uma forma não somente de intuir, mas também de refinar os conceitos conjecturados, conforme observado nas seções anteriores.

Para formalizar a relação entre as operações de integração e derivação, na **Seção 4 da Tarefa 2**, inicialmente foi solicitada a redação de uma definição provisória dessa relação.

Depois de as duplas entregarem tal definição sobre os resultados obtidos, o professor pesquisador realizou a institucionalização na lousa dos conceitos abordados sistematizando a demonstração algébrica.

Nessa formalização o objetivo principal era demonstrar que, se  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , então  $F'(x) = f(x)$  e que a preocupação principal era chamar a atenção dos alunos no sentido de que a essência do TFC está justamente nessa relação entre integração e derivação e sob quais condições essa relação pode ser estabelecida, conforme será mostrando a seguir.

Para uma demonstração algébrica seja uma função  $f$  contínua e limitada, portanto integrável. Pode-se associar uma função  $F$  dada por  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Se se considerar um incremento produzido  $h$ , a diferença da acumulação  $F(x + h) - F(x)$  será dada por:

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

Sabendo que:

$$\int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \Rightarrow$$

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \quad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Pelo Teorema da Média<sup>1</sup>, como  $f$  é limitada, existe um ponto  $c$  do intervalo  $[x, x+h]$  tal que a integral (2) é igual a  $hf(c)$ . Sendo assim:

$$F(x+h) - F(x) = hf(c) \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c) \quad (3)$$

Na igualdade (3) fazendo  $h$  tender a zero,  $c$  tende a  $x$ ; como  $f$  é contínua,  $f(c)$  tende a  $f(x)$ , em que conclui-se que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

A igualdade  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$  que se encontra em muitos livros didáticos de Cálculo, descrita como a “segunda parte do TFC” não constitui a essência do teorema, mas sim uma ferramenta adequada para o cálculo de integrais definidas.

Com a demonstração formal realizada, ressaltam-se a preocupação e o interesse de trazer o conceito de derivada com a integral, por meio da exploração respectivamente dos conceitos de variação e acumulação, além de se estabelecerem as condições para que essa relação seja válida.

---

<sup>1</sup> **8.11. Teorema da Média** – Sejam  $f$  uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $I = [a, b]$ , e  $m$  e  $M$  o mínimo e o máximo de  $f$ , respectivamente. Então, existe um número  $c \in I$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad (\text{ÁVILA, 2006, p. 206}).$$

Discutiu-se com as duplas que inicialmente deveria ser considerada uma função  $f$  contínua; por isso partiu-se de uma situação de uma relação com ponto de descontinuidade, no caso a área da seção transversal em função da altura.

A partir dessa relação, pode-se associar outra relação dada por uma acumulação, que, nesse caso, escolheu-se o volume como a acumulação das áreas da seção transversal. Portanto, passou-se a estudar a relação existente entre essas grandezas inicialmente utilizando-se o registro gráfico.

Percebeu-se que, se uma grandeza é dada pela acumulação de outra, então uma variação infinitamente pequena da primeira corresponderia a essa segunda grandeza, e essa relação foi generalizada para as operações de integração e derivação.

Para finalizar a respeito do resultado obtido, foi solicitada aos alunos a reflexão sobre a relação entre as grandezas já vistas por eles durante o curso, por exemplo, a velocidade e o tempo no estudo do movimento, da força cortante e do momento fletor no estudo da mecânica, e a analogia que poderia se estabelecer entre acumulação e variação, constituindo-se a essência do TFC.

Sendo assim, após um período de aproximadamente duas horas, a última seção da última tarefa encerrou-se com o estabelecimento do TFC.

#### 6.1.6 – Considerações Parciais –Tarefa 2

Observou-se, de modo geral nessa segunda tarefa um avanço significativo na compreensão dos alunos no tocante a alguns conceitos ligados ao TFC. Isso tornou-se evidente na passagem da **Tarefa 1** para a **Tarefa 2**, principalmente no que se refere ao comportamento dos gráficos das funções bem como ao entendimento do conceito de acumulação.

Destacou-se que ambas as tarefas apresentaram no seu bojo a exploração dos conceitos de acumulação e variação, que, conforme reiterou-se, são elementos primordiais na compreensão do TFC.

Entretanto a primeira tarefa trouxe em suas questões a discussão justamente das condições para que se possa estabelecer o TFC: a continuidade de uma função, além do fato de uma relação entre dois conjuntos se constituir uma função. Na segunda tarefa observou-se que essas condições são satisfeitas.

Outra diferença que pode ser verificada diz respeito ao uso do *software*, que desempenhou uma função diferenciada daquela observada na **Tarefa 1**, cuja utilização estava mais ligada À elaboração de conjecturas e à organização de algumas ideias.

Do ponto de vista do eixo de análise sobre a questão da visualização na segunda tarefa, o GeoGebra permitiu confirmar e validar algumas hipóteses e conjecturas elaboradas pelos alunos anteriormente bem como refinar alguns conceitos.

Sobre a comparação entre os gráficos das relações reitera-se a importância do estudo justamente nos pontos que devem ser satisfeitos para que o TFC seja estabelecido.

No tocante às inter-relações entre os componentes formal, algorítmico e intuitivo, nas seções referentes a essa última tarefa as duplas relacionaram de modo mais incisivo o componente algorítmico com o formal. Na busca de uma comparação entre os dois gráficos, as duplas manifestaram uma intuição antecipatória, para que posteriormente pudessem expressar uma conclusão sobre o problema.

Todos esses elementos foram fundamentais principalmente no que dizem respeito à resolução da **Seção 3**, pois as duplas evocaram em vários momentos intuições geométricas nas soluções descritas.

Observou-se que em diversas circunstâncias um dos componentes – intuitivo, algorítmico ou formal – se sobrepôs aos demais, e que em dadas situações em grande medida isso levou as duplas a cometer alguns erros.

Destaca-se, por exemplo, que, na obtenção das variáveis, do domínio e imagem de uma função, as duplas evocaram uma característica da intuição: o efeito coercitivo, ao relacionarem apenas variáveis, domínio e imagem aos eixos  $x$  e  $y$ . Nesse caso, observa-se que as duplas manifestaram dificuldades no reconhecimento desses elementos.

No que concerne ao esboço do gráfico de uma função de acumulação (que no caso em questão corresponde ao volume de água em um reservatório em função do tempo), percebeu-se uma evolução e melhor compreensão dessa noção na resolução do problema proposto.

Por meio das gravações de áudio, notou-se que muitas duplas reconheceram o caráter acumulativo de uma grandeza ao manifestarem intuições e analogias geométricas com o mundo físico, imaginando o problema como um

reservatório formado, em que têm uma torneira e um ralo, para caracterizar a situação de entrada/saída de água.

Esse tipo de manifestação no sentido de como recorrer ao mundo físico, com o uso de analogias remeteu à intuição sensível descrita por Poincaré (1995) como estratégia para a resolução do problema.

Quanto ao aspecto do comportamento do gráfico, as duplas observaram que, mesmo em alguns trechos, quando a taxa de variação é decrescente, a função de acumulação é crescente, e, quando a taxa de variação é nula, a função de acumulação atinge seus valores extremos (máximo e mínimo).

Na formalização do TFC, mesmo com o predomínio do componente formal, salienta-se a presença do aspecto intuitivo na demonstração, pois esse componente se revelou um fator evidente em sua elaboração.

## 6.2 - Conclusões

Concluída a realização da sequência de ensino e após analisar os resultados obtidos, pode-se, de uma maneira global, inferir e reiterar algumas conclusões sob a ótica dos dois eixos ou categorizações de análise.

Sob o ponto de vista da questão da visualização relacionada com o uso do recurso computacional, além da intuição e do rigor, observa-se que a interação dos alunos com o GeoGebra pode ser verificada em dois momentos com características diferentes: na primeira tarefa o *software* permitiu não somente visualizar, mas “concretizar” ou “tornar reais” algumas ideias relacionadas com o TFC, como acumulação e variação, e essa concretização foi a grande responsável pela exploração principalmente da intuição sensível dos alunos, permitindo que eles participassem da construção dos conceitos envolvidos por meio da formulação de conjecturas e o uso de analogias, utilizando-se do registro geométrico, bem como do registro gráfico. Esse procedimento foi provocado pelo experimento embasado no referencial teórico adotado neste trabalho ligado ao papel e à importância da intuição segundo Poincaré (1995) no processo de criação matemática.

