PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

José Messildo Viana Nunes

A Prática da Argumentação como Método de Ensino:
O Caso dos Conceitos de Área e Perímetro de Figuras Planas

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

José Messildo Viana Nunes

A Prática da Argumentação como Método de Ensino:

O Caso dos Conceitos de Área e Perímetro de Figuras Planas

Tese apresentada à *Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de* ***DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*** *sob a orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.*

São Paulo

2011

Banca Examinadora

____

____

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura ________________________________ Local e Data _______________

Ao meu filho "um anjo" que, com
sua breve presença entre nós,
trouxe: felicidade e paz.

(In memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e aos invisíveis, que me acompanham e protegem.

À minha mãe, que, com muito carinho e apoio, não mediu esforço para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, orientador e amigo, pela inspiração e competente orientação, pelo apoio em momentos críticos do desenvolvimento desta Tese, o que me possibilitou ter confiança para concluir este trabalho.

Aos Professores Doutores Maria José Ferreira da Silva, Benedito Antônio da Silva e Iran Abreu Mendes, por suas participações na banca e contribuições relevantes e essenciais para concretização desta pesquisa.

Ao professor Doutor Renato Borges Guerra, pela participação na banca, pelas leituras e sugestões, que tornaram possível a conclusão desta Tese, e pelo incentivo e reconhecimento de meu trabalho acadêmico e profissional, desde o mestrado.

A meus professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, com os quais tive o privilégio de conviver e que me deram condições para melhor desenvolver este trabalho.

À minha flor, Orquídea Vasconcelos dos Santos, por seu companheirismo, força e incentivo, nos momentos mais importantes de minha vida. Obrigado pela força para construção do projeto que me possibilitou ingressar no programa de doutorado e pelo convívio em terra alheia. Agradeço, ainda, por sua colaboração nas filmagens que auxiliaram na coleta de dados.

Ao secretário Francisco Olímpio da Silva, pela amizade e ajuda na formatação da tese.

À minha amiga Professora Doutora Emília Pimenta, por sua paciência e dedicação, na revisão textual desta tese.

Aos amigos e companheiros de turma e do grupo de pesquisa PEAMAT que, direta e indiretamente, me ajudaram durante o curso. Em especial, a Gilson Bispo de Jesus, pela grande ajuda e acolhimento no início dessa missão, longe de minha terra. E pela amizade, força e incentivos de Harrison Lessa Júnior, Márcia Maioli.

Aos amigos e incentivadores, Roberto Carlos Dantas Andrade e Reginaldo Silva.

À equipe técnica e administrativa da Escola Municipal Florestan Fernandes, em especial, aos alunos que fizeram parte da pesquisa, ao Diretor Luiz Otavio Araújo, à Coordenadora Pedagógica Eliene e aos Professores Roni e Inaldo, pelo convívio, apoio, compreensão e amizade.

E a todos que, de algum modo, contribuíram para a concretização desta Tese.

O Autor

RESUMO

Esta pesquisa trata da prática da argumentação como método de ensino, focalizando os conceitos de área e perímetro de figuras planas. Estudos em níveis nacionais e internacionais já abordaram o assunto, muitas das vezes utilizando a prática da argumentação como método, sem, no entanto, propor caminhos que demonstrassem a funcionalidade dessa abordagem. Assim, este trabalho responde à seguinte questão: em que medida a prática da argumentação pode se apresentar como método que favoreça a compreensão de conceitos em matemática, tomando como referência o caso da área e perímetro de figuras planas? Como resposta, propomos uma sequência didática modelada e analisada com base nas fases que compõem o processo argumentativo segundo Toulmin (1996). A metodologia do estudo apoiou-se em pressupostos da Engenharia Didática e a intervenção foi efetivada com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental (alunos de 10 a 11 anos), utilizando duas instituições argumentativas: a sala de aula e o laboratório de informática, no qual usamos o *software* Geogebra. A fundamentação teórica baseou-se nas reflexões teóricas de Toulmin (1996), na classificação de argumentos de Pedemonte (2002) e Cabassut (2005) e na idéia de convergência argumentativa de Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005). As análises das atividades evidenciaram que a prática da argumentação favoreceu a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, habilitando essa prática como método de ensino. As competências argumentativas adquiridas pelos discentes, a partir das interações com colegas e pesquisador sobre o assunto em questão, possibilitaram- lhes ter mais autonomia para comunicar e defender suas ideias, respeitando a opinião do colega no decorrer das discussões, ficar atentos à funcionalidade e à validade ou não de seu argumento, além de apreender símbolos e linguagem específicos da matemática.

Palavras-chave: Argumentação em matemática, Área e perímetro de figuras planas, Método de ensino.

ABSTRACT

This research treats the practice of the argumentation as teaching method, focusing the concepts of area perimeter of plane figures. Studies in national and international levels have already broached the subject, many times using the practice of the argumentation as method, not proposing, however, ways that demonstrate the functionality of that method. So this work answers the following question: in what measure the practice of the argumentation can present itself as method that contributes to the comprehension of concepts in mathematics taking as reference the case of the area and the perimeter of plane figures? To answer our question, we propose a didactic sequence modeled and analyzed with basis in the phases that compose the argumentative process, according to Toulmin (1996). The methodology of the study have been supported in Didactic Engineering purposes, the intervention have been effectuated with pupils at the fifth grade in Ensino Fundamental (students aged 10-11), using two argumentative institutions: the classroom and the informatics laboratory where we used the Geogebra software. The theoretical foundation have been based in speculative reflections by Toulmin (1996), in argumentative classification by Pedemonte (2002) and Cabassut (2005) and in the idea of argumentative convergence by Perelman and Olbrechts-Tyteca (2005). The analysis of the activities have evidenced that the practice of the argumentation contribute to the comprehension of the concepts of area and perimeter of plane figures, habilitating this practice as teaching method. The argumentative competences acquired by the pupils through the interactions with their classmates and the researchers about the subject allowed them have more autonomy to communicate and defend their ideas, respecting the opinion of the other classmates during the discussions, pay attention to the functionality and the possible validity of their argument, besides to learn specific symbols and language of mathematics.

Key-words: Argumentation in mathematics, Area and perimeter of plane figures, Teaching method.

RÉSUMÉ

Cette recherche traite de la pratique de l'argumentation comme méthode d'enseignement en se concentrant aux concepts d'aire et périmètre de figures planes. Des études en niveaux nationaux et internationaux ont déjà abordé cet objet, plusieurs fois en utilisant la pratique de l'argumentation comme méthode sans pourtant proposer des chemins qui montrent la fonctionnalité de cette méthode. Ainsi ce travail répond à la question suivante: à quelle mesure la pratique de l'argumentation peut se présenter comme méthode qui favorise la compréhension de concepts en mathématiques en prenant comme référence le cas de l'aire et du périmètre de figures planes? Pour répondre à notre question nous proposons une séquence didactique modelée et analysée à base des phases qui composent le processus argumentatif selon Toulmin (1996). La méthodologie de l'étude s'est appuyée en présupposés de l'Ingénierie Didactique, l'intervention a été effectuée avec des élèves du cinquième année de l'Ensino Fundamental (élèves de 10 à 11 ans), en utilisant deux institutions argumentatives: la salle de classe et le laboratoire d'informatique où nous avons utilisé le *software* Geogebra. La fondation théorique s'est basée aux réflexions théoriques de Toulmin (1996), à la classification d'arguments de Pedemonte (2002) et Cabassut (2005) et à l'idée de convergence argumentative de Perelman et Olbrechts-Tyteca (2005). Les analyses des activités ont montré que la pratique de l'argumentation a favorisé la compréhension des concepts d'aire et périmètre de figures planes, en habilitant cette pratique comme méthode d'enseignement. Les compétences argumentatives acquises par les écoliers, à partir des interactions avec des collègues et des chercheurs sur l'objet en question leur ont possibilité d'avoir plus d'autonomie pour communiquer et défendre leurs idées en respectant l'opinion des autres collègues au long des discussions, de prendre attention à la fonctionnalité et à la validité ou non de leur argument, outre appréhender les symboles et le langage spécifiques de la mathématique.

Mots-clés: Argumentation en mathématiques, Aire et périmètre de figures planes, Méthode d'enseignement.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

As premissas desta proposta tiveram inicio a partir de nossa atuação como observador no projeto “O raciocínio matemático dedutivo no processo de ensino-aprendizagem da matemática nas séries finais do Ensino Fundamental,” na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Tal projeto se propôs a investigar os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados ao ensino e à aprendizagem de provas e demonstrações, em matemática, nas séries finais do Ensino Fundamental, assim como a forma pela qual os professores, destas séries, relacionam-se com o tema ao trabalharem com seus alunos.

Uma das discussões que mais nos chamaram a atenção diz respeito ao relacionamento entre argumentação, prova e demonstração em matemática. Percebemos que as várias concepções teóricas que influenciam tal relação provocam debates que geram investigações inseridas em um ou outro ponto de vista, ou até mesmo abarcam mais de uma concepção. Apesar de inúmeras pesquisas vislumbrarem tal relacionamento, percebemos ainda ser um grande desafio o estudo das imbricações entre o momento de produção de um argumento e a tentativa de sua comprovação, assim como pesquisas que tenham como objeto de estudo a argumentação, admitindo como premissa que haja uma relação entre os dois momentos.

Entendemos que o uso de atividades direcionadas ao envolvimento dos discentes em contextos[1] que requeiram argumentação em matemática, em geral, não são praticadas em salas de aula. Apesar de muitas pesquisas, principalmente

[1] Relacionamos o termo contextos à concepção de Tufano (2001, p. 40) de contextualizar: “[...] Colocar alguém a par de algo, alguma coisa, uma ação premeditada para situar um indivíduo em um lugar no tempo e no espaço desejado, encadear ideias em um escrito, constituir o texto no seu todo, argumentar”.

em fórum internacional, discorrerem a respeito da importância de se implementar, em sala de aula, tarefas que conduzam o aluno a experimentar, conjecturar e provar, são poucas as pesquisas que enfocam esta discussão no Brasil. Com efeito, há necessidade de investigações que possam contribuir efetivamente para um ensino que priorize a argumentação em matemática.

O raciocínio argumentativo deveria ser parte consistente da experiência matemática durante toda a escolaridade. Tal hábito se desenvolve mediante o uso coerente de muitos contextos.

Ressaltamos que admitimos em nossa pesquisa que o termo argumentação significa, sobretudo, os raciocínios expressos de forma oral, escrita ou gestual utilizados para justificar conjecturas e convencer interlocutores. Esta concepção foi influenciada por pesquisas que abordaram o tema em questão, as quais apresentaremos mais adiante.

As pesquisas que enfocam a temática argumentação, em geral, estão relacionadas a questões, tais como comunicação e linguagem matemática em sala de aula; aceitação de argumentos pela comunidade matemática; convencimento e explicação de situações e processos de validação e refutação de argumentos, os quais podem se desdobrar em situações que utilizam ou não a ferramenta computacional, dentre outras.

Nossas leituras em relação à temática argumentação nos levaram a admitir o uso de tecnologias, pois essas nos indicaram que os ambientes informatizados são propícios ao desenvolvimento de conjecturas, testagem de hipóteses, etc. Os relatos de pesquisas que fazem uso desses ambientes ressaltam ainda seu caráter motivacional e a forma interativa - visual e dinâmica deles.

Além disso, pesquisas como as de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996) chamam atenção para necessidade de um trabalho que explore a dinamicidade da área e perímetro de figuras planas. A segunda autora propõe o uso de *softwares* matemáticos para exploração desta característica. Essas indicações nos fizeram optar pela exploração do ambiente informatizado Geogebra, para tratar do ponto de vista dinâmico, necessário à aquisição conceitual dos objetos em jogo.

Assim, resolvemos, em nossa pesquisa, congregar os ambientes não informatizados e informatizados, buscando um amplo contexto que envolva a argumentação. Com efeito, aliamos tais ambientes, relacionando os aspectos estáticos e dinâmicos favorecidos por cada um deles. Em nosso caso, a articulação será entre o *software* Geogebra e a sala de aula.

A partir de nossos estudos sobre a temática argumentação, inferimos que é possível compreender que a prática da argumentação deve ser tida como uma problemática de suma importância para a formação do cidadão que precisa compreender matemática, e comunicar suas ideias dentro deste campo de estudo.

Elegemos essa temática a fim de compreendermos as dificuldades que se apresentam em sala, quando solicitamos aos alunos que argumentem a respeito de atividades que envolvam a apreensão de conceitos matemáticos, em particular, geométricos. Nesse sentido, buscamos o entendimento das argumentações em matemática, não só de um ponto de vista didático, mas, também, procuramos compreender sua complexidade enquanto método de ensino.

Escolhemos como objeto de estudo as argumentações produzidas pelos alunos em atividades que envolviam os conceitos de área e perímetro de figuras planas. Nosso interesse foi o de fazer uma análise integral delas. A partir dessas análises, compreendemos os argumentos como uma construção sociocultural, evidenciando a importância do cenário que possibilita seu desenvolvimento.

Optamos pela geometria por esta apresentar uma riqueza de aplicações no mundo real que favorece as investigações de propriedades que podem propiciar a passagem do ponto de vista prático ao teórico, além de oportunizar aos alunos situações-problema que requeiram visualização espacial, exploração, percepção, representação, construção, argumentação, nas quais em muitos casos o apelo à intuição revela-se como obstáculo para a compreensão de propriedades, definições, etc. Esses pressupostos, em nossa concepção, edificam o raciocínio dedutivo necessário para a compreensão da Matemática.

Em relação ao objeto geométrico "área e perímetro de figuras planas", nossa escolha foi influenciada pelo levantamento da problemática ligada ao ensino e à aprendizagem desses conteúdos, realizado em nossa dissertação de mestrado (NUNES, 2007), na qual desenvolvemos uma sequência de ensino que tinha por objetivo a construção do conceito de área de figuras planas, enfatizando a área do círculo, com alunos da então 8ª série do Ensino Fundamental. Nesse trabalho, postulamos a construção heurística de fórmulas matemáticas como meio necessário para a apropriação significativa dos conceitos. O interesse por esse objeto foi reforçado por leituras de autores como Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), Wagman (1975), Romero, Carretero, Cuadra (1993), Balacheff (1988), Douady e Perrin-Glorin (1989), Franchi et al. (1992), Baltar (1996), Chiummo (1996), Facco (2005), dentre outros.

Além disso, na teia de saberes envolvidos pela geometria, evidenciamos a argumentação como mecanismo de validação[2] de conjecturas oriundas das atividades construídas nesse campo.

Dito isso, é mister destacarmos que o conhecimento matemático se fundamenta no raciocínio demonstrativo, mas a demonstração é síntese de um processo mais complexo, o da análise, pautada em conjecturas por vezes transitórias. De fato, é necessário admitir que o *status* de ciência demonstrativa da Matemática contempla apenas um de seus aspectos: antes, é preciso combinar observações, comparações, construções, argumentações, provas, refutações etc., se possível em diversificados ambientes de aprendizagem, a fim de criar condições que possibilitem ao discente acessar processos mais complexos do raciocínio matemático.

Por conseguinte, buscamos propor atividades que façam emergir uma grande variedade de estratégias e processos de comunicação de ideias que envolvam argumentação, validação/refutação etc. Admitimos que as situações de validação requeiram que os discentes confrontem seus pontos de vista e troquem asserções a respeito do objeto em estudo sob mediação do professor.

---

[2] Uma situação de validação é uma situação cuja solução exige que os atores estabeleçam um conjunto de validade do conhecimento característico desta situação. [...]. Ela implica que os protagonistas confrontem seus pareceres sobre a evolução do meio e cheguem a um acordo segundo as regras do debate científico (BROUSSEAU, 2003, p. 4, tradução nossa).

Para Cabassut (2005), as diferentes concepções de verdade e os diferentes termos para qualificar: “necessário”, “certo”, “provável”, “plausível” permitem definir dois grandes tipos de raciocínio de validação: as argumentações e as demonstrações. Levando em conta os trabalhos de Balacheff (1987), podemos admitir que as validações podem se apresentar basicamente na matemática em pelo menos três situações de argumentação, de prova ou de demonstração. Assim, não podemos desconsiderar nas fases que compõem um processo argumentativo aquele que leva ao que Toulmin (2006) chama de veredicto.

Do ponto de vista da validade, buscamos organizar as argumentações dos discentes em um modelo estrutural, que decompõe os raciocínios válidos em argumentos (TOULMIN, 2006).

Assim, planejamos uma intervenção com alunos do 5º ano do ensino Fundamental de uma escola municipal, localizada em Belém do Pará, para tratar dos conceitos de área e perímetro de figuras planas em uma perspectiva que evidenciou a argumentação como elemento necessário à compreensão dos conceitos em questão.

Deste modo, nosso objetivo foi constituir a argumentação como um processo que favorece a apropriação de conhecimentos matemáticos evidenciando as fases necessárias para que tal fato se estabeleça.

Para alcançar tal objetivo, elaboramos uma sequência didática inspirada nas concepções de área e perímetro de Wagman (1975), Douady e Perrin-Glorian (1989), Romero, Carretero, Cuadra (1993), Franchi et al. (1992) e Baltar (1996).

