PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Edson Rodrigues da Silva

Uma Proposta Para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2012

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Edson Rodrigues da Silva

Uma Proposta Para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA,*** *sob a orientação da* ***Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.***

São Paulo

2012

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:____________________________________ Local e Data:____________

Dedico este trabalho aos meus pais, Benedito Rodrigues da Silva e Vitória Bezerra

Rodrigues, que são as pessoas mais importantes da minha vida.

“A vocês eu deixo o sono.
O sonho não!
Este, eu mesmo carrego!”

Paulo Leminski

AGRADECIMENTOS

A minha orientadora, e grande amiga, Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, pela confiança que depositou em mim, pelo incentivo, sugestões, puxões de orelha, broncas, e principalmente pela paciência na condução de meus estudos. "Muito obrigado Zezé".

Ao Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca e ao Prof. Dr. Nílson José Machado por aceitarem fazer parte da banca examinadora e por suas valiosas sugestões e contribuições para essa pesquisa.

A Profa. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho pela sincera amizade, ajuda, incentivo, e por suas valiosas sugestões.

Ao grande amigo Francisco, pelo incentivo, apoio e conselhos que me ajudaram a superar as dificuldades e os obstáculos que defrontei nessa fase de minha vida. "Obrigado Francisco".

Aos colegas do mestrado pelo convívio, amizade, apoio e conforto, em especial, aos grandes amigos Cintia, Camila, Gilberto, Possani, Rafael, e Sandra.

Ao corpo decente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que foram muito importantes à minha formação.

A minha família, em especial aos meus pais Benedito e Vitória, e minha irmã Eliane, pelo amor, apoio, incentivo e, principalmente pela compreensão em todos os momentos que estive envolvido neste trabalho.

À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, conjuntamente com a CAPES por propiciarem a realização do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

A DEUS...

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo conduzir estudantes do 3º ano do Ensino Médio a construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea. Com esse intuito, e fundamentados nos pressupostos da Engenharia Didática, elaboramos, aplicamos e analisamos uma sequência didática para oito alunos de uma escola pública do Estado de São Paulo. Como aporte teórico utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Teoria de Registros de Representação Semiótica. A TSD nos auxiliou na elaboração, experimentação e análise dos resultados da sequência didática, enquanto a Teoria de Registros de Representação Semiótica, enfatizou a diversidade e a articulação de diferentes registros de representação nas atividades matemáticas. A análise da sequência didática apontou que estudantes do 3º ano do Ensino Médio, por meio da mobilização simultânea dos registros de representação gráfica, algébrica e tabular, podem construir significado para a ideia de taxa de variação.

Palavras-Chave: Taxa de variação Instantânea. Taxa de varição média. Registros de Representação.

ABSTRACT

This work aims to lead students in the 3rd year of high school to construct meaning to the idea of instantaneous rate of change. With this intention, and based on the premises of Didactic Engineering, we elaborated, applied and analyzed a didactic sequence for eight students of a public school in the state of São Paulo. As theoric support, we used the Theory of Didactical Situation (TDS) and the Representation Theory of Semiotics Register. The TDS assisted us in development, tests and analysis of results of didactic sequence, while the Representation Theory of Semiotics Registers emphasized the diversity and articulation of different registers of representation in mathematical activities. The analysis of didactic sequence indicated that teaching students in the 3rd year of high school, through the simultaneous mobilization of records graphing, algebraic and tabular can construct meaning to the idea of rate of change.

Keywords: Instantaneous rate of change. Average rate of change. Representation Registers.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Identificar quando a representação gráfica de uma função cresce, decresce ou é constante deve ser uma tarefa trivial para qualquer cidadão que tenha concluído a Educação Básica, entretanto, para perceber o quão rápido essa representação gráfica cresce ou decresce, ou seja, qualificar seu crescimento e decrescimento, é necessário um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação. De acordo com Rezende (2003),

> No mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/ decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto esta está crescendo/decrescendo. 'A gente não quer só comida, a gente quer comida, diversão e arte'. Isso mesmo, com o desenvolvimento das relações econômicas e sociais, tornando-se estas cada vez mais complexas, faz-se necessário e urgente uma revisão e ampliação das metas da 'formação básica para o exercício pleno da cidadania'. (REZENDE, 2003, p. 33)

Vê-se, então que é importante que a ideia de taxa de variação faça parte do conhecimento matemático de todos, todavia, sabemos que esta não é a realidade da maior parte da população. Rezende (2003, p. 2) observa que o índice de não aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial, que estuda a ideia de variação, pode chegar a 95% entre os estudantes do Ensino Superior, mas esses representam apenas 13,9% dos brasileiros entre 17 e 25 anos[1], quanto aos demais, se não tiveram acesso a estas ideias na Educação Básica, não mais as terão em seu conhecimento matemático. Segundo o autor, alguns problemas clássicos do Cálculo Diferencial são evitados, ignorados, ou ainda tratados sem a devida atenção pelos professores da Educação Básica.

[1] Informações retiradas de site http://www.unb.br/noticias/unbagencia/unbagencia.php?id=3112 em 22/06/2012 às 17h43.

Quanto aos altos índices de não aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial nos cursos superiores, Barreto (1995) afirma que:

> As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante inseguros. (BARRETO, 1995 apud REIS, 2001, p. 4).

Reis (2001) faz uma comparação plausível entre a atual situação do ensino do Cálculo Diferencial e uma encenação teatral.

> [...] de um lado, os atores (professores) atuando em uma peça mal ensaiada e mal dirigida, fazendo com que o público (alunos), de outro lado, não capte sua mensagem e se retire antes do último ato. De quem é a culpa no palco da sala de aula? Dos atores e sua má performance ou do público e sua insensibilidade? Ou seria do diretor? (REIS, 2001, p.21).

Ponderamos então, que esta situação dá-se porque as ideias presentes no estudo do Cálculo Diferencial e Integral ou não são abordadas no âmbito da Educação Básica ou são tratadas superficialmente por seus professores. Acreditamos que se fossem abordadas, ainda que intuitivamente, nesse nível de escolaridade, com o intuito de conduzir os estudantes à construção de significado às suas noções fundamentais, as mesmas fariam parte do conhecimento matemático de grande parte da população.

Para nós, a problemática do estudo do Cálculo Diferencial e Integral na escola básica está em focar o processo de ensino e aprendizagem nas ideias que o fundamentam e não em antecipar conteúdos e metodologias dos cursos universitários. A ideia de derivada trata de questões relacionadas à noção de variação e de acordo com Machado (1988, p. 24), “a ideia fundamental de tal noção é a de que uma curva pode ser bem aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto”. Já a ideia de integral consiste em aproximar o que é variável por algo constante e para Machado (1988, p. 128), “[...] a noção de integral surge da aproximação de variáveis por constantes em pequenos subintervalos e da soma dos resultados obtidos nesses subintervalos”.

Assim, decidimos dedicar nossa atenção às noções que estão imbricadas na ideia de derivada, por acreditarmos que possam surgir, intuitivamente, no âmbito da escola básica a partir da noção de taxa de variação, de modo que os estudantes construam significado para esta ideia.

Para nós, as ideias presentes no estudo do Cálculo Diferencial não são de difícil assimilação, pelo contrário, são simples e passíveis de serem compreendidas tanto por estudantes da escola básica quanto por estudantes universitários, basta que estejam inseridas em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade. Concordamos com Poe (1986 apud Machado, 1988, p. 4), ao afirmar que “é apenas por faltar algum degrau aqui e ali, por descuido, em nosso caminho para o Cálculo Diferencial, que este último não é coisa tão simples quanto um soneto de Mr. Solomon Seesaw”.

Optamos então, por elaborar e aplicar uma sequência didática com o objetivo de conduzir estudantes do 3º ano do Ensino Médio a compreender a noção de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação. Para isso, partimos da hipótese de que estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem se apropriar da ideia de taxa de variação instatânea a partir da noção de taxa de variação, e nos propomos a responder a seguinte questão de pesquisa: **Estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem compreender a noção de taxa de variação instantânea por meio de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação?**

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro apresentamos à problemática, em que evidenciamos a revisão bibliográfica, a justificativa para o desenvolvimento deste trabalho e o problema de pesquisa, os objetivos, hipóteses e a questão de pesquisa. Em seguida, apresentamos a metodologia e os procedimentos metodológicos e finalizamos com a fundamentação teórica.

O segundo capítulo consta de um estudo referente ao objeto matemático taxa de variação, onde são discutidas suas ideias fundamentais, de um apanhado histórico atinente ao ensino do Cálculo Diferencial no âmbito da Educação Básica do Brasil, dos estudos referentes aos PCN, ao curriculo do Estado de São Paulo, ao material de apoio que é disponibilizado à rede publica do Estado de São Paulo e ao PNLD 2012.

Após estabelecer as bases de sustentação da presente pesquisa, no último capítulo, apresentamos a sequência didática, os sujeitos da pesquisa, a aplicação da sequência e as análises das atividades que a compõem. Por fim, as considerações finais.

1 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos a revisão bibliográfica e justificamos nossa escolha em abordar a noção de taxa de variação instantânea no âmbito do Ensino Médio, delimitaremos nosso problema de pesquisa com a questão que norteia o presente trabalho, objetivos e hipóteses, apresentaremos nossa fundamentação teórica e finalizaremos com nossa metodologia e procedimentos metodológicos.

1.1 Revisão Bibliográfica

Encontramos três dissertações com a proposta de ensinar a noção de derivada (taxa de variação instantânea) para estudantes do Ensino Médio, Pereira (2009), André (2008) e Spina (2002), duas teses que contemplam o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial no Ensino Superior, Rezende (2003) e Reis (2001) e quatro artigos que tratam de pesquisas referentes ao processo de ensino e aprendizagem de algumas noções do Cálculo Diferencial no Ensino Superior, Rezende (2004), Nasser (2004), Frota (2004) e Frota (2007).

Motivado pelo alto índice de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial nas universidades brasileiras, Pereira (2009) elaborou uma sequência didática que foi aplicada para estudantes do 1º e 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular do Estado do Rio de Janeiro. Sua proposta consiste em caracterizar funções polinomiais de 1º e 2º graus, a partir do estudo de suas variações: “[...] o problema que trata das questões relacionadas com a medida da rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, como os objetos se movem ou como as coisas se transformam" (MACHADO, 1998, apud PEREIRA, 2009, p. 52).

Pereira (2009) considerou sua sequência didática validada, e embora essa validação seja restrita ao contexto onde a investigação foi realizada, o autor concluiu que o resultado de sua pesquisa fornece fortes indícios de que os estudantes de Ensino Médio são capazes de se apropriar de alguns conceitos presentes no Cálculo Diferencial.

A pesquisa de André (2008) também apresenta uma proposta para abordar a noção de derivada no âmbito do Ensino Médio com foco no estudo do comportamento de algumas funções, especificamente, no que se refere às taxas de variação, cujo objetivo foi à formulação de uma sequência de atividades que viabilizasse a inclusão do conceito de derivada no âmbito do Ensino Médio por meio do ensino das taxas de variação média e instantânea para alunos que possuíssem os conhecimentos referentes ao conceito de função.

A autora utilizou um questionário, a fim de avaliar os conhecimentos dos alunos a respeito de função, e uma sequência de atividades composta por quatro etapas. A primeira explorou a ideia de variação de uma função, a segunda conceituou a taxa de variação média, a terceira abordou o conceito de taxa de variação instantânea e a última, de acordo com a autora, conceituou a derivada de uma função em um ponto x_0 e a função derivada. Por fim, fez uma avaliação final com o objetivo de avaliar o processo de ensino e aprendizagem dos assuntos abordados, em que constatou que os procedimentos metodológicos utilizados tornaram o estudo da derivada viável para estudantes do Ensino Médio, desde que possuam conhecimentos de função.

Spina (2002) também fez uma pesquisa junto a estudantes do Ensino Médio, cujo objetivo foi desenvolver as ideias de limite e derivada por meio de algumas experiências práticas. Para isso, a pesquisadora conduziu os estudantes à construção de modelos de alvéolos para formar colmeias de abelhas, a fim de mobilizar conteúdos abordados no Ensino Médio e criar um modelo adequado de alvéolo. Segundo a autora, os resultados de sua pesquisa mostram que há possibilidade de trabalhar com o Cálculo Diferencial nessa fase escolar.

Diante da problemática das dificuldades apresentadas pelos estudantes universitários no processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial, Rezende (2003, p. 31) destaca que “parte significativa dos problemas de aprendizagem ‘do atual’ ensino de Cálculo está ‘fora’ dele e é ‘anterior’ inclusive ao seu próprio tempo de execução”. O autor ressalta que, ao contrário, de se fazer menção a uma ‘falta de base’ dos estudantes, se faz forçoso estabelecer conceitos básicos e necessários para se compreender as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial.

Perante essa situação, o pesquisador almejou mapear as dificuldades de natureza epistemológica do ensino de Cálculo e interpretá-las em diversas escalas e contextos. Para atingir esse objetivo, o autor elaborou e explicitou cinco macro–espaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica. São as dualidades discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.

A partir desse mapeamento, o pesquisador constatou que a origem das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo provém da “omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo”. Segundo Rezende (2003, p. 403) “a evitação/ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática”.

Já Reis (2001) assume que existe uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e de Análise, e procurou compreender como essa relação acontece e manifesta-se no ensino de Cálculo e de Análise no Brasil. Para isso, abordou alguns aspectos históricos do Cálculo e da Análise e os fatos que influenciaram seu ensino. Constatou que a intuição deveria, obrigatoriamente, estar presente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e, consequentemente, no processo de construção da Análise, que para atingir uma validação lógico-formal jamais poderia prescindir da fase intuitiva e criativa das ideias matemáticas.

Seu estudo, em síntese, parece mostrar que intuição e rigor são dimensões interdependentes, uma não podendo existir sem a outra, embora se possa, equivocadamente, privilegiar uma delas em detrimento da outra, ambas estão presentes no ensino de Cálculo e de Análise, onde cumprem papéis importantes e complementares na formação do pensamento e do conhecimento diferencial, integral e analítico, tanto do professor de matemática quanto do matemático.

Frota (2007) discute a relação entre teoria e prática no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial com destaque ao papel da resolução de exercícios na aprendizagem de três estudantes de engenharia. Ao mapear as estratégias de aprendizagem dos estudantes, a autora verificou que utilizavam estratégias similares, diferenciando apenas a maneira como se apropriavam delas. Concluiu que é importante repensar as estratégias no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial por meio da resolução de exercícios a partir de novas abordagens, propulsoras de uma atitude de especulação e indagação, de diálogo com a teoria, de sistematização teórica e de avaliação da aprendizagem.

Com o que denomina a "'crise' no ensino de Cálculo", Rezende (2004) ressalta que a grande maioria dos professores atribui as dificuldades de aprendizagem do Cálculo aos próprios alunos, isto é, à 'falta de base' que estes possuem para a realização do curso. Entretanto, acredita que grande parte dessas dificuldades é, essencialmente, de natureza epistemológica. Enfatiza que as raízes do problema estão além de métodos e técnicas, sendo inclusive anteriores ao momento em que se pretende ensiná-lo, e observa que a ausência de ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, é a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo.

Para o autor, "fazer emergir o conhecimento do Cálculo do 'esconderijo forçado' a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolver efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo" (IBID, p. 28), e acrescenta ainda, que ao permitir que o Cálculo participe efetivamente da tecedura do conhecimento matemático do ensino básico, as dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo serão em grande parte superadas.

Quanto aos possíveis obstáculos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial, Nasser (2004) procurou identificá-los para sugerir meios de superá-los acreditando serem de natureza didática. Para a autora, o tipo de trabalho desenvolvido em sala de aula e as orientações de livros didáticos, em geral, não propiciam o desenvolvimento, nos alunos de nível fundamental e médio, da capacidade de expressar e comunicar ideias ou justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de tarefas.

Ao observar que a construção de gráficos constituía um obstáculo para o progresso desses alunos na aprendizagem do Cálculo Diferencial, Nasser (2004) propôs que chegassem ao gráfico por meio de transformações em gráficos básicos, que lhes eram familiares. Segundo a autora, com essa estratégia os alunos começaram a sentir segurança para traçar gráficos de parábolas e retas, e identificar superfícies de paraboloides e cones com mais facilidade, no entanto, esse processo "não foi tão evidente para superfícies fechadas como a esfera e o elipsoide, em que a superfície é definida implicitamente por uma equação".

Também se referindo ao uso de estratégias gráficas no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial, Frota (2004) apresenta uma investigação junto a alunos de engenharia, a partir de uma série de entrevistas individuais com 19 alunos, e da aplicação e análise estatística dos dados de um questionário respondido por 529 estudantes.

Ao analisar os resultados locais (entrevistas individuais), a autora constatou que a estratégia de representação gráfica de situações matemáticas praticamente não era utilizada, e que alguns estudantes já a eliminavam a princípio, por terem dificuldades em esboçar gráficos e em visualizá-los. Verificou também que os alunos participantes das entrevistas mostraram-se acanhados ao lidar com a calculadora. A partir da análise dos resultados globais (questionário), a pesquisadora constatou que apenas um percentual entre 12,9% e 19,2% dos estudantes de Cálculo mostravam-se favoráveis ao emprego de estratégias de representação gráfica, ou ao uso de especulações numéricas, ao lidar com questões matemáticas que apresentam certo grau de novidade, ou dificuldade.

Posto isso, nossa revisão bibliográfica nos forneceu subsídios para estabelecer os princípios norteadores deste trabalho, uma vez que os resultados das pesquisas descritas acima apresentam alguns pontos relevantes para o desenvolvimento da nossa. O principal deles é a possibilidade de abordar a noção de derivada, ainda que intuitivamente, no âmbito do Ensino Médio. Verificamos ainda que alguns autores consideram os conhecimentos de função imprescindíveis para que estudantes, tanto da Educação Básica quanto da Superior, apropriem-se de conhecimentos de Cálculo Diferencial, e consideram-no um pré-requisito.

Assim nosso trabalho se diferencia, inicialmente, pelo fato de que não faremos uma avaliação diagnóstica para verificar se os conhecimentos de função fazem parte dos conhecimentos matemáticos dos estudantes que participarão de nossa pesquisa e ainda, pelos referenciais teóricos que darão suporte ao processo de ensino e aprendizagem que pretendemos, uma vez que, almejamos conduzir os estudantes a apropriarem-se da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação com base na Teoria de Registros de Representação Semiótica e na Teoria das Situações Didáticas.

No item que segue, passaremos a delimitar nosso problema de pesquisa apresentando a questão que norteia este trabalho, os objetivos e as hipóteses.

1.2 Delimitação do Problema

Diante do exposto, nosso trabalho tem como objetivo conduzir estudantes do Ensino Médio a compreender a noção de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação. Assim, tomamos por hipóstese, que estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem se apropriar da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação. Desta forma, a questão que norteará nossa pesquisa é: **Estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem compreender a ideia de taxa de variação instantânea por meio de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação?**

Para responder nossa questão de pesquisa, confirmar ou refutar nossa hipótese, bem como atingir nosso objetivo, propusemos uma sequência didática para que os alunos construam conhecimentos para a noção de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação.

Posto isso, na seção que segue apresentaremos a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados para a concretização desta pesquisa.

1.3 Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Adotamos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (2009) como metodologia de pesquisa, por entendermos que essa metodologia é a mais adequada para o desenvolvimento da presente pesquisa. Segundo Artigue (2009, p. 5, tradução nossa)[2] "de um ponto de vista teórico, [...] a Engenharia Didática tem combinado produtivamente a Teoria das Situações Didáticas com outras abordagens teóricas desenvolvidas em estreita conexão com ela [...]", e tem por finalidade a análise dos objetos de estudo da didática da matemática.

> Como metodologia de investigação, a engenharia didática se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. (ARTIGUE 1995, p. 36, tradução nossa).[3]

No processo da Engenharia Didática, Artigue (1995) delimita quatro fases fundamentais: a primeira, denominada de análises preliminares, a segunda voltada à concepção e análise *a priori* da sequência didática, a terceira designada à experimentação, e a quarta fase voltada à análise *a posteriori* e validação.

As **análises preliminares** constituem a fase de concepção, que se passa não somente em um quadro teórico geral e nos conhecimentos didáticos

---

[2] From a theoretical point of view, […] didactical engineering has productively combined affordances from the TDS with those of other theoretical approaches developed in close connection to it […].

[3] Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

previamente adquiridos, isto é, nos conhecimentos prévios dos estudantes, mas também em um determinado número de análises iniciais. Em nossa pesquisa as análises preliminares são compostas dos seguintes estudos:

- Estudo do objeto matemático taxa de variação;
- O ensino do Cálculo Diferencial na educação básica do Brasil;
- Análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais;
- Análise do Currículo do Estado de São Paulo;
- Estudo do material de apoio fornecido aos professores e alunos pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo;
- Estudo do Guia dos Livros Didáticos PNLD 2012.

Já na fase de **concepção e análise *a priori* da sequência didática** decidimos e distinguimos as variáveis pertinentes ao objeto matemático taxa de variação que devem atuar no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Artigue (1995, p. 45, tradução nossa)[4], "[...] o objetivo da análise *a priori* é determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar o comportamento dos alunos e seu significado", e baseia-se em um conjunto de hipóteses, cuja validação está indiretamente relacionada com o confronto que ocorre na quarta fase, entre análise *a priori* e análise *a posteriori*.

> Tradicionalmente, esta análise que comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva, centra-se nas características de uma situação adidática que se pretendeu constituir e que se vai procurar desenvolver aos alunos. (ARTIGUE, 1995, p. 45, tradução nossa)5

Em nossa análise *a priori* almejamos prever os possíveis comportamentos dos estudantes, com base em nosso referencial teórico, caracterizar as situações didáticas de nível local e eventualmente as de nível global, analisar as variáveis em jogo em função das fases de ação, formulação, validação e

---

[4] El objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado".

[5] Tradicionalmente, este análisis *a priori* com prende una parte descriptiva y una predictiva se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido disenar y que se va a tratar de llevar a los alunos.

institucionalização, e nos antecipar às possíveis reações dos estudantes frente à sequência didática. Artigue (1995, p. 46, tradução nossa) [6] ainda observa que, "o professor está pouco presente na análise *a priori* e é considerado em essência por suas relações com a devolução e a institucionalização".

Já a **fase de experimentação** é a da realização do experimento, é o momento em que aplicamos nossa sequência didática.

A última fase é a que a autora denomina de **análise *a posteriori***, que se baseia nos dados obtidos durante a fase de experimentação, nas observações realizadas durante a aplicação da sequência didática e nas produções dos estudantes.

O confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* fundamentam, em essência, é a **fase de validação** ou não da hipótese formulada em nossa pesquisa.

Para desenvolver a sequência didática utilizaremos a Teoria de Registros de Representação Semiótica e a Teoria das Situações Didáticas, que apresentaremos no item que segue.

1.4 Fundamentação Teórica

Nessa parte do trabalho, apresentaremos nossa opção pelo quadro teórico que dará suporte a presente pesquisa, a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

De acordo com Duval (2011), a Teoria de Registros de Representação Semiótica permite analisar as atividades matemáticas com foco na diversidade e na articulação entre os registros de representação. Já a Teoria das Situações Didáticas (TSD) "foi desenvolvida por Guy Brousseau no intuito de modelar o

---

[6] El profesor está poco presente en el análisis *a priori* y se considera en esencia por sus relaciones con la devolución y la institucionalización.

processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos”. (ALMOULOUD, 2007, p. 31).

1.4.1 Registros de Representação Semiótica

A teoria de Registros de Representação Semiótica enfatiza a importância da diversidade de registros de representação e a articulação entre os mesmos nas diversas atividades matemáticas. Para Duval (2009, p. 15), “em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática”. Segundo o autor, “os registros são as ferramentas que permitem analisar todas as produções matemáticas, e em primeiro lugar aquelas construídas com objetivo de ensino ou de aprendizagem”. (DUVAL, 2011, p. 104).

Diferente de muitas outras áreas do conhecimento, os objetos matemáticos são abstratos, o que conduz a matemática a se apoiar em representações para ser compreendida, assim, somente é possível acessar tais objetos por meio de suas representações. Segundo Duval (2009, p. 14), para que haja tal compreensão é necessário distinguir o objeto matemático de sua representação, uma vez que um mesmo objeto pode ser representado de formas distintas.

De acordo com Duval (2009), a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nos registros de representações confrontam três fenômenos intrinsecamente ligados: o da *diversificação dos registros de representação semiótica*, que indica a pluralidade de registros de representação que um objeto matemático possa ter, o da *diferenciação entre representante e representado*, que sugere a necessidade de compreensão quanto ao que está sendo representado por determinado registro de representação e a possibilidade de associá-lo a outro registro de representação e de integrá-lo em procedimentos de tratamento e o da *coordenação entre diferentes registros de representação semiótica* disponíveis.

Segundo Duval (1995 apud ALMOULOUD, 2007, p. 75) “é tomando simultaneamente dois registros de representação, e não cada registro isoladamente, que se pode determinar o funcionamento da representação própria de um registro [...]”, fato esse que almejamos contemplar em nossa sequência didática, uma vez que pretendemos conduzir os estudantes a compreender, ainda que intuitivamente, a ideia de taxa de variação instantânea, por meio da mobilização e da manipulação de registros de representação algébrica, gráfica e tabular.

Referindo-se ao registro de representação gráfica, Duval (2011) observa que sua compreensão dá-se necessariamente por meio da coordenação cognitiva do registro das escritas algébricas, e ressalta que:

> Entre a operação de construção de um gráfico, que não pode ir nunca além da identificação de uma sequência de pontos, e a operação não matemática que consiste em ligar os consecutivos assim obtidos pelos segmentos, existe um salto dimensional contínuo visual de retas e curvas. É em virtude desse salto dimensional que os gráficos cartesianos tornam-se um sistema semiótico produtor, ou criador, de novas representações, e não em virtude da regra de codificação que associa um par de números e um ponto. (DUVAL 2011, p. 108)

De acordo com Almouloud (2007, p. 72), “em qualquer atividade intelectual, na elaboração e na transformação de representações semióticas, é necessário distinguir dois tipos heterogêneos de transformação das representações: o tratamento e a conversão”.

Para Duval (2009) converter é:

> transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. [...] A conversão é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida. (DUVAL 2009, p. 58).

Almouloud (2007) observa que para se entender o que é uma conversão, se faz necessário observar dois aspectos: primeiro é que em toda conversão deve-se considerar um sentido, ou seja, deve-se indicar o registro de partida e o registro de chegada, segundo é que a conversão de uma representação implica em uma mudança de conteúdo e não somente de forma.

Quanto aos tratamentos, Duval (1999) ressalta que:

> Um tratamento é uma transformação de uma representação em uma outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados. (DUVAL, 1999 apud ALMOULOUD, 2007, p. 72)

Segundo Duval (2009, p. 52) há dois tipos de tratamentos, os quase-instantâneos e os intencionais. Os quase-instantâneos não se apoiam sobre os dados fornecidos pelo estatuto do objeto matemático, são aqueles em que o sujeito tem imediata consciência do que está fazendo, ou seja, o sujeito age de acordo com sua intuição, com sua experiência. Os intencionais são aqueles que requerem do sujeito ao menos certo tempo de análise consciente para que possam ser postos em prática, e apoiam-se nos dados fornecidos pelo objeto matemático que por sua vez são visíveis ao sujeito.

Para o autor, a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação, e ressalta, porém, que passar de um registro de representação para outro não é somente mudar o tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto matemático. Segundo o autor, “a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação” (DUVAL, 2009, p. 81). E é a articulação de registros de representação que constitui uma condição de acesso à compreensão matemática. E o reconhecimento de um objeto matemático por meio de múltiplas representações é a condição fundamental para que um estudante possa, por si só, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante a resolução de problema.

1.4.2 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida pelo pesquisador Frances Guy Brousseau (1986) tem por objetivo modelar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos com base em relações didáticas[7] em que se podem identificar as relações entre o professor, o aluno, o saber e o meio. E propõe um modelo teórico para a construção, análise e experimentação de situações didáticas. Para Brousseau (1975),

> um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975, p. 6 apud ALMOULOUD, 2007, p. 31)

De acordo com Almouloud (2007, p. 32), a TSD apoia-se em três hipóteses, a primeira é que o aluno aprende adaptando-se a um meio gerador de dificuldades que é composto por situações de ensino que sejam suscetíveis à aquisição de determinado conhecimento, de modo que a aprendizagem se dê por conta de uma reorganização, consciente ou não, dos meios de ação do sujeito, em que a prática é realmente necessária para que ocorra o processo de mudança de um sujeito agente para um sujeito aprendiz.

A segunda é que, para Brousseau (1986, p. 11, tradução nossa)[8], "um meio sem intenção didática é manifestantemente insuficiente para induzir o aluno à aquisição de todo conhecimento cultural que se deseja que adquira". De acordo com o autor, "o aluno aprende adaptando-se a um meio que é produtor de contradição, de dificuldades, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, se manifesta por respostas novas que são a prova da aprendizagem."[9]. A terceira hipótese adverte

---

[7] Brousseau (2008, p. 16) interpreta a relação didática como uma comunicação de informações.

[8] Un médio sin intenciones didácticas es manifestamente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos cultarales que es desea que adquieira.

[9] El aluno aprende adaptándose a um médio que es produtor de contradicción, de dificultades, de desequilíbrios, um poco como lo hace la sociedade humana. Esse saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifesta por respuestas muevas que son la prueba del aprendizaje.

que o meio e as situações devem engajar os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Almouloud (2007, p. 33) acrescenta uma quarta hipótese, extraída inteiramente de Bachelard, em que “no fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”.

Na TSD, os momentos em que o estudante tem a maior independência referente ao seu processo de aprendizagem são as situações que Brousseau (2008) denomina de *situações adidáticas*, são situações de ensino que têm por objetivo conduzir o estudante à apropriação de um novo saber por meio de problemas devidamente escolhidos de modo que o aluno atue, fale, reflita e evolua perante o processo de ensino e aprendizagem que está inserido. De acordo com Brousseau (2008), o estudante sabe que essas situações foram planejadas para conduzi-lo à aquisição desse novo conhecimento, e que esse conhecimento é justificado pela lógica interna das situações.

Entendemos uma *situação adidática,* baseados em Brousseau (2008), como uma atividade ou um conjunto de atividades que têm por intenção conduzir o educando a aquisição de determinados conhecimentos presentes ou não no ambiente escolar, sendo essa uma das principais características da TSD. Essas situações adidáticas escolhidas pelo professor são uma parte essencial de uma situação mais ampla, na qual o professor se envolve em um jogo com o sistema de interações do aluno, com os problemas propostos e com o meio, que Brousseau (2008) denomina de *situação didática*.

Segundo Brousseau (1986, p. 52, tradução nossa)[10] é necessário que “o professor aceite a responsabilidade pelos resultados e garanta ao aluno os meios efetivos de aquisição de conhecimentos”. Segundo o autor as situações se caracterizam por meio de quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização, nas quais o saber em jogo tem diferentes funções, e o aluno não tem a mesma relação com o saber.