Com isso, nessa primeira fase o uso do recurso computacional facilitou a visualização de conceitos envolvidos nas questões durante as seções, sendo essa uma estratégia adotada nesta pesquisa. Tais aspectos também foram apontados nos trabalhos de Tall (1991a), conforme descritos anteriormente.

Pode-se concluir que na primeira tarefa o GeoGebra esteve ligado integralmente com a exploração das cognições intuitivas dos alunos, além de possibilitar a construção de alguns resultados mesmo que de maneira provisória.

Em um segundo momento, especificamente no final da primeira tarefa e início da segunda, o uso do recurso computacional apresentou uma função adicional, pois, além da exploração das intuições dos alunos, o *software* serviu como uma ferramenta no sentido de se validarem algumas conjecturas formuladas pelos alunos anteriormente, auxiliando dessa maneira a formalização de alguns conceitos essenciais para o estabelecimento do TFC, como a noção de acumulação. Nessa segunda etapa o GeoGebra esteve mais ligado aos componentes algorítmico e formal, relacionando-os de forma preponderante com a questão do rigor.

Outro item que merece destaque é a própria interação entre os alunos com o *software* que permitiu estabelecer a inter-relação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, pois em algumas seções os alunos foram colocados em situação conflitante com aquilo que haviam conjecturado intuitivamente com o aspecto formal do conceito envolvido, e essa contraposição se mostrou salutar na elaboração de conclusões do sentido de se formalizar a relação existente entre a integração e a derivação. Esse fato tornou-se a maior preocupação na elaboração das tarefas no sentido de buscar a compreensão do TFC.

Esse embate levou a concluir que, se o recurso computacional, por um lado, pode ser utilizado como um meio de manifestar algumas intuições, por outro, ele pode ser útil no processo de formalização dos conceitos, por meio da exploração dos componentes nas atividades matemáticas.

No tocante ao eixo sobre as inter-relações entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, presentes nas atividades matemáticas conforme descreveu Fischbein (1991), observou-se que os alunos, durante a realização das tarefas manifestaram predominantemente um dos componentes em detrimento dos demais.

Constatou-se que nas primeiras seções da Tarefa 1 o componente algorítmico se tornou o elemento mais evidenciado pelas duplas. Todavia, à medida que as seções se desenvolviam, os alunos passavam a intuir alguns resultados estabelecendo conjecturas e formulando hipóteses. Inferiu-se, por conseguinte, que a necessidade das duplas de manifestar uma intuição sensível contribuiu para o desenvolvimento das atividades, pois o fato delas demonstrarem apenas o

conhecimento de procedimentos, algoritmos e fórmulas memorizáveis nesse caso não foi suficiente para a resolução das questões.

Conforme comentou-se anteriormente, o uso do *software* permitiu confrontar os componentes intuitivo e algorítmico com o formal, principalmente na segunda tarefa, e essa contraposição tornou-se o principal fator no processo de rigorização e compreensão da essência do TFC.

Verificou-se que no desenvolvimento das atividades matemáticas se fazem necessários o relacionamento e o embate entre os três componentes, pois a manifestação nas atividades matemáticas de apenas um deles não se mostrou uma estratégia eficiente na resolução das questões.

Quanto à compreensão do TFC, inferiu-se que por meio das relações e contraposições dos componentes trabalhando-se simultaneamente com as noções de acumulação e variação, pode-se estabelecer a relação de reciprocidade existente entre as operações de integração e derivação.

Por meio das inter-relações entre os componentes puderam-se identificar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão de alguns conceitos, tais como: representação gráfica e continuidade de uma função, variação entre duas grandezas.

Convém destacar que a natural falta de rigor apresentada pelos alunos tornou-se um obstáculo para maiores generalizações, entretanto conclui-se que a ação conjunta dos elementos que constituíram os dois eixos de análise contribuiu para que, a partir das ideias intuídas pelas duplas, se atingisse o estágio da formalização dos conceitos e conseqüentemente o estabelecimento do TFC.

“Provamos através da lógica, mas descobrimos a partir da intuição”.

HENRI POINCARÉ

---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a análise dos resultados encontrados na sequência de ensino sob a ótica do referencial teórico adotado, serão feitas as considerações finais deste trabalho com o intuito de responder à questão que norteou esta pesquisa: uma intervenção de ensino baseada nos princípios da intuição contribui na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação-problema que propicie emergir e evidenciar tais relações?

Lembrando que, ao responder essa questão, deseja-se também avaliar qual o alcance que uma intervenção desse tipo traz para o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Para isso, serão levantados alguns pontos essenciais discutidos no decorrer do trabalho procurando estabelecer um vínculo entre o contexto histórico, a fundamentação teórica e os resultados obtidos na intervenção de ensino, no sentido de se inferirem algumas conclusões.

No início, buscou-se elencar elementos considerados essenciais que interferem e podem auxiliar na compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), evidenciados, sobretudo, nas pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Após analisarem-se algumas pesquisas ligadas à problemática do ensino e aprendizagem do TFC, foram destacados os seguintes tópicos: a ideia de acumulação, considerada o cerne do conceito de integral, assim como a taxa de variação dessa acumulação relacionada com a ideia de derivada; os conceitos que permeiam a noção de função, tais como domínio, variáveis e continuidade, além da questão da interpretação e visualização gráfica do TFC.

Com o intuito de evidenciar a relação existente entre integração e derivação, ressalta-se que em neste trabalho buscaram-se no contexto histórico, conforme os trabalhos de Leibniz, assim como de maneira semelhante na obra analisada de Strang (1991), algumas ideias que permitiram elaborar no questionário-piloto uma



tarefa que partia de uma sequência numérica para obter uma sequência dada pela diferença de um termo, a partir do segundo, pelo seu antecessor, destacando adição e subtração como operações inversas uma da outra, caminhando assim na sequência de ensino para o relacionamento entre acumulação e variação, levando à visualização de duas novas operações inversas uma da outra, que são a integração e a derivação.

O conceito de acumulação mostrou-se como um elemento-chave na compreensão da função dada por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , além da possibilidade de construção do significado de integral baseado nessa ideia, tal como diagnosticado na revisão bibliográfica pelos trabalhos de Carlson et al. (2007), Osório (2005) e Thompson (1994).

A noção de acumulação de quantidades, mesmo de forma intuitiva, também foi observada no desenvolvimento histórico dos principais conceitos ligados à gênese do TFC, nos trabalhos de Arquimedes na resolução do problema da quadratura da parábola e do volume da esfera, em que quantidades acumuladas são dadas por grandezas consideradas “infinitamente pequenas”, como segmentos de reta e figuras planas, respectivamente. Esse procedimento foi verificado de forma semelhante nos trabalhos de Cavalieri por meio do “Método dos Indivisíveis”.

Tal conceito foi explorado neste trabalho inicialmente, mesmo de forma implícita, no questionário-piloto realizado, em que se diagnosticou a incompreensão dos alunos no tocante ao conceito de acumulação por meio da função área em que se solicitou o esboço do gráfico dessa função.

Decidiu-se explorar os conceitos de acumulação e variação na elaboração da intervenção de ensino, utilizando como grandezas o volume de um sólido e a área da seção transversal, considerando a prerrogativa de que esses conceitos se constituem essenciais na compreensão do TFC.

Portanto, para evidenciar as condições que devem ser satisfeitas para o estabelecimento do TFC, elaborou-se na intervenção de ensino uma situação-problema apresentando questões relacionadas ao cálculo do volume e da área da seção transversal de um sólido que foi composto por um cilindro circular apoiado sobre um cone circular de base concêntrica ao cilindro. Essa situação-problema elaborada permitiu emergir questões relacionadas com o teorema, tais como a

continuidade da função, a ideia de acumulação e a variação entre as grandezas, e esse tipo de situação não é usualmente encontrado de modo geral no ensino do Cálculo.

No início do experimento, assim como se constatou no questionário-piloto, os alunos participantes da intervenção manifestaram dificuldades em trabalhar com esses conceitos. Após a discussão dos resultados e refinamento de algumas conjecturas, na segunda tarefa observou-se um salto qualitativo relativamente à compreensão dos alunos, e isso se tornou um dos fatores de maior destaque para o estudo do TFC.