Nossa pesquisa foi encaminhada a partir de pressupostos da engenharia didática. Tal metodologia nos permitiu organizar a proposta contemplando as análises preliminares que possibilitaram a construção da sequência e suas respectivas análises *a priori e a posteriori*. As análises das atividades são concebidas por meio de critérios estabelecidos a partir das fases que compõem uma argumentação, inspiradas em Toulmin (2006), contemplando a convergência argumentativa de Perelman e Olbrechts-Tyteca, os tipos de argumentos, segundo

Pedemonte (2002) e Cabassut (2005), e as funções de validação de argumentos na perspectiva desse último autor.

A tese é composta de três partes, que serão apresentados a seguir.

Na primeira parte, apresentamos os estudos preliminares, relatando inicialmente as pesquisas que focaram a argumentação e nos servem de quadro teórico para compor as fases necessárias para evidenciar a prática da argumentação como alternativa didática que favorece a compreensão de conceitos em matemática, mais especificamente os de área e perímetro de figuras planas.

Em nossa pesquisa, adotamos a teoria da argumentação de Toulmin (2006). Em decorrência desse fato, nessa primeira parte, realizamos um levantamento sobre investigações que fizeram uso dessa perspectiva teórica para analisar argumentos em sala de aula de matemática. Assim, constatamos que, em Educação Matemática, as propostas que enfocaram esse campo teórico direcionaram suas investigações para o que o autor denomina de parte “fisiológica” do processo argumentativo, ou seja, as microestruturas dos argumentos que contemplam basicamente: dados, justificativas e conclusões. Desse modo, abordaremos, além da fisiológica, a parte dita pelo autor de “anatômica”, composta por três fases: a colocação de um problema, as discussões sobre o problema e o veredicto das conclusões.

Ainda na primeira parte, destacamos as contribuições de grupos de pesquisa no Brasil que elegeram a temática prova e demonstração em suas investigações. Esses temas suscitam discussões sobre argumentação. Por esse motivo, abordamos os trabalhos desenvolvidos por esses grupos.

Para propor atividades que possibilitassem a emergência de argumentações em sala de aula, elegemos o assunto área e perímetro de figuras planas. A perspectiva que adotamos para o objeto área nos remeteu ao uso da informática educativa. Assim, nessa primeira parte, colocaremos em pauta discussões sobre resultados de pesquisas realizadas em ambientes informatizados que puseram em relevo o ensino de geometria e o desenvolvimento do processo de argumentação e prova com uso de tecnologia.

Por fim, a primeira parte retrata o contexto histórico no qual se inseriram os estudos da argumentação. Para alcançar esse objetivo, fizemos uma breve introdução histórica sobre a temática, desde suas raízes na Grécia antiga até as modernas concepções teóricas deste campo de estudo, a fim de elencar algumas perspectivas sobre argumentação para esclarecermos o nosso entendimento e adoção aos pontos de vista que estejam em consonância com nossa proposta de tese.

Na segunda parte, apoiados no levantamento discutido na parte precedente, anunciamos: a relevância, a problemática, o objetivo, a questão de pesquisa com sua respectiva hipótese, o referencial teórico e a metodologia da pesquisa. Discorreremos, também, a respeito de propostas que buscaram favorecer a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, o que nos possibilitou propor um conjunto de situações que dão sentido a esses conceitos.

Já na terceira parte, descrevemos o contexto no qual desenvolvemos a pesquisa, destacando os sujeitos que fizeram parte dela. Passamos, então, a descrever o experimento, a partir de um conjunto de atividades que têm por objetivo possibilitar a emergência de argumentação, de forma a favorecer a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, constituindo a prática argumentativa como método de ensino.

PRIMEIRA PARTE

ESTUDOS PRELIMINARES

Nesta parte, descrevemos os estudos preliminares que nos possibilitaram modelar a argumentação em três fases, apoiando-nos em investigações sobre o tema. Relatamos as pesquisa de grupos no Brasil, que contribuíram para pontuar a prática argumentativa como alternativa que possibilita a compreensão de conceitos em matemática. Abordamos, também, o uso da informática educativa no processo de aprendizagem em geometria. Encerrando a primeira parte, apresentamos nossas reflexões teóricas sobre argumentação.

1 Argumentação em Sala de Aula: indícios para implementação

Leal e Morais (2006) evidenciaram, por meio de avaliação de textos de várias crianças, que desde muito cedo nossos alunos são capazes de argumentar, seja oralmente, seja por meio de textos escritos. Identificaram, ainda, nos textos produzidos pelas crianças, estratégias de apresentação de pontos de vista, de justificação e de diálogos com o leitor mediante a inserção de contraexemplos.

Os autores asseveram, também, que, em sala de aula, os professores são, naturalmente, interlocutores dos textos dos alunos, uma vez que, na escola, as atividades de escrita têm a finalidade didática. A referida pesquisa evidencia que os discentes partem das representações sobre o que o professor espera que eles digam naquela situação para construírem seus argumentos. Tais atitudes são regidas pelo contrato didático[3] estabelecido entre o professor e os alunos, em decorrência das posturas dos dois perante a mediação e resolução das atividades propostas.

A referida pesquisa foi desenvolvida na área da linguagem e tais investigações fazem surgir propostas que revelam a teia de saberes envolvida na complexa relação que envolve o raciocínio na prática de argumentar em matemática, relacionando a esta atividade a de validar conjecturas em aulas de matemática.

Segundo Boavida (2005), Douek e Scali (2000), Boero, Douek e Ferrari (2008), a argumentação em sala de aula vem sendo abordada, no âmbito da Educação Matemática, desde os anos 80. Tal enfoque deve-se, de acordo com esses autores, à tentativa de “atacar” o problema da especificidade da demonstração matemática e sua relação com a argumentação. As pesquisas dessa temática envolvem perspectivas epistemológicas, cognitivas e/ou educacionais.

O interesse pela investigação sobre a argumentação no âmbito da educação tem sido objeto de estudo de diversas áreas tais como a linguística, física, química e matemática. Particularmente, em Educação Matemática, os estudos voltam-se para as imbricações entre argumentação, prova e demonstração. A abordagem desse tema é evidenciada em projetos de grupos de pós-graduação, dissertações, teses e em discussões em eventos principalmente em nível internacional como a *Conference of European Research in Mathematics Education* (CERME), um congresso cuja característica principal é a organização de grupos temáticos, como o grupo IV, que discute o tema argumentação, prova e demonstração em matemática. Destaca-se, também, o *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), cuja principal atividade é uma conferência anual de aproximadamente cinco dias, durante a qual os membros têm a oportunidade de se comunicar pessoalmente um com o outro sobre

---

[3] O referido contrato versa que este “deve estabelecer uma relação que determina explicitamente em pequena parte, mas, sobretudo implicitamente aquilo que cada parceiro - o professor e o aluno, têm a responsabilidade de gerir e pelo qual será de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro” (BROUSSEAU, 1996, p. 51).

interesses específicos e gerais; o tema argumentação, prova e demonstração vem a cada ano conquistando mais espaço nos debates e publicações desse cenário. Como no caso do *journal International Newsletter on the Teaching and learning of Mathematical Proof*, sitiado em <http://www.lettredelapreuve.it>, que apresenta publicação bimensal dedicada à temática em questão. Neste *site* encontramos debates profícuos que suscitam pesquisas sobre o tema.

Nessa perspectiva, Balacheff (1987, 1988), apoiado em suas pesquisas sobre provas e demonstrações, pressupõe que a interação social entre os alunos pode favorecer o processo de devolução da responsabilidade em gerir e produzir o conhecimento, tendo o professor a responsabilidade de mediar a aprendizagem. O autor, então, propõe que esse processo seja organizado em torno da questão da argumentação.

Para Duval (1999), a noção de argumento envolve duas dimensões: a escolha de um tema para atingir um determinado objetivo e o contexto para a produção do argumento, sendo o contexto influenciado de duas formas. Por um lado, há o que motivou o recurso aos argumentos como, por exemplo, a resolução de um problema, com suas restrições técnicas e lógicas. Por outro lado, há o objetivo da argumentação - convencer alguém ou apenas diminuir o risco de erro ou incerteza na escolha de um direcionamento de trabalho.

De acordo com esse autor, em qualquer que seja o caso, a argumentação exige a mobilização de múltiplas formas de discurso, e não só aquela do raciocínio; a língua natural pode ser um elo, pois está presente em todo processo argumentativo.

Por sua vez, Boero (1999) afirma que são dois os problemas que devemos nos debruçar no processo de aprendizagem em matemática. Por um lado, a natureza dos argumentos considerados pelos alunos como argumentos confiáveis para validação, sejam empíricos ou teóricos. Por outro lado, a natureza dos raciocínios produzidos pelos alunos, analogias, exemplos, etc. Acreditamos que algumas atividades favorecem os estudantes a produzirem argumentos de vários tipos. A partir dessa tipologia, podemos levar em conta a dupla natureza dos argumentos, assim podemos qualificá-los e analisá-los, evidenciando a argumentação como processo que favorece a compreensão de conceitos em matemática, como é o caso das medições em geral realizadas em atividades de geometria que potencializam a produção de argumentos pragmáticos.

Cabe aos estudos sobre argumentação em sala de aula, o aprofundamento e a busca de estratégias que possam favorecer ao aluno desenvolver sua competência argumentativa, que, por um lado, tem sua relevância no convívio social, e, por outro, se apresenta com grande potencial para auxiliar na compreensão dos assuntos abordados nas aulas, sendo necessárias atividades apropriadas para esse fim. Em geometria das séries iniciais, por exemplo, podemos levar em conta, além de um conjunto de situações que dão sentido aos conceitos, a emergência de argumentos ao fazer apelo às intuições proporcionadas pelas representações dos elementos dessa área, que, por vezes, podem levar o discente a conflitar suas ideias com os fatos constatados nas atividades.

Nesse sentido, nosso intento foi envolver os alunos em atividades que suscitassem formulações de conjecturas e avaliação da plausibilidade e validade destas conjecturas. A inserção em tal contexto favorece a emergência de argumentos em defesa das suas ideias, assim como uma análise crítica de contribuições de colegas e professores.

Assim, a prática da argumentação poderá constituir-se como uma alternativa metodológica para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Para o estabelecimento de tal proposta, admitimos a necessidade de o processo argumentativo ser composto basicamente de três fases que podem favorecer o cumprimento desse intento, cada uma das fases serão doravante anunciadas e constituídas a partir de nosso quadro teórico.

Para concebermos cada uma das fases, apoiamo-nos em pesquisas que elegeram a temática em questão como campo de investigação.

1.1 Experiência de Referência como Componente das Fases do Processo Argumentativo

Para Douek (1998), a argumentação permite a separação entre os invariantes operatórios[4] e representações simbólicas entre conceitos similares como, por exemplo, os de área e perímetro, que muitas das vezes são confundidos pelos estudantes.

Em estudos mais recentes, Douek e Scali (2000) consideram que a argumentação intervém na construção progressiva de conceitos matemáticos básicos. Além disso, para os autores o desenvolvimento consciente da argumentação favorece as ligações sistemáticas entre conceitos.

A questão principal de Douek e Scali (2000) foi de analisar as funções possíveis da argumentação na conceitualização. Para atingir a construção conceitual, os autores afirmam ser necessária uma atividade que possa ser considerada uma *experiência de referência*. Tal atividade está condicionada a uma situação de argumentação, na qual os alunos precisem explicar, justificar ou contrastar uma argumentação a respeito daquele conceito, seja em nível básico ou avançado. De acordo com os autores, para se construir um dado conceito a partir de experiência de referência, essa experiência deve estar conectada de forma funcional às representações simbólicas desse de maneira consciente. Por conseguinte, a argumentação pode ser a maneira pela qual esta ligação é estabelecida.

Para os autores, a argumentação possibilita revelar os invariantes operatórios implícitos e pode assegurar o seu uso consciente. Esta função da argumentação depende muito da mediação do professor, e, é cumprida quando solicitamos aos estudantes que descrevam os procedimentos que lhe levaram à solução de uma determinada tarefa e as condições apropriadas para o seu uso.

A fim de por em prática sua proposta, Douek e Scali (2000) propuseram uma experiência subdividida em três atividades: Inicialmente, os estudantes

[4] Segundo Vergnaud (1996), os invariantes operatórios são representados por: proposições, função proposicional e inferências, que podem ser explicitadas por argumentos ou por uma cadeia de argumentações.

tiveram que medir pés de trigo em um campo, para, em seguida, acompanhar o crescimento das plantas em diferentes épocas, em um vaso dentro de sala de aula, utilizando suas réguas para medirem a altura da planta. A dificuldade era que as réguas geralmente não têm a marca zero na extremidade, e não era permitido ao aluno empurrar a régua na terra.

A primeira atividade consistiu em uma discussão direta com o professor para tentar encontrar como medir as plantas no vaso. A finalidade desta discussão era evidenciar as soluções dos alunos sob a forma de conjecturas.

As discussões entre professor e alunos giraram em torno de como ir além da descoberta que a medida lida na régua não é a altura da planta. Com a interação com o professor, a maioria de estudantes superou as dificuldades, com estratégias diferentes.

A segunda atividade consistiu em uma produção escrita individual. Esta tarefa teve como objetivo socializar as soluções produzidas na sala de aula. A terceira atividade constitui-se em uma discussão na sala de aula, a fim de validar ou refutar as soluções. Duas estratégias foram evidenciadas: primeiramente a solução de "translação", deslocamento dos números ao longo da reta; em seguida, a solução por "aditividade", medindo a parte não graduada e adicionando esta medida à indicação da régua.

Nessa discussão, emergiram fatos, como o de que o procedimento de translação era fácil de executar somente no caso de um comprimento de 1 cm, ou eventualmente 2 cm, e o da aditividade consistia em um método fácil de se usar em todos os casos.

Conforme os autores, os dados evidenciaram algumas potencialidades da argumentação, a saber: a atividade de argumentação com o professor possibilitou a transformação da experiência em uma possível "experiência de referência", para os invariantes operatórios envolvidos do conceito de medida. Os argumentos do professor obrigaram os estudantes a imaginarem as ações físicas que possibilitaram operações envolvendo invariantes operatórios do mesmo conceito. Durante a discussão na sala de aula, a argumentação cumpriu diferentes funções: serviu para tornar explícitos dois diferentes invariantes operacionais relativos à medida de comprimento - invariância por translação e aditividade. No decorrer da última atividade, segundo os autores, a argumentação pessoal explanada realçou a internalização dos conceitos em jogo.

Ao término de seu experimento, os autores destacaram que para se cumprir algumas funções importantes da argumentação na conceitualização, é necessário que o professor: formule tarefas apropriadas, para centrar-se sobre os pontos cruciais da conceitualização; utilize argumentos apropriados nas primeiras interações com os alunos, a fim de centrar-se sobre o problema e transformar a situação-problema em uma experiência de referência; escolha produções apropriadas dos estudantes para serem comparadas e discutidas na sala de aula e gerencie as discussões, a fim de revelar aspectos importantes dos conceitos, tornando-os explícitos.

Segundo Boero, Douek e Ferrari (2008), as pesquisas que abordam temáticas como: argumentação, prova e demonstração em matemática exigem dos professores grande atenção, tanto em relação à apropriação, pelos estudantes, do conceito em jogo, como no desenvolvimento de competências linguísticas para produção, comparação, discussão de conjecturas, de provas, e soluções de problemas matemáticos.

Para abordar determinado conceito, os autores defendem, assim como Douek e Scali (2000), a construção de uma experiência de referência, caracterizada por suscitar argumentos para explicar, justificar, ou contrastar a respeito de um dado conceito.

Como já destacamos, para se construir uma situação de referência de um dado conceito, temos que organizar experiências que possam ser relacionadas às representações simbólicas desse conceito de forma consciente, como, por exemplo, atividades que possibilitem a apreensão de conceitos geométricos, como área e perímetro, e potencialize o uso intencional de argumentações. Assim, no planejamento de uma experiência de referência, devemos necessariamente estabelecer uma relação funcional entre a situação e as representações simbólicas do conceito em questão.

Boero, Douek e Ferrari (2008, p. 269), relataram uma investigação realizada com calouros do curso de ciência da computação da Universidade de Piemonte Oriental. Durante a intervenção, foi solicitado aos alunos que explicassem suas respostas sobre resoluções de problemas aritméticos simples da Escola Básica; não houve menção a produção de texto escrito, mas quase todos escreveram embaixo da questão um argumento em palavras. Na referida pesquisa, os autores identificam três níveis de argumentação:

Nível O (LO): nenhum comentário verbal, palavras desconexas, sentenças mal organizadas;

Nível 1 (LI): sentenças bem-organizadas, semanticamente adequadas, sentenças simples; poucas sentenças compostas e nenhumas sentenças condicionada; e

Nível 2 (L2): sentenças muito bem-organizadas, sentenças compostas semanticamente adequadas, incluindo sentenças condicionais.

Segundos os autores, os resultados sugerem uma implicação educacional – há necessidade de se desenvolver o domínio da linguagem natural em atividades matemáticas. Sugerem, por um lado, a necessidade de considerar a especificidade da linguagem matemática verbal, incluindo representações, expressões e símbolos matemáticos; e, por outro, a sua atuação como mediadora entre a flexibilidade da linguagem ordinária e das necessidades específicas de atividades matemáticas.

