

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO-PUC/SP

ROGÉRIO DOS SANTOS LOBO

**O TRATAMENTO DADO POR LIVROS DIDÁTICOS AO
CONCEITO DE DERIVADA**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2012

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO-PUC/SP

ROGÉRIO DOS SANTOS LOBO

**O TRATAMENTO DADO POR LIVROS DIDÁTICOS AO
CONCEITO DE DERIVADA**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Professor Doutor Benedito Antônio da Silva.

SÃO PAULO

2012

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de foto copiadora ou eletrônicos.

Assinatura_____ **São Paulo e Data**_____

Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz Otávio Dias e Neuza Floripes dos Santos Dias, que são as pessoas mais importantes da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a minha família.

À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e ao Professor Doutor Benedito Antônio da Silva, pelo trabalho de orientação, competência, confiança, dedicação e paciência para que este trabalho fosse desenvolvido.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que foram muito importantes para a minha formação.

A todos os Funcionários do Centro de Ciências Exatas da PUC-SP.

Aos amigos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Gilberto Januário, Daniela, João, Fábio, Kátia, Ana, José Fernando e Nara, que estudaram comigo na PUC-SP durante os quatro semestres do curso.

Agradeço à professora Sheyla e ao professor Guido, pela leitura desta obra e pelas informações valiosas sobre a língua portuguesa e da análise do conteúdo dos livros didáticos.

Finalmente, agradeço ao meu professor de História, da época do ensino fundamental, professor José Rogério e ao amigo e colega de trabalho, professor Antônio Carlos “Billy” que me incentivaram a fazer o mestrado na PUC-SP.

Pesquisas revelam que existem grandes dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e, em particular, da Derivada. Elas já têm apontado algumas causas de tais dificuldades. A utilização do livro didático, muitas vezes como um guia das aulas de Cálculo, pode reduzir o estudo da Derivada a algoritmos que levam a uma aplicação imediata de resultados, sem destacar o cerne desse conceito. Dessa forma escolhemos realizar uma pesquisa buscando investigar como livros didáticos abordam esse conteúdo. Para tal apoiamos nos registros de Representação Semiótica de Duval e também nos princípios metodológicos da Análise de Conteúdo de Bardin. Alavancamos a análise sobre o tratamento dado a este tema, por três livros didáticos, focando nos seus textos, enunciados de exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades. Procuramos levantar se os autores articulam os registros de Representação Semiótica de modo a levar a compreensão da Derivada e verificando se há ênfase no aspecto da Taxa de Variação. É importante ressaltar que estes livros figuram como referências bibliográficas de grades curriculares de universidades brasileiras e por isso foram escolhidos como corpus para análise e reflexão. Por meio destas análises pode-se constatar que dos três livros analisados apenas um dá destaque reiterado a expressão Taxa de Variação, uma vez que há grande aplicação prática dessa Variação em diversas áreas de conhecimento, tais como: Engenharia, Economia, Administração, Biologia, etc. Ressaltamos que o livro referenciado é voltado para os estudantes dos cursos de Economia e Administração e cujos conteúdos são abordados questões como: custo, receita, lucro,... marginais que manipulam diretamente a Derivada como Taxa de Variação. Os outros dois livros embora não abordam explicitamente a expressão Taxa de Variação, dão a Derivada um tratamento a partir da Variação.

Palavras-chave: Registros de Representação. Derivada. Taxa de Variação. Livro Didático.

Research has shown that there are huge difficulties when it comes to the teaching and learning of Derivative and Integral Calculus, particularly Derivative. They have already pointed out some of the causes for such difficulties. The usage of the didactic book, for many times as a guide for the Calculus classes, may shorten the study of the Derivative to algorithms, without highlighting the core of this concept. For that reason, a research seeking to look into how didactic books approach this content has been chosen to be carried out. For such a task, support was both found on Duval's records of Semiotics Representation, and on Bardin's Content Analysis. The analysis about the approach given to this theme was revamped, by taking into account three didactic books, focusing on their texts, enunciations of solved exercises, proposed exercises and other activities. An investigation was done on whether the authors articulate among the records of Semiotics Representation leading to the understanding of Derivative and verifying if there is emphasis on the Variation Rate. It is relevant to point out that these books are used as bibliographical references at several prominent Brazilian universities as part of their syllabus and that is why they were chosen as corpus for both analysis and reflection. By means of these analyses one might state that out of the three books which were analyzed, only one provides emphasis to the expression Variation Rate, since there is vast practical application of this Variation in several areas of knowledge, such as: Engineering, Physics and Biology, among others. It must be pointed out that the referred book is aimed at students at the Economy and Business Administration Courses and whose contents are approached in questions such as: cost, revenue, profit.....margins that manipulate the Derivative directly as Variation Rate. The other two books, though not approaching the expression Variation Rate, lend the Derivative some treatment right from the Variation.

Keywords: Records of Representation. Derivative. Variation Rate. Didactic Book.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.....	46
Quadro 2	Registro de Representação semiótica.....	47
Quadro 3	Tratamento.....	48
Quadro 4	Conversão.....	48
Quadro 5	Derivada de uma Função num Ponto.....	74
Quadro 6	Derivada de uma Função.....	76
Quadro 7	Teorema da Função Diferencial.....	79
Quadro 8	Resumo do Livro A.....	82
Quadro 9	Declividade de uma Reta Tangente.....	87
Quadro 10	Taxa de Variação Média e Instantânea.....	89
Quadro 11	Derivada de uma função.....	92
Quadro 12	Explore e Discuta.....	95
Quadro 13	Explorando a Tecnologia.....	96
Quadro 14	Aplicações utilizando a Taxa de Variação.....	97
Quadro 15	Explorando Tecnologia.....	100
Quadro 16	Explore e Discuta.....	101
Quadro 17	Diferenciabilidade e Continuidade.....	101
Quadro 18	Antes de Prosseguir.....	105
Quadro 19	Resumo do Livro B.....	106
Quadro 20	Definição de Derivada.....	111
Quadro 21	Teorema: Derivadas x^n e $\sqrt[n]{x}$	114
Quadro 22	Teorema: Derivadas de e^x e $\ln x$	116
Quadro 23	Teorema: Derivadas das funções trigonométricas.....	118
Quadro 24	Conversão no Livro C.....	121
Quadro 25	Teorema.....	121
Quadro 26	Resumo do Livro C.....	126

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Cálculo do Coeficiente Angular.....	20
Figura 2	Cálculo da área do triângulo ABC, segundo Leibniz.....	30
Figura 3	A descoberta do teorema.....	32
Figura 4	Triângulo Característico.....	33
Figura 5	Cálculo de área.....	35
Figura 6	Definição de coeficiente angular.....	69
Figura 7	Reta Tangente.....	69
Figura 8	Taxa de Variação.....	72
Figura 9	Função não Diferencial.....	77

	APRESENTAÇÃO.....	10
1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	PROBLEMÁTICA.....	13
1.2	A ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	15
2	ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: A DERIVADA.....	18
2.1	NEWTON.....	23
2.2	LEIBNIZ.....	29
2.3	CAUCHY.....	38
2.4	WEIERSTRASS.....	42
3	REFERENCIAL TEÓRICO E PROCEDIMENTO METODOLÓGICO....	44
3.1	REGISTROS E REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	45
3.2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: ANÁLISE DE CONTEÚDO..	53
4	O CONCEITO DE DERIVADA NOS LIVROS ANALISADOS.....	66
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	128
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	134
	ANEXOS.....	137

APRESENTAÇÃO

Único bom ensino é o que adianta ao desenvolvimento

Vygotsky

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina tradicionalmente oferecida em vários cursos na universidade: Matemática, Engenharia, Agronomia, Economia, Administração, Física, entre outros, por se constituir numa ferramenta importante para a resolução de problemas nestas áreas.

Ressaltamos que os estudantes estão tendo o primeiro contato com a disciplina, que no meio acadêmico podem receber diversas nomenclaturas, como por exemplo: Cálculo de Funções de uma Variável, Cálculo I, Matemática I, Matemática Aplicada a Administradores I, etc.

O Conselho Nacional de Educação por meio da resolução CNE/CES 11, de 11 de março de 2002, institui Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de Graduação em Engenharia estabelecendo no Art.4º que a formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos requeridos para o exercício das seguintes competências e habilidades gerais: “aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia [...]”.

O parecer CNE/CNE 67, de 11 de março 2003, indica que os cursos de graduação de Administração devem formar profissionais que revelem as seguintes competências e habilidades:

[...] desenvolver raciocínio lógico, crítico e analítico para operar com valores e formulações matemáticas presentes nas relações formais e causais entre fenômenos produtivos, administrativos e de controle, bem assim expressando-se de modo crítico e criativo diante dos diferentes contextos organizacionais e sociais; [...].

Devido a esta importância e, também a nossa prática docente em cursos de Engenharia e Administração em que alguns questionamentos apareceram, assim como durante a nossa vida acadêmica, no curso de Matemática da Universidade de São Paulo, surgiu o interesse pela pesquisa direcionada ao conceito de Derivada. Portanto, a atenção está focada na proposta da abordagem da Derivada com ênfase na Taxa de Variação proposta nos livros didáticos.

Nos cursos de Cálculo que ministramos é comum o questionamento dos alunos sobre os valores práticos e instrumentais da disciplina por meio de perguntas do tipo: "Pra que serve a derivada?", "Porque devemos estudar a derivada?", "Onde se aplica a derivada no meu dia-a-dia"?, entre outras. Estes questionamentos também serviram de estímulo para que o estudo sobre o a aprendizagem do conceito de Derivada a partir da Taxa de Variação viesse a se tornar o objeto de estudo principal da pesquisa.

Como exemplo podemos citar, que um administrador de empresas possa ter a necessidade de entender que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$ é a Taxa de Variação instantânea da receita quando o nível de vendas é de p unidades, ou mesmo, um engenheiro químico, que precisa entender que a taxa de formação instantânea do produto químico, quando a temperatura for de p graus.

Nessa perspectiva, o objeto de estudo passou a ser o tratamento dado por três livros didáticos ao conceito de Derivada a partir da Taxa de Variação sob o olhar dos Registros de Representação Semiótica, cuja teorização foi desenvolvida por Duval¹.

Buscamos investigar se os livros didáticos, por meio dos textos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades, utilizam os sistemas de registros de representação, relativos ao conteúdo de Derivada de forma a propiciar aos alunos tratamentos e conversões em sua atividade de estudo.

¹ Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação e investiga sobre a aprendizagem matemática. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França.

Para a análise dos livros didáticos, utilizaremos como referência a análise de conteúdo de Bardin² (1977). Tentamos verificar como a introdução à teoria, os exercícios resolvidos, os exercícios propostos e outras atividades é apresentada nos livros relativos ao conteúdo Derivada.

A fim de alcançarmos nosso objetivo desenvolvemos o trabalho em quatro capítulos.

No capítulo I, apresentaremos a problemática, questão de pesquisa e a escolha dos livros didáticos.

No capítulo II, apresentamos o objeto matemático segundo Newton, Leibniz, Cauchy e Weierstras, com ênfase nos objetivos de nosso estudo. No capítulo III, abordamos o referencial teórico, apresentando as noções que julgamos fundamentais da teoria dos Registros de Representações Semióticas e Análise de Conteúdo.

No capítulo IV, relatamos a análise de conteúdo, apresentado nos livros segundo a teoria de Bardin, à luz da teoria dos Registros de Representações Semióticas, destacando como os livros desenvolvem a teoria, os exercícios resolvidos, os exercícios propostos e outras atividades visando a aprendizagem da Derivada, enfocando o tratamento desta como Taxa de Variação.

A seguir apresentamos as considerações finais apontando, uma possível questão de pesquisa para os próximos trabalhos.

²Laurence Bardin é professora-assistente de Psicologia na Universidade de Paris V, aplicou as técnicas da Análise de Conteúdo na investigação psicossociológica e no estudo das comunicações de massas.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

*Sempre me pareceu estranho que todos aqueles
que estudam seriamente esta ciência acabam
tomados de uma espécie de paixão pela mesma.
Em verdade, o que proporciona o máximo de
prazer não é o conhecimento e sim a
aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição,
não é a presença, mas o ato de atingir a meta.*

Gauss

1.1 PROBLEMÁTICA

Diversos estudos na área de Educação Matemática revelam dificuldades dos alunos de Engenharia, Administração, Matemática, Física, entre outros, na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e, em particular, da Derivada. Há constatações que essas dificuldades não são poucas e conduzem às reprovações ou ao abandono do curso.

Barros e Meloni (2006) citam em seu trabalho que: “de acordo com os dados publicados em 2000 pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC, o índice de reprovação e abandono nos cursos iniciais de Cálculo nas universidades brasileiras é de aproximadamente 80%”.

Cury (1999) (apud Campos, 2007) afirma que as dificuldades relacionadas com o ensino de Cálculo nos cursos universitários são comuns aos estudantes universitários de vários países. A autora ressalta que “em geral, os professores seguem uma distribuição de assuntos considerada “padrão” (Função, Limites, Derivada e Integral) e enfatizam, principalmente, o uso de listas de exercícios após a apresentação teórica dos conteúdos.”

Segundo uma pesquisa realizada por Leite, Strentzke e Darsie (2007) com alunos matriculados no segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, revela dados alarmantes: 60% dos entrevistados consideram ter dificuldades de aprendizagem na disciplina; 45% dos estudantes julgam que os fatores que mais contribuem para o baixo rendimento é a defasagem na formação básica em matemática; 30% indicam como causa pouco tempo de estudo; 10%, a metodologia utilizada pelo professor em sala de aula; 10%, a complexidade da matéria; 5% dificuldades de vincular a teoria com a prática e 70% alegaram que a avaliação não melhora a aprendizagem.

Dall'Anese (2000,p.15) em sua pesquisa relata algumas dificuldades observadas ao longo de sua prática docente no ensino e aprendizagem da Derivada: *para os alunos a Derivada é um processo mecânico, algorítmico ou resultado de uma operação; eles tentam decorar regras de derivação e a Derivada parece ter pouco significado e em questões que envolvem este conceito, recorrem a procedimentos-padrão.*

De acordo com relato do autor, Villarreal (1999, p.13):

[...] os estudantes tiveram bom desempenho nas tarefas algorítmicas (por exemplo: cálculo de Derivada),...mas surgiram dificuldades quando representações gráficas estavam envolvidas no cálculo de Taxa de Variação... Poderosos algoritmos produzem uma algebrização que acaba ocultando as ideias essenciais do Cálculo [...]

Diante deste panorama resolvemos focar nosso trabalho no aprendizado da Derivada com ênfase na Taxa de Variação, por entender que se trata de um conceito fundamental do Cálculo Diferencial e Integral com ampla aplicabilidade nos cursos em que esse conceito é um ferramental para resolver problemas sobre fenômenos que envolvem variação.

A seguir citaremos alguns de diversos exemplos da utilização da Derivada.

Na Administração e Economia, a Derivada por meio da Taxa de Variação é largamente utilizada para o cálculo de receita, custo e lucro marginais. Na engenharia elétrica descreve a variação da corrente elétrica num circuito elétrico. Já

na Biologia se aplica na pesquisa da taxa de crescimento de drosófilas de uma cultura. Existem ainda as aplicações a problemas de máximos e mínimos, por exemplo, como minimizar a área a ser utilizada na construção de uma embalagem.

Devido a esta enorme importância, decidimos que nosso estudo tem por objetivo identificar como três livros didáticos apresentam a Derivada como Taxa de Variação Instantânea e se esse enfoque efetua tratamentos e conversões e se promove mudanças de registros de representação semiótica de acordo com a teoria de Duval, na introdução do conceito, por meio dos textos, exercícios resolvidos e exercícios propostos e outras atividades.

É nossa meta verificar se os livros didáticos enfatizam a Taxa de Variação ou fazem como relatado na revisão bibliográfica que sinalizou para o fato de que os alunos "enxergam" a derivada como processo mecânico, receita de cálculo ou resultado de uma operação, levando os alunos a decorar regras de derivação e resolver problemas por meio de procedimentos-padrão.

Em nossa prática docente, é comum escutarmos: "derivando a velocidade, encontra-se a aceleração", e com isso muitas vezes a aplicação direta da "técnica" perde - se a ideia de Taxa de Variação.

Devido às reflexões expostas e a importância de se estudar a Derivada com ênfase na Taxa de Variação formulamos a questão de pesquisa:

"O tratamento dado, por livros didáticos, por meio dos textos, exercícios resolvidos e propostos e outras atividades, sobre derivada, possibilita a articulação entre os registros de representação semiótica levando a compreensão da Derivada e a enfatiza como Taxa de Variação?"

1.2 A ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Em busca de alcançarmos nosso objetivo e responder a questão de pesquisa, foram analisados livros segundo os procedimentos metodológicos baseados na Análise de Conteúdo de Bardin, que orientaram a organização da análise e

subsidiaram a busca da resposta à pergunta de como abordam a Derivada com ênfase na Taxa de Variação? Tal análise foi feita com base nos registros de representação semiótica, analisando os textos, exercícios resolvidos e propostos e outras atividades apresentadas nos livros didáticos. Optamos pelas obras: *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*, *Um Curso de Cálculo (Vol. 1)* e *Matemática Aplicada a Administração e Economia*.

A escolha desses livros se deu a partir da nossa experiência, ministrando aulas de Cálculo Diferencial e Integral para cursos de Engenharia e Administração e também devido a questionamentos do nosso aprendizado da Derivada na época da graduação em Matemática.

Ressaltamos que na nossa prática docente utilizamos os livros *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*, nos cursos de Engenharia, *Matemática Aplicada a Administração e Economia*, nos cursos de Administração e Economia. *Um curso de Cálculo (Vol. 1)* foi utilizado como livro-texto na nossa época de estudante de graduação no curso de Matemática da Universidade de São Paulo.

Esses livros também constam nas ementas e são usados como referências, nas bibliografias, principal ou complementar, em cursos de Cálculo Diferencial e Integral de diversas universidades do Brasil. No anexo apresentamos referências bibliográficas e ementas de algumas universidades brasileiras.

Alguns exemplos: o livro *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração* é utilizado na Universidade Federal do Amazonas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Faculdade de Tecnologia de São Paulo, entre outras; o livro *Um curso de Cálculo (Vol. 1.)* é utilizado na Universidade Federal do Amazonas, Universidade de São Paulo, Universidade Estadual de Campinas, Universidade Estadual de Feira de Santana entre outras e o livro *Matemática Aplicada a Administração e Economia* é utilizado na Fundação Armando Álvares Penteado, Faculdade Vyscaya, Fundação Getúlio Vargas, Faculdades de Ciências Humanas de Cruzeiro, entre outras.

Nos anexos colocamos alguns programas e ementas de Cálculo Diferencial e Integral I de algumas universidades e faculdades brasileiras. Lembramos que esses programas foram obtidos em abril de 2012.

Ressaltamos que geralmente o livro *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração* é utilizado em cursos de Engenharia e Física, o livro *Um Curso de Cálculo (Vol. 1)* geralmente é utilizado em cursos de Matemática e Engenharia e o livro *Matemática Aplicada a Administração e Economia* geralmente em cursos de Administração e Economia.

No capítulo sobre Procedimentos Metodológicos daremos mais algumas justificativas para a escolha destes três livros didáticos.

Em nossa pesquisa, chamaremos de:

- **Livro A:** FLEMING, D. M., GONÇALVES M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006;
- **Livro B:** TAN, S. T. – **Matemática Aplicada a Administração e Economia;** tradução técnica Fábio Armando Tal. 2ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- **Livro C:** GUIDORIZZI, H. G. **Um Curso de Cálculo.** Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985.

CAPÍTULO 2

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: A DERIVADA

*Matemática - a inabalável base das ciências e a
abundante fonte do progresso nos negócios
humanos.*

Barrow

Neste capítulo apresentaremos o conceito de Derivada como foi concebido por Newton e Leibniz, no final século XVII e início do século XVIII, que utilizaram o conceito para resolver problemas de quadraturas e tangentes.

Em seguida apresentamos a definição de Cauchy dada, por volta de 1823, como razão de diferenças de duas quantidades distintas diferentemente de Leibniz que fazia em termos de diferenças infinitamente pequenas entre valores consecutivos de uma mesma quantidade.

Cauchy tornou fundamental o conceito de limite para explicar a derivada e a integral dispensando a geometria e os infinitésimos, utilizados por Newton e Leibniz.

Weierstrass, por sua vez, deu mais precisão ao conceito de limite de Cauchy que usava frases: "aproximar-se indefinidamente", ou, "tão pequeno quanto se queira" que embora sejam fáceis de compreensão não tinham o rigor matemático.

Dessa forma Cauchy e Weierstrass deram o rigor (conseguido por meio de uma construção adequada dos números reais) necessário para os conceitos de Derivada e Integral. Esse rigor são utilizados nos livros didáticos dos dias atuais nas demonstrações por meio de épsilons e deltas.

Ressaltamos que existem relatos da gênese do Cálculo Diferencial e Integral antes deste período, relatamos alguns exemplos que julgamos mais expoentes:

- **Euclides (330 a.c - 275 a.c):** provavelmente foi o primeiro geômetra a ter traçado a reta tangente à uma circunferência e provou o teorema que diz: que a reta tangente a uma circunferência em qualquer ponto P é perpendicular ao raio em P;

- **Eudoxo (408 a.c - 355? a.c):** descobriu o método da exaustão, que consiste subdividir uma grandeza indefinidamente, Boyer (1974, p.67) escreve a proposição de Eudoxo:

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não a menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não ao menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie.

Esse método parece ter sido usado por Newton e Leibniz para demonstrar o equivalente a:

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

Relação bastante conhecida nos dias atuais;

- **Cavalieri (1598 - 1647):** enunciou o que hoje conhecemos como princípio de Cavalieri, Boyer (1974, p. 242) escreve o princípio: "Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão".