Um resultado importante encontrado na resolução das tarefas na intervenção de ensino diz respeito à melhora significativa apresentada pelos alunos na compreensão do conceito de integral por meio de acumulação, desprendendo-se da interpretação geométrica de integral como sinônimo de área, e consequentemente sua relação com a questão de variação ligada ao conceito de derivada, fato que permite inferir que esse tipo de abordagem colabora na compreensão da essência do TFC.

Conclui-se pelos resultados apresentados que explorar o conceito de integral inicialmente por meio da ideia de acumulação, simultaneamente trabalhando-se com a questão da variação dessa acumulação, tornou-se uma estratégia pertinente no entendimento da relação existente entre integração e derivação, visto que a relação mútua entre ambas, que constitui a essência do TFC, realizou-se posteriormente, e não “*a priori*”.

Um elemento que se apresentou talvez como central nas ideias que envolvem o TFC é o conceito de função. Na revisão bibliográfica, especificamente nos trabalhos de Segadas Vianna (1998), Carlson et al. (2007) e Martinez (2006), percebeu-se que esses autores apontavam que os alunos de modo geral apresentavam dificuldades na compreensão desse conceito, inclusive na sua utilização em outros contextos, tais como em integral, derivada e na própria função de acumulação, e alguns autores consideravam que os alunos apresentam uma visão “incompleta”, “incorreta” ou “empobrecida” desse conceito.

Outro resultado de pesquisa manifestado nesse trabalho diz respeito ao fato de que no questionário-piloto foi inferido sobre a questão que talvez tenha sido

responsável pelo maior número de erros: justamente aquela relacionada com o conceito de função, mais precisamente a função área sob vários aspectos, em que emergiram muitos conceitos e questões pertinentes para a intervenção de ensino, por exemplo, explorar melhor o conceito de acumulação.

Pode-se destacar que esses erros podem estar relacionados com as variáveis envolvidas em uma função, em que os alunos, além de não reconhecerem a relação de dependência existente, apresentam dificuldades na descrição gráfica dessa relação, na monotonicidade de uma função, bem como a questão da continuidade dela. Tais erros foram observados na intervenção de ensino em que algumas duplas não identificaram as variáveis de uma função, bem como uma relação se constituir ou não uma função, além da questão da sua representação gráfica.

Portanto, como resultado, tanto no questionário-piloto quanto na intervenção de ensino, pode-se concluir que o conceito de função constitui-se como um tema que norteou a compreensão do TFC.

Não obstante, a continuidade de função foi uma questão que emergiu dos resultados da intervenção de ensino e que não foi diretamente observada no questionário-piloto, constituindo-se como uma condição necessária para o estabelecimento do TFC.

Na primeira tarefa da intervenção de ensino observou-se que poucos alunos consideraram a descontinuidade da primeira relação estudada.

Aponta-se como resultado que o binômio função-continuidade pode ser o ponto incisivo a ser trabalhado com maior ênfase inicialmente em um curso de Cálculo, pois esses elementos interferem sobremaneira no entendimento do TFC.

Dentre outros resultados que se julgam ser mais significativos, destaca-se a questão do questionário-piloto que envolvia de maneira implícita o Princípio de Cavalieri na comparação entre áreas e volumes, que possibilitou inferir e utilizar algumas ideias desse princípio na elaboração de algumas questões.

A questão de a visualização gráfica, reiterada por Segadas Vianna (1998) e Artigue (2002), ser preponderante no estudo do TFC fez refletir sobre qual ponto de vista se devem abordar inicialmente os principais conceitos em um curso de Cálculo: com motivação geométrica para posteriormente agregar-se uma fundamentação

mais rigorosa ou privilegiando-se desde o início os aspectos rigor e formalismo. Decidimos neste trabalho adotar uma abordagem com motivação geométrica.

Conforme foram relatadas algumas considerações sobre o ensino do Cálculo sob o ponto de vista formal e rigoroso baseado em definições, teoremas, demonstrações, exemplos e exercícios, de acordo com Tall (2002, 1991, 1991a) e Ávila (2011, 1999), observou-se que essa abordagem pode gerar dificuldades para os alunos ao entrarem em contato pela primeira vez com alguns conceitos matemáticos, tais como limite, continuidade, derivada e integral.

Esses autores, assim como outros pesquisadores, reiteraram a importância do ensino da Matemática sob o ponto de vista da intuição, da imaginação e da visualização geométrica para posteriormente atingir o rigor. Essa estratégia também foi adotada neste trabalho, e consequentemente procurou-se utilizar uma fundamentação teórica que servisse como uma lente, perspectiva teórica, uma orientação sobre a busca de uma alternativa de ensino do TFC bem como interpretar os resultados encontrados.

Dentre alguns referenciais adotados, a escolha do uso do raciocínio intuitivo no ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos apresentados por Poincaré (1995) e Fischbein (1987) contemplou pressupostos de maneira plenamente satisfatória.

Acredita-se que as produções analisadas de Poincaré (2008, 2004, 1995, 1984) sobre o processo de construção do conhecimento científico e o papel da intuição e do rigor se tornaram nesse processo uma fonte, apropriada nesta pesquisa, de algumas de suas ideias na elaboração do questionário-piloto e principalmente da intervenção de ensino.

Por seu turno, as categorizações da intuição descritas por Fischbein (1987), bem como as inter-relações entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, foram utilizadas na análise do questionário-piloto e de forma mais incisiva na intervenção de ensino, no sentido de se interpretarem os resultados obtidos com a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo descritos por Tall (1991a).

Por conseguinte, na elaboração da intervenção de ensino decidiu-se abordar inicialmente os conceitos imprescindíveis ligados à compreensão do teorema,

privilegiando-se os aspectos intuitivos conforme observados em Poincaré (1995), com ênfase na intuição sensível ou geométrica, sendo priorizada em alguns aspectos envolvidos no teorema a representação gráfica e geométrica desses elementos.

Essa questão da representação gráfica na compreensão da relação de acumulação e variação revelou-se como um fator preponderante, conforme relatado no contexto histórico pelas ideias produzidas nos trabalhos de Oresme, Torricelli e posteriormente Barrow, Newton e Leibniz.

Para a abordagem intuitiva de acumulação baseada na intuição sensível ou geométrica, tornou-se necessário criar um modelo geométrico em um “ambiente” informatizado por meio do *software* GeoGebra. A escolha do uso do computador destacou-se em dois fatos: a questão da visualização no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo que, de acordo com Tall (1991a), auxilia na formulação de conjecturas, além de testar hipóteses, permitindo assim que conceitos “abstratos” tornem-se “concretos” na mente de um aluno, e a constatação no contexto histórico do desenvolvimento de alguns conceitos ligados ao TFC à questão do movimento, conforme visto nos trabalhos de Oresme, Galileu, Torricelli e Newton, e que observou-se serem dinâmicos e não estáticos, como função, limite e derivada, e que no caso do recurso computacional essa abordagem tornou-se possível.

É de lembrar que o estudo do contexto histórico tornou-se um elemento-chave na elaboração da intervenção de ensino por dois aspectos: primeiro, como fonte de consulta que possibilitou entender a evolução das ideias, dos acertos e erros cometidos durante séculos até se convergir para a formulação do teorema como é conhecido atualmente; e que nesse processo quantos aspectos da intuição e do rigor estiveram presentes.

Destacam-se como exemplo no período que denominamos “A Aurora do Cálculo” as intuições sobre o cálculo de áreas e volumes desenvolvido por Arquimedes e posteriormente utilizado por Cavalieri, no período denominado neste trabalho “O Despertar”, assim como a interpretação dinâmica de acumulação e variação posteriormente estudadas por Torricelli, Barrow, Newton e Leibniz no denominado “Integro, logo Derivo”.

Deve-se ponderar que não se tinha como objetivo retratar a sequência de ensino, tal como ocorreu na história do desenvolvimento do TFC, dado que os fatos e descobertas descritos ocorreram em outra situação e em outro contexto, mas, sim, objetivou-se se apropriar das ideias e conceitos mais importantes que auxiliassem na compreensão da essência do teorema.

Uma constatação obtida tanto no questionário-piloto quanto na intervenção de ensino foi justamente a questão do gráfico de uma função ser uma linha sempre contínua, ou a lei de formação de uma função sempre se constituir por uma única sentença.

No tocante à metodologia utilizada, essa pesquisa apresentou características peculiares que se adequaram perfeitamente em sua constituição de acordo com suas especificidades.