Nesse sentido, Lampert (1990) destaca que os diálogos entre alunos e professores, oriundos do processo argumentativo, devem ser funcionais, não só para comunicação, mas para o raciocínio. O professor, enquanto representante da cultura matemática fora de sala de aula, é o responsável por proporcionar aos discentes as ferramentas matemáticas convencionais para sua compreensão, o que inclui linguagem e símbolos, cabendo a ele negociar os significados desses elementos dentro da linguagem natural familiar aos discentes.

O uso intencional ou consciente das representações de um dado conceito pode ser evidenciado nas argumentações dos alunos. Nesse sentido, os argumentos permitem que os discentes tornem explícitos conhecimentos que em geral guardam para si no desenvolvimento de estratégias na solução de problemas. Esse fato pode assegurar o uso consciente destas representações. Isso depende, como já destacamos, da mediação do professor, que deve solicitar aos estudantes que descrevam e discutam os procedimentos utilizados na atividade. As revelações dos conhecimentos e estratégias que os discentes utilizam para tratar de uma dada problemática, que lhe seja posta, podem ser relacionadas às representações simbólicas apropriadas, assim revelando aspectos importantes da construção do saber em questão (BOERO; DOUEK; FERRARI, 2008).

A experiência de referência pode possibilitar o entrelaçamento entre as linguagens natural e matemática, pois o aluno deve apoiar-se na primeira para comunicar suas ideias sobre a atividade. Ao mesmo tempo, seus conhecimentos prévios e a mediação do professor lhes possibilitarão fazer uso e envolver em suas argumentações: representações, expressões e simbologias, que envolvem um determinado assunto em pauta.

Em nossa proposta, utilizamos a experiência de referencia de forma pontual, ou seja, em uma das fases que constitui o processo argumentativo, assim, acreditamos que tal experiência se apresente com a função de motivar e envolver os discentes na prática da argumentação, ou seja, será tomada como estratégia para o estabelecimento de um contrato didático que favoreça a comunicação de ideias em sala de aula. Por outro lado, a referida experiência pode ser eventualmente retomada, sempre que a partir dela se possam constituir atividades que vislumbrem novos aspectos do conceito em jogo.

1.2 Classificação das Argumentações e o Processo de Validação: compondo critérios para análise da segunda e terceira fase do processo argumentativo

Em geral, as pesquisas que investigam o processo argumentativo em salas de aulas de matemática associam tal processo à atividade de prova e demonstração. Apesar de o nosso foco ser a argumentação, vez ou outra, esses temas se farão presentes sem destoar da fluidez textual desta pesquisa, pois há aspectos que permeiam as três temáticas.

Um dos pontos importantes nos estudos sobre argumentação, provas e demonstração são as classificações que os pesquisadores propõem geralmente como critérios de análise para as asserções dos alunos. Não menos importante é o processo de validação dessas asserções. Doravante, esses pontos terão destaques. Referimo-nos à argumentação, provas e demonstração, pois, como já ressaltamos anteriormente, grande parte das pesquisas nas quais buscamos respaldar nossa proposta envolvem estas temáticas, procurando relacioná-las de alguma forma.

Balacheff (1987, 1988) foi um dos precursores em colocar em relevo a interação social referente à prova em sala de aula, tomando a argumentação como constitutiva de processos de validação. Seus tipos de prova são referências para grande parte dos trabalhos relacionados à temática em questão, inclusive para auxiliar na classificação de argumentos em matemática.

De acordo com o autor, há situações que requerem a aplicação de argumentações solidamente fundamentadas teoricamente. Por outro lado, há situações que toleram ausência de trabalho de validação, como aquelas de aprendizagem de regras de um jogo; funcionamento de materiais manipulativos, como as peças de um tangran; a escolha de uma unidade de medida para pavimentar uma dada região, etc. Nestes casos, tem-se, segundo o autor, uma situação de decisão, pois, esta tolera a ausência de processos de validação.

Em situações de familiarização com os polígonos, os alunos são convidados a antecipar, predizer, ou seja, conjecturar se uma dada figura é um quadrado ou retângulo, apenas pelo formato da figura em questão. Assim, encontrar-se-ão diante de uma situação de decisão, mas, ao mobilizarem meios de decisão, mobilizam também meios de validação, sem, no entanto, a necessidade da explicitação de uma prova.

Nesse sentido, afirma Balacheff (1987), mesmo quando o aluno se encontra diante de uma situação de decisão pode, por razões intrínsecas ou extrínsecas, procurar justificativas para suas estratégias. Assim, uma situação de decisão pode converte-se em uma de validação. Neste caso, o aluno buscará uma justificativa que pode assumir *status* de prova para suas asserções. Os ambientes que possibilitam tal processo, regidos pelo contrato didático, fazem surgir regras de ação que são fontes reguladoras de processos argumentativos.

A convergência de uma situação de decisão para uma de validação pode se dar a partir de uma circunstância em que solicitamos aos alunos que investiguem se duas figuras apresentam a mesma área. Inicialmente, o aluno se vê diante de uma decisão a tomar. No momento em que precisa mobilizar meios de validação, para convencer seus pares de sua assertiva, dar-se-á a convergência, mesmo que não haja necessidade de uma prova.

Um dos aspectos que devemos ressaltar em relação aos tipos de prova de Balacheff diz respeito à palavra demonstração que é utilizada em distintos contextos, com diversos sentidos, mas, em todos eles, podemos reconhecer uma ideia comum – a de justificar e validar uma afirmação, ocasionada por raciocínios ou argumentos. As diferentes situações e práticas argumentativas em que o processo de demonstração está inserido é que determinam os diferentes sentidos para esse termo.

Balacheff (1987) utiliza o termo explicação como ideia primitiva das provas e demonstrações. As explicações adquirem *estatus* de prova quando são aceitas por uma comunidade em um determinado momento.

Esse autor chama de *explicação* o discurso que visa a tornar compreensivo o caráter de verdade de uma proposição ou de um resultado que foi apreendido por um locutor. As razões utilizadas podem ser discutidas, refutadas ou aceitas.

Para o autor, *prova* é o termo utilizado para uma explicação aceita em uma dada comunidade, em um dado momento. Esta explicação pode ser objeto de debate, cujo significado e exigência podem determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. Em nosso ponto de vista, tal concepção favorece a emergência de um processo validativo no âmbito da argumentação, visto que se revelará o caráter transitório do argumento até o momento que esse esteja de acordo com as exigências dos conceitos matemáticos em jogo. Assemelhando-se, assim, a prática da argumentação ao processo de prova proposto por Balacheff.

Balacheff (1987) caracteriza as provas em *pragmáticas e conceituais*. As provas pragmáticas são efetuadas pelo próprio aluno para estabelecer a validade de suas proposições. Envolvem a tomada de decisões, recorrem à ação efetiva ou a ostensividade[5] de um objeto. As provas conceituais não envolvem ação, são direcionadas às propriedades e relações dos objetos. O autor identifica entre as provas pragmáticas e conceituais os seguintes níveis: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental.

O empirismo ingênuo é o primeiro tipo de prova encontrado. Neste nível, o aluno assume como verdadeira a conjectura de um enunciado, a partir da observação de um pequeno número de casos.

Já no nível de experimento crucial, o aluno tenta validar sua conjectura, apoiando-se e um caso específico. Admite, assim, que, se certa proposição foi eficaz em um determinado caso, será eficaz, também, em outros não familiares a ele. Distingue-se do nível anterior, pois aqui se evidencia a questão da generalização.

No caso do exemplo genérico, o discente busca validar sua conjectura, apoiando-se em operações ou transformações realizadas sobre um dado objeto que representará, para ele, uma classe de objetos.

Na experiência mental, invoca-se uma ação no interior de um caso específico, mas afastando-se de sua realização. As operações e as relações das quais a prova se fundamenta são designadas pelo resultado da sua aplicação. O autor afirma que, em alguma parte, entre o exemplo genérico e a experiência crucial se dá a passagem das provas pragmáticas às intelectuais.

O autor admite como demonstração as provas aceitas pela comunidade matemática organizadas em uma sequência de enunciados de acordo com regras pré-determinadas: "um enunciado é aceito como verdadeiro, quando é deduzido de verdades que o precedem sendo auxiliado por uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definidas" (BALACHEFF, 1987, p. 148, tradução nossa).

---

[5] Relativo a *ostensivos* "[...] todo objeto que, tendo uma natureza sensível e certa materialidade, tem, para o sujeito, uma realidade perceptível. Pode-se dizer, dessa forma, que os ostensívos são os objetos manipuláveis na realização da atividade matemática". (ALMOULOUD, 2007a, p. 119).

No nível em que trabalhamos, as provas pragmáticas servem de inspiração para se falar em argumentações pragmáticas, como bem veremos em Cabassut (2005). Aliás, as argumentações pragmáticas, fora do campo do ensino da matemática, são temas de debates da teoria da argumentação, desde a década de 1950, com Perelman e Olbrechts-Tyteca, que caracterizam argumento pragmático como "aquele que permite apreciar um ato ou acontecimento consoante suas consequências favoráveis ou desfavoráveis" (PERELMAN; OLBRECHTS-TYTECA, 2005, p. 303). Dito de outra forma, é aquele que atribui o valor de uma tese aos resultados causados por sua adoção.

Em relação ao potencial da argumentação, como proposta de apreensão conceitual e sua aceitação como raciocínio, Godino e Recio (2001, p. 406, tradução nossa), afirmam que

> Do nosso ponto de vista, esta atividade intelectual, que não pode simplesmente ser reduzida à manipulação de informações, dá origem às práticas argumentativas, pessoais ou institucionais, que constituem a sua dimensão ostensiva e comunicacional. Ao mesmo tempo, o raciocínio é desenvolvido através destas práticas, de modo que o estudo do raciocínio está constitutivamente ligado ao estudo da argumentação.

Concordamos com Godino e Recio (2001), ao afirmarem que as demonstrações de modo genérico emergem de práticas argumentativas aceitas por uma comunidade ou por uma pessoa diante de situações de validação e decisão, ou seja, de situações que requerem justificar ou validar o caráter de verdade de um enunciado, assim nossos alunos devem ser inseridos no processo argumentativo desde muito cedo.

Tomado como referência o que se tem apresentado nesta proposta, fica evidente que a argumentação pode ser um objeto de estudo como uma perspectiva metodológica. Nesse sentido, acreditamos que a argumentação possa ser um fio condutor que põe em prática uma pequena sociedade matemática em sala de aula. Agindo assim, o aluno pode se inserir em uma cultura estabelecida para desenvolver competências em matemática.

Além disso, a ação dos alunos sobre as atividades propostas provocam: tomada de decisão, justificativas de asserções, debates na tentativa de defender ou refutar proposições. Dessa forma, faz-se emergir respectivos processos argumentativos e validativos. Consequentemente, a prática da argumentação pode favorecer a compreensão dos conceitos em jogo.

A partir de suas pesquisas, Cabassut (2005) elencou três tipos de argumentação em matemática: pragmática, semântica e formal.

A argumentação pragmática utiliza ações bem sucedidas como regra de validação, como, por exemplo, a ação de reconfiguração de superfícies por deslocamento, movimentação de uma figura na tela do computador, etc. A ação pode ser efetivamente realizada ou pensada. O autor compreende que recorrer a ações não significa apelar para regras formais.

Por sua vez, as argumentações semânticas são aquelas que recorrem a regras de validação que não são formuladas de maneira formal, mas se apóiam sobre os conteúdos dos objetos matemáticos em jogo. Esse tipo de argumento utiliza regras que não são completamente explicitadas ou formalizadas, como, por exemplo, calcular a área de um retângulo por meio do produto das duas dimensões com a justificativa de ser mais rápido que a contagem uma a uma das unidades de medida de área eleitas.

A argumentação formal ou sintática é aquela cuja estrutura é claramente explicitada com funções bem definidas de dados, regras de validação e conclusão, sendo que a aplicação das regras de validação apoia-se nas formas dos termos das regras e dos dados, e não necessita de interpretações baseadas sobre a significação ou conteúdo dos termos ou dos dados.

Como nossa proposta se direciona às séries iniciais, este último tipo de argumentação não foi focado, pois está relacionado diretamente ao processo de demonstração.

A classificação dos argumentos, imbricada com as funções da validação, serviram para analisar a qualidade das comunicações de ideias na sala de aula de matemática. A análise do processo argumentativo perpassa por essas classificações que auxiliam na análise da força que o argumento exerce na prática da argumentação e indica os caminhos tomados na aquisição da competência argumentativa.

Para responder à questão: por que validar? Cabassut (2005) se apoia em dois pontos de vista sobre as funções da demonstração. Por um lado, considerando as instituições matemáticas, inspira-se em De Villiers (1990), e por outro lado, visando às ações didáticas, considera a perspectiva de Hanna (2000). Assim, propõe as funções da validação de argumentos em matemática:

- Função de verificação.

A principal característica desta função é de validar a necessidade ou plausibilidade da verdade de uma proposição. Em princípio, toda validação recorre a esta função, caso contrário, poderíamos admitir validações incorretas ou outros tipos de raciocínios que não requeiram validações. Nesse sentido, a verificação tem função de controle da verdade, mesmo quando se limita a aumentar a plausibilidade de uma asserção, como, por exemplo, proceder à verificação da conservação de áreas por meio do recorte e cole. Aqui, tem-se uma confirmação da verdade, mas não uma explicação dela, como veremos a seguir.

- Função de explicação

Para Cabassut (2005), nem sempre é claro o caráter explicativo de uma validação. O autor considera, por exemplo, que um método que permita encontrar uma determinada fórmula "explica" as relações entre as ações e o uso da fórmula, como, por exemplo, a passagem do método aditivo (contar quadrados) para o multiplicativo (uso da fórmula), para calcular a medida de área de um retângulo. Assim, a questão explicativa torna-se heurística e apresenta uma dimensão subjetiva, pois, segundo o autor, as argumentações pragmáticas e intuitivas são preferidas pelos alunos para explicarem suas asserções, em decorrência do apelo à intuição e à facilidade de compreensão.

De acordo com o autor, essa função está a serviço da compreensão e não do rigor e a justificação de uma definição, teorema ou propriedade mais geral, é desenvolvida e compreendida a partir de casos específicos, estudados de maneira coletiva pela classe, como é o caso da obtenção da medida de área de uma figura por meio da estratégia de multiplicação dos lados – como se faz com o retângulo, ampliando a ideia para o quadrado e adequando a estratégia para determinação de outras medidas de áreas como do losango e do triângulo.

- Função de sistematização

Na concepção de De Villiers (1990), esta função corresponde à organização dos resultados em um sistema dedutivo. Segundo Cabassut (2005), podemos aproximar a ideia do autor da concepção de Hanna (2000), ao destacar que esta função apresenta a característica de relacionar um fato conhecido a um quadro novo e, por conseguinte, atribuir-lhe uma nova perspectiva.

Para Cabassut (2005), no ensino, pode-se encontrar esta função de duas formas:

- ✓ Em um nível global – apresentação metódica em um domínio da matemática. Neste nível, privilegia-se a organização rigorosa do conhecimento.
- ✓ Em um nível local – em que se admite uma justificativa visual a partir de um número limitado de resultados e definições, pelo qual se pode efetuar uma organização local.

O autor afirma que, no ensino, esta função é cultural no sentido de que se apreende uma forma de organização dos conhecimentos muito específica dos matemáticos. Para analisar esta função, é necessário estudar a forma com que se integra a proposição validada na organização em dois casos, local ou global. Podemos evidenciar os primeiros ensaios do primeiro caso desde as séries inicias.

Tal organização fundamenta-se sobre conceitos, definições, teoremas, etc., permitindo rever os saberes e conhecimentos. Desta forma, pode-se ter acesso à sistematização dos saberes estabelecidos e a aplicação destes atribui-lhes valor e pertinência (CABASSUT, 2005). Por exemplo, as várias possibilidades de pavimentação de uma região podem levar o aluno a afirmar que podemos utilizar como unidade de medida de área o quadrado, o retângulo, o triângulo, etc.

- Função de descoberta ou invenção

Concerne a descoberta de uma conclusão e da validação da técnica que conduz a essa conclusão. Para Cabassut (2005), esta função não pode ser exigida dos alunos, mas pode ser abordada de forma propedêutica. Como, por exemplo, pode-se imaginar esta função, na ocasião de uma demonstração, ao constatar-se que o método utilizado permite demonstrar um resultado mais geral, ou, no caso de problemas abertos, sobre os quais a aplicação de uma demonstração permite a descoberta da solução.

A exploração desta função, no nível de nossa pesquisa, pode ser identificada nas ações que levam os alunos a descobrirem relações novas que interliguem conceitos expandindo a funcionalidade destes.

Nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), evidencia-se que os alunos apresentam dificuldades para identificar uma mesma figura quando essa sofre modificação de posição por rotação. Assim, uma atividade que proponha a movimentação de um quadrado, construído a partir de suas propriedades, na tela do computador pode garantir que a natureza de uma dada figura não é alterada mesmo após rotação e translação. Essa descoberta pode levar o aluno a argumentar que, de forma geral, qualquer outra figura apresenta a mesma característica.

- Função de comunicação

No ensino de matemática esta função se caracteriza pela organização de diferentes registros, seja oral – no sentido de um debate científico, seja escrito – texto, desenhos ou leitura de textos –, não descartando a simultaneidade desses registros e nem o gestual como suporte a uma argumentação (CABASSUT, 2005).