Esse princípio representa ferramenta útil para o cálculo de áreas, volumes, sendo que sua base intuitiva podem tornar-se rigorosas com o Cálculo Diferencial e Integral moderno;

- **Descartes (1596 - 1650):** responsável pela criação da Geometria Cartesiana - localizada no apêndice do livro *Discours de la méthode* com o nome de *La géométrie* - que hoje em dia é sinônimo de Geometria Analítica, segundo Descartes (apud Boyer, 1974, p.247): "Todo problema de geometria pode ser facilmente reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção".

Segundo Boyer (1974, p.247):

[...] essa afirmação indica, o objetivo é geralmente uma construção geométrica [...]. A obra de Descartes é [...] descrita simplesmente como a aplicação da álgebra à geometria, [...] poderia ser caracterizada [...] como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica [...].

De qualquer forma, Descartes utilizou o plano cartesiano para representar planos, retas, circunferências por meio de equações matemáticas. Dessa forma os estudos iniciais da geometria analítica surgiram com as teorias de Descartes.

Em uma dessas teorias é que podemos encontrar o coeficiente angular (ou inclinação) da reta, da seguinte forma:

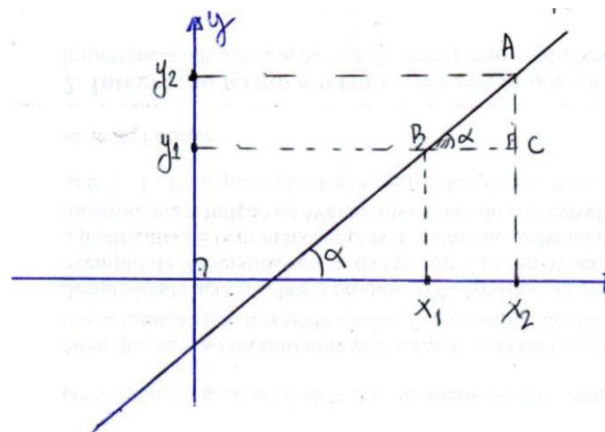


Figura 1 - Cálculo do Coeficiente Angular

Fonte: Elaboração do autor

Indicamos por m o coeficiente angular da reta r e utilizamos o triângulo ABC da Figura 1, para obtermos:

$$m = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

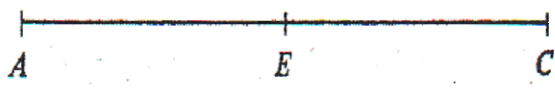
Percebemos a idéia inicial de taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e conjecturamos que Newton e Leibniz estudaram a geometria de Descartes para a criação do Cálculo Diferencial e Integral, pois, como veremos mais adiante, relacionaram esse tipo de taxa de variação com a Derivada. Leibniz inclusive passou a usar o símbolo de derivada $\frac{dy}{dx}$ que é muito semelhante a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, pois sabemos que $dy = f'(x)dx$ e $dy \cong \Delta y$, quando Δx tende a zero.

• **Fermat (1601-1665)** segundo Laplace (1749-1827): "Fermat, o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial".

Fermat desenvolveu um método para achar máximos e mínimos das curvas polinomiais muito semelhante ao que fazemos hoje em dia, ou seja, ele igualava o limite $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$ a zero.

Sobre um método para determinação de máximo e mínimo Fermat (apud Baron, 1985, p.36) escreve que :

"Dividir o segmento AC em E, de tal modo que o retângulo AE. EC possa ser máximo".



Seja a reta AC dividida em E, de tal modo que o retângulo AE.EC possa ser um máximo.

Seja AC igual a B e um dos segmentos igual a A: o outro será B - A, e o retângulo, cujo máximo procuramos, será BA - Aq.

Agora seja $A + E$ a primeira parte de B , o resto $B - A - E$ e o retângulo formado pelos segmentos será $BA - Aq + BE - 2AE - Eq$, que consideramos ser aproximadamente igual a $BA - Aq$.

Removendo termos comuns: $B \sim 2AE + Eq$ e dividindo por E , $B \sim 2A + E$.

Desprezando E , B é igual a $2A$.

Para resolver o problema devemos dividir a reta ao meio: é impossível existir um método mais geral.

Observamos que, por exemplo, Aq significa A^2 e o símbolo $\sim$ quer dizer “aproximadamente igual”.

Segundo Baron este método, apesar de algumas imperfeições – por exemplo não distingue quem é o máximo ou mínimo – é o equivalente ao que fazemos nos dias atuais:

$$f'(A) = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0$$

Sobre o trabalho de Fermat, Boyer (1974, p.258) escreveu: “[...] esta falta de clareza por parte dele não diminui sua genealidade, já que suas ideias ajudaram a solucionar muitos problemas referentes ao Cálculo [...]”.

Assim compreendemos bem a frase de Laplace atribuindo a invenção do Cálculo Diferencial a Fermat.

Finalizaremos o capítulo II fazendo uma reflexão dessas abordagens em relação ao tema de estudo do nosso trabalho em que a Derivada é vista como medida de variação.

2.1. NEWTON

Tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade.

Leibniz

Isaac Newton nasceu em 25 de dezembro de 1642, no interior da Inglaterra em Woolsthorpe. Seu tio materno percebeu no sobrinho um talento matemático incomum e convenceu sua mãe a matriculá-lo em Cambridge. No seu primeiro ano do Trinity College, em 1661, estudou as obras de Euclides, Descartes, Oughtred, Kepler, Viète, Galileu, Fermat, Huygens, e a mais importante *Arithmética infinitorum* de Wallis, pois com ele os expoentes fracionários entraram em uso comum. Newton escreveu: "Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei em ombros de gigantes".

O Teorema Binomial foi descoberto por Newton em 1664 ou 1665 e este teorema alavancou a descoberta do Cálculo, pois Newton por meio dele conseguiu expandir potências de expoentes fracionários e assim não passou diretamente do triângulo de Pascal para o teorema binomial, mas indiretamente de um problema de quadratura para o teorema binomial.

Em 1665, Newton, começou a pensar na taxa de variação de quantidades variáveis continuamente, tais como áreas e volumes. Em seguida, vinculou a taxa de variação às séries infinitas.

O livro *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composto em 1669 e publicado em 1711, é a primeira exposição sistemática da principal descoberta matemática de Newton - o Cálculo.

E tudo que a análise comum executa por meio de Equações com número finito de Termos (desde que possa ser feito) esse novo método sempre pode executar por Meio de Equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de Análise também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as equações menos exatas; embora nós Mortais cujos Poderes de raciocínio estão restritos a Limites estreitos, não possamos nem exprimir,

nem conceber todos os Termos dessas Equações de modo a saber exatamente delas as Quantidades que queremos...Para concluir, podemos decidir com justiça que pertence à Arte Analítica, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. das Curvas podem ser exatamente e geometricamente determinados (BOYER, 1974, p.290).

A partir desse livro não se evitou mais os processos infinitos.

Então, Newton, passou a representar o com um intervalo de tempo muito pequeno e op e oq pequenos incrementos pelos quais x e y variam nesse intervalo. Logo, a razão $\frac{q}{p}$ será a razão das taxas instantâneas de variação de y e x , ou seja, a inclinação da curva $f(x,y) = 0$. Assim, para encontrar a inclinação da curva $y^m = x^n$, Newton escreveu: $(y + oq)^m = (x + op)^n$ e em seguida expandiu a equação utilizando o teorema binomial,

$$(y + oq)^m = (x + op)^n \Leftrightarrow y + oq = (x + op)^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + oq = (x)^{\frac{n}{m}} + \frac{n}{m} op x^{\frac{n}{m}-1} + \frac{n \left(\frac{n}{m} - 1 \right)}{2m} o^2 p^2 x^{\frac{n}{m}-2} + \dots + p^{\frac{n}{m}} o^{\frac{n}{m}}$$

dividiu os dois lados da igualdade por o

$$\frac{y}{o} + q = \frac{x^{\frac{n}{m}}}{o} + \frac{n op x^{\frac{n}{m}-1}}{mo} + \frac{n \left(\frac{n}{m} - 1 \right)}{2mo} o^2 p^2 x^{\frac{n}{m}-2} + \dots + \frac{p^{\frac{n}{m}} o^{\frac{n}{m}}}{o}$$

e finalmente negligenciou os termos que continham o , por serem muito pequenos

$$q = \frac{n}{m} p x^{\frac{n}{m}-1}$$

e obteve como resultado

$$\frac{q}{p} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

em notação moderna levamos a concluir que:

$$\frac{q}{p} = y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

Neste processo, Newton, encontrou um método geral para encontrar a taxa de variação de uma variável relativamente a outra e mostrou também que a área pode ser obtida invertendo o processo de encontrar a taxa de variação. Ou seja, a área sob a curva

$y = ax^{\frac{n}{m}}$ é dada por

$$\frac{ax^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m} + 1}$$

Na obra *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, escrita em 1671 e publicado em 1736, Newton, passa a considerar as variáveis como sendo geradas pelo movimento contínuo de pontos, linhas e planos, e não como agregados estáticos de elementos infinitésimos, tal como havia considerado no seu anterior trabalho. Agora, passa a designar uma quantidade variável por fluente e sua taxa de variação de fluxo. Neste trabalho aparecem as notações: $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para os fluxos e x e y para os fluentes. Newton define suas noções de fluxões e fluentes:

Eu chamarei de Quantidades Fluentes, ou simplesmente Fluentes estas quantidades que eu considero como aumentadas gradualmente e indefinidamente, eu as representarei pelas últimas letras do alfabeto v, x, y e z para distinguir das outras quantidades que, nas equações, são consideradas como conhecidas e determinadas que nós representaremos pelas letras iniciais a,b,c, etc.; eu representei pelas mesmas letras sobrepostas de um ponto v, x. y, z as velocidades cujas fluentes são aumentadas pelo movimento que as produz e, por consequentemente nós poderemos chamar Fluxões.(Boyer, 1974, p.291)

então, de acordo com as notações de Newton, segue que:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

em notação moderna, traduzimos por

$$\frac{dy}{dt} = nx^{n-1} \frac{dx}{dt}$$

uma vez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

No seu terceiro trabalho sobre cálculo *De quadratura curvarum* escrito em 1676 e publicado em 1704, Newton, afirma ter abandonado os infinitésimos ou quantidades pequenas e faz uma crítica ao abandono de termos envolvendo o e afirma:

Em matemática o mais mínimo erro não pode ser negligenciado... eu considero as quantidades matemáticas neste campo, não sendo constituídos por partes descritas e geradas não pela oposição das partes, mas pelo movimento contínuo de ângulos pela rotação dos lados; porções de tempo por fluxos contínuos....fluxos são, como quisermos, incrementos

de fluentes gerados em tempos, iguais e o mais pequeno possível, e para falar com rigor, são o primeiro ratio (proporção) dos incrementos nascentes. Mas podem ser expressos por quaisquer linhas, que são algo proporcionais a eles. (Boyer, 1974, p.298)

Neste "novo" conceito de Newton, ele considera a função $y=x^n$. Para encontrar o fluxo de y ou x^n , Newton deixa que x "flua" e se torne $x + o$. Então x^n traduz-se por

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots + o^n$$

fazendo,

$$ratio = \frac{\text{acrécimo de } x}{\text{acrécimo de } y} = \frac{o}{(x + o)^n - x^n} = \frac{o}{nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots + o^2}$$

Simplificando e desprezando o, teremos:

$$ratio = \frac{\text{acrécimo de } x}{\text{acrécimo de } y} = \frac{1}{nx^{n-1}} \Leftrightarrow ratio = \frac{\text{acrécimo de } y}{\text{acrécimo de } x} = nx^{n-1}$$

Como diríamos hoje em dia, a taxa de variação instantânea de y relativamente a x é nx^{n-1}

Segundo as autoras Galarda e Rossi (1992), justificamos a importância de citar o método desenvolvido por Newton:

[...] a diferença entre Newton e seus predecessores, é que este formulou regras para cobrir soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal, conhecidos no seu tempo. Embora muito dessas regras tivessem sido formuladas anteriormente, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual grande parte dos problemas podiam ser formulados...a síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação “padrão” como ponto para representar a diferenciação e, aparentemente não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração.[...].(Boyer, 1974, p.307)

2.2 LEIBNIZ

A Matemática é o mais maravilhoso instrumento criado pelo gênio do homem para a descoberta da Verdade.

Leibniz

Gottfried Leibniz nasceu em Leipzig, em 1646, estudou Direito e, logo após ter defendido a sua tese sobre lógica, adquiriu um bacharelado em Filosofia. Estudou também teologia e matemática na universidade. É considerado o último sábio a conseguir conhecimento universal.

Em 1672 foi a Paris, a serviço diplomático, onde conheceu Huygens e este contribui para que seu interesse pela Matemática disparasse, pois Leibniz afirmou não ter tomado conhecimento do assunto até 1672.

Em 1673 foi a Londres, como diplomata, e conheceu mais matemáticos incluindo Henry Oldenburg. Nesse tempo Leibniz aprofundou seus conhecimentos matemáticos lendo Fermat, Descartes, Pascal e Barrow. É em grande parte em torno dessa visita que gera a discussão de plágio, pois Leibniz poderia ter visto *De analysi* de Newton. Segundo Boyer (1974, p.298): “[...] mas é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava preparado em geometria ou análise [...]”.

Leibniz publicou trabalhos de cálculo a partir de 1684, contudo suas ideias já estavam presentes em centenas de notas feitas a partir de 1673.

Em 1714, publicou *Historia et Origo Calculi Differentialis*, no qual faz um relato da sua própria forma de pensar e com o propósito de se defender de acusação de plágio, Leibniz pode ter distorcido, inconscientemente, o relato de suas ideias.

Leibniz morreu negligenciado em 1716, apesar de todo o seu admirável trabalho.

Boyer (1974, p.299) escreve que: “[...] O fato de Leibniz ser virtualmente um autodidata em matemática explica em parte os casos frequentes de redescoberta que aparecem em sua obra [...]”.

O Cálculo Infinitesimal de Leibniz é notável no que diz respeito a notação e terminologia. Até hoje é utilizado para explicar, enunciar e discutir os resultados dos matemáticos que o antecederam. Para termos uma ideia da sua importância a notação $\frac{dy}{dx}$, para indicar a derivada, e o símbolo $\int$, para indicar a integral, que é um S estilizado que representa a palavra soma, são largamente utilizados nos dias atuais.

No início de seu trabalho, Leibniz utilizou a nomenclatura *omn.* como abreviatura do Latim, *omnia*, que significa soma, mais tarde incomodado com essa notação ele passou a usar o símbolo de integral $\int$ como o conhecemos. Esta notação apareceu no manuscrito de 29 de outubro de 1675.

Pensando em termos da função $y = x$, Figura 2, conclui que $omn.l = y$, porque $omn.l$ é a soma das primeiras diferenças de uma sequência cujos termos começam com zero, dando como resultado o último termo. Então, Leibniz obtém o resultado $omn.ly$ é igual a $\frac{y^2}{2}$.

A Figura 2 ilustra o pensamento de Leibniz, a área do triângulo ABC é a soma de ly e é também $\frac{y^2}{2}$.

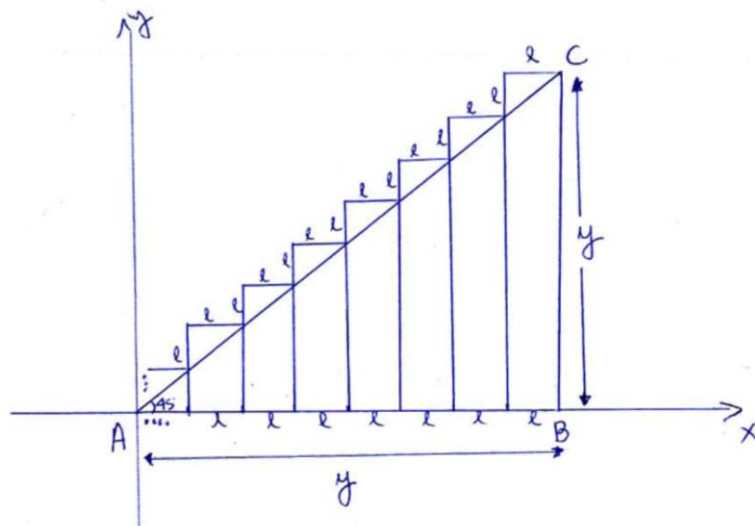


Figura 2 - Cálculo da área do triângulo ABC

Fonte: Elaboração do autor

A cerca da Figura 2 Leibniz escreveu: “Linhas retas que aumentam do nada, cada uma delas multiplicadas pelo seu elemento de aumento correspondente, formam um triângulo”.

Em um manuscrito de 1675, Leibniz começa com

$$omn. yl = \overline{omn. \overline{omn. l}} \frac{l}{a}$$

fazendo a substituição de y por $omn. l$ e dividindo por a para preservar as dimensões. Portanto, conclui que:

$$omn. yl = \overline{omn. \overline{omn. l}} \frac{l}{a} = \frac{y^2}{2}$$

traduzindo para notação moderna segue que

$$\int \left(\int dy \right) \frac{dy}{dx} = \int y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2}$$

Ressaltamos que, Leibniz, utilizava dx , como a diferença da ordem de dois termos sucessivos, e dy era a atual diferença nos valores dos dois termos sucessivos.

Leibniz, utilizando o raciocínio geométrico, como o reproduzido pela Figura 3, conclui que:

$$omn. xl = x omn. l - omn. omn. l$$

$$\text{ou seja, } \text{área}_{(OCD)} = \text{área}_{(OBCD)} - \text{área}_{(OBC)} \Rightarrow \int x dy = xy - \int y dx$$

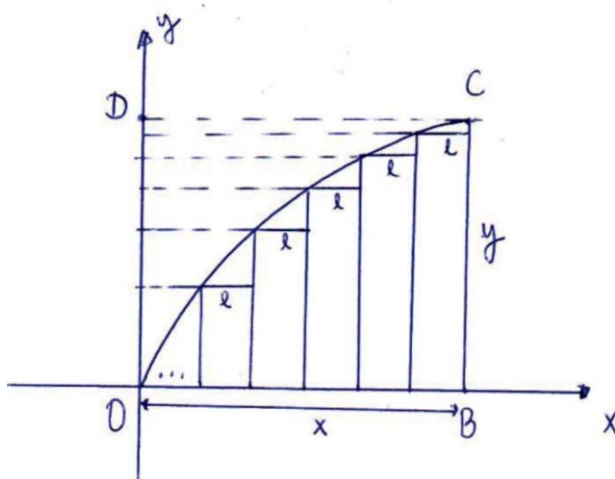


Figura 3 - A descoberta do teorema

Fonte: Elaboração do Autor

Leibniz, percebeu que a diferenciação e integração enquanto soma, têm que ser processos inversos e a área quando diferenciada, dava o comprimento. A esse respeito Leibniz escreve:

Dado l e a sua relação com x para encontrar $\int l$. Supondo que $\int l = ya$. Então à medida que $\int$ vai aumentando, d vai diminuindo as suas dimensões. Mas $\int l$ significa uma soma, e d , uma diferença. Dado y podemos sempre encontrar $\frac{y}{a}$ ou l , ou seja, a diferença dos y . Desta forma, uma equação pode ser transformada em outra. (Boyer, 1974, p.296)

Em relação a diferenciação Leibniz ultrapassou a principal dificuldade, de que a relação $\frac{dy}{dx}$ não era exatamente a derivada, pelo menos como a conhecemos atualmente. Leibniz baseou sua argumentação no triângulo característico, Figura 4, que Pascal utilizara para achar a quadratura de senos e Barrow o aplicara ao problema de tangentes.

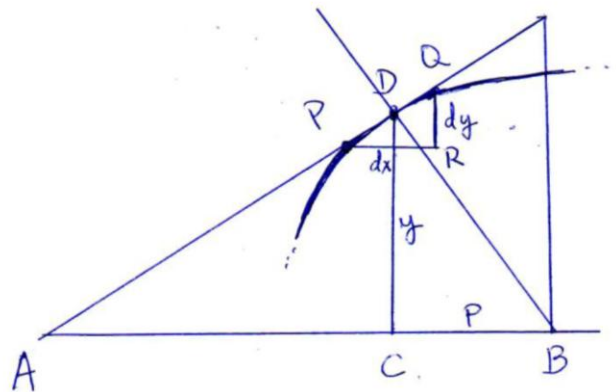


Figura 4 - Triângulo Característico

Fonte: Elaboração do autor

Leibniz designou a curva entre P e Q e parte da tangente em D , e afirmou que apesar do triângulo PQR ser infinitamente pequeno, ele mantém a relação de semelhança com o triângulo ACD , onde o triângulo ACD é formado pela subtangente AC , a ordenada em D , e o comprimento da tangente AD . Como dx e dy são elementos fixos, a sua relação tem um significado delimitado. Da semelhança entre PQR e ADC segue que:

$$\frac{dy}{DC} = \frac{dx}{AC} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{DC}{AC}$$

Ainda resolveu o problema de procurar a curva, cuja subnormal é inversamente proporcional à ordenada. Na figura 4, DB é normal, $p = CB$ é subnormal. Então, Leibniz usou o fato dos triângulos PRQ e DCB serem semelhantes para obter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \Leftrightarrow p dx = y dy$$

mas a curva tem a propriedade $p = \frac{b}{y}$ onde b é proporcionalmente constante.

Portanto,

$$pdx = ydy \Leftrightarrow \frac{b}{y} dx = ydy \Leftrightarrow dx = \frac{y^2}{b} dy$$

ou seja,

$$dx = \frac{y^2}{b} dy \Leftrightarrow \int dx = \int \frac{y^2}{b} dy$$

ou

$$x = \frac{y^3}{3b}$$

Em 26 de Junho de 1676, Leibniz percebeu que o melhor método de encontrar tangentes é encontrar $\frac{dy}{dx}$, onde dy e dx são diferenças e $\frac{dy}{dx}$ é o quociente.

Em novembro de 1676, Leibniz formula regras gerais, tais como, $dx^n = nx^{n-1}dx$ e $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ e afirma: “O raciocínio é geral, e não depende das progressões dos x”.