Conclui-se que a metodologia contribuiu para a obtenção dos resultados, principalmente na estratégia e resolução das tarefas, tanto do questionário-piloto quanto da intervenção de ensino, realizadas em duplas, pois a elaboração e a discussão de ideias por parte dos alunos permitiu inferir muitos resultados pertinentes.

Pode-se destacar, por exemplo, que a presente pesquisa privilegiou a descrição de uma experiência – no caso uma intervenção de ensino – e que por meio de um processo indutivo procurou-se encontrar para os dados coletados um significado das respostas e pontos de vista dos participantes, buscando interpretar os resultados à luz do referencial teórico adotado.

Além disso, a coleta de dados realizou-se no campo e no local em que os sujeitos da pesquisa vivenciam o problema que está sendo estudado, no caso na própria instituição de ensino em que os eles estudavam.

Quanto aos procedimentos metodológicos adotados, o questionário piloto permitiu não somente elencar as estratégias organizadas pelos alunos para as resoluções das questões ligadas ao Cálculo, mas principalmente obter um panorama das principais intuições manifestadas nessas resoluções, além de procurar observar quais os conteúdos envolvidos com o TFC que os alunos apresentaram maior dificuldade em sua compreensão.

Sobre as estratégias adotadas na intervenção de ensino, alguns pontos devem ser destacados:

- Os sujeitos da pesquisa nunca foram colocados em uma situação de ensino semelhante, em que tiveram a oportunidade de participar de maneira direta na construção de alguns conceitos, bem como trabalhar em duplas utilizando um recurso computacional, o que pode ser considerado uma “ruptura” com o ensino tradicional com que eles estão habituados;
- o uso de um recurso computacional – o GeoGebra – tornou-se essencial como fator motivador para a realização das tarefas, assim como estudar os objetos matemáticos por meio de uma manipulação dinâmica, além de o fato desse *software* estimular a manifestação das intuições por parte dos alunos;
- no final das tarefas fez-se necessária a formalização do TFC, após a validação de algumas conjecturas e hipóteses, e o estabelecimento do rigor ocorreu com o refinamento de algumas ideias intuídas anteriormente.

A partir dos dados obtidos na intervenção de ensino, para avaliar suas possíveis contribuições, devem ser ponderados alguns elementos.

Inicialmente, no que diz respeito ao uso da intuição no processo de invenção matemática descrita por Poincaré (1995), ressalta-se que em uma abordagem inicial, na introdução de um conceito matemático, a intuição sensível ou geométrica se tornou uma excelente aliada na construção do conhecimento, pois o apelo geométrico permitiu na intervenção de ensino organizar e sedimentar algumas ideias, formular conjecturas sobre alguns resultados, mesmo de forma provisória, e com a posterior formalização algumas dessas produções foram eliminadas e outras foram refinadas com a utilização do rigor.

O que se notou durante as seções das tarefas realizadas é que os alunos, ao evocarem por meio de uma intuição sensível alguns conceitos interiorizados, muitos deles por se constituírem apenas de uma imagem, de um algoritmo ou fórmula memorizável, causaram um conflito daquilo que se intuía com o aquilo que se formalizou.

Essa talvez seja uma das principais contribuições da intervenção de ensino sedimentada na intuição: trazer à tona algumas ideias, esquemas, conceitos formulados pelos indivíduos que possam auxiliar na construção dos demais, e



colocar essas ideias sempre em questionamento para que possam ser refinadas ou refutadas.

Um exemplo que nos pareceu explícito sobre esse fato foi a ideia de que muitas duplas consideraram o conceito de integral como sinônimo de área. Em algumas situações essa ideia serviu na resolução de algumas questões do questionário-piloto e na intervenção de ensino, mas essa mesma ideia geométrica causou uma contradição na resolução de algumas tarefas, ao se abordar o conceito de integral por meio de acumulação, que ora pode ser positiva, ora negativa ou até mesmo zero.

Sendo assim, como alertava Poincaré (1995), corrobora-se com a ideia de que a intuição pode levar a resultados contraditórios e a formulação de conjecturas que conflitam com o aspecto formal.

No caso da sequência de ensino, o conceito de integral explorado pela ideia de acumulação inicialmente apropriou-se de uma abordagem geométrica, mas que, em sua essência, posteriormente apresentou um tratamento numérico, sem depender exclusivamente da noção de área nem mesmo como operação inversa da derivada de uma função.

A derivada interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente a uma curva em um ponto não se constituiu como ideia utilizada para se estabelecer o TFC, e sim como uma medida de variação para quantidades infinitamente pequenas. Nesse caso, não nos pareceu nada intuitivo relacionar o cálculo de áreas com traçado de tangentes para a compreensão do teorema.

De modo geral, a intervenção de ensino buscou na medida do possível manifestar, por parte dos alunos, as principais categorizações das intuições, promovendo as inter-relações entre os componentes: intuitivo, o algorítmico e formal, e ao mesmo tempo contrapondo esses componentes à medida que as seções se desenvolviam.

Analisando as intuições manifestadas pelos sujeitos da pesquisa na intervenção de ensino, segundo as categorizações de Fischbein (1987), entre essas inter-relações, observou-se como resultado que alguma categoria ou componente se sobrepôs e também e se contrapôs em relação ao outro, e esse embate foi salutar no que diz respeito ao refinamentos das intuições, ideias e conjecturas produzidas.



Verificou-se que nas primeiras seções das tarefas que a intuição afirmativa, caracterizada pela auto-evidência, foi a manifestação mais presente nas respostas apresentadas pelos alunos, além da inferencial, pois percebeu-se que as duplas extraíam algumas conclusões mesmo associadas a um sentimento de dúvida.

Nas primeiras seções também observou-se a contraposição entre o componente algorítmico e o intuitivo, e os estudantes elaboravam esquemas, cálculos sem encontrarem o resultado correto.

Isso se tornou evidente principalmente quando os alunos procuraram encontrar uma relação entre as grandezas envolvidas na intervenção. Mesmo mostrando o conhecimento de teoremas e fórmulas memorizáveis, muitas duplas não obtiveram sucesso na resolução das tarefas, o que indicou que a manifestação do componente algorítmico não é suficiente no aprendizado dos conceitos matemáticos.

Em muitas situações, como nas questões da primeira tarefa, o efeito coercitivo da intuição conduziu muitas duplas a formular conclusões errôneas sobre muitos conceitos, o que sobremaneira pode ter afetado a elaboração de ideias e conceitos.

Dentre esses conceitos manifestados, pode-se destacar a ideia de uma função sempre ser contínua, a variação de uma grandeza em relação à outra sempre se comportar de maneira linear e a integral definida como sinônimo de área, entre outros.

Com o transcorrer das seções, tanto a auto-evidência, o efeito coercitivo, quanto o conflito entre os componentes algorítmico e formal foram tornando-se cada vez menores. Nesse ponto começou a emergir nas resoluções principalmente a intuição antecipatória, pois, depois de alguns resultados terem sido formulados, mesmo que de forma provisória, e algumas conjecturas começarem a ser testadas, as duplas passaram a inferir alguns resultados deixando algumas ideias intuitivas em segundo plano.

Por conseguinte, o conflito entre os componentes algorítmico e formal passou a ser preponderante, visto que os alunos começaram a manipular fórmulas, algoritmos, elaborar esquemas na busca não somente da solução do problema, mas principalmente na formalização dos conceitos envolvidos.

Esse fato se tornou mais patente na segunda tarefa, que solicitava alguns conceitos abordados anteriormente e que mostrou uma significativa evolução na compreensão destes.

Analisando o fato de alguns conceitos do Cálculo ser considerados “dinâmicos”, foi observada inicialmente no questionário-piloto a incompreensão de algumas duplas da denominada função área, que exigia por parte dos estudantes tal entendimento.

Discutindo-se sobre a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a intuição e o rigor com o desenvolvimento ou a manifestação das intuições a partir das explorações ou representações proporcionadas pela atividade com o GeoGebra, constatou-se que a utilização deste permitiu explorar muitas situações, como a criação de um modelo da situação-problema proposta em um ambiente informatizado, tornando esse modelo “concreto” e possibilitando aos alunos acessar, interagir, manipular, e que essas ações se tornaram as grandes responsáveis pela exploração das cognições intuitivas.