Esta função discursiva ou comunicativa corresponde ao fato que uma argumentação ou uma prova deve ser explicada a outros. Nota-se que esta função articula-se com as outras funções em decorrência da necessidade de se recorrer a elas para se comunicar os registros, ação, desenhos, etc.

Essas funções regidas pela última exercem, de certa forma, um controle sobre a validação da comunicação, assim como da disseminação do conhecimento matemático. A argumentação, inserida nesse processo de interação, também envolve uma negociação subjetiva não apenas dos significados dos conceitos em jogo, mas também implicitamente dos critérios relativos ao que seja um argumento aceitável. Por conseguinte, as validações das conjecturas inseridas no processo de comunicação de ideias revelam a força dessas e pode lhes dar sustentação ou encaminhá-las a uma refutação, no caso de sua rejeição, por contraexemplos.

As funções de validação ocorrem, em geral, de forma simultânea, mas é possível evidenciar a prevalência de uma ou duas delas no processo argumentativo. Partindo desse pressuposto em nossas análises, caracterizamos essas funções a partir dessa preponderância.

Segundo Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005), os argumentos isolados, que enfocam um determinado estudo, interagem e se articulam para obter uma conclusão coerente e consistente no interior do contexto que estejam sendo aplicados. Dessa forma, as condições em que se desenvolvem as argumentações determinam, em grande parte, o tipo e a função de validação dos argumentos utilizados para garantir a força necessária para que se possa validar uma determinada conjectura.

Em matemática, duas componentes estão entrelaçadas para garantir a validade de um argumento: a eficácia e a validade, que estão condicionadas às normas estabelecidas por essa área. Nesse caso, a força de um argumento se deve a resistências às objeções que emergem como contraexemplos. A prática da argumentação, como necessária à aquisição da competência argumentativa, perpassa por possibilitar ao aluno o acesso a especificidades do conhecimento matemático. Assim, pode comunicar suas ideias com a força necessária para validar suas asserções.

> Qualquer iniciação a um domínio racionalmente sistematizado não só fornece o conhecimento dos fatos e das verdades do ramo em questão, de sua terminologia própria, da maneira de se usar os instrumentos de que dispõe, mas educa também na apreciação da força dos argumentos empregados nessa matéria. (PERELMAN; OLBRECHTS-TYTECA, 2005, p. 528).

Deste modo, a força dos argumentos depende do contexto no qual está inserido. Na matemática, por exemplo, fica restrita aos hábitos, leis, métodos e técnicas dessa disciplina, mesmo apresentando-se, na grande maioria das vezes, de forma implícita, deve ser levada em conta nas interações sobre os assuntos específicos tratados em sala.

Para Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005), as interações que asseguram a força de um argumento estão sujeitos ao processo de *convergência*. Esse processo ocorre quando os vários argumentos distintos forem direcionados a uma mesma conclusão, “seja ela geral ou parcial, definitiva ou provisória, o valor conferido à conclusão e a cada argumento será com isso acrescido” (PERELMAN; OLBRECHTS-TYTECA, 2005, p. 535).

Como as comunicações de ideias dos discentes são compostas por argumentações não matemáticas e matemáticas, cabe ao professor gerenciar esta convergência, garantido que os argumentos sofram esse processo no decorrer da coleta de evidencias, propiciadas por atividades organizadas com esse fim.

No caso de argumentos situados em lados opostos, a convergência será favorecida por meio da mediação do professor, que deve conduzir o processo para uma reflexão sobre os pontos de vistas conflitantes, de tal forma que a argumentação que se apresente em desacordo com as exigências da área perca força e convirja para aquela em conformidade com os critérios matemáticos.

Para Pedemonte (2002), as teorias linguísticas contemporâneas, como as de Anscombre e Ducrot (1983); Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005); Plantin (1990) e Toulmin (1958), inspiram as pesquisas que buscam relacionar argumentação, prova e demonstração em matemática, focalizando características funcionais e estruturais da argumentação. No primeiro caso, as características estabelecem a finalidade da argumentação, sua utilidade, seu papel dentro de um discurso, etc. As características estruturais fornecem um modelo estrutural para a argumentação. Nos dois casos, as caracterizações mostram que tanto a prova quanto a demonstração matemática podem ser consideradas como casos particulares da argumentação.

Em suas pesquisas, Pedemonte (2002, 2005, 2007) tenta dar uma resposta às questões: A análise da continuidade ou da distância estrutural entre a argumentação e a prova faz sentido? E como pode esta continuidade pode ser analisada, usando o modelo de Toulmin?

Segundo a autora, as pesquisas apontam diferentes relações entre o raciocínio argumentativo e o raciocínio dedutivo tais como: os pontos de vista sociais e epistemológicos, como o de Balacheff (1988), que sugere a heterogeneidade entre argumentação e prova em matemática, e Duval (1995), que aponta a distância lógica e cognitiva entre o raciocínio argumentativo e raciocínio dedutivo; outras perspectivas não fazem distinção entre argumentações e provas, como Harel e Sowder (1998), que usam a palavra prova para caracterizar não somente provas dedutivas, mas igualmente provas empirias; algumas abordagens epistemológicas e didáticas destacam a continuidade que existe entre a argumentação, como um processo de produção e declaração, e a construção de sua prova. Nesse caso, o que está no jogo é o relacionamento entre a conjectura e a procura de sua validação (DOUEK, 1998; LAKATOS, 1978; THURSTON, 1994).

Pedemonte (2002) apresenta em suas pesquisas análises de alguns aspectos estruturais que relacionam a argumentação e a prova em geometria, Ela considera as argumentações com estruturas abdutivas e indutivas. Analisa as continuidades e distanciamentos estruturais entre argumentações e provas indutivas e dedutivas em matemática, com objetivo de mostrar que, de um ponto de vista cognitivo, ao lado dos casos da continuidade entre a argumentação e a prova, há frequentemente uma distância estrutural entre os dois.

Segundo a autora,

> A abdução foi introduzida por Peirce [...] como modelo de inferência utilizada no processo de descoberta. Ela é ampliativa porque sua conclusão introduz novos conhecimentos. A busca da solução de um dado problema se constrói frequentemente a partir da conclusão (PEDEMONTE, 2002, p. 67).

Para Pedemonte (2002), a argumentação abdutiva consiste em obter as melhores explicações, ou as mais plausíveis, a partir de um conjunto de fatos ou informações dadas. O objetivo desse tipo de argumento é utilizar informações incompletas, imprecisas, incertas para explicar fatos observados. Em matemática, pode-se utilizar regras que não estejam sob completo domínio dos alunos, mas que lhes parecem mais apropriadas para construírem uma conclusão.

De acordo com a autora, a argumentação indutiva também é ampliativa, e, da mesma forma que a abdutiva, conduz a novos conhecimentos, mas parte de observações de casos particulares que são generalizados a um conjunto mais amplo de casos. O objetivo é concluir uma regra a partir de certos fatos ou dados particulares. A tentativa de aplicação de fatos observados em novos casos põe em destaque, além da generalização, a analogia.

Em decorrência dos processos de generalização e analogia, a autora distingue três tipos de argumentação indutiva: argumentação indutiva por generalização, por passagem ao limite e por recorrência.

No primeiro tipo, recorre-se a casos particulares até se chegar a uma lei geral: isso permite abstrair propriedades a partir da análise de vários casos diferentes.

O segundo tipo pode ser considerado um caso particular do primeiro que consiste em averiguar que uma propriedade é verdadeira para uma determinada situação e ser levado a pensar que pode ser verdadeira em outra situação que se assemelhe de alguma forma a primeira. Essa característica assemelha esse tipo de argumento à experiência crucial de Balacheff (1987).

A argumentação por recorrência se baseia na generalização sobre n. Caso se tenha uma propriedade verdadeira para um caso P (1), e se descubra uma relação de recorrência entre dois casos sucessivos, que relacione P (n) e P (n+1). A conclusão do raciocínio e que a regra P (n) $\Rightarrow$ P (n+1) é verdadeira

Apesar de as pesquisas de Pedemonte (2002, 2005 e 2007) estarem direcionadas à relação entre argumentação e demonstração, elas revelam pontos importantes sobre os tipos de argumentos e as formas de analisá-los.

Em relação às análises, a autora postula que não basta esclarecer os tipos da continuidade a ser comparada, mas é igualmente útil encontrar uma ferramenta para analisar o relacionamento cognitivo entre a argumentação e a demonstração. Em suas pesquisas, a autora propõe como ferramenta metodológica o modelo de Toulmin para analisar as relações entre a argumentação e sua respectiva prova, comparando o conteúdo da argumentação conectada a uma conjectura e o conteúdo de sua prova.

A autora conclui afirmando que o modelo de Toulmin, que detalharemos mais à frente, é uma ferramenta importante para analisar a argumentação e a prova dos estudantes e que a análise de alguns protocolos de sua pesquisa evidencia a existência de continuidades e rupturas entre a argumentação e a prova matemática.

Estas pesquisas nos dão suporte para propor e analisar as fases que compõem o processo argumentativo e evidenciar que a prática da argumentação pode favorecer a compreensão de conceitos em matemática. As fases contemplam a experiência de referência, os tipos de argumentos e suas respectivas funções no processo argumentativo, assim como o julgamento da força pertinente a cada argumento, e a convergência argumentativa, necessária à obtenção de uma solução específica.

1.3 Pesquisas em Educação Matemática que utilizaram o modelo de Toulmin

Para analisar se um argumento é válido ou não, Toulmin (2006) postula que devemos representá-lo em uma estrutura ou *modelo.* Neste, organizamos os elementos principais na forma de dados (D) – fatos aos quais recorremos para fundamentar nossa conclusão; conclusão (C) – afirmações que buscamos estabelecer como válidas; garantias (W[6]) – justificam a passagem dos dados a conclusão, atribuindo força ao argumento. Essa força aparece algumas vezes expressa por meio de qualificadores modais (Q) – que, por sua vez, podem se apresentar na forma de possibilidades ou impossibilidades. Nesse segundo caso, haverá a necessidade de se estabelecer quais as situações em que as garantias não se aplicam, ou seja, as condições de refutação (R); podemos ainda fazer uso

[6] W – do inglês warrante.

explícito ou implícito de apoios (B[7]) na forma de afirmações categóricas que podem fundamentar nossas garantias. Vale ressaltar que os argumentos podem se apresentar na forma completa ou reduzida, sendo composto nesse último caso pelos dados, justificativas e conclusão.

O modelo de Toulmin, anunciado anteriormente vem sendo usado em diversas áreas do conhecimento. Em particular, discorreremos sobre pesquisas voltadas para análises de argumentos em salas de aulas de matemática. O modelo foi utilizado inicialmente por Krummheuer (1995), e, nas análises do autor, observa-se a ausência de qualificadores e refutações. Esse esquema reduzido representa o processo de argumentação dos episódios ocorridos na pesquisa do autor.

Segundo Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007), grande parte das pesquisas subsequentes em Educação Matemática seguiu Krummheuer (1995), usando o esquema reduzido. Como podemos constatar em: Yackel (2001); Hoyles e Küchemann (2002); Pedemonte (2002); Knipping (2003); Evens e Houssart (2004) e Weber e Alcock (2005). Outros, poucos pesquisadores, como Alcolea Banegas (1998); Aberdein (2005, 2006); e Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007), fizeram uso do esquema em sua totalidade, incluindo assim os qualificadores modais e as refutações. Consideramos pertinente a modelação dos argumentos na forma reduzida, mas o modelo integral nos parece contemplar de forma bem ampla o que pode ocorrer em sala de aula, pois percebemos na trama argumentativa da aula afirmações de certezas, incertezas e, por vezes, refutações de conjecturas dos aprendizes.

Krummheuer (1995) investigou a prática da argumentação coletiva em sala de aula de matemática, analisando seus dados com base nas interações argumentativas e no modelo de análise de argumento proposto por Toulmin.

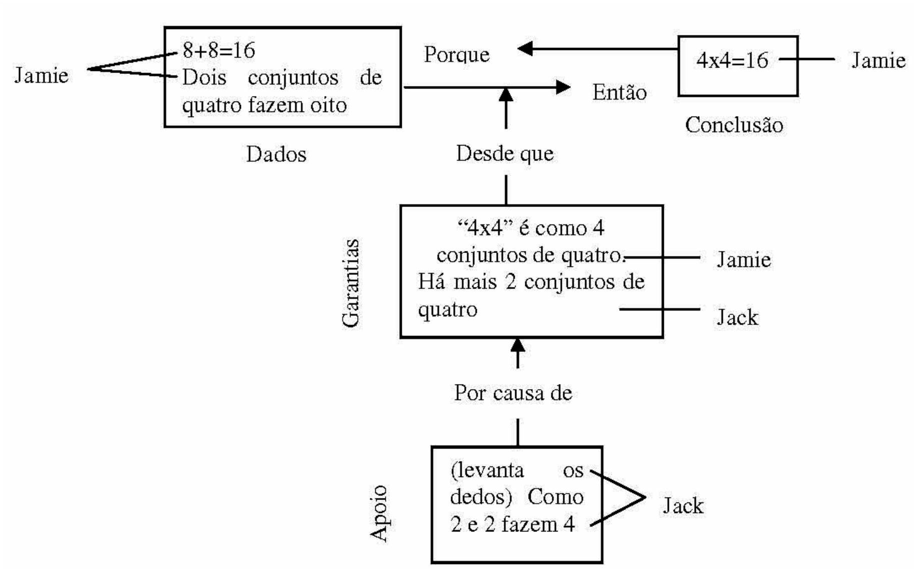
A investigação do autor contribui para evidenciar as potencialidades deste modelo para analisar a natureza e a qualidade das comunicações de ideias em sala de aula de matemática. Apresentaremos a seguir a análise, via modelo de Toulmin, de uma atividade proposta pelo autor para alunos das séries iniciais, que

---

[7] B – do inglês banking.

ainda não apresentavam domínio da operação multiplicação. A questão consistia em determinar o produto 4x4 (Figura 1).

Figura 1 – Argumentação dos alunos sobre a operação de multiplicação



Fonte: Krummheuer (1995, p. 246, tradução nossa)

O autor classificou a argumentação coletiva de Jack e Jamie como substancial[8], em decorrência do fundamento representar uma analogia.

Os alunos usaram como dados a soma de oito com oito e o fato de dois conjuntos de quatro formarem oito, para justificarem a passagem desses dados à conclusão, que deu dezesseis. Os dois discentes utilizaram como garantia a afirmação que o agrupamento de dois conjuntos de dois forma quatro e o agrupamento de quatro conjuntos de quatro formaria então dezesseis. O gesto feito pelo aluno compôs o processo argumentativo e fez parte da fundamentação da garantia, expressa pelo apoio que dois mais dois seriam quatro.

As intervenções do pesquisador auxiliaram na composição, tanto dos dados quanto das garantias, e, consequentemente, favoreceram a compreensão da operação 4x4=16.

[8] Toulmin (2006) faz uma diferença entre argumentos analíticos e substanciais. Segundo o autor, chama-se analítico um argumento que vai dos dados à conclusão de forma que o apoio para a garantia inclua explícita ou implicitamente a informação transmitida na própria conclusão. Caso contrário, ou seja, no caso em que o apoio da garantia não contiver informações transmitidas na conclusão, o argumento será substancial.

Segundo Boavida (2005, p. 81), as intervenções do professor possibilitam a explicitação de garantias e apoios, pois

> “[...] nem sempre as explicações ou justificações apresentadas pelos alunos na aula de Matemática contêm todas as informações que permitem compreendê-las ou que são importantes para a sua compreensão”.

Caberia ao professor, em determinados momentos, avaliar

> [...] se os dados apresentados são suficientes para apoiar e/ou permitir compreender a conclusão, se há ou não consenso sobre os dados, quais as garantias que permitem aos alunos inferir a conclusão e se é, ou não, necessário solicitar o fundamento destas garantias de modo que as experiências de aprendizagem sejam produtivas para os vários elementos da turma e não apenas para alguns. (BOAVIDA, 2005, p. 81).

As discussões de Boavida (2005), a respeito da pesquisa de Krummheuer (1995), evidenciam as contribuições desse autor para análise de argumentos em sala de aula de matemática à luz das reflexões teórica de Toulmin. Além disso, o autor utilizou o modelo analisando argumentos oriundos da interação entre interlocutores. Assim, a estrutura contemplou não só a fala de um sujeito, mas de um conjunto deles como ocorre quando utilizamos o processo argumentativo para auxiliar na compreensão de conceitos em matemática.

Dando sequência em suas pesquisas, Krummheuer (2007) analisou sessões regulares de aulas gravadas em videocassetes realizadas pelos projetos de desenvolvimento curricular das décadas de 60 e 70 na Alemanha. A sessão analisada pelo autor trata da decomposição aditiva de números de dois dígitos na escala de 11 a 20. Para ele, tais projetos se inspiravam nas estratégias usadas por indústrias para desenvolver novos produtos. Muitos destes projetos falharam, daí seu interesse nessa análise, a fim de não repetir os erros e as falhas desses períodos.

O autor supõe que a aprendizagem em matemática depende da participação do estudante nos processos de argumentação coletiva. No nível empírico, o autor analisou os argumentos com a teoria de Toulmin da argumentação e a ideia de Goffman da decomposição do papel do orador, e se propôs a tratar somente de dois conceitos integrais: o da argumentação e o da participação.

