PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

CAMILA MOLINA PALLES

UM ESTUDO DO ICOSAEDRO A PARTIR DA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA DINÂMICA

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2013

CAMILA MOLINA PALLES

UM ESTUDO DO ICOSAEDRO A PARTIR DA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA DINÂMICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,*** *sob a orientação da* ***Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.***

PUC/SP
2013

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________ Local e Data:____________

“Cegos que veem. Cegos que, vendo, não veem.”

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a minha família, em especial meus pais, Avelino e Rosangela, minha irmã, Bruna e meus tios, Rosana e Rainer, por me incentivarem sempre a seguir em frente e pelo apoio incondicional em minhas decisões.

Aos amigos Ligia Corrêa de Souza, Fagner Leandro Bueno e Bruno Henrique Labriola Missé, que mesmo distantes, se fizeram sempre presentes ao longo desta caminhada.

Aos amigos que fiz durante o mestrado, em especial, a Renata Ercília Mendes Nifoci, Marcio Almeida, Silvio Brito Marcelino, Patrícia Gonsalves, Naima Soltau Ferrão, Jailma Ferreira, Katia Vigo Ingar e Edson Rodrigues.

Ao amigo e companheiro, Cauê Prata Pimentel Haka, pelo apoio incondicional e pela paciência durante a realização de mais um trabalho acadêmico.

A professora Rosa Monteiro Paulo, por suas ajudas e conselhos, mesmo que à distância.

Ao grupo PEA-MAT pelo acolhimento, pelas reuniões, pelas discussões acadêmicas e pelos churrascos de confraternização.

A minha orientadora, Profª. Drª. Maria José Ferreira da Silva, pela paciência, pela dedicação, pelas oportunidades e, também, pela confiança depositada a mim.

A Capes e ao CNPq pela concessão da bolsa de estudos, permitindo a realização desse trabalho.

Inúmeras são as pessoas envolvidas diretamente e indiretamente na realização desse trabalho e, por isso, palavras de gratidão não existem para expressar a importância delas na minha vida e na concretização dessa dissertação. A todos, o meu sincero agradecimento!

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da visualização geométrica dos registros figurais dinâmicos por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, visando responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização estão presentes em uma sequência didática para a construção da fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por meio do software Cabri-3D?”. Para responder a questão de pesquisa recorremos a um estudo de caso, pelo fato de ser de natureza empírica e poder ser baseado em uma análise documental, tomando como caso de estudo uma sequência didática para o cálculo do volume do icosaedro constante no trabalho de Possani (2012). A análise da sequência a partir dos fatores explicitados por Duval (2004) nos levou a concluir que a sequência desenvolvida, em sua grande parte, não permite o desenvolvimento da visualização. No entanto, é possível conjecturar algumas modificações nessa sequência que permitam então o desenvolvimento da visualização.

PALAVRAS-CHAVE: Registros. Visualização. Geometria Espacial. Cabri 3D.

ABSTRACT

This research aims at studying the geometrical visualizations of the dynamic figural registers through Duval`s Theory of Register of Semiotics Representation, whose main goal is to answer the following question: "What elements essential for the development of visualization are present in an instructional sequence to construct the formula for calculating the measure of the volume of the icosahedron by means of Cabri-3D?".In order to find the answer to the question that has been proposed, we have investigated a case study because of its empirical nature which can be based on a documental analysis, taking a didactic sequence case study for the calculus of the volume of the Icosahedron, which is commonly discussed in Possani (2012). Sequence analysis from the factors explained by Duval (2004) led us to conclude that the sequence developed, for the most part, does not allow the development of visualization. However, it is possible to conjecture some modifications to this sequence which then allow the development of view.

KEY-WORDS: Registers. Visualization. Spatial Geometry. Cabri 3D.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Para Duval (2004) a visualização é uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, sendo esta atividade de representação e não apenas de percepção. Duval (2003) salienta que ao contrário da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pois mostra relações, ou melhor, a organização de relações entre unidades figurais de representação.

Para GARCIA (2006), a visualização torna-se uma forma mais efetiva para uma melhor compreensão da matemática apesar da língua verbal e escrita ser a mais utilizada em sala de aula. O avanço rápido da tecnologia favorece esse processo de visualização. A tecnologia pode ser usada na educação matemática como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação à medida que facilitam as construções geométricas e suas modificações para que os alunos possam se dedicar à análise de resultados.

Assim, usaremos, neste trabalho como aporte teórico para o estudo da visualização a Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval associada ao software Cabri 3D tendo como objetivo analisar por essa teoria, uma sequência didática para a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro, a fim de identificar elementos essenciais das configurações envolvidas.

O Cabri 3D será utilizado por ser um software de geometria dinâmica que permite a construção, a visualização e a manipulação de representações de figuras espaciais, preservando propriedades e permitindo mudar o ponto de vista em relação ao objeto representado.

Possani (2012) desenvolveu uma sequência para a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por decomposição utilizando o Cabri 3D e a validou em alunos do ensino médio. Observou que os alunos, com o auxílio do software, não tiveram dificuldade para desenvolvê-la. Tendo em vista os resultados obtidos pelo autor, optamos pela escolha dessa sequência para analisar se a mesma permite o desenvolvimento da visualização de acordo com Duval (2004).

Para que seja possível o desenvolvimento da visualização uma figura tem que cumprir seu papel heurístico, ou seja, deve servir como suporte para a solução de um problema ou atividade. Além disso, deve permitir a realização de tratamentos específicos, ou seja, tratamentos figurais e dentre as apreensões desenvolvidas, a mais recorrente deve ser a apreensão operatória, por se referir as modificações figurais.

Este trabalhado encontra-se estruturado da seguinte forma:

No capítulo *Problemática e Procedimentos*, faz-se um estudo bibliográfico de pesquisas voltadas a visualização em geometria, apresenta-se a delimitação do problema, a metodologia e os procedimentos metodológicos.

No capítulo *Estudo da Visualização segundo Duval*, faz-se um breve estudo da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval e, em seguida, é apresentado um estudo a respeito da visualização em Geometria com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

No capítulo *Estudo Didático*, é apresentada a sequência didática constante no trabalho de Possani (2012), os critérios de análise e a análise de cada atividade da sequência de modo a responder nossa questão de pesquisa.

Por fim, tecemos nossas *Considerações Finais* sobre este trabalho e listamos as referências bibliográficas utilizadas ao longo do trabalho.

1 PROBLEMÁTICA E PROCEDIMENTOS

Neste capítulo apresentaremos alguns trabalhos relacionados à visualização em geometria, o objetivo, a questão de pesquisa, bem como os procedimentos metodológicos que a delinearão.

1.1 Revisão Bibliográfica

Nesta parte do trabalho analisaremos alguns trabalhos que tratam de Geometria e que estão relacionados com a visualização. Foi utilizado o Banco de Dissertações e Teses da Capes e o Scielo para procurar trabalhos que tivessem entre as palavras-chave e/ou no título as palavras *geometria* e *visualização*, foram encontrados trabalhos apenas no Banco de Dissertações e Teses da Capes.

Dos trabalhos encontrados descartamos os que se referiam a cursos de engenharia, pois tratavam da visualização por outro ponto de vista, aproveitamos as dissertações de Bolda (1997) e Follador (2004) e a tese de Leivas (2009) na área de Educação; a dissertação de Alves (2004) na área de Informática; as dissertações de Cavalca (1997) e Becker (2009) na área de Ensino de Matemática; a dissertação de Alves (2008) na área de Desenho, Cultura e Interatividade; a dissertação de Meneguzzi (2009) na área de Educação Científica e Tecnológica e a dissertação de Garcia (2007) na área de Educação Matemática.

Bolda (1997) fez um estudo a respeito do papel heurístico de uma figura na resolução de problemas em geometria com o objetivo de investigar de que forma a visualização pode auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de geometria. Para a autora “a visualização de uma figura não ocorre num simples olhar. Ela é muito mais complexa, pois todo objeto visível pode não só ter diferentes maneiras de ser descrito, mas de ser visto.” (BOLDA, 1997, p.1) e, por isso, um estudo sobre a visualização se faz necessário.

A pesquisa apoia-se nos princípios da organização da percepção estabelecidos pela Psicologia de Gestalt pelo fato “da mesma se dedicar ao estudo da percepção, da aprendizagem e solução de problemas” (IBID., p. 27) e na teoria das apreensões de Duval em que ele destaca a operação de reconfiguração por ser um tratamento puramente figural que aprimora a percepção e possibilita o desenvolvimento da visualização.

Segundo Bolda (1997), para que haja um crescimento das habilidades visuais é necessário focar nos tratamentos figurais e nos diferentes tipos de apreensões de uma mesma figura. Entretanto, a autora detém-se no estudo da apreensão operatória porque se faz em função de modificações figurais, dentre elas a operação de reconfiguração e ainda por permitir que as figuras desempenhem seu papel heurístico.

A reconfiguração "é a operação que consiste em reorganizar uma ou muitas subfiguras, diferentes de uma figura dada, em uma outra figura" (IBID., p. 49). Segundo a autora, o fato dos alunos verem ou não a operação figural que leva a um tratamento matemático satisfatório depende de alguns fatores que podem facilitar ou dificultar a apreensão operatória que conduz a solução de um determinado problema.

A autora aplicou uma sequência a alunos do 6º ano de duas escolas: uma particular e outra pública estadual, com o intuito de levá-los a desenvolver a capacidade de visualização, além de observar como os fatores, que interferem na visualização de um tratamento figural, possibilitam a compreensão e a solução dos problemas propostos.

Dentre os fatores que influenciam na visibilidade e na complexidade da aplicação da operação de reconfiguração a autora destaca: o fundo constituído por um quadriculado regular ou faixas regulares de retângulos; a complementaridade de formas; modificações posicionais (rotações e translações); dentre outros e conclui que a dificuldade na visualização está em ver a figura e na apropriação da leitura da figura, pois

> aprender a ver não é somente dispor de figuras isoladas de um contexto as quais se aplicarão tratamentos figurais. É, sim, utilizar figuras iniciais realizando uma mudança de registro, a correspondência entre figura e enunciado, possibilitando assim as transformações na figura inicial, que a levarão a uma figura que mostra a solução do problema. Só assim as figuras funcionarão de maneira heurística. (BOLDA, 1997, p. 130)

Por fim, a autora destaca que para uma melhor aprendizagem de tratamentos figurais é necessário que a heurística volte a ser valorizada no ensino, pois acredita que somente assim os alunos poderão ampliar seu espaço de visualização.

Cavalca (1997) faz um estudo a respeito do espaço e da representação gráfica, com o objetivo de verificar a possibilidade de desenvolver, em alunos do ensino superior, as capacidades de visualizar e interpretar objetos do espaço e suas representações gráficas.

O autor apoiou-se nas ideias de Boudarel, que diferencia concepções de relação com o espaço a partir de conjuntos de situações chamadas de micro-espaço e macro-espaço, sendo que aquilo que podemos tocar faz parte do micro-espaço, enquanto que aquilo que apenas podemos ver pertence ao macro-espaço. Apoia-se também em Duval que trata das coordenações de registros de representação de um mesmo objeto e, por fim, nas ideias de Bishop que aponta o uso de dois tipos de habilidades espaciais para operacionalizar as concepções de relação com o espaço, sendo elas a habilidade de interpretação de informação figurativa (IFI) e a habilidade de processamento visual (VP).

> A habilidade IFI está relacionada ao conhecimento das convenções visuais usadas em representações gráficas. [...] Ela inclui ainda a interpretação de termos "espaciais", tais como superfície, forma, direção, etc. A habilidade VP se refere à maneira de tratar um problema. Muitas questões podem ser resolvidas por um processo analítico ou visual. Isso ocorre não apenas em Geometria, mas também em outras áreas, pois a visualização acontece não apenas a partir de estímulos visuais, uma vez que ela depende da internalização da ação e não da forma. (CAVALCA, 1997, p. 33)

Foi elaborada e aplicada uma sequência didática composta de seis sessões com o intuito de propor atividades que ajudassem no desenvolvimento das habilidades VP e IFI em alunos do segundo ano do curso de Ciências com habilitação em Matemática da Faculdade Salesiana de Lorena.

Segundo o autor, os alunos conseguiram estabelecer uma melhor relação entre os objetos do espaço e sua representação plana; o uso de material concreto propiciou o desenvolvimento de suas habilidades IFI e VP e as situações propostas promoveram a coordenação dos registros gráficos e linguísticos.

Follador (2004) investigou a maneira como alunos do 5º ano do Ensino Fundamental interpretam os desenhos feitos no plano para representar sólidos geométricos constantes em questões da prova de Matemática do Programa de Avaliação do Paraná - AVA.

A autora apoiou-se em alguns estudos que tratam da visualização de figuras geométricas espaciais representadas no plano, destacando os estudos de Parzysz, Rommevaux e Chaachoua, além de Vygotsky, pela necessidade de estudar a relação que a criança estabelece entre o conceito e a realidade.

Para a autora, com base na leitura dos trabalhos de Parzysz,

> decodificar regras e convenções na leitura de um desenho no plano (folha de papel), que busca representar situações espaciais, não é algo que o aluno faça de modo espontâneo. É preciso que tenha passado por uma aprendizagem em que tenha tido a oportunidade de discutir e compreender essas representações. (FOLLADOR, 2004, p. 20)

Para a autora alguns aspectos envolvidos na visualização dos desenhos como representações de figuras geométricas espaciais são:

> - Possibilidade de o próprio objeto que está sendo desenhado, conservar ou não, no desenho, características de um objeto tridimensional;
> - Os limites e possibilidades do próprio "leitor", ou seja, há pessoas que identificam, num desenho, a representação de uma figura espacial, e outras que não identificam. [...]
> - As intervenções nas aprendizagens do sujeito que o ajudam a superar possíveis dificuldades para ler e interpretar um desenho como representação plana de uma figura espacial. [...]
> - O modo como o próprio desenho que representa a figura espacial se apresenta esteticamente ao observador. Ou seja, quais convenções o desenhista adota e o tipo de perspectiva que utiliza. (FOLLADOR, 2004, p. 24-25)

Assim, a autora desenvolveu sua pesquisa analisando uma prova aplicada a oito alunos de 4ª série do Ensino Fundamental e as entrevistas individuais com cada aluno sujeito da pesquisa e com a professora dos alunos. As questões que compunham a prova foram retiradas do Programa de Avaliação do Rendimento Escolar do Paraná – AVA.

A autora constatou que os desenhos constantes nas questões interferiam na compreensão das mesmas e nas respostas dadas; que alunos que sabiam a nomenclatura própria da Geometria apresentaram menos dificuldade do que alunos que relacionam os desenhos a objetos do cotidiano; que os estudantes identificaram melhor os objetos nomeados por cilindros, cones, pirâmides e cubos ao invés de objetos nomeados de bloco retangular, prismas e poliedros e que os desenhos que conservavam suas características quando representados no plano e, que eram mais frequentes no material didático, eram mais reconhecidos pelos estudantes.