Concorda-se, após a realização das tarefas sobre as ideias de Tall (1991a) que a visualização no estágio inicial provou ser uma fonte fundamental na elaboração de ideias, conjecturas e hipóteses. Pode-se até inferir que sem a utilização do *software* nas tarefas não seria possível em grande medida explorar tantos conceitos e ideias intuitivas no sentido de buscar o formalismo necessário.

Esse procedimento de utilizar a informática permitiu ressaltar a possibilidade de uma análise além das interações entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, um segundo eixo envolvendo a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a intuição e o rigor.

Sobre os eixos de análise, concluiu-se como resultado de pesquisa que se devem trabalhar os componentes relacionados aos dois eixos nas atividades matemáticas de forma conjunta, pois a interação dos alunos com o *software* foi a grande responsável não somente pela visualização e concretização dos conceitos envolvidos, como também permitiu que os componentes intuitivo, algorítmico e formal fossem inter-relacionados e confrontados.

Respondendo especificamente a questão de pesquisa se a intervenção de ensino baseada nos princípios da intuição contribui na compreensão da relação

existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação-problema que propicie emergir e evidenciar tais relações, os resultados de pesquisa permitem concluir que contribui sim, pois, de acordo com o que foi descrito, a intervenção proporcionou não somente a construção dessa relação por parte dos sujeitos envolvidos na pesquisa, como também refinou e discutiu alguns conceitos já interiorizados por meio da exploração das cognições intuitivas até atingir o estágio do rigor.

Consequentemente, sobre o alcance da sequência didática com uma abordagem fundamentada nos princípios da intuição, ela revelou-se essencial na organização das ideias e conceitos desenvolvidos que posteriormente foram refinados com o formalismo matemático agregado com o rigor necessário.

Salienta-se que esse alcance não pode ser facilmente mensurado, pois em uma atividade matemática é preciso refletir sobre qual o nível de rigor que se deseja atingir, uma vez que cada público-alvo a quem se destina um curso de Cálculo deve apresentar sua abordagem adequada de acordo com suas especificidades.

No entanto, uma intervenção baseada nos princípios da intuição semelhante àquela apresentada nesta pesquisa possui uma abrangência muito ampla, que em muitos casos pode preceder a fase do rigor, e em muitas situações contribuiu até mesmo no aspecto do formalismo como ferramenta auxiliar nas demonstrações.

Procurou-se por meio deste trabalho, de certa forma, assim como defendeu Poincaré (1995) em suas obras, expressar as preocupações sobre o papel da intuição e do rigor no ensino da Matemática e quais as suas contribuições e implicações na construção do conhecimento.

Observou-se que se deve procurar um equilíbrio entre a intuição e o rigor, pois um dos prováveis fracassos do ensino da Matemática pode estar ligado ao fato de ela ser excessivamente formal, sem revelar os motivos de sua gênese e desenvolvimento.

Ressalta-se que, por meio da intuição, o mundo matemático permanece em contato com o mundo real. E que o rigor constitui uma fase de “acabamento” no processo de construção do conhecimento.

Quanto às hipóteses formuladas, como a falta de exploração da relação entre a integração e a derivação, bem como a escassez em sua abordagem da

utilização do registro gráfico, elas podem contribuir para a incompreensão do teorema por parte dos alunos.

Destaca-se como um fato para reflexão que a realização de entrevistas após a análise de dados poderia esclarecer alguns pontos que somente a leitura dos protocolos não forneceria a resposta, além de enriquecer outras informações. Isso pode servir como um alerta ou sugestão para futuras pesquisas.

Considera-se que a essência do TFC se resume justamente em relacionar a integração e a derivação como operações inversas entre si, e que essa relação mútua pode ser demonstrada a partir do conceito de integral como uma função de acumulação em que satisfeitas as condições necessárias, se  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$  então  $F'(x) = f(x)$ . Este trabalho propiciou perceber esse cerne e não ficou arraigado com o resultado de teorema  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  que permite calcular integral definida.

Salienta-se que os resultados e conhecimentos construídos pelas duplas podem em grande medida ser explorados em atividades semelhantes, principalmente no aspecto da aplicação do TFC relacionando acumulação e variação, conforme se pode elencar:

- Na Física, em Cinemática, ao abordar as grandezas velocidade escalar e espaço percorrido;
- No estudo da força cortante e do momento fletor na Mecânica.

O exercício de se evocarem dos alunos por meio das intuições alguns conceitos interiorizados por eles tornou-se uma prática pedagogicamente útil no sentido de se refinarem alguns conceitos e se formalizarem outros.

Esta pesquisa mostrou que o uso do *software* facilita a visualização, bem como explora os componentes intuitivo, algorítmico e formal nas atividades matemáticas.

Como expectativa de pesquisas futuras, sugere-se a possibilidade de outros temas básicos matemáticos serem abordados inicialmente visando o uso de um recurso computacional e procurando explorar cognições intuitivas dos alunos.

Um tema, por exemplo, que pode merecer um estudo sobre o seu ensino considerando essa abordagem é a questão da continuidade, por ser recorrente em vários tópicos matemáticos e que emergiu em muitas questões analisadas não

somente no questionário-piloto como também na sequência de ensino, e que influencia sobremaneira a compreensão do TFC, pois o aprendizado do conceito de continuidade também envolve as noções de intuição e rigor, bem como os componentes formal, algorítmico e intuitivo.

## REFERÊNCIAS

---

ALVES-MAZZOTTI A. J. e GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1999.

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.

ANDERSEN, E. **As ideias centrais do teorema fundamental do cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2011.

ARTIGUE, M. Analyses. In: **Advanced Mathematical Thinking**. Cap. 11, p. 167 - 198. Ed. David Tall. Londres: Dordrecht Kluwer Academic, 2002.

ÁVILA, G. S. S. **Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral**. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2011.

\_\_\_\_\_. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

\_\_\_\_\_. **Introdução à Análise Matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

\_\_\_\_\_. Arquimedes, o rigor e o método. In: **Matemática Universitária nº 04**, p. 27 – 45. São Paulo: SBM, 1986.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa, 2003

BARON, M. E. V. e BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Mayer e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985, 5 v.

BARROSO, N. M. C. et al. Limite: definição intuitiva versus definição formal. In: **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**, vol. 5, Organizadoras: Maria Clara Rezende Frota e Lilian Nasser, p. 99-109. Recife: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

BICUDO, I. Análise Não-Standard. In: **BOLEMA**. v. 8. Rio Claro, 1992.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: **Pesquisa Qualitativa em educação matemática**. Organizador: Marcelo de Carvalho. Cap. 4, p. 101-114, Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. **A Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOTTAZZINI, U. Poincaré. In: **Scientific American Brasil- Gênios da Ciência: A Vanguarda Matemática e os Limites da Razão**, vol. 12. São Paulo: Ediouro, 2007.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CAMPOS, R. P. **A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.

CARLSON, M. P. et al. Developing and Connecting Calculus Students 'notions of Rate-of-Change and Accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. In: **Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics**. Washington, DC: M.A.A., 2007.

COURANT, R. e ROBBINS, H. **O que é matemática? : uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. **A experiência Matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1989.

DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In: David Tall (org), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-object. In: **Recherches em Didactique des mathématiques**, 7(2), p. 5-32, 1987.

DUVAL, R. **Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions In Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning**. Proceedings XXI Psychology os Mathematics Thinking, nº 1. México: Eric, p. 2 – 26, 1999.

\_\_\_\_\_. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Editora Papirus, 2003, p. 11-33.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História a Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora de UNICAMP, 2004.

FISCHBEIN, E. **Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning**. In: Educational Studies in Mathematics. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, v. 38, 1999, p. 11–50.

\_\_\_\_\_. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.

\_\_\_\_\_. **Intuition in science and mathematics: An educational approach**. Dordrecht: D. Reidel, 1987.

GRATTAN-GUINNES, I. O que foi e o que deveria ser o cálculo? Tradução de Frederico da Silva Reis. In: **Zetetiké**. São Paulo, Campinas: 1997, v.5, n.7, p. 69-94. Jan/Jun. CEMPEM/FE/UNICAMP.

GREEN, G. **An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism**. London: Mathematical Papers, 1828.

HADAMARD, J. **Psicologia da invenção na matemática**. Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.

HARDY, G. H. **A Course of Pure Mathematics**. University Press: Cambridge, Tenth Edition, 1955.