Krummheuer (2007) supõe as situações diárias da sala de aula de matemática em termos de uma “arena interacional”, subordinando duas questões sob a noção da participação na prática do cálculo:

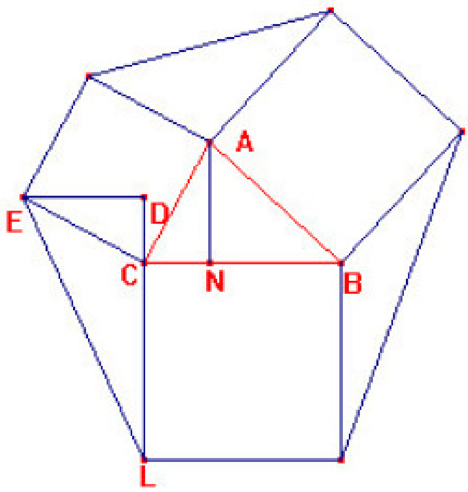
- ✓ Como a estrutura do argumento é construída no curso da interação?
- ✓ Como o professor e os estudantes são envolvidos em sua produção interativa?

Aborda, então, a primeira pergunta usando as ideias de Toulmin, para tratar especificamente da análise da argumentação. Na segunda questão, faz uso do ideal de Goffman a respeito da decomposição do papel do orador, ao qual chama de análise da participação.

No que diz respeito à compreensão de Toulmin de uma argumentação, a prática relacionada ao cálculo parece-lhe um tanto incompleta. Basicamente, os argumentos que emergiram nesta prática foram os “dados e as conclusões”. As garantias não foram explicitadas. Em relação ao papel do orador, a prática parece-lhe ser conduzida muito como uma rotina na qual os estudantes participavam da produção com *status* de expectadores, oradores, autores, ou os três. Ou seja, um contrato didático que possibilita a comunicação das ideias entre os alunos e o professor e entre os alunos pode fazer emergir outros componentes do modelo como as garantias, por meio das justificativas.

Por sua vez, Pedemonte (2002), propôs em sua pesquisa uma atividade que consistia em fornecer uma figura formada por um triângulo qualquer ABC, no qual se construiu três quadrados um em cada lado do referido triângulo, e mais três triângulos por meio da ligação entre os vértices livres dos quadrados. O problema versava sobre a comparação entre as áreas de cada um dos três triângulos com a área do triângulo ABC (Figura 2).

Figura 2 – Ilustração do problema sobre área do triângulo



Fonte: Pedemonte (2002, p. 184)

A autora decompôs a questão em dois momentos a fim de compará-los. No primeiro, analisou as argumentações produzidas pelos alunos ao lerem o comando da questão; em seguida, as demonstrações realizadas por esses. Como nos interessa as comunicações de ideias, exibiremos o momento de argumentação.

Nesta questão, os alunos propuseram três justificativas para assegurarem a igualdade entre as áreas: igualdade por transitividade, igualdade sucessiva e teorema da igualdade entre triângulos. Apresentaremos apenas o primeiro caso, pois acreditamos ser suficiente para entendermos como a autora utilizou o modelo na análise dos argumentos.

Após calcularem cada uma das medidas de áreas, os discentes afirmaram que as áreas eram iguais. Para justificarem esse fato, buscaram relacionar as bases e as alturas que tornam a área constante. A autora classificou a argumentação como abdutiva e a organizou, na estrutura proposta por Toulmin (1996), conforme a Figura 3.

Figura 3 – Organização da argumentação dos alunos na estrutura de Toulmin

D: bases iguais e alturas iguais → C: os triângulos têm a mesma área

W: igualdade por transitividade

Fonte: Pedemonte (2002, p. 185, tradução nossa)

No decorrer de suas análises, a autora trata a estrutura como ternária, atribuindo a garantia **W** às propriedades da matemática, mas Toulmin (1996) afirma que essas propriedades são anunciadas como justificativas de forma hipotética como verdade transitória, que, por vezes, precisam ser fundamentadas no apoio **B**, que representa as leis de um determinado campo, mesmo quando esse elemento não é explicitado pode ser indicado por servir como regulador do processo de validação.

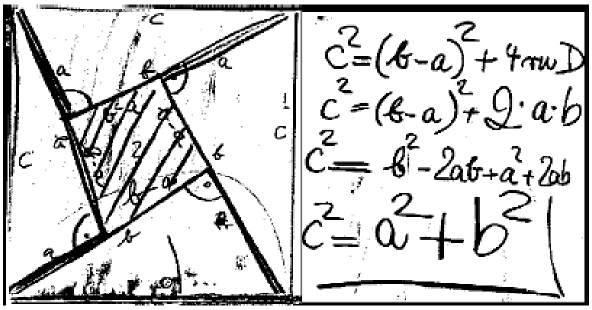
A autora constatou em sua pesquisa que o modelo de Toulmin é uma ferramenta que permite identificar aproximações entre argumentação e demonstração, no caso de estruturas similares, e o distanciamento no caso de estruturas diferentes.

Para Knipping (2008), o processo de prova nas salas de aula segue sua própria base racional peculiar. Reconstruir as estruturas das argumentações nestes processos revela elementos desta base racional. A autora utiliza o modelo de Toulmin da argumentação para reconstruir argumentos locais, e o estende para fornecer um modelo global da argumentação para reconstruir processos de prova na sala de aula.

Justificativas que autorizam a conclusão não estão incluídas na prova escrita.

Muitas coisas que se tornam implícitas nas passagens da hipótese para a conclusão, podem ser reveladas no modelo de Toulmin. Veja no trabalho de Knipping com o Teorema de Pitágoras, apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Ilustração da solução de um dos estudantes



D: $c^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab$ → C: $c^2 = a^2 + b^2$

W: A adição é comutativa e associativa. A soma de um termo ao seu inverso aditivo é zero

Fonte: Knipping (2008, p. 78, tradução nossa).

A autora postula que a análise cuidadosa dos tipos de garantias que são empregadas de forma explicita ou implícita em situações concretas em sala de aula, permite que nós reconstruamos os tipos de justificativas matemáticas dos estudantes e do professor. Em particular, a comparação das autorizações e dos apoios em diferentes argumentos pode revelar que tipo de argumento é usado pelos discentes em salas de aula.

Apesar de a autora utilizar o modelo de Toulmin simplificado, coadunamos com sua conclusão que, ao analisar as conjecturas de estudantes e/ou professores na classe, de acordo com este modelo funcional, podemos reconstruir as argumentações que evoluem nos debates em sala de aula.

Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007), em seus estudos, realizaram uma série de entrevistas clínicas semi-estruturadas, a partir da aplicação de tarefas bases para estudantes bem sucedidos em matemática em nível de graduação e pós-graduação (mestrandos e doutorandos).

Esses autores buscaram investigar como esses alunos avaliavam enunciados condicionais. Os participantes recebiam informações sobre Teoria dos Números como definições de números abundantes[9], perfeitos[10] e defectivos[11],

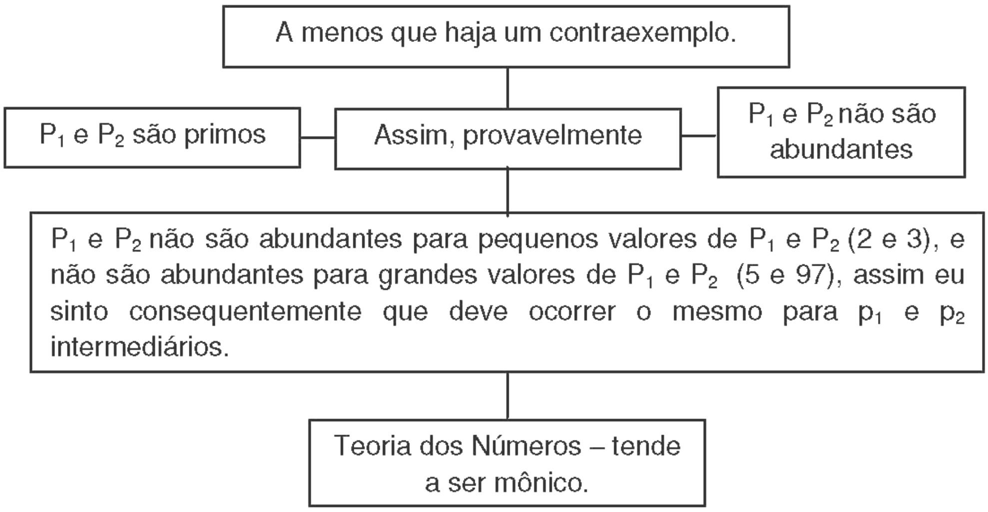
[9] Um número abundante é um número inteiro menor do que a soma de seus divisores próprios. Divisores próprios de um número positivo N são todos os divisores inteiros positivos de N exceto o próprio N.

[10] Um número se diz perfeito se é igual à soma de seus divisores próprios.

[11] Um número defectivo é um número inteiro maior do que a soma de seus divisores próprios.

além de conjecturas como: se P_1 e P_2 são primos, então, eles são abundantes. A partir disso, os alunos discutiam a respeito das conjecturas (Figura 5). Destacamos nessa pesquisa a importância de uma coordenação e direcionamento das argumentações, visto que o entrevistador solicitava o máximo de esclarecimento a respeito dos procedimentos utilizados pelos estudantes. Assim, emergem elementos do modelo que são implícitos ou inexistentes em outras pesquisas.

Figura 5 – Argumentação de um dos estudantes

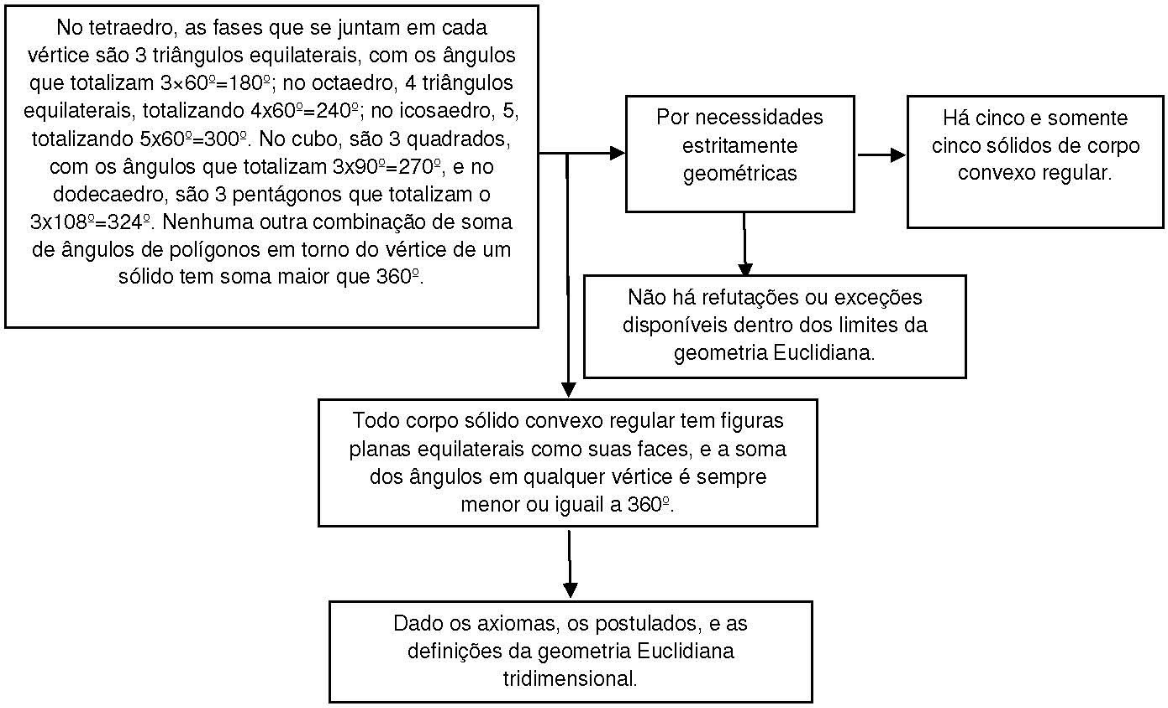


Fonte: Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007, p. 8, tradução nossa).

Percebemos, neste esquema, a importância tanto da refutação da conjectura quanto do qualificador - quando um dos estudantes diz que pensa que é provável que a indicação seja verdadeira, com base em dois exemplos e um argumento relativo à monocidade; ele aceita que não mostrou o resultado formalmente, mas informalmente, acreditando que a indicação é provavelmente verdadeira, e não se sentiu obrigado a continuar e produzir uma prova formal. O esquema de Toulmin é contemplado assim no que diz respeito ao qualificador modal que pode não carregar a certeza, mas reduz consideravelmente a incerteza (INGLIS, MEJIA-RAMOS; SIMPSON, 2007).

Aberdein (2005) apresenta como exemplo de aplicação desta estrutura uma prova matemática. Por conseguinte, recorre ao caso dos sólidos de Platão, cuja prova está contida no livro XIII dos Elementos de Euclides (Figura 6).

Figura 6 – Argumentação sobre os sólidos de Platão



Fonte: Aberdein (2005, p. 291, tradução nossa).

Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007) consideram, que usando o esquema completo de Toulmin, consegue-se abarcar uma escala mais ampla de distinções de argumento matemático.

Conforme as pesquisas vistas anteriormente, podemos inferir que o modelo de Toulmin habilita-se como uma ferramenta que possibilita a organização e análise de argumentos. Essas investigações tornaram possíveis identificar que a estrutura pode ser contemplada parcialmente ou por completo. Acreditamos que dependendo de cada situação os argumentos se apresentarão de uma forma ou outra. Constatamos, também, que as pesquisas que utilizaram como referência a teoria da argumentação de Toulmin enfocaram apenas o que o autor denomina de parte fisiológica do argumento não se atentando para a parte anatômica que, segundo o autor, é composta de três fases: o anúncio de um problema, as discussões sobre o problema e o veredicto dado à solução do problema. Deste modo, direcionamos nossa investigação, tanto, as fases que compõem a parte anatômica, capaz de evidenciar a argumentação como método de ensino; quanto à fisiológica, fazendo uso do modelo como um filtro que possibilita destacar nas argumentações os elementos essenciais que permitem identificar os tipos de argumentos e as respectivas funções de validação na comunicação de ideias.

2 Argumentação, prova e Demonstração: investigações de grupos de pesquisas no Brasil

Alguns grupos de pesquisas no Brasil têm investigado a temática argumentação, prova e demonstração matemática em sala de aula, em geral, desenvolvendo inicialmente trabalhos com professores. Em um segundo momento, as propostas elaboradas no decorrer das discussões sobre as temáticas são aplicadas em sala de aula, gerando vários trabalhos de Pós-Graduação em nível de mestrado e doutorado. Veremos, a seguir, exemplos de pesquisas que nos motivaram a ingressar no debate.

O grupo do Projeto Fundão, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IMUFRJ), contando com professores do ensino fundamental e médio e alunos licenciandos em matemática, desenvolveu uma pesquisa aplicada às turmas de professores participantes, denominada "Argumentação e Provas no Ensino de Matemática", para alunos a partir da 5ª série do Ensino Fundamental, partindo do seguinte pressuposto: "desde muito cedo deve-se dar oportunidade e condições para que os alunos desenvolvam sua capacidade de justificar os resultados que julgam ser verdadeiros e de comunicar suas ideias" (NASSER; TINOCO, 2001, p. 11).

Nasser e Tinoco (2001, p. 93) destacam que

> [...] após um período com atividades voltadas para o desenvolvimento da habilidade de argumentação, os alunos já se sentem mais confiantes para fazerem pequenas demonstrações formais. Durante tais atividades, deve haver, não só o uso da linguagem corrente, como o aprimoramento gradual da maneira pela qual os alunos se expressam, introduzindo de forma planejada a linguagem algébrica.

As indicações supracitadas coadunam com nossa proposta de pesquisa, no sentido de possibilitar que desde as séries iniciais nossos estudantes adquiram a habilidade articulatória e reflexiva para que eles próprios sejam capazes de fornecer justificativas para suas conjecturas. A pesquisa evidenciou que a validação perante o professor e os colegas de turma fornece, às argumentações, um elevado grau de credibilidade.

O valor do ensino da argumentação em matemática na aula varia de acordo com os níveis educativos, mas o seu valor geral é o de ajudar a compreender a necessidade de validar as diferentes proposições matemáticas que se aprendem na aula, tendo como objetivo mais amplo ajudar a compreender a necessidade de validar de modo objetivo o conhecimento científico.

Por sua vez, o grupo Pensamento Matemático (PEA-MAT), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), sob a coordenação do professor Dr. Saddo Ag Almouloud, grupo do qual fazemos parte, desenvolveu um projeto de pesquisa que teve por objetivo investigar os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem, envolvendo o raciocínio dedutivo em matemática. Essencialmente, investigou-se os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados com o ensino e a aprendizagem, envolvendo provas e demonstrações em matemática nas séries finais do Ensino Fundamental; estudaram também as representações dos professores destas séries no que diz respeito ao papel do raciocínio dedutivo na formação do aluno. O projeto foi desenvolvido em torno das seguintes questões de pesquisa:

1. Quais fatores influenciam no processo de ensino e aprendizagem envolvendo o raciocínio dedutivo em matemática?
2. Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas envolvendo provas e demonstrações?
3. Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores, no que diz respeito às provas e demonstração em matemática?