Em 1677, Leibniz formulou regras para o diferencial da soma, diferença, produto e quociente de duas funções:

- $d(u+v) = du + dv$;
- $d(u-v) = du - dv$;
- $d(u.v) = du.v + u.dv$;
- $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du.v - u.dv}{v^2}$.

Leibniz, em 1680, escreve: "[...] agora estes valores, dx e dy , são considerados infinitamente pequenos, ou, como dois pontos na curva que são compreendidos como uma distância à parte, que é menor do que qualquer outro comprimento [...]".

Dessa forma dx tornou-se a diferença de abscissas e dy a diferença nas ordenadas.

Em 1684 Leibniz diz que o seu método de infinitésimos tornou-se bastante conhecido como Cálculo das Diferenças, pois afirma que as diferenças são o oposto das somas. Para encontrarmos a área em baixo de uma curva, Figura 5, Leibniz considera a soma dos retângulos e omite os restantes: "triângulos, uma vez que estes são infinitamente pequenos comparados aos retângulos [...]".

Assim a área da figura 5 é dada por $\int y \, dx$.

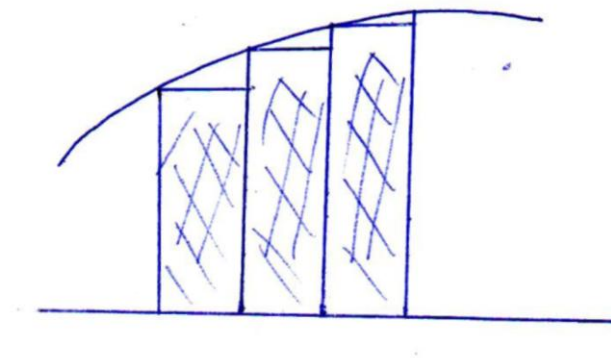


Figura 5 - Cálculo da área

Fonte: Elaboração do autor

Embora o trabalho de Leibniz seja profundo e rico em notações era incompleto e bastante fragmentado. Coube aos irmãos Bernoulli, a organização dos fragmentos e elaboração dos seus trabalhos e dessa forma contribuíram para novos desenvolvimentos.

A seguir justificaremos e faremos algumas reflexões sobre o fato de prosseguir os registros históricos do Cálculo Diferencial e Integral por meio de Cauchy e Weierstrass.

Iniciamos observando que Newton conceituou primeiro a Derivada e depois a Integral, já Leibniz fez o inverso conceituou primeiro a Integral e depois a Derivada e apesar da grande contribuição de Newton e Leibniz para a gênese do Cálculo Diferencial e Integral, existiam algumas questões que não eram aceitas pelos matemáticos da época, por exemplo, o conceito de Limite.

Newton e Leibniz tinham ideias bastante confusas e vagas sobre o conceito de Limite. Muitas vezes para explicá-las recorriam a filosofia, por exemplo: para explicar o infinito eles utilizam números infinitamente grandes e infinitamente pequenos ou então apelavam para a intuição geométrica subjetiva e indefinida.

Notamos que Newton, fez uma analogia entre as operações algébricas com polinômios e o número infinito de termos de uma série infinita, portanto ignorando o Limite e o que ele chamou de fluxões não era exatamente a derivada, mas muito próximo. Leibniz, após estudar a derivada através da Integral também não conseguiu dar explicações convincentes de que: $\frac{dy}{dx} = y'$.

Apesar de negligenciar o Limite ao trabalhar com séries infinitas, Newton, reconheceu em 1687, na obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que o Limite deveria ser o ponto de partida para problemas de tangência e quadratura.

Newton tentou dar a formulação precisa do Limite, apesar da linguagem rebuscada ele plantou a semente da definição moderna de Limite, no início do Livro I do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*:

Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente a igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais. (BOYER, 1974, p.292)

O grande responsável por introduzir o conceito de Limite foi Cauchy, apesar de cometer alguns equívocos principalmente na aplicação da sua definição de Limite para introduções precisas da Derivada.

Weierstrass restabeleceu a definição original de Limite de Cauchy corrigindo os equívocos e desenvolveu um programa para trazer rigor para todo o Cálculo Diferencial e Integral e à Análise Matemática.

Percebemos, devido a nossa prática docente e estudos realizados na graduação e agora no mestrado, que o conceito de Limite e de Números Reais são os mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral. Eles explicam a Derivada, Integral, Continuidade, Convergência e Divergência e isso pode até gerar um paradoxo, pois através dos registros históricos eles foram conceituados por último.

Os matemáticos responsáveis pela definição moderna de Derivada são: Cauchy e Weierstrass.

2.3 CAUCHY

Os sinais + e - modificam a quantidade diante da qual são colocados como adjetivo modifica o substantivo.

Cauchy

Augustin-Louis Cauchy, nascido em Paris no dia 21 de Agosto de 1789. Estudou na École Polytechnique, onde conheceu Lagrange (1736 – 1813) e Laplace (1749 – 1827) que se interessaram na vocação matemática de Cauchy. Lagrange aconselhou o pai de Cauchy para que seu filho obtivesse boa base de línguas antes de iniciar seus estudos de Matemática.

Lagrange impressionado pelos trabalhos de Euler (1707 – 1783) e Taylor (1685 -1731), tentou reformular o Cálculo em termos de Álgebra de séries infinitas. Com isso descobriu várias propriedades importantes entre elas: Dado D , h pode ser escolhido de forma que $f(x+h)-f(x)$ fique entre $h(f'(x)-D)$ e $h(f'(x) +D)$.

Percebemos que esta propriedade está muito próxima do que conhecemos hoje em termos de ϵ e δ e também há uma tentativa de Lagrange de desvincular o Cálculo dos fatos geométricos. O grande problema de Lagrange é assumir que toda função pode ser expandida como uma série de Taylor.

Cauchy produziu vários livros e memórias, apenas publicou menos que Euler. Em três livros que são *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829) dá ao Cálculo Diferencial e Integral o caráter que tem hoje em que substitui a propriedade acima de Lagrange por ϵ e δ , pois Cauchy observou que a álgebra de quantidades finitas não pode ser automaticamente estendida para processos infinitos. Dessa forma tornou básico o conceito de Limite. Cauchy escreveu:

Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixado de forma que, no fim, se diferenciam dele tão pouco quanto se queira, este último é chamado de limite de todos os outros.(Boyer, 1974, p.377)

Cauchy então, definiu a derivada $f'(x)$ de y em relação a x como sendo o limite do quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

quando i se avizinha de zero.

Segundo Dall'Anese (2000) Cauchy estabeleceu a relação entre a derivada e os diferenciais da seguinte forma:

Seja $y = f(x)$ novamente uma função da variável independente x . Seja i uma quantidade infinitamente pequena e h uma quantidade finita. Se dissermos que $i = ah$, a será, novamente, uma quantidade infinitamente pequena, e teremos a identidade:

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+ah) - f(x)}{ah}$$

Donde

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} \cdot h = \frac{f(x+ah) - f(x)}{a}$$

O limite para o qual converge o lado direito desta equação à medida que a se aproxima indefinidamente de zero e h permanece constante é chamado "diferencial" da função $y = f(x)$. A diferencial é indicada por dy ou $df(x)$. Seu valor pode ser facilmente determinado se soubermos o valor da função derivada y' ou $f'(x)$. De fato, se tomarmos os limites de ambos os lados da última equação, acharemos um resultado geral:

$$df(x) = hf'(x)$$

No caso especial quando $f(x) = x$, a equação reduz-se $dx = h$. Assim a diferencial da variável independente x é precisamente h . Dado isto, a equação $(x) = hf'(x)$ torna-se $df(x) = f'(x)dx$, ou, equivalentemente $dy = y'dx$.

Essas últimas equações mostram que a derivada $y' = f'(x)$ de qualquer função $y = f(x)$ é precisamente igual a $\frac{dy}{dx}$, isto é, à razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável ou se, quisermos, ao coeficiente pelo qual devemos multiplicar a segunda diferencial a fim de obtermos a primeira. É por isso que a derivada é chamada às vezes de “coeficiente diferencial”.

No seu trabalho, ainda, Cauchy, pela primeira vez na matemática definiu a integral sem qualquer apelo ao conceito de área:

A integral de x_0 a X é o limite das somas

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

conforme os valores $(x_{i+1} - x_i)$ decrescem indefinidamente.

Ressaltamos que Cauchy definiu a integral independentemente da diferenciação. Mais tarde Cauchy provou a relação usual entre a integral e a derivada fazendo o uso do teorema do valor médio de Cauchy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

válido com restrições adequadas sobre $f(x)$ e $g(x)$.

Cauchy também enunciou o teorema que garante a continuidade das funções:

A função $f(x)$ será contínua em x num intervalo de valores desta variável se, para cada valor de x nesse intervalo, o valor numérico da diferença $f(x + \alpha)$ decresce infinitamente com α . Em outras palavras, $f(x)$ é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno de x produz um acréscimo infinitamente pequeno de $f(x)$. (Boyer, 1974, p.380)

Ressaltamos que Cauchy provou que $\frac{dy}{dx}$ é a derivada da função no ponto x , ou seja, $\frac{dy}{dx} = y'$.

2.4 WEIERSTRASS

A matemática é a linguagem da precisão; é o vocabulário indispensável daquilo que conhecemos.

Weierstrass

Em Ostenfelde – Alemanha, nasceu em 31 de outubro de 1815, Karl Wilhem Theodor Wieierstraß, mais conhecido como Weierstrass.

Weierstrass, em 1856, foi professor na Universidade de Berlin e é o autor da definição moderna de limite, em meados do século XIX: “Uma função f possui um limite L no ponto a quando, dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode se encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$ ”.

Usando essa notação clara e adequada Weierstrass eliminou algumas imprecisões da Teoria de Cauchy que usava frases como “valores sucessivos”, “aproximar-se indefinidamente” ou “tão pequeno quanto se queira”.

Weierstrass deixa claro em seus trabalhos a necessidade de uma definição de Número Real, pois o conceito de Limite depende dessa noção. Com Weierstrass, o Cálculo Diferencial e Integral chegou a tal perfeição de construção que superou, enfim, o rigor grego.

O Cálculo Diferencial e Integral se tornou independente da geometria e dos conceitos de movimento, tornando-se essencialmente numérico e estático.

A abordagem do nosso trabalho é a Derivada com ênfase na Taxa de Variação. De acordo com os relatos históricos notamos que os matemáticos envolvidos nesta abordagem são Cauchy e Weierstrass que trabalharam a Derivada em termos de limite e variação e não utilizaram os infinitésimos como um número fixo muito pequeno e sim deram o caráter numérico decrescendo indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero. Além disso, Cauchy enunciou o teorema que garante a continuidade das funções, fato extremamente importante para estudarmos a Derivada. Observamos, também, que Newton e Leibniz relacionaram primeiro a derivada como o coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto dado.

Verificamos que os livros didáticos analisados: **Livro A, Livro B e Livro C** seguem uma ordem contrária daquela apresentada pelos registros históricos, ou seja, seguem a ordem Limite, Derivada e Integral.

Ressaltamos que a integral teve origem em processos de somatórios ligados a problemas de área, mais especificadamente da quadratura. A diferenciação, desenvolvida mais tarde, resultou de problemas de tangentes a curvas.

CAPÍTULO 3

REFERENCIAL TEÓRICO E PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação.

Duval

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica - os Registros de Representação Semiótica de Duval, e os procedimentos metodológicos segundo a Análise de Conteúdo de Bardin.

Finalizamos o tópico registros de representação semiótica apresentando diversos exemplos dos registros e seus tratamentos e conversões que foram feitos pelos autores, dos livros analisados, ao longo da apresentação da Derivada.

No parágrafo, procedimentos metodológicos: Análise de Conteúdo, além, de descrevermos os conceitos abordados por Bardin, apresentaremos uma sinopse dos livros didáticos que serão analisados.

Esperamos desta forma, responder a questão de pesquisa enunciada no capítulo I e que vale a pena retomarmos neste momento:

"O tratamento dado, por livros didáticos, por meio dos textos, exercícios resolvidos e propostos e outras atividades, sobre derivada, possibilita a articulação entre os registros de representação semiótica levando a compreensão da Derivada e a enfatiza como Taxa de Variação?"

3.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Pesquisas mostradas no capítulo I - Barros e Meloni(2006), Cury (1999, apud Campos, 2007) e Leite, Strentzke e Darsie (2007) - revelam as dificuldades que permeiam o processo do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, buscando e entender essas dificuldades visando descobrir sobre alguns pontos relevantes durante esse processo.

É importante ressaltar que objetos matemáticos necessitam de uma representação, na qual seus objetos são apresentados de forma abstrata, por meio das propriedades, teoremas, axiomas, estruturas algébricas e relações que podem ser expressas em diferentes situações.

A cerca das representações semióticas Duval (1993), define "*semiósis* como a apresentação ou a produção e a *nóseis* a apreensão conceitual de um objeto". Então, para haver a apreensão de um objeto matemático é necessário que a *nósis* ocorra por meio de representações *semiósis*.

Segundo Duval um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais de apontar o funcionamento cognitivo consciente em que a situação é apresentada ao aluno, por meio de registros de representações, facilitando assim a compreensão ou a descoberta a respeito do objeto matemático.

Ainda sobre as representações semióticas, Duval escreve que:

[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. [...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.(DUVAL, 1993, p. 39).

Segundo Duval (1993), os registros mobilizados no aprendizado dos objetos matemáticos são classificados em:

- Representação discursiva que é subdividido em: língua natural e os sistemas de escritas;
- Representação não-discursiva que é subdividido em: figuras geométricas planas ou em perspectivas e os gráficos cartesianos.

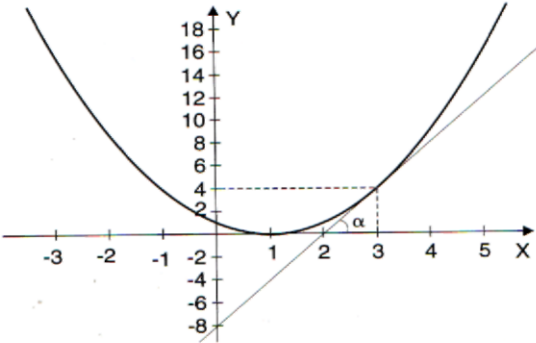
Essa classificação pode ser resumida no quadro 1.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensões 0, 1, 2 ou 3). • apresentação operatória e não somente perspectiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébrica; • simbólica (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

Fonte: Duval, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática*, 2011, p. 14.

Nosso objeto de estudo é a Derivada. o Quadro 2, nos mostra que a Derivada em um ponto pode ser representada por registro em língua natural, o registro figural e o registro simbólico.

Registro na língua natural	Registro figural	Registro simbólico
Derivada da função $f(x)$, no ponto de abscissa 3.		$f'(3) = \text{tg}(\alpha)$

Quadro 2 - Registro de Representação semiótica

Fonte: Elaboração do autor

Duval, conjectura: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas. Duval, escreve que essa coordenação é necessária para não confundir o objeto com sua representação.

De acordo com Duval (1993), nossa perspectiva dos objetos matemáticos não são imediatamente ou diretamente acessíveis, a não ser através de sua representação. Segundo o mesmo autor as representações matemáticas são significativas porque permitem uma comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento e esses vários registros da representação são necessários para o aprendizado. Exemplificando: uma expressão algébrica, um símbolo e uma figura são representações dos objetos matemáticos: número, função e um ponto, etc.

Em relação aos registros de representação semiótica, existem dois tipos de transformações: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos são transformações no interior de um mesmo registro, ou seja, uma transformação interna a um registro e são ligados a forma, não ao

dos objetos matemáticos. O quadro 3 a seguir apresenta a ideia de tratamento, relativo ao conceito de Derivada de uma função no ponto de abscissa 3, no registro simbólico.

$$\frac{dy}{dx}(3) \xrightarrow{\text{TRATAMENTO}} f'(3) \xrightarrow{\text{TRATAMENTO}} D_x y(3)$$

Quadro 3 - Tratamento

Fonte: Elaboração do autor

Observamos que os símbolos mudaram mas a representação permanece no interior do mesmo registro: simbólico, ou seja, o registro simbólico.

Damm (1999), ao fazer uma análise sobre o conceito desenvolvido por Duval, esclarece que: "o tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada [...], logo é uma representação interna a um registro (p.179)".

Outro tipo de transformação são as conversões. Conversões são transformações de representações que consistem na mudança de registro, conservando os mesmos objetos matemáticos. Portanto, fundamental no trabalho com as representações semióticas. O exemplo 2 a seguir nos mostra a conversão de um registro da representação semiótica, do conceito de derivada de uma função no ponto de abscissa 3.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \xleftrightarrow{\text{CONVERSÃO}} \text{Derivada da função } f(x), \text{ no ponto de abscissa 3.}$$

Quadro 4 - Conversão

Fonte: Elaboração do autor

No quadro 4 ocorreram as conversões do registro simbólico algébrico e deste para o registro na língua natural.

De acordo com Damm (1999): "[...] a conversão de uma representação é uma transformação dessa em uma representação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão (p.180)".

De acordo com os quadros 3 e 4, ressaltamos que o tratamento se estabelece no interior de um mesmo registro semiótico, já a conversão se dá entre diferentes registros semióticos.

Baseado nos registros de representação semiótica, observamos abordagens distintas em relação à Derivada.

O **Livro A** utiliza registro simbólico algébrico com tratamentos e conversões, registro figural gráfico, registro em língua natural. Reescrevemos alguns exemplos de registros utilizados neste livro.

•registro simbólico algébrico com conversões:

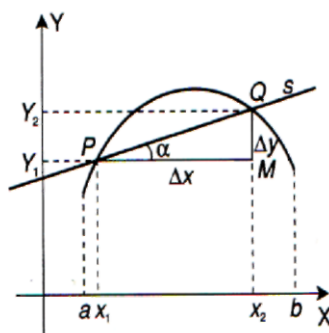


Figura 4.1

$$\xleftrightarrow{\text{CONVERSÃO}} \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.115)

•registro simbólico algébrico com tratamentos:

$$m(x_1) \xleftrightarrow{\text{TRATAMENTO}} \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} \xleftrightarrow{\text{TRATAMENTO}} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

●registro figural gráfico:

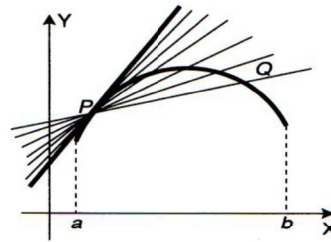


Figura 4.2

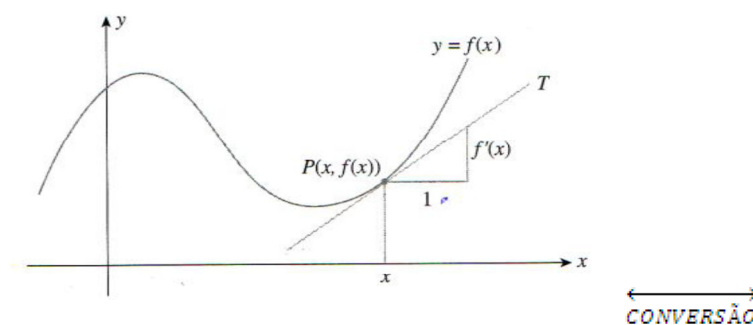
(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.116)

●registro em língua natural:

Velocidade e aceleração são conceitos que todos nós conhecemos. Quando dirigimos um carro, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro marca, a cada instante, a velocidade. Se pisarmos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda. Sentimos a aceleração.

O **Livro B** utiliza registro simbólico algébrico com tratamentos e conversões, registro figural gráfico, registro em língua natural. Reescrevemos alguns exemplos de registros utilizados neste livro.

●registro simbólico algébrico com conversões:

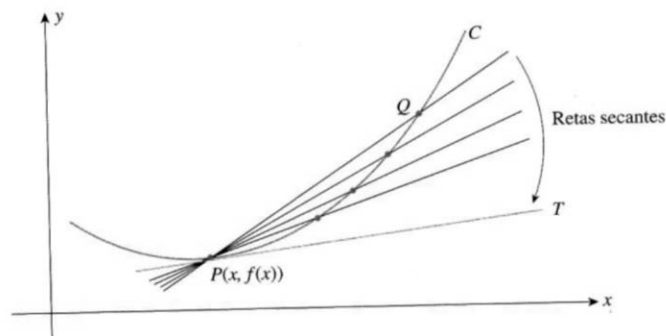


“A declividade da reta tangente em $P(x, f(x))$ é $f'(x)$; f varia à taxa de $f'(x)$ unidades para cada variação de uma unidade em x no ponto x (TAN, 2008, p. 133)”.

- registro simbólico algébrico com tratamentos:

$$D_x f(x) \xleftrightarrow{\text{TRATAMENTO}} \frac{dy}{dx} \xleftrightarrow{\text{TRATAMENTO}} y'$$

- registro figural gráfico:



(TAN, 2008, p.131)

- registro em língua natural:

"[...] O número de beneficiários do serviço previdenciário norte-americano de 1990 a 2045. Podemos usar a declividade da reta tangente nos pontos indicados para estimar a razão à qual o número de beneficiários estará mudando (TAN,2088,p.130)".

O **Livro C** utiliza registro simbólico algébrico com tratamentos e conversões, registro figural gráfico e o registro em língua natural. Reescrevemos alguns exemplos de registros utilizados neste livro:

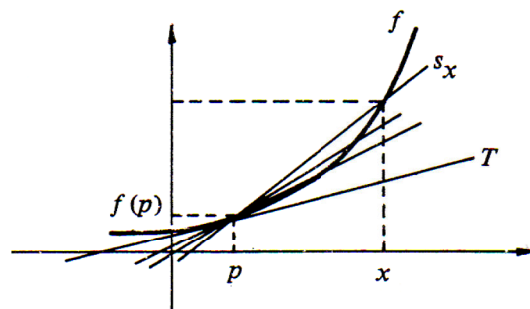
- registro simbólico algébrico com tratamentos:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \xleftrightarrow{\text{tratamento}} v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \xleftrightarrow{\text{tratamento}} f'(p)$$

- registro simbólico algébrico com tratamentos:

$$f'(p) \xleftrightarrow{\text{TRATAMENTO}} \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \xleftrightarrow{\text{TRATAMENTO}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

- registro figural gráfico:



(GUIDORIZZI, 1985, p.135)

- registro em língua natural: a velocidade (instantânea) da partícula no instante t_0 é definida como sendo o limite

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

3.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: ANÁLISE DE CONTEÚDO

Por detrás do discurso aparente, geralmente simbólico e polissêmico, esconde-se um sentido que convém desvendar.