HEATH, T. L. **The Works of Archimedes**. Ed. T. L. Heath. New York: Dover, 1912.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**, vol. 5. Organizadoras: Maria Clara Rezende Frota e Lilian Nasser, p. 11-26. Recife: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENADE 2005: Provas e Gabaritos**. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos-2005>. Último acesso em 01 de dezembro de 2010.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. Tradução de Valério Rohden e Udo Baldur Moosburger. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an Introduction**. Reading: Addison-Wesley, 1998.

LAKOFF, G. e NÚÑEZ, R. E. (2000). **Where Mathematics Comes From**. New York: Basic Books, 2000.

LAVILLE, C. e DIONNE J. **A construção do saber**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2008.

LIMA, G. L. **A disciplina de cálculo I do curso de matemática da Universidade**



**de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2012.

LUDKE, M. e André M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 2011.

MAOR, E. **e: a história de um número.** Tradução de Jorge Calife. 3º ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARCONI, M. A. e LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica.** São Paulo: Atlas, 2010.

MARTÍNEZ, H. M. **Concepción Proceso-objeto de Función em la Comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo.** Tesis (Maestro em Ciencias em Matemática Educativa). Colômbia: Instituto Politécnico Nacional, 2006.

MAXWELL, J. G. **A treatise on Electricity and Magnetism.** New York: Dover Publications, 1954 (vol. 1 e 2).

OSORIO, F. C. El rol de algunas categorias Del conocimiento matemático em educacion superior. Uma socioepistemologia de La integral. In: **Relime** vol. 8, Núm. 3, noviembre, p. 265-286, 2005.

PICONE, D. F. B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do Cálculo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.

POINCARÉ, H. **Ensaio Fundamentais.** Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

\_\_\_\_\_. **Science and Method.** Translated by Francis Maitland. New York: Barnes e Noble Books, 2004.

\_\_\_\_\_. **O valor da ciência.** Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

\_\_\_\_\_. **A Ciência e a Hipótese.** Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB, 1984.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

RUSSEL, B. **Introdução à Filosofia da Matemática.** Tradução Giasone Rebuca. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

SEGADAS VIANNA, C. C. **Student's Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions, Theorems and Visual**

**Imagery.** Tese de Doutorado. Institute of Education University of London, 1998.

SFARD, A. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. In: **Educational Studies in Mathematics**. Vol. 22, Nº 4, p. 1-32.

SILVA, B. A. Componentes do Processo de Ensino e Aprendizagem do Cálculo: Saber, Aluno e Professor. In: Anais do **IV SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática**, Brasília: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

SILVA, J. J. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: UNESP, 2007.

SIMMONS, G. F. **Cálculo Diferencial e Integral com Geometria Analítica**. v. 1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007.

STEWART, J. **Cálculo – volume 1**, 6ª. ed., Tradução de Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STRANG, G. **Calculus**. 1 ed. MIT: Wellesley Cambridge Press, 1991.

TALL, D. O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Dordrecht, Kluwer Academic, 2002.

TALL, D. O. Using Technology to Support and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In: **Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, 2002a.

\_\_\_\_\_. Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. In: **Mathematics Teaching**, 137, p. 29–32, 1991.

\_\_\_\_\_. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: **Visualization in Mathematics** (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105 – 119, 1991a.

TALL, D. O. e VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151– 169, 1981.

THOMPSON, P. W. Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 26 (2-3), p. 229-274, 1994.

## **ANEXOS**

## **ANEXO A**

### **TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada provisoriamente: **“O Teorema Fundamental do Cálculo: um estudo didático e epistemológico”**, desenvolvida por **André Lúcio Grande**.

Fui informado (a) que:

- a) a pesquisa é orientada pelo **Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva**.
- b) O uso das informações por mim fornecidas está de acordo com as normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos;
- c) A minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas dadas nos instrumentos de coleta de dados elaborados pelo pesquisador.
- d) O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pelo seu orientador;

Por fim, fui esclarecido (a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Mauá, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_

Assinatura do (a) participante: \_\_\_\_\_

Assinatura do pesquisador: \_\_\_\_\_

**ANEXO B – QUESTIONÁRIO-PILOTO**

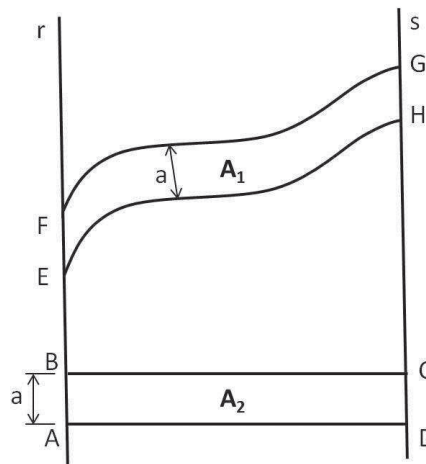
**01.** Considere um segmento de reta  $\overline{AB}$  e sobre esse segmento escolhe-se aleatoriamente um ponto  $C$ , entre  $A$  e  $B$ , conforme a figura a seguir:



Divida o segmento  $\overline{AB}$  em duas partes iguais, e novamente, divida cada uma das partes obtidas em duas metades. Repita novamente a divisão nas outras partes obtidas anteriormente. Se continuarmos dividindo cada uma das novas partes obtidas em duas outras partes iguais, será que chegaremos a uma situação tal que um dos pontos da divisão coincida com o ponto  $C$ , ou seja, será que conseguiremos atingir o ponto  $C$ ? Justifique a sua resposta.

**01. Resolução:**

**02. a)** Sejam as retas  $r$  e  $s$  paralelas e os pontos  $A, B, E$  e  $F$  pertencentes à reta  $r$  e os pontos  $C, D, G$  e  $H$  pertencentes à reta  $s$ , com os segmentos  $AD$  e  $BC$  paralelos cuja distância entre eles é igual a  $a$ . Ligando-se os pontos  $E$  e  $H$  assim como  $F$  e  $G$  por meio de curvas de modo que a distância entre as mesmas seja constante e igual a  $a$ , conforme a figura a seguir:



Determine qual a região que apresenta maior área, a área  $A_1$  da região limitada pelas curvas  $EH$ ,  $FG$  e as retas  $r$  e  $s$  ou a área  $A_2$  do retângulo  $ABCD$ . Justifique a sua resposta.

**02. a) Resolução:**

**02. b)** Na foto a seguir têm-se dois sólidos formados por 12 moedas iguais de R\$ 1,00 cada um, empilhados de maneiras distintas. Qual dos dois sólidos (01 ou 02) possui volume maior? Justifique a sua resposta.

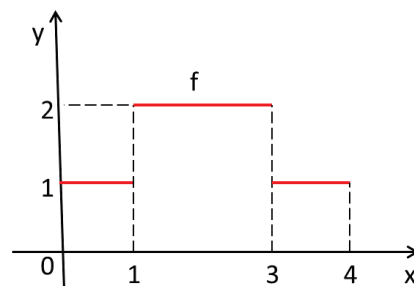


**Sólido 01**

**Sólido 02**

**02. b) Resolução:**

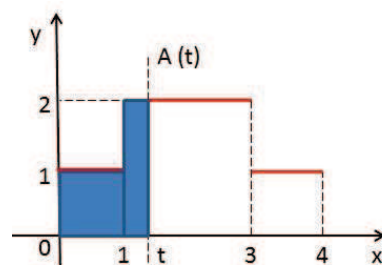
**03. a)** Considere a representação gráfica da função  $f$  definida no intervalo  $[0, 4]$ , conforme a figura a seguir:



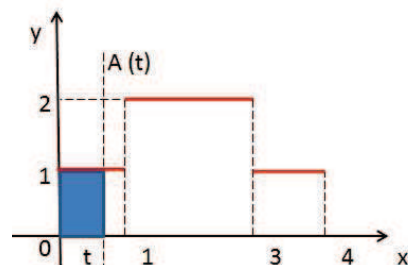
Calcule o valor da área da região limitada sob o gráfico de  $f$  e os eixos coordenados no intervalo  $[0, 4]$ .

**03. a) Resolução:**

**b)** Seja  $A(t)$  a função que associa a cada valor de  $t \in [0, 4]$  a área da região limitada sob o gráfico de  $f$ , os eixos coordenados e a reta  $x = t$ .