Por fim a autora destaca a necessidade dos alunos compreenderem como se fazem desenhos em perspectiva para representar figuras geométricas, uma vez que as crianças são capazes de copiar os desenhos feitos no quadro pela professora.

Alves (2004) objetivou em sua pesquisa verificar se o uso de um software de geometria dinâmica auxilia no desenvolvimento de representações mentais de objetos geométricos e se interfere para uma melhor compreensão de conceitos relacionados a este domínio do conhecimento, pois percebeu que o processo de ensino-aprendizagem de geometria é dificultado por deficiências de visualizações por parte dos alunos.

> Para atingir os principais objetivos do ensino da geometria, é necessário que o aluno seja capaz de relacionar os fenômenos visuais aos fatos geométricos, reconhecer visualmente as propriedades geométricas, interpretar os desenhos em termos geométricos e saber realizar construções de configurações geométricas (LABORDE, 1998). Uma aprendizagem alcança tais metas quando capacita o estudante a utilizar o desenho como um auxílio ao seu raciocínio num nível abstrato, selecionando as informações relevantes extraídas de representações visuais e distinguindo as verdadeiras propriedades dos objetos geométricos daquelas encontradas em representações prototípicas. (ALVES, 2004, p. 59).

O autor acredita que os softwares de geometria dinâmica podem colaborar para os processos de formação do conceito de objeto geométrico, permitindo que o aluno não confunda as propriedades de um desenho com as propriedades de um objeto geométrico, pois

> através dos recursos de animação de alguns softwares geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se

> tornam facilmente exequíveis com o uso do computador. (ALVES, 2004, p. 5)

Destaca ainda que

> na geometria dinâmica, as atividades que estimulam a exploração e a descoberta dos invariantes são realizadas através de experiências visuais e, por este motivo, possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos que levam a uma representação mental correta por parte do estudante, auxiliando no processo de visualização. (ALVES, 2004, p. 72)

A fundamentação teórica está baseada no construtivismo cognitivista de Piaget, no qual o indivíduo adquire conceitos quando interage com objetos do mundo, entretanto neste trabalho ele aparece no contexto da

> informática, no qual o sujeito interage com o computador, através de um software de geometria dinâmica, manipulando conceitos e construindo habilidades que contribuem para seu desenvolvimento mental, tais como o da visualização. (ALVES, 2004, p. 72)

Também se apoiou no sócio-construtivismo de Vygotsky, enfatizando o aspecto de o desenvolvimento cognitivo ocorrer dentro de um determinado contexto social e em níveis mais altos por meio de trabalhos colaborativos; no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e nas teorias de resolução de problemas e de representação do conhecimento.

Foram desenvolvidos dois trabalhos de campo: o primeiro com alunos ingressantes no ensino técnico, abordando o conteúdo de triângulos, suas classificações e cevianas e o segundo com estudantes concluintes, abordando o conteúdo sobre cálculo de volume e a justificativa de fórmulas através do Princípio de Cavalieri. Em ambos os momentos, os alunos foram divididos em dois grupos: um experimental, utilizando softwares de geometria dinâmica e um de controle, tendo aulas tradicionais.

A preocupação do autor em encontrar caminhos e soluções para o desenvolvimento da visualização geométrica nestes alunos vem do fato deles serem de cursos técnicos de áreas que exigem uma boa capacitação em visualização, dentre outras competências.

Os resultados apontaram uma melhora na visualização de objetos geométricos e na manipulação mental destes para os grupos experimentais, sendo que para os alunos do grupo de controle as aulas clássicas parecem não ter contribuído para esta mesma mudança. Também mostraram que os alunos do grupo experimental demonstraram uma evolução maior em relação à compreensão dos conceitos geométricos vistos, uma vez que

> verificou-se que estes mesmos sujeitos apresentaram respostas qualitativamente melhores que os do grupo de controle, mostrando que eles talvez tenham sedimentado e compreendido melhor os conceitos relacionados a triângulos trabalhados durante o trabalho de campo. Tal fato está relacionado possivelmente a uma melhor representação mental dos objetos geométricos vistos em maior quantidade na tela do software de geometria dinâmica, devido à precisão e variedade na construção destes objetos possibilitada pelo software. (ALVES, 2004, p. 155)

Por fim, o autor acredita que a introdução da tecnologia informática pode efetivamente apontar uma melhora no desempenho dos alunos e potencializar a sua habilidade para visualizar conceitos geométricos.

Garcia (2007) fez um estudo de caso junto a alunos de um colégio em Goiás, onde atua como professora, com o objetivo de estudar as inter-relações entre os processos de visualização e representação de conceitos geométricos e suas possíveis influências na constituição do conhecimento matemático, uma vez que considera relevante

> a visualização no processo de construção e exploração dos conceitos matemáticos, assim como sua função cognitiva em proporcionar outras relações mentais, possibilitando, muitas vezes, a construção de conceitos novos que levarão a outros conceitos e, assim, sucessivamente. (GARCIA, 2007, p. 12)

Além disso, buscou oferecer subsídios que levem professores e pesquisadores a uma possível reflexão a respeito de estratégias de ensino e métodos de trabalhos. Para a autora, o avanço da tecnologia favorece tanto a visualização dos conceitos matemáticos quanto o processo de representação desses conceitos e, por esse motivo os explora também em sua pesquisa. Apresenta um estudo acerca das influências do contexto escolar na constituição do conhecimento, a constituição do conhecimento na perspectiva da Semiótica e, por último a constituição do conhecimento Matemático na perspectiva da Semiótica e, é na perspectiva da Semiótica de Peirce, que define Semiótica como a ciência dos signos, que a autora embasa teoricamente sua pesquisa.

> A Matemática pode ser considerada um sistema de signos que, através do nosso modo de pensar, criar e agir integra as ações humanas. Para a compreensão e construção de qualquer raciocínio matemático, faz-se necessário observarmos os fenômenos, analisando semelhanças e diferenças das imagens matemáticas. Segundo Peirce (apud Hildebrand, 2001, p.19), “as imagens são representações dos modelos que concebemos mentalmente, isto é, são signos visuais que exteriorizam o comportamento de nossas ideias abstratas.” Assim, podemos afirmar que representamos somente aquilo que vemos e analisamos. (GARCIA, 2007, p. 41)

Paralelamente à Pierce, a autora também traz Gutiérrez, que considera a visualização “como o tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais como físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades.” (GARCIA, 2007, p. 48), bem como os quatro principais elementos que compõem a visualização segundo Gutiérrez: Imagem Mental, Representação Externa, Processo de Visualização e Habilidades de Visualização.

> Todos esses elementos são de grande importância no processo de resolução de problemas que são propostos por professores na sala de aula. O processo de visualização abrange as imagens mentais, criando-as e interpretando-as. O aluno que consegue abstrair a imagem mental nem sempre necessita do objeto em mãos para resolver um problema. A representação externa é o modo como o indivíduo apresenta o conhecimento já constituído na mente, podendo, por meio dessa representação, formar novos conceitos e transformar essas imagens mentais. (GARCIA, 2007, p. 49)

Segundo a autora

> quando observamos a Matemática como uma linguagem de comunicação ou de produção e reprodução de conhecimento, observamos os signos pelas suas qualidades (imagens mentais). Quando estamos a relacioná-la às outras linguagens, estamos concretizando as imagens mentais em imagens visuais (verbais visuais e escritas – os signos escritos são antes imagens gráficas). E, finalmente, quando associamos os conceitos às imagens mentais e visuais estamos, por meio dos processos operatórios, realizando interpretações e dando significações às imagens. O processo de abstração de uma imagem parece ser a etapa final de um processo e inicial de outro processo de significação. De fato, este é o processo de semiose, que se torna cíclico e infinito, como acontece também com a constituição sígnica. (GARCIA, 2007, p. 51)

No contexto da prática docente, a autora destaca que grande parte dos alunos não possui essas habilidades e, que elas precisam ser desenvolvidas na sala de aula.

O estudo se deu com um grupo de onze alunos do 2º ano de Ensino Médio de dois colégios particulares e ocorreram em dez encontros. Inicialmente foi feita uma coleta de dados por meio de questionário e, em seguida, foram desenvolvidas atividades exploratório-investigativas, em que foram utilizados materiais manipulativos e o laboratório de informática.

Durante as atividades, a autora observou um comportamento mais ativo dos alunos, que aplicavam os conceitos de modo informal em detrimento das memorizações, procedimentos mecânicos e generalização de relações matemáticas intrínsecas às representações ao associarem estratégias de resolução com a visualização das representações.

Alves (2008) fez uma análise comparativa entre o processo de representação de um sólido geométrico utilizando instrumentos tradicionais de desenho e a modelagem feita em software gráfico. Fez também algumas considerações a respeito do avanço e da influência das novas tecnologias no âmbito educacional, especificamente, a Geometria Descritiva, na tentativa de minimizar a dificuldade que a maioria dos discentes encontra no processo de visualização.

> A Geometria Descritiva proporciona ao discente os conhecimentos necessários sobre os fundamentos da Geometria Plana e Espacial de modo que ele possa desenvolver sua capacidade de visualização e orientação espacial, executando mentalmente construções geométricas tridimensionais de modelo no espaço (x,y,z), tendo como base um ambiente bidimensional (x,y). (ALVES, 2008, p. 15)

A autora tomou como referência, para analisar a representação do sólido feita por métodos tradicionais, os autores Príncipe Júnior e Fonseca, Carvalho e Pedroso, pelo fato das abordagens destes autores se aproximarem com a do idealizador da Geometria Descritiva, Gaspard Monge, e o software gráfico selecionado foi o 3D *Solidworks* por, segundo a autora, ser de fácil acesso e compreensão, apresentar versão em português, e por ser utilizado pelo meio acadêmico no qual a pesquisa foi desenvolvida.

> Na proposta do Método de Monge, o objeto fica determinado a partir das duas projeções, nos planos de projeção, um vertical e outro horizontal, utilizando o sistema cilíndrico ortogonal. O referido sistema de projeção permite a representação de objetos (sólidos, planos, retas e pontos) pertencentes a um espaço tridimensional (3D), traduzido para um espaço bidimensional (2D) como uma folha de papel. (ALVES, 2008, p. 15-16)

A pesquisa visa descrever a importância da Geometria Descritiva para os cursos de Matemática e Engenharia Civil da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) de modo a instigar uma mudança no ensino desta disciplina.

Ao comparar a utilização de instrumentos tradicionais com o uso de um software para a criação de desenhos, a autora destaca que

> o desenho feito através de instrumento segue uma padronização de expressão, realizado em escala concisa. Neste sentido, o ensino é direcionado no intuito de desenvolver as habilidades manuais e mentais e fortalecer o traçado do discente ingressante, por exemplo, nos cursos de Engenharia Civil e Matemática. Estes, na sua maioria, não têm a destreza na utilização dos instrumentos de desenho e sentem dificuldade na representação de algumas formas. (ALVES, 2008, p. 32)

Já nos programas gráficos

> a tela assume o lugar de um papel em branco, o indicador do mouse assume a função de um dedo para mover, apontar e selecionar, ou do lápis para criar traços ou figuras. Quando o programa é carregado, aparece na tela uma caixa de ferramentas que dispõe de opções para a efetivação do traçado, substituindo o esquadro e o compasso; uma barra de menu lista os comandos para criação, edição e visualização, ao invés da dinâmica adotada no manuseio e técnicas utilizadas na construção do objeto amparados com a destreza e a regularidade das relações de estruturas previamente estabelecidas. (ALVES, 2008, p. 40)

A autora destaca que a utilização de ferramentas computacionais traz ganhos consideráveis no desenvolvimento da percepção espacial e tem demonstrado ser um eficiente recurso de ensino facilitando a visualização e a construção das formas, entretanto,

> não se ensina Geometria Descritiva somente com o computador. Para a efetivação das representações gráficas, é imprescindível que o embasamento teórico esteja sedimentado no imaginário do discente, na compreensão do processo, da concepção à representação, seja virtualmente ou no papel. Ainda que se use o computador como editor gráfico, ao contrário de lápis e papel,

> o discente precisa compreender a operação, sem o qual não estará apto a criar e desenvolver a sua habilidade espacial. (ALVES, 2008, p. 130)

Destaca também que é preciso uma mudança nas práticas e métodos de ensino dos docentes para que os esforços não sejam em vão, sendo necessário adaptarem-se às novas tecnologias, assumindo o papel de mediador das atividades no processo de ensino-aprendizagem, instigando o aluno a perceber o espaço, a visualizar as construções, a conceber projetos e os representar.

Becker (2009) fez um estudo do ensino de geometria com o intuito de desenvolver atividades que auxiliem os alunos no desenvolvimento da capacidade de visualização e na representação de sólidos em diagramas bidimensionais. A pesquisa apoiou-se nas ideias de Van Hiele, que trata de um modelo para o ensino de geometria, de Gutiérrez que utiliza a teoria de Van Hiele na representação de sólidos geométricos e de Piaget que descreve os processos psicológicos ligados à visualização e a aprendizagem.

O autor apresenta o modelo de Van Hiele como sendo caracterizado "por descrever as diferenças no pensamento geométrico dos alunos e explicar como um professor pode ajudar seus alunos a elevarem seu nível de raciocínio" (BECKER, 2009, p. 22). O processo de desenvolvimento do conhecimento geométrico é dividido em cinco níveis: Visualização e Reconhecimento, Análise, Classificação, Dedução Formal e Rigor. Segundo o autor,

> Van Hiele acreditava que o avanço de um nível para outro não é um processo natural, o professor é a peça chave para auxiliar o aluno no seu desenvolvimento através de um programa adequado de ensino-aprendizagem. (BECKER, 2009, p. 26)

Segundo Becker (2009), Gutiérrez divide o problema da aprendizagem em duas partes: a aquisição de habilidades espaciais e o entendimento das relações entre os conceitos geométricos. Destaca ainda a capacidade de visualização como uma habilidade básica para se trabalhar Geometria Espacial.

> O cotidiano envolve diversas relações entre representações planas e espaciais, mas quando um objeto é representado no plano, perde muitas de suas informações. [...] A pessoa que vê as representações de um sólido deve ter a capacidade de recuperar a maior quantidade de informações perdidas nessa representação. É fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes

> tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. (GUTÍERREZ apud BECKER, 2009, p. 27)

O autor destaca que, para Piaget, a criação da imagem mental se dá através de sucessivas adaptações entre o indivíduo e o meio e, a partir do nível das operações concretas, a noção de espaço e a intuição geométrica se constituem, ultrapassando a percepção. Para que se chegue até esse ponto, é fundamental o papel do desenho, pois o desenho auxilia a criança a interpretar o mundo.