[10] El professor acepte la responsabilidade de los resultados y que assegure al alumno los médios efectivos para la adquisición de los conocimientos.

De acordo com o autor, a fase de ação consiste em colocar o educando frente a uma situação de ação em que lhe é apresentado um problema cuja melhor solução consiste na necessidade de manipulação do conhecimento que se pretende ensinar. Nessa fase o aluno encontra-se ativamente empenhado na busca de soluções para um problema, realiza ações de caráter experimental, em que não se faz necessário a intervenção do professor.

Quanto à fase de formulação, cujo objetivo é a troca de informações, Brousseau (1986) salienta que esse é o momento em que o aprendiz troca ideias e informações com seus pares, de modo a explicitar as ferramentas utilizadas e as soluções encontradas por meio da troca de mensagens escritas ou orais. Para o autor a fase de formulação consiste em:

> desenvolver progressivamente uma linguagem compreensível por todos e que leva em conta os objetos e as relações pertinentes da situação de forma adequada (isto é, permitindo raciocínios úteis e ações). A cada instante esta linguagem construída será testada do ponto de vista de sua inteligibilidade, da facilidade de construção, do tamanho das mensagens que se pode trocar. A construção ou código (repertório, vocabulário, algumas vezes a sintaxe) em língua natural ou linguagem formal torna possível à explicitação das ações e dos modelos de ação. (BROUSSEAU, 1998, p. 36 apud ALMOULOUD, 2007, p. 39)

Quanto à fase de validação Almouloud (2007) ressalta que esta é a etapa em que ocorre um debate acerca das asserções obtidas durante o processo de ensino e aprendizagem. Nessa fase, espera-se que o aprendiz prove ou refute a exatidão de suas resoluções, de modo que se possa as corrigir e/ou ir adiante em suas produções, caso ocorra uma rejeição por parte do receptor, se faz necessário que o mesmo apresente uma justificativa para tal. Para Brousseau (1986, p. 52, tradução nossa) [11], "as situações de validação podem ajudar o professor a fazer aparecer em uma sala de aula, uma autêntica e pequena sociedade matemática". E acrescenta que "uma situação de validação não é, *a priori*, a melhor situação de aprendizagem de saberes institucionalizados. Ela

[11] Las situaciones de validación pueden ayudar la profesor, hacer vívida en una clase una auténtica pequeña sociedad matemática.

pode gerar obstáculos didáticos e gerar obstáculos epistemológicos." (BROUSSEAU, 1986, p. 52, tradução nossa)[12].

Na sequência didática que pretendemos elaborar temos por intenção conduzir os estudantes a percorrer, independentemente, as fases de ação, formulação, validação. Por fim faremos a institucionalização, para estabelecer formalmente os conhecimentos matemáticos em jogo, de modo que os alunos possam utilizá-lo em futuras situações. Segundo Almouloud (2007, p. 40), "depois da institucionalização, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos". Acrescenta ainda, que essa fase deve ser negociada em um processo de dialética no momento mais adequado, pois se feita muito cedo, prejudicará a construção do sentido e a aquisição do conhecimento, originando dificuldades tanto para o professor quanto para o aluno; se feita muito tarde reforça interpretações errôneas.

Almouloud (2007) ressalta ainda, que na TSD o processo de ensino e aprendizagem é baseado, principalmente, na noção de devolução, que é o momento em que o professor transfere ao aluno a responsabilidade referente à sua aprendizagem, além de apresentar uma devolutiva apropriada a cada situação de aprendizagem. Somente o professor conhece as especificidades do grupo de educandos o que permite escolher as variáveis didáticas que melhor se adaptam as necessidades locais deste grupo e garantir a evolução no processo de aprendizagem desses alunos.

Diante do exposto, optamos em utilizar a TSD para embasar o processo de elaboração de nossa sequência didática em consonância com a Teoria de Registros de Representação Semiótica.

[12] Una situación de validación no es, *a priori*, la mejor de las situaciones de aprendizaje de saberes institucionalizados. Ells puede hasta suscitar obstáculos didácticos y resucitar obstáculos epistemológicos molestos.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Nesse capítulo, apresentaremos o estudo do objeto matemático taxa de variação, um breve estudo referente ao ensino da derivada no âmbito da Educação Básica no Brasil, os estudos dos documentos oficiais que orientam a Educação Básica no Brasil e no Estado de São Paulo designados ao Ensino Médio, um estudo referente ao material de apoio que é disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo seguido de uma análise do Guia de Livros Didáticos: Programa Nacional do Livro Didático.

2.1 O Objeto Matemático Taxa de Variação

Baseamos o estudo do objeto matemático taxa de variação na obra Machado (1988, p. 4), uma vez que, para o ensino das noções de Cálculo Diferencial, o autor privilegia “o significado das ideias fundamentais em detrimento do acúmulo de técnicas operatórias ou de definições formalmente rigorosas”.

Podemos estudar dois tipos de taxa de variação. A primeira é a taxa de variação média que corresponde à variação de uma grandeza por unidade de outra, em média, em um intervalo qualquer. A segunda é a taxa de variação instantânea, ou taxa de variação no ponto, que caracteriza a rapidez com que uma função f varia em um ponto específico de seu domínio.

Iniciamos nosso estudo ressaltando as diferentes formas de crescimento e decrescimento de uma função f. Uma função é crescente a taxas crescentes, quando os valores de x crescem e os valores correspondentes de $f(x)$ crescem cada vez mais rapidamente. É crescente a taxas decrescentes, quando os valores de x crescem e os valores correspondentes de $f(x)$ crescem cada vez mais lentamente ou ainda, é crescente a taxas constantes, quando os valores de x crescem e os valores de $f(x)$ crescem a taxas constantes. De forma análoga, uma função pode decrescer de três maneiras distintas. Decrescer a taxas decrescentes, quando os valores de x crescem e os valores correspondentes de $f(x)$ decrescem cada vez mais lentamente. Decrescer a taxas crescentes, quando os valores de x crescem e os valores correspondentes de $f(x)$ decrescem cada vez mais rapidamente ou ainda decrescer a taxas constantes, quando os valores de x crescem e os valores correspondentes de $f(x)$ decrescem a taxas constantes.

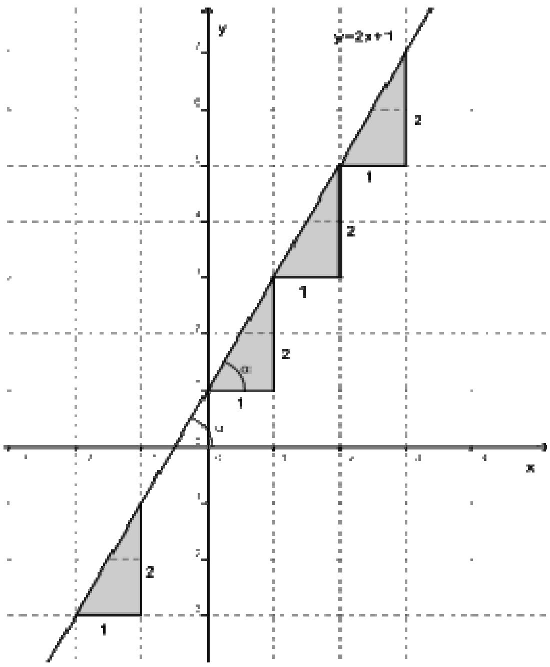
Machado (1988, p. 12), caracteriza a rapidez com que uma função varia (cresce ou decresce), por meio da noção de taxa de variação. Assim, caracterizaremos, a partir da mobilização de registros de representação gráfica e tabular, a noção de taxa de variação em consonância com o estudo do crescimento e decrescimento de uma função f.

Apresentamos inicialmente a taxa de variação em funções representadas algebricamente por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, pois quando $a = 0$, $f(x)$ é constante e igual a b, ou seja, não há variação.

A função, representada algebricamente por $f(x) = ax + b$ pode crescer a taxas constantes quando $a > 0$ ou decrescer a taxas constantes, quando $a < 0$. Por exemplo, a função $f(x) = 2x + 1$ tem $a = 2$ e, portanto, é uma função crescente. Sua representação gráfica é a reta de equação $y = 2x + 1$ (gráfico 1) que tem $a = 2$ como coeficiente angular que determina a inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas. Analisando o gráfico podemos perceber que quando os valores de x variam uma unidade, os valores correspondentes de y variam duas unidades, ou seja, que aumentam a uma taxa constante igual a dois, o que nos permite dizer que essa função cresce a taxas constantes.

Por outro lado, sabemos que esse coeficiente pode também ser determinado pela tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo das abscissas. Neste caso temos $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Observando no gráfico 1, esse coeficiente angular, que chamamos de n, é determinado por $n = \frac{2}{1}$ que coincide com a taxa de variação.

Gráfico 1: Taxa de variação da função $f(x) = 2x + 1$



A tabela 1 apresenta o registro de representação tabular da função $f(x) = 2x + 1$ em que evidenciamos a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x, mostrando que quando os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de $f(x)$ aumentam a uma taxa constante igual a dois, caracterizando uma função crescente a taxas constantes.

Tabela 1: Taxa de variação da função $f(x) = 2x + 1$

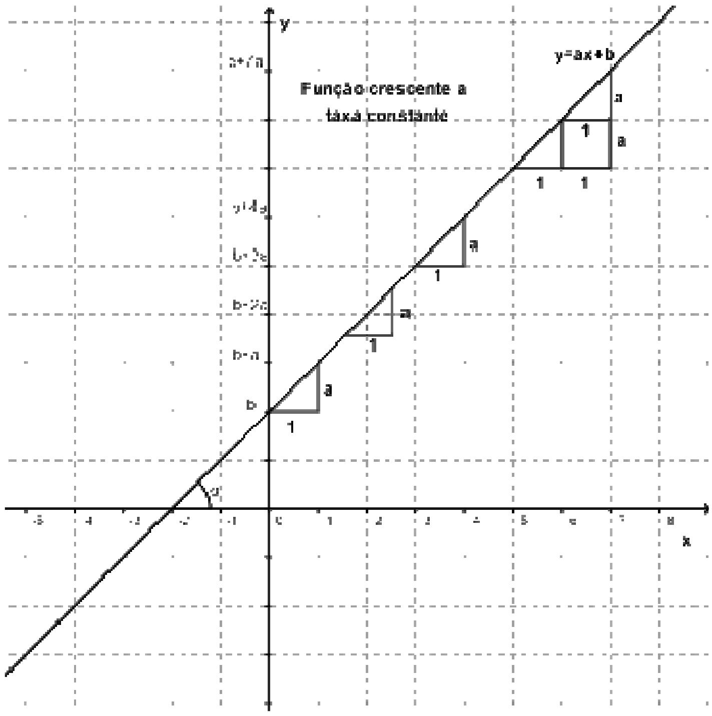
x	$f(x) = 2x + 1$
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

Assim, podemos generalizar essas observações para uma função representada algebricamente por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a > 0$. Como $a > 0$ sabemos que esse tipo de função é crescente. Por outro lado, observamos que a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x é constante e igual a a, pois quando os valores de x variam uma unidade, a partir de um ponto qualquer do domínio de $f(x)$, os valores correspondentes de $f(x)$ variam a unidades.

A representação gráfica de funções desse tipo, mostrada no gráfico 2, são retas de equação $y = ax + b$, com a e b reais e $a > 0$. Essas retas têm coeficiente angular a, que determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas. O coeficiente angular é determinado então pela tangente do ângulo α que é determinado pelo quociente da variação de y, pela variação de x. Como, neste caso, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ temos $tg\alpha = \frac{a}{1}$.

Podemos observar também que quando os valores de x aumentam uma unidade, os valores de y aumentam a uma taxa constante igual a a, o que caracteriza uma função crescente a taxas constantes.

Gráfico 2: Taxa de variação da função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$



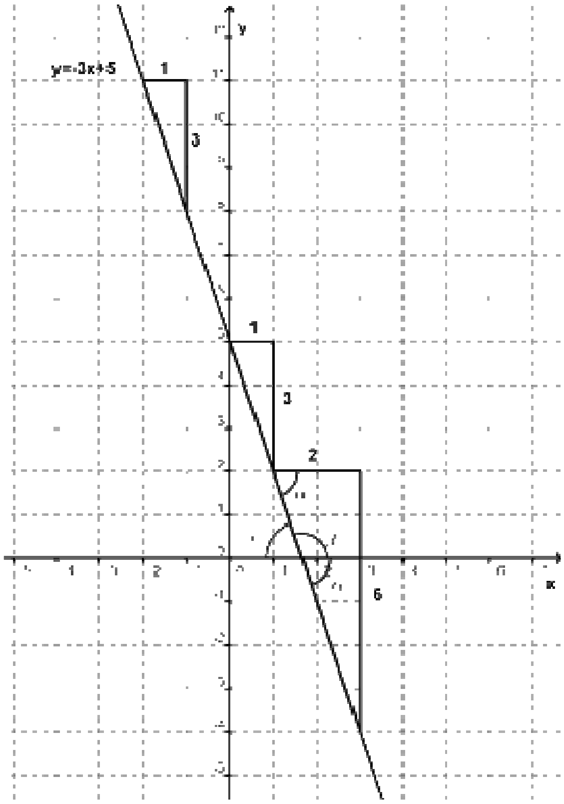
Por meio do registro de representação tabular (tabela 2) podemos perceber, para a função $f(x) = ax + b$ com a e b reais e $a > 0$, que a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x é constante e igual a a, isto é, percebemos que à medida que os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de $f(x)$ aumentam a uma taxa constante e igual a a, o que caracteriza uma função crescente a taxas constantes.

Tabela 2: Taxa de variação da função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$

	x	$f(x) = ax + b$	
	0	b	
1			a
	1	$b + a$	
1			a
	2	$b + 2a$	
1			a
	3	$b + 3a$	
1			a
	4	$b + 4a$	

Tomemos agora, como exemplo, a função representada algebricamente por $f(x) = -3x + 5$. Como $a = -3$ sabemos que a função é decrescente. Sua representação gráfica é a reta de equação $y = -3x + 5$ (gráfico 3), cujo coeficiente angular $a = -3$ determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas. Podemos observar nesse gráfico que quando os valores de x aumentam uma unidade os valores correspondentes de y diminuem a um taxa constante e igual a três, o que caracteriza uma função decrescente a taxas constantes.

Gráfico 3: Taxa de variação da função $f(x) = -3x + 5$



Por outro lado, sabemos que o coeficiente angular é determinado pela tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo das abscissas. Neste caso, temos $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e como α e β são suplementares a $tg\alpha = -tg\beta$. Observando o gráfico 3 percebemos que esse coeficiente angular, que chamamos de n, é determinado por $n = -\frac{6}{2} = -3$, que coincide com a taxa de variação.

A tabela 3 apresenta o registro de representação tabular da função $f(x) = -3x + 5$, onde percebemos que quando os valores de x variam uma unidade, a variação de $f(x)$ é constante e igual a menos três unidades, ou seja, os valores correspondentes de $f(x)$ diminuem a uma taxa constante igual a três, o que caracteriza uma função decrescente a taxas constantes.

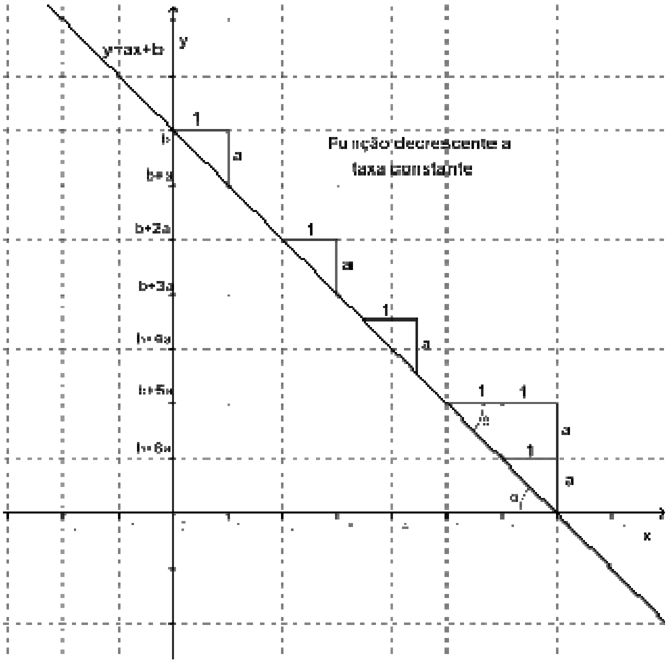
Tabela 3: Taxa de variação da função $f(x) = -3x + 5$

x	$f(x) = -3x + 5$
0	5
1	2
2	-1
3	-4
4	-7

Podemos então generalizar essas observações para uma função representada algebricamente por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a < 0$. Como $a < 0$ sabemos que esse tipo de função é decrescente. Por outro lado, percebemos que a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x é igual a a, pois à medida que os valores de x variam uma unidade, a partir de um ponto qualquer do domínio de $f(x)$, os valores correspondentes de $f(x)$ variam a unidades.

A representação gráfica desse tipo de função (gráfico 4) são retas de equação $y = ax + b$, com a e b reais e $a < 0$. Essas retas têm coeficiente angular a, que determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas. Nesse gráfico, podemos perceber que quando os valores de x aumentam, os valores de y diminuem a uma taxa constante e igual a a, o que caracteriza uma função decrescente a taxas constantes. De maneira análoga ao caso anterior, temos $tg\alpha = \frac{a}{1}$ para $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, pois neste caso $a < 0$.

Gráfico 4: Taxa de variação da função $f(x) = ax + b$, com $a < 0$



Por meio do registro de representação tabular percebemos, para a função $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a < 0$, que a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x é constante e igual a a, isto é, à medida que os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de $f(x)$ diminuem a uma taxa constante e igual a a, o que caracteriza uma função decrescente a taxas constantes, como mostra a tabela 4.

Tabela 4: Taxa de variação da função $f(x) = ax + b$ $(a < 0)$

x	$f(x) = ax + b$
0	b
1	$b + a$
2	$b + 2a$
3	$b + 3a$
4	$b + 4a$

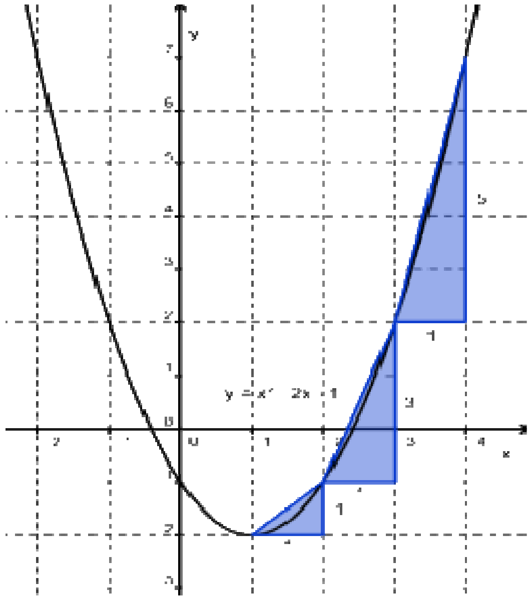
Tomemos agora a função de representação algébrica $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, para estudar a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x, via registros de representação gráfica e tabular, em que caracterizaremos a rapidez com que f varia em determinados intervalos (cresce ou decresce). Acreditamos que os registros de representação gráfica e tabular facilitam a percepção da taxa de variação de $f(x)$ em relação a x, e das informações referentes ao seu crescimento e/ou decrescimento, uma vez que essas informações não são percebidas instantaneamente por meio do registro de representação algébrica.

Por exemplo, para a função representada algebricamente por $f(x) = x^2 - 2x - 1$, cuja curva de equação $y = x^2 - 2x - 1$ que a representa graficamente tem $a > 0$ e, portanto, concavidade voltada para cima, mostramos a taxa de variação de y por unidade a mais de x a partir dos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. No ponto $x = 2$, por exemplo, quando o valor de x aumenta uma unidade, percebemos que o valor correspondente de y aumenta três unidades, enquanto no ponto $x = 3$, quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor correspondente de y aumenta cinco unidades, assim, percebemos que à medida que os valores de x variam uma unidade a variação correspondente de y não é constante, ou seja, a variação de y por unidade a mais de x, como mostra o gráfico 5, corresponde à taxa de variação de y em relação a x em média.

Também podemos observar, por exemplo, que para o intervalo $[1, \infty)$ à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y

aumentam cada vez mais rapidamente, o que caracteriza um intervalo em que f cresce a taxas crescentes.

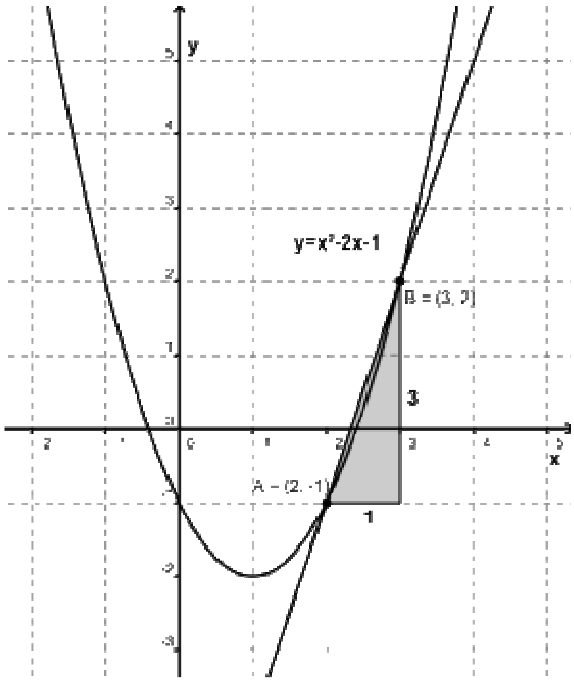
Gráfico 5: Taxa de variação de $f(x)$ por unidade a mais de x nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$



Tomemos então o ponto $x = 2$ para detalhar o estudo da taxa de variação de y em relação a x. Nesse ponto, podemos observar que à medida que o valor de x aumenta uma unidade, caracterizando o intervalo $[2, 3]$, o valor correspondente de y aumenta três unidades, como mostra o gráfico 5.

No gráfico 6, podemos observar que a taxa de variação de y por unidade a mais de x, no intervalo $[2, 3]$, corresponde à taxa de variação da reta secante a curva nos pontos de abcissas $x = 2$ e $x = 3$, denominados A e B respectivamente, cuja equação $y = 3x - 7$ pode ser obtida a partir desses pontos. Assim, o coeficiente angular $a = 3$, que determina a inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, corresponde à taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[2,3]$, que é igual a três. Se tomarmos o intervalo [3, 4] teremos a reta secante de equação $y = 5x - 13$ o que mostra que a cada intervalo temos uma reta secante ao gráfico de f.

Gráfico 6: Taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x no intervalo $[2,3]$

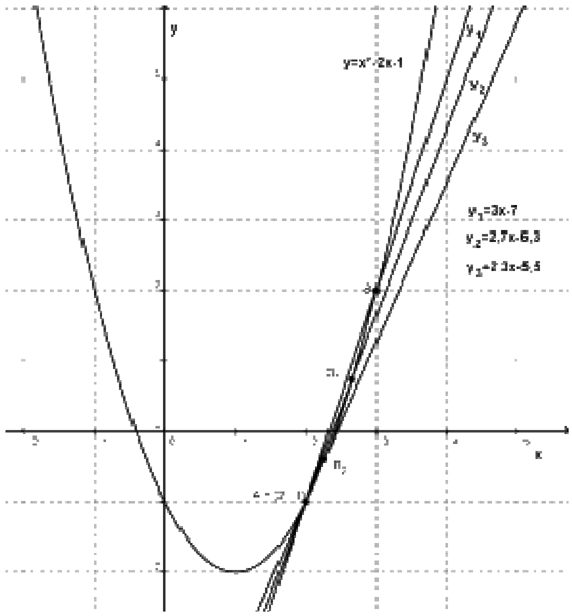


Nos interessamos pela taxa de variação de f em um ponto determinado, ou seja, pela taxa de variação instantânea. Vamos calculá-la no ponto $x = 2$. Segundo Machado (1988, p. 24):

> a ideia fundamental de tal noção é a de que uma curva pode ser bem aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto. Assim, a rapidez com que uma função varia em um ponto pode ser associada à taxa de variação da função $y = ax + b$ que melhor se aproxima da função dada no ponto x_0.

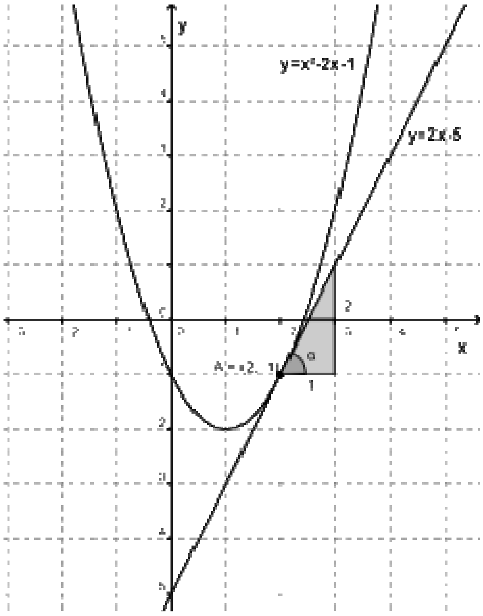
Assim, devemos tomar outros pontos da curva, a partir de B, cada vez mais próximos de A, dizemos geralmente que “o ponto B tende à A“, como mostra o gráfico 7. Hoje com um software de geometria dinâmica o ponto B pode ser deslocado até o ponto A, o que facilita a visualização de que o coeficiente angular da reta secante tende ao coeficiente angular da reta tangente.

Gráfico 7: Retas secantes a representação gráfica f quando B tende a A



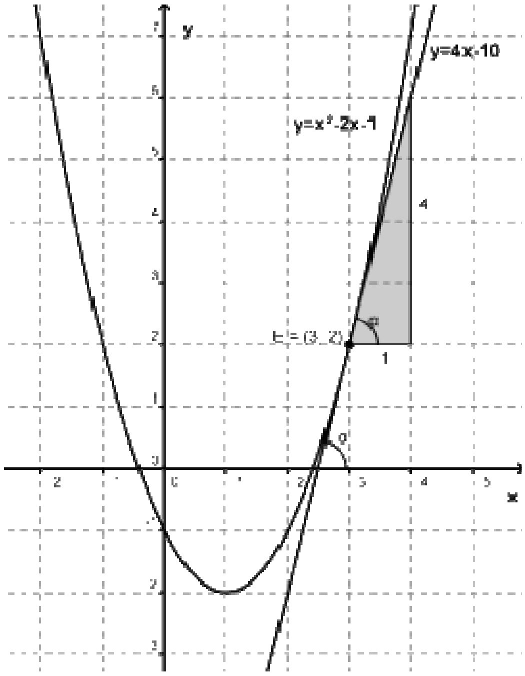
Podemos ver então que uma reta que passa pelo ponto A poderia ser a tangente à curva nesse ponto, mas nesse ponto não podemos calcular o coeficiente angular dessa reta porque a variação de x seria zero. No entanto, pelo triângulo mostrado no gráfico 8, feito com o software, sabemos que $tg\alpha = \frac{2}{1}$. Supondo que exista essa reta, vemos que sua equação é $y = 2x - 5$ como mostra o gráfico 8 e que no ponto $x = 2$ a taxa de variação instantânea é 2.

Gráfico 8: Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x no ponto $x = 2$



Vejamos agora a taxa de variação instantânea no ponto $x = 3$. De maneira análoga, a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto $x = 3$ corresponde à taxa de variação da função cuja representação gráfica é a reta tangente a curva neste ponto, observando o gráfico 9 construído com o software, percebemos que $tg\alpha = \frac{4}{1} = 4$, (a partir do triângulo) e temos que $y = 4x - 10$ é a equação dessa reta e que seu coeficiente angular corresponde à taxa de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto $x = 3$.

Gráfico 9: Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x no ponto $x = 3$



Acreditamos que o registro de representação tabular, como mostra a tabela 5, além de propiciar a percepção dos intervalos de crescimento e decrescimento de f com suas respectivas características, pois podemos observar que à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de $f(x)$ ora aumentam, ora diminuem. Tal fato favorece a percepção de que para variações do valor de x de uma unidade, os valores correspondentes de $f(x)$ não variam a taxas constantes, e indica a taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x e que a variação dessa variação é constante e igual a dois.

Tabela 5: Taxa de variação da taxa de variação media de $f(x)$ em relação a x

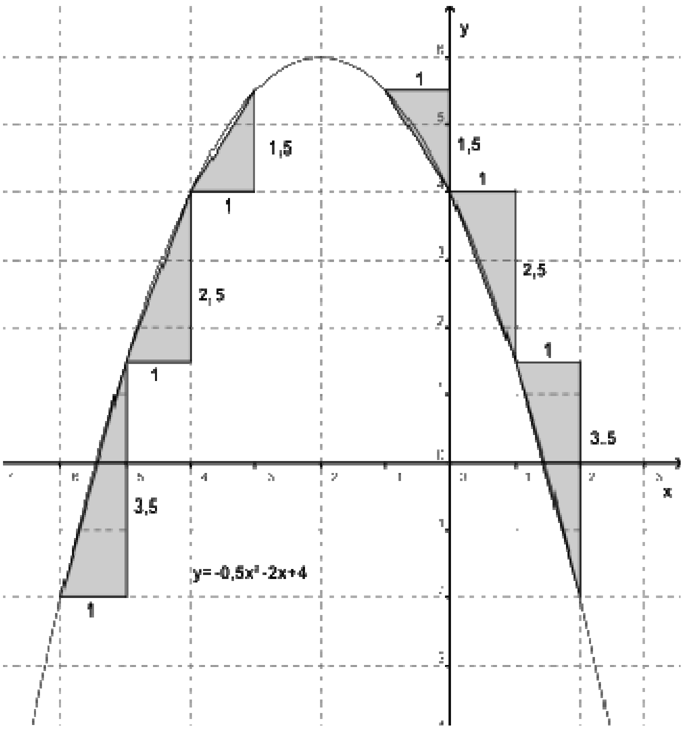
	x	$f(x) = x^2 - 2x - 1$		
	-2	7		
1			-5	
	-1	2		2
1			-3	
	0	-1		2
1			-1	
	1	-2		2
1			1	
	2	-1		2
1			3	
	3	2		

Para fazer o mesmo estudo, tomaremos agora à função representada algebricamente por $h(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x + 4$, cuja curva de equação $y = -\frac{x^2}{2} - 2x + 4$ que a representa graficamente tem $a < 0$ e, portanto, tem concavidade voltada para baixo.

No gráfico 10 evidenciamos a taxa de variação média de $h(x)$ em relação a x em alguns pontos de seu domínio. No ponto $x = -4$, por exemplo, podemos observar que quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor correspondente de y aumenta 1,5 unidades, enquanto no ponto $x = 1$, quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor correspondente de y diminui $3{,}5$ unidades, o que nos conduz a inferir que a taxa de variação de $h(x)$ em relação a x não é constante.