Bardín

Bardin (1977) por meio da Análise de Conteúdo possibilita fornecer técnicas precisas e objetivas que sejam suficientes para garantir a descoberta do verdadeiro significado, ou seja, enquanto concepção de ciência constitui-se uma prática que se pretende neutra no plano do significado do texto, na tentativa de alcançar diretamente o que haveria por trás do que diz. A autora escreve:

A Análise de Conteúdo se define como um "conjunto de técnicas de análise das comunicações" (quantitativos ou não) que aposta no rigor do método como forma de não se perder na heterogeneidade de seu objeto, visa obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores e conhecimentos relativos às condições de variáveis inferidas na mensagem (BARDIN, 1977, p.31).

A análise de conteúdo de Bardin tem alguns objetivos e alocando a nossa pesquisa visa: analisar as características da mensagem (derivada) por meio da comparação para receptores (alunos) distintos; analisar o significado ou contexto de conceitos nas mensagens - Derivada com ênfase na Taxa de Variação - e analisar as condições que induziram ou produziram a mensagem (derivada).

Bardin organiza em três fases a análise de conteúdo:

- Pré-análise

Segundo Bardin (2003, p.95): "trata-se de estabelecer um programa que, podendo ser flexível (quer dizer, que permita a introdução de novos procedimentos no decurso da análise), deve, no entanto, ser preciso". É subdividida em:

- a) Na escolha dos livros didáticos: a autora propõe um contato com o universo de documentos suscetíveis de fornecer informações sobre a questão de pesquisa e indica uma primeira leitura superficial e depois efetuar leituras mais detalhadas. Bardin sugere ainda quatro regras para a escolha dos livros didáticos: exaustividade; representatividade; homogeneidade; pertinência. No nosso trabalho utilizaremos as regras da representatividade e de pertinência.

A regra da representatividade ocorre quando a análise é feita em uma amostra, a amostragem é rigorosa se for parte representativa do universo inicial. Os resultados obtidos poderão ser generalizados ao todo. Em seguida ocorre uma redução do universo que permite diminuir a parte submetida à análise. Na nossa pesquisa, selecionamos os livros didáticos que são largamente utilizados nas universidades brasileiras.

Na regra da pertinência os livros didáticos devem ser adequados de modo a corresponderem ao objeto da análise. Na nossa pesquisa selecionamos três livros didáticos que contém o assunto derivada.

- b) Na formulação de hipóteses que consiste em explicitar e precisar dimensões e direções de análise. Bardin escreve que as hipóteses nem sempre são estabelecidas quando da pré-análise, coloca ainda que não é obrigatório ter como guia algumas hipóteses, para proceder à análise. Na nossa pesquisa não estabelecemos hipóteses.
- c) Na elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final que consiste em após a escolha do tema de investigação, por parte do pesquisador, proceder à organização sistemática em indicadores, com os seguintes objetivos:

Primeiro: evidenciar elementos que não estejam explícitos no texto;

Segundo: efetuar a análise, na nossa pesquisa segunda a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, ou seja, os indicadores servem como ferramenta de análise.

Em busca de responder a questão de pesquisa, elaboramos para a nossa dissertação alguns indicadores que possam colocar em evidência - ou não - noções referentes a apresentação da derivada, e que possam revelar diferenças no enfoque

dados pelos autores. Tais indicadores, que são revelados mais adiante serviram como organização de uma análise. Os diferentes registros de representação semiótica de Duval são os indicadores utilizados para a análise da abordagem dada a derivada, relativas à coordenação desses registros pelos autores.

- Exploração do material

Segundo Bardin, é uma fase *longa e fastidiosa* definida por operações em função de regras previamente formuladas e se as operações da pré-análise foram adequadamente concluídas, a fase de análise *não é mais do que a administração sistemática das decisões tomadas*. Na nossa pesquisa, após uma leitura minuciosa sobre o primeiro capítulo dos livros que tratam o assunto Derivada, fizemos a transcrição de partes representativas do capítulo que trata da apresentação da derivada e noções ligadas a ela, como aceleração, reta tangente, velocidade, definições, teoremas, exemplos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades. Tais transcrições nos orientaram quanto à organização do trabalho e serviram como subsídios para a efetivação da análise por meio dos indicadores.

- Tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação

Para Bardin os resultados brutos devem ser tratados de maneira a serem significativos e válidos por meio de operações simples que permitem estabelecer quadros de resultados, padrões e modelos, os quais resumem e colocam em destaque as informações da análise. Os resultados obtidos podem servir de base a outra análise disposta em torno de novas dimensões teóricas, ou praticada graças a técnicas diferentes.

Justificando ainda a escolha dos livros didáticos podemos escrever, agora, que devido a etapa (a) descrita acima indicamos critérios que evidenciam a preocupação de apresentar ou não condições da existência da derivada como, por exemplo, se os limites

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ como é indicado no **Livro A**, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ como indicado no **Livro B** e $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ como é indicado no **Livro C** existem e também se discutem o teorema (T1): Toda função derivável num ponto a é contínua nesse ponto.

Consideramos esses fatos de suma importância para o entendimento da derivada e suas aplicações.

Na primeira leitura constatamos que os livros **A**, **B** e **C** se preocupam com a existência do limite. Propondo uma série de exemplos e exercícios propostos para o cálculo do limite. Apenas o **Livro C** propõe um exemplo que está na página 159 em que o limite acima não existe:

Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.

(GUIDORIZZI, 1985, p.159)

em que o limite acima não existe. O T1 é discutido em todos os livros em um parágrafo a parte com exemplos e exercícios propostos. Apenas os livros **A** e **C** fazem a demonstração do teorema o **Livro B** indica a demonstração, para o leitor, por meio de exercícios.

Lembramos que esses livros são destinados a públicos distintos os **Livros A** e **C** para estudantes de engenharia, matemática, física entre outros e o **Livro B** para estudantes de Administração, Economia, Contabilidade entre outros.

Outro critério utilizado para a escolha dos livros baseou-se na apresentação do assunto. O **Livro A** apresenta a derivada por meio da noção intuitiva da reta tangente da seguinte forma (p. 115 e p.116):

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

A ideia que usaremos foram introduzidas no século XVIII por Newton e Leibniz.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a,b) , como na Figura 4.1.

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$. Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q . Considerando o triângulo PMQ , na Figura 4.1, temos que a inclinação da retas (ou coeficiente angular) é $tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

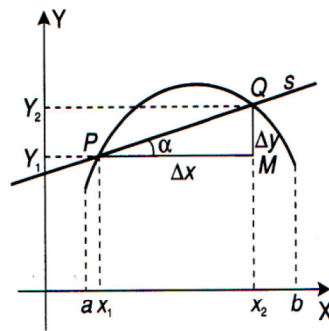


Figura 4.1

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disso, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (ver figura 4.2).

Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P, ou também inclinação da curva P.

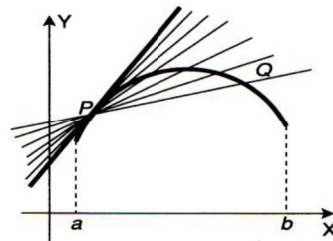


Figura 4.2

O **Livro B** apresenta o conceito por meio de dois exemplos (p.129 e p.130):

- Um da Física

Lembremos que a posição do maglev em qualquer instante t é dada por $s = f(t) = 4t^2$ ($0 \leq t \leq 30$) onde s é medida em pés e t , em segundos. O gráfico da função f está esboçado na Figura 46.

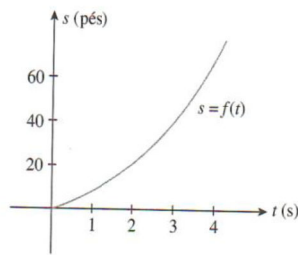
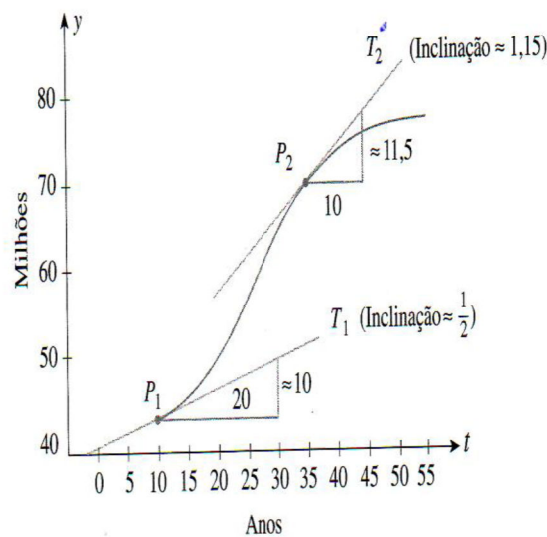


Figura 46

Observe que o gráfico de f se eleva lentamente no início porém mais rapidamente à medida que t cresce, refletindo o fato de que a velocidade do maglev está aumentando com o tempo. Essa observação sugere uma relação entre a velocidade do maglev em dado instante t e a inclinação da curva no ponto correspondente a esse valor t . Isso parece indicar que poderemos determinar a velocidade do mablev em qualquer instante de tempo se pudermos encontrar uma maneira de medir a inclinação da curva em qualquer ponto.

- Um da economia

Beneficiários do serviço de Seguridade Social. O gráfico da função $y = N(t)$, na figura 48, mostra o número de beneficiários do serviço de seguridade social norte americano desde o início de 1990 ($t = 0$) até o ano de 2045 ($t = 55$)

**FIGURA 48**

O número de beneficiários do serviço previdenciário norte-americano de 1990 a 2045. Podemos usar a declividade da reta tangente nos pontos indicados para estimar a razão à qual o número de beneficiários estará mudando.

(TAN, 2008, p.130)

O **Livro C** introduz a derivada (p. 154) do seguinte modo:

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Limites do tipo

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

ocorrem de modo natural tanto na geometria como na física.

Para alcançar o objetivo da pesquisa, com base em Bardin, fizemos uma pré-análise comparativa dos conteúdos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades abordados nos livros escolhidos. Esta fase consistiu em primeiro olhar sobre a maneira como cada autor articula o conceito de Derivada, ou seja, se utiliza exemplos, ilustrações gráficas, se propõe ou não aplicações, se apresenta ou não exercícios resolvidos, que tipo de exercícios são propostos. Este trabalho inicial

teve por objetivo uma organização para evidenciar aspectos ligados ao conceito de Derivada com ênfase na Taxa de Variação, isto é operacionalizar e sistematizar os procedimentos de análise baseados em Duval.

A pré – análise, como sugere Bardin, foi uma leitura superficial, com o objetivo de estabelecer contato com as abordagens feitas pelos autores, para verificar, no que diz respeito ao conceito de Derivada com ênfase na Taxa de Variação, os critérios que revelam o tipo de abordagem desse tema e quais são os registros de representação utilizados por esses autores. A partir desse momento, a leitura foi se tornando detalhada para focar as atenções nas conversões entre diferentes registros, bem como nos tratamentos em cada registro.

Utilizamos, com base em Duval, indicadores que possam revelar a exploração da coordenação dos registros de representação semiótica, para verificar como a Derivada com ênfase na Taxa de Variação é tratada nas obras citadas.

Também utilizamos indicadores que revelam o tipo de abordagem da Derivada, na tentativa de evidenciar as diferenças fundamentais nos enfoques dados pelos autores.

Na tentativa de identificar que diferenças fundamentais são evidenciadas no enfoque dado por diferentes autores, na apresentação da Derivada por meio da Taxa de Variação, vamos recorrer aos seguintes indicadores:

- a) Contextualização: observamos se os autores apresentam o tema Derivada por meio de textos contendo rudimentos da História da Matemática e se esses textos propiciam o desenvolvimento da Derivada. Também, observamos, se o texto parte de problemas relativos à Física, à Matemática, Química, Engenharia, Economia, etc, ou se seguem o padrão definições, teoremas, exemplos e exercícios propostos;
- b) Partem-se de casos particulares aos gerais e vice-versa: observamos se os autores apresentam a Derivada como casos particulares de coeficiente angular, velocidade ou outras taxas de variações aplicadas a problemas de Engenharia, Economia, Química, Biologia, Administração, Economia, etc, para em seguida enunciar o caso geral ou se fazem o contrário;

- c) Condições de existência do limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$: no que se refere as condições de existência da derivada em um determinado ponto, observando se o assunto é abordado e o enfoque dos autores;
- d) Questão da continuidade e diferenciabilidade: verificamos como os autores abordam o tema, se é amplamente discutido ou apenas citado;
- e) Referência sobre relação entre taxa de variação e coeficiente angular: o coeficiente angular é um exemplo de taxa de variação, verificaremos se os autores fazem as conexões coeficiente angular $\Leftrightarrow$ taxa de variação, ou se caminham apenas no sentido coeficiente angular $\Rightarrow$ taxa de variação;
- f) Demonstração do teorema: “Toda função derivável num ponto p é contínua nesse ponto”: a demonstração desse teorema é de fundamental importância, pois existem funções contínuas que não são deriváveis. Os alunos podem ser levados a acreditar que toda função contínua é derivável. Então, notamos como os autores tratam a demonstração desse teorema que conceitos foram utilizados, exemplos, propriedades, etc;
- g) Aplicações práticas do $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ evidenciando a taxa de variação: observamos as aplicações desse limite como taxa de variação referentes a Física, Química, Administração, Economia, Engenharia, Matemática, etc;
- h) Exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades:
 - Nos exercícios resolvidos foram verificados os enunciados e as resoluções, no que diz respeito ao objetivo, por exemplo, se há a utilização de técnicas de derivação, se há privilégio de demonstrações ou não, se propõe aplicações ou não;
 - Nos exercícios propostos e outras atividades foram analisados apenas os enunciados quanto ao objetivo descrito nos exemplos.

Esses indicadores foram utilizados para evidenciar o enfoque dado por cada um dos autores sobre o conceito de Derivada com ênfase na Taxa de Variação e acabamos investigando como o assunto é introduzido, conduzido e como ele é tratado nos textos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades e

em seguida efetuaremos a análise dos livros didáticos relativos aos registros de representação de Duval. Verificaremos se há coordenação entre os registros: Simbólico, Figural e Língua Natural e finalizaremos o processo discutindo os tratamentos e conversões envolvidos nesses registros.

Apresentaremos, na sequência, uma sinopse dos livros que serão analisados, segundo Bardin esta etapa é de exploração.

Livro A: a obra *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração* de Diva Marília Fleming e Mirian Buss Gonçalves foi publicada em São Paulo pela editora Pearson Prentice Hall, no ano de 2006. Este livro destina-se a cursos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral. A obra está assim dividida: capítulo 1: Números Reais, capítulo 2: Funções, capítulo 3: Limite e continuidade, capítulo 4: Derivada, capítulo 5: Aplicações da Derivada, capítulo 6: Introdução à Integração, capítulo 7: Métodos de Integração, capítulo 8: Aplicações da Integral, apêndice A: Tabelas, apêndice B: Respostas dos Exercícios e Bibliografia.

Ressaltamos que faremos a análise, do capítulo 4: Derivada, dos seguintes tópicos 4.1: A Reta Tangente, 4.2: Velocidade e Aceleração, 4.3: A Derivada de uma Função num Ponto, 4.4: A Derivada de uma Função, 4.5: Exemplos, 4.6: Continuidade de Funções Deriváveis e 4.7: Exercícios. Estes assuntos percorrem da página 115 até a página 127.

No prefácio, as autoras, revelam que nesta edição há inserção de aplicações do estudo de funções em diversas áreas, com destaque para a economia e propostas para novas abordagens para alguns conteúdos, considerando o uso das novas tecnologias, e propõe diversos exercícios para serem resolvidos com recursos computacionais.

Observamos que há uma preocupação das autoras para a prática docente para desenvolver os conteúdos do livro.

Ao longo do livro verificamos poucas notas históricas, farta distribuição de exemplos práticos, exercícios propostos com gabarito no final do livro, várias figuras, os teoremas, proposições, corolários, entre outros são demonstrados. Para o professor existe um site com a resolução dos exercícios propostos.

Livro B: a obra *Matemática Aplicada a Administração e Economia* de S. T. Tan é um livro americano. Foi traduzida por Fábio Armando Tal e publicado pela editora Cengage Learning, em São Paulo, no ano de 2008. A obra está assim dividida: capítulo 1: Preliminares, capítulo 2: Funções, Limite e Derivadas, capítulo 3: Diferenciação, capítulo 4: Aplicações da Derivada, capítulo 5: Funções Exponenciais e Logarítmicas, capítulo 6: Integração, capítulo 7: Tópicos Adicionais de Integração, capítulo 8: Cálculo de Várias Variáveis, apêndice: Funções Inversas e Respostas aos Exercícios Ímpares.

O autor começa o prefácio escrevendo: “A matemática participa integralmente do nosso dia-a-dia, que está cada vez mais complexo”.

Em seguida deixa claro seus objetivos: escrever um texto aplicado que motive os alunos e constituir uma ferramenta de ensino útil para os professores. Tan (2008) ressalta que o livro é destinado a um curso introdutório de cálculo de um semestre destinado a estudantes de administração e ciências humanas.

Verificamos que o autor motiva cada um dos conceitos matemáticos aplicados a problemas práticos. Sobre este fato, Tan (2008; p. XI) argumenta:

Limites: esse conceito é introduzido com o exemplo do movimento de maglev. Posteriormente, o mesmo exemplo é utilizado para ilustrar os conceitos de derivada, do teorema do valor médio e de antiderivadas, ao mesmo tempo mostrando a relação entre eles.

Os exemplos e exercícios atuais e relevantes, segundo o autor, foram retirados do conhecimento como administração, economia, ciências humanas e cognitivas e ciências físicas. Em seguida, foram introduzidas mais de 100 novas aplicações reais, como por exemplo, a venda de equipamento GPS, domicílios com conexão em banda larga, sobrevivente de câncer, mensagem de spam, entre outros. Colocando, ainda, que muitas das aplicações utilizam modelos matemáticos (funções) que foram construídos utilizando-se dados retirados de diversas fontes, incluindo jornais e revistas, e dados obtidos na internet.

Observamos que esses relatos são de fundamental importância para a nossa pesquisa.

Ressaltamos que faremos a análise, do capítulo 2: Funções, Limites e Derivadas, do seguinte tópico 2.6: A Derivada. Este assunto está compreendido entre as páginas 129 e 148.

Ao longo do livro não verificamos notas históricas, existem uma grande distribuição de exemplos práticos, exercícios resolvidos e exercícios propostos com gabarito dos ímpares no final do livro, várias figuras e exemplos da Administração, Economia e Física que auxiliam na construção da Derivada, os teoremas, proposições, corolários, não são demonstrados, apenas enunciados.

Para o professor, não existe material de apoio, por exemplo, a resolução das questões. Não há referências bibliográficas.

Livro C: a obra *Um curso de Cálculo (Vol. 1)* de Hamilton Luiz Guidorizzi foi publicada no Rio de Janeiro pela editora Livros Técnicos e Científicos Editora - LTC, no ano de 1985. Este livro destina-se a cursos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral. A obra está assim dividida: capítulo 1: Números reais, capítulo 2: Funções, capítulo 3: Limite e continuidade, capítulo 4: Extensões do conceito de limite, capítulo 5: Teoremas do anulamento, do valor intermediário e de Weierstrass, capítulo 6: Funções exponencial e logarítmica, capítulo 7: Derivadas, capítulo 8: Funções Inversas, capítulo 9: Estudo da variação das funções, capítulo 10: Primitivas, capítulo 11: Integral de Riemann, capítulo 12: Técnicas de primitivação, capítulo 13: Equações diferenciais de 1ª ordem, de variáveis separáveis e lineares, capítulo 14: Teoremas de Rolle, do valor médio e de Cauchy, Regras de L'Hospital, capítulo 15: Fórmulas de Taylor, apêndice 1: Demonstrações dos teoremas do capítulo 5, apêndice 2: Demonstrações do teorema da seção 6.1 (Potência com expoente real) e da propriedade 7 da seção 2.2 (Funções trigonométricas: seno e cossenos), apêndice 3: Funções integráveis segundo Riemann, apêndice 4: demonstrações do teorema da seção 13.4 (Soluções não constantes), apêndice 5: Construção do corpo ordenado dos números reais e respostas, sugestões ou soluções.

No prefácio, o autor, revela que os conceitos e teoremas apresentados venham, sempre que possível, acompanhados, de uma motivação ou interpolação geométrica ou física. Ele afirma que algumas demonstrações são colocadas no apêndice e sugere ao leitor, se desejar, em um primeiro momento omiti-las.

Em relação aos exemplos e exercícios, o autor, pensou em colocar em número suficiente para a compreensão da matéria e os colocou em ordem crescente de dificuldade e recomenda:

Existem exercícios que apresentam certas utilidades e que requerem, para suas resoluções, um maior domínio do assunto; deste modo, não se aborreça se não conseguir resolver alguns deles: tudo que você terá que fazer, nestas horas, é seguir em frente e retornar a eles quando se sentir mais senhor de si.

Ressaltamos que faremos a análise, do capítulo 7: Derivadas, das seguintes seções: 7.1: Introdução, 7.2: Derivada de uma função, 7.3: Derivadas x^n e $\sqrt[n]{x}$, 7.4: Derivadas de e^x e $\ln(x)$, 7.5: Derivadas das funções trigonométricas, 7.6: Derivabilidade e continuidade. Estes assuntos percorrem da página 154 até a página 171.