> O desenho é uma representação, isto é, supõe-se a construção de uma imagem distinta da percepção, e segundo Piaget (1993), nada prova que as relações espaciais de que essa imagem é feita sejam do mesmo nível das relações que a percepção correspondente testemunha. [...] Podemos questionar se a imagem interior guarda as mesmas relações que a sua representação. [...] Poderíamos dizer que o desenho nada nos ensina, mas permite a constatação do caráter espontâneo das estruturas próprias da representação, portanto a evolução do desenho fornece o quadro geral no qual poderão situar-se as análises. (BECKER, 2009, p. 31)

O autor desenvolveu sua pesquisa em duas partes. Primeiramente, com a aplicação de um teste piloto para alunos dos ensinos fundamental, médio e superior para observar a capacidade de visualização e representação de sólidos em diagramas bidimensionais em diferentes níveis etários e intelectuais. Com base na análise do teste piloto foi elaborada uma sequência didática que visava desenvolver a imagem mental e a habilidade de representar sólidos em perspectiva. Esta sequência foi aplicada em alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola técnica em eletrônica.

Segundo Becker (2009), foi possível observar que a sequência auxiliou no desenvolvimento da capacidade de visualização geométrica e na representação de objetos tridimensionais no plano, pois ao retornar com o conteúdo programático da disciplina os alunos apresentaram maior facilidade em lidar com sólidos e passaram a utilizar os diagramas como ferramenta na resolução de problemas.

Meneguzzi (2009) fez um estudo sobre os perspectógrafos de Albrecht Dürer como ferramenta do olhar e, a partir disso, construir imagens em perspectiva com possibilidades de aplicação em sala de aula.

Inicialmente a autora fez uma explanação a respeito da visualização no ensino da geometria, destacando que o desenvolvimento da geometria recorre à visualização, à percepção, à intuição e à representação para poder ser concretizado, desenvolvendo no indivíduo o pensamento espacial aliado ao raciocínio visual. Destaca ainda a complexidade da atividade de visualização com base em Parzysz que afirma que a complexidade da atividade de visualização está justamente no fato de cada indivíduo ver e observar detalhes diferentes de um mesmo objeto; em Bolda (1997) que diz ser necessária uma construção do olhar para ver o mundo em sua tridimensionalidade e em Duval (2011) que afirma que a complexidade da visualização espacial se dá devido ao fato de se ver no plano o que está no espaço.

Para a autora, o desenvolvimento da visualização pode se dar através da representação de figuras geométricas em perspectiva. Implicando não só a atividade do olhar, mas também o emprego e a apreensão de saberes, sendo necessário educar o olhar matematicamente. A visualização para ela é, portanto, um conhecimento matemático e neste trabalho fez referência à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual.

A autora apresenta também a história das máquinas de Dürer, procura analisar qual a importância destas máquinas de representar para a afirmação da técnica da perspectiva como modo de representar e, em seguida, mostra a construção do perspectógrafo didático assim como algumas possibilidades de utilização em sala de aula para o trabalho com a visualização e saberes matemáticos.

Leivas (2009) teve como objetivo apontar possibilidades do uso de abordagens geométricas que mobilizem imaginação, intuição e visualização no ensino de conceitos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática, de modo a fornecer indicadores para uma nova proposta de currículo.

O autor entende imaginação como uma forma de concepção mental de um conceito matemático com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito. Intuição como um processo de construção de estruturas mentais cognitivas para a formação de um determinado conceito matemático a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto e visualização como um processo de formar imagens mentais com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, de modo a auxiliar na resolução de problemas geométricos.

Em sua pesquisa realizou dois experimentos de ensino de conceitos geométricos: um em um curso de Licenciatura em Matemática e outro em uma disciplina do Programa de Pós-Graduação na linha de Educação Matemática.

O experimento realizado com alunos da Licenciatura em Matemática tinha o objetivo de verificar como alunos utilizam propriedades topológicas na classificação de quadriláteros planos. Foram aplicadas tarefas adaptadas das provas sobre propriedades topológicas realizadas por Piaget e Inhelder. Os resultados mostraram que alunos que já cursaram disciplinas de Geometria ainda não têm o espaço perceptivo e o representativo bem elaborado.

O experimento realizado em uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática tinha o objetivo de verificar como indivíduos que têm alguma formação superior compreendem o conceito de altura de triângulos utilizando um software de geometria dinâmica. O autor verificou que atividades utilizando tecnologias computacionais feitas numa abordagem construcionista e colaborativa facilitam a construção e apreensão do conceito de altura de triângulo deslocando a ideia de verticalidade para a ideia da relação de perpendicularismo entre retas.

Por fim, o autor exemplifica uma possibilidade de geometrizar o tópico de grupos algébricos e apresenta sugestões para um projeto de Licenciatura em Matemática com base nas possibilidades imaginativas, intuitivas e visuais da Geometria.

Esses trabalhos nos mostram a importância da visualização em geometria, como também os de Cavalca (1997), Follador (2004), Alves (2004), Garcia (2007), Alves (2008) e Meneguzzi (2009) que focam o desenvolvimento da visualização para auxiliar a aprendizagem de geometria espacial e, alguns ainda, com o auxílio de softwares de geometria dinâmica. No entanto, o estudo da visualização apresentado nesses trabalhos apenas nos fornecem indícios de aspectos necessários para que haja visualização de objetos espaciais, tais como os tratamentos figurais, os tipos de apreensões e os registros de representação semiótica como podemos ver em Bolda (1997) quando se refere aos tratamentos figurais e a necessidade de articulação entre diferentes tipos de registro, em Garcia (2007) ao referir-se aos processos operatórios como sendo os responsáveis por interpretações e significações que damos às imagens e em Cavalca (1997) ao afirmar que a visualização depende da internalização da ação e não apenas da forma.

Deste modo, sentimos a necessidade de aprofundar o estudo da visualização em relação aos tratamentos figurais e, consequentemente, nos diferentes tipos de apreensões de uma mesma figura, fatores estes essenciais para o desenvolvimento da visualização como destacado por Bolda (1997).

1.2 Delimitação do Problema

Com a leitura dos trabalhos acima percebemos uma preocupação com o desenvolvimento de habilidades visuais como fator importante para o ensino de geometria em várias áreas do conhecimento e em vários níveis de ensino, não sendo apenas uma preocupação específica da pesquisa Educação Matemática, uma vez que encontramos trabalhos também nas áreas de Educação, Ensino de Matemática, Informática e Desenho, Cultura e Interatividade.

As pesquisas analisadas nos sugerem que uma continuidade dos estudos acerca da visualização se faz necessária, uma vez que é relatada dificuldade de visualização, principalmente em relação às figuras geométricas espaciais. Entretanto, para o estudo da visualização é necessário ir além da percepção, é necessário compreender os tratamentos figurais e os diferentes tipos de apreensões de uma figura.

Por se tratar de um assunto pouco explorado pelas pesquisas, focaremos no estudo da visualização de figuras espaciais representadas em softwares de geometria dinâmica, pois acreditamos que mais do que recorrer a um software para auxiliar a visualização de figuras espaciais, é necessário entender como se dá o processo de visualização em geometria e quais são os fatores que interferem nesse processo. Quanto ao software utilizado, escolhermos, em particular, o Cabri 3D, por permitir a construção, a visualização e a manipulação de figuras espaciais, além de preservar suas propriedades, e permitir mudar o ponto de vista em relação ao objeto representado. Como objeto de estudo tomamos a sequência para o cálculo da medida do volume do icosaedro constante na dissertação de Possani (2012) por permitir esse estudo.

Diante das considerações feitas, este trabalho tem por objetivo analisar por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática para a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro, a fim de identificar elementos essenciais das configurações envolvidas, visando responder a seguinte questão de pesquisa:

“Quais elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização estão presentes em uma sequência didática para a construção da fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por meio do software Cabri-3D?”.

Assim, para atingir esses objetivos e responder nossa questão de pesquisa, no que segue, apresentamos a metodologia que utilizaremos, bem como os procedimentos.

1.3 Metodologia e Procedimentos Metodológicos

A metodologia utilizada na presente pesquisa é uma modalidade de pesquisa qualitativa do tipo Estudo de Caso.

Um estudo de caso é um método de pesquisa utilizado em várias áreas do conhecimento, inclusive na Educação. Para Ponte (2006) o estudo de caso pode ter propósitos muito variados e pode utilizar uma grande variedade de instrumentos e estratégias, assumindo formatos específicos e envolvendo técnicas de recolha e análise de dados muito diversas.

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade

> social. O seu objetivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de certo fenômeno de interesse. (PONTE, J. P., 2006, p. 2).

Os estudos de caso podem ter diversos propósitos sendo classificados em exploratórios, descritivos ou analíticos. Para Ponte (2006) os exploratórios servem para obter informação preliminar acerca do objeto de interesse. Os descritivos tem como propósito dizer como é o caso em apreço e os analíticos procuram problematizar o seu objeto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente. “Em Educação Matemática há lugar para qualquer um destes tipos de estudo”. (Ponte, 2006, p. 6).

Em nosso trabalho, trataremos de um estudo de caso analítico, pois nosso objeto de estudo será analisado a luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de identificar elementos essenciais das configurações envolvidas que permitam o desenvolvimento da visualização.

Segundo Ponte (2006) em Educação, e em particular na Educação Matemática, têm-se tornado cada vez mais comuns os estudos de caso de natureza qualitativa, cujo objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico. O caso a ser estudado pode ser quase tudo como afirma Coutinho e Chaves (2002), como, por exemplo, uma escola, um sistema educativo, uma comunidade e até mesmo uma nação.

Diante do exposto e pelo fato do estudo de caso ser de natureza empírica e poder ser baseado em uma análise documental, como explicitado por Ponte (2006), optamos por um estudo de caso para a realização dessa pesquisa, tomando como caso de estudo uma sequência didática para o cálculo do volume do icosaedro constante no trabalho de Possani (2012).

Para fazer tal estudo procederemos da seguinte forma: um estudo minucioso da teoria dos Registros de Representação Semiótica a fim de levantar os critérios necessários que nos permitirão analisar a sequência de Possani (2012). Em seguida, uma análise de cada uma das situações apresentadas na sequência a fim de identificar elementos essenciais das configurações envolvidas para responder nossa questão de pesquisa e, por fim, sugestões de alterações na sequência que se fizerem necessárias.

Para analisar a sequência do ponto de vista da visualização faz-se necessário um estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, uma vez que a atividade geométrica é tida pelo autor como uma atividade semiótica.

2 ESTUDO DA VISUALIZAÇÃO SEGUNDO DUVAL

Neste capítulo abordaremos a teoria que dará suporte ao estudo da visualização: os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

2.1 Registros de Representação Semiótica

Segundo Duval (1999) um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais para o funcionamento cognitivo consciente.

Para Duval (2009) os sistemas semióticos devem permitir o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes a toda representação semiótica: produzir a representação de alguma coisa e permitir a transformação dessa representação em outra por meio da conversão e do tratamento, porém nem todo sistema semiótico permite essas atividades, como, por exemplo, o morse. Os sistemas que permitem essas atividades, tais como a linguagem natural e as figuras geométricas, são chamados registros de representação semiótica.

Os registros de representação semiótica, segundo Duval (1999), são classificados em dois tipos diferentes: registros multifuncionais e registros monofuncionais. Os registros multifuncionais são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis e a representação pode ser discursiva, como, por exemplo, a língua natural e não discursiva, como, por exemplo, as figuras geométricas. Os registros monofuncionais são aqueles em que os tratamentos são, principalmente, algoritmos e a representação pode ser discursiva, como, por exemplo, o cálculo e não discursiva, como, por exemplo, os gráficos.

A atividade em geometria, segundo Duval (2004), se baseia em dois registros: o das figuras e o da língua natural, sendo um responsável por designar as figuras e suas propriedades e, o outro, para enunciar definições, teoremas, hipóteses, etc., ou seja, a atividade em geometria utiliza registros multifuncionais. Porém, na sequência a ser analisada no Capítulo 3 desse trabalho, as atividades requerem a conversão registro figural - registro algébrico e registro da língua natural - registro algébrico para se chegar no cálculo da medida do volume do icosaedro, ou seja, recorre-se também ao uso de registros monofuncionais.

Como nosso foco é o estudo da visualização em geometria dinâmica, faz-se necessário considerar também um tipo mais específico de registro figural: o registro figural dinâmico, definido como “o registro figural utilizado em ambientes de Geometria Dinâmica.” (SALAZAR, 2009, p. 86), pois nos ambientes de geometria dinâmica é possível movimentar a figura, logo, o registro figural deixa de ser estático e passa a ter movimento, o que permite ver a figura de perspectivas diferentes.

Os registros de representação semiótica podem sofrer transformações de dois tipos: os tratamentos e as conversões. O tratamento de uma representação "é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada" (Duval, 2012, p. 272), sendo, portanto, uma transformação interna a um registro.

Em geometria, os tratamentos são mais específicos devido à complexidade de se ver uma figura, como afirma Duval (2004), pois a visualização de uma figura ultrapassa a percepção, é necessário reconhecer as formas, ou seja, “seus contornos fechados justapostos, superpostos, separados” (DUVAL, 2011, p. 85). Afirma ainda que “o desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções” (DUVAL, 2009, p. 17) e, por este motivo, fala-se em tratamentos figurais, que estão relacionados com as apreensões em geometria.

Duval (2004) distingue quatro tipos de apreensões no registro figural: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória. Para o autor a *apreensão sequencial* refere-se à ordem da construção de uma figura geométrica, com a ajuda de um instrumento; a a*preensão perceptiva* diz respeito à interpretação das formas de uma figura geométrica que permite identificar ou reconhecer de forma direta o objeto; a a*preensão discursa* corresponde à explicitação de outras propriedades matemáticas da figura, além das que são assinaladas por uma legenda ou pelas hipóteses e a a*preensão operatória* refere-se às modificações e/ou transformações possíveis da figural inicial e pela organização perceptiva que essas modificações apontam para obter novos elementos que podem nos levar à solução de uma determinada situação-problema.

Das apreensões citadas, focaremos a apreensão operatória, responsável pelos tipos de modificações figurais, pois

> os tratamentos que constituem a produtividade heurística das figuras geométricas combinam operações que não se mostram ser nem do tipo de apreensão puramente perceptiva, nem do tipo conceitual. Em certos casos, os fatores próprios à apreensão perceptiva podem favorecer estas operações e, em outros casos, ao contrário, inibi-las. Alem disso, estas operações são independentes de todo o raciocínio dedutivo e do emprego de definições. Por isso a importância de distinguir esta apreensão operatória das figuras de apreensão perceptiva, da apreensão discursiva e teórica. (Duval, 2012, p.287)

A apreensão operatória de uma figura engloba três tipos de modificações figurais: a relação parte/todo, a visual e a posicional.

As modificações do tipo parte/todo, também conhecida como mereológica, são baseadas na operação de reconfiguração, em que uma figura é decomposta em diferentes unidades figurais, podendo ser recombinadas para formar outra figura ou diferentes sub-figuras, como vemos na Figura 1, onde temos um “L” formado por quadradinhos e, em seguida, o mesmo “L” foi reconfigurado em sub-figuras que conservam a forma da figura original, ou seja, quatro “L” formado por três quadradinhos cada.