Podemos perceber também, por meio dos triângulos destacados, que quando os valores de x aumenta uma unidade, ora os valores correspondentes de y aumentam, ora diminuem, caracterizando intervalos de crescimento e decrescimento de $h(x)$. Percebemos também a rapidez que $h(x)$ cresce ou decresce, visto que à medida que os valores de x aumentam os valores correspondentes de y ora aumentam mais lentamente, ora diminuem mais rapidamente, caracterizando intervalos em que f cresce a taxas decrescentes e decresce a taxas crescentes.

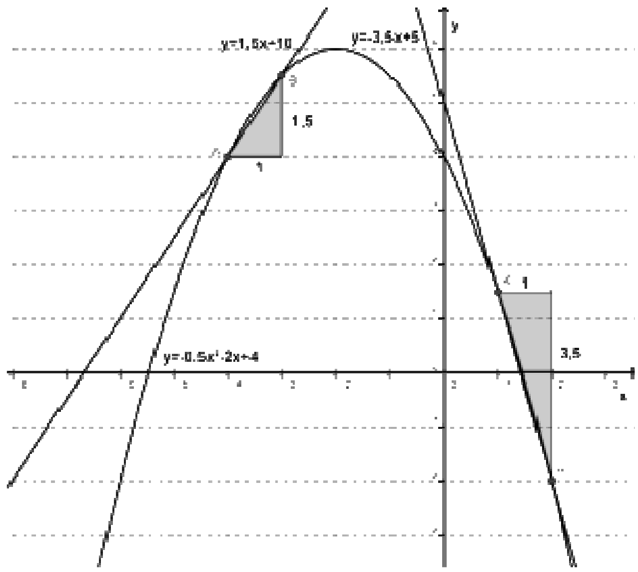
Gráfico 10: Taxa de variação média de $f(x)$ por unidade a mais de x



Estudaremos então, via registro de representação gráfica e tabular, a taxa de variação de $h(x)$ em relação a x nos pontos $x = -4$ e $x = 1$. No gráfico 11, podemos observar que a taxa de variação média de $h(x)$ em relação a x no intervalo $[-4, -3]$ corresponde à taxa de variação da função cuja representação gráfica é a reta secante a curva nos pontos de abscissas $x = -4$ e $x = -3$, denominados A e B respectivamente, cuja equação $y = 1{,}5x + 10$ pode ser obtida a partir desses pontos. No intervalo $[1, 2]$, a taxa de variação de $h(x)$ em relação a

x corresponde à taxa de variação da reta secante a curva nos pontos de abscissas $x = 1$ e $x = 2$, denominados K e H respectivamente, cuja equação y= $-3{,}5x + 5$ pode ser obtida a partir desses pontos. Assim, os coeficientes angulares que determinam a inclinação dessas retas em relação ao eixo das abscissas, correspondem à taxa de variação média de $h(x)$ em relação a x nesses intervalos.

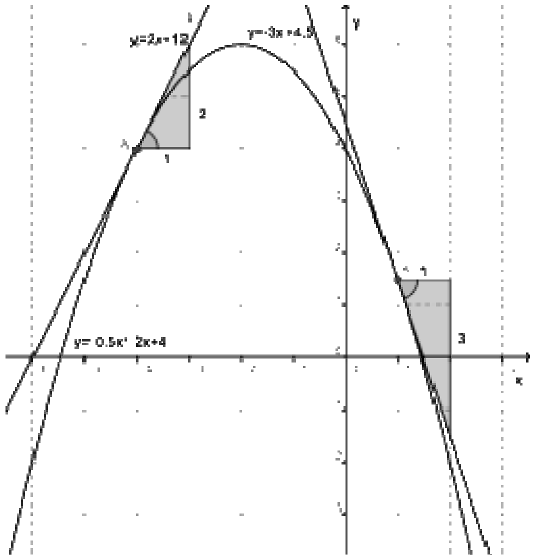
Gráfico 11: Taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x nos pontos $x = -4$ e $x = 1$



Para obtermos a taxa de variação instantânea de $h(x)$ em relação a x nos pontos $x = -4$ e $x = 1$, devemos diminuir, ao máximo, a amplitude dos intervalos $[-4,-3]$ e $[1,2]$, de modo que tendam aos instantes $x = -4$ e $x = 1$, para isso, devemos tomar pontos em f o mais próximos possível de A, (fazer B tender a A) e o mais próximos possível de K (fazer H tender a K). Com isso, as retas definidas por A e B e por K e H tendem a deixar de ser secantes à curva tendendo a tangenciá-la nos pontos A e K, como mostra o gráfico 12, e o valor dos coeficientes angulares dessas secantes tendem ao valor dos coeficientes angulares das retas tangentes. Deste modo, os valores da taxa de variação de $h(x)$ em relação a x nos pontos de abscissas $x = -4$ e $x = 1$, correspondem aos valores da taxa de variação das funções cujas representações gráficas são as retas tangentes à curva nesses pontos, cujas equações seriam $y = 2x + 12$ e $y = -3x + 4{,}5$ respectivamente, buscando os coeficientes a partir dos triângulos construídos com o auxilio de um software de geometria dinâmica.

Como o coeficiente angular da reta de equação $y = 2x + 12$, que determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas, corresponde à taxa de variação instantânea de $h(x)$ em relação a x no ponto $x = -4$ e de forma análoga, o coeficiente angular da reta de equação $y = -3x + 4{,}5$ corresponde à taxa de variação de $h(x)$ em relação a x no ponto de abscissa $x = 1$, deduzimos que a taxa de variação de $h(x)$ em relação a x no ponto A é igual a 2 e no ponto K é igual a -3.

Gráfico 12: Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x nos pontos $x = -4$ e $x = 1$



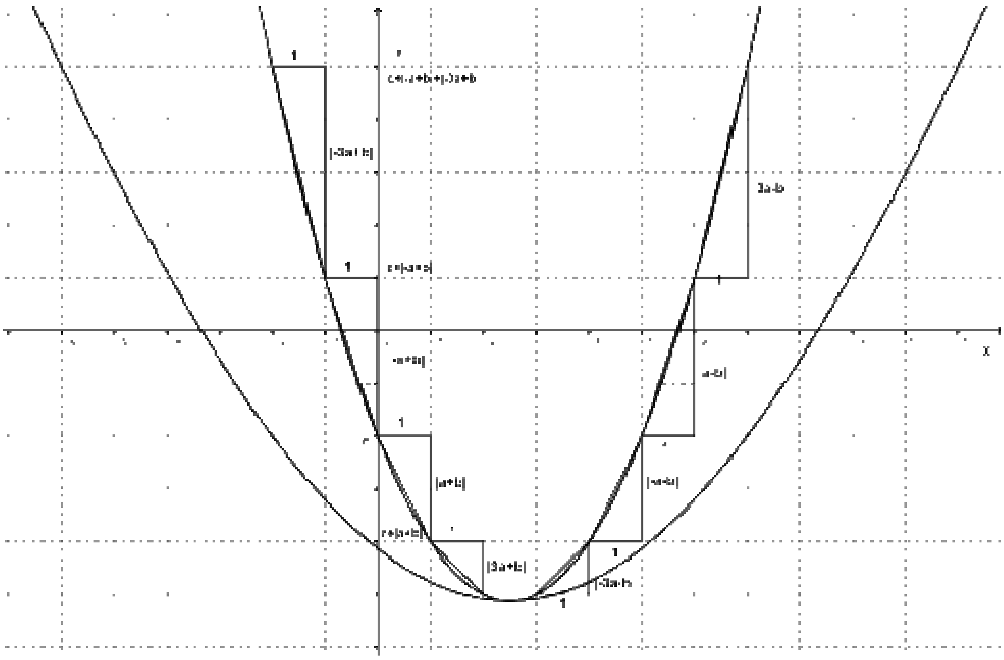
Por meio do registro de representação tabular, como mostra a tabela 6, percebemos que a taxa de variação média de $h(x)$ em relação a x quando os valores de x aumentam uma unidade não é constante. A tabela facilita a percepção de que a taxa de variação dessa taxa de variação é sempre a mesma e igual a -1, isto é, $2 \cdot \frac{-1}{2}$. Além disso, ajuda a identificar os intervalos de crescimento e decrescimento de $h(x)$ com suas respectivas características, pois podemos observar que à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de $h(x)$ ora aumentam, ora diminuem.

Tabela 6: Taxa de variação da taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x

	x	$f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x + 4$		
	-4	4		
1			1,5	
	-3	5,5		-1
1			0,5	
	-2	6		-1
1			-0,5	
	-1	5,5		-1
1			-1,5	
	0	4		-1
1			-2,5	
	1	1,5		-1
1			-3,5	
	2	-2		

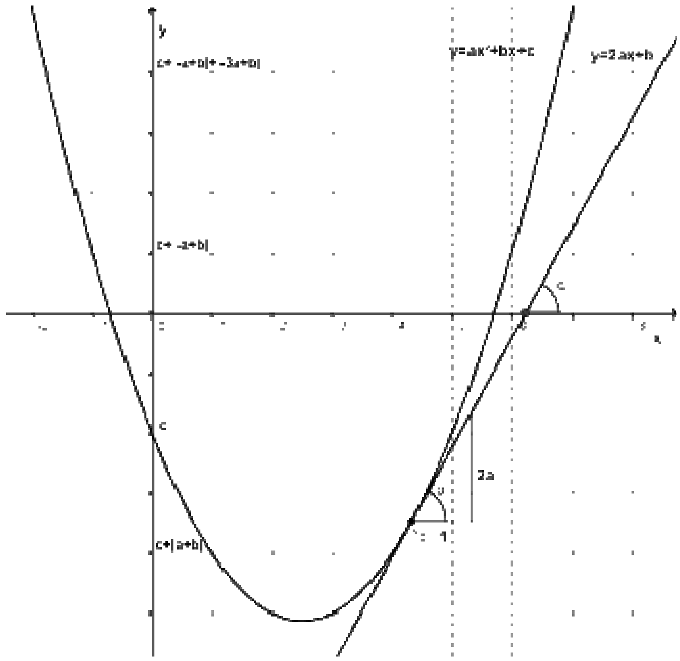
Podemos então generalizar essas observações para uma função representada algebricamente por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, cuja curva de equação $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), tem concavidade voltada para cima, como mostra o gráfico 13. Podemos perceber, por meio dos triângulos destacados, a taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x quando os valores de x aumentam uma unidade a partir de determinados pontos de seu domínio. Por outro lado, percebemos os intervalos em que a representação gráfica de f cresce ou decresce, e ainda que há um intervalo em que à medida que os valores de x aumentam os valores correspondentes de y diminuem cada vez mais lentamente, caracterizando o intervalo em que f decresce a taxas decrescentes, e outro em que à medida que os valores de x aumentam os valores correspondentes de y aumentam cada vez mais rapidamente, caracterizando o intervalo em que f cresce a taxas crescentes. A rapidez de crescimento depende então da abertura maior ou menor do gráfico de f.

Gráfico 13: Taxa de variação média de $f(x)$ por unidade a mais de x



Por meio do gráfico 14 observamos a reta tangente à curva em um ponto x_0 do seu domínio, cuja equação $y = 2ax + b$ pode ser determinada a partir do triângulo construído com o auxilio de um software de geometria dinâmica e ainda, que a taxa de variação instantânea de $f(x)$ neste ponto, corresponde ao valor do coeficiente angular que determina a inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, que é igual a $2a$.

Gráfico 14: Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em um ponto x_0



Por meio do registro de representação tabular, além de se perceber a taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x, quando os valores de x aumentam uma unidade, a partir de determinados pontos de seu domínio, percebemos que essa taxa de variação não é constante, e que a taxa de variação dessa taxa de variação é constante e igual a $2a$, como mostra a tabela 7.

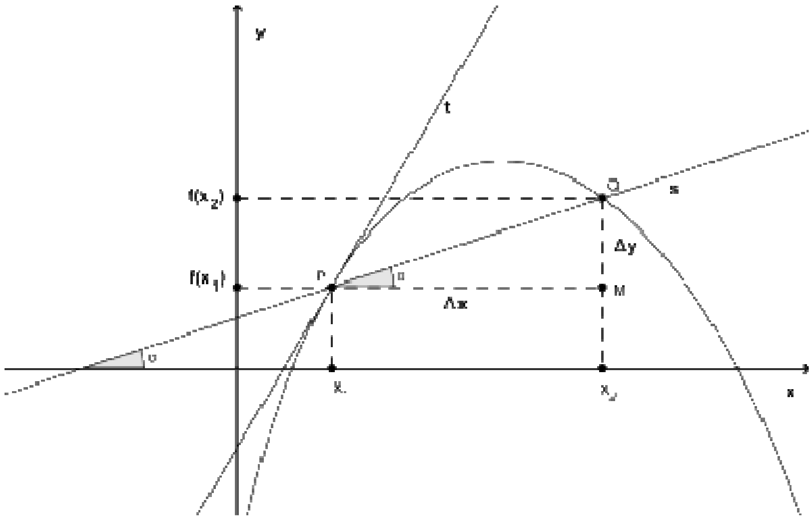
Tabela 7: Taxa de variação da taxa de variação média de $f(x)$ por unidade a mais de x

	x	$f(x) = ax^2 + bx + c$		
	-2	$4a - 2b + c$		
1			$-3a + b$	
	-1	$a - b + c$		$2a$
1			$-a + b$	
	0	c		$2a$
1			$a + b$	
	1	$a + b + c$		$2a$
1			$3a + b$	
	2	$4a + 2b + c$		

Assim, de acordo com Machado (1988, p. 26), a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x em um ponto de abscissa x_0 "é também chamada de derivada de $f(x)$ no ponto de abscissa x_0. Seu valor indica a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto considerado. Esse valor é comumente representado por $f'(x_0)$".

Então, para definir a derivada de uma função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$, temos que buscar o coeficiente angular m_t, da reta t tangente à curva nesse ponto. Escolhemos então, um outro ponto $Q(x_2, f(x_2))$ e consideramos a reta s que passa por P e Q secante ao gráfico de f, sendo m_s seu coeficiente angular(gráfico 15). Observando o triângulo PMQ, retângulo em M, sabemos que $m_s = tg\alpha = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Se fizermos Q se aproximar de P, parece que m_s é uma aproximação de m_t e esperamos que esta aproximação melhore cada vez que Q se aproxime mais de P com $P \neq Q$. Podemos fazer isso de várias maneiras: Q tendendo a P tomando pontos pela direita, tomando pontos pela esquerda ou tomando pontos alternadamente à esquerda e à direita de P.

Gráfico 15: Derivada de uma função $f(x)$ em um ponto $P(x_1, f(x_1))$



Se o coeficiente angular m_s tem um valor limite, isto é, se m_s se aproxima de algum número quando Q se aproxima de P, então esse número é o coeficiente angular m_t da reta tangente. Dessa forma podemos definir:

> Dados uma curva y que representa graficamente uma função $f(x)$ e $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. O coeficiente angular (coeficiente de inclinação) da reta tangente à curva no ponto *P* é dado por: $m_t = \lim\limits_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ desde que esse limite exista.

Ou ainda:

> Considerando $\Delta x = x_2 - x_1$ ou $x_2 = x_1 + \Delta x$ e se $x_2 \to x_1$ então $\Delta x \to 0$ e teremos então $m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$.

Se a função f é contínua em x_0 então a reta tangente à curva em $P(x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e tem inclinação

$m_t(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ e a equação dessa reta será dada por: $y - f(x_0) = m_t(x_0)(x - x_0)$.

Percebemos por essas definições, geralmente, tratadas no ensino superior que “a secante tendendo à tangente” ou “o ponto P tendendo ao ponto Q” é representada pelo limite, pois podemos aproximar tanto quanto quisermos esses pontos, mas não podemos fazê-los coincidir pois não podemos dividir por zero.

Pensamos que a manipulação simultânea dos registros de representação gráfica, tabular e algébrica, em um software de geometria dinâmica pode contribuir para que estudantes do Ensino Médio possam construir significado, para as ideias de taxa de variação e que, no caso de seguir seus estudos para um curso de exatas poderá compreender mais facilmente as noções de derivada.

2.2 O Ensino do Cálculo Diferencial na Educação Básica do Brasil

No sentido de mostrar que a noção de derivada já fez parte do currículo de matemática da Educação Básica brasileira optamos por fazer um breve levantamento histórico a respeito do mesmo.

Com esse intuito encontramos muitos trabalhos que versam a respeito da Educação Básica do Brasil, entretanto, não encontramos trabalhos que tratem exclusivamente da noção de derivada, das taxas de variação e nem do ensino do Cálculo Diferencial, fato esse, que nos levou a fazer um apanhado desses trabalhos com foco no processo de ensino e aprendizagem destas noções.

Segundo Valente (2005), nas últimas décadas do século XIX e início do século XX, matemáticos estavam preocupados em discutir o ensino da matemática, e essa preocupação tornou-se evidente quando em 1908, no IV

Congresso Internacional de Matemática, realizado em Roma, é criada a Comissão Internacional de Ensino da Matemática (Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique – CIEM), cujo comitê dirigente era constituído pelo suíço Henri Fehr, o inglês George Greenhil e o prusiano-alemão Christian Felix Klein (escolhido presidente), que teve como objetivo inicial:

> Diagnosticar o estado do ensino da matemática nos países 'mais desenvolvidos', embora tenha se dedicado a atuar como 'agente de mudanças' disseminando a ideia de que a reforma do ensino da matemática era necessária e urgente, de acordo com os motivos e razões dos seus principais líderes, David Eugene Smith (Teachers College, Columbia University, New York) e Felix Klein (Universidade de Göttingen, Alemanha), que expressavam as realidades que vivenciavam em seus países. (SCHUBRING 1999, apud DIAS, 2008, p. 6)

Segundo Braga (2006), Felix Klein teve um papel destacado na liderança do movimento internacional do início do século XX, onde seu objetivo primeiro era introduzir noções do Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos do ensino secundário.

> O que Klein propôs, a partir de 1900, foi de fato introduzir os conteúdos do ensino preparatório de matemática das escolas técnicas superiores como assuntos novos e básicos para os três tipos de escolas secundárias: geometria analítica e os elementos de Cálculo Diferencial. (BRAGA, 2006, p.44)

Braga (2006) também afirma que diversos trechos da obra *Matemática Elementar sob um ponto de vista superior*, de Felix Klein, fornecem indícios de que a introdução do Cálculo Infinitesimal no ensino secundário pode ter sido o objetivo primeiro que lançou Klein a tomar frente do movimento modernizador.

Já a situação da educação brasileira no mesmo período, de acordo com Pereira (2009), era caótica.

> Na verdade, existiam poucas aulas avulsas, sem nenhum incentivo ou orientação, onde os professores escolhiam os horários que melhor lhe conviessem, bem como o conteúdo a ser ensinado, e os alunos matriculavam-se e retiravam-se quando bem entendessem. (PEREIRA 2009, p.45)

De acordo com Dória (1997, p. 22), "estudava quem queria, não quem devia ou podia". O ano de 1837 foi de excepcional importância para o Brasil, politicamente, e não o seria menos para o ensino brasileiro, mais especificamente para o Seminário de São Joaquim, o qual, como relata a autora, veio a transformar-se no Colégio Pedro II, em 2 de dezembro de 1837, pelo decreto levado para assinatura do Regente Pedro de Araújo Lima pelo eminente Ministro Bernardo Pereira de Vasconcellos.

Segundo essa autora, no ano de 1838 o ensino das noções do Cálculo Diferencial estava presente nas aulas do Pedro II, pois o então Ministro da Justiça e interino no império, Bernardo de Vasconcellos, não o pôs à margem das preocupações do governo, dedicou ao colégio cuidados e providências de toda ordem visando o futuro, e a inclusão da disciplina de Cálculo Diferencial nas aulas do colégio, era uma pedido do Ministério da Guerra.

Dória (1997) também relata um fato impactante para a Educação Básica brasileira naquele período. Segundo a autora, no dia 18 de março do ano letivo de 1873, assinalar-se-ia a providência governamental, relativa ao colégio, que compunha-se do aviso que isentava o aluno aprovado em exame final de qualquer disciplina, do estudo da mesma, embora reprovado noutras matérias do respectivo ano, ou seja, agora os alunos eram aprovados por série, fato esse que perdura até os dias atuais.

Já com a reforma Benjamin Constant aprovada pelo decreto nº. 981 de 8 de novembro de 1890, o curso integral de estudos do ginásio abrangia um plano de estudos e sua duração era de 7 anos. Quanto à distribuição das matérias, pudemos verificar, na parte destinada ao ensino secundário (Título V, p. 8), que os tópicos referentes ao estudo das noções do Cálculo Diferencial, inclusive da noção de derivada, encontravam-se na 1ª cadeira do 3º ano, sendo revisados durante os quatro anos seguintes, pois eram cobrados nos exames finais ao fim da matéria, e nos exames de madureza, ao fim do curso integral.

Entretanto, referindo-se ao ensino das noções do Cálculo Diferencial proposto pela reforma Benjamin Constant, Roxo (1937) observa que tal ensino não tinha “[...] nenhuma ligação com o resto do curso, onde não era desenvolvida a ideia de função, efeito de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contraproducente”. (ROXO, 1937, p. 220 apud SPINA, 2002, p. 59)

Segundo Spina (2002, p. 59), “Tal postura culminaria em 1900 com a retirada dos programas oficiais do Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Geometria Descritiva”.

Referindo-se as três décadas seguintes, Pereira (2009, p. 46), enfatiza que “nenhuma das reformas propostas chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro”.

Já em 1927, convém destacar as mudanças no ensino da matemática propostas pelo professor Euclides Roxo, que “propôs à congregação do Colégio Pedro II, a unificação dos ramos da Matemática: aritmética, álgebra e geometria. No ato de sua proposta, fez referência ao Movimento de Reforma Internacional do Ensino da Matemática orientado por Klein”. (WERNECK, 2003, p. 40).

O ano de 1929 foi um marco para o Colégio Pedro II e para o ensino da Matemática no Brasil, pois de acordo com Valente (2005, p. 3), “o Decreto nº 18.564 de 15 de janeiro de 1929 oficializa o aceite da proposta modernizadora encabeçada por Roxo”, emergindo assim, a disciplina de Matemática. Fato esse, que também marcou o ensino brasileiro, tendo em vista que esse colégio era considerado modelo para os demais estabelecimentos de ensino do país.

Perante a proposta de unificação de Roxo, Braga (2006) observa que o pensamento funcional era uma das principais concepções modernizadoras e que um dos pilares dessa nova proposta era a conexão entre os diversos ramos da matemática.

Com o Decreto 19.890 de 18 de abril de 1931, conhecido como Reforma Francisco Campos, institui-se no âmbito nacional a *matemática* como disciplina escolar do secundário, e o ensino passou então a ter dois ciclos: um fundamental, de cinco anos, e outro complementar, de dois anos, esse visa à preparação para o curso superior.

> Essa proposta, que pretendia colocar o ensino da matemática do curso secundário brasileiro ao lado daquele praticado nos países mais adiantados do mundo, deve ser creditada basicamente ao empenho determinado de Euclides Roxo, sem dúvida, o educador brasileiro mais inteirado das concepções modernizadoras internacionais. (BRAGA, 2006, p. 73)

Duarte (2002) também ressalta, que:

> Euclides Roxo exerceu papel fundamental na reformulação dos aspectos metodológicos introduzidos na educação brasileira, primeiramente no Colégio Pedro II, em 1929, como também na Reforma Francisco Campos em 1931 [...]. (DUARTE, 2002, p. 161 apud WERNECK, 2003).

Braga (2006) também ressalta que os livros didáticos escritos por Euclides Roxo na década de emergência da matemática, 1930, serviam de referência para os livros didáticos da época. Na análise dos livros didáticos da década de 1930, o autor verificou que a coleção didática de Roxo, Souza e Thiré, no volume destinado ao quinto ano, dava destaque ao ideal do movimento internacional modernizador liderado por Klein e encabeçado por Roxo.

> Neste volume, materializa-se uma das concepções basilares do movimento internacional modernizador do ensino da matemática do secundário que consistia em trazer para o curso secundário noções de Cálculo Infinitesimal. (BRAGA, 2006, p. 114)

E ainda, conforme Carvalho (2003) relata:

> A parte do livro que trata de limites, funções, continuidade e os rudimentos do Cálculo Infinitesimal recebe, neste livro, tratamento tão cuidadoso quanto em muitos cursos introdutórios sobre o assunto em estabelecimentos do 3º grau, incluindo o cálculo de áreas simples como a aplicação do conceito de integral. (CARVALHO, 2003, p.127 apud BRAGA, 2006, p. 114)

De acordo com Silva (1969), “a reforma Francisco Campos retoma o sonho de Benjamim Constant de fazer do curso secundário a oportunidade de dar ao jovem uma súmula de todo o acervo do saber humano” (SILVA, 1969, p. 288 apud DASSIE, 2001).

Não demorou muito para alguns professores levantarem-se contra os programas de Matemática implantados pela Reforma Francisco Campos, em 1937. Roxo mencionou que, “A reforma Francisco Campos adotou o nosso ponto de vista que até hoje vigora e que tem provocado certa oposição da parte de alguns professores, embora ilustres, mas muito apegados ao ponto de vista clássico" (ROXO, 1940, p. 74 apud DASSIE, 2001). Nesse sentido, Dassie (2001) ressalta que entre os professores da época que apresentam reações contrárias aos programas de matemática implantados pela reforma, encontram-se o Padre Arlindo Vieira, professor do Colégio Santo Inácio, e o professor Dr. Joaquim Ignácio de Almeida Lisboa do Colégio Pedro II, que buscaram, por intermédio de artigos publicados no *Jornal do Commercio*, combater, criticar e até ridicularizar os programas de Matemática implementados pela reforma, e ao mesmo tempo, defender uma abordagem de ensino clássica para a Matemática.

Por outro lado, Santos (1945) observa que a reforma Francisco Campos, devido à amplitude de seu plano, superou todas as anteriores, entretanto "[...] como quase todas as reformas de ensino no Brasil, os seus dispositivos legais não foram cumpridos integralmente, por falta de tenacidade, de disciplina e de idealismo dos órgãos encarregados de os aplicar". (SANTOS, 1945, p. 573 apud DASSIE, 2001).

Segundo Dassie (2001), em 1937, o então Ministro da Educação, Gustavo Capanema, apresentou à Câmara dos Deputados, o Plano Nacional de Educação, cujo objetivo primeiro era unificar a educação nacional, mas só em 1939, recebeu um relatório, enviado por Castro Alves, a respeito da legislação do ensino secundário vigente em alguns países europeus, com a finalidade de conhecer e adaptar elementos de sua educação ao Ensino Secundário brasileiro. Esse documento deu origem à elaboração de uma nova lei orgânica para o Ensino Secundário, denominada "Reforma Gustavo Capanema", decretada em 9 de abril de 1942. Essa reforma preservou a divisão do Ensino Secundário em dois ciclos, entretanto o reestruturou, o primeiro compreendia o curso ginasial, e o segundo os cursos clássico e científico, com duração de quatro anos para o primeiro e três anos para o segundo.

Quanto à participação de Euclides Roxo na elaboração dos programas de Matemática que compunham essa nova proposta, Werneck (2003, p. 56) observa que sua colaboração fora imprescindível, porém, não exclusiva. Segundo Euclides Roxo, "Durante a elaboração da grade do curso ginasial, Gustavo Capanema dedicou, para o ensino de matemática, um número de horas semanais insuficientes”. (ROXO, 1940, apud DASSIE, 2001, p. 78)

Segundo Dassie (2001), os conteúdos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial, estão presentes somente nos programas de matemática dos Cursos Clássico e Científico, de forma mais abreviada. No Curso Clássico, a abordagem das noções do Cálculo Diferencial era feita somente na terceira série, e estava contida em duas unidades temáticas designadas ao estudo da álgebra:

> Unidade I – Funções: 1 – Noção de função de variável real. 2 – Representação cartesiana. 3 – Noção de limite e continuidade.
>
> Unidade II – Derivadas: 1 – Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 – Cálculo das derivadas. 3 – Derivação das funções elementares. 4 – Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo de algumas funções simples. (DASSIE, 2001, p. 153).

Para o Curso Científico, o Cálculo Diferencial era abordado em tópicos de álgebra da terceira série, em três unidades temáticas.

> Unidade I – Séries: 1 – Sucessões. 2 – Cálculo aritmético dos limites. 3 – Séries numéricas. 4 – Principais caracteres de convergência.
>
> Unidade II – Funções: 1 – Função de uma variável real. 2 – Representação cartesiana. 3 – Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.
>
> Unidade III – Derivadas: 1 – Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 – Cálculo das derivadas. 3 – Derivação das funções elementares. 4 – Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo de algumas funções simples. (DASSIE, 2001, p. 155)

A Reforma Capanema ficou em vigor até 1961, com a aprovação da Lei nº 4.024 de 20 de dezembro de 1961, que fixou as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Houve somente, em 1951, a Portaria Ministerial nº 1045, que em seu artigo 7º:

> [...] facultava aos Governos estaduais e dos Territórios “a elaboração de planos de desenvolvimento próprios”, sujeitos à aprovação pelo Ministério. Todavia, não encontramos registro de que algum governo estadual tivesse, na vigência dessa legislação,

> proposto um plano de desenvolvimento diferenciado. (BÚRIGO, 2010, p. 281)

A nova LDB dividiu a estrutura escolar brasileira em primário, ginásio, colégio e superior, e estabeleceu em seu 12º artigo, que “os sistemas de ensino atenderão à variedade dos cursos, à flexibilidade dos currículos e à articulação dos diversos graus e ramos”.

De acordo com Fischer (2007, p. 2), em outubro do mesmo ano de aprovação dessa LDB, foi fundado o Grupo de Estudos em Ensino de Matemática (GEEM), na cidade de São Paulo, pioneiro no movimento denominado de “Matemática Moderna”, cujo principal objetivo era “[...] coordenar e divulgar a introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária.”

O Movimento da Matemática Moderna “apresentou uma proposta baseada exclusivamente na Moderna Matemática em sua forma axiomática desenvolvida pelo grupo Bourbaki, na qual os elementos essenciais eram os conjuntos, as relações e as estruturas e nas propostas estruturalistas de Jean Piaget”. (SPINA 2002, p. 69)

Búrigo (2010) ressalta que:

> O movimento da matemática moderna é comumente lembrado ou associado, no Brasil, à introdução da teoria dos conjuntos no ensino secundário, a adoção de um certo formalismo na linguagem e à valorização das estruturas algébricas. As representações muito frequentes, entre os educadores matemáticos, de um “fracasso” da matemática moderna estão parcialmente relacionadas à rejeição ou à reversão dessas inovações no período que se seguiu ao refluxo do movimento, desde o final dos anos 1970. (BÚRIGO, 2010, p. 278)

Com relação à teoria dos conjuntos no âmbito da Educação Básica do Brasil, Miguel (2010, p. 309) afirma que:

> Se a teoria dos conjuntos contribuiu para o avanço da ciência matemática, trouxe, por outro lado, a consequência de superficializar o processo de formação de conceitos, praticamente inviabilizando a função do cálculo elementar que é a de respaldo

> aos processos de leitura e escrita bem como possibilitar a compreensão dos aspectos quantitativos da realidade.