Ao longo do livro não verificamos notas históricas, os conceitos são apresentados, geralmente, da seguinte forma: conceitos, teoremas, demonstrações, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Os registros geométricos assim como os exemplos práticos desempenham um papel secundário já que há predominância do registro algébrico. Além disso, os exemplos da Física, geralmente, não servem como ponto de partida para o desenvolvimento das ideias básicas sobre a Derivada, só ilustram determinados resultados.

Os teoremas, proposições, corolários, entre outros são demonstrados no decorrer das seções, quando mais complicados são demonstrados no apêndice.

Em relação aos exercícios propostos, alguns, tem gabarito no final do livro. Para o professor, não existe material de apoio, por exemplo, a resolução das questões. Não há referências bibliográficas.

CAPÍTULO 4

O CONCEITO DE DERIVADA NOS LIVROS ANALISADOS

O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos.

Galileu

Vamos analisar o conceito de Derivada buscando verificar se a Taxa de Variação é enfatizada, por meio dos textos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades, à luz dos registros de representação semiótica, de forma separada em três livros didáticos, no que se refere a articulação aos tratamentos e conversões dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval.

Dessa forma, esperamos responder a nossa questão de pesquisa, já formulada anteriormente:

"O tratamento dado, por livros didáticos, por meio dos textos, exercícios resolvidos e propostos e outras atividades, sobre derivada, possibilita a articulação entre os registros de representação semiótica levando a compreensão da Derivada e a enfatiza como Taxa de Variação?"

Os livros analisados foram indicados da seguinte forma:

- **Livro A:** FLEMING, D. M., GONÇALVES M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006;
- **Livro B:** TAN, S. T. - **Matemática Aplicada a Administração e Economia;** tradução técnica Fábio Armando Tal. 2ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

- **Livro C:** GUIDORIZZI, H. G. **Um Curso de Cálculo** Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985.

Lembramos que a escolha por esses livros se deu a partir da nossa experiência, ministrando aulas de Cálculo Diferencial e Integral para cursos de Engenharia e Administração e também devido a questionamentos do nosso aprendizado da Derivada na época da graduação em Matemática.

Na nossa prática docente utilizamos os livros *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*, nos cursos de Engenharia, *Matemática Aplicada a Administração e Economia*, nos cursos de Administração e Economia e *Um Curso de Cálculo (Vol. 1)* da nossa época de graduação no curso de Matemática da Universidade de São Paulo.

Ressaltamos que esses livros também constam nas ementas e são usados como referências, nas bibliografias, principal ou complementar, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral de diversas universidades do Brasil.

Colocamos no anexo algumas ementas e referências bibliográficas de algumas universidades brasileiras.

Para efetuarmos a análise foram utilizados alguns procedimentos metodológicos, baseados na Análise de Conteúdo de Bardin, e dessa forma corroborar com o caráter investigativo da nossa pesquisa que é o conceito de Derivada com ênfase em Taxa de Variação.

Tais procedimentos ajudaram na análise dos dados do nosso trabalho no que diz respeito a organização e a evidenciar a apresentação dos textos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades relativos ao conteúdo Derivada, de acordo com a teoria de Duval.

Livro A

Ressaltamos que faremos a análise, do capítulo 4: Derivada, dos seguintes tópicos 4.1: A Reta Tangente, 4.2: Velocidade e Aceleração, 4.3: A Derivada de uma Função num Ponto, 4.4: A Derivada de uma Função, 4.5: Exemplos, 4.6: Continuidade de Funções Deriváveis e 4.7: Exercícios. Estes assuntos percorrem da página 115 até a página 127.

Começaremos nossa análise no tópico 4.1: Reta Tangente.

As autoras iniciam o capítulo definindo a inclinação de uma curva $y = f(x)$, com o objetivo de encontrar a equação da reta tangente a curva, fazendo menção que essas ideias foram introduzidas por Newton e Leibniz no século XVIII.

Observamos uma nota histórica, essa etapa da Análise do Conteúdo é a contextualização e talvez essa brevíssima nota histórica não seja suficiente para o aprendizado da Derivada.

A obra parte do caso particular de taxa de variação, o coeficiente angular, para em seguida enunciar o caso geral. Notamos que as autoras não fazem a conexão de que o coeficiente angular é uma taxa de variação, isso pode causar um prejuízo no aprendizado da Derivada no que diz respeito a compreensão da Derivada por meio da Taxa de Variação e por consequência nas futuras aplicações dessa variação. Portanto, as autoras caminham no sentido coeficiente angular $\Rightarrow$ taxa de variação.

Utilizando a Figura 6, a seguir, as autoras definem a inclinação da reta s ou o coeficiente angular de s através da tangente:

$$tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

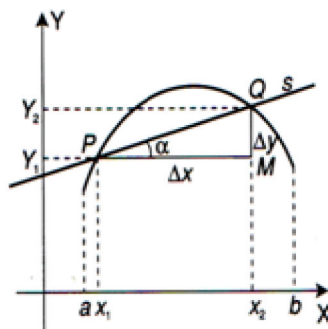


Figura 6 - Definição de coeficiente angular

Fonte: Flemming & Gonçalves, 2006, p.115

Dessa forma as autoras utilizaram uma conversão, ou seja, registro simbólico algébrico $\xleftrightarrow{\text{CONVERSÃO}}$ registro figural.

Verificamos que as autoras utilizam outra conversão, agora do registro da língua natural para o registro figural, para explicar a reta tangente da seguinte forma: “Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção de P. Diante disto, a inclinação da reta secante s variará.” Em seguida apresenta a Figura 7:

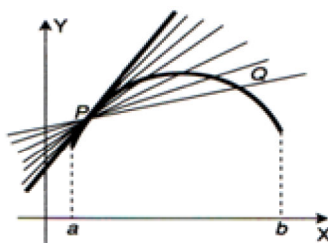


Figura 7 - Reta Tangente

Fonte: Flemming & Gonçalves, 2006, p.116

Na definição de inclinação da reta tangente observamos alguns tratamentos:

- $m(x_1) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- $m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

A seguir são feitos dois exercícios resolvidos com o intuito de calcular o coeficiente angular, por meio do limite, e encontrar a equação da reta tangente a curva num ponto dado. Um dos exercícios resolvidos está na página 116 e os reproduzimos a seguir:

4.1.3 Exemplos

(i) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) .

(ii) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto de abscissa 3.

Esses dois exemplos revelam que as autoras têm como objetivo calcular o coeficiente angular da reta tangente por meio do limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ e não apresentam outra aplicação.

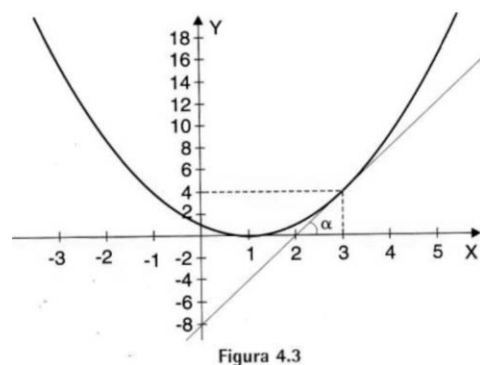
Na resolução dos exercícios as autoras utilizam vários registros algébricos, registros figural e registro de língua natural com alguns tratamentos e conversões. Vejamos alguns exemplos:

- tratamento:

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} = 2x_1 - 2. \end{aligned}$$

- conversão:

$$tg(\alpha) = m(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \text{ e}$$



(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.117)

No tópico 4.2: Velocidade e Aceleração, as autoras, iniciam o parágrafo fazendo um tratamento no registro em língua natural: "Velocidade e aceleração são conceitos que todos nós conhecemos. Quando dirigimos um carro, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro marca, a cada instante, a velocidade. Se pisarmos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda. Sentimos a aceleração".

Em seguida mostra os cálculos da aceleração e velocidade utilizando limites e fazendo alguns tratamentos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t)$$

Observamos que, as autoras, no último tratamento fazem a indicação $v'(t)$ sem em nenhum momento, até aqui, terem escrito o que significa esse registro simbólico, $v'(t)$.

Nesta seção temos uma aplicação prática do limite, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, na Física, as autoras o utilizam para calcular a velocidade instantânea e a aceleração

instantânea mas não escrevem que a velocidade e a aceleração são outros casos de taxa de variação assim como o coeficiente angular.

A figura a seguir exemplifica como a taxa de variação está vinculada aos conceitos de velocidade, coeficiente angular e aceleração:



Figura 8 –Taxa de Variação

Fonte: Elaboração do autor

Contudo neste parágrafo, há a primeira alusão ao objeto de nossa pesquisa mesmo que de maneira “escondida”: “*Observamos que ela (aceleração) mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo Δt .*”.

A seguir são feitos dois exemplos (exercícios resolvidos), localizados na página 119, da Física privilegiando as técnicas algébricas do ensino fundamental e médio para calcular o limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{16(t + \Delta t) - (t + \Delta t)^2 - [16t - t^2]}{\Delta t}$$

[...]

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (16 - 2t - \Delta t) = 16 - 2t \text{ unid. veloc.}$$

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p. 119)

Segue a transcrição dos exemplos:

(i) No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$.

Determinar:

- (a) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[2,4]$;
- (b) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;
- (c) a aceleração média no intervalo $[0,4]$;
- (d) a aceleração no instante $t = 4$.

(ii) A equação do movimento de um corpo em queda livre é $s = \frac{1}{2}gt^2$, sendo g um valor constante. Determinar a velocidade e a aceleração do corpo em um instante qualquer t . (FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.119).

Para resolver os exercícios resolvidos Flemming e Gonçalves utilizam vários registros algébricos, registros numéricos e registros de cálculos com alguns tratamentos, enfatizando o uso do limite como aplicação de cálculos de velocidade instantânea e aceleração instantânea. Vejamos um exemplo:

• tratamento:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{16 - 2(t + \Delta t) - 16 + 2t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{16 - 2t - 2\Delta t - 16 + 2t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-2\Delta t}{\Delta t} = -2 \text{ unid. aceler.} \end{aligned}$$

Flemming e Gonçalves, no tópico 4.3: A Derivada de uma Função num Ponto, cuja reprodução está feita no quadro 5, utilizam os registros de língua natural, registros de dedução válida a partir de definições ou teoremas e o registro simbólico, com alguns tratamentos e conversões para definir a Derivada num ponto e dar significado ao símbolo $f'(x_1)$.

Vejamos alguns exemplos:

- tratamento:

“a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 representa a inclinação da curva neste ponto”

- conversão:

“ $f'(x)$, lê-se f linha de x, no ponto x_1 ”

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.121)

4.3 A Derivada de uma Função num Ponto

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1 , denotada por $f'(x_1)$, (lê-se f linha de x, no ponto x_1), é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ quando este limite existe.}$$

Também podemos escrever

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como vimos na seção anterior, este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 representa a inclinação da curva neste ponto.

Quadro 5 - Derivada de uma Função num Ponto

Fonte: Flemming & Gonçalves, 2006, p.121.

Salientamos o cuidado das autoras em deixar claro que

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ quando este limite existe e ressaltamos que nos}$$

exercícios resolvidos a obra não traz nenhum exemplo de quando esse limite não existe.

A fim de entendermos essa discussão daremos o seguinte exemplo: a função $f(x) = |x| + 1$ não é derivável em $x_1 = 0$. De fato,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Como os limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ são diferentes segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe e portanto não existe $f'(0)$ e assim não há inclinação da reta tangente a curva nesse ponto, ou seja, não existe reta tangente ao gráfico de $f(x) = |x| + 1$ no ponto $(0, f(0))$.

A obra, no tópico 4.4: A Derivada de uma Função, cuja reprodução está feita no quadro 6, apresenta a mesma estrutura do tópico 4.3, ou seja, utilizam os registros de língua natural, registros de dedução válida a partir de definições ou teoremas e o registro simbólico, com alguns tratamentos e conversões para, agora, definir a Derivada de uma função e dar significado ao símbolo $f'(x)$.

Vejamos alguns exemplos:

- tratamento:

$$y' = f'(x) = D_x f(x) = D_x y = \frac{dy}{dx}$$

- conversão:

$\frac{dy}{dx}$ lê-se derivada de y em relação a x

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.122)

4.4 A Derivada de uma Função

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se *f* linha de *x*), tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ se este limite existir.}$$

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Outras notações podem ser usadas no lugar de $y' = f'(x)$:

Quadro 6 - Derivada de uma Função

Fonte: Flemming & Gonçalves, 2006, p.121.

Ressaltamos, ainda, a falta da discussão de que o $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ possa não existir. Apesar do enfoque dado ao fato de que $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, desde que o limite exista.

Em virtude de exemplificarmos nossa discussão daremos um exemplo de que $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ não existe.

Weierstrass mostrou que a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

é contínua em todos os pontos, mas não tem derivada em nenhum.

Especificamos que, Weierstrass mostrou que gráficos de funções que possuem, por exemplo, os formatos da Figura 9 são de funções contínuas e não diferenciáveis.

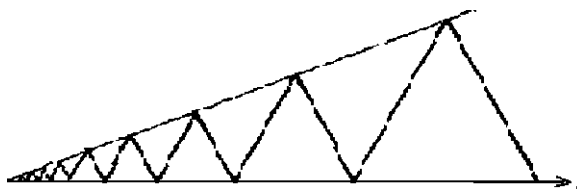


Figura 9 - Função não Diferencial

Fonte: Elaboração do autor

De acordo com os indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin, os tópicos 4.3 e 4.4 não apresentam nenhuma contextualização seguindo o padrão definições, exemplos e exercícios propostos.

A seguir, no tópico 4.5: Exemplos, as autoras propõem seis exercícios resolvidos, utilizando diversos registros de representação semiótica como podem os destacar: registro algébrico, registro simbólico, registro figural, registro da língua natural e o registro simbólico. Fazendo vários tratamentos entre os mesmos registros e conversões entre registros distintos a fim de exemplificar o cálculo da derivada por meio do limite, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, aplicadas a um ponto ou mesmo para encontrar a função derivada. Transcrevemos quatro desses exercícios resolvidos:

- (i) Dada a função $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.
- (ii) Dada função $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$, encontre $f'(x)$.
- (iii) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, que seja paralela à reta $8x - 4y + 1 = 0$.
- (iv) Encontre a equação da reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.

Nos exemplos (exercícios resolvidos) Flemming e Gonçalves tem por objetivo calcular a derivada em um determinado ponto por meio do cálculo do limite

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ como podemos constatar na resolução do item (i):

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \dots = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(26 + 5\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (26 + 5\Delta x) = 26$$

dessa forma não há utilização de técnicas de derivação e a única aplicação que existe é da própria Matemática: após encontrar o coeficiente angular em um determinado ponto, $f'(x_0)$, escrever as equações das retas tangente e normal a curva por meio da equação $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ e da relação da geometria analítica $m_t \cdot m_n = -1$.

A seguir ilustramos alguns tratamentos e conversões:

● tratamento:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

● conversão:

[...] a reta [...] tangente a curva $y = \sqrt{x}$ [...] é $16x - 8y + 1 = 0$. Graficamente, este exemplo é ilustrado na figura 4.5

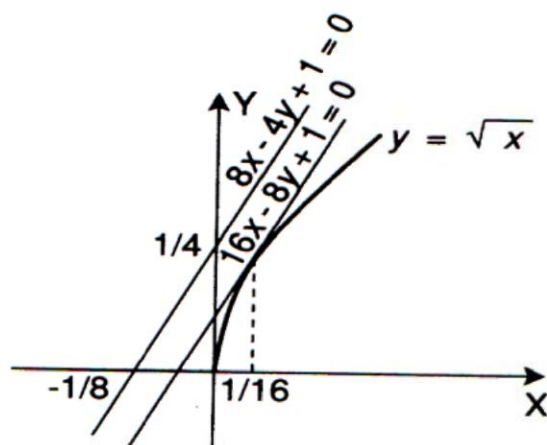


Figura 4.5

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.124)

No tópico 4.6: Continuidade de Funções Deriváveis, o livro didático enuncia o teorema da diferenciabilidade, reproduzimos o teorema no quadro 7.

Teorema: Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto.

Quadro 7 - Teorema da Função Diferencial

Fonte: Flemming & Gonçalves, 2006, p.126

Verificamos que o teorema é apenas citado seguido da demonstração que é feita usando os conceitos de limite, função aplicada em um determinado ponto e a questão da continuidade de funções: se a função é contínua $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$.

Não há contextualização, exemplos práticos e um contra-exemplo para explicar o fato de que existem funções contínuas que não são deriváveis.

Neste parágrafo, as autoras, apresentam a prova do teorema utilizando os registros:

- simbólico algébrico:

$$(*) \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0$$

- língua natural:

(i) $f(x_1)$ existe;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ existe

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$

- registro algébrico "tratamento":

$$\lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \rightarrow x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0 \cdot f'(x) = 0$$

- língua natural:

Valem as condições (i), (ii), (iii) e conclui-se que $f(x)$ é contínua em x_1

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.126).

E também verificamos alguns tratamentos e conversões: Por exemplo:

- tratamentos:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

- conversões:

(i) $f(x_1)$ existe;[...] Por hipótese, $f(x)$ é derivável em x_1 . Logo, $f'(x_1)$ deve existir e, pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

concluimos que $f(x_1)$ deve existir para que o limite tenha significado.

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.126)

Flemming e Gonçalves apresentam 14 exercícios propostos, localizados entre as páginas 127 e 128, entre os quais cinco atividades para serem desenvolvidas utilizando um software de Matemática. Os exercícios e as atividades estão divididos em: determinar as equações da reta tangente e normal (grupo A), cálculos de velocidade e aceleração (grupo B), cálculos de Derivada utilizando a definição (grupo C) e exercícios para verificar a existência da Derivada em um determinado ponto (grupo D).

A seguir transcrevemos alguns representantes destes grupos:

●grupo A:

4. Encontrar as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^2 - 2x = 1$ no ponto (-2,9).

●grupo B:

6. Influências externas produzem uma aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento retilíneo é $y = \frac{b}{t} + ct$, onde y é o deslocamento de t , o tempo.

a) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$?

b) Qual é a equação da aceleração?

●grupo C:

8. Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 1 - 4x^2$.

●grupo D:

11. Dada a função $f(x) = \frac{1}{2x-6}$, verificar se existe $f'(3)$. Esboçar o gráfico.

(FLEMMING & GONÇALVES, 2006, p.127-128)

Os objetivos das autoras nesta série de exercícios é “praticar” o cálculo do limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ em situações de cálculos de derivada, velocidade, aceleração e coeficiente angular.

Não há exercícios de demonstração e nenhuma conexão explícita da Derivada com ênfase na Taxa de Variação.

Com intuito de auxiliar na nossa conclusão da análise do **Livro A** e efetuarmos as devidas comparações: **Livro A - Livro B** e **Livro A - Livro C**, resumimos aproximadamente os tratamentos e conversões da teoria dos Registros e Representação Semiótica de Duval e alguns indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin: contextualização, demonstração e aplicação na seguinte tabela:

	Tratamentos	Conversões	Contextualização	Demonstração	Aplicação
Menção Explícita da Taxa de Variação	7%	5%	34%	0%	8%
Menção Implícita da Taxa de Variação	93%	95%	66%	100%	92%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

Quadro 8 - Resumo do Livro A

Fonte: Elaboração do autor

De acordo com os dados aproximados do Quadro 8, concluímos que o **Livro A**, no capítulo 4: Derivada, **não faz menção** explícita da Derivada com ênfase na Taxa de Variação no que diz respeito aos tratamentos (cerca de 7%) e conversões (cerca de 5%) da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e alguns indicadores: contextualização (cerca de 34%), demonstração (cerca de 0%) e aplicação (cerca de 8%) da Análise de Conteúdo de Bardin.

Conjecturamos que esse fato deve ter ocorrido devido ao público a qual é destinado a obra: Engenharia e Matemática principalmente.

Dessa forma a obra pode levar, neste momento, ao não aprendizado do estudante da Derivada com ênfase na Taxa de Variação e, por conseguinte a não conexão da Derivada com as diversas aplicações relatadas, por exemplo, na página 86 do nosso trabalho.

Ressaltamos que Flemming e Gonçalves, na página 179, ou seja, após 52 páginas do início do conceito de Derivada iniciam o capítulo 5 discutindo aplicações da Derivada com o tema Taxa de Variação.

Livro B

Salientamos que faremos a análise, do capítulo 2: Funções, Limites e Derivadas, do seguinte tópico 2.6: A Derivada. Este assunto está compreendido entre as páginas 129 e 153.

Observamos, por meio de uma análise rápida, que o autor utiliza vários indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin, entre eles: contextualização, referências sobre a relação taxa de variação, coeficiente angular e derivada e aplicações práticas do $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ coordenados com os diversos Registros de Representação Semiótica da teoria de Duval: simbólico, língua natural, figural, dedução válida a partir de definição ou de teoremas e articulou diversos tratamentos e conversões. Ressaltamos que o autor recorre a inúmeras figuras e exemplos práticos da Administração, Economia, Engenharia, entre outros.

O autor inicia o parágrafo alertando que: “Já mencionamos na Seção 2.4 que determinar a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra é matematicamente equivalente a determinar a declividade da reta tangente a uma curva dada em um ponto da reta.”

Dessa forma verificamos a preocupação, do autor, em relacionar a Derivada com a Taxa de Variação, ou seja, Tan explora bastante a conexão coeficiente angular $\Leftrightarrow$ taxa de variação $\Leftrightarrow$ derivada.

A seguir, Tan, faz uma contextualização e apresenta a noção intuitiva de Derivada por meio de dois exemplos: um da Física – o movimento do maglev :

Consideremos o movimento do maglev[...]. Lembremos que a posição do maglev em qualquer instante t é dada por

$$s = f(t) = 4t^2 \qquad 0 \leq t \leq 30$$

onde s é medida em pés e t , em segundos[...].

(TAN, 2008, p.129)

e o outro da Economia – Beneficiários do Serviço de Seguridade Social:

O gráfico da função $y = N(t)$, na Figura 48, mostra o número de beneficiários do serviço de seguridade social norte-americano desde o início de 1990 ($t = 0$) até o ano de 2045 ($t = 55$) [...].