Alguns fatores podem facilitar ou inibir a visibilidade dessas operações, tais como a partição em diversas sub-figuras, a complementaridade, a duplicação e a rotação. No caso da Figura 1, um fator que pode inibir a visibilidade da operação de reconfiguração é o fato de duas das sub-figuras estarem rotacionadas.

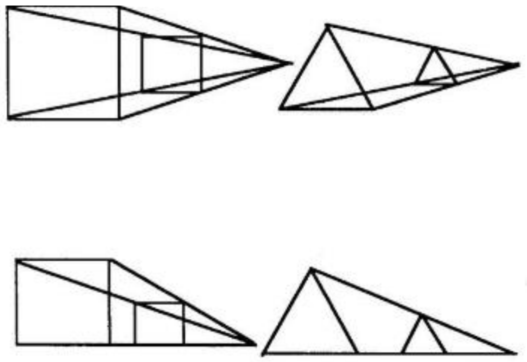
Figura 1 - Exemplo de uma operação de reconfiguração.

Fonte: Flores, 2004, p.6.

As modificações visuais ou óticas podem ser baseadas na superposição em profundidade de duas figuras semelhantes ou na variação de forma e constância de forma e de tamanho, conforme Figura 2, onde temos figuras de mesma forma superpostas, mas com variação de tamanho.

Fatores como a mesma orientação das figuras, linhas de perspectivas todas distintas dos lados das duas figuras e a posição do centro de homotetia podem facilitar ou inibir a visibilidade destas operações. No caso da Figura 2, Duval (2012) afirma que as figuras fazem com que os centros de homotetia sejam vistos como pontos de fuga, facilitando, em um primeiro olhar, uma visão de profundidade.

Figura 2 - Exemplo de uma modificação visual.

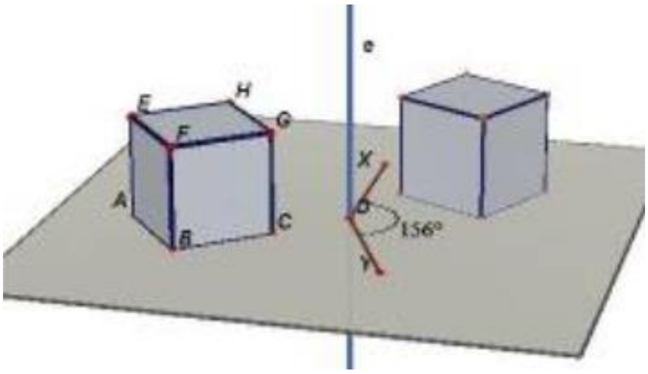


Fonte: Duval, 2012, p. 290.

As modificações posicionais estão relacionadas com a variação de orientação, rotação, translação de uma figura, mas mantendo o mesmo tamanho e forma, conforme a Figura 3 onde temos a rotação de um cubo em torno de um eixo e.

A visibilidade desta operação pode ser inibida ou facilitada por meio da pregnância das direções vertical e horizontal. No caso da Figura 3 a rotação em torno de um eixo vertical afeta a visibilidade do cubo à medida que varia o ângulo o rotação, pois em determinados momentos pode-se visualizar o cubo e, em outros, apenas uma de suas faces, ou seja, um quadrado.

Figura 3 - Exemplo de modificação posicional.



*Fonte: Salazar, 2009, p.*86.

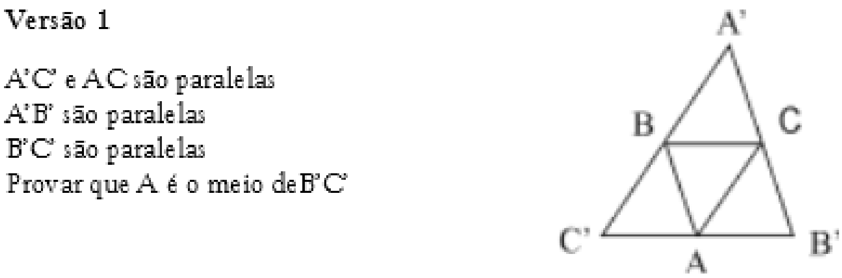
A conversão de uma representação "é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou parte somente do conteúdo da representação inicial" (Duval, 2012, p. 272). São exemplos de conversões: a ilustração que converte uma representação linguística em representação figural; a tradução que converte uma representação linguística numa determinada língua em outra representação linguística de outra língua, dentre outros.

A conversão envolve ainda o conceito de congruência e não congruência. A dificuldade da conversão de um registro de representação para outro está relacionada com o grau de congruência entre o registro de saída e o registro de chegada.

Segundo Duval (2004) entende-se por congruência a passagem de um registro de representação a outro de forma nítida, facilitando a relação entre o registro de partida e o registro de chegada, desde que três condições sejam obedecidas: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada. A não congruência é a passagem de um registro de representação a outro, não sendo nítida a relação do registro de partida com o de chegada, ou seja, quando um dos três critérios não é verificado.

Na Figura 4 temos um problema citado por Duval (2004), no qual é necessário visualizar paralelogramos para que se chegue à solução, porém o que se vê de imediato são triângulos e não paralelogramos e as informações dadas são referentes a retas paralelas. Esse problema exemplifica um caso de não congruência.

Figura 4 - Exemplo de uma conversão não congruente.



Fonte: Duval, 2004, p.163.

Na Figura 5 foi apresentado um problema semelhante ao de Duval (2004), porém a informação referente aos paralelogramos foi dada, facilitando sua identificação. Esse problema exemplifica um caso de congruência.

Figura 5 - Exemplo de uma conversão congruente.

Fonte: Moretti, 2002, p361.

Segundo Salazar (2009, p. 87), “a visualização, como atividade cognitiva, é intrinsecamente semiótica” e, por este motivo, é que no próximo tópico analisaremos a visualização geométrica sob a luz dos Registros de Representação Semiótica.

2.2 Visualização Geométrica

Para Duval (2011), das representações produzidas para que possamos ver, as figuras geométricas são as mais naturais. Possuem um poder cognitivo particular por terem um valor intuitivo, por não exigirem explicação complementar e por permitirem um reconhecimento quase que imediato dos objetos representados. Elas são construídas instrumentalmente, seja com régua, com compasso ou com um software, permitindo assim considerar relações e distinguir uma figura de outra, embora as construções feitas em um software de geometria dinâmica possam ser modificadas e permitam efetuar verificações e observações em tempo real.

Para o autor a visualização é uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, sendo esta atividade de representação e não apenas de percepção. Duval (2003) salienta que ao contrário da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pois mostra relações, ou melhor, a organização das relações entre unidades figurais de representação.

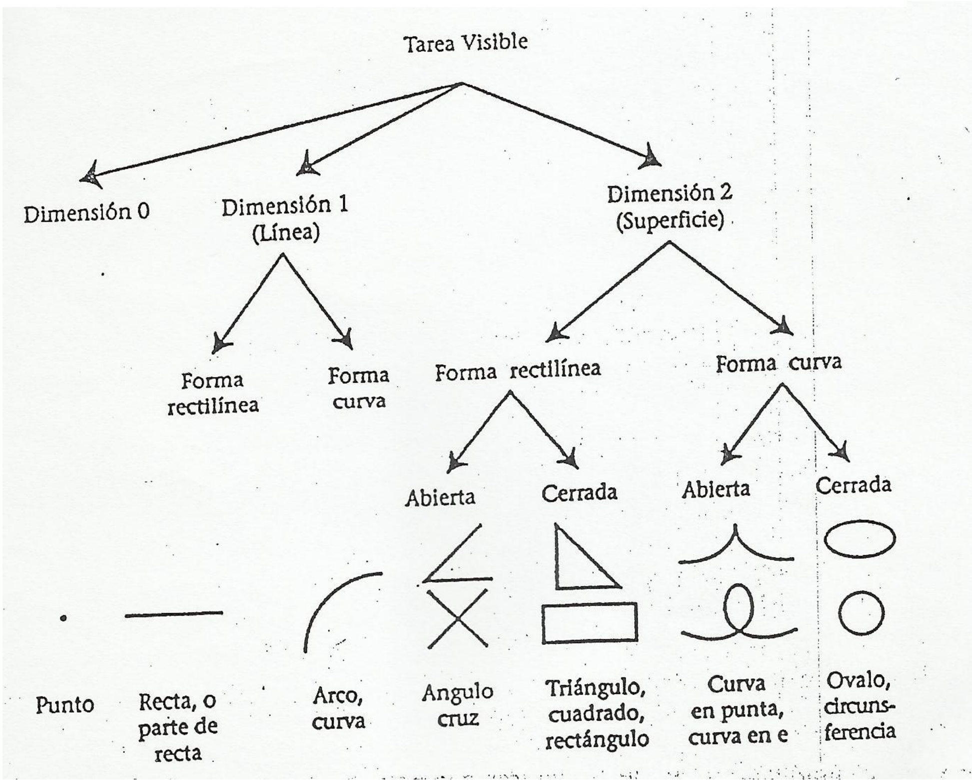
As unidades de base constitutivas do registro figural se apoiam na ideia de que toda figura aparece como uma combinação de valores para variações visuais do tipo dimensional e qualitativo, sendo o primeiro relativo às dimensões 0D, 1D, 2D e 3D e o segundo, relativo às variações de forma, de tamanho, de orientação e de cor.

Estas distinções, segundo Duval (2004), permitem definir os elementos constituintes de uma figura e assim determinar quais elementos irão funcionar como unidades figurais elementares. Entretanto, o autor afirma que das variáveis qualitativas apenas uma é pertinente para a determinação de uma unidade de base representativa para o estudo das figuras geométricas: a variável relativa à forma, pois toda figura combina uma variável visual qualitativa (forma) e uma variável de dimensão, permitindo assim definir as unidades figurais elementares para o registro das representações geométricas.

Desta forma, nesse trabalho focaremos o estudo da visualização geométrica nas variáveis referentes à forma e a dimensão assim como explicitado por Duval (2004).

Baseado na combinação das variáveis visual qualitativa e dimensional, são definidas as unidades figurais elementares para o registro das representações geométricas, como mostra a Figura 6, onde o autor se baseia em três dimensões: a dimensão 0 que faz referência ao ponto, à dimensão 1 que faz referência a tudo que é linear e a dimensão 2 que faz referência as superfícies.

Figura 6 - Classificação das unidades figurais elementares.

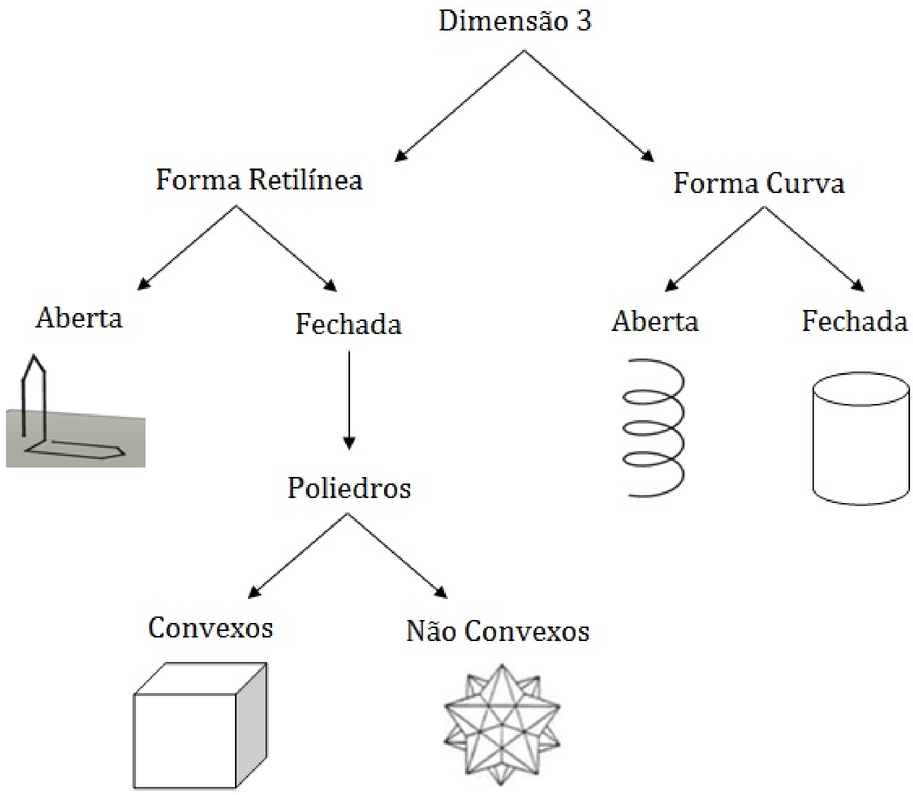


Fonte: Duval, 2004, p. 159.

No que tange as dimensões, Duval (2004) apenas refere-se a dimensão 2, pouco se referindo à dimensão 3, mas não podemos nos esquecer que há figuras espaciais, tradicionalmente com representações no plano, mas que com o auxílio de softwares de geometria dinâmica podem ser facilmente representadas no espaço, além de poderem ser manipuladas sob várias pontos de vista.

Para o estudo da geometria espacial faz-se necessário a classificação das unidades figurais de dimensão 3, complementando as unidades figurais elementares definidas na Figura 6. As unidades figurais espaciais são classificadas em formas retilíneas e curvas, que se subdividem em abertas e fechadas, como mostra a Figura 7, onde as formas retilíneas fechadas que são classificadas em poliedros convexos e não convexos, incluem também os troncos dos poliedros e as formas curvas fechadas englobam os corpos redondos e os cortes que podem ser feitos.

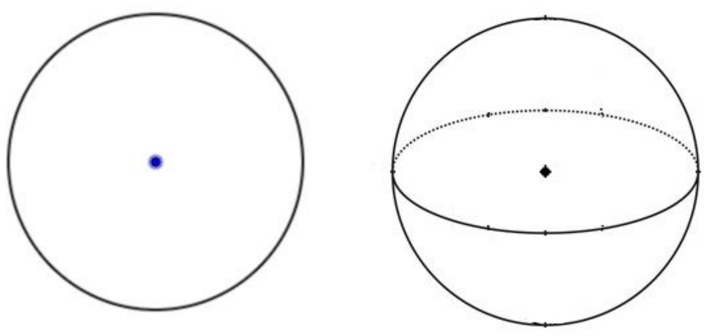
Figura 7 - Classificação das unidades figurais de dimensão 3.



Fonte: Próprio da autora

Ao analisar as figuras geométricas em função de tais unidades, verifica-se que toda figura geométrica é sempre uma configuração de, no mínimo, duas unidades figurais elementares, como, por exemplo, um círculo (dimensão 2) e seu centro (dimensão 0) ou uma esfera (dimensão 3) e seu centro (dimensão 0), conforme Figura 8.

Figura 8 - Circunferência e Esfera.



Fonte: Próprio da autora.