Em relação às discussões sobre os significados de argumentação e demonstração em matemática, o grupo de professores que fazia parte da pesquisa chegou "ao consenso de que a argumentação é uma etapa anterior à demonstração, com idas e vindas, erros e acertos, e que, posteriormente, ao organizar as informações pertinentes em uma sequência, obtém-se a demonstração" (ALMOULOUD, 2007b, p. 11).

Assim evidencia-se que a argumentação esta relacionada ao processo de análise que contrasta com o processo sintético da demonstração.

Tal ponto de vista remete-nos a afirmar que, antes de inserirmos nossos alunos na axiomática geométrica, é necessário que estes possam refletir e conjecturar por intuição, observação, analogias, experimentação com procedimentos empíricos como é peculiar à própria natureza da geometria. A dedução é um modo formal convincente de exposição, mas daremos maior atenção às atividades heurísticas de descobertas que emergem a partir de manipulações, construções, conjecturas etc.

> [...] o estilo dedutivista rompe as definições geradas pela prova dos antepassados, apresentando-as no vazio, de modo artificial e autoritário. Ele oculta os contra-exemplos globais que levaram ao seu descobrimento. Pelo contrário, o estilo heurístico acentua esses fatores. Dá ênfase à situação problemática: acentua a "lógica" que deu nascimento ao novo conceito (LAKATOS, 1978, p. 188).

Com efeito, podemos utilizar métodos que favoreçam tentativas sucessivas, experimentações e ideias espontâneas que possibilitem a explicitação de argumentações que possam favorecer um maior entendimento e compreensão do que temos culturalmente estabelecido em matemática

O projeto em discussão revelou que

> Com o decorrer do trabalho, [...] esses professores adquiriram uma certa autonomia no que diz respeito à discussão, argumentação, redação, levantamento de hipóteses e demonstração. As discussões e entrevistas que realizamos revelaram que o trabalho desenvolvido junto aos professores tem contribuído para sua formação (ALMOULOUD, 2007b, p. 11).

Com efeito, Almouloud (2007b) ressalta que a mudança de concepções possibilitada por discussões sobre o tema prova e demonstração auxilia os professores na preparação de aulas mais dinâmicas, que favorecem ao discente raciocinar, argumentar, provar e demonstrar.

Ainda no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC, foi desenvolvido o projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AprovaME), sob a coordenação da Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy, inserido no Grupo de pesquisa Tecnologia e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM), que teve como foco discussões sobre o ensino e aprendizagem de argumentações e provas na Matemática da Educação Básica, e o desenvolvimento e aplicação de situações de aprendizagem em ambiente informatizado, envolvendo a elaboração de provas matemáticas. Segundo Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007, p. 2), o grupo teve os seguintes objetivos:

1. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para: (a) levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes de escolas do estado da São Paulo; (b) elaborar situações de aprendizagem, visando a envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados;
2. Investigar em que medida a participação desses professores nos grupos colaborativos contribui para apropriação de novas perspectivas sobre o ensino e aprendizagem de prova.

As autoras concluíram que a concepção inicial de prova matemática dos professores que fizeram parte do projeto era reduzida a provas formais e inacessíveis aos alunos. Mas, posteriormente, perceberam reflexões,

> por parte dos professores, sobre o que pode ser esperado de seus alunos e também sobre a percepção de que certos tipos de argumentos apresentados por meio de exemplos, nem sempre deveriam ser considerados de natureza completamente empírica, pois, eventualmente, traços de uma "boa" prova podem estar neles presentes. As discussões, tanto presenciais quanto virtuais, ilustram essas reflexões (JAHN; HEALY; PITTA COELHO, 2007, p. 19).

Propostas como estas nos fazem refletir sobre a importância de incentivarmos nossos alunos para que procurem justificativas para seus resultados, por exemplo, em geometria, a partir do momento em que os colocamos diante de situações que suscitem tais práticas.

Em decorrência desses projetos, surgem inquietações, como a nossa, e a intenção de investigar a complexidade do processo argumentativo como constitutivo do saber em matemática. Assim como as investigações supracitadas, pretendemos criar nas aulas de matemática condições favoráveis ao envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem, abordando os conceitos de área e perímetro de figuras planas, que devem suscitar comunicações de ideias, de tal forma que sirvam de orientação para o desenvolvimento de atividades que contemplem episódios de argumentação em matemática a partir de uma experiência de referência.

Vale ressaltar que no levantamento que realizamos sobre as pesquisas que se interessaram pela temática argumentação em sala de aula de matemática, evidenciamos que grande parte delas utiliza ambientes informatizados para desenvolver suas investigações. Remeter-nos-emos a algumas, visto que nossa proposta contempla atividades construídas no *software* Geogebra.

3 Ambiente Informatizado como Ferramenta auxiliar do processo Ensino e Aprendizagem: o foco na argumentação em aulas de matemática

A argumentação em sala de aula tem sido estudada sob diferentes concepções: por um lado, focando a argumentação docente e, por outro, priorizando a construção de argumentos pelos alunos. Em qualquer dos casos, os aspectos considerados giram em torno de ambientes que estimulam a argumentação, sejam eles informatizados ou não.

As pesquisas que fazem uso da ferramenta computacional no geral justificam tal escolha afirmando que esta permitiria a formulação e reformulação de conjecturas, de forma imediata. Além disso, ressaltam o caráter motivacional com atividade afastada das práticas mais "tradicionais" – que se limitariam ao uso do papel e lápis; podendo assim atribuir ao aluno, com mais naturalidade, a responsabilidade da resolução de problemas que requeiram formulações e reformulações de proposições.

De acordo com pesquisadores da área, as principais vantagens das ferramentas computacionais em relação aos materiais didáticos "tradicionais" são a facilidade e a rapidez com que os estudantes podem transformar as construções na tela,

> [...] realizar medições e dispor de um grande número de exemplos tão variados quanto se queira. Assim, os estudantes têm a possibilidade de realizarem experimentações que lhes permitem planejar e verificar conjecturas ou encontrar propriedades matemáticas não evidentes como as que podem ser abordadas na resolução de um dado problema (RODRIGUEZ, 2005, p. 27, tradução nossa).

Dentre as diversas pesquisas que ressaltam a importância da informática a serviço da educação em matemática, destacam-se as de geometria, tanto pelo número de investigações como por sua importância em aliar os ambientes de papel e lápis e informatizado. Algumas delas se propõem a investigar os processos de ensino e aprendizagem envolvidos em tarefas que requeiram argumentações, prova e demonstração. Em nosso caso, estudaremos as particularidades das argumentações.

Conforme tais estudos, os ambientes informatizados permitem a integração de uma variedade de sistemas de reapresentação. Com efeito, podem auxiliar os estudantes a investigarem propriedades e se apropriarem de conceitos geométricos.

> [...] o *micromundo* fornece operações para transformar automaticamente todo tipo de polígono em uma série de formas geométricas equivalentes tais como um quadrado, um retângulo, um paralelogramo, um triângulo ou uma família deles. Estas transformações dão forma a uma modalidade dinâmica de representação de área que pode ajudar estudantes a separar áreas de suas formas. Esta característica, que foi executada pelo uso de meios eletrônicos, é muito difícil de criar em um ambiente de papel e lápis. (KORDAKI; POTARI, 1998, p. 409, tradução nossa).

Por sua vez, Baltar (1996) assevera que *softwares* educativos como o *cabri-géomètre* favorecem a apropriação do caráter contínuo da deformação de figuras planas. Além disso, a manipulação direta permite: mais observações dos invariantes geométricos das figuras construídas; construir situações *ad hoc,* nas quais o ponto de vista dinâmico intervém; por em evidência as características contínuas das deformações; atingir os limites da deformação, e explorar a conservação de certos elementos e/ou a variação de outros elementos por meio das deformações.

Em sua tese de doutorado, Pedemonte (2002, p. 117, tradução nossa) justifica, assim, o uso do *cabri-géomètre*:

> O *software* tem uma funcionalidade que não é disponível no ambiente de papel e lápis: a manipulação direta. Os elementos básicos da figura podem ser deslocados livremente sobre a folha virtual, e a construção é atualizada automaticamente.

Para De Villiers (2002), os alunos devem ser iniciados bem cedo à arte de formular problemas por meio de atividades que lhes proporcionem oportunidades para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc.

> Os *softwares* de Geometria dinâmica incentivam fortemente este tipo do pensamento não sendo somente meios poderosos de verificação de conjecturas verdadeiras, mas são, também, extremamente importantes na construção de contra-exemplos para conjecturas falsas (DE VILLIERS, 2002, p. 71, tradução nossa).

No entanto, o próprio De Villiers (2002) ressalta que, por um lado, mesmo que as ferramentas computacionais permitam aos discentes ganharem convicções por meio da visualização e de medições empíricas, por outro lado, as demonstrações sem o uso da geometria dinâmica serão sempre tão importantes como sempre foram.

Objetivando analisar os modos de validação em dois ambientes – papel e lápis e ambiente informatizado (Cabri II) –, Parzysz (2002) observou 31 grupos de 4 estudantes, realizando tarefas sobre a construção de mediatrizes. Os estudantes trabalhavam primeiro individualmente, e, em seguida, em grupos de 4 componentes; no final, expunham as resoluções em cartazes; no ambiente informatizado, trabalharam em dupla. Nessa pesquisa, o autor identificou certas diferenças entre as tarefas realizadas nos ambientes papel e lápis e informatizado. Por exemplo, a resolução no ambiente informatizado facilita consideravelmente o acesso à conjectura, em decorrência de seu aspecto dinâmico.

Parzysz (2002, 2006) destaca que as dificuldades evidenciadas em suas pesquisas estavam relacionadas à falta de familiaridade dos estudantes com o *software*, e o apego à validação perceptiva – indicada pelo uso excessivo do princípio da superposição, na comparação entre o desenho do objeto conjecturado com a do objeto experimental. Segundo o autor, a evidência visual da figura parece tornar-se um obstáculo à aplicação de uma demonstração. Por um lado, tal fato permite ao professor gerir situações que possibilitem ao aluno a tomada de consciência que as construções na tela do computador são apenas representações de objetos teóricos da geometria. Por outro lado, os trabalhos manipulativos, sejam na tela de um computador ou atividades em sala de aula, são necessários para que os alunos possam ser iniciados no processo de compreensão dos objetos matemáticos.

Por sua vez, em suas investigações sobre o uso de *software* na compreensão de demonstrações em matemática, Gravina (2001) aponta que o conhecimento empírico, propiciado pela manipulação na tela do computador, favorece a apreensão de propriedades geométricas. A autora ressalta que o conhecimento geométrico perpassa por argumentações plausíveis que, por sua vez, requerem a produção de conjecturas e contraexemplos.

No entanto, mesmo convencidos com evidências heurísticas, muitas vezes, ainda existe a necessidade de uma explicação, para certas conjecturas, como, por exemplo, figuras com diferentes formas podem apresentar a mesma área? Sempre que aumentamos a área de uma figura plana seu perímetro aumenta? Quanto maior a unidade de medida escolhida menor o valor da medida da área de uma figura?

Esses questionamentos evidenciam a relevância do uso do computador em nossa pesquisa e da escolha da geometria, pois, as atividades propostas nesse ambiente sobre esse tema revelam-se como desafiadoras da intuição e podem favorecer a compreensão de conceitos desse campo. Dessa forma, podemos propiciar a nossos alunos uma maneira específica do pensar matemático, sendo que o computador, além de favorecer

> [...] a construção e manipulação de objetos *concreto-abstratos*, ele desencadeia algumas das primeiras ações mentais características do pensar matemático de forma mais contundente se comparada às possibilidades apresentada pelo desenho em papel (GRAVINA, 2001, p. 6).

Assim, os conhecimentos apreendidos nos ambientes de geometria dinâmica podem propiciar, “com manipulação de *objetos concreto-abstratos* na tela do computador, a ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico” (Ibid, p. 8).

Para a autora, a manipulação direta dos objetos na tela do computador, propicia, de imediato, questionamentos que põem à prova a validade de conjecturas – inicialmente com recursos de natureza empírica. Após essa fase, é possível solicitar aos alunos, explicações a respeito das regularidades dos desenhos em movimento, ou seja, a busca de uma demonstração que justifique tais propriedades.

Dessa forma, a autora constata que os ambientes de geometria dinâmica favorecem a ascensão de patamar de conhecimento geométrico. Dito de outra forma, a partir do conhecimento empírico, os alunos ascendem àquele em que a geometria é entendida como modelo teórico.

Nesse contexto, temos ainda a pesquisa de Dias (2009), que investigou a influência dos ambientes de geometria dinâmica na construção de argumentações por graduandos em Licenciatura em Matemática.

A autora elaborou uma atividade que envolvia conteúdos de geometria do Ensino Médio, para diagnosticar os conhecimentos e as estratégias de resolução que os alunos mobilizariam para solucionar a atividade em dois ambientes: papel e lápis e de geometria dinâmica, utilizando o *software Geogebra*.

Segundo a autora, as construções geométricas, no ambiente informatizado, serviram para ratificar as conjecturas elaboradas no ambiente papel e lápis, mas não possibilitaram acréscimo a conjecturas já elaboradas nesse ambiente.

> [...] para uma das duplas o ambiente informatizado funcionou como um meio de confirmação das conjecturas elaboradas no ambiente papel e lápis, não acrescentando nada à construção da justificativa apresentada para a solução no ambiente papel e lápis (DIAS, 2009, p. 128).

Assim, a autora constatou que a resolução no *Geogebra* contribuiu para aumentar o grau de certeza da solução encontrada no papel e lápis, mas não alterou a fundamentação da conjectura, concluindo que não interferiu na demonstração apresentada por eles posteriormente.

Por sua vez, Secco (2007) pesquisou como o processo de reconfiguração de figuras poligonais planas contribui para a apropriação do conceito de área de um polígono, e como esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo.

Novamente, a investigação faz uso de um *software* de geometria dinâmica, aliado a atividades em ambiente não informatizado, a fim de favorecer a apreensão de conceitos matemáticos.

Para o autor, os *softwares* de geometria dinâmica estimulam e introduzem experiências e investigações.

> [...] uma vez que permitem a construção e a manipulação de objetos geométricos e a descoberta de novas propriedades, através da investigação das relações e propriedades que são mantidas nas figuras mesmo após seu deslocamento (SECCO, 2007, p. 31).

Para desenvolver a competência argumentativa dos discentes, fizemos uso de atividades de geometria, e, mais particularmente, de área e perímetro de figuras planas. Como a perspectiva que adotamos evidencia a necessidade da articulação entre os pontos de vista estático e dinâmico, admitimos que esse segundo possa ser abordado por meio da geometria dinâmica propiciada pelo computador.

Diferentemente dos referidos autores, o foco da nossa pesquisa é o quinto ano do Ensino Fundamental por acreditarmos que desde muito cedo devemos possibilitar que os alunos argumentem nas aulas de matemática, para favorecer estratégias de apresentação de pontos de vistas, de justificação e de diálogos.

As pesquisas precedentes nos permitiram inferir que o uso de *software* pode favorecer a análise da natureza e do valor da argumentação em aulas de matemática, tratando a argumentação como elemento que pode permitir a compreensão de conceitos em matemática.

Pelo exposto conciliarmos ambientes informatizados e não informatizados, a fim de favorecer o processo de argumentação e validação de conjecturas de alunos em aulas de matemática. Com relação ao ambiente informatizado, escolhemos o *software* Geogebra por ser um programa livre e possibilitar a construção de situações que pleiteamos. Faremos a seguir uma breve apresentação deste ambiente.

O *Geogebra* é um programa educativo livre de Geometria dinâmica que alia Álgebra e cálculo aritmético e pode ser adquirido gratuitamente no endereço http://www.geogebra.org. Foi desenvolvido por *Markus Hohenwarter* e uma equipe internacional de programadores para o ensino de matemática. Está escrito na linguagem *Java*, em código aberto e funciona em qualquer plataforma (*Microsoft Windows, Linux, Moodle, Macintosh,* etc.). Dentre as funções deste *software*, destacamos a construção de pontos, figuras, segmentos, retas, vetores, cônicas, gráficos de funções, derivadas, integrais, expressões algébricas, etc.

Estruturalmente, é composto por três partes: a janela de álgebra, na qual temos as indicações dos objetos, como, por exemplo, as coordenadas de pontos, equações de retas e circunferência, medidas de comprimentos e de áreas, etc. A janela de gráficos, na qual aparecem os eixos cartesianos, os pontos, as figuras geométricas, etc. E o espaço destinado à entrada de comandos que definem os objetos, podemos introduzir neste campo as coordenadas, as condições, comandos e as expressões que definem as funções.

Caso necessário, podemos ativar ou desativar qualquer uma das três partes, utilizando o *menu* exibir. Como nosso alvo são as construções geométricas, não usaremos a janela de álgebra, nem dos eixos cartesianos.

A escolha do Geogebra nos possibilita construir retas paralelas e perpendiculares, segmentos de reta, encontrar pontos de intersecção, criar polígonos, identificar ângulos e medidas etc. Além de ser um *software* de fácil manuseio que favorece o uso por alunos desde as séries iniciais, permitindo construir figuras que quando movimentadas preservam as propriedades geométricas usadas na construção dos desenhos, permite explorar elementos de geometria elementar, descobrir propriedades dos objetos, levando o discente a experimentar, testar hipóteses, desenvolver estratégias, argumentar, deduzir, favorecendo, assim, a compreensão e o entendimento das propriedades das figuras geométricas estudadas. Esses aspectos propiciam a emergência de argumentações sobre os conceitos e propriedades da Geometria, habilitando os ambientes que fazem uso de *software* de geometria dinâmica como instituição argumentativa.