Seja inicialmente a reta vertical  $x = t$ , com  $0 < t < 1$  conforme a figura a seguir:

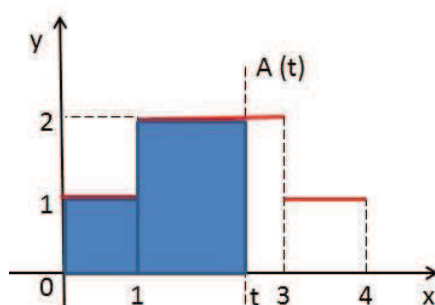


De acordo com os dados da figura anterior, determine a medida da base e da altura da figura hachurada. Qual é o valor da área dessa mesma figura? Essa área obtida depende de alguma variável?



**03. b) Resolução:**

c) Considere agora a reta vertical  $x = t$ , com  $1 < t < 3$ , de acordo com a figura a seguir:



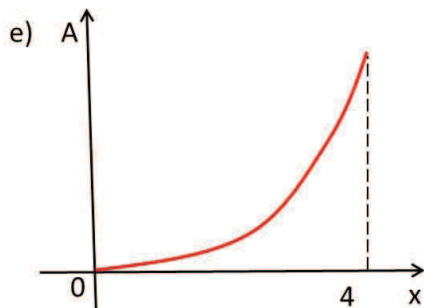
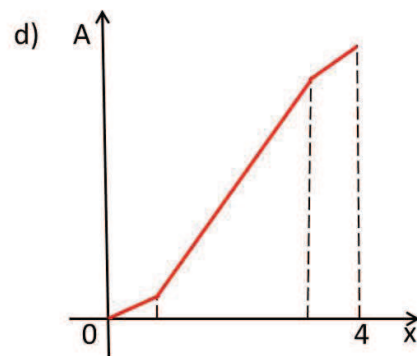
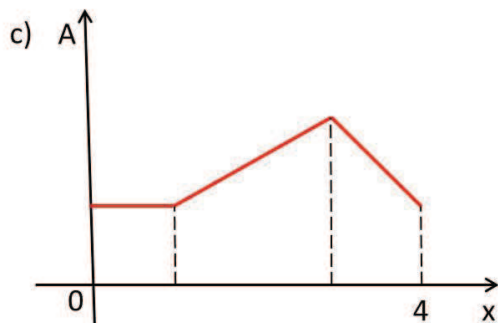
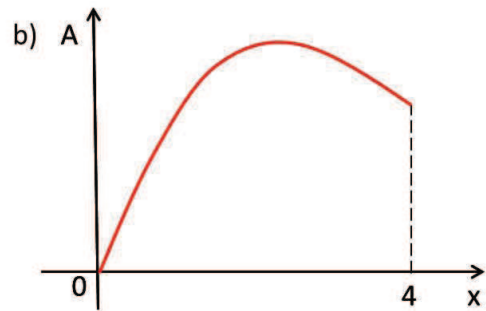
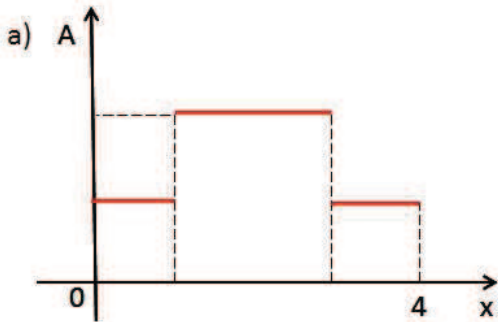
Como você faria para calcular a base do retângulo cuja base está localizada entre 1 e 3? Determine a área da figura hachurada. Essa nova área obtida depende de alguma variável?

**03. c) Resolução:**

d) Repita o procedimento calculando-se a área considerando  $3 < t < 4$ .

**03. d) Resolução:**

e) Se você fosse construir o gráfico da função  $A(t)$ , sendo  $A$  a área limitada pelo gráfico de  $f$ , os eixos coordenados e a reta vertical  $x = t$ , sendo  $t \in [0, 4]$ , qual dos gráficos a seguir estaria mais próximo do que você pensou? Justifique a sua escolha.

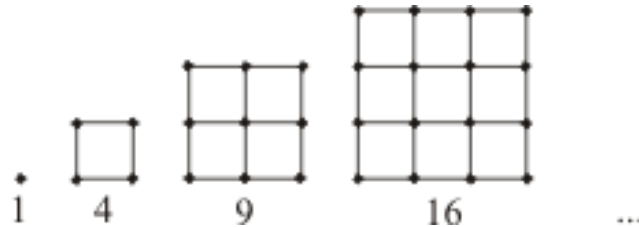


**03. e) Resolução:**

**f)** Construa, a partir do gráfico representado no item **a**, o gráfico da função  $y = A(t)$ , para  $0 \leq t \leq 4$ .

**03. f) Resolução:**

**04.** Os números figurativos, cuja origem pode ser creditada aos pitagóricos, expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. Os números quadrados, por exemplo, são representados geometricamente de acordo com a figura a seguir:



Denominando os números quadrados por  $q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , têm-se  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 4$ ,  $q_3 = 9$  e assim por diante, obtendo a sequência dos números quadrados  $\{1, 4, 9, 16, \dots, q_n, \dots\}$ .

Responda as seguintes questões, justificando cada resposta:

**Parte I**

- a) Determine os números quadrados  $q_7$  e  $q_{10}$ .
- b) Elabore uma lei para se calcular  $q_n$ .
- c) Como você pode fazer para encontrar o termo 16 a partir do seu termo anterior 9?

**04. Parte I) Resolução:**

**04. Parte II**

Vamos formar uma nova sequência denominada sequência das diferenças  $d_n$ , dada por  $d_n = q_{n+1} - q_n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$  em que cada termo pode ser obtido pela subtração de um número quadrado, a partir do segundo termo, com o seu antecessor.

Por exemplo:

$d_1 = q_2 - q_1 = 4 - 1 = 3$ ,  $\dots = q_3 - q_2 = 9 - 4 = 5$ , e assim por diante obtendo-se a sequência  $\{3, 5, 7, 9, \dots, d_n, \dots\}$ .

Responda as seguintes questões, justificando a sua resposta:

- a) Determine os números  $d_8$  e  $d_{12}$ .
- b) Determine a soma dos cem primeiros termos da sequência  $d_n$ , ou seja, determine  $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{100}$ . É possível obter essa soma a partir dos números quadrados, obtidos na Parte I? Como você obteria esse resultado?

**04. Parte II) Resolução:**

## **ANEXO C**

### **TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada provisoriamente: **“Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino”**, desenvolvida por **André Lúcio Grande**.

Fui informado (a) que:

- a) a pesquisa é orientada pelo **Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva**.
- b) O uso das informações por mim fornecidas está de acordo com as normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos;
- c) A minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas dadas nos instrumentos de coleta de dados elaborados pelo pesquisador.
- d) O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pelo seu orientador;

Por fim, fui esclarecido (a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Mauá, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_

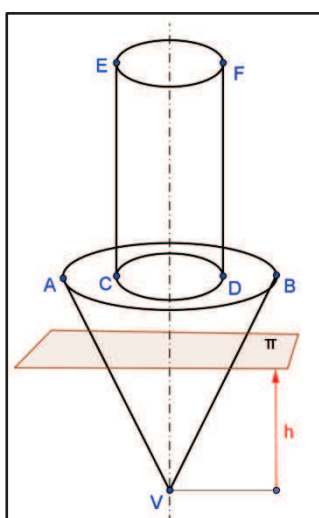
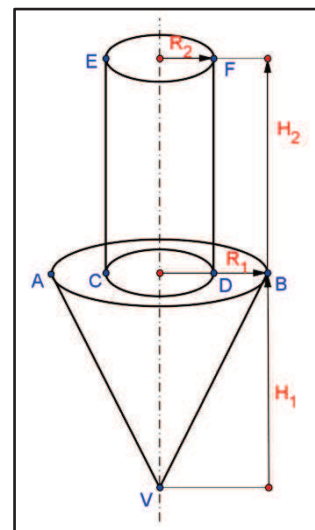
Assinatura do (a) participante: \_\_\_\_\_

Assinatura do pesquisador: \_\_\_\_\_

## ANEXO D – TAREFA 1

### TAREFA 01 - SEÇÃO 01

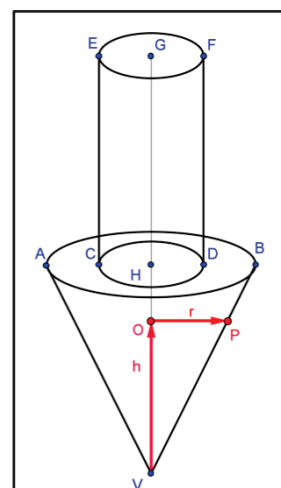
01. Seja  $S$  o sólido formado por um cone circular reto  $VAB$  de raio de base  $R_1 = 2$  e altura igual a  $H_1 = 4$  e um cilindro circular reto  $CDEF$  de raio de base  $R_2 = 1$  e altura igual a  $H_2 = 4$  conforme a figura a seguir.