Segundo Duval (2004), no registro das figuras há predominância perceptiva das unidades de dimensão superior sobre as de dimensão inferior, enquanto que no registro discursivo há predominância dos objetos representados pelas unidades figurais de dimensão 0D ou 1D, ou seja, no registro figural é mais fácil perceber um quadrado (dimensão 2) do que os segmentos de reta (dimensão 1) que formam o quadrado, enquanto que em um teorema ou propriedade notam-se as unidades figurais a medida que elas estão sendo enunciadas para então, no final, se perceber a figura num todo.

O tratamento da situação matemática representada pela figura requer uma restrição a unidades figurais inferiores, mas a percepção focaliza as unidades figurais superiores. Para o autor, é neste impasse de articulação do registro figural com o discurso, que se encontra a complexidade da atividade geométrica, como exemplificado no caso do paralelogramo:

> Uma sequência de representações em que cada uma mostra as duas unidades figurais de dimensão 1 vinculadas na definição pela propriedade de paralelismo ou pela de igualdade, é uma representação semioticamente mais adequada que apenas uma representação que impõe a imagem de dimensão 2. (DUVAL, 2004, p. 160 – tradução nossa)

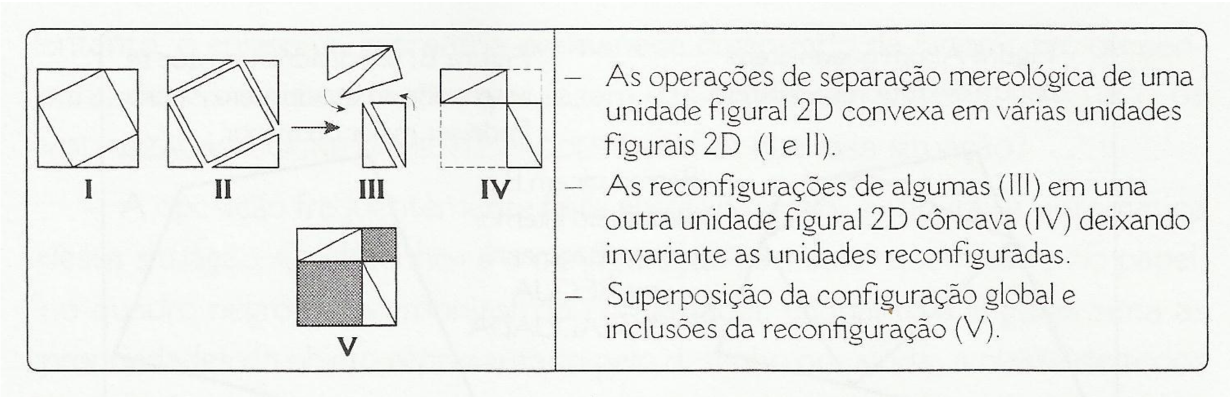
Para Duval (2004) as figuras formam um sistema semiótico específico e são as operações figurais, que permitem a transformação de uma figura em outra, que nos permite “entrar na maneira matemática de ver em geometria” (Duval, 2011, p. 85)

> Existe, portanto, um salto cognitivo considerável entre a maneira normal e a maneira matemática de ver. Na maneira normal de ver, não levamos jamais em conta a dimensão das unidades figurais que reconhecemos e não temos preocupação de fazer variar essa dimensão para reconhecer outras unidades figurais que não vemos, mas que vão se tornar mais importante que aquelas que vemos. Isso é uma variação que se opera no olhar e não por um deslocamento no monitor. Naturalmente, isso exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas. (DUVAL, 2011, p. 88)

Existem dois tipos de operações figurais: as que se baseiam na percepção e que transformam unidades figurais em outras de mesma dimensão e aquelas que dependem das operações de desconstrução dimensional.

Para exemplificar as primeiras operações que transformam unidades figurais em outras de mesma dimensão vejamos a Figura 9, em que uma figura de dimensão 2 é recortada e reagrupada formando outras figuras de mesma dimensão em tratamentos do registro figural.

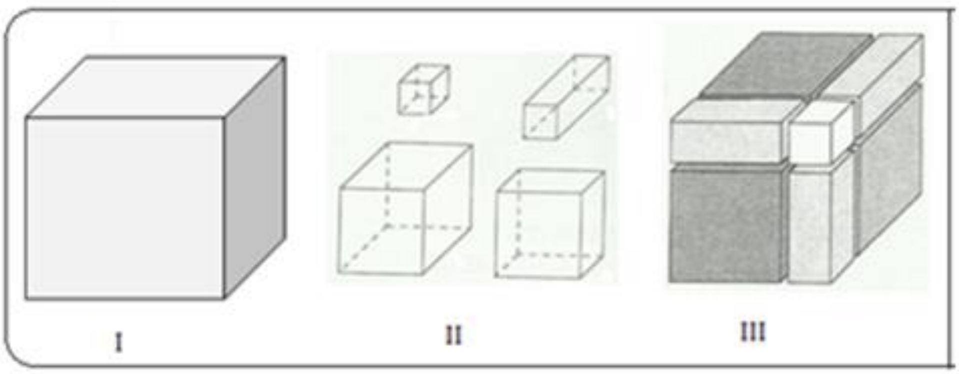
Figura 9 - Tratamentos figurais em dimensão 2.



Fonte: Duval, 2011, p. 89.

No caso de figuras de dimensão 3, como mostra a Figura 10, temos o mesmo tipo de operação figural. Podemos ver que o cubo foi desmembrado em outras figuras de mesma dimensão e reagrupado. Com isso, verificamos que os tratamentos figurais de separação mereológica, reconfiguração e superposição podem ocorrer também na dimensão 3, apesar de Duval (2011) só se situar na dimensão 2.

Figura 10 - Tratamentos figurais em dimensão 3.



Fonte: Kaleff, 2003, p. 93.

A operação figural que se baseia na percepção e que transforma unidades figurais em outras de mesma dimensão está relacionada ao papel heurístico das figuras. Para Duval (2004), falar do papel heurístico de uma figura é falar da conduta de abdução[1] que guia a dedução, mas para isso é necessário saber quais tratamentos figurais delineiam esta conduta de abdução de modo a evitar que dependam essencialmente de conhecimentos matemáticos, o que relativiza o caráter heurístico das figuras. Esses tratamentos estão vinculados às possibilidades de modificação que surgem das relações das partes com o todo e que podem ser efetuadas física ou mentalmente, sem depender de um conhecimento matemático. Já a conduta de abdução está ligada a interação entre uma pergunta de ordem matemática e a efetuação de tratamentos figurais pertinentes a essa pergunta.

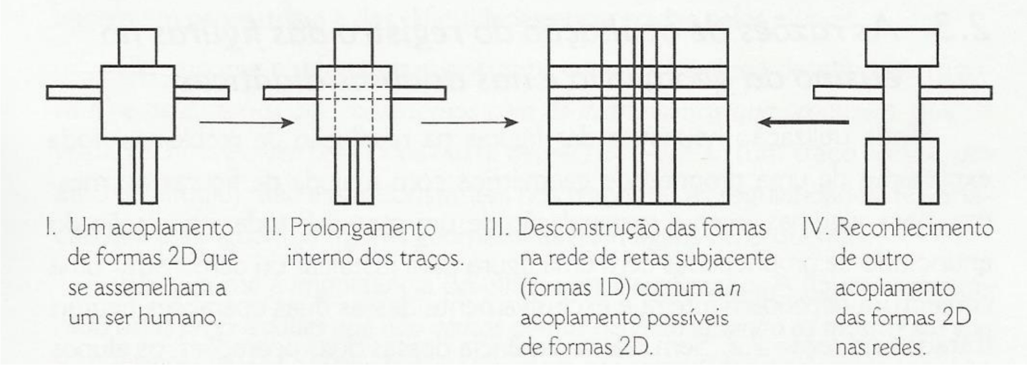
Para compreender como as figuras permitem a conduta de abdução é necessário, segundo o autor, distinguir dois níveis de apreensão das figuras geométricas: a percepção e a apreensão operatória. A percepção é responsável pelo reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada. A apreensão operatória por sua vez é responsável pelas modificações possíveis das relações da parte com o todo das unidades figurais reconhecidas e da figura dada.

As outras operações, que dependem de desconstrução dimensional, exemplificamos na Figura 11, em que podemos observar que uma figura de dimensão 2 foi analisada como um conjunto de segmentos de retas de dimensão 1 que ao serem prolongados formaram uma “malha” em que é possível reconhecer outras formas de dimensão 2.

---

[1] O termo abdução baseia-se na filosofia de Pierce que o define como “o processo de formação de hipóteses explicativas” (SILVA, A. P. R. C. F, 2006-2007, p. 13).

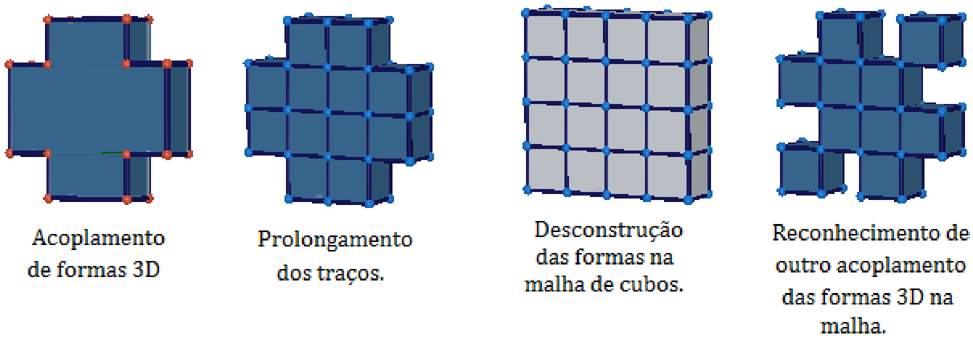
Figura 11 - Operações figurais em dimensão 2.



Fonte: Duval, 2011, p. 89.

Na Figura 12 temos uma desconstrução dimensional realizada em uma figura de dimensão 3 em que algumas arestas (dimensão 1) foram prolongadas de modo a gerar uma malha de cubos em que é possível obter outras figuras de dimensão 3.

Figura 12 - Operações figurais na dimensão 3.



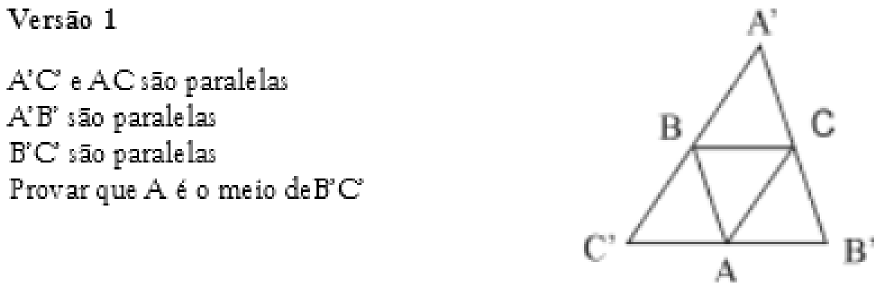
Fonte: Próprio da autora.

Para Duval (2011) na operação figural de desconstrução dimensional é mais fácil reconhecer unidades figurais de duas dimensões quando estão separadas do que quando estão integradas em uma mesma configuração devido a dois fatores:

> Em primeiro lugar, certas unidades figurais de duas dimensões predominam sobre outras unidades também de duas dimensões. Em segundo lugar, uma figura geométrica contém, com frequência, mais unidades figurais elementares que as requeridas para construí-la. (DUVAL, 2004, p. 163 – tradução nossa).

Na Figura 13 é possível verificar seis unidades figurais de dimensão 0 ($os\ pontos\ A, A', B, B', C\ e\ C'$), seis unidades figurais de dimensão 1 ($\overline{A'C'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$) como também unidades figurais de dimensão 2, tais como cinco triângulos ($\Delta A'BC, \Delta ABC', \Delta ABC, \Delta AB'C, \Delta A'B'C'$), três paralelogramos ($AC'BC, AB'BC, ABA'C$) e três trapézios ($ACA'C', ABA'B', C'BCB'$), sendo que para que se atinja o objetivo da questão é necessário perceber a existência dos paralelogramos.

Figura 13 - Problema proposto em uma pesquisa a estudantes que finalizavam o 9º ano.



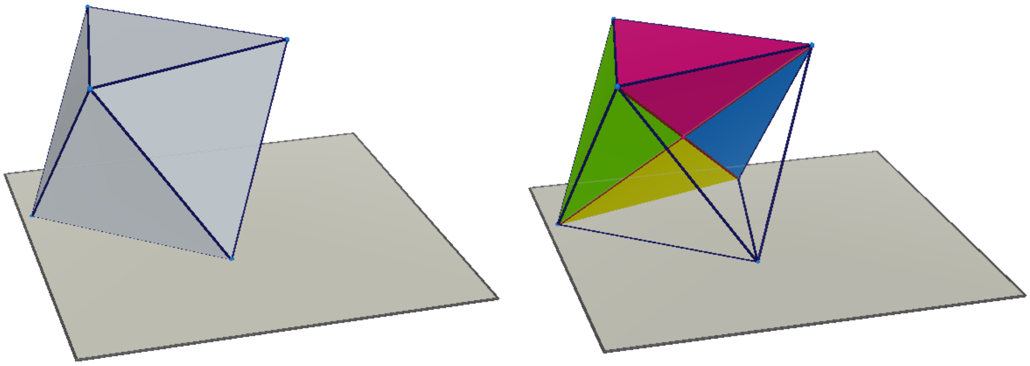
Fonte: Duval, 2004, p. 163.

Segundo Duval (2004), esta figura pode ser vista espontaneamente de dois modos: como um triângulo pequeno inscrito em um triângulo grande ou como um mosaico composto por quatro triângulos pequenos independentes. Para se reconhecer os paralelogramos

> é necessário, por um lado, neutralizar a organização perceptiva que faz predominar os contornos dos “triângulos” sobre os contornos dos “quadriláteros” e, por outro, ver separadas unidades figurais que de fato se recobrem parcialmente e que por isso tem partes do contorno em comum. (DUVAL, 2004, p. 163 – tradução nossa).

A mesma ideia pode ser aplicada às figuras de dimensão 3, como, por exemplo, o octaedro que pode ser decomposto em oito tetraedros também de dimensão 3, como mostra a Figura 14, ou ainda pode ser desconstruído dimensionalmente em oito triângulos (2D), doze arestas (1D) e seis vértices (0D).

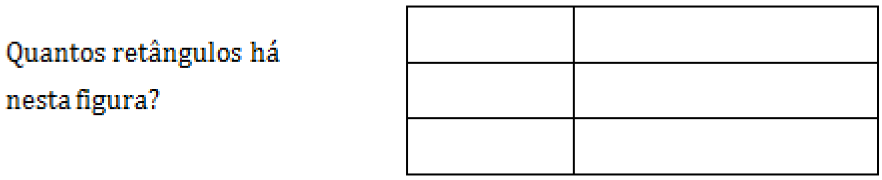
Figura 14 - Octaedro (esquerda) e Octaedro formado por tetraedros (direita).



Fonte: Próprio da autora.