Na sequência didática proposta nesta tese, apresentamos atividades que necessitam explorar figuras geométricas em várias posições, para que o aluno possa argumentar sobre questões como variância e invariância de formas, de áreas e perímetros, como, por exemplo, apresentamos um quadrado construído no Geogebra cuja movimentação faz com que esse represente uma família de quadriláteros correspondentes à figura quadrado. Esse tipo de atividade favorece a caracterização das argumentações, como, nesse caso, podemos classificá-la em pragmáticas do tipo passagem ao limite.

A perspectiva de área de Douady e Perrin-Glorian (1989) adotada nessa tese postula que a compreensão desse conceito perpassa por atividades que explorem seus aspectos estáticos e dinâmicos. Como Baltar (1996), admitimos que o caráter dinâmico pode ser evidenciado na tela do computador, por meio da visualização, movimentação e exploração de figuras geométricas em várias posições e, deste modo, possibilitamos a emergência de argumentos que favoreçam a compreensão do conceito em jogo.

Passaremos a descrever, a seguir, as correntes teóricas da argumentação, desde a Grécia antiga até as teorias atuais, e suas influências nas investigações que elegeram como foco a temática em questão.

4 Reflexões Teóricas sobre Argumentação

As perspectivas teóricas a respeito da argumentação são bem diversificadas e se constituem no decorrer de um longo período histórico. Esses aspectos tornam esse tema complexo para uma eventual reflexão, mas não podemos nos privar de realizar um sucinto levantamento da temática, em decorrência das abordagens sobre a prática da argumentação influenciarem diretamente as concepções sobre argumentação nas aulas de matemática. Faremos, nesta parte do trabalho, uma reflexão que possibilite situar a argumentação em matemática e evidenciar o ponto de vista que adotaremos a partir das ideias de alguns filósofos que se debruçaram sobre o tema e literatura no âmbito da Educação Matemática.

4.1 Argumentação: aspectos históricos

Breton e Gauthier (2001) situam o surgimento da argumentação como saber sistemático e sinônimo de retórica, em meados do século V a.C., na Sicília grega. Eles atribuem seu surgimento aos primeiros manuais de retórica e ensino que eram elaborados por logógrafos, ou seja, aqueles que preparavam as exposições para os queixosos e os acusados da época. No entanto, Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005) fazem referências ao estudo da argumentação desde o século XV a.C., no mesmo local, em que a "Retórica" era um instrumento de defesa em julgamentos judiciais.

Para esses autores, Aristóteles, no campo da lógica, foi quem sistematizou o estudo relativo ao pensamento argumentativo formal, afastando-se das atividades práticas. A partir de então, a lógica passou a analisar os princípios por meio dos quais as declarações e os argumentos pudessem ser construídos e avaliados como válidos ou inválidos, independentemente do contexto, das crenças, das atitudes ou dos objetivos dos falantes e ouvintes.

Segundo Plantin (2008), a argumentação idealizada por Aristóteles assentava-se no tripé da lógica, “a arte de pensar corretamente”, da retórica, “a arte de bem falar”, e da dialética, “a arte de bem dialogar”. Aristóteles forneceu uma ferramenta, o silogismo, que permitiu descrever do ponto de vista estrutural a retórica, a dialética e a lógica.

O paradigma clássico fundado por Aristóteles foi substituído no fim do século XX por um pensamento autônomo da argumentação nos anos de 1950, desencadeado, de acordo com Plantin (2008, p. 7), “pela vontade de encontrar uma noção de ‘discurso sensato’, por oposição aos discursos fanáticos totalitaristas” da época.

De acordo com esse autor, no discurso lógico, a argumentação é definida no quadro de uma teoria referente a três “operações do espírito”: a apreensão – o espírito apreende um conceito, depois o delimita; o juízo – afirma ou nega algo desse conceito, para chegar a uma proposição; e o raciocínio – encadeia essas proposições, de modo a avançar do conhecido ao desconhecido.

Conforme esse autor, no campo da retórica, a argumentação é caracterizada por apresentar uma teoria dos signos e formular problemas a partir de objetos, fatos, evidências, mesmo que sua representação linguística adequada só possa ser apreendida no conflito e na negociação das representações. Além disso, ela é probatória, no sentido de se não conseguir uma prova incontestável, admite argumentos que apontem a melhor prova; ela é polifônica e seu objeto privilegiado é a intervenção institucional planejada.

Em dialética, a argumentação é atrelada ao diálogo, uma técnica de discussão entre dois parceiros que obedece a regras explicitamente estabelecidas sobre determinado problema, definido em comum acordo, movidos pela busca da verdade, entre as quais a fala circula livremente (BRETON; GAUTHIER, 2001; PLANTIN, 2008).

Para melhor diferenciar retórica e dialética, devemos considerar que a primeira é associada ao discurso público, enquanto a segunda é associada ao discurso privado. A dialética incide sobre teses de ordem filosóficas enquanto a retórica se interessa por questões particulares, de ordem social ou política. Ademais, a dialética é uma técnica de discussão entre dois parceiros; a retórica tem por objeto um discurso longo e contínuo a fim de convencer um auditório[12] (BRETON; GAUTHIER, 2001; PLANTIN, 2008).

Para Breton e Gauthier (2001), o desenvolvimento da teoria da argumentação atrelou-se ao da retórica aristotélica, desde a antiguidade até nossos dias. Com efeito, inspirou a cultura da argumentação que se desenvolveu no quadro da república e dos primeiros tempos do Império Romano e assistiu à sistematização, codificação e vulgarização das normas do discurso persuasivo por grandes oradores como Cícero e Quintiliano. Após a queda do Império Romano, a retórica foi progressivamente decaindo de importância e, mesmo sobrevivendo como prática, não era considerada enquanto objeto de estudo.

Os autores afirmam que a teoria argumentativa, do ponto de vista científico, perdeu credibilidade por se apoiar na retórica, visto que esta não é um método para produzir ideias ou opiniões, mas para defendê-las e lhes fornecer argumentos. Mesmo assim a retórica se transformou em conteúdo de ensino, pois se apresentava como pertinente ao exercício acadêmico. No século XIX, assistiu-se ao decréscimo da influência da própria retórica, que acaba por ser excluída dos programas escolares. O seu desaparecimento arrastou consigo, mesmo que temporariamente, ao ostracismo todas as teorias da argumentação.

> O movimento deste declínio do discurso argumentativo é duplo. Começa por ser interno: no seio da retórica, as duas fases que são a disposição e a elocução irão assumir progressivamente um papel crescente num domínio novo – a expressão literária. A seguir, é externa: a argumentação irá ser substituída pela demonstração racional, nomeadamente a partir de Descartes, privando a retórica de toda essa parte essencial que é a teoria da invenção (BRETON; GAUTHIER, 2001, p. 45-46).

Assim, a teoria argumentativa declinou no seio da retórica desde o final do Império Romano até meados do século XX. Dessa forma, a retórica tornou-se

[12] Para quem argumenta, o auditório é o “conjunto daqueles que o orador quer influenciar com sua argumentação” e produto de uma construção mais ou menos sistematizada (PERELMAN; OLBRECHTS-TYTECA, 2005, p. 22).

uma teoria das figuras de estilo e a parte argumentativa reduziu-se à lógica, em decorrência do êxito crescente da demonstração matemática.

Para Plantin (2008), a obra publicada em francês, *O Tratado da Argumentação*, de Perelman e Olbrechts-Tyteca, em 1958, deu inicio ao movimento de renascimento, emancipação e refundação dos estudos sobre a argumentação. Paralelamente, também, em 1958, Toulmin deu sua contribuição para essa refundação, publicando em inglês, *Os usos do argumento*. Ao referirmo-nos às obras supracitadas, recorreremos às edições atuais de 2005 e 2006, respectivamente, já traduzidas para o português.

De acordo com Breton e Gauthier (2001), desde sua sistematização, várias teorias da argumentação contemplam concepções mais ou menos originais de argumento. Com efeito, não existe uma definição universal de argumentação, e o objeto de estudo que as teorias da argumentação parecem partilhar mantém-se, efetivamente, bastante vago. Posto isso, convergências e divergências entre as teorias podem ser evidenciadas:

> [...] a argumentação é um objeto teórico cuja caracterização se faz sempre por referência à racionalidade. Esta relação é concebida de diversas formas nas diferentes teorias da argumentação. [...] Para algumas, um argumento é radicalmente diferente de um raciocínio ou de uma demonstração; para outras, um argumento consiste num raciocínio não formal; ainda para outras teorias, um raciocínio formal pode constituir um argumento em certos contextos de utilização (BRETON; GAUTHIER, 2001, p. 15).

Conforme o exposto, constatamos que, no decorrer do desenvolvimento dos campos teóricos da argumentação, esta oscilou entre momentos de ascensão e depreciação. Neste ínterim, constituíram-se concepções a respeito do termo em questão sem se chegar a um consenso, mas é possível observar que a polifonia do termo deve-se a correntes teóricas às quais os estudiosos sobre o assunto estão filiados. Vejamos algumas reflexões a respeito dessas concepções e suas influências na argumentação em matemática.

4.2 Argumentação e suas Perspectivas Contemporâneas

As diferentes teorias da argumentação influenciam as concepções que buscam relacioná-la com a matemática, e, particularmente, com a demonstração. Balacheff (1999) destaca três correntes teóricas, que podem ser tomadas como referência para o debate: Chaim Perelman, Stephen Toulmin e Ducrot.

Na teoria da argumentação na língua, Ducrot (1981) assume que a argumentação deve ser abordada em um plano exclusivamente linguístico, com base no programa estruturalista linguístico. De acordo com essa perspectiva, quando um indivíduo produz um enunciado, é possível predizer o que ele vai dizer em seguida.

Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005) consideram que a argumentação não busca estabelecer a validade de uma conjectura, mas obter a adesão de um auditório. Concebem que a partir da defesa de pontos de vistas diferentes, em um debate, pode-se chegar a um acordo sem abandonar o campo da razão; no entanto, procuram transcender as categorias da lógica formal, na utilização do raciocínio persuasivo e na argumentação justificada.

Para os autores, argumentação é um processo relacionado com a influência de adesão de um auditório a certas teses, por meio do discurso. A argumentação, nessa concepção, é subtendida como campo da retórica no qual impera o raciocínio plausível, que não estabelece verdades evidentes ou provas demonstrativas.

Toulmin (2006), ao contrário, relaciona a validade[13] de um enunciado a uma estrutura discursiva racional – uma estrutura inicialmente ternária, mas que pode ser expandida, que permite a passagem dos dados à conclusão a partir de uma garantia que sustente essa passagem. Tal estrutura depende da validade das premissas estabelecidas por uma comunidade ou domínio de referência, como, por exemplo, as regras estabelecidas em matemática. O autor postula uma organização estrutural, que exibiremos mais adiante, dos elementos fundamentais constitutivos de um argumento: dado – D, conclusão – C e a garantia (justificativa

---

[13] Os critérios de validade de uma argumentação, para Toulmin (2006), dependem da natureza do problema proposto, ou seja, estão condicionados ao domínio em que se exerce a argumentação.

do enunciado) – W. Além desses elementos, é possível completar o argumento especificando as condições para que a justificativa apresentada seja válida ou não, acrescentando aos argumentos qualificadores modais – Q. Caso a justificativa não seja válida, admite-se mais uma componente da estrutura proposta pelo autor, a refutação – R da justificativa. Caso seja necessário, pode-se recorrer, ainda, a um apoio – B para dar suporte à justificativa, como, por exemplo, um axioma, um teorema, uma definição. As asserções se fundamentam, então, nas garantias e apoios que o campo de estudo considerado pode lhe fornecer.

Durante o processo de elaboração dos argumentos, a organização estrutural precedente permite relacionar os dados às conclusões por meio de justificativas de caráter hipotético, denominadas pelo autor de garantias. Estas podem permitir ou limitar as asserções, e são alicerçadas em justificativas teóricas que apóiam tais garantias. O emprego de qualificadores ou refutações de argumentos em discussões na sala de aula evidencia características da cultura científica, como o emprego de argumentações semânticas e a necessidade de ponderações diante de diferentes pontos de vistas, a partir das evidências construídas nos ambientes de aprendizagem.

Assim, além dos argumentos dos alunos, a estrutura possibilita identificar características das interações estabelecidas na aula analisada. Nesse sentido, podemos investigar como a prática da argumentação pode favorecer a compreensão de conceitos em matemática.

Este modelo estrutural que comporta justificativas, discussões e críticas, que antecedem as conclusões, pode favorecer a organização de argumentos produzidos em sala de aula de matemática. Mais representa apenas o que Toulmin (2006) considera a parte mais refinada e específica da argumentação. Levando em consideração as nuances do processo argumentativo, é necessário admitir as fases que o compõem, desde a exposição de um dado problema a ser solucionado até o momento de sua validação ou refutação. Adotaremos esses aspectos da perspectiva toulmiana.

Para compor a sequência didática, inspiramo-nos nas fases que compõem o processo argumentativo anunciadas por Toulmin e, para análise dos argumentos, produzidos pelos alunos perante a situação proposta, adotamos o modelo estrutural proposto pelo autor.

Adotamos aspectos dos campos teóricos da argumentação de Perelman e Toulmin, com a finalidade de compor nossos critérios de análise, em relação ao direcionamento ao ensino. Para nosso entendimento sobre a temática argumentação, admitimos a perspectiva do filósofo português Grácio (2009, 2010) ao propor que a prática da argumentação propicia competências argumentativas. Tal autor pensa a argumentação a partir da interação, que, segundo ele, substitui a velha imagem do orador – auditório, pela imagem argumentador – argumentador. Para ele, as teorias da argumentação devem se centrar em conceitos como o de *assunto* que seja foco de discursos e contra-discursos. Além disso, nas interações, os participantes devem estar atentos à funcionalidade e à validade ou não do que se aceitará como argumento em cada área.

Assumir argumentação enquanto prática, que leva à compreensão de conceitos, vai ao encontro da perspectiva de Grácio (2009), ao considerar a argumentação como uma interação circunstanciada que admite vários argumentadores debatendo sobre determinado tema, a fim de possibilitar uma competência argumentativa que possa auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

> [...] procuraremos encontrar uma base descritiva tendo em conta dados empíricos acerca da forma como os atores sociais representam o argumentar e como essas representações influenciam as suas próprias práticas argumentativas, deixando assim em aberto um caminho possível para se pensar o que sejam as competências argumentativas e sobre o que fazer para as promover de um ponto de vista didático (GRÁCIO, 2009, p. 103).

Nesse sentido, de acordo com o autor, as competências argumentativas são adquiridas a partir das interações coordenadas em torno de um determinado assunto. Apesar de cada um apresentar seu ponto de vista sobre a temática em discussão, os argumentos produzidos têm sua razão de ser em função das interações. No ensino de matemática, por exemplo, ao abordarmos o assunto área de figuras planas, as comunicações de ideias irão girar em torno desse assunto, as argumentações produzidas apresentarão influências mútuas das falas dos alunos e do professor, que, na condição de mediador, deve gerir o processo, solicitando justificativas de asserções e confrontando ideias divergentes.

Essa concepção direciona a argumentação para um determinado assunto, considerando-a produto de um processo que envolve ações, justificativas, tomadas de decisão, conflitos em decorrência de posições antagônicas, refutações e validações, potencializando-a como alternativa metodológica.

> circunscrevendo o campo da argumentação ao domínio da mutualidade relacional em torno de um assunto em questão, dotamo-nos de uma focalização que permite analisar as intervenções desenvolvidas na alternância dos turnos de palavra, que caracteriza a dinâmica de uma argumentação, como *discursos circunstanciados*. (GRÁCIO, 2009, p. 103, grifos do autor).

As circunstâncias que envolvem o processo argumentativo possibilitam tomá-lo como recurso para lidar interativamente em sala de aula, enfocando o conteúdo em jogo. A interação mediada pelo professor é essencial para compreensão do objeto em pauta, no sentido de o docente favorecer a convergência das argumentações isoladas, dispersas e pessoais para aquelas que estejam de acordo com os conceitos, definições e propriedades da matemática.

Essa concepção de argumentação circunstanciada não é muito diferente da ideia de Toulmin (2006), ao referir-se aos *campos* de argumentação, cuja característica principal é a necessidade de justificativas de soluções, dadas a problemas postos em campos específicos, baseadas em critérios da área em questão.

A competência argumentativa deve possibilitar ainda a emergência de situações controversas, mais uma vez sob gerência do professor, que, além de mediar tais situações, pode fazê-las emergir a partir de atividades que possam contemplá-las. Para Grácio (2009), o impasse gerado por ideias conflitantes é o que parece tornar mais evidente que estamos diante de uma argumentação.

À medida que o professor medeia ou faz emergir situações que apresentem ideias conflitantes ou contraexemplos, as interações argumentativas transitam progressivamente de atitudes competitivas para cooperativa, como ressalta Grácio (2009, p. 108).

> [...] a postura de advocacia se vá diluindo progressivamente numa postura mais reflexiva, ponderada e de investigação e que o inicial assanhamento da afirmação pessoal dê lugar a uma valorização do interesse comum.