Kline (1976) pondera que "[...] a Matemática Moderna não foi à solução esperada para se capacitar os alunos em Matemática". (KLINE, 1976 apud MIGUEL, 2010, p. 308). Ávila (1991) ressalta que esse movimento de modernização do ensino deu um destaque excessivo ao rigor e ao formalismo no processo de ensino e aprendizagem da matemática, fato esse que originou a retirada dos antigos programas de matérias importantes, como o Cálculo Diferencial. De acordo com Carvalho (1996, p. 78 apud SPINA, 2002), "desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje".

A Lei 5.692 de 11 de agosto de 1971 fixou as diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus, fundiu o primário e o ginásio em ensino de primeiro grau, com duração de oito anos e, somente em 1973, conforme relata Búrigo (2010), o Estado de São Paulo, fez sua primeira iniciativa no intuito de elaborar uma proposta curricular que fosse referência às escolas e aos professores, os *Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino do Primeiro Grau*.

Na década de 1980, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo iniciou um processo de elaboração de novas Propostas Curriculares para o Estado de São Paulo, em um trabalho conjunto, que envolveu além da equipe da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), professores de universidades públicas e privadas, cuja primeira versão foi divulgada no ano de 1986 e a última em 2008.

Nestas propostas, o ensino de noções do Cálculo Diferencial, inclusive de derivada, não estão presentes, entretanto, nos *Subsídios Para a Implementação da Proposta Curricular de Matemática Para o 2º grau* da década de 1980, nos tópicos destinados ao tema funções, há a orientação de que "o comportamento de uma função é estudado no Cálculo, por meio de limites, derivadas e integrais" (SÃO PAULO, 1980, p. 13), e sugere que uma complementação para o estudo do conceito de função, no âmbito do segundo grau (Ensino Médio):

> Pode ser feita por meio do estudo de limites e derivadas de funções. Problemas de máximos são perfeitamente aplicáveis na 3ª série do 2º grau. As 'equações horárias' da velocidade e da aceleração de um ponto móvel, em função do tempo, podem ser obtidas por derivação das respectivas 'equações horárias' do espaço e da velocidade em relação ao tempo, do mesmo ponto móvel. (SÃO PAULO, 1980, p. 14)

Esse documento observa ainda, que "em termos teóricos, porém, são poucas as perspectivas oferecidas ao estudante do 2º grau, devido à complexidade dos assuntos envolvidos." (SÃO PAULO, 1980, p. 14).

A Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática de 2º Grau de 1995 destaca que:

> Outro tema bastante polêmico é cálculo no 2º grau. Consideramos que um curso de cálculo deve decorrer do estudo feito com funções, passar pelas questões que envolvem taxa de variação de grandezas e encaminhar prioritariamente para a resolução de problemas práticos que envolvem máximos e mínimos. Os conceitos de limite e de derivada, porém, serão trabalhados intuitivamente. (SÃO PAULO, 1995, p. 22)

Em meio aos problemas envoltos ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, em 1997 foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cujo objetivo primeiro foi de propor uma orientação para o enfrentamento dos diversos problemas que envolviam o ensino da matemática.

> Foi por força da Lei federal nº 9.394, em 20/12/96, que estabeleceu a competência da União, em colaboração com estados, Distrito Federal e municípios, de definir diretrizes para nortear os currículos, de modo a assegurar uma formação básica comum. Esse dispositivo legal conduziu à elaboração de Parâmetros e Diretrizes Curriculares – os PCN. (PIRES, 2008, p. 18)

Os estudos e discussões referentes aos PCN e ao Currículo do Estado de São Paulo serão feitos nas próximas seções, pois acreditamos que se faz necessário um detalhamento dos documentos oficiais que norteiam a Educação Básica do Brasil e do Estado de São Paulo nos dias atuais.

2.3 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN (BRASIL, 2000, p. 4), que "[...] direcionam e organizam o aprendizado, no Ensino Médio, das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico", ressaltam, que os objetivos educacionais nessa fase da escolaridade passam "a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos" (BRASIL, 2000, p. 6). E definem nove metas referentes ao processo de ensino e aprendizagem da matemática para o Ensino Médio, dentre essas, destacamos três, que estão em consonância com o objetivo deste trabalho:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
>
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
>
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo (BRASIL, 2000, p. 42)

Quanto à matemática, os PCN+ orientam que devemos compreendê-la "como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas" (BRASIL, 2002, p. 111), e propõem três competências basilares para serem desenvolvidas no âmbito do Ensino Médio: representação e comunicação; investigação e compreensão; contextualização das ciências no âmbito sociocultural.

Para o desenvolvimento dessas competências são propostos três eixos estruturadores a serem desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio: *Álgebra: números e funções; Geometria e Medidas; Analise de dados*. São "um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos". (BRASIL, 2002, P. 120).

O primeiro eixo estruturador, dividido nas unidades temáticas *variação de grandezas* e *trigonometria*, propõe para serem desenvolvidos na unidade de variação de grandezas os seguintes conteúdos: “noção de função; funções analíticas e não analíticas; representação e análise gráfica; sequências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas”. (BRASIL, 2002, p. 122)

Acreditamos que o processo de ensino e aprendizagem da noção de taxa de variação instantânea pode ser contemplado nesta unidade temática, uma vez que o estudo da noção de taxa de variação está contido na mesma. Segundo Ávila (1991), no âmbito do Ensino Médio, seria mais vantajoso que todo o tempo gasto com formas e nomenclaturas referentes ao conceito de função fosse utilizado no ensino das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial.

Além disso, o estudo da taxa de variação instantânea no âmbito do Ensino Médio contempla a interdisciplinaridade entre a matemática e as demais disciplinas. Para Ávila (2006, p. 36), “[...] um dos principais objetivos na introdução da taxa de variação instantânea logo no início da primeira série do Ensino Médio é a interdisciplinaridade com a Cinemática, por isso mesmo os professores de Matemática e Física devem planejar juntos o trabalho que vão desenvolver”.

De acordo com os PCN,

> Nessa nova compreensão do Ensino Médio e da Educação Básica, a organização do aprendizado não seria conduzida de forma solitária pelo professor de cada disciplina, pois as escolhas pedagógicas feitas numa disciplina não seriam independentes do tratamento dado às demais, uma vez que é uma ação de cunho interdisciplinar que articula o trabalho das disciplinas, no sentido de promover competências. (BRASIL, 2002, p. 13)

Nos atuais termos para oferta do ensino médio, consubstanciados na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº. 9394/96, destacamos o aspecto que propõe a organização curricular com seguinte o componente: “integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização” (BRASIL, 2006, p. 7).

Quanto à compreensão do termo interdisciplinaridade nos dias atuais, concordamos com Machado (1993) ao afirmar que:

> a interdisciplinaridade é hoje uma palavra-chave para a organização escolar; pretende-se com isso o estabelecimento de uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas, através da fixação de um objeto comum diante do qual os objetos particulares de cada uma delas constituem sub-objetos. (MACHADO, 1993, p. 32)

Dentro dessa perspectiva, faremos uma análise do Currículo do Estado de São Paulo.

2.4 Currículo do Estado de São Paulo

Quanto aos motivos para se ensinar determinado conteúdo matemático, o Currículo destaca que "as razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível arquitetar uma maneira de fazê-lo: quem tem um 'porquê' arruma um 'como'" (SÃO PAULO, 2010, p. 49), e organiza os conteúdos disciplinares em três blocos temáticos: *Número, Geometria e Relações*.

No bloco temático das Relações, é proposto para o Ensino Médio, incorporar nesse eixo a investigação das relações entre grandezas que dependem umas das outras, iniciando assim o estudo das funções. Neste bloco, verificamos que são feitas algumas referências quanto ao ensino de ideias básicas do Cálculo Diferencial a partir da noção de taxa de variação.

> Em cada caso, a noção de taxa de variação, ou seja, a medida da rapidez com que uma das grandezas interdependentes varia em relação a outra, será destacada como um prelúdio ao estudo do cálculo. Na verdade, todo o cálculo diferencial é tributário dessa ideia de taxa de variação. (SÃO PAULO, 2010, p. 43)

O Currículo ainda orienta que "o destaque dado às taxas de variação pode servir de base para uma apresentação das primeiras noções de cálculo" (SÃO PAULO, 2010, p. 38), porém, não as introduz nominalmente no âmbito do

Ensino Básico por considerá-las distanciadas da prática dos professores, “[...] não introduzindo nominalmente temas distanciados da prática dos professores, como seriam, por exemplo, noções de cálculo diferencial e integral ou de geometrias não euclidianas” (SÃO PAULO, 2010, p. 38).

Rossini (2006, p. 280) referindo-se a formação dos professores de matemática, com uma perspectiva voltada ao processo de ensino e aprendizagem das noções do Cálculo Diferencial a partir da noção de taxa de variação ressalta que “os conceitos de taxa de variação e de derivada, conceituada como a taxa instantânea de variação, são conteúdos do curso de Cálculo de toda licenciatura em matemática. Mas taxa de variação não se articula com aquilo que é feito na sala de aula”. Para a autora:

> Não há espaço, dentro da formação específica do licenciando para que ele seja exposto, de maneira sistemática e coerente, à matemática que vai ensinar, com um olhar voltado especificamente para a sua formação profissional. (SOARES et all., 1997, p. 28 apud ROSSINI, 2006, p. 280).

Nesse sentido, Reis (2001) afirma que:

> Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver. (REIS, 2001, p. 23)

Quanto à interdisciplinaridade, o Currículo destaca que:

> vivemos uma época em que as atividades interdisciplinares e as abordagens transdisciplinares constituem recursos fundamentais para a construção do significado dos temas estudados, contribuindo de modo decisivo para a criação de centros de interesse nos alunos. (SÃO PAULO, 2010, p. 28)

Ao concluir as considerações para o ensino de Matemática aos níveis de ensino Fundamental e Médio, o Currículo apresenta um quadro, dividido em série e bimestre, com os respectivos conteúdos a serem trabalhados, onde constatamos que, nominalmente, nem a noção de taxa de variação instantânea, nem outras ideias fundamentais do Cálculo Diferencial estão presentes, entretanto o estudo da ideia de variação é iniciado no 9º ano do Ensino Fundamental, e retomado na 3ª série do Ensino Médio. Já o ensino das funções esta dividido entre uma série do Ensino Fundamental e as demais séries do Ensino Médio.

Ao analisar esse quadro, constatamos que para o 9º ano, no segundo bimestre, é proposto desenvolver o tema função a partir de suas ideias básicas, a ideia de variação e a construção de tabelas e gráficos para representar funções polinomiais do 1º e do 2º grau.

Para a 1ª série do Ensino Médio, no segundo bimestre, também é proposto abordar o tema função, com ênfase na relação entre duas grandezas, nas proporcionalidades direta, inversa, direta com o quadrado e nas funções polinomiais do 1º e do 2º grau.

Já para a 3ª série do Ensino Médio, é disposto um bimestre, o terceiro, para realizar o estudo das funções, em que é proposto o estudo das características das funções e dos gráficos de funções trigonométricas, funções exponenciais, funções logarítmicas e funções polinomiais, cujo foco é o estudo dos sinais, das situações de crescimento/decrescimento e das taxas de variação; também são abordados nesse bimestre os temas: translação, reflexão e inversão.

É importante destacar que o Currículo não é impostos aos professores, aos alunos nem às escolas, é flexível. É um documento que tem o papel de nortear o processo de ensino e aprendizagem e auxiliar trabalho pedagógico realizado nas unidades de ensino do Estado de São Paulo, adequando-se as necessidades locais e a realidade na qual a escola encontra-se inserida.

> Naturalmente, não se pode pretender que tal lista de conteúdos seja rígida e inflexível: o que se pretende é que ela propicie uma articulação consistente, entre as inúmeras formas possíveis, dos diversos temas, tendo em vista os objetivos maiores que fundamentam o presente Currículo: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, uma abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, uma caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias. (SÃO PAULO, 2010, p. 55)

Feitos esses estudos, em nossa próxima seção faremos uma análise do material de apoio que é disponibilizado pela Secretária da Educação do Estado de São Paulo para os professores e alunos.

2.5 Material de Apoio Fornecido Pela SEE – SP

Os materiais de apoio disponibilizados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo à rede pública estadual são divididos por série e bimestre, e em cada bimestre, o tema principal é dividido em oito unidades, que correspondem aproximadamente há oito semanas. Para o desenvolvimento dessas unidades, são dispostas quatro situações de aprendizagem que constituem quatro centros de interesses a serem desenvolvidos com os alunos, que estão dispostas tanto caderno do professor quanto no caderno do aluno.

> Para cada Situação de Aprendizagem, é sugerida uma duração em semanas, mas apenas o professor, com seus interesses e suas circunstâncias específicas, poderá dimensionar o tempo dedicado a cada uma das situações. (SÃO PAULO, 2010, p. 53).

Começamos nossa análise por São Paulo (2008), que corresponde ao 2º volume do caderno do 9º ano (2º bimestre), pois é a única série do ensino fundamental em que é proposto o desenvolvimento da ideia de variação. Essa ideia é desenvolvida a partir da noção de proporcionalidade, no contexto do estudo de grandezas direta, inversa e não proporcionais, e do estudo de suas representações gráficas, onde se espera que o aluno compreenda a ideia de proporcionalidade direta, inversa, e de não proporcionalidade e também contextualize a ideia de proporcionalidade em diferentes situações problema.

São Paulo (2009), que corresponde ao 2º volume do caderno da 1ª série do Ensino Médio (2º bimestre), propõe o estudo da interdependência entre grandezas, da proporcionalidade direta e inversa e o estudo das variáveis dependente e independente de funções polinomiais, onde se espera que os estudantes compreendam a ideia de proporcionalidade direta e inversa como relações de interdependência, expressem a interdependência entre grandezas por meio de funções e contextualizem a ideia de função.

O caderno do professor traz um breve texto que constitui um roteiro à apresentação inicial da ideia de função para auxiliá-lo, caso necessário, entretanto, esse texto não supre uma possível falta de conhecimento do professor quanto ao desenvolvimento dessa ideia, e após esse texto, se inicia a exploração das atividades propostas, denominadas “Múltiplos Exemplos”.

Na segunda situação de aprendizagem, é abordado o tema função polinomial de primeiro grau, com foco no significado dos coeficientes, no crescimento/decrescimento, nas taxas de variação, nos gráficos e nas inequações. Para essa situação de aprendizagem, é esperado que os estudantes interpretem uma função polinomial de 1º grau como a expressão de proporcionalidade direta entre grandezas e que expressem essa proporcionalidade por meio de representações gráficas.

Para nós, esse seria um momento oportuno para o professor abordar situações de interdependência entre grandezas diretamente proporcionais, do tipo $y = bx + c$, (b e c reais e $b \neq 0$) com foco na noção de taxa de variação, pois nesse tipo de relação de interdependência, pode-se conduzir os estudantes a perceber que quando os valores de x variam uma unidade, a partir de um ponto qualquer do domínio de f, os valores correspondentes de y variam sempre b unidades. Se $c = 0$ temos $y = bx$, ou seja, $\frac{y}{x} = \frac{b}{1}$. Se $c \neq 0$ temos $\frac{y-c}{x} = \frac{b}{1}$. Deste modo, o professor poderá abordar intuitivamente, a noção de taxa de variação de uma função polinomial de primeiro grau.

Na terceira situação de aprendizagem, é desenvolvido o tema funções polinomiais de 2º grau, com suas representações gráficas, intersecções com eixos, vértices e sinais, onde se espera que os alunos interpretem a função polinomial de 2º grau como uma expressão de proporcionalidade direta com o quadrado da variável independente, e expressem graficamente essa proporcionalidade.

A situação de aprendizagem quatro, cujos conteúdos e temas são: problemas envolvendo equações, inequações e funções polinomiais de 2º grau em diferentes contextos; problemas envolvendo máximos ou mínimos de funções polinomiais de 2º grau; da continuidade a situação de aprendizagem anterior, e tem por objetivo conduzir os estudantes a compreender fenômenos que envolvem a proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra, traduzindo tal relação na linguagem matemática das funções, e a equacionar e resolver problemas que envolvem funções polinomiais de 2º grau, particularmente os que envolvem otimização (máximos e mínimos), cuja estratégia utilizada pelo material para que o educando absorva os conteúdos propostos é a apresentação de atividades e problemas exemplares envolvendo máximos e mínimos de funções polinomiais de 2º grau no contexto dos problemas de otimização.

Quanto ao 3º ano do Ensino Médio, o terceiro volume de São Paulo (2009), é destinado na íntegra ao estudo de funções. Na primeira situação de aprendizagem, denominada “Grandezas, interdependências: um panorama sobre funções” é feito um apanhado das funções polinomiais de 1º e 2º graus, função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas. São apresentadas suas representações gráficas em situações, denominadas pelo material, de simples assimilação, e suas propriedades fundamentais, uma vez que essas funções já foram estudadas nas series anteriores.

A segunda situação de aprendizagem dá continuidade a anterior, em que retoma as representações gráficas das funções estudadas, e aborda a construção de gráficos em situações de interdependência envolvendo composições, translações, ampliações e reduções.

Na terceira situação de aprendizagem, é abordada a ideia de função como uma relação de interdependência, e as funções polinomiais de 1º e 2º graus são usadas como base à compreensão das noções de variação e de taxa de variação. Também é proposto uma análise das funções estudadas até o momento sob a perspectiva do crescimento/decrescimento e de taxa de variação, e são apresentadas as três formas básicas de crescimento e/ou decrescimento, por meio de uma série de atividades denominadas de “exercícios exemplares”.

Quanto à última situação de aprendizagem, o material aborda o estudo dos fenômenos naturais e o crescimento/decrescimento exponencial: o número e.

Na seção que segue faremos uma análise do Plano Nacional do Livro Didático de 2012 de matemática, no intuito de verificar se a noção de taxa de variação instantânea é proposta como tema para sala de aula nos livros aprovados.

2.6 Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012

O guia de livros didáticos de matemática para o Ensino Médio traz resenhas avaliativas das sete coleções aprovadas, para o ano de 2012, no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD - (BRASIL, 2011), cujo objetivo é proporcionar subsídios para um melhor aproveitamento das obras no trabalho pedagógico do professor. Esse documento apresenta características comuns observadas nas obras, tanto matemáticas, quanto metodológicas, e algumas sugestões para contornar determinados obstáculos que foram constatados na avaliação das obras.

Em uma observação de caráter geral, ressalta que nas coleções aprovadas “há excesso de conteúdos selecionados” e que “este é um dos motivos do número exagerado de páginas das coleções”. (BRASIL, 2011, p. 19)

Ao analisar de que maneira os conteúdos estão dispostos nas coleções, verificamos que o documento apresenta gráficos que comparam a atenção dada aos diferentes campos da matemática, em cada volume das coleções.

Constatamos que para a 1ª série, as coleções dispõem entre 60% e 70% dos conteúdos (páginas) ao tema funções, o que de acordo com o PNLD (BRASIL, 2011) é um excesso de atenção, quanto à 2ª série, a atenção dada ao tema funções cai para menos da metade, e nas coleções voltadas à terceira série, essa quantidade diminui ainda mais.

Ponderamos que o “excesso de atenção” dado ao tema funções na 1ª serie pode ser contornado, se ao invés de abordá-lo em um bloco único, estanque e isolado, abordassem-no a partir da noção de proporcionalidade e da regra de três, seguida de uma abordagem do tema taxa de variação como prelúdio ao estudo da taxa de variação instantânea, uma vez que esses temas também são abordados na disciplina de Física, contemplando assim a interdisciplinaridade.

De acordo com o PNLD (BRASIL, 2011), há uma abordagem fragmentada entre os conteúdos matemáticos das coleções, pois são tratados isoladamente e particularizados. Para respaldar essa afirmação encontramos no documento um exame detalhado do campo das funções, visto que esse tema é abordado em todas as coleções aprovadas.

Nesse exame, nos tópicos referentes ao estudo das noções de crescimento/decrescimento, estudo do sinal, equações e inequações, ressalta que tais noções são trabalhadas em itens separados, e que desse modo, desperdiça-se "a oportunidade de enfeixar estes tópicos como subtópicos de conceitos unificadores". (BRASIL, 2011, p. 22-23).

Quanto ao estudo da taxa de variação de uma função, o documento observa que esse conceito "não é suficientemente explorado na maioria das obras aprovadas e está ausente em duas delas" (BRASIL, 2011, p. 23), e ainda, que esse estudo pode ser abordado como prelúdio ao ensino do conceito de taxa de variação instantânea (derivada).

> A taxa de variação média de uma função é um dos conceitos unificadores fundamentais, pois se aplica a classes muito gerais de funções que são modelos matemáticos para fenômenos que envolvem variação de grandezas. Constitui-se, além disso, em uma introdução apropriada para a noção de taxa de variação instantânea, que é associada, por sua vez, ao conceito de derivada. (BRASIL, 2011, p. 23).

No que tange a noção de taxa de variação instantânea (derivada), o documento orienta que esse tópico deve ser considerado como opcional para o ensino médio, entretanto, ressalta que experiências de sua inclusão podem ser feitas nos livros didáticos, desde que "este conceito seja introduzido de modo articulado com o conceito de taxa de variação média de uma função". (BRASIL, 2011, p. 23)

Ao buscar quantas e quais obras abordam a noção de taxa de variação instantânea (derivada), como conteúdo para a sala de aula, verificamos que apenas duas das sete obras aprovadas abordam esse tema, todavia, o PNLD (BRASIL, 2011) adverte que essa abordagem é feita de "modo não satisfatório". Observamos ainda, que as noções referentes ao Cálculo Diferencial são abordadas somente nos volumes destinados à 3ª série, e sempre no último capítulo.

O livro *Matemática – Contexto & Aplicações* de Luiz Roberto Dante (BRASIL, 2011, p. 61), destina sua última unidade temática, composta por vinte e seis páginas, ao estudo de derivadas, a partir de taxas de variação média e instantânea, derivadas de funções elementares, propriedades operatórias, interpretações geométricas e comportamento de funções.

De acordo com o PNLD (BRASIL, 2011), as principais características dessa obra são o excesso de conteúdos e o fato de que os mesmos são desenvolvidos de maneira enciclopédica. Quanto ao ensino de noções de Cálculo Diferencial, o documento observa que “a abordagem dos conceitos de Cálculo Diferencial, presente no volume 3, é realizada com ênfase em procedimentos, o que limita a compreensão desses conceitos, que são mais elaborados e, nessa fase escolar, estudados pela primeira vez”. (BRASIL, 2011, p. 65)

Quanto ao modo como é abordado o tema taxa de variação nessa coleção, esse guia ressalta que o introduzem por meio do estudo de algumas funções, porém, sem uma adequada atribuição para o seu significado, e adverte que a linguagem empregada nessa coleção pode dificultar a compreensão dos conceitos presentes no estudo do Cálculo Diferencial.

O livro *Matemática Ensino Médio* de Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole (BRASIL, 2011, p. 90), também dedica seu último tópico, composto por vinte e cinco páginas, à introdução ao estudo de limites e derivadas.

De acordo com o PNLD (BRASIL, 2011), essa coleção também contém excesso de conteúdos, fato esse, que acreditamos ser o motivo que alguns tópicos foram indicados como opcionais, como o caso da derivada (taxa de variação instantânea).

Feito esse estudo, entendemos que todos os elementos necessários para o desenvolvimento deste trabalho já foram apresentados, assim, no capítulo que segue apresentaremos a pesquisa de campo realizada e os resultados obtidos.

3 A PESQUISA

Neste capítulo descrevemos o estudo de campo realizado, apresentando nossos sujeitos de pesquisa, a aplicação da sequência didática com nossas respectivas observações e, finalmente a sequência didática, com as análises *a priori* e *a posteriori*.

3.1 Os Sujeitos da Pesquisa

Participaram da pesquisa um grupo de alunos da terceira serie do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada na cidade de Santo André – SP, que, atualmente, conta com aproximadamente 1700 alunos matriculados no Ensino Fundamental e Médio, distribuídos em três períodos. A opção por esta escola ocorreu, primeiro, pelo fato da mesma contar com um laboratório de informática que deu suporte à aplicação da sequência didática e, em seguida, pelo fato de que, atualmente, há quatro turmas de terceira série do Ensino Médio, uma no período diurno e as demais no noturno.

Não foi estabelecido um critério para a escolha dos estudantes que participariam desta pesquisa, assim, escolhemos estudantes que tinham interesse em participar como voluntários. Ressaltamos que para preservar a identidade dos estudantes, optamos por apresentá-los por nomes fictícios (pseudônimos).

O grupo de voluntários foi composto por oito estudantes com idades entre dezesseis e dezessete anos, sendo que destes, somente dois estudam no período diurno, fato esse, que nos conduziu a realizar a aplicação da sequência didática no período noturno, pois alguns estudantes não podiam frequentar a escola em horários alternativos. Também participou da aplicação um professor observador, que ministra aulas de História nesta escola, pós-graduado na área de Educação.

Nenhum dos estudantes que participaram do experimento já reprovou de série e, somente um cursou o Ensino Fundamental, a primeira e a segunda serio do Ensino Médio em uma escola particular, os demais estudaram somente em escolas públicas.

3.2 Descrição da Aplicação

Nossa sequência didática é composta por quatro situações de aprendizagem que por sua vez são compostas por atividades que constituem situações de ação que intentam conduzir os estudantes à aquisição da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação.

De acordo com os PCN+,

> A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta. Alunos que não falam sobre matemática e não têm a oportunidade de produzir seus próprios textos nessa linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nessa área. (BRASIL, 2002, p.120)

Assim, optamos por dispor os voluntários de nossa pesquisa em duplas, fato esse, que julgamos facilitar a troca de informações e as discussões entre os componentes; também optamos por não manter a mesma formação das duplas durante os encontros, para que houvesse uma troca de experiências e conhecimentos entre todos os estudantes, assim, a cada encontro foram formadas novas duplas, de modo a não repetir qualquer formação anterior.

O experimento ocorreu ao longo de quatro encontros, realizados nos dias 10, 11, 14 e 15 de maio de 2012, onde os três primeiros tiveram duração de aproximadamente 2 horas, e o último de aproximadamente 1 hora.

Em cada encontro, os estudantes receberam um material impresso, referente à situação de aprendizagem que seria abordada, e tiveram acesso a um ambiente informatizado, necessário para desenvolver as atividades. Ressaltamos que o material impresso servia para que os alunos anotassem e registrassem as soluções das atividades propostas.

No primeiro encontro, realizado no dia 10/05/2012, demos inicio à situação de aprendizagem 1, composta por seis atividades. Compareceram os oito estudantes.

Inicialmente, explicamos que haveria um professor, que faria algumas observações, e que suas anotações seriam utilizadas na análise dos resultados apresentados pelos estudantes. Explicamos também, que gravaríamos, em vídeo, o desenvolvimento das quatro situações de aprendizagem, no intuito de observar o raciocínio que os conduziu à resolução.

Ao final do encontro, apresentamos uma devolutiva referente às atividades que foram abordadas nesta situação de aprendizagem em consonância com a institucionalização dos conhecimentos abordados na mesma.

No segundo encontro, realizado no dia 11/05/2012, demos início à situação de aprendizagem 2, composta por cinco atividades, em que compareceram os oito estudantes. Fechamos este encontro com a discussão das atividades e com a institucionalização dos conhecimentos abordados.

No terceiro encontro, realizado no dia 14/05/2012, iniciamos a situação de aprendizagem 3, composta por duas atividades referentes ao estudo da taxa de variação no ponto, em que todos os estudantes compareceram. Ao final deste encontro apresentamos a devolutiva referente às atividades que compunham a situação de aprendizagem e institucionalizamos os conhecimentos abordados.

No quarto e último encontro, realizado no dia 15/05/2012, desenvolvemos a situação de aprendizagem quatro, que estudava a ideia da taxa de variação da taxa de variação de uma função polinomial de segundo grau, onde compareceram todos os estudantes.

Ao encerrar este encontro discutimos a ideia de taxa de variação da taxa de variação de uma função polinomial de segundo grau e institucionalizamos os conhecimentos abordados.

3.3 A Sequência Didática

Os termos didáticos de nosso vocabulário foram baseados em Robert (1998), assim, estamos chamando de sequência didática uma quantidade de situações de aprendizagem que serão apresentadas a um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio com uma ordem pré-estabelecida, que está fundamentada na Teoria de Registros de Representação Semiótica e na Teoria das Situações Didáticas.

As situações de aprendizagem são compostas de atividades que têm o intuito de conduzir os estudantes à construção de significado para ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação. E as atividades, por sua vez, estão associadas às ações dos estudantes perante as situações de aprendizagem.

Para elaborar esta sequência didática, que está na íntegra no apêndice A, baseamo-nos nas atividades propostas por Machado (1988), Silva (2002) e Trotta (1980), uma vez que esses autores propõem uma abordagem intuitiva à noção de taxa de variação instantânea. Consideramos também, os resultados das pesquisas apresentadas em nossa revisão bibliográfica, no intuito de eleger as variáveis didáticas[13] pertinentes ao processo de ensino e aprendizagem da ideia de taxa de variação instantânea.

Para cada situação de aprendizagem apresentaremos uma análise única, composta pela análise *a priori*, pelos resultados da experimentação e pela análise *a posteriori*, visto que essas fases têm papel fundamental para a validação ou refutação de nossa sequência didática.

[13] De acordo com Robert (1998, tradução nossa, p. 38), “são variáveis sobre as quais o professor pode jogar, que não se referem ao enunciado do problema, mas sim aos domínios dos parâmetros e que podem mudar os procedimentos dos alunos”.

Situação de aprendizagem 1 – Variações proporcionais – taxa de variação

Essa ***situação de aprendizagem***, composta por seis atividades, tem por objetivo estudar os fenômenos relacionados ao enchimento e esvaziamento de dois reservatórios de água, de modo a conduzir os estudantes a construir significado para a ideia de taxa de variação.

Atividade 1 – Uma banheira é abastecida por uma torneira cujo fluxo de água é constante e igual a 5 litros por minuto, sabe-se que a mesma estava inicialmente vazia. Nessas condições, responda:

a) Qual o volume de água da banheira, após 1 minuto com a torneira aberta? E após 5 minutos?

b) Sabe-se que a capacidade máxima da banheira é igual a 75 litros, assim, quanto tempo à torneira deve permanecer aberta para encher a banheira completamente?

c) Quando o tempo que a torneira permanece aberta aumenta de 1 para 2 minutos, quantos litros o volume de água da banheira aumenta? E quando esse tempo aumenta de 6 para7 minutos, o que ocorre com o volume de água da banheira?

d) Para um aumento de tempo de $1\,min$ a partir de um instante qualquer, o quanto aumenta o volume de água da banheira?

e) Por meio de uma sentença matemática, expresse o volume de água da banheira em função do tempo.

Análise da atividade 1

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a generalizar a relação de interdependência entre o volume de água da banheira e o tempo necessário para enchê-la por meio de uma sentença matemática, e conduzi-los a perceber, ainda que intuitivamente, que quando os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da banheira aumentam sempre cinco unidades.

Todos os alunos desenvolveram a atividade proposta e atingiram seu objetivo, embora alguns se depararam com determinados contratempos, ora de interpretação (o aluno William interpretou o instante $t = 1min$ como o momento inicial), ora de conhecimento matemático (o aluno Guilherme não relacionou o volume de água banheira com o tempo necessário para enchê-la).