Para o autor a introdução de uma figura geométrica é necessariamente discursiva, devendo “haver uma interação entre os tratamentos figurais que por abdução guiam a etapa heurística e os tratamentos discursivos que por dedução constituem a etapa baseada nos objetos representados na figura” (DUVAL, 2004, p. 168). Entretanto, essa interação nem sempre é congruente. Na Figura 15 vemos um caso em que não há congruência entre o discurso na língua natural e a organização perceptiva da figura, que constitui o problema.

Figura 15 - Problema proposto por Balacheff.



Fonte: Duval, 2004, p. 169.

Neste caso, o autor afirma que a resolução do problema depende da análise que se faz da figura, onde os retângulos podem ser considerados de três modos:

> - elementos de um mosaico: os retângulos pequenos (dimensão 2) são vistos como unidades figurais elementares, o que não provoca nenhuma modificação na figura;
> - interseção de duas faixas: é necessário ver unidades figurais de forma retilínea e aberta, para o qual é necessário prolongar todos os traços dados;
> - conjunto de quatro pontos: é necessário ver agrupamentos de unidades figurais de dimensão 0, para o qual se requer esquecer todos os demais traços. (DUVAL, 2004, p. 170)

Entretanto, afirma que a visão que se impõe é de um retângulo grande formado por vários retângulos pequenos.

Para o autor, a articulação entre figura e discurso, na resolução de um problema em geometria, deve efetuar-se em dois níveis de funcionamento do raciocínio dedutivo: o local e o global. A articulação local é a que se efetua nos limites da dedução, ou seja, se apoia nas unidades figurais de dimensão 0 ou 1 e nas expressões referenciais. Já a articulação global é a que concerne ao processo de resolução de problemas, ou seja, se apoia na correspondência entre visão de uma sequência de subfiguras e o encadeamento dos passos dedutivos.

A apreensão operatória é necessária para que as figuras possam cumprir sua função de suporte intuitivo. Duval (2004) afirma que essa apreensão permite ver desprender-se de uma figura dada, várias subfiguras, que não são imediatamente perceptíveis à primeira vista.

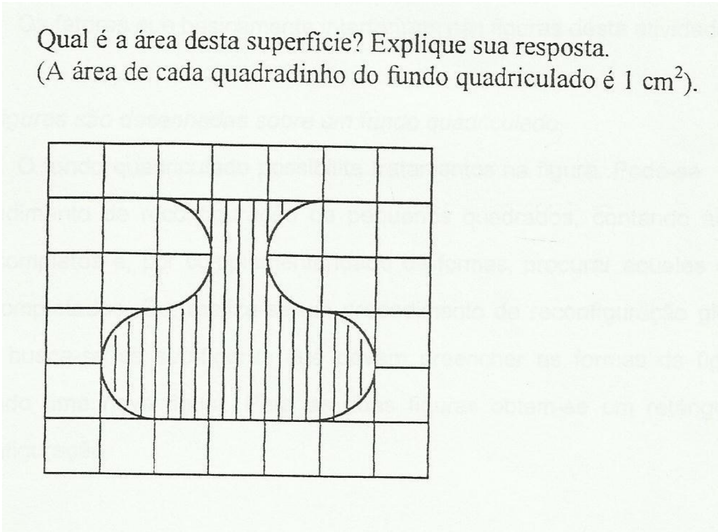
Para o desenvolvimento da apreensão operatória devem ser consideradas três condições:

> - A resolução do exercício proposto não deve implicar nenhuma atividade de raciocínio que exija a utilização de definições ou teoremas.
> - A resolução do exercício proposto não deve implicar nenhuma mudança de dimensão na sequência de subfiguras.
> - O exercício proposto deve ter lugar em uma serie organizada em função da variação sistemática dos fatores de visibilidade que facilite ou retarde a apreensão operatória (Padilha, 1992). Este ponto é essencial para colocar em ação tratamentos figurais em todos os "casos de figura" e para reforçar a conduta de abdução. (DUVAL, 2004, p. 176)

São exemplos de apreensão operatória a reconfiguração, a rotação feita mentalmente, a secção de um objeto de dimensão 3, dentre outros.

Na Figura 16 temos um exemplo de atividade que requer a reconfiguração para a apreensão operatória que permite identificar a complementaridade das formas que condizem à solução da atividade.

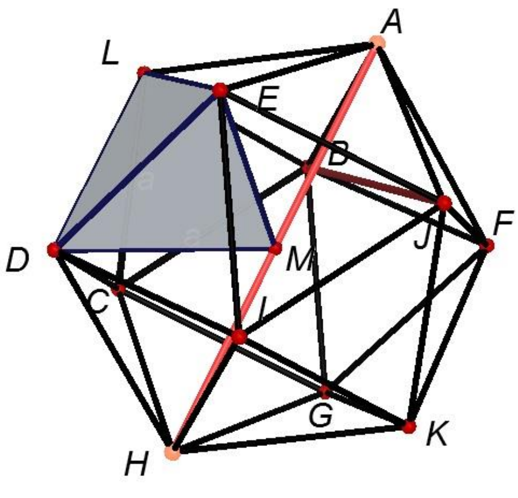
Figura 16 - Atividade que requer a operação de reconfiguração.



Fonte: Bolda, 2004, p.81.

A reconfiguração também pode ser aplicada para uma figura de dimensão 3, como mostra a Figura 17, em que essa apreensão operatória permite o cálculo da medida do volume.

Figura 17 - Reconfiguração de uma figura em dimensão 3.



Fonte: Possani, 2012, p. 129.

Portanto, para visualizar é preciso ter consciência das operações figurais e ter mobilidade de focalização dimensional do olhar para reconhecer as múltiplas unidades figurais que se fundem no reconhecimento imediato de qualquer forma e para que isso ocorra é necessário:

> Em primeiro lugar, propor tarefas em que se exclua toda atividade de medida e de cálculo. [...] Em segundo lugar, a organização das tarefas não pode ser a mesma para as operações merológicas de reconfiguração e para aquelas de desconstrução dimensional. As operações merológicas de reconfiguração se apoiam sobre a percepção [...] e a desconstrução dimensional se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades figurais [...] que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais. (DUVAL, 2011, p. 92-93)

Assim, para a análise das atividades da sequência do Possani (2012), sob o ponto de vista da visualização devemos observar se a figura cumpre seu papel heurístico, se permite a realização de tratamentos específicos, ou seja, tratamentos figurais e das apreensões no registro figural, a mais recorrente é a apreensão operatória, por se referir as modificações figurais.

3 ESTUDO DIDÁTICO

Neste capítulo analisaremos uma sequência didática para o cálculo da medida do volume do icosaedro constante no trabalho de Possani (2012) para responder a nossa questão de pesquisa.

3.1 Critérios de Análise

Possani (2012) teve como objetivo investigar a apropriação do cálculo da medida do volume do icosaedro regular, por alunos do 3º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de atividades mediadas pelo *software Cabri* 3D. Diante das considerações feitas, este trabalho tem por objetivo analisar por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática para a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro, a fim de identificar elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização.

Analisaremos cada atividade que compõe a sequência de modo a verificar se permite que a figura cumpra seu papel heurístico, se permite realização de tratamentos figurais, quais apreensões no registro figural ocorrem. Conforme o caso, podemos sugerir alterações que acreditamos permitir o desenvolvimento da visualização.

3.2 Análise das atividades

A sequência é composta por seis atividades, que correspondem a um trecho do problema dos anéis de diamante. Como nosso foco é na atividade, supriremos os trechos da história, indicando apenas as questões que compõem cada atividade.

Na primeira parte da sequência Possani (2012) procurou evidenciar os vértices, arestas e faces do icosaedro de modo que os alunos pudessem caracterizar esse poliedro, conforme a atividade 1.

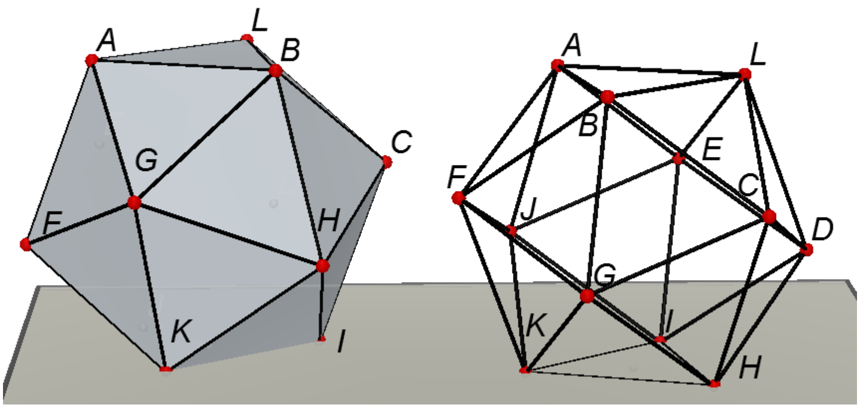
Atividade 1

a) Abra a figura[2] arquivo 4 e movimente-a. Quantos vértices possui o icosaedro regular representado?
b) Que tipo de triângulo forma a face do icosaedro regular?
c) Quantas arestas e faces possui o icosaedro regular?
d) A partir de suas respostas nos itens anteriores, defina o que é um icosaedro regular.

Fonte: Possani, 2012, p. 128.

Ao abrir o arquivo 4 solicitado por Possani (2012), vemos duas figuras, conforme Figura 18, porém não há necessidade de duas figuras para responder os itens *a*, *b*, *c* e *d* da atividade 1, uma vez que o software utilizado é de geometria dinâmica, permitindo a movimentação da figura.

Figura 18 - Figuras do arquivo 4.



Fonte: *Possani, 2012, p. 82.*

Para responder o item *a* é necessário a movimentação da figura para que se faça a contagem dos vértices nomeados de A a L. Nesse item há a conversão do registro figural para o registro numérico.

Para responder o item *b* é necessário saber o significado de poliedro regular, assim saberá que os triângulos que formam as faces são todos

[2] Embora o autor faça referência a uma figura, o arquivo 4 contém duas figuras que podem ser movimentadas separadamente. Por esse motivo, o item a poderia ser reescrito da seguinte maneira: Abra o arquivo 4 e movimente as figuras exibidas. Quantos vértices possui o icosaedro regular representado?

equiláteros. Nesse item há a conversão do registro figural para o registro de língua natural.

Para responder o item *c* é necessário mais uma vez movimentar a figura e contar as 20 faces e as 30 arestas Nesse item há a conversão do registro figural para o registro numérico.

Para responder o item *d* é necessário articular as respostas dos itens anteriores, definindo o icosaedro regular como um poliedro regular composto por 20 faces em forma de triângulos equiláteros.

Com relação à visualização, essa atividade permite que a figura cumpra seu papel heurístico à medida que auxilia na resolução dos itens propostos e continuaria cumprindo esse papel mesmo sendo apenas uma figura e não duas, como mostrado na Figura 18. A atividade não permite que sejam efetuados tratamentos figurais nem que se utilize a apreensão operatória, pois nenhuma modificação é feita na figura para atingir os objetivos de cada item.

Na segunda parte da sequência Possani (2012) procurou evidenciar que o icosaedro regular é composto por pirâmides congruentes, conforme a atividade 2.

Atividade 2

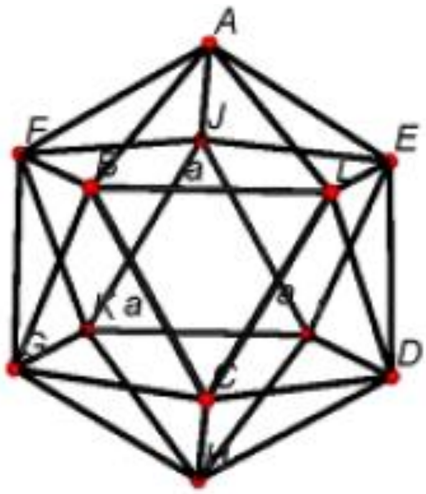
a) Abra o arquivo atividade 5.
b) Construa as diagonais $\overline{AH}$ e $\overline{BJ}$. Essas diagonais são chamadas de diagonal maior e diagonal menor respectivamente. Salve o arquivo nomeando-o como: figura 5.
c) Construa o ponto médio da diagonal maior. Nomeie-o de M. Salve a figura.
d) Construa uma pirâmide de vértice M e de base em uma das faces do icosaedro. Salve sua construção.
e) Quantas pirâmides congruentes e de vértice M podemos construir?

Fonte: Possani, 2012, p. 129.

Ao abrir o arquivo da atividade 5 verificamos que Possani (2012) nomeou a medida das arestas do icosaedro pela letra a, Figura 19, pois na atividade 1 já foi verificado que as faces do icosaedro são formadas por triângulos equiláteros.

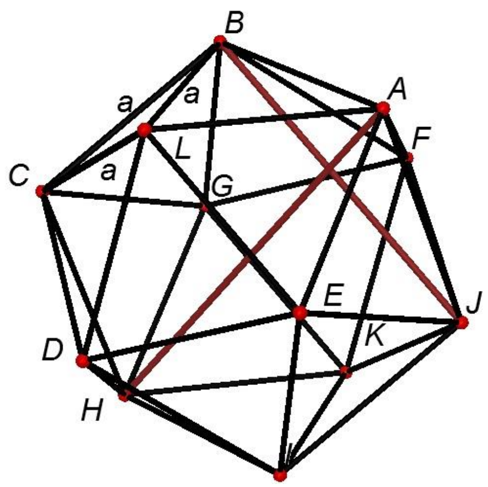
Fonte: *Possani, 2012, p 85.*

Figura 19 - Figura do arquivo atividade 5.



No item *b* recorre-se a apreensão sequencial para a construção das diagonais. Possani (2012) nomeia $\overline{AH}$ de diagonal maior e $\overline{BJ}$ de diagonal menor, mas não justificativa o porquê desta nomeação, pois no icosaedro existem outras diagonais. Após a construção das diagonais, temos a seguinte figura, como vemos na Figura 20.

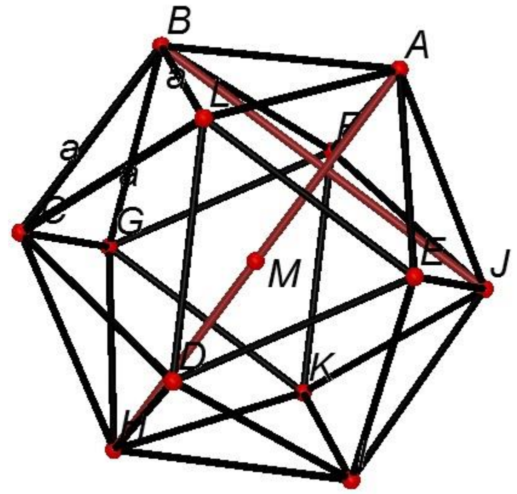
Figura 20 – Construção das diagonais AH e BJ.



Fonte: Próprio da autora.

No item *c* também se recorre à apreensão sequencial para a construção do ponto médio da diagonal $\overline{AH}$. Após a construção do ponto médio, temos a Figura 21.