(TAN, 2008, p.130)

Não há rudimentos da História da Matemática e a obra não segue o padrão tradicional definições, teoremas, exemplos e exercícios propostos.

Neste tópico encontramos os seguintes registros, algumas conversões e não há tratamentos, por exemplo:

- simbólico:

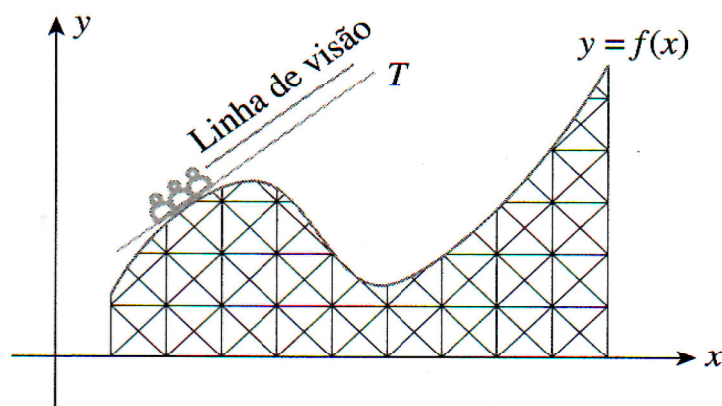
$$s = f(t) = 4t^2$$

- língua natural:

“Podemos usar a declividade da reta tangente nos pontos indicados para estimar a razão à qual o número de beneficiários estará mudando.”

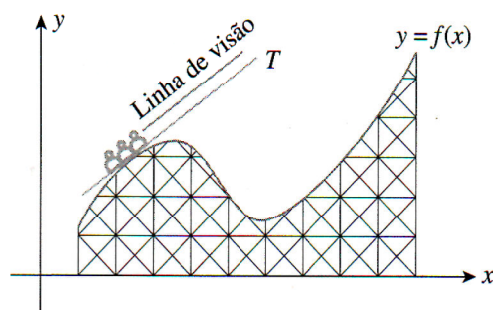
(TAN, 2008, p.130)

- figural:



(TAN, 2008, p.130)

- Conversão:



(TAN, 2008, p.130)

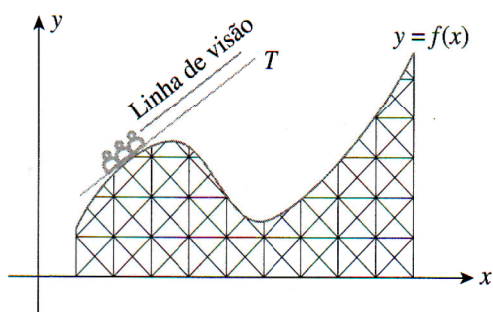


T é paralela à linha de visão.

(TAN, 2008, p.130)

A transcrição a seguir exemplifica a preocupação do autor com a contextualização para a apresentação da Derivada:

Imaginemos que a curva representa um trecho de uma montanha-russa [...] Quando o trem está no ponto P sobre a curva, a linha de visão de um passageiro, sentado ereto no trem e olhando para a frente, será paralela à reta T que é tangente à curva em P .



(TAN, 2008, p.130)

Após a noção intuitiva, Tan, utiliza vários registros, principalmente de figuras articulados aos tratamentos e conversões para no final definir a declividade da reta tangente, reproduzida no quadro 9

A declividade da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x, f(x))$ é dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se o limite existe.

Quadro 9 - Declividade de uma reta tangente

Fonte: TAN, 2008, p.132.

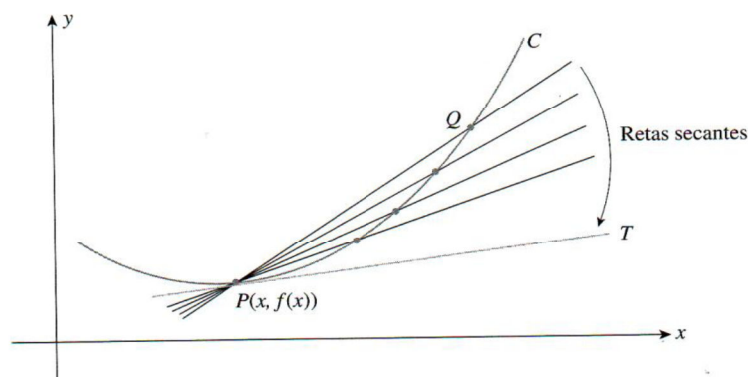
O autor apresenta a Derivada a partir do coeficiente angular e a seguir define o caso geral, faz uma breve discussão sobre a existência do limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. O enfoque dado a existência deste limite é mínima em detrimento das inúmeras aplicações práticas do limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ que estão presentes ao longo do parágrafo.

Alguns exemplos dos Registros de Representação Semiótica articulados com os tratamentos e conversões:

- simbólico:

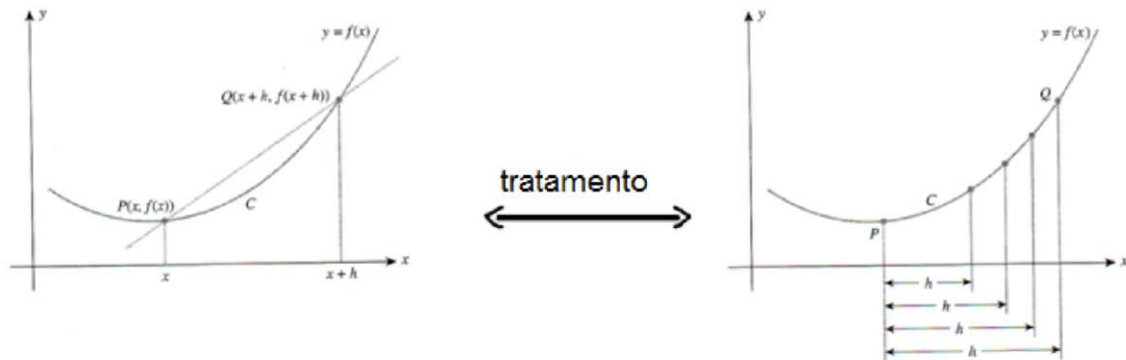
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- figural:

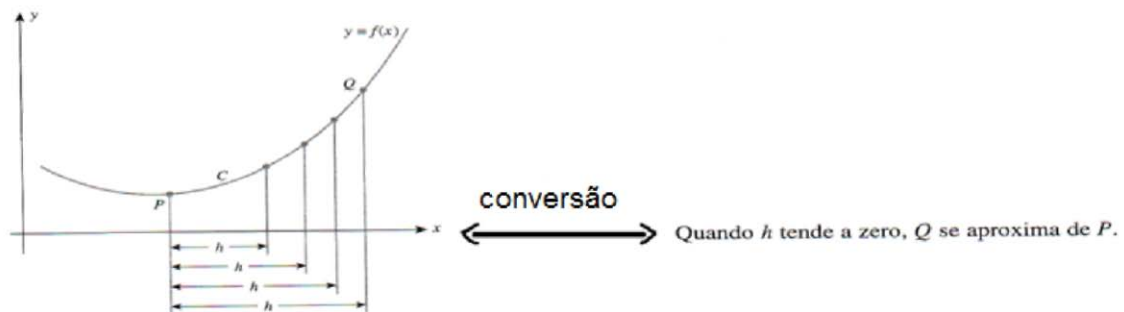


(TAN, 2008, p.131)

●tratamento:



●conversão:



(TAN, 2008, p.130)

O autor, no próximo parágrafo apresenta a Taxa de Variação Média e a Taxa de Variação Instantânea. É dada muita ênfase na diferença entre taxa de variação média e a taxa de variação instantânea. Aliás, comparando os livros: **Livro A** e **Livro B** o último foi o único livro didático a fazer a relação entre a Taxa de Variação e o Limite do quadro 9. Esta relação está reproduzida no quadro 10.

A **taxa de variação média** de f no intervalo $[x, x+h]$ ou declividade da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$ é

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A taxa de variação instantânea de f em x ou declividade da reta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$ é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Quadro 10 - Taxa de Variação Média e Instantânea

Fonte: TAN, 2008, p.132

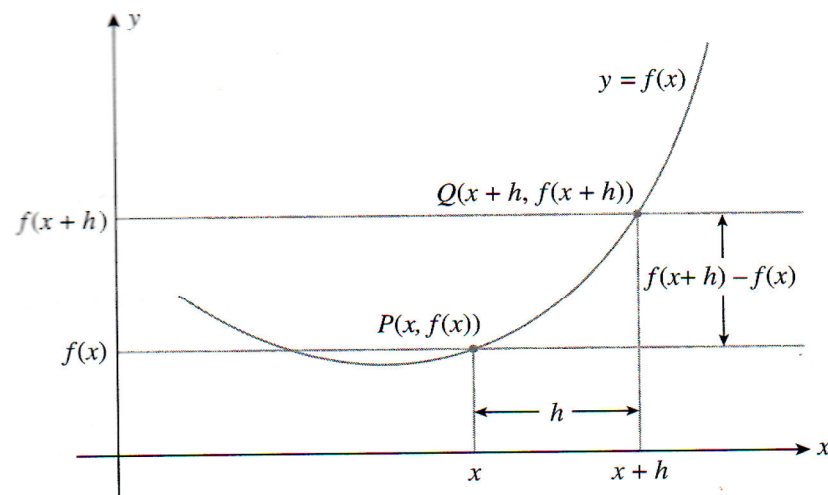
Para exemplificarmos a ênfase na taxa de variação citamos o exemplo 3 localizado na página 134, item (b) onde o autor pede para o leitor calcular $f'(2)$ e interpretar o resultado obtido. A resposta ao problema é a seguinte: $f'(2)=2(2)=4$. *Isso nos diz que a declividade da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,4)$ é 4. Também nos diz que a função f varia à taxa de 4 unidades para cada variação de uma unidade em x no ponto $x = 2$ [...].*

Para fazer a relação do limite do quadro 10 e a Taxa de Variação, o autor utiliza diversos registros de representação semiótica, entre os quais destacamos:

- simbólico:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- figural:



(TAN, 2008, p.132)

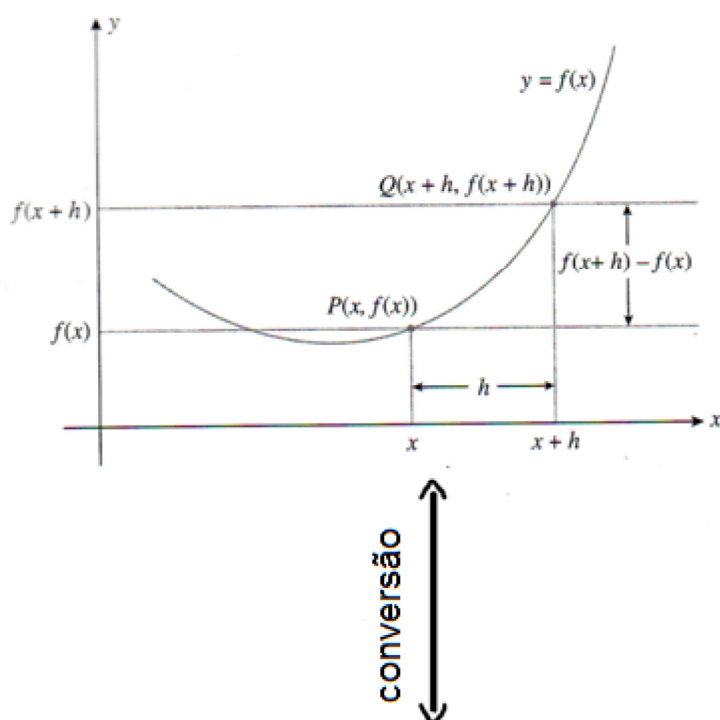
- língua natural:

“ $f(x+h) - f(x)$ é a variação em y que corresponde a uma variação de h em x .”

- tratamento:

“Para enfatizar, a taxa de variação de uma função f em x é frequentemente chamada **taxa de variação instantânea de f em x .** TRATAMENTO “ $f(x+h) - f(x)$ é a variação em y que corresponde a uma variação de h em x .”

- conversão:



$f(x+h) - f(x)$ é a variação em y que corresponde a uma variação de h em x .

(TAN, 2008, p.132)

Corroborando ainda com a importância dada a taxa de variação ao término desta seção, Tan propõe uma atividade muito interessante: “Explique a diferença entre taxa de variação média e a taxa de variação instantânea de uma função”.

O autor, agora, define a Derivada como sendo os limites dos quadros 9 e 10 ressaltando: “O limite [...] que mede tanto a declividade da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P(x, f(x))$ quanto a taxa de variação (instantânea) de f em x recebe um nome especial: **derivada de f em x** (TAN, 2008, p. 133)”.

Reproduzimos a definição no quadro 11.

A derivada de uma função f em relação a x é a função f' (leia-se “f linha”) definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O domínio de f' é o conjunto de todos os x para quais o limite existe.

Quadro 11 - Derivada de uma função

Fonte: TAN, 2008, p.133

Verificamos que neste tópico o texto, ressalta alguns indicadores da Análise de Conteúdo como a referência sobre a relação entre a taxa de variação e o coeficiente angular e aplicações práticas do $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ como taxa de variação a fim de resolver problemas referentes a Física, Economia, Engenharia, Administração, entre outros.

Em comparação ao **Livro A** que utiliza termos como, por exemplo, calcule a derivada no ponto 2 o **Livro B** utiliza calcule a taxa de variação no ponto 2 e deixa claro que taxa de variação instantânea $\Rightarrow$ derivada. Exemplificamos este fato com o:

● **Exemplo 4** Seja $f(x) = x^2 - 4x$

- Encontre $f'(x)$.
- Encontre o ponto no gráfico de f onde a reta tangente é horizontal.
- Esboce o gráfico de f e da reta tangente à curva no ponto encontrado na parte (b).
- Qual é a taxa de variação de f neste ponto?

(TAN, 2008, p.135)

A seguir são feitos alguns exercícios resolvidos (exemplos), dentre os quais um exemplo aplicado na Economia. Na resolução predomina o cálculo da derivada por meio do limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

● **Exemplo 3** Seja $f(x) = x^2$.

a. Calcule $f'(x)$.

b. Calcule $f'(2)$ e interprete o resultado obtido.

Solução:

$$\text{Passo 1 } f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$\text{Passo 2 } f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$$

$$\text{Passo 3 } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

$$\text{Passo 4 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$$

(TAN, 2008, p.134)

● **Exemplo Aplicado 7: Demanda por pneus.** A administração da Companhia de Pneus Titan descobriu que a função demanda semanal para seus pneus Super Titan é dada por

$$p = f(x) = 144 - x^2$$

onde p é medido em dólares e x é medido em milhares. (Figura 56).

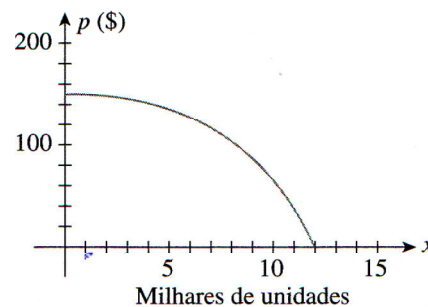


FIGURA 56

O gráfico da função demanda $p = 144 - x^2$.

- Calcule a taxa de variação média no preço unitário do pneu se a quantidade em demanda estiver entre 5000 e 6000 pneus, entre 5000 e 5100 pneus, e entre 5000 e 5010 pneus.
- Qual é a taxa de variação instantânea do preço unitário quando a quantidade em demanda é de 5000 unidades?

(TAN, 2008, p.138)

Na página 137 temos outras atividades intituladas: Explore e Discuta e Explorando com Tecnologia salientando a Derivada com ênfase na Taxa de Variação. Reproduzimos estas atividades nos quadros 12 e 13.

EXPLORE E DISCUTA



Considere a seguinte definição alternativa de derivada de uma função: Seja h um número positivo e suponha que $P(x-h, f(x-h))$ e $Q(x+h, f(x+h))$ são dois pontos sobre o gráfico de f .

1. Dê uma interpretação geométrica e uma interpretação física para o quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Faça um esboço para ilustrar a sua resposta.

2. Dê uma interpretação geométrica e uma interpretação física para o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Faça um esboço para ilustrar a sua resposta.

3. Explique por que faz sentido definir

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

4. Usando a definição na parte 3, formule um procedimento em quatro etapas para calcular $f'(x)$ semelhante àquele da página 133 e use-o para calcular a derivada de $f(x) = x^2$. Compare sua resposta com aquela obtida no Exemplo 3 na página 134.

Quadro 12 - Explore e Discuta

Fonte: TAN, 2008, p.137

Explorando com Tecnologia



1. Utilize os resultados do Exemplo 5 para esboçar o gráfico de $f(x) = 1/x$ e sua reta tangente no ponto $(1, 1)$ representando os gráficos de $y_1 = 1/x$ e $y_2 = -x + 2$ na janela retangular $[-4, 4] \times [-4, 4]$.
2. Algumas calculadoras gráficas representam a reta tangente ao gráfico de uma função em dado ponto automaticamente – tudo o que você precisa fazer é especificar a função e dar a coordenada x do ponto de tangência. Se sua calculadora gráfica possui esse recurso, verifique o resultado da parte (1) sem encontrar a equação da reta tangente.

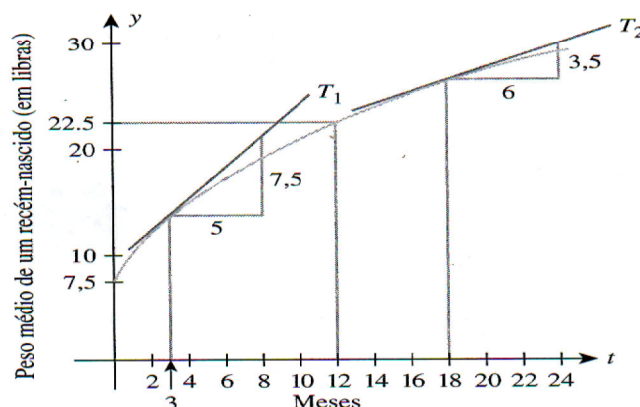
Quadro 13 - Explorando com Tecnologia

Fonte: TAN, 2008, p.137

Nos exercícios resolvidos, exercícios propostos (localizados entre as páginas 142 e 146) e outras atividades, existem alguns indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin, ou seja, Tan propõe as atividades com o objetivo de utilização de técnicas de derivação, sem privilégio de demonstração e sempre que possível uma aplicação prática. Exemplificamos esta última afirmação por meio do seguinte exercício proposto:

●Exercício Proposto:

1. **Peso Médio de um recém-nascido.** O gráfico a seguir mostra o peso médio de um recém-nascido desde o nascimento ($t = 0$) até 2 anos ($t = 24$). Estime a taxa de crescimento do peso da criança para $t = 3$ e $t = 18$, calculando a declividade das respectivas retas tangentes. Qual é a taxa de crescimento do peso médio durante o primeiro ano de vida?



(TAN, 2008, p.142)

O autor termina a seção mostrando uma tabela com diversas aplicações práticas da Derivada com ênfase na Taxa de Variação.

TABELA 4 Aplicações utilizando a taxa de variação			
x denota	y denota	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Mede a	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Mede a
Tempo	Concentração de uma droga na corrente sanguínea no instante x	Taxa de variação média da concentração da droga no intervalo de tempo $[a, a+h]$	Taxa de variação instantânea da concentração da droga na corrente sanguínea no instante $x = a$
Número de artigos vendidos	Receita resultante da venda de x unidades	Taxa de variação média da receita quando o nível de vendas está entre $x = a$ e $x = a+h$	Taxa de variação instantânea da receita quando o nível de vendas é de a unidades
Tempo	Volume de vendas no instante x	Taxa de variação média do volume de vendas no intervalo de tempo $[a, a+h]$	Taxa de variação instantânea do volume de vendas no instante $x = a$
Tempo	População de <i>Drosophila</i> (moscas-das-frutas) no instante x	Taxa de crescimento médio da população de moscas no intervalo $[a, a+h]$	Taxa de crescimento instantâneo da população de moscas no instante $x = a$
Temperatura em uma reação química	Quantidade de produto formado na reação química quando a temperatura é de x graus	Taxa de formação média do produto químico no intervalo de temperatura $[a, a+h]$	Taxa de formação instantânea do produto químico quando a temperatura for de a graus

Quadro 14 - Aplicações utilizando a taxa de variação

Fonte: TAN, 2008, p.139

Vale a pena ressaltar que para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação o autor utiliza diversos registros de representação semiótica articulando diversos tratamentos e conversões. Alguns exemplos desses registros:

- simbólico algébrico:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- língua natural:

“[...] f varia à taxa de $f'(x)$ unidades para cada variação de uma unidade em x no ponto x .”

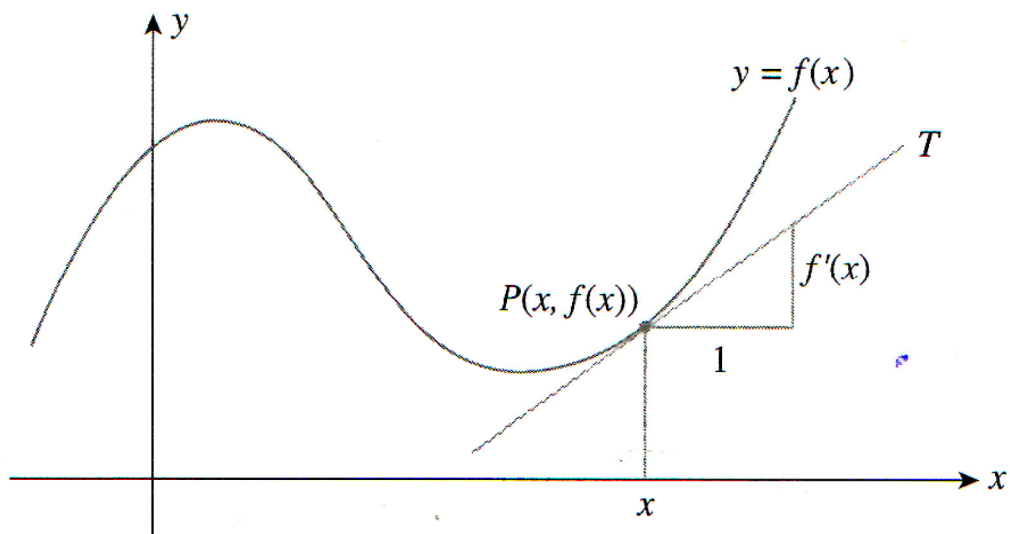
- simbólico:

$$\frac{dy}{dx}$$

- Tratamento do registro algébrico:

$$f(x+h) - f(x) = (3x + 3h + 5) - (3x + 5) = 3h$$

- figural:



(TAN, 2008, p.133)

- língua natural:

“Assim, a derivada de uma função f é a função f' que fornece a declividade da reta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto $(x, f(x))$ e também a taxa de variação de f em x .”