Esperamos que para o item (a) os estudantes concluam que após $1\ min$ com a torneira aberta o volume de água da banheira será igual a 5 litros, e após $5\ min$ o volume de água da caixa será igual a25 litros.

Somente a dupla formada pelos alunos William e Artur não apresentou uma solução compatível com a esperada, concluíram que após 5 minutos com a torneira aberta o volume de água da banheira seria igual a 30 litros, entretanto, com base na verbalização dos estudantes, constatamos que eles perceberam que há uma relação de interdependência entre as grandezas em questão, e quando questionados quanto a sua resolução, William afirmou que não estava correta, "percebendo pela taxa de variação eu diria que não, que foi basicamente o exercício dizendo que à medida que estaria variando uma unidade de tempo, estaria variando cinco".

As demais duplas apresentaram a solução quase que instantaneamente. De acordo com o aluno Gabriel, a solução deu-se a partir do seguinte raciocínio: "por exemplo, se um minuto é cinco, então cinco minutos seria vinte e cinco".

Para o item (b), esperamos que os alunos concluam que são necessários $15\ min$ para que o volume de água da banheira atinja a marca de $75l$, visto que esse é o tempo mínimo para encher a banheira completamente.

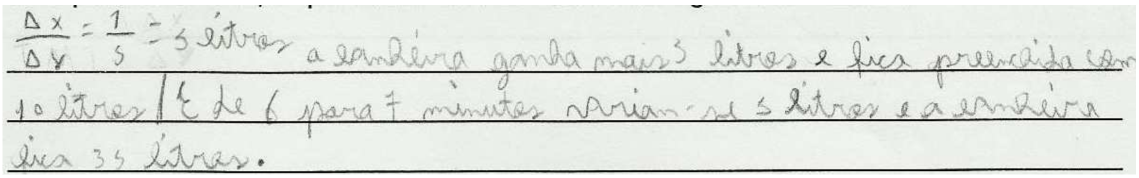
Todas as duplas relacionaram corretamente o volume de água da banheira com o tempo gasto para enchê-la, porém, três não explicitaram os procedimentos utilizados. Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Daniel registraram tais procedimentos, pois afirmaram que "deve-se permanecer a torneira aberta durante 15 minutos" para encher a banheira, pois "$5 \cdot 15 = 75$".

Para o item (c), esperamos que os estudantes percebam que à medida que o tempo que a torneira permanece aberta aumenta de 1 para $2\ min$ ou de 6 para $7\ min$, o volume de água da banheira aumenta $5l$, e concluam que à medida que o tempo aumenta de 1 para 2 minutos o volume de água da banheira varia de $5l$ para $10l$, e quando o tempo aumenta de 6 para 7 minutos o volume de água da banheira varia de $30l$ para $35l$.

Na análise deste item, constatamos que os estudantes não apresentaram dificuldades para chegar à solução esperada. A dupla formada pelos alunos Willian e Artur, afirmou que quando os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da banheira aumentam sempre cinco litros.

A dupla formada pelos alunos Guilherme e Daniel embora tenha o feito equivocadamente, obteve a variação do volume de água da banheira em função do tempo, por meio de uma razão, como mostra a figura 1, e concluiu que para um aumento de tempo de 1 minuto o valor correspondente ao volume de água da banheira aumenta 5 litros.

Figura 1: Resolução do item c da atividade 1 pelos alunos Guilherme e Daniel


$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{5} = 5$ litros a banheira ganha mais 5 litros e fica preenchida com 10 litros / E de 6 para 7 minutos varia-se 5 litros e a banheira fica 35 litros.

Os alunos Lucas e Gabriel também afirmaram que à medida que os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da banheira aumentam sempre cinco unidades, fato esse, que não verificamos nas soluções apresentadas pelas demais duplas.

Já os alunos Caroline e Leonardo apresentaram uma solução curta e objetiva, afirmaram que quando o tempo aumenta de 1 para 2 minutos o volume de água da banheira aumenta 5 litros e quando o tempo aumenta de 6 para 7 minutos o volume também aumenta 5 litros.

Esperamos que para o item (d) os estudantes generalizem as inferências pontuadas a partir do item anterior, e concluam que para um aumento de tempo de 1 minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da banheira aumenta sempre a mesma quantidade, isto é, aumenta sempre 5 litros.

Os estudantes não apresentaram dificuldades para atingir o objetivo deste item. Os alunos Caroline e Leonardo novamente apresentaram uma solução curta e objetiva, sem apresentar o raciocínio que os conduziu à mesma.

A dupla formada pelos estudantes William e Artur afirmou que pelo fato do fluxo de água ser constante e igual a cinco litros por minuto, a variação do volume de água para um aumento de tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, será sempre a mesma e igual a cinco litros.

Os alunos Lucas e Gabriel também perceberam que para um aumento de tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da banheira sempre aumenta cinco litros, “independentemente do tempo, a cada minuto passado o volume de água aumentará sempre 5 litros”.

A dupla formada pelos alunos Guilherme e Daniel, também percebeu a variação do volume de água da banheira em função do tempo, e que essa variação é sempre a mesma, pois afirmaram, para um aumento de tempo de um minuto, que o volume de água da banheira “aumenta cinco litros normalmente”.

Esperamos que para o item (e) os estudantes apresentem a função polinomial de primeiro grau $v(t) = 5t$ para representar o volume de água na banheira em função do tempo.

Embora alguns estudantes não tenham apresentado uma solução compatível com a que esperávamos, na fase de validação, perceberam imediatamente seus equívocos e justificaram-nos. Segundo William “a gente fazendo percebeu que estaria errada, que seria no caso é $y = 5x$”.

A dupla formada pelos alunos Guilherme e Daniel também não apresentou uma solução equivalente a que havíamos previsto, entretanto, expressaram, ainda que de uma maneira sucinta, a relação de interdependência entre o volume de água da banheira e o tempo necessário para enchê-la, pois perceberam que o volume de água da banheira pode ser obtido por meio do produto entre as medidas de tempo e vazão de água da torneira.

Enquanto as demais duplas apresentaram soluções curtas e objetivas, e não demonstraram dificuldades para chegar à solução que era esperada e atingir o objetivo deste item.

Atividade 2 – O volume (v) de água da banheira em função do tempo (t) é expresso pela função $v(t) = 5t$. Complete a tabela abaixo com os valores correspondentes ao volume de água da banheira, em seguida responda:

Tempo (mim)	0	1	2	3	4	5	10	15
Volume (l)								

a) Quando os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da banheira?

b) À medida que os valores do tempo aumentam acerca de um minuto, a partir de um instante qualquer, o quanto aumentam os valores correspondentes ao volume de água da banheira?

Análise da atividade 2

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber, via registros de representação algébrica e tabular da função $v(t) = 5 \cdot t$, que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t é constante e igual a 5. Assim, a partir das informações obtidas por meio do registro de representação algébrica, almejamos que os alunos completem o quadro fornecido e apresentem a seguinte solução:

t	0	1	2	3	4	5	10	15
$v(t)$	0	5	10	15	20	25	50	75

Os estudantes não apresentaram dificuldades em atingir o objetivo desta atividade e apresentar soluções compatíveis com as que esperávamos. Segundo Guilherme “multiplicando-se 5 pelo tempo tem-se o valor do volume”.

Para o item (a) esperamos que os estudantes percebam que à medida que os valores do tempo aumentam os valores correspondentes ao volume de água da banheira também aumentam, e percebam, ainda que intuitivamente, que estas são características de uma função crescente.

Somente os alunos Leonardo e Caroline afirmaram que à medida que os valores do tempo aumentam os valores correspondentes ao volume de água da banheira “aumentam a uma taxa constante e diretamente proporcional”.

As demais duplas, embora tenham percebido que à medida que o tempo aumenta o volume de água da caixa também aumenta, não evidenciaram esse fato. De acordo com William: “a gente usou a mesma logica da questão de variação”.

Posto isso, percebemos a necessidade de modificar o enunciado deste item, de modo que conduza os estudantes a perceber a noção de crescimento que está imbricada na noção de taxa de variação, pois nenhuma dupla afirmou que as características apresentadas na tabela são de uma função crescente.

Esperamos que para o item (b), os estudantes percebam que à medida que os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um ponto qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da banheira aumentam cinco unidades, e percebam também, ainda que intuitivamente, que essa variação é constante e igual a 5.

Todas as duplas perceberam que à medida que os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes do volume de água da banheira aumentam cinco litros. Entretanto, somente as duplas formadas pelos alunos William e Artur e pelos alunos Lucas e Gabriel, perceberam que essa variação é constante e igual a cinco.

Atividade 3 – No geogebra, represente graficamente a reta de equação $y = 5x$, marque um ponto qualquer no eixo x e nomeio de A, trace uma reta perpendicular ao eixo passando por A e determine sua intersecção com a reta $y = 5x$, nomeie essa intersecção de B e trace uma perpendicular ao eixo y que passe por B, em seguida,

movimente o ponto A e responda:
a) Quando os valores de x aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes de y?
b) E quando os valores de x aumentam de $x = 1$ para $x = 2$, o que ocorre com os valores correspondentes de y? E quando aumentam de $x = 4$ para $x = 5$?
c) À medida que os valores de x aumentam acerca de uma unidade, quantas unidades os valores correspondentes de y aumentam?
d) Nomeie a origem do referencial cartesiano de O, em seguida, construa os segmentos AB e AO, apresente seu "nome e valor", e calcule o quociente entre as medidas de AB e AO.
e) Movimente o ponto A, em seguida calcule o quociente entre as novas medidas de AB e AO. O que se pode observar quanto ao quociente entre as medidas de AB e AO obtidas nesse item e no item anterior? Se você movimentar o ponto A inúmeras vezes, o que acontecerá com o valor do quociente entre AB e AO?
f) Considere a função $v(t) = 5t$, obtida na atividade 1, e a equação $y = 5x$. O que os valores do eixo x representam? E os valores do eixo y?

Análise da atividade 3

Essa ***atividade*** tem por finalidade conduzir os estudantes a perceber que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t é constante e igual a cinco. Para isso, apresentamos um breve roteiro que intenta conduzi-los ao cálculo da taxa de variação de $v(t)$ em relação a t por meio da tangente trigonométrica do ângulo que é formado pela reta de equação $y = 5x$ e o eixo das abscissas, fato esse, que institucionalizaremos ao final desta situação de aprendizagem. Todas as duplas perceberam, via registro de representação gráfica, que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t é constante e igual a cinco unidades.

Esperamos para o item (a), que os estudantes percebam que quando os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y também aumentam, caracterizando uma representação gráfica crescente, o que foi percebido quase que instantaneamente.

Os alunos Willian e Artur basearam sua solução exclusivamente na ideia de taxa de variação, afirmaram que "a cada unidade que o eixo x varia, o eixo y varia 5". Segundo William, "a gente percebeu que basicamente quase todas as atividades ela tava se tratando basicamente do mesmo exercício dos mesmos números, só que só tava mudando a forma que apresentava a questão, foi basicamente o que a gente percebeu a gente já ficou mais fácil de entender essas coisas que estaria variando".

Os alunos Leonardo e Caroline também foram taxativos ao afirmar que quando os valores do tempo aumentam os valores correspondentes ao volume de água da banheira "aumentam de forma constante e diretamente proporcional". As demais duplas apresentaram soluções curtas e objetivas.

Para o item (b) esperamos que os estudantes percebam que à medida que os valores de x aumentam uma unidade, a partir de um ponto qualquer, os valores correspondentes de y aumentam sempre cinco unidades, e concluam que quando os valores de x aumentam de $x = 1$ para $x = 2$ ou de $x = 4$ para $x = 5$, os valores correspondentes de y aumentam sempre 5 unidades.

Os alunos Lucas e Gabriel, embora tenham notado que quando os valores de x aumentam os valores correspondentes de y também aumentam, não perceberam, ou não relataram, que para um aumento de uma unidade nos valores de x, o aumento correspondente dos valores de y será sempre igual a cinco unidades.

As demais duplas perceberam, quase que instantaneamente, que para um aumento de tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da banheira aumenta sempre cinco litros.

Esperamos que para o item (c), os estudantes generalizem as inferências pontuadas a partir do item anterior, e concluam que à medida que os valores de x aumentam uma unidade, a partir de um ponto qualquer, os valores correspondentes de y aumentam a uma taxa constante e igual a cinco unidades.

Todos os estudantes atingiram a finalidade deste item quase que imediatamente. Os alunos Lucas e Gabriel, embora não tenham atingido o objetivo do item anterior, neste, afirmaram que à medida que os valores de x aumentam uma unidade a partir de um ponto qualquer os valores correspondentes de y aumentam sempre cinco unidades.

Para o item (d), esperamos que os estudantes percebam a taxa de variação de y em relação a x por meio do quociente entre as medidas dos segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo OAB, por meio da manipulação da representação gráfica da função v, e verifiquem, ainda que intuitivamente, que a razão $\frac{AB}{AO} = 5$ corresponde à taxa de variação de y em relação a x. Somente a dupla formada pelos alunos William e Artur não atingiu o objetivo deste item, e não justificou sua solução, enquanto as demais duplas atingiram-no com destreza.

Para o item (e), esperamos que os estudantes percebam que para quaisquer valores de x, o valor do quociente entre as medidas de AB e AO não sofre alterações, ou seja, é sempre o mesmo e igual a 5, e que esse valor corresponde à taxa de variação de y em relação a x. Todas as duplas chegaram à solução esperada e atingiram a finalidade deste item sem apresentar dificuldades.

Para o item (f) almejamos que os estudantes relacionem os valores de y com os valores referentes ao volume de água da banheira e os valores de x com os valores correspondentes ao tempo gasto para enchê-la. Fato este, que foi atingido quase que instantaneamente por todas as duplas.

Atividade 4 – Em um novo arquivo do geogebra, represente graficamente a função $v(t) = 5t$, selecione a ferramenta “inclinação”, aplique-a sobre a reta que representa a função v e responda:

a) Qual a medida do segmento vertical?

b) Qual a medida do segmento horizontal?

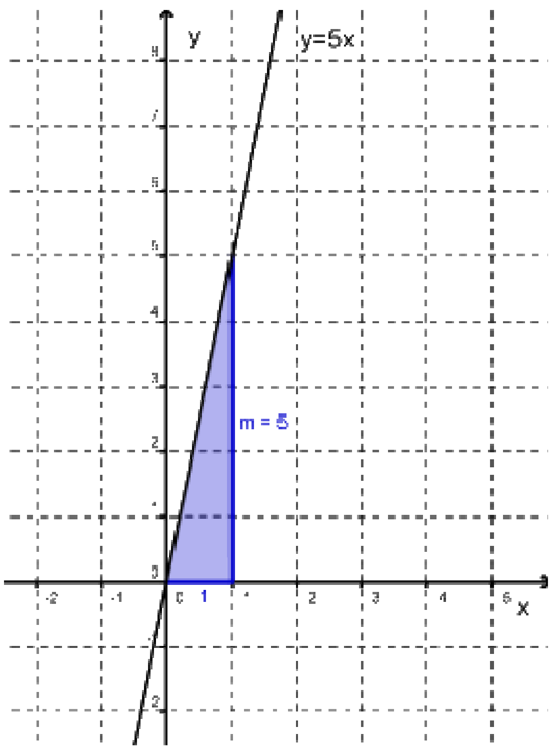
c) Determine o quociente entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal.

d) O que se pode observar quanto ao resultado do quociente obtido no item anterior e os resultados obtidos nos itens (d) e (e) da atividade 3?

Análise da atividade 4

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber, para a função $v(t) = 5t$, cuja representação gráfica é a reta de equação $y = 5x$, como mostra o gráfico 16, que o valor do coeficiente de inclinação dessa reta corresponde à taxa de variação de y em relação a x.

Gráfico 16: Representação gráfica da função $v(t) = 5t$



Todos os estudantes perceberam que o valor do coeficiente de inclinação da reta de equação $y = 5x$ corresponde à taxa de variação do volume de água da banheira em relação ao tempo necessário para enchê-la.

Ao iniciar esta atividade, os estudantes depararam-se com um entrave provocado pela interface do geogebra, uma vez que o *software* não reconhece as variáveis v e t e as indefine, somente após a intervenção do professor os estudantes relacionaram os valores de v e t com y e x.

Para os itens (a) e (b) almejamos que os estudantes manipulem as ferramentas do *geogebra* de modo a determinar as medidas dos segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta "inclinação", e verifiquem que a medida do segmento vertical é igual a 5, e do segmento horizontal é igual a 1, fato esse, que os estudantes fizeram sem apresentar dificuldades.

Esperamos, para o item (c), que os estudantes relacionem, ainda que intuitivamente, a taxa de variação de y em relação a x com o valor do quociente entre as medidas dos catetos do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta "inclinação", e concluam que esse valor é sempre o mesmo e igual a 5.

Nenhum estudante apresentou dificuldades para calcular o quociente entre as medidas dos catetos do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta "inclinação" e chegar à solução que esperávamos. Ressaltamos, porém, que não identificamos se os mesmos perceberam, ou não, que o valor deste quociente corresponde à taxa de variação de y em relação a x.

Para o item (d), esperamos que os estudantes verifiquem que o coeficiente de inclinação da reta de equação $y = 5x$ corresponde à taxa de variação de y em relação a x, fato esse, que todas as duplas constataram, quase que instantaneamente.

As atividades 5 e 6 têm por finalidade conduzir os estudantes a compreender a noção de taxa de variação para a função $v(t) = 100 - 5t$.

Atividade 5 – Uma caixa de água é abastecida por uma torneira cujo fluxo de água é constante e igual a 10 litros por minuto e, simultaneamente, seu conteúdo escoa, por outra torneira, cujo fluxo de água é controlado à razão constante de 15 litros por minuto. Em certo instante, o volume de água nessa caixa é de 100 litros.[14]

a) Expresse o volume de água na caixa t minutos depois desse instante, por meio de uma sentença matemática?

b) Complete a tabela abaixo com os valores correspondentes ao volume de água na caixa.

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	10	20
Volume (l)								

c) À medida que os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

d) Quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ à $t = 2$, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa? E quando estes valores aumentam de $t = 12$ à $t = 13$?

e) Quando os valores do tempo aumentam acerca de uma unidade, a partir de um instante qualquer, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

Análise da atividade 5

Essa ***atividade*** tem por finalidade conduzir os estudantes a perceber, para a função $v(t) = 100 - 5t$, a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t quando os valores de t aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer.

[14] Adaptado de Machado (1988).

Embora nem todos os estudantes tenham atingido os objetivos dos itens desta atividade, todos perceberam que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t, quando os valores de t aumentam uma unidade, é constante e igual a menos cinco litros por minuto.

Para o item (a), esperamos que os estudantes apresentem a relação de interdependência entre as grandezas em jogo por meio de uma função polinomial do tipo $f(x) = ax + b$, e concluam que a função $v(t) = 100 - 5t$ é a solução esperada.

Somente os alunos Leonardo e Caroline chegaram à solução que esperávamos e atingiram o objetivo deste item, pois relacionaram corretamente o volume de água da caixa com o tempo necessário para esvaziá-la, e apresentaram o cálculo do volume no instante $t = 2\,min$, “a gente deu uma condição, falou que o tempo é igual a 2 pra aplicar a fórmula pra achar o resultado”. Ressaltamos também, que a dupla denominou a variação do fluxo de água de ΔF, o que nos levou a deduzir que a notação Δ (delta), para representar a ideia de variação, fazia parte do conhecimento matemático destes estudantes.

Embora os alunos William e Artur não tenham apresentado uma solução compatível com a que esperávamos, perceberam que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t é constante e igual a menos cinco unidades, “no caso perdia cinco em cinco em cada unidade de tempo [...] a gente usou esse critério pra fazer as outras, porque estaria diminuindo cinco a cada unidade de tempo”.

As demais duplas não relacionaram corretamente o volume de água da caixa com o tempo necessário para esvaziá-la, embora tenham percebido que para um aumento de tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da caixa diminui sempre cinco litros.

Para o item (b), almejamos que os alunos concluam que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t é constante e igual a cinco unidades negativas, para isso, solicitamos que completassem o quadro fornecido de modo a apresentar a seguinte solução:

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	10	20
Volume (l)	100	95	90	85	80	75	50	0

Todas as duplas atingiram o objetivo deste item, contudo, algumas não chegaram à solução que havíamos previsto. Segundo Caroline, a solução deu-se a partir da solução apresentada no item anterior, “a gente aplicou e deu o resultado certo, e foi aplicando na questão (b)”. Os alunos Guilherme e Daniel, também chegaram à solução esperada, enquanto os demais não apresentaram uma solução compatível com a que considerávamos correta, entretanto, todos perceberam que para um aumento do tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da caixa diminui sempre cinco litros.

Para o item (c), almejamos que os estudantes percebam que à medida que os valores do tempo aumentam os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem, o que caracteriza uma função decrescente.

Somente os alunos Leonardo e Caroline relataram que à medida que os valores do tempo aumentam os valores correspondentes ao volume de água da caixa “diminuem proporcionalmente”, enquanto as demais duplas não atingiram a finalidade deste item.

Os alunos Guilherme e Daniel, por exemplo, embora tenham percebido que o volume de água da caixa diminui cinco litros por minuto, não relataram que esse fato caracteriza uma função decrescente.

Para o item (d), esperamos que os estudantes percebam, ainda que intuitivamente, que quando os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem sempre cinco unidades, e concluam que quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ à $t = 2$ ou de $t = 12$ à $t = 13$, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem cinco litros.

Apesar de os alunos Guilherme e Daniel terem apresentado uma solução confusa, em nossa análise, constatamos que os mesmos perceberam que para um aumento de tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o valor correspondente ao volume de água da caixa diminui cinco litros, enquanto as demais duplas apresentaram soluções compatíveis com a que esperávamos, e não foram além de nossa expectativa.

Para o item (e) esperamos que os estudantes percebam, por meio das inferências pontuadas a partir dos itens anteriores, que quando os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem a uma taxa constante e igual a cinco, e concluam que para um acréscimo de tempo de $1\ min$, a partir de um instante qualquer, o volume de água da caixa diminui sempre cinco litros.

Todas as duplas concluíram que para um acréscimo de tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da banheira sempre diminui cinco litros, e perceberam que o volume de água da caixa diminui a uma taxa constante e igual a cinco.

Atividade 6 – No geogebra, represente graficamente a reta de equação $y = 100 - 5x$, marque um ponto qualquer no eixo x, nomeio de A, trace uma reta perpendicular ao eixo x passando por A e determine sua intersecção com a reta de equação $y = 100 - 5x$, nomeia de B e trace uma reta perpendicular ao eixo y passando por B, em seguida, movimente o ponto A e responda:

a) Considere a função $v(t) = 100 - 5t$, obtida na atividade anterior, e a equação $y = 100 - 5x$. O que os valores do eixo x representam? E os valores do eixo y?

b) Quando os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

c) Quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ à $t = 2$, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa? E quando estes valores aumentam de $t = 12$ à $t = 13$?

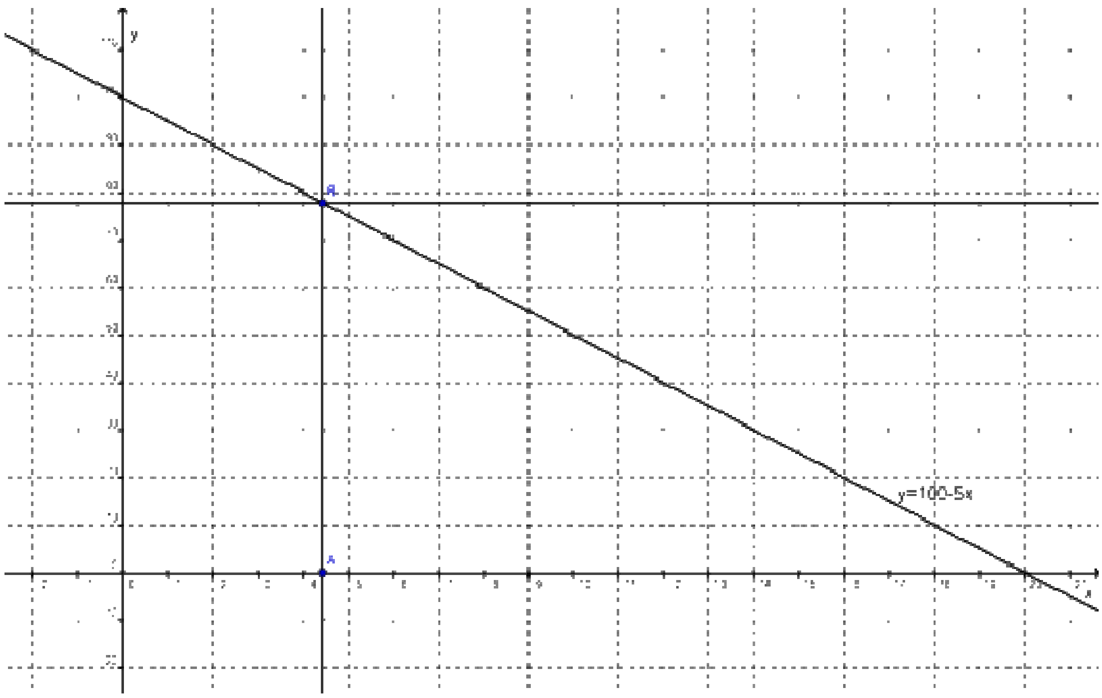
d) Quando os valores do tempo aumentam acerca de uma unidade, quantas unidades variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

e) Selecione a ferramenta "inclinação", aplique-a sobre a reta que representa graficamente a função v, em seguida calcule a razão entre o segmento vertical e o segmento horizontal. O que se pode observar entre essa razão e a variação do volume de água da caixa quando os valores do tempo aumentam acerca de uma unidade?

Análise da atividade 6

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber, por meio da representação gráfica da função $v(t) = 100 - 5t$, como mostra o gráfico 17, que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t corresponde ao coeficiente de inclinação da reta que a representa graficamente.

Gráfico 17: Representação gráfica da função $v(t) = 100 - 5t$



Todos os estudantes perceberam que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t corresponde ao coeficiente de inclinação da reta que representa graficamente a função $v(t)$. De acordo com William:

> a seis foi basicamente o mesmo critério da anterior, da cinco, que tava variando menos cinco unidades em cada unidade de tempo que se passava, foi basicamente isso, o critério que a gente usou, agente leu interpretou e achou que a resposta correta seria a variação de cinco unidades negativas no caso.

Para o item (a) esperamos que os estudantes relacionem os valores de y com os valores referentes ao volume de água da caixa e os valores de x com os valores correspondentes ao tempo gasto para esvaziá-la, o que foi feito quase que instantaneamente por todas as duplas.

Para o item (b), almejamos que os estudantes verifiquem, por meio do dinamismo propiciado pelo geogebra, que à medida que os valores do tempo aumentam, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem, o que caracteriza uma função decrescente.

Com exceção da dupla formada pelos alunos William e Artur, todas relataram que quando os valores do tempo aumentam os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem, entretanto, nenhuma afirmou que esse fato caracteriza uma função decrescente.

Apesar dos alunos William e Artur não terem apresentado uma solução compatível com a que esperávamos, em nossa análise verificamos que os mesmos atingiram o objetivo deste item, pois afirmaram que para um acréscimo no valor do tempo de um minuto, a partir de um instante qualquer, o volume de água da caixa diminui sempre cinco litros.

Para o item (c), esperamos que os estudantes percebam, ainda que intuitivamente, que quando os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem sempre cinco unidades, e concluam que quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ à $t = 2$, ou de $t = 12$ à $t = 13$ o volume de água da caixa diminui sempre cinco litros.

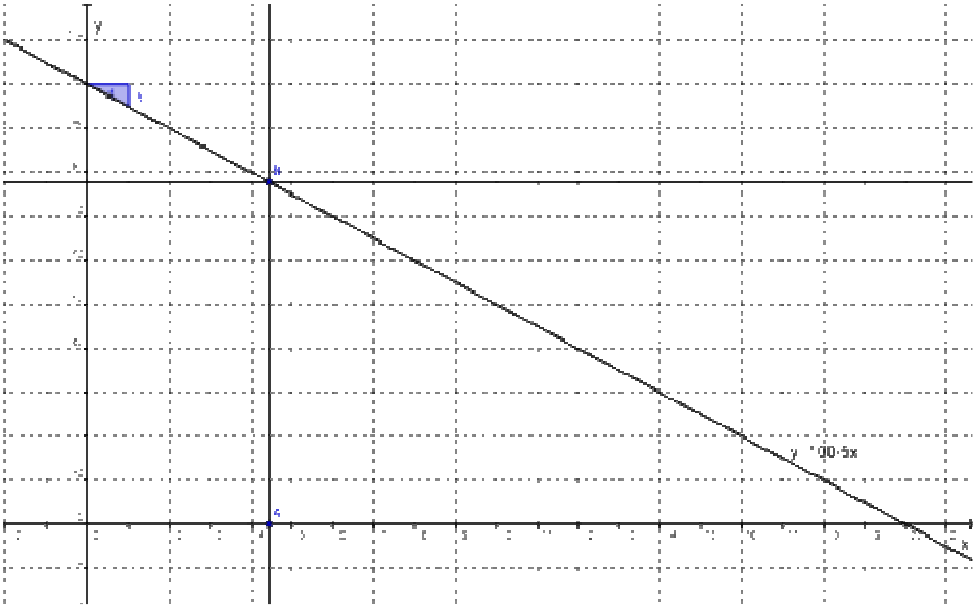
Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Daniel deixou de responder esse item, enquanto as demais atingiram seu objetivo sem apresentar dificuldades. Os alunos Lucas e Gabriel, por exemplo, embora não tenham explicitado que o valor da taxa de variação é negativo, afirmaram que a variação do volume de água da caixa em função do tempo é sempre a mesma e igual a 5.

Almejamos que para o item (d), os estudantes generalizem as inferências pontuadas a partir dos itens anteriores, e que concluam que à medida que os valores do tempo aumentam uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem sempre cinco unidades. Todas as duplas atingiram esse objetivo sem apresentar dificuldades.

Os alunos Guilherme e Daniel apresentaram sua solução baseada exclusivamente na ideia de taxa de variação, pois afirmaram que à medida que os valores do tempo variam uma unidade os valores correspondentes ao volume de água da caixa variam cinco unidades. Já a dupla formada pelos alunos Lucas e Gabriel, concluiu que para um aumento de tempo de uma unidade, a partir de um instante qualquer, o volume de água da caixa "diminui uma unidade de cinco".

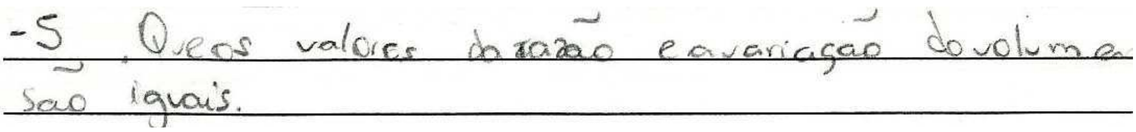
Para o item (e), esperamos que os estudantes calculem a taxa de variação de y em relação a x por meio do quociente entre as medidas dos catetos do triângulo retângulo obtido a partir da ferramenta "inclinação", e percebam, ainda que intuitivamente, que a taxa de variação de $v(t)$ em relação a t corresponde ao coeficiente de inclinação da reta de equação $y = 100 - 5x$, como mostra o gráfico 18.