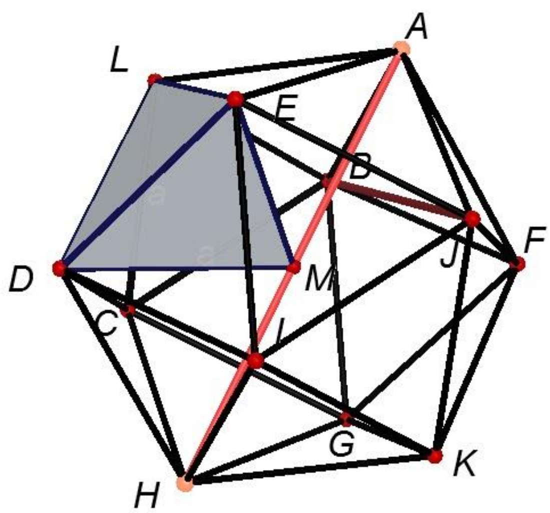
Figura 21 - Ponto médio M da diagonal maior AH.



Fonte: Próprio da autora.

No item *d* também se recorre à apreensão sequencial para a construção da pirâmide triangular em que M é um dos vértices e a base deve coincidir com uma das faces do icosaedro regular, como vemos Figura 22.

Figura 22 - Pirâmide que compõe o icosaedro regular.



Fonte: *Possani, 2012, p.129.*

Para responder o item *e* é necessário recorrer à apreensão perceptiva de modo a identificar que o icosaedro pode ser dividido em subfiguras, ou seja, pode ser reconfigurado em 20 pirâmides triangulares. Nesse item há conversão do registro figural para o registro numérico.

Com relação à visualização, essa atividade permite que a figura cumpra seu papel heurístico à medida que auxilia na resolução dos itens propostos, permite que sejam efetuados tratamentos figurais, no caso, a reconfiguração do icosaedro em 20 pirâmides triangulares e também permite a utilização da apreensão figural, pois várias modificações são feitas na figura inicial para atingir os objetivos da atividade. Entretanto, a percepção dos alunos poderia ser melhor explorada ao trabalhar as diagonais do icosaedro e suas características para que eles pudessem construir significado para a classificação das diagonais maior e menor.

Na terceira parte da sequência Possani (2012) procurou obter a área da base da pirâmide triangular, conforme a atividade 3. Porém, não evidenciou que se sabendo a medida do volume de uma pirâmide é possível calcular a medida do volume do icosaedro regular, deste modo, a partir dessa atividade os alunos passam a seguir uma "receita de bolo" sem ter ideia de onde irão chegar realizando todo esse passo a passo. Para calcular a medida do volume da pirâmide triangular são necessárias as medidas da área da base e da altura da pirâmide, por isso o autor começou com o cálculo da medida da área da base da pirâmide triangular.

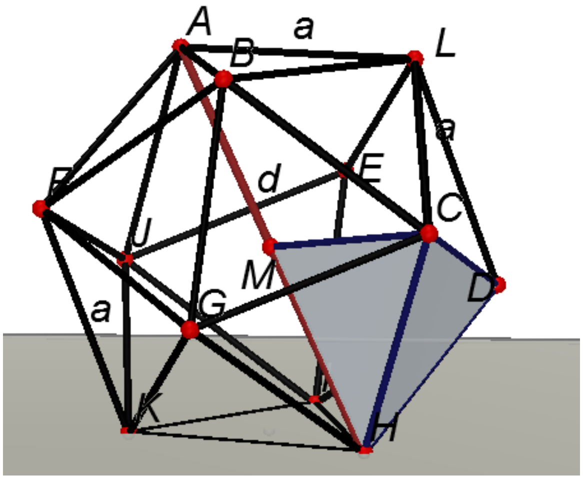
Atividade 3

a) Abra o arquivo atividade 6.
b) Qual a medida da aresta lateral da pirâmide triangular em função de ***d***? Justifique a sua resposta.
c) Qual a medida da aresta da base da pirâmide triangular? Justifique a sua resposta.
d) Qual a medida da área da base da pirâmide triangular? Justifique a sua resposta.

Fonte: Possani, 2012, p. 130.

Ao abrir o arquivo da atividade 6 verificamos que Possani (2012) nomeou a medida da diagonal maior $\overline{AH}$ do icosaedro regular de d, conforme a Figura 23.

Figura 23 - Figura do arquivo atividade 6.



Fonte: Próprio da autora.

Para responder o item *b* é necessário perceber que a aresta lateral da pirâmide coincide com a metade da diagonal maior $\overline{AH}$ cuja medida é d, logo, a medida da aresta lateral da pirâmide triangular é dada por $\frac{d}{2}$, ou seja, recorre-se à desconstrução dimensional da figura para atingir o objetivo da questão, pois é necessário perceber que a representação da pirâmide (3D) é composta por quatro faces triangulares (2D), cada face triangular é formada de três arestas (1D) e que uma dessas arestas coincide com a metade da diagonal maior do icosaedro. Nesse item há conversão do registro figural para o registro algébrico.

Para responder o item *c* é necessário perceber que as arestas da base da pirâmide triangular coincidem com as arestas do icosaedro, cuja medida é a, ou seja, mais uma vez recorre-se a desconstrução dimensional da figura para atingir o objetivo da questão, pois é necessário perceber que cada pirâmide (3D) é composta por quatro faces triangulares (2D), cada face triangular é formada três arestas (1D). Sendo uma face triangular coincidente com a face do icosaedro regular, temos que as arestas também são coincidentes, logo possuem a mesma medida. Nesse item há conversão do registro figural para o registro algébrico.

Para responder o item *d* é necessário identificar que se trata de um triângulo equilátero, pois, como visto nos itens anteriores, as três arestas da base da pirâmide triangular coincidem com as arestas do icosaedro regular e, por isso, possuem a mesma medida.

A partir dai, calcula-se a medida da área por meio da fórmula da medida da área para triângulo equilátero $\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$ ou utiliza-se o teorema de Pitágoras para descobrir a medida da altura do triângulo $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Em seguida, utiliza-se a fórmula para o cálculo da medida da área de um triângulo $A = \frac{1}{2}.a.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Nesse item há conversão do registro figural para o registro algébrico.

Com relação à visualização, essa atividade permite que a figura cumpra seu papel heurístico à medida que auxilia na resolução dos itens propostos, permite que sejam efetuados tratamentos figurais e também permite a utilização da apreensão figural, pois várias modificações são feitas na figura inicial para atingir os objetivos da atividade.

Na quarta parte da sequência Possani (2012) procurou obter as medidas das diagonais do icosaedro regular em função da medida do lado do icosaedro regular, conforme a atividade 4.

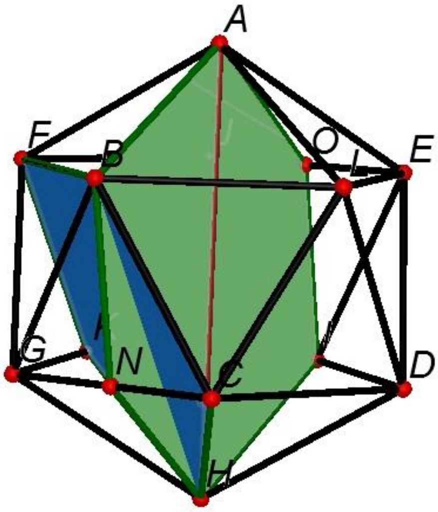
Atividade 4

a) Abrir o arquivo atividade 7a e movimentar a figura. Identifique quais polígonos foram construídos no icosaedro regular.
b) Observe que os dois polígonos têm em comum o segmento $\overline{BH}$. Determinar a medida do segmento $\overline{BH}$ em função da medida do lado do Icosaedro regular.
c) Determinar a medida do segmento $\overline{AH}$ em função da medida do lado do Icosaedro regular.

Fonte: Possani, 2012, p. 131.

Na Figura 24 temos o arquivo citado no item *a* da sequência, no qual é pedido para identificar os polígonos construídos.

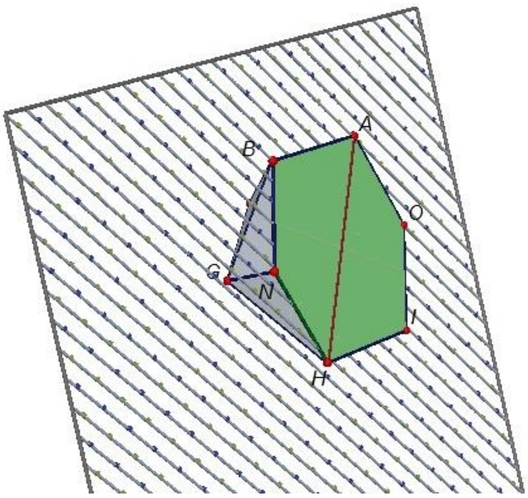
Figura 24 - Figura do arquivo 7a.



Fonte: Possani, 2012, p. 95.

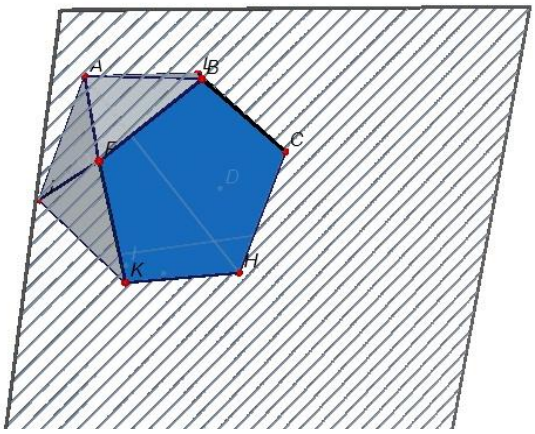
Para a identificação do hexágono $ABNHIO$ e do pentágono $BCHKF$ recorre-se a apreensão perceptiva, responsável pela apreensão espontânea e imediata de uma figura. Por meio de cortes feitos no icosaedro com o auxílio do Cabri 3D é possível uma melhor visualização do hexágono e do pentágono como mostram as Figura 25 e Figura 26, respectivamente. Nesse item há a conversão do registro figural para o registro da língua natural.

Figura 25 – Corte no icosaedro gerando o hexágono ABNHIO.



Fonte: Próprio da autora.

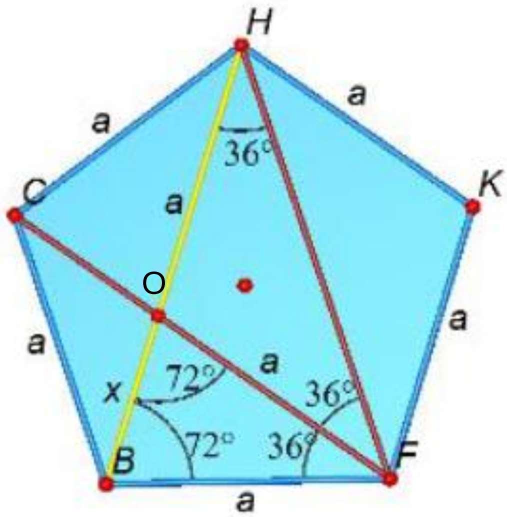
Figura 26 - Corte no icosaedro gerando o pentágono BCHKF.



Fonte: Próprio da autora.

Para responder o item *b* recorre-se a apreensão perceptiva para verificar que $\overline{BH}$ é comum ao hexágono e ao pentágono. Para o cálculo da medida de $\overline{BH}$ em função da medida do lado do icosaedro regular (a) é necessário explorar as diagonais do pentágono e seus ângulos internos por meio da semelhança de triângulos. Faz-se necessário aqui o emprego da apreensão operatória, responsável pelas modificações que serão feitas na figural inicial e pela organização perceptiva que essas modificações apontarão para obter novos elementos que levarão à solução. Possani (2012) fornece o arquivo 7b para ajudar na resolução desse item, conforme Figura 27.

Figura 27 - Figura do arquivo 7b.

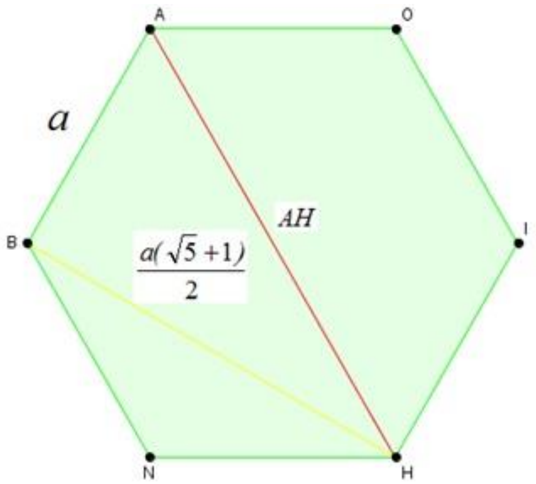


Fonte: *Granja e Costa, 2011 apud Possani, 2012, p. 96.*

Para calcular a medida do segmento $\overline{BH}$, faz-se necessária a conversão do registro figural para o registro algébrico, onde por meio de semelhança de triângulos $(\Delta BFH \sim \Delta BFO)$ obtemos a relação $\frac{a}{x} = \frac{a+x}{a}$ na qual temos que $x = \frac{-l+l\sqrt{5}}{2}$. Como a medida do segmento $\overline{BH} = a + x$, temos que a medida do segmento $\overline{BH}$, em função do lado do icosaedro regular é $\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$.

Para responder o item *c* é necessário recorrer ao hexágono obtido pelo corte do icosaedro. Novamente se faz necessária à apreensão perceptiva para verificar que o segmento $\overline{BH}$ é perpendicular aos lados do hexágono, pois o segmento $\overline{AB}$ que é um dos lados do hexágono é também a altura do triângulo equilátero que compõe a superfície do icosaedro regular, e que juntamente com o segmento $\overline{AH}$ forma-se o triângulo retângulo ABH, conforme Figura 28.

Figura 28 - Hexágono obtido por um corte no icosaedro.



Fonte: *Granja e Costa, 2011 apud Possani, 2012, p. 97.*

Por meio do teorema de Pitágoras é possível calcular a medida do segmento $\overline{AH}$, fazendo-se necessário mais uma vez a conversão do registro figural para o registro algébrico, obtendo-se a seguinte relação: $(AH)^2 = (AB)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (AH)^2 = a^2 + \left(\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}\right)^2 \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}$.

Com relação à visualização, essa atividade não permite que a figura cumpra seu papel heurístico, os alunos seguem apenas uma série de passos sem entender o porquê. Porém, permite que sejam efetuados tratamentos figurais e também permite a utilização da apreensão figural, pois várias modificações são feitas na figura inicial para atingir os objetivos da atividade.

Na quinta parte da sequência o objetivo é o cálculo do volume da pirâmide triangular em função da medida do lado do icosaedro, mas para isso é necessário calcular algumas outras medidas da pirâmide triangular: medida da aresta lateral e medida da altura, conforme a atividade 5.