(TAN, 2008, p.133)

E também verificamos alguns tratamentos e conversões:

- tratamento:

$$D_x f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$y'$$

- conversão:

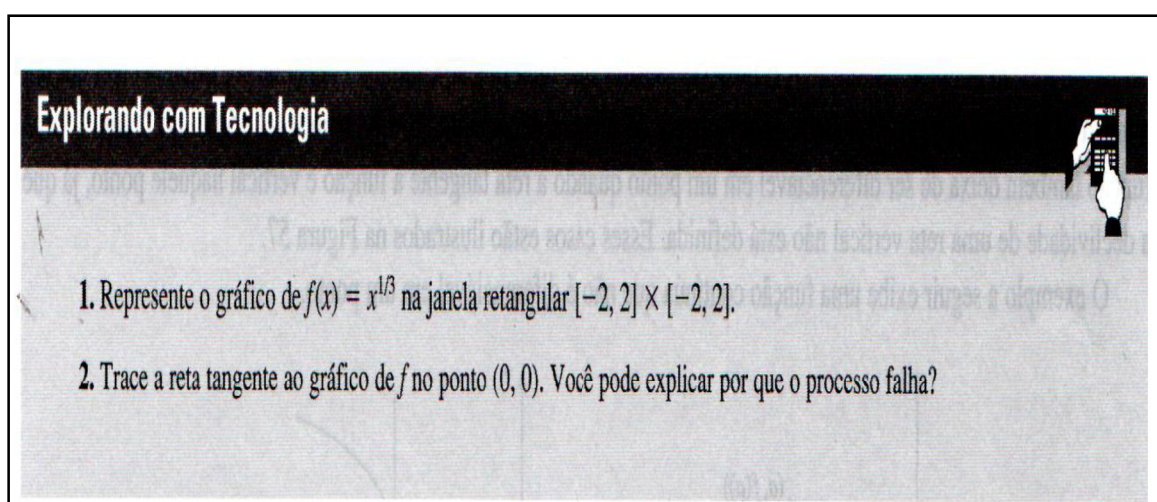
O último tópico é intitulado Diferenciabilidade e Continuidade e nesta seção o autor não faz diferente das outras apresentações, utiliza diversos registros de representação semiótica e estes registros articulados com diversos tratamentos e conversões. A seguir mostra um exemplo e propõe atividades com os títulos: Explorando Tecnologia e Explore e Discuta. Transcrevemos alguns exemplos e atividades:

● **Exemplo Aplicado 8: Salário.** Mary trabalha na loja de departamentos B&O, onde, durante a semana, recebe \$ 8 por hora pelas primeiras oito horas e \$ 12 por hora extra. A função

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } 0 \leq x \leq 8 \\ 12x - 32 & \text{se } 8 < x \end{cases}$$

fornece os vencimentos de Mary em um dia da semana no qual ela trabalhou x horas. Esboce o gráfico da função f e explique por que ela não é diferenciável em $x = 8$.

(TAN, 2008, p.140)



Explorando com Tecnologia

1. Represente o gráfico de $f(x) = x^{1/3}$ na janela retangular $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
2. Trace a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$. Você pode explicar por que o processo falha?

Quadro 15 - Explorando com Tecnologia

Fonte: TAN, 2008, p.140



EXPLORE E DISCUTA

Suponhamos que uma função f seja diferenciável em $x = a$. Pode haver duas retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$? Explique sua resposta.

Quadro 16 - Explore e Discuta

Fonte: TAN, 2008, p.141

Verificamos que antes de enunciar o teorema da diferenciabilidade Tan, aborda um exemplo prático, que é o exemplo aplicado 8, transcrito acima. Neste ponto utiliza um dos indicadores da Análise de conteúdo de Bardin: contextualização - utilizando parte de problemas relativos a Economia para enunciar o teorema. O teorema segue reproduzido no quadro 17:

Se uma função é diferencial em $x = a$, então ela é contínua em $x = a$.

Quadro 17 - Diferenciabilidade e Continuidade

Fonte: TAN, 2008, p.140

Há alguns comentários sobre a reciprocidade do teorema e o autor não faz a demonstração, sugerindo ao leitor provar esse resultado por meio do exercício 60, página 146:

60. Mostre que se uma função f é diferencial em um ponto $x = a$, então f deve ser contínua naquele ponto.

Sugestão: Escreva

$$f(x) - f(a) = \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot (x - a)$$

Use a regra do produto para limites e a definição de derivada para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

Segundo um dos indicadores que utilizamos, com base nos critérios da Análise de Conteúdo de Bardin a demonstração desse teorema é de fundamental importância, pois existem funções contínuas que não são deriváveis. A ausência da demonstração do teorema e a falta de contraexemplo podem levar os estudantes a acreditarem que toda função contínua é derivável.

Neste tópico concluímos que tanto **Livro A** quanto o **Livro B** apresentam alguns contraexemplos, mas o **Livro A** faz a demonstração detalhada do teorema.

A obra apresenta, neste tópico, também alguns registros de representação semiótica com articulações de tratamentos e conversões:

• simbólico algébrico:

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } 0 \leq x \leq 8 \\ 12x - 32 & \text{se } 8 < x \end{cases}$$

• língua natural:

"[...] Reexaminando a função do Exemplo 8, percebemos claramente que f é contínua em todos os pontos, em particular quando $x = 8$."

(TAN, 2008, p.140)

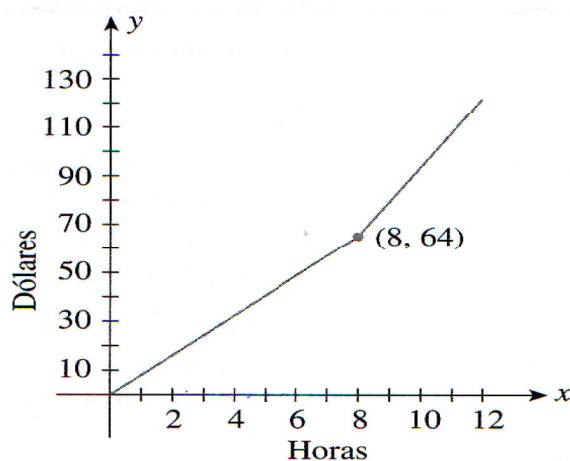
- simbólico:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

- registro algébrico com tratamento:

$$f(x+h) - f(x) = (3x + 3h + 5) - (3x + 5) = 3h$$

- figural:



- língua natural:

“A declividade em $x = a$ não está definida.”

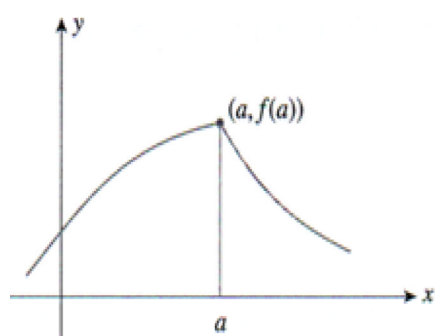
(TAN, 2008, p.140)

- tratamentos:

“[...] a função não é diferenciável em $x = g$ porque a reta tangente é vertical em $(g, f(g))$ ”.

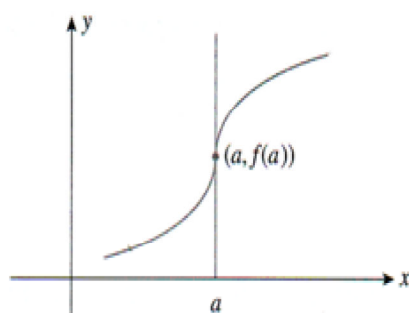
(TAN, 2008, p.141)

- conversões:



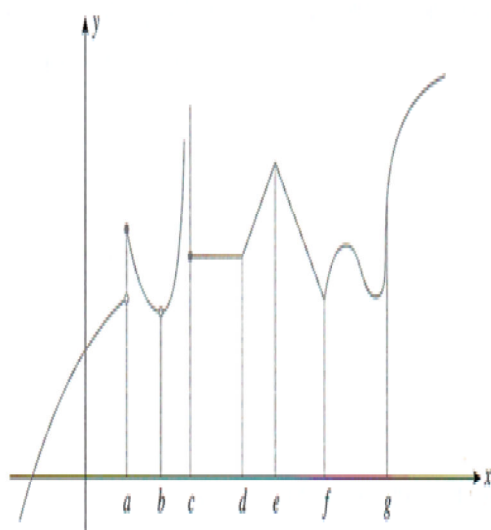
conversão
 $\longleftrightarrow$

O gráfico muda abruptamente de direção em $x = a$.



conversão
 $\longleftrightarrow$

A declividade em $x = a$ não está definida.



conversão
 $\longleftrightarrow$

O gráfico dessa função não é diferenciável nos pontos a-g.

O autor termina a seção com um quadro de fórmulas, com índice remissivo, e algumas atividades: testes de conhecimento, questões conceituais, sessenta exercícios propostos – com respostas dos ímpares, usando tecnologia, quarenta e oito exercícios de revisão do capítulo 2 e um tópico com o título: Antes de Prosseguir... reproduzida no quadro 18:

CAPÍTULO 2
Antes de Prosseguir ...

1. Seja

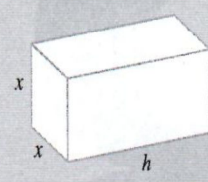
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 2 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Encontre (a) $f(-1)$, (b) $f(0)$ e (c) $f(\frac{3}{2})$.

2. Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Encontre as expressões para (a) $f + g$, (b) fg , (c) $f \circ g$, e (d) $g \circ f$.

3. A regulamentação dos correios especifica que um pacote postado não pode ter mais do que 108 polegadas de perímetro e comprimento somados. Suponha que um pacote que tenha uma seção horizontal quadrada de x polegadas por x polegadas também tem, somados, um perímetro e o comprimento de 108 pés. Encontre uma função representando o volume do pacote em função de x .

Sugestão: O comprimento somado com o perímetro é de $4x + h$ (veja a figura a seguir).



4. Encontre $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

5. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leq x < 1 \\ x^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Encontre (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. f é contínua em $x = 1$? Explique.

6. Encontre a declividade da reta tangente ao gráfico de $x^2 - 3x + 1$ no ponto $(1, -1)$. Qual é a equação da reta tangente?

Quadro 18 - Antes de Proseguir...

Fonte: TAN, 2008, p.153

Em todas essas atividades para o estudante o autor utiliza alguns indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin salientando a utilização de técnicas de derivação, propondo diversas aplicações, principalmente do limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ evidenciando a Derivada com ênfase na Taxa de Variação como no exercício proposto 38 da página 144:

Crescimento de Bactérias Sob condições controladas em um laboratório, o tamanho da população de uma cultura de bactérias no instante t (t em minutos) é descrito pela função

$$P = f(t) = 3t^2 + 2t + 1$$

Encontre a taxa de crescimento populacional quando $t = 10$ min.

Com intuito de auxiliar na nossa conclusão da análise do **Livro B** e efetuarmos as devidas comparações: **Livro B - Livro A** , **Livro B - Livro C**, resumimos aproximadamente os tratamentos e conversões da teoria dos Registros e Representação Semiótica de Duval e alguns indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin: contextualização, demonstração e aplicação na seguinte tabela:

	Tratamentos	Conversões	Contextualização	Demonstração	Aplicação
Menção Explícita da Taxa de Variação	75%	68%	80%	0%	79%
Menção Implícita da Taxa de Variação	25%	32%	20%	100%	21%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

Quadro 19 - Resumo do Livro B

Fonte: Elaboração do autor

De acordo com os dados aproximados do Quadro 19, concluímos que o **Livro B**, no capítulo 2: Funções, Limites e Derivadas, do seguinte tópico 2.6: A Derivada, **faz menção** explícita da Derivada com ênfase na Taxa de Variação no que diz respeito aos tratamentos (cerca de 75%) e conversões (cerca de 68%) da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e alguns indicadores: contextualização (cerca de 80%), demonstração (cerca de 0%) e aplicação (cerca de 79%) da Análise de Conteúdo de Bardin.

Notamos que os livros: **Livro A** e **Livro B** tratam de forma totalmente distinta a Derivada com ênfase na Taxa de Variação. O segundo articula melhor as palavras associando exaustivamente a Derivada com a Taxa de Variação enquanto o **Livro A** não faz a articulação apesar de utilizar a taxa de variação de forma implícita durante todo o capítulo.

Conjecturamos que esse fato deve ter ocorrido devido ao público a qual é destinado a obra: Administração e Economia principalmente.

Dessa forma o **Livro B** em detrimento do **Livro A**, neste momento, talvez possibilite com mais facilidade o aprendizado do estudante da Derivada com ênfase na Taxa de Variação e, por conseguinte a conexão da Derivada com as diversas aplicações relatadas, por exemplo na página 86 do nosso trabalho.

Terminamos esta análise ressaltando que tanto o **Livro A** quanto o **Livro B** explicam o conceito de Derivada como fez Cauchy e depois aperfeiçoado por Weierstrass que definiram a derivada $f'(x)$ de y em relação a x como sendo o limite do quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

quando i se avizinha de zero.

Portanto, os livros: **Livro A** e **Livro B** conceituam a Derivada em termos de limite de variação, mas esta forma está mais clara no **Livro B** do que no **Livro A**.

Livro C

Ressaltamos que faremos a análise, do capítulo 7: Derivada, das seguintes seções: 7.1: Introdução, 7.2: Derivada de uma função, 7.3: Derivadas x^n e $\sqrt[n]{x}$, 7.4: Derivadas de e^x e $\ln(x)$, 7.5: Derivadas das funções trigonométricas, 7.6: Derivabilidade e continuidade. Estes assuntos percorrem da página 154 até a página 171.

Na seção 7.1: Introdução, o autor inicia apresentando o limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ e escreve que limites desse tipo “ocorrem de modo natural tanto na geometria como na física.

Em seguida ele relaciona o limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ com o coeficiente angular da reta tangente a curva e indica esse coeficiente angular como $f'(p)$ e escreve como encontrar a equação da reta tangente a curva através da equação

$$y - f(p) = f'(p)(x - p)$$

Neste mesmo parágrafo o autor relaciona o limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ com a velocidade instantânea, escrevendo $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

Observamos que até o momento o autor não cita a Derivada e termina a seção afirmando: “Esses exemplos são suficientes para levar-nos a estudar de modo puramente abstrato as propriedades do limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.” (GUIDORIZZI, 1985, p 155).

Verificamos que para introduzir a Derivada, através do coeficiente angular o autor utilizou diversos registros de representação semiótica da teoria de Duval: simbólico, língua natural, e articulou alguns tratamentos e conversões. Vejamos alguns exemplos de registros:

- simbólico:

$$(*) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$(*) y - f(p) = f'(p)(x - p)$$

- língua natural:

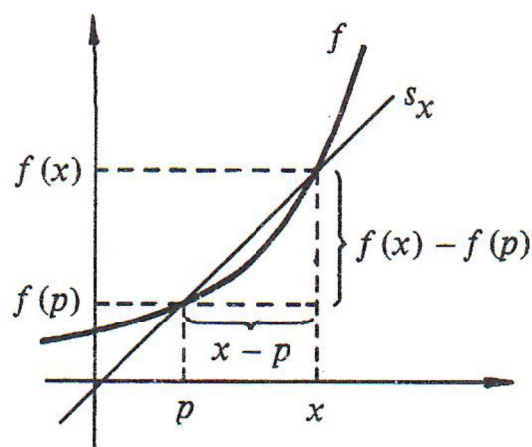
Suponhamos, agora, que $s=f(t)$ seja a equação horária do movimento de uma partícula vinculada a uma reta orientada na qual se escolheu uma origem. Isto significa dizer que a função f fornece a cada instante a abscissa ocupada pela partícula na reta (GUIDORIZZI, 1985, p 155).

Agora, alguns exemplos de tratamentos e conversões:

- tratamentos:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

- conversões:





CONVERSÃO

Coeficiente angular de $s_x = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$

(GUIDORIZZI, 1985, p 155)

Guidorizzi, na seção 7.2 – Derivada de uma função define a Derivada como transcrito no quadro 20 a seguir

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p , então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p .

Quadro 20 - Definição de Derivada

Fonte: GUIDORIZZI, 1985, p 156

Em seguida, utiliza o registro da língua natural: “Dizemos que f é derivável em $A \subseteq D_f$ se f for derivável em cada ponto $p \in A$. Diremos, simplesmente, que f é uma função derivável se f for derivável em cada ponto de seu domínio. Esse registro talvez tenha sido usado para alertar ao leitor a importância da função ser derivável em todos os pontos do domínio da função.

Notamos que o autor faz um tratamento dentro do registro algébrico:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Antes dos exemplos utiliza uma conversão entre os registros: língua natural ($y - f(p) = f'(p)(x - p)$) e o da língua natural: [...] a reta ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$), para concluir que: “[...] a derivada de f , em p , é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p (GUIDORIZZI, 1985, p 156)”.

A seguir uma sequência de sete exercícios resolvidos e dezenove exercícios propostos que concentram o cálculo de Derivada através do limite, encontrar a equação da reta tangente, alguns exercícios de demonstração, exercícios propostos para o leitor exemplificar resultados e no último exercício resolvido apresenta um caso em que a função não é diferenciável no ponto p .

Reproduzimos alguns exercícios resolvidos e exercícios propostos que apresentam as condições descritas acima:

EXEMPLO 1. Seja $f(x) = x^2$. Calcule.

a-) $f'(1)$.

b-) $f'(x)$.

c-) $f'(-3)$.

EXEMPLO 2. Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto

a-) $(1, f(1))$

b-) $(-1, f(-1))$

EXEMPLO 3. Seja $f(x) = k$ uma função constante. Mostre que $f'(x) = 0$ para todo x . (A derivada de uma constante é zero)

EXEMPLO 7. Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.

EXERCÍCIO PROPOSTO 7. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.

EXERCÍCIO PROPOSTO 16. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a-) Esboce o gráfico de f .

b-) f é derivável em $p = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

(GUIDORIZZI, 1985, p 156 -161)

O autor na resolução dos exercícios resolvidos recorre a diversos registros de representação semiótica e faz alguns tratamentos e conversões.

● simbólico:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

● língua natural:

“[...] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe, ou seja, não é derivável em 0.[...]”.

● algébrico:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

● registro algébrico com tratamentos:

$$\frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

● língua natural:

“A derivada de $f(x) = x^2$, em $p = 1$, é igual a 2.”

(GUIDORIZZI, 1985, p 157)

E também verificamos alguns tratamentos e conversões: Por exemplo:

- tratamentos:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

- conversões:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \xleftrightarrow{\text{CONVERSÃO}} \text{A derivada de uma constante é zero.}$$

(GUIDORIZZI, 1985, p 158)

O autor inicia a seção 7.3: Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$, enunciando um teorema, transcrito no quadro 21.

Teorema. Seja $n \neq 0$ um natural. São válidas as fórmulas de derivação:

$$a) f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$$

$$b) f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}, x \neq 0.$$

$$c) f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \text{ onde } x > 0 \text{ se } n \text{ for par e } x \neq 0 \text{ se } n \text{ for ímpar } (n \geq 2).$$

Quadro 21 - Teorema: Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$

Fonte: GUIDORIZZI, 1985, p 162

Observamos que o livro didático introduz as fórmulas para cálculos de Derivadas das formas x^n e $\sqrt[n]{x}$. Dessa forma o leitor consegue fazer os cálculos sem a utilização do limite.

Em seguida faz a demonstração do teorema, apresenta cinco exercícios resolvidos e nove exercícios propostos. Nos exercícios resolvidos apresenta o cálculo da derivada envolvida no teorema e temos um exercício resolvido para encontrar a equação da reta tangente. Os exercícios propostos seguem a mesma distribuição dos exercícios resolvidos. Estes exercícios estão descritos mais adiante.

Ao desenvolver a seção, Guidorizzi, utiliza principalmente os registros: simbólico algébrico, língua natural, não há registro figural e pouquíssimo registro na língua natural e alguns tratamentos e quase nenhuma conversão.

Conjecturamos que dessa forma o leitor fica prejudicado no entendimento da demonstração. Tomamos, como exemplo, a demonstração da parte (a) do teorema, onde ocorre um tratamento:

Fazendo $x + h = t$ ($t \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$) vem

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} [t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

[...]

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

(GUIDORIZZI, 1985, p 163)

Transcrevemos alguns exercícios resolvidos e exercícios propostos pelo autor nesta seção:

EXEMPLO 1. Seja $f(x) = x^4$. Calcule.

a) $f'(x)$

b) $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

EXEMPLO 3. Calcule $f'(x)$ sendo

a) $f(x) = x^{-3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

EXEMPLO 5. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 8.

EXERCÍCIO PROPOSTO 7. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

(GUIDORIZZI, 1985, p 163-166)

Verificamos que nos exercícios resolvidos e propostos o autor ressalta os registros: simbólico algébrico (exercícios resolvidos 1 e 2); língua natural (exercício resolvido 5) e registro figural com conversões (exercício proposto 7).

Como no parágrafo anterior, o autor inicia a seção 7.4: Derivadas de e^x e $\ln x$, enunciando um teorema, transcrito no quadro 22.