Gráfico 18: Taxa de variação de y em relação a x da reta de equação $y = 100 - 5x$



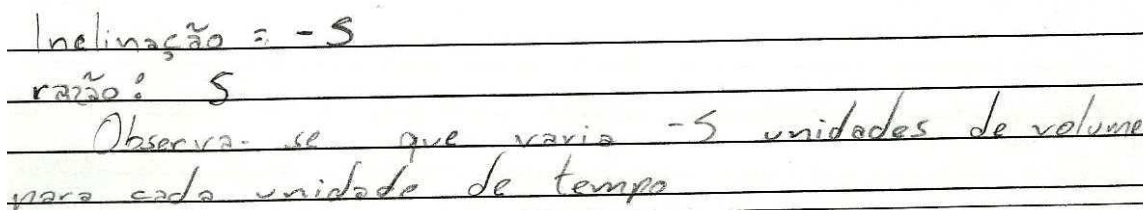
Todas as duplas perceberam que a taxa de variação do volume de água da caixa em relação ao tempo corresponde ao valor do quociente entre as medidas dos catetos do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta "inclinação". Os alunos Leonardo e Caroline, por exemplo, relacionaram o valor do quociente com a variação do volume de água da caixa por unidade de tempo, como mostra a figura 2.

Figura 2: Resolução do item e da atividade 6 pelos alunos Leonardo e Caroline



Os alunos William e Artur relacionaram a variação do volume de água da caixa por unidade a mais de tempo com o coeficiente de inclinação da reta de equação $y = 100 - 5x$, e concluíram que o coeficiente de inclinação dessa reta corresponde à variação de y por unidade a mais de x, como mostra a figura 3.

Figura 3: Resolução do item e da atividade 6 pelos alunos William e Artur


Inclinação = -5
razão: 5
Observa-se que varia -5 unidades de volume para cada unidade de tempo

Os alunos Lucas e Gabriel embora não tenham explicitado a ideia de variação, como os demais fizeram, perceberam que para um aumento nos valores do tempo de uma unidade, a partir de um instante qualquer, os valores correspondentes ao volume de água da caixa diminuem sempre cinco unidades.

Análise *a priori* da institucionalização da situação de aprendizagem 1

Ao final desta situação de aprendizagem pretendemos institucionalizar, para uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$ cujo registro de representação gráfica é uma reta de equação $y = ax + b$, , que o valor do coeficiente angular a, que determina a inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, corresponde à taxa de variação de y em relação a x, por unidade a mais de x.

Explicitaremos também, que o valor de a pode ser obtido por meio do cálculo da tangente trigonométrica do ângulo que é formado pela reta de equação $y = ax + b$ e o eixo x, se a escala do eixo x for exatamente igual à escala do eixo y.

Análise *a posteriori* da institucionalização da situação de aprendizagem 1

Ao final desta situação de aprendizagem, o professor encabeçou uma devolutiva referente às atividades que a compõem e deu início à fase de institucionalização, em que se evidenciou, para uma função representada algebricamente por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, que a taxa de variação de $f(x)$ por unidade a mais de x corresponde ao valor do coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$ que a representa graficamente, e que este valor pode ser obtido por meio do cálculo da tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta e o eixo x, se a escala do dos eixos x e y forem exatamente iguais.

Situação de aprendizagem 2 – Variações não proporcionais – Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea

Esta ***situação de aprendizagem***, composta por cinco atividades, consiste em conduzir os estudantes à apropriação dos conhecimentos referentes à noção de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média. Para isso, as duas primeiras atividades intentam conduzi-los a perceber que a velocidade média desenvolvida por um móvel em um determinado intervalo não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um instante, e as três últimas estudam os fenômenos relacionados à velocidade de um veículo popular em um determinado instante a partir da noção de velocidade média.

Atividade 1 – O maratonista Marílson Gomes dos Santos é o maior vencedor brasileiro da São Silvestre, em 2010 ele completou a prova em aproximadamente 44min. Sabendo que o percurso da maratona de São Silvestre é de 15 km, determine a velocidade média desse maratonista em km/h, em seguida responda:

a) A velocidade média desenvolvida pelo maratonista durante a prova nos fornece informações precisas quanto à velocidade desenvolvida pelo mesmo nos últimos 200 metros da corrida? Explique.

b) Pode-se afirmar que esse maratonista em nenhum momento ultrapassou sua velocidade média? E que a velocidade média desenvolvida pelo mesmo foi sua velocidade em toda a maratona? Explique sua resposta.

Análise da atividade 1

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber que a velocidade média de um móvel em um determinado intervalo não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um intervalo muito pequeno, ou em um instante qualquer. Assim, esperamos que os alunos concluam que a velocidade média desenvolvida pelo maratonista foi igual a $20{,}45\ km/h$. Ressaltamos, porém, que os estudantes devem dar atenção às conversões de unidades de medida necessárias à resolução deste item.

Logo no inicio, deparamo-nos com dois contratempos que requereram a intervenção do professor, o primeiro refere-se à conversão das unidades de medida necessárias ao cálculo da velocidade média do maratonista em km/h, e o segundo, ao cálculo da velocidade média do maratonista.

Quanto à conversão de unidades de medida, alguns alunos apresentaram dificuldades em realizá-la, e quando questionados se haviam estudado esse assunto ao longo de sua escolaridade, prontamente responderam que não, fato esse, que conduziu o professor a apresentar uma maneira de realizar tal conversão. Foi utilizado o método resolutivo da regra de três simples, por ser um processo de resolução conhecido pelos estudantes, onde o professor apresentou uma maneira de se realizar a conversão de 44 minutos para horas. Ressaltamos que o professor optou por não detalhar os conhecimentos matemáticos imbricados na ideia de conversão de unidades para que os estudantes não perdessem o foco da atividade que estavam propondo-se a resolver.

Acreditamos que, para uma aplicação futura da presente sequência didática, este contratempo pode ser facilmente contornado e/ou evitado, para isso, basta apresentar o tempo que o maratonista gastou para completar a prova na unidade de medida que se quer que os estudantes apresentem o valor de sua velocidade média, em nosso caso, em horas.

Já o transtorno referente ao cálculo da velocidade média foi percebido logo após o contratempo referente à conversão de unidades de medidas, pois embora os estudantes tenham compreendido a ideia de conversão de unidades por meio da aplicação do método da regra de três simples, nenhuma dupla deu continuidade à atividade, e quando questionadas a respeito do porque, responderam que não sabiam efetuar o cálculo da velocidade média do atleta, de acordo com William, “a gente ta apanhando agora pra chegar na velocidade”.

Por meio da verbalização do aluno Artur, podemos perceber que a ideia de velocidade média não fazia parte de seu conhecimento matemático, para ele, a velocidade média do maratonista poderia ser obtida da seguinte maneira: “se ele correu em 44 minutos, 15 quilômetros, o certo deveria ser eu dividir 44 por 15, por que ai daria um tempo para cada quilômetro”.

Assim, a intervenção do professor foi de extrema importância para conduzir os estudantes à compreensão da noção de velocidade média de um móvel, e para que dessem continuidade a esta situação de aprendizagem. Para isso, o professor saiu do contexto no qual estava inserido junto aos estudantes, e apresentou esta noção por meio de situações concretas, comuns aos alunos.

Convém ressaltar, que não havíamos previsto estes contratempos por considerarmos que tanto a noção de velocidade média quanto a de conversão de unidades, de acordo com o atual currículo do Estado de São Paulo, faziam parte do conhecimento matemático dos estudantes que participariam desta pesquisa.

Depois de superados estes transtornos, verificamos que somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur não atingiu o objetivo desta atividade, enquanto as demais duplas atingiram sua finalidade e apresentaram soluções equivalentes as que esperávamos.

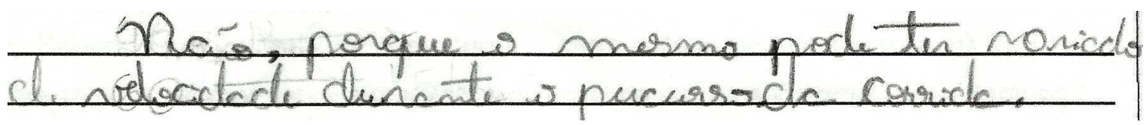
Para o item (a), esperamos conduzir os estudantes a um questionamento quanto à precisão do cálculo da velocidade média desenvolvida pelo atleta durante a maratona em relação a um intervalo relativamente pequeno, de modo que concluam que nos últimos 200 metros de corrida a velocidade do maratonista possa ser diferente da velocidade média desenvolvida na maratona.

Acreditamos que os estudantes podem apresentar algumas justificativas para esse fato, por exemplo, eles podem inferir que a velocidade média do maratonista nos últimos 200 metros foi menor do que $20{,}4\ km/h$, uma vez que o corredor já estava no auge do seu cansaço, ou ainda, podem alegar que a velocidade média do maratonista nesse mesmo intervalo, foi maior do que $20{,}4\ km/h$, visto que esses eram os últimos 200 metros de corrida, momento em que os atletas aumentam sua velocidade no intuito de diminuir o tempo gasto na maratona, dentre outras justificativas plausíveis que podem surgir.

Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur não atingiu o objetivo deste item, pois afirmou que a velocidade média do maratonista fornece informações quanto a um intervalo de tempo de corrida e não da corrida inteira, o que nos conduz a inferir que os estudantes não compreenderam a noção de velocidade média apresentada pelo professor.

As demais duplas atingiram o objetivo deste item, e concluíram que a velocidade média do maratonista não corresponde a sua velocidade durante toda a corrida, como se pode observar, por exemplo, na solução apresentada pela dupla formada pelos alunos Gabriel e Adriano, como mostra a figura 4.

Figura 4: Resolução do item a da atividade 1 pelos alunos Gabriel e Adriano


Não, porque o mesmo pode ter variado de velocidade durante o percurso da corrida.

Para o item (b), esperamos que os estudantes percebam que não se pode afirmar que o corredor não ultrapassou sua velocidade média durante a maratona, nem que a velocidade desenvolvida pelo atleta foi constante e igual a sua velocidade média.

Somente os alunos Guilherme e Artur não atingiram o objetivo deste item, pois afirmaram que a velocidade do maratonista não ultrapassou sua velocidade média, e que sua "velocidade foi constante e igual à velocidade média". Enquanto as demais duplas concluíram que a velocidade do atleta pode ter ultrapassado sua velocidade média, como podemos observar nas soluções e justificativas apresentadas, como mostram as figuras 5, 6 e 7.

Figura 5: Resolução do item b da atividade 1 pelos alunos Gabriel e Adriano

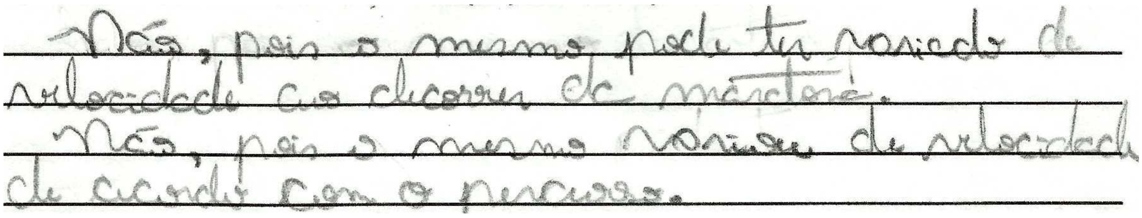

Não, pois o mesmo pode ter variado de velocidade ao decorrer da maratona.
Não, pois o mesmo varia de velocidade de acordo com o percurso.

Figura 6: Resolução do item b da atividade 1 pelos alunos Caroline e Daniel

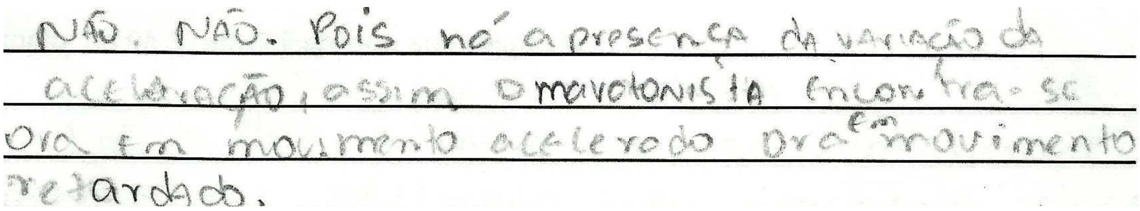
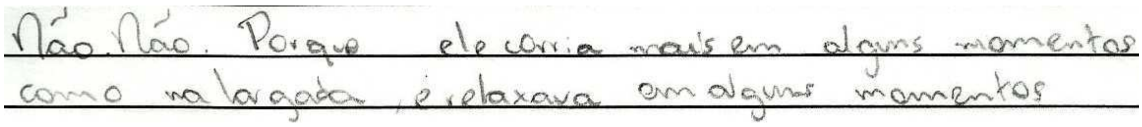

NÃO. NÃO. Pois há a presença da variação da aceleração, assim o maratonista encontra-se ora em movimento acelerado ora em movimento retardado.

Figura 7: Resolução do item b da atividade 1 pelos alunos William e Leonardo


Não. Não. Porque ele corria mais em alguns momentos como na largada, e relaxava em alguns momentos

Atividade 2 – Determine a velocidade média de um carro entre às 8h e às 10h de um determinado dia, sabendo que às 8h ele estava no quilômetro 50 e às 10h estava no quilômetro 210 da mesma rodovia. A seguir responda:[15]

a) É possível afirmar que o carro não ultrapassou os 80 km/h no intervalo considerado? Justifique sua resposta.

b) Sabendo que durante esse percurso o carro esteve parado durante 20 minutos, o que se pode afirmar sobre sua velocidade máxima entre os instantes considerados?

c) A velocidade média desse carro nos fornece informações precisas quanto à velocidade desenvolvida pelo mesmo em um determinado instante de tempo, por exemplo, as $9h\ 33min$? Explique sua resposta.

Análise da atividade 2

[15] Adaptado de Machado (1988, p. 30).

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a uma reflexão quanto à precisão do cálculo da velocidade média de um móvel em um intervalo muito pequeno ou em um instante qualquer.

Conduzir os estudantes a perceber que a velocidade média de um móvel não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um determinado instante, e fazê-los sentir, ainda que intuitivamente, a necessidade de uma grandeza que possa auxiliá-los no cálculo dessa velocidade, também são finalidades dessa atividade. Assim, esperamos que os estudantes concluam que a velocidade média desenvolvida pelo veículo no intervalo de tempo $[8h, 10h]$ foi igual a $80\ km/h$.

Para o item (a), esperamos que os estudantes deduzam que não se pode afirmar que a velocidade do veículo não ultrapassou sua velocidade média no intervalo dado, e apresentem uma justificativa plausível para esse fato.

Apenas a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur não atingiu o objetivo deste item, concluíram que o veículo não ultrapassou sua velocidade média pelo fato da mesma ser constante. Enquanto as demais duplas perceberam, quase que instantaneamente, que não se pode afirmar que a velocidade do veículo não foi maior ou menor do que sua velocidade média, e apresentaram algumas justificativas para esse fato, como mostram as figuras 8, 9 e 10.

Figura 8: Resolução do item a da atividade 2 pelos alunos Caroline e Daniel

NÃO. Pois no seu percurso teve variações tanto para mais quanto para menos.

Figura 9: Resolução do item a da atividade 2 pelos alunos Gabriel e Adriano

Não, porque a qualquer tempo o carro pode ter parado.

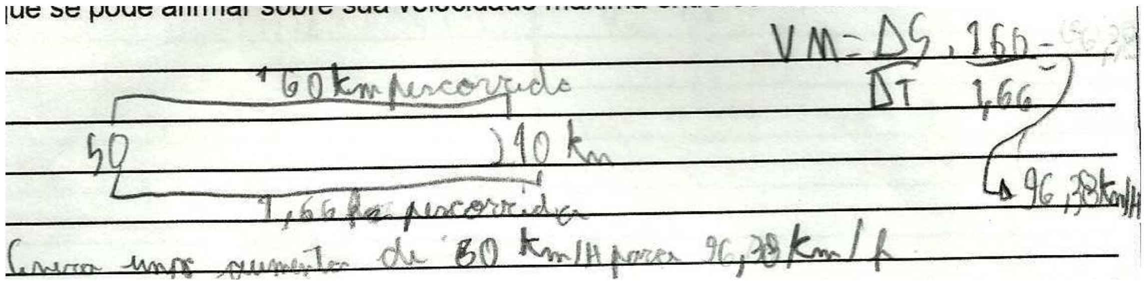
Figura 10: Resolução do item a da atividade 2 pelos alunos William e Leonardo


não. Porque sua velocidade é variavel

Para o item (b) esperamos que os estudantes percebam que o fato do veículo ter permanecido parado durante vinte minutos e ter percorrido a mesma distância no mesmo intervalo, implica em uma velocidade máxima maior do que sua velocidade média.

Novamente, apenas os alunos Guilherme e Artur não alcançaram o objetivo deste item, pois calcularam a velocidade média do veículo em um intervalo de 100 minutos e compararam com o resultado apresentado no item anterior, como se pode observar na figura 11, em seguida, afirmaram que o fato do intervalo diminuir gera um aumento em sua velocidade média.

Figura 11: Resolução do item b da atividade 2 pelos alunos Guilherme e Artur


$VM = \frac{\Delta S}{\Delta T}, \frac{160}{1,66}$

160 km percorrido

50 210 km

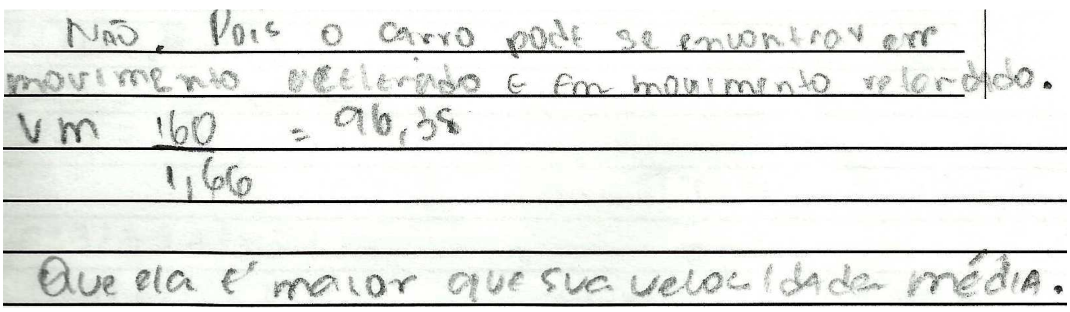
1,66 h percorrido

96,38 km/h

Houve um aumento de 80 km/H para 96,38 km/h

As demais duplas perceberam, quase que instantaneamente, que o fato do veículo ter permanecido parado por 20 minutos e ter percorrido a mesma distância no mesmo intervalo implica em uma velocidade máxima maior do que sua velocidade média, como se pode observar nas soluções e justificativas apresentadas, como segue nas figuras 12, 13 e 14.

Figura 12: Resolução do item b da atividade 2 pelos alunos Caroline e Daniel


Não, Pois o carro pode se encontrar em movimento acelerado e em movimento retardado.

$Vm \frac{160}{1,66} = 96,38$

Que ela é maior que sua velocidade média.

Figura 13: Resolução do item b da atividade 2 pelos alunos Gabriel e Adriano

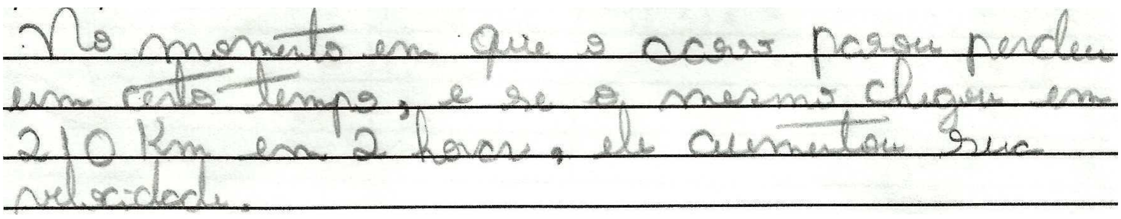
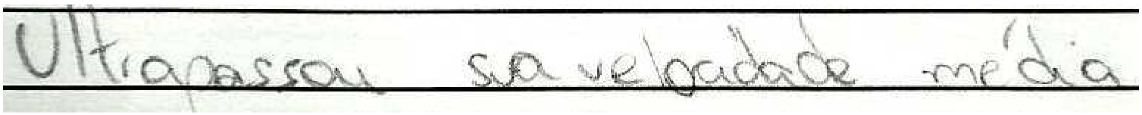

No momento em que o carro parou perdeu um certo tempo, e se o mesmo chegou em 210 Km em 2 horas, ele aumentou sua velocidade.

Figura 14: Resolução do item b da atividade 2 pelos alunos William e Leonardo


Ultrapassou sua velocidade média

Esperamos para o item (c) que os estudantes concluam que a velocidade média desenvolvida pelo veículo no intervalo dado, não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um determinado instante.

Os alunos Guilherme e Artur justificaram que a velocidade média do veículo não fornece informações quanto a sua velocidade em determinado instante porque o veículo esteve parado por vinte minutos, o que não implica no fato da dupla ter atingido o objetivo deste item, pois esperávamos que percebessem que a velocidade média do veículo fornece informações quanto à velocidade desenvolvida em média e não em um instante, fato esse, que se pode observar nas soluções apresentadas pelas demais duplas.

Os alunos Gabriel e Adriano justificaram que a velocidade média do veículo não nos fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um instante qualquer pelo fato do veículo ter permanecido parado por 20 minutos e por não se saber em que instante o veículo parou. Segundo os alunos Leonardo e William a velocidade do veículo pode ter variado ao longo do percurso. Já os alunos Caroline e Daniel justificaram que o veículo pode, em alguns momentos, ter realizado movimentos acelerados ou retardados.

Análise *a priori* da institucionalização local

Ao final dessa atividade, pretendemos fazer uma institucionalização local, onde explicitaremos que a velocidade média de um móvel fornece informações quanto a sua velocidade em um determinado intervalo, em média. Entretanto, não nos fornece informações quanto a sua velocidade em um instante qualquer. Explicitaremos que para se determinar a velocidade de um móvel em um instante qualquer, faz-se necessário o cálculo de sua velocidade instantânea.

Análise *a posteriori* da institucionalização local

Após os estudantes terem desenvolvido as atividades 1 e 2, o professor deu início a uma institucionalização local, em que se propôs a conduzi-los a perceber que a velocidade média de um móvel não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um determinado instante por meio de questionamentos pertinentes as atividades desenvolvidas.

Ressaltamos que não foi explicitado que para se determinar a velocidade de um móvel em um determinado instante se faz necessário calcular a velocidade instantânea do mesmo, como havíamos previsto na análise *a priori*, fato esse foi feito ao final dessa situação de aprendizagem.

Atividade 3 – Ao fim de um teste de resistência de um veículo popular, sua trajetória foi modelada de acordo com a função horária $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ (s em metros, t em segundos), a partir dessa informação faça o que se pede:

a) Considere o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, calcule $s(2)$ e $s(4)$ e, em seguida, determine a velocidade média deste veículo nesse intervalo de tempo.

b) Agora, determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 3s]$.

c) Determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$?

d) Considere agora o intervalo de tempo $[2s, (2 + \Delta t)s]$, onde Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 2s$, calcule $s(2)$ e $s(2 + \Delta t)$, em seguida determine a velocidade média do veículo nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo, ele será indicado por $v(\Delta t)$.

$v(\Delta t) =$

e) Com base na expressão matemática apresentada como solução para o item anterior, complete a tabela utilizando 4 casas decimais, em seguida preencha as lacunas da frase abaixo.

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$						

O valor de Δt está se aproximando de __________, ao mesmo tempo, o valor de $v(\Delta t)$ está se aproximando de ___________.

f) Como você interpretaria fisicamente a velocidade média do veículo no item (d), quando Δt tende a zero?

g) Qual a velocidade do veículo no instante $t = 2s$?

Análise da atividade 3

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes ao cálculo da taxa de variação instantânea a partir do cálculo da taxa de variação média da posição de um veículo em relação ao tempo.

No início desta atividade deparamo-nos com dois contratempos, o primeiro se refere às substituições dos valores correspondentes ao tempo na função $s(t)$, e o segundo, que foi superado somente após a intervenção do professor, se refere ao cálculo da velocidade média do veículo no intervalo de $[2s, (2 + \Delta t)s]$, em que Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 2s$.

Superados os contratempos iniciais, todas as duplas, com exceção da formada pelos alunos Guilherme e Artur, chegaram à taxa de variação instantânea do veículo no instante $t = 2s$ a partir do cálculo da taxa de variação média da posição em relação ao tempo em alguns intervalos previamente escolhidos por nós.

Para os itens (a), (b) e (c), esperamos que os estudantes apresentem a taxa de variação média da função s nos intervalos fornecidos, e percebam, ainda que intuitivamente, que esses intervalos diminuem cada vez mais, e que tendem há um instante t. Esperamos que para o item (a), os estudantes concluam que a velocidade média desenvolvida pelo veículo foi de $13\ m/s$, para o item (b) de $10\ m/s$, e para o item (c) $7{,}3\ m/s$. Todas as duplas apresentaram a taxa de variação média da posição em relação ao tempo nos intervalos fornecidos sem apresentar dificuldades, exceto os alunos Guilherme e Artur.

Almejamos que para o item (d) os estudantes apresentem a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo genérico $[2s, (2+\Delta t)s]$, em que Δt corresponde a um acréscimo muito pequeno ao instante t, e concluam que a expressão $v(\Delta t) = 7 + 3\Delta t$ é a solução mais adequada para esse item.

Somente a dupla formada pelos alunos Caroline e Daniel chegou à solução esperada e atingiu o objetivo deste item sem apresentar dificuldades, enquanto as demais não interpretaram o enunciado como esperávamos e não mobilizaram os conhecimentos utilizados para chegar às soluções dos itens anteriores, pois tentaram determinar o valor de Δt por meio de manipulações algébricas, tomando Δt como um valor desconhecido.

Quando questionados quanto ao entrave que surgira, os estudantes prontamente exclamaram que não conseguiam determinar o valor de Δt, fato esse, que nos chamou a atenção, pois não era solicitado o valor de Δt, o que nos levou a deduzir que os estudantes estavam doutrinados, via registro de representação algébrica, a uma procura “incessante” do valor real de uma incógnita, verificamos também, que os estudantes apoiaram-se em inúmeras técnicas algébricas para determinar o valor de Δt, ignorando o que lhes fora solicitado.

Somente após a intervenção do professor os estudantes perceberam, por meio de uma leitura minuciosa do enunciado deste item, o que lhes foi solicitado, e abandonaram o tecnicismo até então empregado em detrimento do cálculo da taxa de variação média da posição em relação ao tempo no intervalo fornecido, de modo a apresentar uma solução compatível com a que esperávamos.

Para o item (e) esperamos que os alunos deduzam, para o intervalo $[2s, (2+\Delta t)s]$, que á medida que o valor de Δt tende a zero, a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t tende à taxa de variação instantânea no instante $t = 2s$, e completem a tabela fornecida, como segue abaixo:

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$	14	10	7,3	7,03	7,003	7,0003

Em seguida, esperamos que percebam, ainda que intuitivamente, que à medida que o valor de Δt tende para zero, o valor correspondente de $v(\Delta t)$ tende para $7\ m/s$, e que esse valor corresponde à velocidade do veículo no instante $t = 2$.

Nenhuma dupla apresentou dificuldades para completar a tabela fornecida e chegar à solução que era esperada, entretanto, a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur não percebeu que à medida que os valores de Δt aproximam-se de zero os valores correspondentes de $v(\Delta t)$ se aproximam de 7, pois concluíram que quando o valor de Δt se aproxima de 0,0001 o valor de $v(\Delta t)$ se aproxima de 7.

Para o item (f), esperamos que os alunos percebam que à medida que Δt tende a zero a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea no instante $t = 2s$.

Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur confundiu Δt tendendo a zero com t tendendo a zero (instante em que se inicia o movimento do veículo), o que nos conduziu a inferir que os alunos não perceberam que à medida que o valor de Δt tende a zero, o intervalo tende ao instante $t = 2s$ e a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea. Embora as demais duplas também não tenham relatado esse fato, constatamos que todas perceberam que quando o valor de Δt tende a zero, fisicamente, a velocidade do veículo tende a sua velocidade no instante $t = 2s$, e que é igual a $7\ m/s$.

Para o item (g), almejamos que os estudantes apresentem a taxa de variação instantânea do veículo no instante $t = 2$, e que concluam que sua velocidade neste instante foi igual a $7m/s$, pois quando Δt tende a zero, $v(\Delta t) = 7 + 3\Delta t$ tende a 7.

Novamente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur não apresentou uma solução compatível com a que esperávamos, pois afirmaram que a velocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $4\ m/s$, uma vez que no item (e) desta atividade a dupla afirmou que a velocidade do veículo se aproxima de $7\ m/s$ à medida que o valor de Δt se aproxima de zero. Enquanto as demais duplas não apresentaram dificuldades para chegar à velocidade do veículo no instante $t = 2s$ e apresentar uma solução equivalente com a que esperávamos.

Atividade 4 – Agora com o auxilio do *geogebra*, retomemos os itens da atividade anterior. No referencial cartesiano, construa o gráfico de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, em seguida faça o que se pede.

a) Para o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, você verificou que $s(2) = 4$ e que $s(4) = 30$, em que $(2, s(2))$ e $(4, s(4))$ podem representar dois pares ordenados, que por sua vez, podem ser representados no plano cartesiano por dois pontos. Marque esses pontos na parábola e os nomeie de A e B respectivamente, em seguida faça o que se pede:

i. Trace uma reta definida por A e B, selecione a ferramenta "inclinação" e aplique-a sobre a mesma, em seguida, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare com o resultado que você apresentou no item (a) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

ii. Apresente a equação da reta definida por A e B, em seguida verifique se há algo comum entre a equação da reta e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

b) Para o intervalo de tempo $[2s, 3s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B'(3, s(3))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B', aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, em seguida, compare o resultado com a solução apresentada no item (b) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B' e verifique o que há em comum entre esta equação e o valor da razão fornecido obtida no item anterior.

c) Para o intervalo de tempo $[2s,\ 2{,}1s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B''(2.1, s(2.1))$ sobre a mesma.