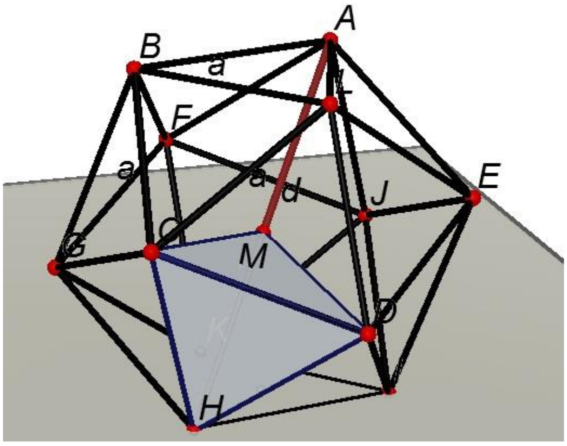
Atividade 5

a) Abra o arquivo atividade 8a e movimente-a. Qual a medida y da aresta lateral da pirâmide triangular em função da medida do lado do icosaedro? Justifique a sua resposta.
b) Agora, abra o arquivo atividade 8b e movimente-a. Qual a medida h da altura da pirâmide triangular em função da medida do lado do icosaedro?
c) Calcule do volume V da pirâmide triangular em função da medida do lado do icosaedro?

Fonte: Possani, 2012, p. 132.

Para responder o item *a* foi dado uma construção pronta, conforme Figura 29.

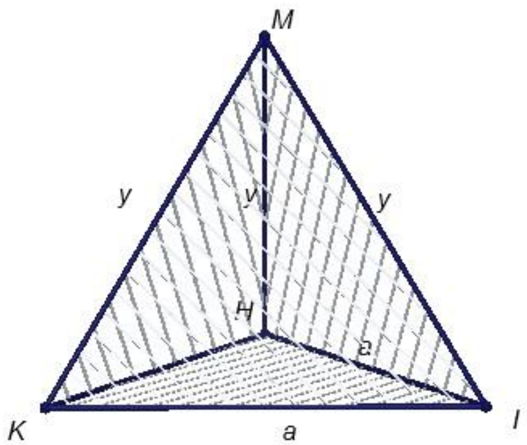
Figura 29 - Figura do arquivo 8a.



É necessário relembrar que na terceira parte da sequência, a medida da lateral da pirâmide triangular foi calculada em função da medida da diagonal maior, obtendo-se a medida de $\frac{d}{2}$ e que na quarta parte da sequência foi calculada a medida do segmento $\overline{AH}$, que é a diagonal maior, em função do lado do icosaedro, obtendo-se $d = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}$.

Portanto, para se obter a medida da lateral da pirâmide em função do lado do icosaedro é necessário fazer uma correspondência entre as medidas, ou seja, uma conversão do registro figural para o registro algébrico e depois tratamentos dentro do registro algébrico, conforme Figura 30: $y = \frac{d}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.

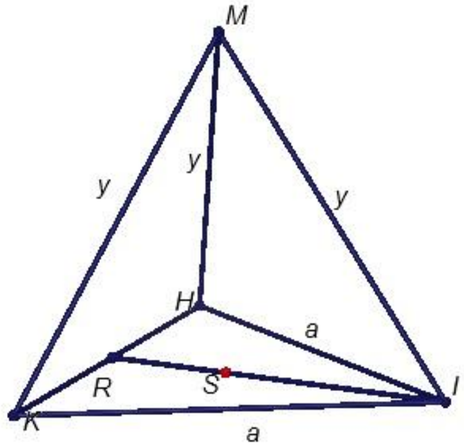
Figura 30 - Medidas da pirâmide triangular.



Fonte: Próprio da autora.

Para responder o item *b* também foi dada uma construção pronta, conforme Figura 31 e é necessário relembrar que a base da pirâmide triangular é um triângulo equilátero cuja altura é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Figura 31 - Figura do arquivo 8b.

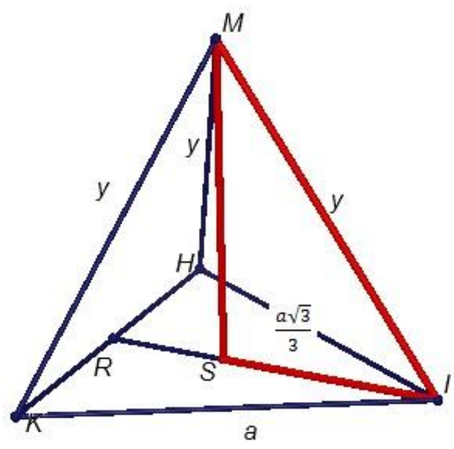


Fonte: Possani, 2012, p. 105.

Por meio da apreensão operatória verifica-se que a altura da pirâmide coincide com os pontos notáveis de um triângulo equilátero (mediatriz, mediana e bissetriz). O ponto de interseção do segmento referente à altura da pirâmide com o segmento referente à altura do triângulo equilátero divide o segmento da altura do triângulo equilátero em dois segmentos segundo a propriedade do baricentro, sendo a medida do segmento $RS = \frac{1}{3}.IR = \frac{1}{3}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ e do segmento $SI = \frac{2}{3}.IR = \frac{2}{3}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ligando-se os pontos I, S e M forma-se um triângulo retângulo pelo qual é possível calcular a medida da altura da pirâmide triangular em função da medida do lado do icosaedro, conforme Figura 32.

Figura 32 - Triângulo retângulo IMS.



Fonte: Própria da autora.

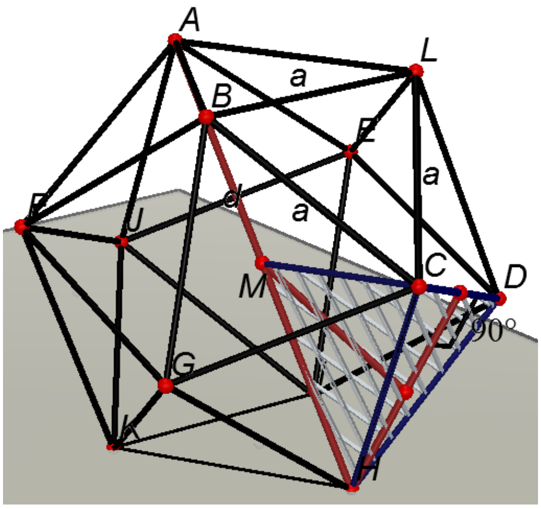
Para efetuar o cálculo é necessária a conversão do registro figural para o algébrico, obtendo-se a relação: $(MI)^2 = (SI)^2 + (MS)^2 \Rightarrow y^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2$. O valor de y que corresponde à medida da aresta da pirâmide triangular foi calculado no item anterior, sendo $y = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$. Logo, por meio de tratamentos no registro algébrico, chega-se a medida da altura da pirâmide: $h = \frac{a\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}$.

Para responder o item *c* os alunos devem lembrar que o cálculo da medida do volume da pirâmide triangular é $V = \frac{1}{3}.Área\ da\ base\ x\ Altura$. Como as medidas da área da base e da altura já foram calculadas, basta substituir na fórmula e fazer os tratamentos algébricos necessários.

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48}$$

Para responder os itens dessa atividade não é necessária uma segunda pirâmide triangular para que os alunos consigam calcular as medida da aresta lateral e da altura da pirâmide, eles poderiam explorar essas medidas na pirâmide construída no próprio icosaedro, como mostra a Figura 33.

Figura 33 - Pirâmide triangular que compõe o icosaedro.



Fonte: Própria da autora.

Com relação à visualização, essa atividade não permite que a figura cumpra seu papel heurístico, os alunos seguem apenas uma série de passos sem entender o porquê e não permite que sejam efetuados tratamentos figurais, porém permite a utilização da apreensão figural, pois várias modificações são feitas na figura inicial para atingir os objetivos da atividade.

Para que a atividade cumprisse o papel heurístico, entendemos que as atividades 3, 4 e 5 poderiam ser substituídas por uma única atividade referente ao cálculo da medida do volume da pirâmide triangular, possibilitando aos alunos explorarem a figura e conjecturarem de que modo chegariam ao objetivo da atividade.

Na sexta parte da sequência o objetivo é o cálculo da medida do volume do icosaedro em relação a medida do volume da pirâmide triangular, conforme a atividade 6.

Atividade 6

Como poderia determinar a fórmula que permite calcular o volume do diamante em forma de icosaedro regular em função do seu lado?

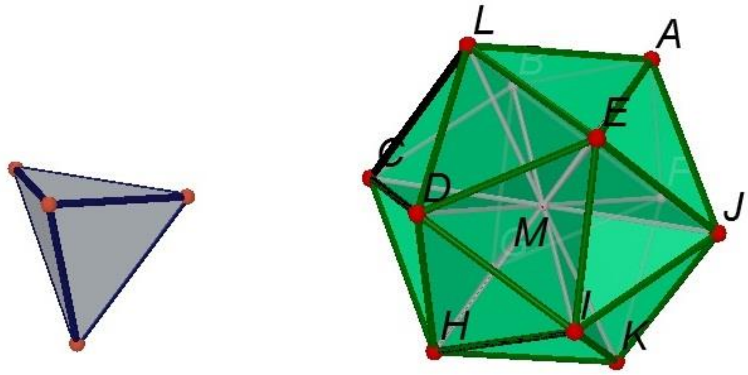
Fonte: Possani, 2012, p. 133.

Como visto anteriormente, o icosaedro é composto por 20 pirâmides triangulares, como mostra a Figura 34, cada uma com medida de volume igual a $\frac{a^3\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48}$ Logo, a medida do volume do icosaedro é $V = 20 \,.\frac{a^3\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48}$, que após tratamentos no registro algébrico resulta em $V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$.

Na Figura 34 a pirâmide triangular foi translada a partir do icosaedro como forma de mostrar que o icosaedro pode ser reconfigurado em 20 pirâmides triangulares congruentes.

Fonte: Própria da autora

Figura 34 - Icosaedro.



O conjunto de atividades que compõe a sequência não permite em sua totalidade o desenvolvimento da visualização, pois falta explorar mais o papel heurístico das figuras e a apreensão operatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da revisão bibliográfica pudemos perceber que há muitas lacunas a respeito do tema visualização, principalmente quando se trata da visualização espacial, o que nos levou a estudar esse tema.

O objetivo deste trabalho foi o de analisar por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática para a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro, a fim de identificar elementos essenciais das configurações envolvidas, a fim de responder nossa questão de pesquisa: **"Quais elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização estão presentes em uma sequência didática para a construção da fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por meio do software Cabri-3D?".**

Com o estudo da visualização embasada na teoria dos Registros de Representação Semiótica pudemos elencar alguns fatores, explicitados por Duval (2004), como necessários para que ocorra o desenvolvimento da visualização de figuras geométricas, tais como a figura cumprir seu papel heurístico, permitir a realização de tratamentos específicos e ocorrer à apreensão operatória que serviram de base para que pudéssemos responder nossa questão de pesquisa.

Na análise da sequência de Possani (2012), percebemos que o papel heurístico da figura, em grande parte das atividades, poderia ter sido melhor explorado se as atividades não ficassem restritas a um passo a passo, ou seja, se os alunos tivessem a oportunidade de explorar a figura para encontrar soluções. Os tratamentos figurais e, consequentemente as apreensões, também poderiam ser mais trabalhadas, pois a maioria das atividades requer a apreensão sequencial e a apreensão perceptiva, pouco se trabalhando com a apreensão operatória. Portanto, o conjunto das atividades que compõe a sequência não permite o desenvolvimento da visualização.

Como pesquisa futura, sugerimos a elaboração de uma engenharia didática em que se apliquem as alterações sugeridas na análise da sequência didática

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, I. A. C.; SANTOS, M. C. A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos. In: **XVIII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico – GRAPHICA**. Artigos. Paraná, 2007. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/AVISUALIZACAO.pdf> Acesso em 17 jun. 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

ALVES, George de Souza. **O uso de softwares de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do ensino médio**. 2004. 200 p. Dissertação (Mestrado em Informática). Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro.

ALVES, Maria da Conceição Amaral. **Geometria Descritiva: um comparativo entre o uso de instrumentos tradicionais de desenho e o computador**. 2008. 141 p. Dissertação (Mestrado em Desenho, Cultura e Interatividade). Departamento de Letras e Artes, UEFS, Feira de Santana.

BECKER, Marcelo. **Uma alternativa para o ensino de Geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano**. 2009. 113 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, UFGRS, Porto Alegre.

BOLDA, Cláudia Regina Flores. **Geometria e Visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração**. 1997. 158 p. Dissertação (Mestrado em Educação). UFSC, Florianópolis.

CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e Representação Gráfica: visualização e interpretação**. 1997. 169 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo.

COSTA, C. Visualização, veículo para educação em Geometria. In: **IX Encontro de Investigação em Educação Matemática**. 2000. Portugal.

COUTINHO, C. P.; CHAVES, J. H.O estudo de caso na investigação em tecnologia educativa em Portugal. **Revista Portuguesa de Educação**, Portugal, p. 221-243, 2002. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/492>. Acesso em: 04 mar. 2013.

DUVAL, R. **Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking**. Basic issues for learning, 1999.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, v. 7, n. 2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012. Disponível em: <www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 23 jul. 2013.

______. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Peter Lang, 2004.

______. ***Semiósis e Pensamento Humano***: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais. Coleção Contexto da Ciência. São Paulo: Livraria Editora da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**. Artigos. Pernambuco, 2004. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/1CC88890589949.pdf> Acesso em 17 ago. 2013.

FOLLADOR, Dolores. **Visualização, desenho e nomeação de figuras tridimensionais representadas no plano: um estudo na 4ª série do Ensino Fundamental**. 2004. 261 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Setor de Educação, UFPR, Curitiba.

GARCIA, Luciane Maia Insuela. **Os processos de visualização e de representação dos signos matemáticos no contexto didático-pedagógico**. 2007. 174 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro.

HERSHKOWITZ, R. Visualização em Geometria – As duas faces da moeda. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 32, pp. 45-61, 1994.

JONES, Keith. **Visualisation, imagery and the development of geometrical reasoning**. Geometry Working Group. Meeting an the University of Birmingham, 20th June 1998. Disponível em: <http://www.bsrlm.org.uk>. Acesso em: 21 mar. 2012.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. 2 ed. Niterói: EdUFF, 2003.

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de curso de Licenciatura em Matemática**. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação). UFPR, Curitiba.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registro de Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

MENEGUZZI, Thatieli. **Os perspectógrafos de Dürer na Educação Matemática: História, Geometria e Visualização**. 2009. 202 p. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Centro de Ciências da Educação, UFSC, Florianópolis.

MORETTI, MÉRICLES THADEU. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**, v. 2, n. 6, Itajaí, 2002. Disponível em: <http://siaiweb06.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180%20>. Acesso em: 17 ago. 2013.

PONTE, J. P. Estudos de caso em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, n. 25, pp.105-132, 2006. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3007>.

Acesso em: 4 mar. 2013.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.** 2012. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D**: um estudo de transformações geométricas no espaço. 2009. 317 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.