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação

$$a) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

$$b) g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Quadro 22 - Teorema: Derivadas de e^x e $\ln x$

Fonte: GUIDORIZZI, 1985, p 166

Observamos que o livro didático introduz as fórmulas para cálculos de Derivada da forma e^x e $\ln x$. Dessa forma o leitor, como na seção 7.3, consegue fazer os cálculos sem a utilização do limite.

Em seguida faz a demonstração do teorema, não apresenta nenhum exercício resolvido e seis exercícios propostos. Os exercícios propostos apresentam: o cálculo da derivada envolvida no teorema, determinação da equação da reta tangente e dois exercícios de demonstração. Estes exercícios propostos estão descritos mais adiante.

Ao desenvolver a seção, o autor, utiliza principalmente os registros: simbólico algébrico, cálculo e dedução válida a partir de definição ou de teoremas, não há registros: figural e língua natural e articula alguns tratamentos e quase nenhuma conversão.

Ilustramos a discussão acima com a demonstração da parte (b) do teorema. Observamos que nesse momento ocorre uma tratamento do registro simbólico algébrico:

$$[\dots] = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{xu}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln (1 + u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}$$

(GUIDORIZZI, 1985, p 166)

Transcrevemos alguns exercícios propostos pelo autor nesta seção:

EXERCÍCIO PROPOSTO 1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

EXERCÍCIO PROPOSTO 2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

EXERCÍCIO PROPOSTO 3. Seja $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

EXERCÍCIO PROPOSTO 5. Seja $g(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante. Mostre que $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

(GUIDORIZZI, 1985, p 167)

Verificamos que nos exercícios propostos o autor ressalta os registros: simbólico algébrico (exercício proposto 1); língua natural (exercícios propostos 3 e 5) e registro figural com conversões (exercício proposto 2).

Como nos parágrafos 7.3 e 7.4, o autor inicia a seção 7.5: Derivada das funções trigonométricas, enunciando um teorema, transcrito no quadro 23.

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação.

- a) $\text{sen}' x = \cos x$.
- b) $\text{cos}' x = -\text{sen } x$.
- c) $\text{tg}' x = \sec^2 x$.
- d) $\text{sec}' x = \sec x \text{ tg } x$.
- e) $\text{cotg}' x = -\text{cosec}^2 x$.
- f) $\text{cosec}' x = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$.

Quadro 23 - Teorema: Derivadas das funções trigonométricas

Fonte: GUIDORIZZI, 1985, p 167

Observamos que o livro didático introduz as fórmulas para cálculos de Derivadas das funções seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante. Dessa forma o leitor, como nas seções 7.3 e 7.4, consegue fazer os cálculos sem a utilização do limite.

Em seguida faz a demonstração dos itens (a), (b) e (c), deixando a cargo do leitor os itens (d), (e) e (f), não apresenta nenhum exercício resolvido e sete exercícios propostos. Nos exercícios propostos apresenta: os cálculos das derivadas envolvidas no teorema, determinação da equação da reta tangente e um exercício de demonstração, o item (d) do teorema. Estes exercícios propostos estão descritos mais adiante.

Ao desenvolver a seção, o autor, utiliza principalmente os registros: simbólico algébrico, língua natural, não há registros: figural e língua natural e articula alguns tratamentos e quase nenhuma conversão.

Ilustramos a discussão acima com a demonstração da parte (a) do teorema. Observamos que nesse momento ocorre um tratamento do registro simbólico algébrico

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\text{sen}\frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h}$$

(GUIDORIZZI, 1985, p 168)

e um tratamento

$$\text{sen}'x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h}$$

(GUIDORIZZI, 1985, p 168)

Conjecturamos que ao fazer a última conversão, o leitor, poderá não entender a etapa inicial da demonstração, pois o autor utilizou uma das fórmulas de prostaférese³ que, devido nossa experiência na educação média, geralmente não é abordado. Ressaltamos que o livro propõe que o leitor faça essa demonstração no exercício proposto na seção 2.2, página 62. Transcrevemos o exercício:

³ Prostaférese é a denominação que se dá as transformações trigonométricas que relacionam produtos com adições e subtrações.

2. Sejam p e q reais quaisquer. Verifique

$$a) \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$b) \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$c) \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$d) \cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \operatorname{sen} \frac{p+q}{2}$$

Vamos, agora, transcrever alguns exercícios propostos pelo autor nesta seção 7.5:

EXERCÍCIO PROPOSTO 1. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule.

$$a-) f'(x)$$

$$b-) f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

EXERCÍCIO PROPOSTO 5. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$ no ponto de abscissa 0.

EXERCÍCIO PROPOSTO 6. Seja $g(x) = \operatorname{cotg} x$. Calcule.

$$a-) f'(x)$$

$$b-) f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

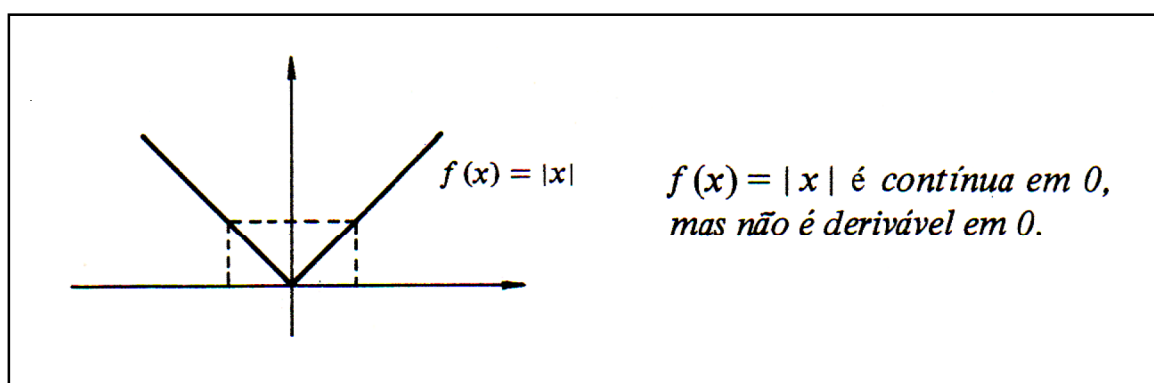
(GUIDORIZZI, 1985, p 168-169)

Verificamos que nos exercícios propostos o autor ressalta os registros: simbólico algébrico (exercício proposto 1), língua natural (exercícios propostos 1, 5 e 6) e há alguns tratamentos e não faz nenhuma conversão relevante.

Seguindo em frente faremos a análise, do último tópico relacionado para o nosso trabalho, da seção 7.6 – Derivabilidade e Continuidade.

Guidorizzi, inicia a seção mostrando que uma função pode ser contínua em um ponto e não ser derivável neste ponto. Utiliza os registros: figural e de língua natural para explicar esse fato e faz também uma conversão entre esses dois registros de representação semiótica.

Mostramos a conversão:



Quadro 24 - Conversão no Livro C

Fonte: GUIDORIZZI, 1985, p 169

A seguir o autor enuncia um teorema e o demonstra. Transcrevemos o teorema no quadro 25:

Teorema. Se f for derivável em p , então f será contínua em p .

Quadro 25 - Teorema

Fonte: GUIDORIZZI, 1985, p 169

Na demonstração do teorema, o autor, apresenta a prova do teorema utilizando os registros:

- simbólico:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

- língua natural:

Precisamos provar que f é contínua em p , isto é, que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

- algébrico:

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - f(p)] = 0$$

- simbólico:

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - f(p)] = \lim_{x \rightarrow p} \left[(x - p) \cdot \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} (x - p) \cdot \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0 \cdot f'(p) = 0$$

- língua natural:

Segue do teorema que, se f não for contínua em p , então f não poderá ser derivável.

(GUIDORIZZI, 1985, p 170)

E também verificamos alguns tratamentos e conversões: Por exemplo:

- tratamentos:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

- conversões:

Precisamos provar que f é contínua em p , isto é, que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

(GUIDORIZZI, 1985, p 170)

O autor termina o parágrafo mostrando três exercícios resolvidos e apresentando três exercícios propostos. Transcrevemos os exercícios resolvidos e os exercícios propostos:

EXEMPLO 1. A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$? Por quê?

EXEMPLO 2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

a-) f é contínua em 1?

b-) f é diferenciável em 1?

EXEMPLO 3. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

a) f é derivável em 1?

b) f é contínua em 1?

EXERCÍCIO PROPOSTO 1. Seja $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

- a) f é contínua em 2? Por quê?
- b) f é derivável em 2? Por quê?

EXERCÍCIO PROPOSTO 2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- a) f é derivável em 0? Justifique.
- b) f é contínua em 0? Justifique.

EXERCÍCIO PROPOSTO 3. Seja $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x < 3 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

- a) f é derivável em 3? Justifique.
- b) f é contínua em 3? Justifique.

(GUIDORIZZI, 1985, p 170-172)

Verificamos que nos exercícios resolvidos e exercícios propostos o autor ressalta os registros:

- simbólico algébrico:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

- língua natural:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1), \text{ logo, } f \text{ é contínua em } 1.$$

- simbólico:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

● algébrico:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

● língua natural:

“f não é derivável em 1.”

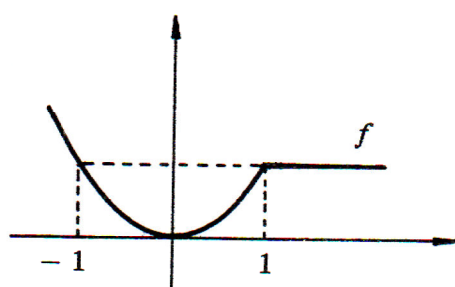
(GUIDORIZZI, 1985, p 171)

E também verificamos alguns tratamentos e conversões: Alguns exemplos:

● tratamentos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

● conversões:



f é contínua em 1, mas não é derivável neste ponto; o gráfico de *f* apresenta um “bico” no ponto $(1, f(1))$.

(GUIDORIZZI, 1985, p 171)

Com intuito de auxiliar na nossa conclusão da análise do **Livro C** e efetuarmos as devidas comparações: **Livro C - Livro A** e **Livro C - Livro B**, resumimos aproximadamente os tratamentos e conversões da teoria dos Registros e Representação Semiótica de Duval e alguns indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin: contextualização, demonstração e aplicação na seguinte tabela:

	Tratamentos	Conversões	Contextualização	Demonstração	Aplicação
Menção Explícita da Taxa de Variação	5%	9%	10%	40%	12%
Menção Implícita da Taxa de Variação	95%	91%	90%	60%	88%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

Quadro 26 - Resumo do Livro C

Fonte: Elaboração do autor

De acordo com os dados aproximados do Quadro 26, concluímos que o **Livro C**, no capítulo 7: Derivadas, **não faz menção** explícita da Derivada com ênfase na Taxa de Variação no que diz respeito aos tratamentos (cerca de 5%) e conversões (cerca de 9%) da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e alguns indicadores: contextualização (cerca de 10%), demonstração (cerca de 40%) e aplicação (cerca de 12%) da Análise de Conteúdo de Bardin.

Conjecturamos que esse fato deve ter ocorrido devido ao público a qual é destinado a obra: Matemática principalmente.

Dessa forma a obra pode levar, neste momento, ao não aprendizado do estudante da Derivada com ênfase na Taxa de Variação e, por conseguinte a não conexão da Derivada com as diversas aplicações relatadas, por exemplo, na página 86 do nosso trabalho.

Ressaltamos que Guidorizzi, propõe no capítulo de Derivada um parágrafo 7.14 com o título: Interpretação de $\frac{dy}{dx}$ como um quociente. Diferencial, 210 e outro parágrafo 7.15 com o título: Velocidade e aceleração. Taxa de variação, 215.

Nestes dois parágrafos, quase últimos capítulos, são discutidos a Derivada como Taxa de Variação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início da nossa pesquisa tínhamos em mente a investigação de algum tema que fosse importante no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Escolhemos a Derivada devida a sua grande importância nas diversas áreas de conhecimento: Matemática, Engenharia, Economia, Administração, Física, etc.. Relatamos que na nossa época de graduação em Matemática, na Universidade de São Paulo, quando estudamos inicialmente a Derivada, não houve a conexão do objeto matemático Derivada com ênfase na Taxa de Variação e isto motivou o pesquisador-aluno a apresentar essa dissertação de mestrado.

Assim, iniciamos nossa pesquisa do modo como a Derivada é abordada em três livros didáticos:

- **Livro A:** FLEMING, D. M., GONÇALVES M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006;
- **Livro B:** TAN, S. T. – **Matemática Aplicada a Administração e Economia;** tradução técnica Fábio Armando Tal. 2ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- **Livro C:** GUIDORIZZI, H. G. **Um Curso de Cálculo.** Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985;

Buscamos responder a seguinte questão de pesquisa:

“O tratamento dado, por livros didáticos, através dos textos, exercícios resolvidos e propostos e outras atividades, sobre derivada, possibilita a articulação entre os registros de representação semiótica levando a compreensão da Derivada e a enfatiza como Taxa de Variação?”

Usamos como fundamentação teórica os Registros de Representação semiótica de Duval e os procedimentos de análise de textos baseados em indicadores de Bardin que se completaram, permitindo que o objetivo do trabalho fosse realizado havendo uma integração entre eles na busca de respostas para a nossa questão de pesquisa, e forneceram a ideia de investigar a Derivada com ênfase na Taxa de Variação, partindo do material fornecido pelos livros didáticos.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica foi útil como uma ferramenta de análise para responder a questão de pesquisa, pois permitiu que pudéssemos verificar como a Derivada com ênfase na Taxa de Variação é tratada nos três livros. tanto no que diz respeito a diferenças no enfoque dado quanto à exploração da coordenação de registros por parte dos autores.

Segundo Duval(1993) a coordenação entre os registros é essencial primeiro para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e segundo para a apreensão desse objetos.

Por outro lado os indicadores elaborados sugeriram uma organização para o trabalho e foram essenciais para permitir que conceitos ligados a Derivada fossem evidenciados. Segundo Bardin(1977), tais indicadores apresentam a informação de outro modo daquela que se encontra, possibilitando ao leitor, percebê-la de outra maneira.

A fim de alavancarmos nossa análise fizemos os quadros, apresentados na página seguinte, que resumem aproximadamente os tratamentos e conversões da teoria dos Registros e Representações Semióticas de Duval e alguns indicadores da Análise de Conteúdo de Bardin: contextualização, demonstração e aplicação.

Essa teoria aliada aos procedimentos metodológicos seguidas pela Análise de Conteúdo permitiram verificar diferenças no enfoque dado ao conceito de Derivada com ênfase na Taxa de Variação de cada autor, e ainda a Teoria de Duval possibilitou constatar a exploração da coordenação dos registros, já a Análise de Conteúdo de Bardin ajudou a evidenciar os objetos matemáticos ligados ao tema da investigação.

	Tratamentos	Conversões	Contextualização	Demonstração	Aplicação
Menção Explícita da Taxa de Variação	7%	5%	34%	0%	8%
Menção Implícita da Taxa de Variação	93%	95%	66%	100%	92%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

Quadro 8 - Resumo do Livro A

Fonte: Elaboração do autor

	Tratamentos	Conversões	Contextualização	Demonstração	Aplicação
Menção Explícita da Taxa de Variação	75%	68%	80%	0%	79%
Menção Implícita da Taxa de Variação	25%	32%	20%	100%	21%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

Quadro 19 - Resumo do Livro B

Fonte: Elaboração do autor

	Tratamentos	Conversões	Contextualização	Demonstração	Aplicação
Menção Explícita da Taxa de Variação	5%	9%	10%	40%	12%
Menção Implícita da Taxa de Variação	95%	91%	90%	60%	88%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%

Quadro 26 - Resumo do Livro C

Fonte: Elaboração do autor

A fim de respondermos a nossa questão de pesquisa notamos que o **Livro A** e também o **Livro C** caminham no sentido coeficiente angular $\Rightarrow$ taxa de variação mais não fazem uma menção explícita da derivada como taxa de variação, como podemos notar nos quadros 8 e 26.

No **Livro A**, a menção explícita da Taxa de Variação ocorre em cerca de 7% dos tratamentos, 5% das conversões, 34% da contextualização, 0% das demonstrações e 8% das aplicações.

No **Livro C**, a menção explícita da Taxa de Variação ocorre em cerca de 5% dos tratamentos, 9% das conversões, 10% da contextualização, 40% das demonstrações (este é o maior índice) e 12% das aplicações.

O **Livro B**, caminha no sentido coeficiente angular $\Leftrightarrow$ taxa de variação $\Leftrightarrow$ derivada. A menção explícita da Taxa de Variação ocorre em cerca de 75% dos tratamentos, 68% das conversões, 80% da contextualização (este é o maior índice), 0% das demonstrações e 79% das aplicações.

Conjecturamos que os **Livros A e C** ao não conectarem explicitamente a Derivada como Taxa de Variação podem causar um prejuízo inicial no aprendizado da Derivada no que diz respeito a compreensão da Derivada por meio da Taxa de Variação e por consequência nas futuras aplicações dessa variação.

O **Livro A**, por exemplo, apresenta uma aplicação prática do limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, na Física, por meio de cálculos de velocidade e aceleração sem conexão com coeficiente angular ou taxa de variação.

O **Livro C** por sua vez sugere que devemos estudar o limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ de modo puramente abstrato.

Salientamos que nossa pesquisa se baseia nos textos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades dos três livros analisados e que esta situação da não compreensão da Derivada por meio da Taxa de Variação pode ser contornada por meio do professor que, aliás, desempenha o papel fundamental no aprendizado dos estudantes.

Esses resultados apontam para a possibilidade de uma pesquisa: será que os estudantes que utilizam estes **Livros A e C** relacionam a Derivada com a Taxa de Variação após estudarem o capítulo inicial de Derivada.

O **Livro B** faz menção explícita da Derivada com ênfase na Taxa de Variação. Há uma preocupação do autor em relacionar a Taxa de Variação com o coeficiente angular desde os capítulos iniciais do livro e o aprofundamento ocorre no capítulo de Derivada.

Essa preocupação está evidenciada no capítulo 1 Preliminares, tópico 1.4 Retas, em que o autor faz uma revisão de conceitos do ensino médio:

Observe que a declividade de uma reta é uma constante sempre que ela esteja definida. O número $\Delta y = y_2 - y_1$ (lê-se “delta y”) é uma medida da variação vertical em y, e $\Delta x = x_2 - x_1$ (lê-se “delta x”) é uma medida da variação horizontal em x[...]. Dessa forma, podemos ver que a declividade m de uma reta L é uma medida da taxa de variação de y em relação a x (TAN, 2008, p.30).

Assim apontamos a possibilidade de outra pesquisa procurando responder se os estudantes que utilizam o **Livro B** relacionam a Derivada com a Taxa de Variação após estudarem o capítulo inicial de Derivada.

Lembramos que o **Livro C** foi o único a fazer todas as demonstrações e fornecer vários contraexemplos e também foi o único a discutir que o $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ possa não existir. O **Livro A** apresentou a discussão de forma tímida e o **Livro B** não fez a demonstração, aliás, fato raro nesta obra.

O **Livro A** foi o único a apresentar rudimentos da História da Matemática com o intuito de iniciar os estudos a cerca da Derivada.

Concluimos que as análises dos tres livros respondem a nossa questão de pesquisa que está focada no capítulo inicial da Derivada.

Ressaltamos que o **Livro B** referenciado é voltado para os estudantes dos cursos de Economia e Administração e cujos conteúdos são abordados questões como: custo, receita, lucro, marginais que manipulam diretamente a Derivada como Taxa de Variação. Os outros

dois livros embora não abordam explicitamente a expressão Taxa de Variação, dão a Derivada um tratamento a partir da Variação.

Esperamos que este trabalho colabore para que professores e pesquisadores possam refletir e buscar alternativas para que os textos possam ser mais bem utilizados para o acesso e apreensão dos objetos matemáticos em geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

DALL' ANESE, D. C. **Conceito de Derivada: Uma proposta para seu Ensino e Aprendizagem**. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. [Dissertação de Mestrado], 2000.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa, 1977.

_____. **Análise de conteúdo**. Edições 70. Lisboa, 2003

BARON, M. E., BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática - Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Tradução: José R. B. Coelho, Rudolf Maier e Maria M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARROS, M. R., MELONI, P. G. L. O processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por meio de metáforas e recursos multimídia. **Anais do XXXIV Cobenge**. Passo Fundo: Ed.Universidade de Passo Fundo, setembro de 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais: ensino superior**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em 18/02/2012.

CAMPOS, R. P. **Abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica**. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. [Dissertação de Mestrado], 2007.

DAMM, R. F. Registros de **representação**. In: Machado, S. et al. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ, 1999.

DUVAL, R. **Semiosis et Pensée Humaine**. Bern: Peter Lang, 1993 e 1995.

FLEMING, D. M., GONÇALVES M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GALARDA, L. F., ROSSI, S. M. M. **A evolução do conceito de derivada**. Centro de Ciências Exatas. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória - ES, 1992.

GUIDORIZZI, H. G. **Um Curso de Cálculo** Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985.

HARUNA, N. O. A. **TEOREMA DE THALES: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. [Dissertação de Mestrado], 2000.

LAVILLE, O. D. J. **A construção do saber: Manual de Metodologia e Pesquisa em Ciências Humanas**. São Paulo: Editora Artmed, 1999.

LEITE, P. A. E., STRENTZKE, I., DARSIE, P. M. M. **Causas de dificuldades no ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva dos alunos do curso de matemática da Unir - campus de Ji - Paraná - RO, 2007.**

Disponível em: <http://www.sbpcnet.org.br/livro/61ra/resumos/5209.htm>. Acesso em 20/02/2012.

LOBO, R., CORREA, G. Teorema de Thales: uma análise dos livros. **Anais do XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011.

MACHADO, A. D. S.,(org). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2011.

MIRANDA, G. A. **Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do Cálculo: Resgatando uma história esquecida**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, [Dissertação de Mestrado], 2004.

TAN, S.T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. Tradução técnica Fábio Armando Tal. 2ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. Rio Claro. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. [Tese de Doutorado em Educação Matemática], 1999.