02. Seja  $\pi$  um plano paralelo à base do cone e do cilindro circular reto de distância variável real  $h$  em relação ao ponto  $V$ , com  $0 \leq h \leq 8$  de acordo com a figura a seguir.

03. Movimente livremente com o cursor o ponto  $O$  e observe a variação da altura  $h$  do plano e a variação do raio  $r$  da seção transversal.

Com as informações contidas no enunciado, responda às seguintes questões justificando a sua resposta:



a) Como você faz para determinar o volume do sólido  $S$ ? Qual é o volume desse sólido?

Resposta

b) Considere a seção transversal  $A_S$  obtida pela interseção do plano  $\pi$  a uma distância  $h$  com o sólido  $S$ . Que figura é essa? Como você obtém a medida do raio  $r$  dessa seção em função de  $h$ ?

Resposta

c) Calcule a área da seção transversal para  $h = 1,5$  e  $h = 3,5$ . A seguir, calcule a área considerando  $h = 4$  e  $h = 5$ .

Resposta

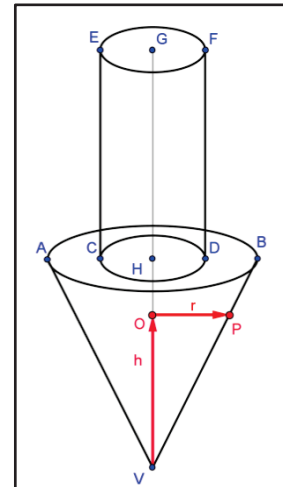


d) Se você fosse construir o gráfico da variação  $A_s(h)$ , sendo  $A_s$  a área da seção transversal obtido pela interseção do plano  $\pi$  e  $h$  a distância desse plano ao vértice  $V$ , como você imagina que seria um gráfico que represente aproximadamente essa relação? Tente construir um esboço desse gráfico.

Resposta

## TAREFA 01 - SEÇÃO 02

01. Movimente livremente com o cursor o ponto  $O$  e observe a variação da altura  $h$  do plano e a variação do raio  $r$  da seção transversal.



De acordo com as informações contidas no enunciado, responda às seguintes questões justificando a sua resposta:

a) Calcule o volume do sólido para  $h = 1$  e  $h = 3$ . A seguir, calcule o volume para  $h = 4$  e  $h = 6$ .

**Resposta**

b) Se você fosse construir o gráfico da variação  $V_S(h)$ , sendo  $V_S$  o volume do sólido obtido pela interseção do plano  $\pi$  e  $h$  a distância desse plano ao vértice  $V$ , como você imagina que seria um gráfico que represente aproximadamente essa relação? Tente construir um esboço desse gráfico.

Resposta

**TAREFA 01 - SEÇÃO 03**

**01.** Desloque o ponto  $O$  na primeira janela de visualização e observe na segunda janela o movimento simultâneo do ponto  $X_1$ , descrevendo graficamente a relação  $As \times h$ . Responda:

a) Observe que ao movimentar o ponto  $P$  no intervalo  $0 \leq h \leq 4$ , qual o comportamento do gráfico? E para o intervalo  $4 \leq h \leq 8$ ?

b) No ponto de abscissa  $h = 3$ , qual o valor da área da seção?

c) Qual é o valor da área da seção no ponto de abscissa  $h = 4$ , a que possui raio igual a 1 ou igual a 2?

**02.** Desloque o ponto  $O$  na primeira janela de visualização e observe na segunda janela o movimento simultâneo do ponto  $X_2$ , descrevendo graficamente a relação  $V_s \times h$ . Responda:

**d)** Observe que ao movimentar o ponto  $P$  no intervalo  $0 \leq h \leq 4$ , qual o comportamento do gráfico? E para o intervalo  $4 \leq h \leq 8$ ?

**e)** No ponto de abscissa  $h = 2$ , qual o valor do volume do sólido?

**f)** Qual é o valor do volume do sólido no ponto de abscissa  $h = 4$ ?

**TAREFA 01 - SEÇÃO 04**

Considere os gráficos das relações obtidos anteriormente. Vamos denominar o gráfico da relação  $A_S(h)$  por gráfico 1 e o gráfico da relação  $V_S(h)$  por gráfico 2. Responda às seguintes questões justificando a sua resposta:

a) O que você acha sobre o fato de que no intervalo  $[4, 8]$  o gráfico 1 é constante e no gráfico 2 isso não ocorrer? Por que nesse intervalo no gráfico 2 o crescimento é linear?

b) Segundo o gráfico 2, o crescimento tem o mesmo comportamento? Se alterar em algum ponto, por que isso acontece?

c) Sobre o gráfico 1, avalie aproximadamente a área limitada sob o gráfico no intervalo  $[1, 3]$ . A seguir calcule a variação do volume no mesmo intervalo considerado no gráfico 2. O que você observa?

**d)** Calcule agora a área limitada no intervalo  $[5, 6]$  bem como a variação do volume nesse intervalo. O que você conclui?

**e)** Calcule no gráfico 2 a variação de volume no intervalo  $[2, 4]$ . Como eu poderia fazer para obter essa variação a partir do gráfico 1?

**f)** Que relação que você observa você pode estabelecer entre os gráficos obtidos 1 e 2?

**ANEXO E – TAREFA 2****TAREFA 02 - SEÇÃO 01**

- a) Determine a expressão algébrica para o cálculo da área da seção transversa e do volume do sólido  $S$  da seção anterior em função da altura  $h$  no intervalo  $[0, 8]$ .



**TAREFA 02 - SEÇÃO 02**

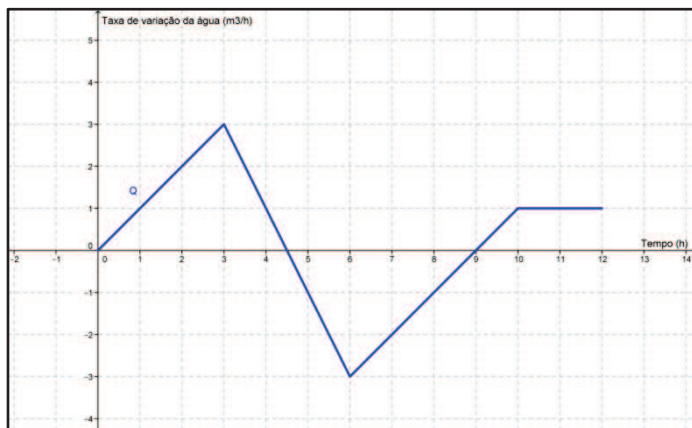
**a)** Vamos elaborar uma conclusão provisória a respeito das tarefas envolvendo o cálculo da área da seção transversal e o volume do sólido  $S$ .

**- Conclusão provisória:**

**- Definição:**

**TAREFA 2 - SEÇÃO 3**

O gráfico a seguir representa a taxa, em  $m^3/h$  na qual a quantidade de água variou, num reservatório inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, durante um determinado dia do mês:



Sendo  $Q$  a função que representa a taxa na qual a quantidade de água variou no reservatório em função do tempo  $t$ , responda às seguintes questões, justificando a sua resposta:

a) Quais são as variáveis dessa função?

b) Dê o domínio e a imagem dessa função.

c) Essa função é contínua em seu domínio? Caso contrário, há algum ponto de descontinuidade?

d) Como você faria para encontrar a lei de formação dessa função?

e) Como você faria para calcular o volume de água no reservatório num determinado instante?

f) Determine a quantidade de água no reservatório nos instantes  $t=3$ ,  $t = 6$ ,  $t= 9$  e  $t = 12$ .

g) Como você faria para traçar o gráfico que represente o volume no reservatório em função do tempo? Faça um esboço desse gráfico.

**02. TAREFA 2 – SEÇÃO 4**

Vamos estabelecer a relação existente entre as operações de derivação e integração.

**- Conclusão provisória:**

**- Teorema:**