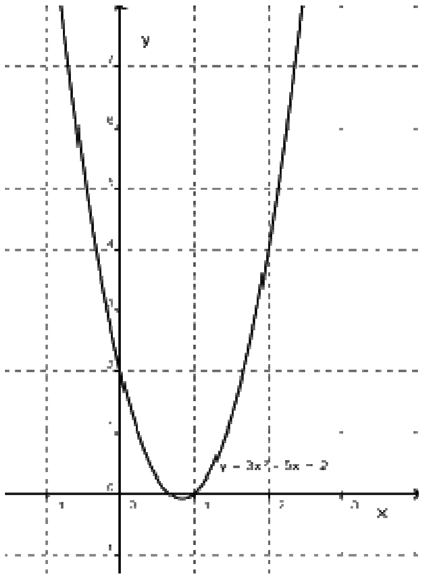
ii. Trace uma reta definida por A e B”, aplique a ferramenta “inclinação” sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare o resultado obtido com o resultado que você apresentou no item (c) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B'' e novamente observe o que há em comum entre esta equação e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

Análise da atividade 4

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber, via registro de representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, como mostra o gráfico 19, que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t, em um intervalo qualquer, corresponde ao coeficiente angular da reta secante a representação gráfica de $s(t)$, definida por dois pontos do tipo “$(t, s(t))$”, extremos desse intervalo.

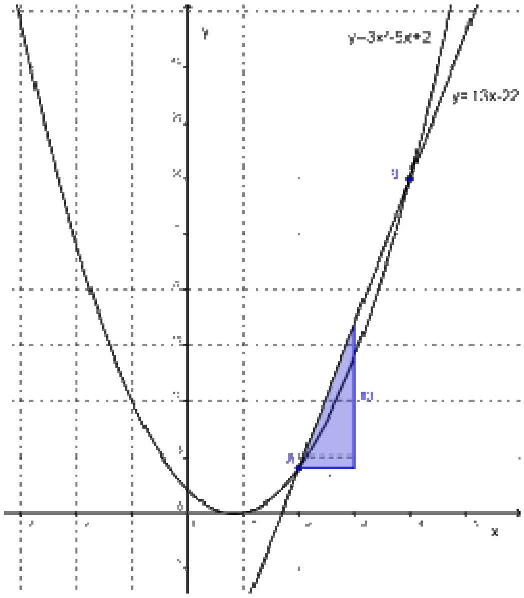
Gráfico 19: Representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$



Todos os estudantes perceberam que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t corresponde ao valor do coeficiente angular da reta secante a representação gráfica definida por dois pontos do tipo “$(t, s(t))$”.

Almejamos que para o item (a), os estudantes verifiquem que o coeficiente angular da reta de equação $y = 13x - 22$ corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 4s]$, como foi verificado no item (a) da atividade anterior, e concluam que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 4s]$ foi igual a 13, como mostra o gráfico 20.

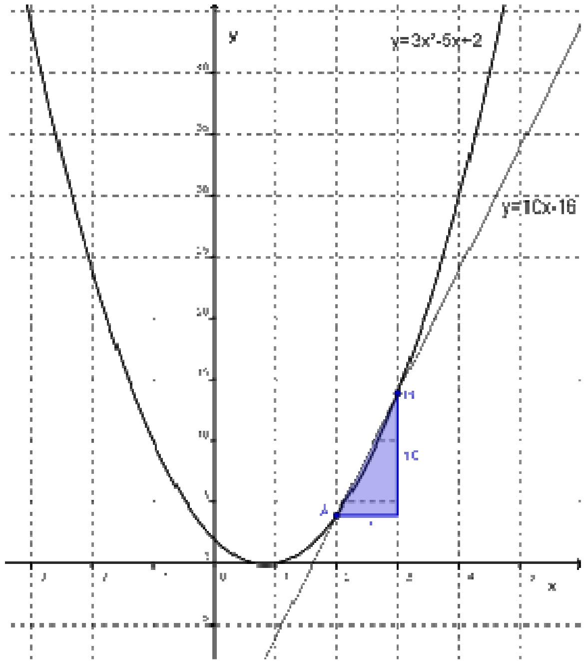
Gráfico 20: Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B



Todas as duplas alcançaram o objetivo deste item e apresentaram soluções similares a que havíamos previsto. Os alunos Caroline e Daniel também concluíram que o valor da velocidade média do veículo corresponde ao coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B. Enquanto os alunos William e Leonardo enfatizaram que o valor da razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta “inclinação”, corresponde à taxa de variação de $s(t)$ em relação a t.

Para o item (b), esperamos que os estudantes percebam que o coeficiente angular da reta de equação $y = 10x - 16$ corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 3s]$, como foi verificado no item (b) da atividade anterior, e concluam que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t nesse intervalo foi igual a 10, como mostra o gráfico 21.

Gráfico 21: Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B'

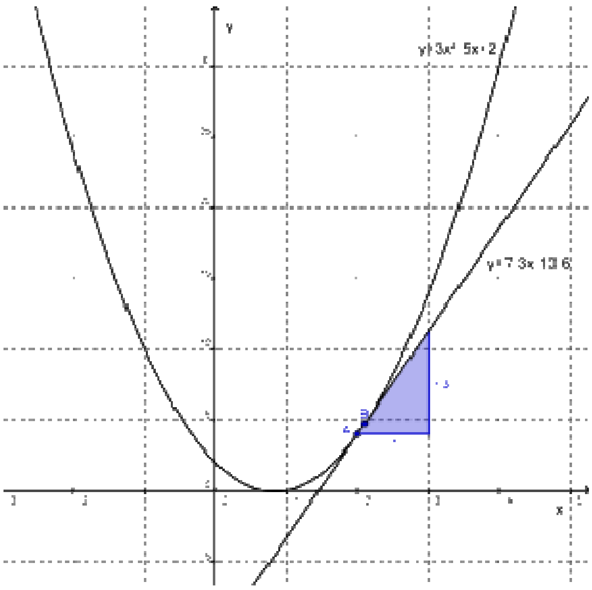


Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur não apresentou uma solução similar a que esperávamos, pois embora tenham apresentado a equação da reta definida pelos pontos A e B', não relataram, nem verbalizaram, que o valor do coeficiente angular dessa reta corresponde ao valor da razão entre os catetos do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta “inclinação”. Mas ouviram quando Caroline e Daniel afirmaram, quase que instantaneamente, que a velocidade média do veículo corresponde ao coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B'.

Os alunos William e Leonardo basearam sua solução exclusivamente na ideia de taxa de variação, afirmaram que o valor da razão entre os catetos do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta “inclinação” é igual ao valor da taxa de variação de $s(t)$ em relação a t. Enquanto a dupla formada pelos alunos Gabriel e Adriano apresentou uma solução curta e objetiva, sem justificá-la.

Para o item (c), esperamos que os estudantes deduzam que o coeficiente de angular da reta de equação $y = 7{,}3x - 10{,}6$ corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 2{,}1s]$, como foi verificado no item (c) da atividade anterior, e concluam que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t foi igual a 7,3, como segue no gráfico 22.

Gráfico 22: Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B''



Todas as duplas apresentaram soluções compatíveis com a que esperávamos, entretanto, os alunos Guilherme e Artur, embora tenham afirmado que a velocidade média do veículo no intervalo $[2s, 2{,}1s]$ foi igual a $7{,}3\ m/s$, não relacionaram este valor com o coeficiente angular da reta de equação $y = 7{,}3x - 10{,}6$.

Os alunos Caroline e Daniel, outra vez afirmaram que o valor da velocidade média do veículo pode ser obtido por meio do coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B'', e que esse valor corresponde ao valor da razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo obtido por meio da ferramenta “inclinação”. Enquanto as demais duplas afirmaram que a velocidade média do veículo no intervalo $[2s, 2{,}1s]$ corresponde ao coeficiente angular da reta de equação $y = 7{,}3x - 10{,}6$.

Análise *a posteriori* da institucionalização local da atividade 4

Ao final desta atividade, o professor deu início a uma institucionalização local, onde evidenciou, via registro de representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t em um intervalo qualquer do domínio de s, corresponde ao coeficiente angular da reta secante a representação gráfica de $s(t)$, definida por dois pontos do tipo "$(t, s(t))$" extremos desse intervalo.

Atividade 5 – Na atividade anterior, você deve ter observado que os pontos B, B' e B'' estão se aproximando cada vez mais do ponto A. Na atividade 3, você pôde verificar que à medida que o intervalo Δt se aproxima de zero, isto é, quando os pontos que definem as retas secantes aproximam-se cada vez mais do ponto A, o intervalo de tempo aproxima-se cada vez mais do instante $t = 2s$, e a velocidade média do veículo tende à velocidade instantânea do mesmo no instante $t = 2s$, que é igual a $7m/s$. No geogebra, construa o gráfico de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, marque o ponto $A(2, s(2))$, em seguida faça o que se pede:

a) Selecione a ferramenta "reta tangente", aplique-a no ponto A da representação gráfica de s, de modo a obter uma reta tangente à curva no ponto A, em seguida, marque um ponto qualquer sobre a representação gráfica de s, nomeio de B, trace uma reta definida por A e B e aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, movimente o ponto B e complete a frase: À medida que o ponto B se aproxima do ponto A, o intervalo de tempo Δt aproxima-se de _________.

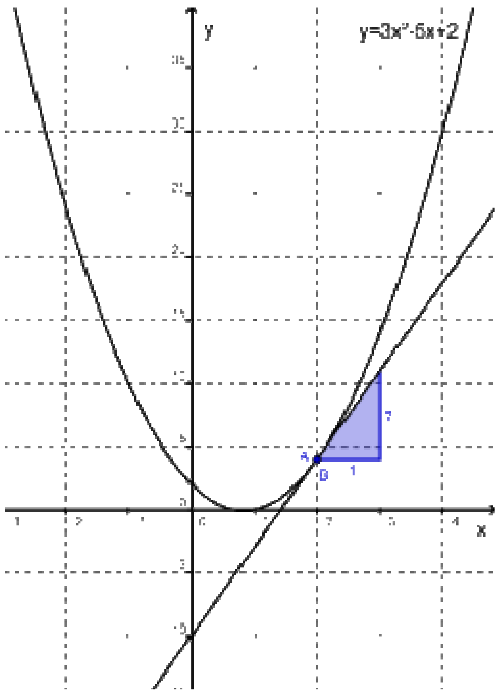
b) Aproxime o ponto B o máximo possível do ponto A, calcule a razão entre o segmento vertical e o segmento horizontal, fornecidos pela ferramenta "inclinação", e compare o resultado com a solução que você apresentou no item g da atividade 3.

c) Assim pode-se concluir que: quando o intervalo de tempo tende a zero, ou seja, quando o ponto B aproxima-se o máximo possível do ponto A, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea, que é igual a _________.

Análise da atividade 5

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber, ainda que intuitivamente, que à medida que o intervalo Δt diminui, os pontos que definem a reta secante AB aproximam-se cada vez mais um do outro, de modo que a reta tenda tangenciar a representação gráfica de $s(t)$ no ponto A, como mostra o gráfico 23.

Gráfico 23: Reta tangente à representação gráfica de $s(t)$ no ponto A



Todas as duplas perceberam, ainda que intuitivamente, que à medida que o intervalo Δt diminui, os pontos que definem a reta secante AB aproximam-se cada vez mais um do outro, e que a reta AB tende a deixar de ser secante a representação gráfica de $s(t)$ de modo a tangenciá-la no ponto $A(2, s(2))$.

Para o item (a), almejamos que os estudantes percebam que à medida que o intervalo Δt aproxima-se de zero, os pontos que definem a reta secante aproximam-se cada vez mais um do outro.

Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur afirmou que à medida que o ponto B se aproxima do ponto A o intervalo Δt se aproxima de zero. Enquanto as demais não afirmaram que o intervalo Δt se aproxima de sete quando o ponto B se aproxima do ponto A.

Esperamos que para o item (b), os estudantes percebam, ainda que intuitivamente, que a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t corresponde ao coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica de $s(t)$ no ponto A, e concluam que a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t no ponto A é igual a 7.

Apenas os alunos Guilherme e Artur não atingiram a finalidade deste item, talvez pelo fato não terem atingindo o objetivo do item (g) da terceira atividade, que solicitava a velocidade do veículo no instante $t = 2s$. Enquanto os demais apresentaram soluções compatíveis com a que esperávamos.

Para o item (c), esperamos que os estudantes generalizem as inferências e conjecturas pontuadas a partir dos itens anteriores, e concluam que quando o intervalo Δt tende a zero, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea no instante $t = 2s$, que é igual a $7\ m/s$.

Todas as duplas atingiram o objetivo deste item, inclusive a formada pelos alunos Guilherme e Artur, que embora não tenha atingido o objetivo do item anterior, concluiu que a velocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $7m/s$.

Análise *a priori* da institucionalização da situação de aprendizagem 2

Na fase de institucionalização, pretendemos evidenciar que para uma reta de equação $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, tangente à representação gráfica de uma função $f(x)$ em um ponto P de seu domínio, o valor do coeficiente angular a, que determina a inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, corresponde ao valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x no ponto P.

Análise *a posteriori* da institucionalização da situação de aprendizagem 2

Após a devolutiva referente às atividades que compuseram essa situação de aprendizagem, o professor saiu do contexto em que estava inserido junto aos estudantes e evidenciou, para uma função qualquer $f(x)$, que o valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x em um ponto qualquer de seu domínio, corresponde ao coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$, tangente à representação gráfica de $f(x)$ neste ponto.

Situação de aprendizagem 3 – Taxa de variação no ponto

Esta ***situação de aprendizagem***, composta por duas atividades, consiste em estudar os fenômenos relacionados à velocidade instantânea de uma moto 600cc em um teste de arrancada. Para desenvolver as atividades baseamo-nos em Silva (2002), uma vez que o autor propõe que sejam escolhidos uma função f e um ponto P de seu domínio, "de modo a propiciar uma 'boa visualização' gráfica das retas secantes e da reta tangente" a representação gráfica de f.

Atividade 1 – Em um circuito de rua foi realizado um teste de arrancada com uma moto 600cc, a fim de verificar o desempenho da mesma em diferentes situações do dia a dia. Ao fim do teste, constatou-se que seu movimento, em um intervalo de tempo relativamente pequeno, obedece à função horária $s(t) = -\frac{1}{t}$, s em metros e t em segundos, a partir dessa informação faça o que se pede:

a) Calcule a velocidade média da moto para o intervalo de tempo $[1s, 4s]$.

b) Calcule a velocidade média da moto para o intervalo de tempo $[1s, 3s]$.

c) Calcule a velocidade média da moto para o intervalo de tempo $[1s, 2s]$.

d) Considere o intervalo de tempo $[1, 1 + \Delta t]$, onde Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 1s$, calcule $s(1)$ e $s(1 + \Delta t)$, em seguida determine a velocidade média da moto nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo, ele será indicado por $v(\Delta t)$.

$v(\Delta t) =$

Analise da atividade 1

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes ao cálculo da taxa de variação média, via registro de representação algébrica, da posição de uma moto em relação ao tempo em um intervalo genérico $[t, t + \Delta t]$, em que Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante t, para isso, solicitamos o cálculo à taxa de variação média da posição s em relação ao tempo t em alguns intervalos pré-definidos por nós, e no intervalo genérico $[t, t + \Delta t]$.

O método empregado pelos estudantes para chegar à solução dos itens que compõem esta atividade fugiu da nossa expectativa, pois esperávamos que chegassem à taxa de variação média da posição da moto em relação ao tempo via registro de representação algébrica, fato esse, que não ocorreu, pois logo no inicio da atividade constatamos que todas as duplas começaram a resolvê-la via registro de representação gráfica e, quando questionadas do porque utilizavam a representação gráfica em detrimento da algébrica, prontamente responderam que por meio do gráfico a visualização da taxa de variação média dá-se com mais facilidade.

Caroline ressaltou que fez os cálculos da velocidade média algebricamente e utilizou o registro de representação gráfica somente para conferir os resultados, e afirmou: “não sei se vale para essa variação no ponto, o coeficiente angular, não sei se vale”, enquanto William afirmou que obter a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t era “mais fácil com o geogebra”.

Somente a dupla formada pelos alunos Guilherme e Wallace não apresentou soluções compatíveis com as que havíamos previsto, enquanto as demais não apresentaram dificuldades para atingir o objetivo deste item.

Para o item (a) esperamos que os estudantes calculem a velocidade média da moto no intervalo $[1s, 4s]$, e concluam que sua velocidade foi $0{,}25\ m/s$. Apenas a dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme não chegou à solução esperada, apesar de terem mobilizado corretamente os conhecimentos matemáticos referentes à ideia de velocidade média, constatamos que a dupla equivocou-se ao afirmar que “$-0.25-(-1)=1.25$”.

Almejamos que para o item (b), os estudantes calculem a velocidade média da moto no intervalo $[1s,3s]$, e concluam que foi igual a $0{,}333\ m/s$. Novamente a dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme foi à única que não apresentou uma solução equivalente à esperada, embora tenha chegado ao valor da velocidade média da moto por meio do registro de representação gráfica, como relatou o professor observador, no registro de representação algébrica a dupla afirmou que “$-0.33+1=1.33$”.

Para o item (c), esperamos que os estudantes calculem a velocidade média da moto no intervalo $[1s,2s]$, e concluam que foi igual a $0{,}5\ m/s$. A dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme cometeu um erro similar ao que cometera nos itens anteriores, ao afirmar que “$-0.5+1=1.5$”, o que nos conduziu a deduzir que os alunos ou não sabiam desenvolver operações com números negativos ou não deram a atenção necessária aos itens que compõem esta atividade. Enquanto as demais duplas novamente apresentaram soluções compatíveis com a que havíamos previsto.

Para o item (d), esperamos que os estudantes calculem a velocidade média da moto no intervalo genérico $[t,t+\Delta t]$, em que Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante t, e concluam que a expressão matemática $V(\Delta t)=1/(1+\Delta t)$ representa algebricamente a velocidade média da moto neste intervalo.

Os alunos Wallace e Guilherme, concluíram que a velocidade média da moto no intervalo $[1{,}1+\Delta t]$ foi igual a $0\ m/s$, e afirmaram que a moto esteve parada neste intervalo, o que mostra que utilizaram $\Delta t=0$, não percebendo que Δt deveria se aproximar de zero mas nunca ser zero. Enquanto as demais duplas atingiram o objetivo deste item e apresentaram uma solução idêntica a que esperávamos.

Atividade 2 – No geogebra, construa o gráfico de equação $y=-\frac{1}{x}$, que representa graficamente a função horária que descreve o movimento da moto, como foi apresentado no item anterior, em seguida determine:

a) As coordenadas de um ponto A da representação gráfica de s que tem abscissa igual a 1 e localize-o na representação gráfica.

$A(1,\ )$

b) P é um ponto genérico da representação gráfica de s, assim as coordenadas do ponto P são $P(t, s(t))$.

$P(\ ,\ )$ i. Determine as coordenadas do ponto P tal que $t = 4$;

$P'(\ ,\ )$ ii. Determine as coordenadas do ponto P' tal que $t = 3$;

$P''(\ ,\ )$ iii. Determine as coordenadas do ponto P'' tal que $t = 2$.

c) Na representação gráfica de s, localize os pontos P, P' e P'', em seguida, trace as retas AP, AP' e AP'', e faça o que se pede:

i. À medida que o valor de t diminui cada vez mais e aproxima-se do instante $t = 1$, o ponto $P(t, s(t))$ aproxima-se cada vez mais do _____________.

ii. Selecione a ferramenta inclinação, aplique na reta AP, calcule a razão entre os segmentos vertical e horizontal e verifique se há algo em comum entre esse resultado e o que você apresentou no item (a) da atividade 1, e faça o mesmo procedimento para as retas AP' e AP'', comparando com os resultados apresentados nos itens (b) e (c) da atividade 1.

d) Retome a expressão matemática que você apresentou como solução para o item (d) da "atividade 1", $V(\Delta t) = \frac{1}{1+\Delta t}$ e, em seguida responda:

i. Se tomarmos o valor de Δt cada vez mais próximo de 0, o valor da velocidade média da moto se aproxima de um número real a, que corresponde a sua velocidade instantânea no instante $t = 1$. Qual o valor de a?

$a =$

ii. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto $A(1, -1)$ e tem coeficiente de inclinação a.

iii. Esboce os gráficos da reta r e da função $s(t) = -\frac{1}{t}$, no mesmo plano cartesiano, em seguida, selecione a ferramenta “inclinação”, aplique-a na reta r e calcule a razão entre os segmentos vertical e horizontal e compare com a solução que você apresentou no item (e) da atividade 1.

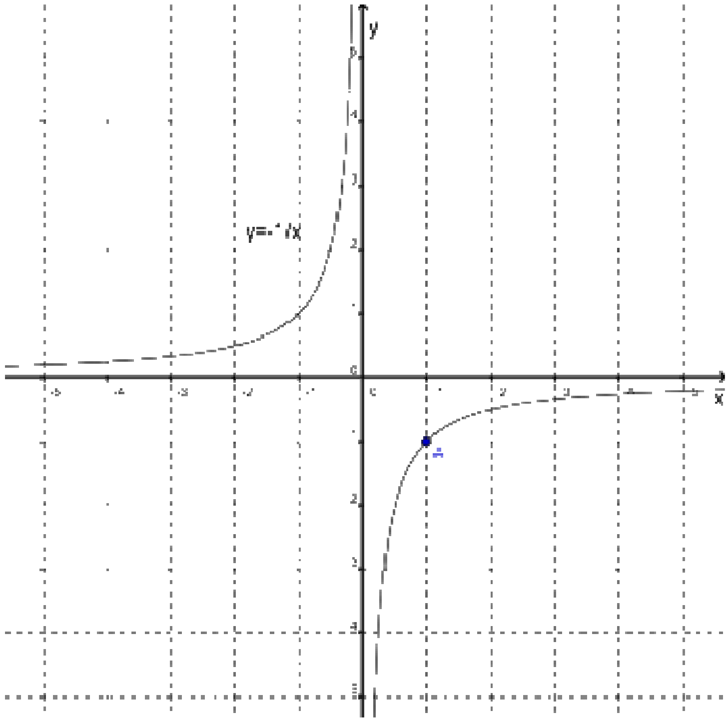
Análise da atividade 2

Essa ***atividade*** tem por finalidade conduzir os estudantes a identificar o coeficiente de inclinação da reta tangente a representação gráfica da função $s(t) = -\frac{1}{t}$ no ponto $A(1, -1)$ como a taxa de variação instantânea de $s(t)$ no instante $t = 1$.

Com exceção da dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme, todas identificaram o coeficiente angular da reta tangente à representação gráfica de $s(t)$ no ponto $A(1, -1)$ como a taxa de variação instantânea da posição da moto em relação ao tempo no instante $t = 1$.

Esperamos que para o item (a) os estudantes determinem as coordenadas do ponto $A\ (1, -1)$, e localizassem-no na representação gráfica de $s(t)$, como mostra o gráfico 24.

Gráfico 24: Ponto $A\ (1, -1)$ na representação da função $s(t) = -1/x$

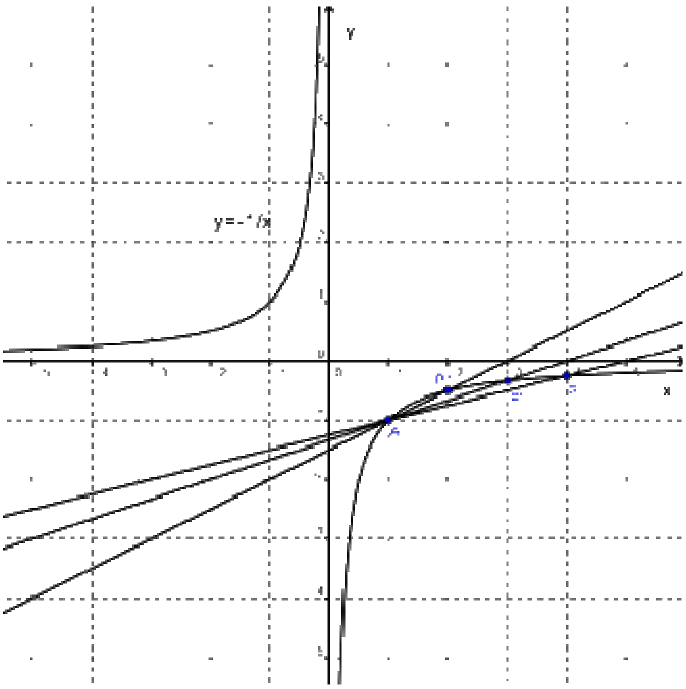


Todas as duplas concluíram, quase que instantaneamente, que $A(1,-1)$ é o ponto solicitado e localizaram-no na representação gráfica de $s(t)$.

Para o item (b), esperamos que os estudantes determinem três pontos distintos do tipo $P(t,s(t))$ pertencentes à representação gráfica de s, e concluam que os pontos solicitados são: $P(4,-0{,}25)$,$P'(3,-1/3)$ e $P''(2,-½)$. Todas as duplas apresentaram, quase que imediatamente, os pontos solicitados.

Para o item (c), almejamos que os estudantes percebam, a partir das retas secantes a representação gráfica de s, como mostra o gráfico 25, que ao se tomar valores de t cada vez mais próximos do instante $t = 1$, os pontos que definem estas retas aproximam-se cada vez mais um do outro, e que o valor de seus coeficientes angulares, que determinam a inclinação dessas retas em relação ao eixo das abscissas, correspondem à velocidade média da moto nos intervalos fornecidos. Esperamos também, que os alunos percebessem, ainda que intuitivamente, que a reta secante AP tende a tangenciar a representação gráfica de $s(t)$ no ponto A.

Gráfico 25: Retas secantes a representação gráfica de $\boldsymbol{s(t)}$



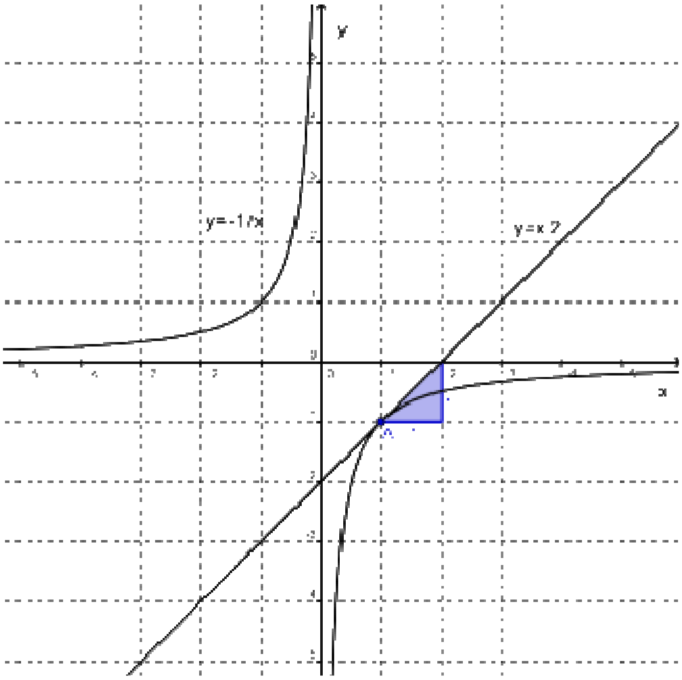
Nenhuma dupla apresentou dificuldades para localizar os pontos P, P' e P'' na representação gráfica de s, porém, as duplas formadas pelos alunos Wallace e Guilherme e pelos alunos Leonardo e Adriano não perceberam que à medida que o valor de t diminui e aproxima-se cada vez mais do instante $t = 1$, o ponto genérico $P(t, s(t))$ aproxima-se cada vez mais do ponto A, como havíamos previsto, afirmaram que o ponto $P(t, s(t))$ aproxima-se cada vez mais do número real -1. Pensamos que os estudantes chegaram a esta conclusão pelo fato das coordenadas do ponto A serem tais que o valor da abscissa é 1 e o da ordenada é -1.

Embora os alunos Leonardo e Adriano não tenham percebido que à medida que o valor de t diminui e aproxima-se do instante $t = 1$, o ponto genérico $P(t, s(t))$ aproxima-se do ponto A, perceberam que o valor das razões entre os segmentos vertical e horizontal dos triângulos retângulos obtidos por meio da ferramenta “inclinação” nas retas AP, AP’ e AP’’ correspondem ao valor da velocidade média da moto, como foi obtida nos itens (a), (b) e (c) da atividade 1.

As demais duplas não apresentaram dificuldades para perceber que os valores das razões calculadas neste item correspondiam à velocidade média da moto nos intervalos fornecidos nos itens (a), (b) e (c) da atividade 1.

Para o item (d) esperamos que os estudantes apresentem a equação da reta tangente à representação gráfica de $s(t)$ no ponto A, percebam que o coeficiente angular dessa reta corresponde à taxa de variação instantânea de $s(t)$ em relação a t no ponto A, e concluam que a reta de equação $y = x - 2$ é tangente a representação gráfica de $s(t)$ no ponto A e que o valor do seu coeficiente angular corresponde à taxa de variação de $s(t)$ em relação a t neste ponto, como mostra o gráfico 26.

Gráfico 26: Reta tangente a representação gráfica de $s(t)$ no ponto A (fixo)



Neste item, cometemos um equivoco no enunciado do subitem iii, que foi percebido somente quando os estudantes questionaram o professor referente à comparação de resultados que deviam fazer entre a solução apresentada no subitem iii. e a solução apresentada no item (e) da atividade 1, uma vez que a atividade 1 era composta somente por quatro itens, quando, imediatamente, o professor se pôs a verificar tal empecilho no intuito de propor uma maneira para contorná-lo, feito isso, informou que tal comparação deveria ser feita entre a solução apresentada neste subitem com o valor de a obtido no subitem i.

Superado este contratempo, verificamos que novamente a dupla formada pelos alunos Wallace e Guilherme não atingiu o objetivo esperado, enquanto as demais perceberam, intuitivamente, que o valor do coeficiente angular da reta de equação $y = x - 2$, tangente à representação gráfica de s no ponto $A(1, -1)$, corresponde à velocidade da moto no instante $t = 1s$.

Análise *a priori* da institucionalização da situação de aprendizagem 3

Ao final desta situação de aprendizagem, institucionalizaremos o coeficiente angular da reta tangente à representação gráfica de uma função $f(x)$ em um ponto P de seu domínio, como a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto P, esta que denominaremos de taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x no ponto P.

Análise *a posteriori* da institucionalização da situação de aprendizagem 3

Após a devolutiva, em que os estudantes foram conduzidos a generalizar as inferências pontuadas até então, deu-se inicio a fase de institucionalização onde se evidenciou, para uma função $f(x)$, que o coeficiente angular da reta tangente a sua representação gráfica em um ponto P de seu domínio corresponde à taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x neste ponto.

Situação de aprendizagem 4 – Taxa de variação da taxa de variação

Esta ***situação de aprendizagem***, que é composta por uma atividade, consiste em estudar a taxa de variação da taxa de variação da função polinomial $c(x) = 2x^2 + 4x$. Esperamos que os estudantes utilizem aproximadamente cinquenta minutos para desenvolvê-la, isto é, o tempo correspondente à uma hora aula.

Atividade 1 – Em uma fábrica de acessórios automobilísticos, a função $c(x) = 2x^2 + 4x$ representa o c

usto c, em reais, para se produzir x unidades de espelhos retrovisores de um determinado veículo. A partir dessa informação, preencha a tabela e as lacunas abaixo e responda:

	x	$c(x)$	
+1	0		+6
+1	1		$\boxed{}$
+1	2		$\boxed{}$
+1	3		$\boxed{}$
+1	4		$\boxed{}$
	5		

a) Quando os valores de x aumentam de $x = 1$ para $x = 2$, quantas unidades aumentam os valores correspondentes de $c(t)$? E quando estes valores aumentam de $x = 2$ para $x = 3$?

b) Quando os valores de x aumentam cerca de uma unidade, os valores correspondentes de $c(x)$ aumentam sempre das mesmas unidades, ou seja, aumentam a uma taxa constante?

c) A tabela a seguir apresenta a variação do custo de produção por unidade a mais de x e os espaços ao lado correspondem à variação da variação do custo de produção, complete-a em seguida responda:

	0	0		
+1	1	6	+10	$\boxed{}$
+1	2	16	+14	$\boxed{}$
+1	3	30	+18	$\boxed{}$
+1	4	48	+22	$\boxed{}$
	5	70		

i. Quando os valores de x aumentam cerca de uma unidade, por exemplo, de $x = 10$

para $x = 11$, de quantas unidades aumentam os valores da taxa de variação de $c(x)$? E quando esses valores aumentam de $x = 100$ para $x = 101$?

ii. Como se pode observar, quando os valores de x aumentam cerca de uma unidade, os valores correspondentes de $c(x)$ não aumentam a uma taxa constante, entretanto, pode-se perceber que os valores da taxa de variação da taxa de variação de $c(x)$ em relação a x aumentam a uma taxa constante e igual a __________.

Análise da atividade 1

Essa ***atividade*** tem por objetivo conduzir os estudantes a perceber que a taxa de variação da taxa de variação da função polinomial $c(x) = 2x^2 + 4x$ é constante.

Os estudantes desenvolveram-na em aproximadamente quinze minutos, porém, nem todos chegaram às soluções previstas. Constatamos que somente uma atividade não foi suficiente para conduzi-los a compreender o conhecimento matemático imbricado nesta situação de aprendizagem, pois os erros e equívocos cometidos não puderam ser percebidos e/ou superados por meio de outra atividade que abordasse o mesmo conhecimento matemático com outros registos de representação. Apesar disso, todos perceberam, intuitivamente, que a taxa de variação da taxa de variação de $c(x)$ em relação a x é sempre a mesma, ou seja, é constante.

Almejamos que os estudantes completem a tabela fornecida e percebam, ainda que intuitivamente, que à medida que os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de $c(x)$ não aumentam a uma taxa constante, como mostra o tabela 8. Todos completaram a tabela corretamente e perceberam que o custo de produção não aumenta a uma taxa constante quando a quantidade de retrovisores aumenta de uma unidade.

Tabela 8: Taxa de variação média de $c(x)$ em relação a x

	x	$c(x)$	
+1	0	0	+6
+1	1	6	+10
+1	2	16	+14
+1	3	30	+18
+1	4	48	+22
	5	70	

Para o item (a) esperamos que os estudantes percebam que à medida que os valores de x (quantidade de retrovisores) aumentam uma unidade os valores de $c(x)$ (custo de produção) não aumentam a uma taxa constante.

Somente a dupla formada pelos alunos Artur e Wallace não apresentou uma solução compatível com a que esperávamos, entretanto, afirmaram que a taxa de variação da taxa de variação do custo de produção em relação a quantidade de retrovisores é constante e igual a quatro unidades.

Os alunos William e Guilherme afirmaram que quando a quantidade de retrovisores aumenta uma unidade o custo da produção não aumenta a uma taxa constante, e enfatizaram que “a variação da taxa de variação é igual a quatro unidades”.

As soluções apresentadas pelas demais duplas foram curtas e objetivas, afirmaram que à medida que a quantidade de retrovisores aumenta de $x = 1$ para $x = 2$ o valor correspondente ao custo de produção aumenta em 10 reais e quando esta quantidade aumenta de $x = 2$ para $x = 3$ o custo de produção aumenta em 14 reais, o que nos leva a inferir que também perceberam, ainda que intuitivamente, que taxa de variação do custo de produção em relação a quantidade de retrovisores produzidos não é constante.

Esperamos que no item (b) os estudantes generalizem as inferências pontuadas a partir do item (a), e percebam que quando os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de $c(x)$ não aumentam a taxas constantes.

Todas as duplas perceberam que à medida que a quantidade de espelhos retrovisores aumenta uma unidade os valores correspondentes ao custo de produção não aumentam a uma taxa constante. Os alunos William e Guilherme ressaltaram ainda, que a taxa de variação da taxa de variação do custo de produção em relação a quantidade de retrovisores produzidos aumenta a uma taxa constante.

Para o item (c), esperamos que os estudantes percebam que a taxa de variação da taxa de variação de $c(x)$ em relação a x é constante e igual a quatro unidades, como mostra a tabela 9.

Tabela 9: Taxa de variação da taxa de variação de $c(x)$ em relação a x

	x	$c(x)$		
+1	0	0	+6	+4
+1	1	6	+10	+4
+1	2	16	+14	+4
+1	3	30	+18	+4
+1	4	48	+22	
	5	70		

Somente a dupla formada pelos alunos Artur e Wallace preencheu a tabela corretamente, enquanto os alunos Caroline e Adriano não a preencheram e as demais duplas fizeram erroneamente, pois concluíram que a taxa de variação da taxa de variação do custo de produção em relação a quantidade de retrovisores é constante e igual a oito.

Ao final desta situação de aprendizagem, constatamos que os estudantes compreenderam intuitivamente a ideia de taxa de variação da taxa de variação de $c(x)$ em relação a x, porém, não construíram significado para esta ideia.

Análise *a priori* da institucionalização da situação de aprendizagem 4

Ao final desta situação de aprendizagem, institucionalizaremos que a taxa de variação da taxa de variação de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ é sempre a mesma, ou seja, é constante.

Análise *a posteriori* da institucionalização da situação de aprendizagem 4

Após a devolutiva referente à atividade que compôs esta situação de aprendizagem, deu-se início a fase de institucionalização, onde, por meio dos registros de representação algébrica e tabular, o professor evidenciou para uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, que a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x não é constante, mas a taxa de variação da taxa de variação dessa função é sempre a mesma, ou seja, é constante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos no presente trabalho uma proposta para abordar a ideia de taxa de variação instantânea no âmbito do Ensino Médio baseada na Teoria das Situações Didáticas e na Teoria de Registros de Representação Semiótica. Acreditando que estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem se apropriar da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: **Estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem compreender a ideia de taxa de variação instantânea por meio de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação?**

Para respondê-la, confirmar ou refutar nossa hipótese bem como atingir nosso objetivo de pesquisa, elaboramos e aplicamos uma sequência didática para oito alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo.

Embora algumas noções matemáticas, que julgávamos fazer parte do conhecimento matemático dos estudantes, não foram mobilizadas pelos mesmos, como, por exemplo, os conhecimentos referentes à ideia de conversão de unidades de medidas e os referentes a ideia de velocidade média, nossa sequência didática parece tê-los conduzido à compreensão da ideia de taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto qualquer de seu domínio.

Verificamos que estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem construir significado para a noção de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da ideia de taxa de variação, desde que não se traga para esse nível de escolaridade a estrutura e as terminologias abordadas no Ensino Superior. Acreditamos que a noção de taxa de variação instantânea deve ser trazida à Educação Básica por conta de suas ideias fundamentais, e não por conta dos conceitos e nomenclaturas que estão imbricadas no estudo do Cálculo Diferencial.

Parece-nos que a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea deu-se somente por meio da mobilização simultânea de registros de representação algébrica, gráfica e tabular. Para nós, o processo de ensino e aprendizagem da ideia de taxa de variação instantânea no âmbito do Ensino Médio deve ser abordado por meio de situações de aprendizagem que permitam a coordenação entre os vários registros de representação, de modo que os estudantes tenham independência e condições para construir significado para esta ideia.

Aos professores que pretendem utilizar nossa sequência didática, ressaltamos que os erros e equívocos observados foram devidamente corrigidos, e a sequência com as devidas alterações encontra-se no apêndice A, ressaltamos também, que não consideramos está pesquisa finalizada, sentimos a necessidade de trabalhar alguns aspectos mais detalhadamente, como, por exemplo, a ideia de taxa de variação da taxa de variação.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. de S. Limites e Derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, nº 60, p. 30-38, 2006.

______. O Ensino de Cálculo no 2º Grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, nº 18, p. 1-9, 1991.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ANDRÉ, S. L. da C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.

ARTIGUE, M.; at all. **Ingeniería didáctica en educación matemática**. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1995, p. 33-59.

ARTIGUE, M. Didactical Design in Mathematics Education. **Nordic Research in Mathematics Education**, 2009.

BRAGA, C. **Função**: a alma do ensino da matemática. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/ SEB, 2006.

______. Lei nº 4.024, de 20 de Dezembro de 1961. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 1961.

______. Senado Federal, Subsecretaria de Informações. Decreto nº 981 – de 8 de Novembro de 1890. **Benjamim Constant**, Brasília, DF, 1890.

______. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2012: Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2011.

BROUSSEAU, G. Fondaments et méthodes de la didactique de la mathématiques. **Recherches en didactiques de mathematiques**, v. 7 nº 2, p. 33-115, 1986.

______. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Apresentação Silva, B. A. trad. Bogéa, C. São Paulo, 2008.

BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 23, nº 35B, p. 277 a 300, abril 2010.

DASSIE, B. A. **A matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2001.

DIAS, A. L. M. **O movimento da matemática moderna**: uma rede internacional científica-pedagógica no período da guerra fria. Anais do VII Esocite. Rio de Janeiro, 2008.

DÓRIA, E. **Memória Histórica do Colégio Pedro Segundo**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, 1997.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. 1ª ed. Trad. de LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. A. da. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Campos, T. M. M. trad. Dias. M. A. São Paulo, 2011.

FISCHER, M. C. B.; et all. **Práticas de ontem e de hoje**: Heranças do movimento da matemática moderna na sala de aula do professor de matemática. Anais do IX Enem. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2007.

FROTA, M. C. R. Teoria e Prática na Aprendizagem de Cálculo. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, ano 20, nº 28, p. 21-38, 2007.

______. **Estratégias Gráficas na Aprendizagem de Cálculo**. Anais do VIII Enem. Recife, Pernambuco, 2004.

MACHADO, N. J. **Matemática por assunto**: noções de cálculo. ed. Scipione, v. 9, São Paulo, 1988.

______. Interdisciplinaridade e Matemática. **Pro-Posições**, Campinas, FE/Unicamp, v. 4, nº 1, p. 24-34, 1993. Disponível em: www.nilsonmachado.net/partigos.html. Acesso em 08/07/2011

MIGUEL, J. C. Da prescrição curricular ao currículo como ação compartilhada: dilemas das tentativas de renovação dos programas de ensino de matemática no estado de São Paulo pós-64. **Ensino Em-Revista**, Uberlândia, v. 17, n. 1, p. 303-326, jan./jun.2010

NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior**. Anais do VIII Enem. Recife, Pernambuco, 2004.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio**: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.

PIRES, C. M. C. Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no brasil. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, ano 21, nº 29, 2008, p. 13 a 49.

REIS, F. da. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2001.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

______. **O Ensino de Cálculo**: Um Problema do Ensino Superior de Matemática? Anais do VIII Enem. Recife, Pernambuco, 2004.

ROBERT, A. Outils d´analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l´université. **Recherches en didactique des Mathématiques**. Versailles, vol. 18, nº 2, p. 139-190, 1998.

ROSSINI, R. **Saberes Docente Sobre o Tema Função**: Uma Investigação das Praxeologias. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Subsídios Para a Implementação da Proposta Curricular de Matemática Para o 2º grau**. São Paulo: SEE, 1980.

______. **Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática de 2º Grau.** São Paulo: SEE, 1995.

______. **Caderno do professor**: matemática, ensino fundamental. 8ª série, v. 2. São Paulo: SEE, 2008.

______. **Caderno do Professor**: matemática, ensino médio. 3ª série, v. 3. São Paulo: SEE, 2009.

______. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio. 1ª série, v. 2. São Paulo: SEE, 2009.

______. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: SEE, 2010.

SILVA, B. A.; et all. **Atividades para o estudo de funções em ambiente computacional**. São Paulo: Iglu, 2002.

SPINA, C. de. O. C. **Modelagem Matemática no Processo Ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. São Paulo, 2002. RIO CLARO

TROTTA, F.; IMENES, L. M. P.; JAKUBOVIC, J. **Matemática Aplicada**:3. São Paulo: Moderna, 1980.

VALENTE, W. R. **Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. nº 1, p. 89-94, 2005.

WERNECK, A. P. T. **Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos**: A Gênese do Primeiro Programa de Ensino de Matemática Brasileiro. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

APÊNDICE A

Produto Para Aplicação

Produto Final da Dissertação apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em outubro de 2012, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática: **Uma Proposta Para o Ensino da Ideia de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio.**

Nosso objetivo foi trabalhar a ideia de taxa de variação instantânea com estudantes do Ensino Médio a partir de uma abordagem intuitiva da ideia de taxa de variação, adotando como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, com a finalidade de responder a seguinte questão de pesquisa: Estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem compreender a ideia de taxa de variação instantânea por meio de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação? Assim, elaboramos e aplicamos uma sequência didática para oito alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo. Os resultados da pesquisa indicam que estudantes do 3º ano do Ensino Médio, por meio da mobilização simultânea dos registros de representação gráfica, algébrica e tabular, podem construir significado para a ideia de taxa de variação.

PRODUTO FINAL: Sugestão de material para abordar a noção de taxa de variação instantânea com alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Situação de aprendizagem 1 – Variações proporcionais – taxa de variação

Atividade 1 – Uma banheira é abastecida por uma torneira cujo fluxo de água é constante e igual a 5 litros por minuto, sabe-se que a mesma estava inicialmente vazia. Nessas condições, responda:

a) Qual o volume de água da banheira, após 1 minuto com a torneira aberta? E após 5 minutos?

____

____

b) Sabe-se que a capacidade máxima da banheira é igual a 75 litros, assim, quanto tempo à torneira deve permanecer aberta para encher a banheira completamente?

____

____

c) Quando o tempo que a torneira permanece aberta aumenta de 1 para 2 minutos, quantos litros o volume de água da banheira aumenta? E quando esse tempo aumenta de 6 para7 minutos, o que ocorre com o volume de água da banheira?

____

____

d) Para um aumento de tempo de um minuto a partir de um instante qualquer, o quanto aumenta o volume de água da banheira?

____

____

e) Por meio de uma sentença matemática, expresse o volume de água da banheira em função do tempo.

____

____

Atividade 2 – O volume (v) de água da banheira em função do tempo (t) é expresso pela função $v(t) = 5t$. Complete a tabela abaixo com os valores correspondentes ao volume de água da banheira, em seguida responda:

Tempo (mim)	0	1	2	3	4	5	10	15
Volume (l)								

a) Quando os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da banheira?

____

____

b) À medida que os valores do tempo aumentam acerca de um minuto, a partir de um instante qualquer, o quanto aumentam os valores correspondentes ao volume de água da banheira?

____

____

Atividade 3 – No geogebra, represente graficamente a reta de equação $y = 5x$, marque um ponto qualquer no eixo x e nomeio de A, trace uma reta perpendicular ao eixo passando por A e determine sua intersecção com a reta $y = 5x$, nomeie essa intersecção de B e trace uma perpendicular ao eixo y que passe por B, em seguida, movimente o ponto A e responda:

a) Quando os valores de x aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes de y?

____
____
____

b) E quando os valores de x aumentam de $x = 1$ para $x = 2$, o que ocorre com os valores correspondentes de y? E quando aumentam de $x = 4$ para $x = 5$?

____
____
____

c) À medida que os valores de x aumentam acerca de uma unidade, quantas unidades os valores correspondentes de y aumentam?

____
____
____

d) Nomeie a origem do referencial cartesiano de O, em seguida, construa os segmentos AB e AO, apresente seu "nome e valor", e calcule o quociente entre as medidas de AB e AO.

____
____
____

e) Movimente o ponto A, em seguida calcule o quociente entre as novas medidas de AB e AO. O que se pode observar quanto ao quociente entre as medidas de AB e AO obtidas nesse item e no item anterior? Se você movimentar o ponto A inúmeras vezes, o que acontecerá com o valor do quociente entre AB e AO?

____
____
____

f) Considere a função $v(t) = 5t$, obtida na atividade 1, e a equação $y = 5x$. O que os valores do eixo x representam? E os valores do eixo y?

Atividade 4 – Em um novo arquivo do geogebra, represente graficamente a função $v(t) = 5t$, selecione a ferramenta "inclinação", aplique-a sobre a reta que representa a função v e responda:

a) Qual a medida do segmento vertical?

____
____
____

b) Qual a medida do segmento horizontal?

____
____
____

c) Determine o quociente entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal.

____
____
____
____

d) O que se pode observar quanto ao resultado do quociente obtido no item anterior e os resultados obtidos nos itens (d) e (e) da atividade 3?

____
____
____

Atividade 5 – Uma caixa de água é abastecida por uma torneira cujo fluxo de água é constante e igual a 10 litros por minuto e, simultaneamente, seu conteúdo escoa, por outra torneira, cujo fluxo de água é controlado à razão constante de 15 litros por minuto. Em certo instante, o volume de água nessa caixa é de 100 litros.

a) Expresse o volume de água na caixa t minutos depois desse instante, por meio de uma sentença matemática?

____

____

____

b) Complete a tabela abaixo com os valores correspondentes ao volume de água na caixa.

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	10	20
Volume (l)								

c) À medida que os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

____

____

____

d) Quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ à $t = 2$, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa? E quando estes valores aumentam de $t = 12$ à $t = 13$?

____

____

____

e) Quando os valores do tempo aumentam acerca de uma unidade, a partir de um instante qualquer, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

____
____
____

Atividade 6 – No geogebra, represente graficamente a reta de equação $y = 100 - 5x$, marque um ponto qualquer no eixo x, nomeio de A, trace uma reta perpendicular ao eixo x passando por A e determine sua intersecção com a reta de equação $y = 100 - 5x$, nomeia de B e trace uma reta perpendicular ao eixo y passando por B, em seguida, movimente o ponto A e responda:

a) Considere a função $v(t) = 100 - 5t$, obtida na atividade anterior, e a equação $y = 100 - 5x$. O que os valores do eixo x representam? E os valores do eixo y?

____
____
____

b) Quando os valores do tempo aumentam, o que ocorre com os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

____
____
____

c) Quando os valores do tempo aumentam de $t = 1$ à $t = 2$, o quanto variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa? E quando estes valores aumentam de $t = 12$ à $t = 13$?

d) Quando os valores do tempo aumentam acerca de uma unidade, quantas unidades variam os valores correspondentes ao volume de água da caixa?

e) Selecione a ferramenta "inclinação", aplique-a sobre a reta que representa graficamente a função v, em seguida calcule a razão entre o segmento vertical e o segmento horizontal. O que se pode observar entre essa razão e a variação do volume de água da caixa quando os valores do tempo aumentam acerca de uma unidade?

Situação de aprendizagem 2 – Variações não proporcionais – Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea

Atividade 1 – O maratonista Marílson Gomes dos Santos é o maior vencedor brasileiro da São Silvestre, em 2010 ele completou a prova em aproximadamente 44min. Sabendo que o percurso da maratona de São Silvestre é de 15 km, determine a velocidade média desse maratonista em km/h, em seguida responda:

a) A velocidade média desenvolvida pelo maratonista durante a prova nos fornece informações precisas quanto à velocidade desenvolvida pelo mesmo nos últimos 200 metros da corrida? Explique.

b) Pode-se afirmar que esse maratonista em nenhum momento ultrapassou sua velocidade média? E que a velocidade média desenvolvida pelo mesmo foi sua velocidade em toda a maratona? Explique sua resposta.

____

____

____

____

____

Atividade 2 – Determine a velocidade média de um carro entre às 8h e às 10h de um determinado dia, sabendo que às 8h ele estava no quilômetro 50 e às 10h estava no quilômetro 210 da mesma rodovia. A seguir responda:[16]

a) É possível afirmar que o carro não ultrapassou os 80 km/h no intervalo considerado? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

____

b) Sabendo que durante esse percurso o carro esteve parado durante 20 minutos, o que se pode afirmar sobre sua velocidade máxima entre os instantes considerados?

[16] Adaptado de Machado (1988, p. 30).

c) A velocidade média desse carro nos fornece informações precisas quanto à velocidade desenvolvida pelo mesmo em um determinado instante de tempo, por exemplo, as $9h\ 33min$? Explique sua resposta.

Atividade 3 – Ao fim de um teste de resistência de um veículo popular, sua trajetória foi modelada de acordo com a função horária $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ (s em metros, t em segundos), a partir dessa informação faça o que se pede:

a) Considere o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, calcule $s(2)$ e $s(4)$ e, em seguida, determine a velocidade média deste veículo nesse intervalo de tempo.

b) Agora, determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 3s]$.

c) Determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$?

____

____

d) Considere agora o intervalo de tempo $[2s, (2+\Delta t)s]$, onde Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 2s$, calcule $s(2)$ e $s(2+\Delta t)$, em seguida determine a velocidade média do veículo nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo, ele será indicado por $v(\Delta t)$.

$v(\Delta t) =$

____

____

e) Com base na expressão matemática apresentada como solução para o item anterior, complete a tabela utilizando 4 casas decimais, em seguida preencha as lacunas da frase abaixo.

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$						

O valor de Δt está se aproximando de ___________, ao mesmo tempo, o valor de $v(\Delta t)$ está se aproximando de ____________.

f) Como você interpretaria fisicamente a velocidade média do veículo no item (d), quando Δt tende a zero?

____

____

g) Qual a velocidade do veículo no instante $t = 2s$?

____

____

Atividade 4 – Agora com o auxilio do *geogebra*, retomemos os itens da atividade anterior. No referencial cartesiano, construa o gráfico de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, em seguida faça o que se pede:

a) Para o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, você verificou que $s(2) = 4$ e que $s(4) = 30$, em que $(2, s(2))$ e $(4, s(4))$ podem representar dois pares ordenados, que por sua vez, podem ser representados no plano cartesiano por dois pontos. Marque esses pontos na parábola e os nomeie de A e B respectivamente, em seguida faça o que se pede:

i. Trace uma reta definida por A e B, selecione a ferramenta “inclinação” e aplique-a sobre a mesma, em seguida, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare com o resultado que você apresentou no item (a) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

____

____

ii. Apresente a equação da reta definida por A e B, em seguida verifique se há algo comum entre a equação da reta e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

____

____

b) Para o intervalo de tempo $[2s, 3s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B'(3, s(3))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B', aplique a ferramenta “inclinação” sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, em seguida, compare o resultado com a solução apresentada no item (b) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

____

____

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B' e verifique o que há em comum entre esta equação e o valor da razão fornecido obtida no item anterior.

____

____

c) Para o intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B''(2.1, s(2.1))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B", aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare o resultado obtido com o resultado que você apresentou no item (c) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

____

____

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B'' e novamente observe o que há em comum entre esta equação e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

____

____

Atividade 5 – Na atividade anterior, você deve ter observado que os pontos B, B' e B'' estão se aproximando cada vez mais do ponto A. Na atividade 3, você pôde verificar que à medida que o intervalo Δt se aproxima de zero, isto é, quando os pontos que definem as retas secantes aproximam-se cada vez mais do ponto A, o intervalo de tempo aproxima-se cada vez mais do instante $t = 2s$, e a velocidade média do veículo tende à velocidade instantânea do mesmo no instante $t = 2s$, que é igual a $7m/s$. No geogebra, construa o gráfico de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função

$s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, marque o ponto $A(2, s(2))$, em seguida faça o que se pede:

a) Selecione a ferramenta “reta tangente”, aplique-a no ponto A da representação gráfica de s, de modo a obter uma reta tangente à curva no ponto A, em seguida, marque um ponto qualquer sobre a representação gráfica de s, nomeio de B, trace uma reta definida por A e B e aplique a ferramenta “inclinação” sobre a mesma, movimente o ponto B e complete a frase: À medida que o ponto B se aproxima do ponto A, o intervalo de tempo Δt aproxima-se de __________.

b) Aproxime o ponto B o máximo possível do ponto A, calcule a razão entre o segmento vertical e o segmento horizontal, fornecidos pela ferramenta “inclinação”, e compare o resultado com a solução que você apresentou no item g da atividade 3.

____

____

c) Assim pode-se concluir que: quando o intervalo de tempo tende a zero, ou seja, quando o ponto B aproxima-se o máximo possível do ponto A, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea, que é igual a __________.

Situação de aprendizagem 3 – Taxa de variação no ponto

Atividade 1 – Em um circuito de rua foi realizado um teste de arrancada com uma moto 600cc, a fim de verificar o desempenho da mesma em diferentes situações do dia a dia. Ao fim do teste, constatou-se que seu movimento, em um intervalo de tempo relativamente pequeno, obedece à função horária $s(t) = -\frac{1}{t}$, s em metros e t em segundos, a partir dessa informação faça o que se pede:

a) Calcule a velocidade média da moto para o intervalo de tempo $[1s, 4s]$.

____

____

____

b) Calcule a velocidade média da moto para o intervalo de tempo $[1s, 3s]$.

c) Calcule a velocidade média da moto para o intervalo de tempo $[1s, 2s]$.

d) Considere o intervalo de tempo $[1, 1 + \Delta t]$, onde Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 1s$, calcule $s(1)$ e $s(1 + \Delta t)$, em seguida determine a velocidade média da moto nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo, ele será indicado por $v(\Delta t)$.

$v(\Delta t) =$

Atividade 2 – No geogebra, construa o gráfico de equação $y = -\frac{1}{x}$, que representa graficamente a função horária que descreve o movimento da moto, como fora apresentado no item anterior, em seguida determine:

a) As coordenadas de um ponto A da representação gráfica de s que tem abscissa igual a 1 e localize-o na representação gráfica.

$A\ (1,\ \ )$

b) P é um ponto genérico da representação gráfica de s, assim as coordenadas do ponto P são P$(t, s(t))$.

i. Determine as coordenadas do ponto P tal que $t = 4$;

$P(\ \ ,\ \ )$

ii. Determine as coordenadas do ponto P’ tal que $t = 3$;

$P(\ ,\ )$

iii. Determine as coordenadas do ponto P’’ tal que $t = 2$.

$P(\ ,\ )$

c) Na representação gráfica de s, localize os pontos P, P’ e P’’, em seguida, trace as retas AP, AP’ e AP’’, e faça o que se pede:

i. À medida que o valor de t diminui cada vez mais e aproxima-se do instante $t = 1$, o ponto $P(t, s(t))$ aproxima-se cada vez mais do _______________.

ii. Selecione a ferramenta inclinação, aplique na reta AP, calcule a razão entre os segmentos vertical e horizontal e verifique se há algo em comum entre esse resultado e o que você apresentou no item (a) da atividade 1, e faça o mesmo procedimento para as retas AP’ e AP”, comparando com os resultados apresentados nos itens (b) e (c) da atividade 1.

____

____

d) Retome a expressão matemática que você apresentou como solução para o item (d) da “atividade 1”, $V(\Delta t) = \frac{1}{1+\Delta t}$ e, em seguida responda:

i. Se tomarmos o valor de Δt cada vez mais próximo de 0, o valor da velocidade média da moto se aproxima de um número real a, que corresponde a sua velocidade instantânea no instante $t = 1$. Qual o valor de a?

$a =$

ii. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto $A(1, -1)$ e tem coeficiente de inclinação α.

---

iii. Esboce os gráficos da reta r e da função $s(t) = -\frac{1}{t}$, no mesmo plano cartesiano, em seguida, selecione a ferramenta "inclinação", aplique-a na reta r e calcule a razão entre os segmentos vertical e horizontal e compare com a solução que você apresentou no subitem (i) desse item.

Situação de aprendizagem 4 – Taxa de variação da taxa de variação

Atividade 1 – Em uma fábrica de acessórios automobilísticos, a função $c(x) = 2x^2 + 4x$ representa o custo c, em reais, para se produzir x unidades de espelhos retrovisores de um determinado veículo. A partir dessa informação, preencha a tabela e as lacunas abaixo e responda:

	x	$c(x)$	
+1	0		+6
+1	1		$\boxed{}$
+1	2		$\boxed{}$
+1	3		$\boxed{}$
+1	4		$\boxed{}$
	5		

a) Quando os valores de x aumentam de $x = 1$ para $x = 2$, quantas unidades aumentam os valores correspondentes de $c(t)$? E quando estes valores aumentam de $x = 2$ para $x = 3$?

---

b) Quando os valores de x aumentam cerca de uma unidade, os valores correspondentes de $c(x)$ aumentam sempre das mesmas unidades, ou seja, aumentam a uma taxa constante?

c) A tabela a seguir apresenta a variação do custo de produção por unidade a mais de x e os espaços ao lado correspondem à variação da variação do custo de produção, complete-a em seguida responda:

	x	$c(x)$		
	0	0		
+1			+6	
	1	6		
+1			+10	
	2	16		
+1			+14	
	3	30		
+1			+18	
	4	48		
+1			+22	
	5	70		

i. Quando os valores de x aumentam cerca de uma unidade, por exemplo, de $x = 10$ para $x = 11$, de quantas unidades aumentam os valores da taxa de variação de $c(x)$? E quando esses valores aumentam de $x = 100$ para $x = 101$?

ii. Como se pode observar, quando os valores de x aumentam cerca de uma unidade, os valores correspondentes de $c(x)$ não aumentam a uma taxa constante, entretanto, pode-se perceber que os valores da taxa de variação da taxa de variação de $c(x)$ em relação a x aumentam __________ unidades.

APÊNDICE B

Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento Para Menores de Idade

Caro Responsável/Representante Legal:

Venho por meio deste termo, solicitar seu consentimento para o menor ____, participar como voluntário da pesquisa referente ao projeto de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, intitulada *Uma Proposta Para o Ensino da Derivada no Ensino Médio a Partir da Noção de Taxa de Variação,* cujo objetivo primeiro é conduzir os estudantes do Ensino Médio a apreender a noção de derivada a partir de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação.

Sua forma de participação consiste na resolução de atividades que compõem situações de aprendizagem que intentam atingir o objetivo primeiro desta pesquisa, cuja realização dar-se-á em quatro encontros presenciais.

Ressaltamos que o nome e as informações confidenciais apresentadas pelos participantes não serão divulgadas na pesquisa, e a divulgação dos resultados será feita de modo a não identifica-los, o que garante o anonimato dos mesmos.

Não será cobrado nenhum valor (R$), assim, não estão previstos indenizações ou ressarcimentos.

Reiteramos que há a possibilidade de recusa ou de retirada do consentimento sem penalização alguma ou prejuízo, uma vez que a participação é voluntária.

Colocamo-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos e para maiores informações, antes e durante a realização da pesquisa, Edson Rodrigues da Silva, e-mail: professoredsonrodrigues@gmail.com

Eu,____, portador do RG nº:_________________________, confirmo que Edson Rodrigues da Silva me explicou os objetivos da presente pesquisa, bem como, a forma de participação. As opções para participação do menor ____ também foram discutidas. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto, concordo em dar meu consentimento para o menor participar como voluntário da presente pesquisa.

Santo André, 8 de maio de 2012.

____

(Assinatura responsável ou representante legal)