Segundo Toulmin (2006), a prática da argumentação provoca a emergência de justificativas que são postas à prova, podendo ser contestadas e até refutadas, exigindo dos enunciadores apoios que possam lhe dar sustentação. A mediação de situações conflitantes pode levar à mudança de discurso e pensamento.

No campo da Educação Matemática, Krummheuer (1995) faz alusão à *argumentação coletiva,* decorrente do processo de interação argumentativa, que normalmente apresenta momentos de aceitação e acordo, mas também de controvérsia e desacordo que devem, por intervenção do professor, ser conduzidos a correções ou modificações das ideias que sustentam as justificativas das asserções. Segundo o autor, no final do processo deve-se chegar a um consenso.

O autor considera a prática argumentativa como um fenômeno social que ocorre quando os sujeitos envolvidos nas ações propostas pelo professor cooperam na tentativa de ajustar suas interpretações, para assim obter-se a compreensão dos conceitos em jogo, ou mesmo expandir as discussões na tentativa de incorporar novos conceitos.

Apesar da polifonia do termo argumentação, os autores que a tomam como prática em sala de aula de matemática, como Krummheuer (1995), Pedemonte (2002), Douek (2000), Cabassut (2005), Boavida (2005), dentre outros, partem do pressuposto que devemos considerar, no processo argumentativo, a articulação entre elementos discursivos verbais e não verbais, como, por exemplo, a fala, a produção de textos, as figuras, os dados numéricos ou algébricos, aos quais acrescentamos os gestos. Esses elementos que compõem o processo argumentativo evidenciam a complexidade que o termo traz consigo.

Outra questão importante a ser considerada é a perspectiva de Cabassut (2005), que considera os argumentos produzidos em sala de aula, compostos por argumentos não matemáticos e matemáticos. Essa composição fundamenta a tentativa de validação das argumentações.

Os sujeitos envolvidos na prática da argumentação, como já destacamos, são sujeitos sociais que carregam consigo valores, crenças, intenções, etc., oriundos de suas ações e convivências em ambientes fora da escola. Esses elementos devem compor no contexto da sala de aula uma argumentação que tem sentido ou ganha sentido no contexto do discurso matemático.

Assim, as competências argumentativas se estabelecem pela ampla possibilidade de elementos constitutivos, aliadas às imbricações de argumentações não matemáticas e matemáticas.

A argumentação na perspectiva da interação social se impõe como um processo de comunicação, tornando-se um fenômeno sociocultural. As relações estabelecidas por meio das comunicações de ideias em torno de um determinado assunto apresentam-se como um método de desenvolvimento ou transformação de ideias, coadunando com as concepções de aprendizagem com significado em detrimento da transmissão de um produto acabado.

Tomando como referência as perspectivas precedentes, direcionamos nossas expectativas à compreensão de conceitos matemáticos, a partir da prática da argumentação.

Admitimos que as argumentações em matemática são práticas que se apresentam sobre determinado assunto, por um lado, constituídas, sobretudo, por ações que possibilitam coleta de evidências; e representações, sejam numéricas, figurais ou algébricas, que sirvam para tornar plausível, persuadir e aumentar a convicção sobre ideias postas à prova. E, por outro, são constitutivas de asserções, justificativas escritas ou faladas, diálogos consonantes ou controversos e gestos. Essa prática deve propiciar aos alunos a competência argumentativa.

O aluno passa, dessa maneira, a comunicar suas ideias saindo de uma situação de receptor em sala de aula para de emissor, ou seja, assume, junto com seus colegas e professor, a tarefa de produção de conhecimentos no processo de ensino e de aprendizagem. Não havendo, em sala, uma relação unilateral de emissão e recepção de saberes. Desse modo, a competência argumentativa pode possibilitar ao aluno ser proativo, tomar decisões e respeitar os pontos de vistas diferentes do seu.

Para efeito de análise das argumentações, consideramos, assim como Toulmin (2006), que o processo argumentativo é composto por duas partes uma anatômica e outra fisiológica. A primeira, que expõe em detalhes o argumento, apresenta-se subdividida em três fases: apresentação do problema, opinião sobre o problema e veredicto; a segunda representa sentenças individuais de uma argumentação: dados, justificativas, apoios, qualificadores e conclusão, que podem ser organizados estruturalmente, para assim podermos analisar as validações ou refutações dos argumentos.

Tudo o que já foi dito até aqui compõe parte da problemática de nossa pesquisa. A seguir, discorreremos, mais especificamente, em que condições, essa problemática nos possibilitou gerar nossa questão de pesquisa e nos favoreceu na proposição de uma sequência didática para responder tal questão.

SEGUNDA PARTE

PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Nesta parte da investigação, passaremos a descrever mais pontualmente a problemática que envolve a nossa temática. Anunciaremos, também, a questão de pesquisa, a metodologia e os procedimentos adotados. Além disso, contextualizaremos nossa proposta no interior de um quadro teórico que nos possibilite analisar os dados desta pesquisa.

1 Justificativas e Problemática

Douek e Pichat (2003) afirmam que, na última década, o desenvolvimento das capacidades argumentativas dos alunos mais novos se tornou um assunto da maior preocupação para os educadores matemáticos por diferentes razões, como por exemplo, a necessidade de uma aproximação, desde muito cedo, de competências que são relevantes no processo de justificação; a exploração do potencial da interação social no desenvolvimento do conhecimento matemático e a importância das competências de argumentação, ao nível do currículo, direcionadas para o aumento da autonomia intelectual dos alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) – apontam que um dos objetivos gerais da matemática para o Ensino Básico é o de resolver situações-problema que favoreçam o discente a desenvolver formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, etc. que levem o aluno a validar suas proposições, estratégias e resultados. Entretanto, raramente se vê essas indicações serem implementadas em sala de aula, pois isso exige do professor, além de sólido conhecimento sobre os conteúdos em jogo, a competência de agir rapidamente em situações de imprevisto, propor e gerenciar situações que favoreçam o engajamento dos discentes no processo argumentativo, etc.

Ainda nos PCN, alguns caminhos são apontados no sentido de que os professores devam encorajar os estudantes com atividades individuais ou em grupo, que possibilitem aos discentes justificarem as suas proposições sobre o assunto que será abordado, sugerindo-lhes questões que suscitem hipóteses, justificativas e discussões para que eles reflitam sobre as suas ideias.

> [...] o ensino de matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 31).

Como mediador da aprendizagem, o professor deve estimular a cooperação e confrontação de hipóteses entre ele e os alunos, e, entre os alunos, criando assim, condições favoráveis para o envolvimento dos discentes em experiências de aprendizagem cujo foco seja a explicação e a fundamentação de raciocínios em situações de formulação, avaliação e validação de conjecturas.

Tais exigências, provavelmente, contribuem para a falta de oportunidade aos estudantes de travarem uma discussão sobre os assuntos tratados e consequentemente dificulta que esses argumentem e defendam suas proposições, que podem ser corroboradas ou refutadas pelo professor e por seus pares. Acreditamos que a competência argumentativa não surge naturalmente nas pessoas, que os discentes necessitam ser inseridos em contextos que lhes permitam praticar suas capacidades argumentativas (BRASIL, 1997).

Os PCN ressaltam, ainda, que a argumentação é uma competência a ser desenvolvida desde as séries iniciais. Em ambito internacional, destacamos as indicações referidas nos princípios e normas para Educação Matemática (NCTM, 2000), ao indicarem que a escola deve oportunizar o discente a formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas, reforçando as sugestões destacam que o raciocínio matemático é um hábito mental, e como tal deve ser desenvolvido mediante o uso coerente de muitos contextos.

Algumas pesquisas sobre argumentação em matemática a concebem como uma atividade facilitadora da aprendizagem de provas e demonstrações em matemática (BOERO; GARUTI; MARIOTTI, 1996; DOUEK, 1998, 1999 e 2000; MARIOTTI, 1997 e 2002; PEDEMONTE, 2002).

Por sua vez Boavida (2005, p. 67) justifica a pertinência de envolver os alunos, principalmente da escola básica, em práticas de argumentação, pois a competência argumentativa estende-se à capacidade de dialogar, pensar, optar e se comprometer.

> [...] a capacidade de dialogar remete para uma atitude de abertura nas relações com o outro que se torna efetiva pelo desejo de comunicar e pela disposição para ouvir; a capacidade de pensar remete para uma atitude crítica e de atenção; a capacidade de optar e se comprometer remete para indivíduos que procuram assumir as suas posições de forma esclarecida e, neste processo, assumem uma atitude interveniente e empenhada. O lugar que a argumentação ocupa num dado contexto reflete o peso que a liberdade de reflexão e ação aí conquistou.

Acreditamos que, ao criarmos condições que possibilitem o aluno desenvolver sua competência argumentativa, estamos contribuindo não só para o pensar objetivamente, mas, sobretudo para a formação do cidadão – para o desenvolvimento de suas relações sociais, seu pensamento crítico, sua autonomia, etc.

Mas, segundo Boavida (2005, p. 11), o envolvimento dos alunos em atividades de argumentação matemática raramente está presente nas aulas de matemática. Destaca também que “há ainda muito para investigar, quer sobre as suas potencialidades, quer sobre possíveis vias de se materializarem nas práticas letivas e evidenciar que estas práticas colocam significativos desafios ao professor".

Os estudos de Boero, Douek e Ferrari (2008), Douek e Scali (2000), Boavida (2005) e Lampert (1990) evidenciam que promover e incentivar a argumentação matemática é um grande desafio para os professores. As dificuldades perpassam por: engajar os discentes em situações que exijam argumentações, mediar situações conflitantes, aliar a atividade de argumentação ao aprendizado dos conceitos em jogo, apresentar conhecimento suficiente para admitir soluções inesperadas, mas que estejam de acordo com as exigências matemáticas, etc.

Ao exercer o papel de mediador, é de fundamental importância que o professor além do domínio do conteúdo seja capaz de conduzir o aluno à exploração de situações problemáticas que lhe favoreçam o pensar de forma autônoma, tomando decisões, fazendo relações necessárias entre as atividades empíricas e teóricas, respeitando a opinião do outro.

Outro ponto importante no desenvolvimento da argumentação é a questão do contexto que possibilita seu desenvolvimento. Nesse sentido, Goodwin (2009, p. 140) atribui "à conversa[14] através e no interior da qual os argumentos são desenvolvidos como o meio primário por intermédio do qual as pessoas organizam um contexto para a sua interação". Assim, são estabelecidas as normas da argumentação em cada contexto, ou como se refere o autor, em instituições argumentativas[15].

Para Goodwin (2009, p. 140), "as normas da argumentação incluem aquelas obrigações (padrões, ideais, etc.) que a sua argumentação tem de assegurar (estar à altura, realizar, etc.) para que a sua conversa tenha força". A força é propiciada pelos critérios normativos da área, em nosso caso, a matemática, que devem ser organizados localmente pelo professor, para assim

[14] No sentido de conversa argumentativa que envolve estratégias, esquemas, atos, fala, etc. (GOODWIN, 2009, p. 124).

[15] São instituições sociais preexistentes (falando de um modo lato), no qual as argumentações podem ser encontradas. Nelas figuram gêneros de discurso (como um artigo para uma conferência), ocasiões formalmente organizadas (o julgamento criminal), conjuntos de regras explícitas (*Robert's Rules of Order)* e indubitavelmente muitos outros padrões de expectativa mais ou menos duradouros (incluindo normas) sobre como a conversa argumentativa deverá prosseguir (GOODWIN, 2009, p. 141).

obter respostas que possam ser, no âmbito do processo argumentativo, validadas ou refutadas. “Estes requisitos de qualidade estão entre as normas pragmáticas dependentes do contexto da argumentação” (GOODWIN, 2009, p. 141).

Uma das atribuições do professor é organizar essa conversa a fim de desafiar os discentes a se inserirem em uma trama argumentativa, ou seja, criar condições que possam favorecer a emergência de comunicações de ideias. Naturalmente, há dificuldades de se desenvolver essa trama, cabendo ao docente auxiliar na superação das dificuldades que porventura venham a ocorrer. Aquele deve prever que inicialmente os discentes usarão argumentos substanciais e no decorrer do processo chegarão a uma organização argumentativa que se apresente de acordo com as regras de validação estabelecidas pelo grupo que estão inseridos.

Boero, Douek e Ferrari (2008) destacam que o processo argumentativo exige uma competência linguística mais profunda do que a usada geralmente pelos estudantes. Desta maneira, a argumentação parece uma atividade apropriada para promover melhoria de habilidades linguísticas e da linguagem específica da matemática, seja por registros escritos ou orais. Auxiliando, assim, segundo os autores, no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Cabe ao professor equacionar esta singularidade no processo argumentativo – a conciliação das linguagens natural e matemática, a fim de possibilitar aos alunos que se apropriem dos conceitos em jogo potencializados pelas soluções de problemas.

Ao incentivarmos as argumentações em ambientes escolares, naturalmente emergirá um importante aspecto do trabalho em matemática, o da validação, visto que

> [...] uma das questões centrais do trabalho em matemática refere-se à validação. Trata-se de o aluno saber por seus próprios meios se o resultado que obteve é razoável ou absurdo, se o procedimento utilizado é correto ou não, se o argumento de seu colega é consistente ou contraditório (BRASIL, 1997, p. 52).

Para Cabassut (2005), as validações de argumentos em instituições de ensino requerem a associação entre validações de instituições não matemática, como a família e instituições matemáticas, como as universidades. Ao referir-se à argumentação em matemática, o autor afirma que ela é produzida na busca do conhecimento da verdade de uma proposição, assim faz uma relação direta entre essa e o processo de validação. O autor caracteriza as argumentações em três tipos: pragmáticas, semânticas e formais, e elenca as funções que as validações argumentativas podem ter no discurso matemático, como, por exemplo, verificação, descoberta, explicação, etc. Assim, o autor nos fornece elementos de análises para verificarmos a pertinência de implementar em sala de aula um contrato didático que priorize as comunicações de ideias e suas respectivas validações.

Por sua vez, para estudar as validações de argumentos, Toulmin (2006) os organiza em uma estrutura que possibilita uma análise minuciosa do processo argumentativo. Particularmente em matemática, o autor afirma que os argumentos pelos quais se apóiam as asserções podem alcançar em algum momento os mais elevados padrões, e os critérios matemáticos devem ajustar estes argumentos produzidos pelos alunos e mediados pelo professor, para assim poderem ser validados.

Em nossa pesquisa, as argumentações se constituem no objeto de estudo, pois, para investigar quais são as possibilidades metodológicas das comunicações de ideias no contexto do ensino de área e perímetro de figuras planas, utilizamos as próprias argumentações dos discentes pesquisados.

Assim, elegemos a seguinte questão norteadora de nossa pesquisa:

Em que medida a prática da argumentação pode se apresentar como método que favoreça a compreensão de conceitos em matemática, tomando como referência o caso da área e perímetro de figuras planas?

Nossa hipótese é a de que o uso desse método deve favorecer a aquisição da competência argumentativa, que possibilita aos discentes se apropriar de estratégias para solucionarem problemas, ajudam os alunos a desenvolver a linguagem necessária para expressar ideias matemáticas, relatarem, ouvirem e discutirem a propósito de sua compreensão sobre os assuntos estudados, além de aflorar o respeito pela opinião do outro, favorecendo a compreensão dos conceitos em jogo.

Para responder à nossa questão, elaboramos uma sequência didática envolvendo os conceitos de área e perímetro de figuras planas, cuja concepção adotada requeria duas instituições argumentativas – a sala de aula e a sala de informática. As atividades foram desenvolvidas com papel e lápis e no computador e consistiam de recorte e colagem, sobreposições, construções, utilização de malhas quadriculadas, verificações de propriedades etc., cujas soluções foram apresentadas oralmente e/ou por escrito.

O modelo de análise das argumentações, oriundas das comunicações de ideias necessárias às soluções dos problemas propostos, está constituído de duas partes, a organização dos argumentos em um modelo estrutural proposto por Toulmin (2006) e as respectivas análises funcionais destes, a partir das fases que devem ser contempladas para estabelecermos a prática da argumentação enquanto método.

2 Referencial Teórico

Apresentaremos o modelo de análise de microargumentos proposto por Toulmin (2006), que nos possibilitará organizar os argumentos que compõem nossos dados, e analisá-los à luz dos critérios que estabelecemos a partir das fases que integram o processo argumentativo. Passaremos a descrever os pontos essenciais da estrutura postulada pelo autor.

2.1 Modelo de Toulmin: uma ferramenta de análise para qualificar argumentos

Nos últimos anos, diversos autores elaboraram modelos que trataram sobre elementos constitutivos de uma argumentação, bem como as relações que se devem estabelecer entre eles para que a argumentação seja válida; definiram também os passos para a análise de uma argumentação substantiva. Geralmente, estas análises são de dois tipos: umas se concentram no conteúdo do argumento, outras se concentram na estrutura do argumento. Tentaremos nos ajustar em um meio termo, visto que nos interessa o tratamento dos conceitos de área e perímetro de figuras planas e a análise dos argumentos dos alunos a respeito da compreensão desses conceitos frente a situações-problema que compõem a sequência didática que proporemos.

Deve-se levar em conta, também, que os estudantes, principalmente nos anos iniciais da escola básica, estão em processo de desenvolvimento de padrões do pensamento lógico, logo, podem apoiar suas justificativas por argumentos plausíveis, transitórios e parciais, que não obstante serão importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Segundo Toulmin (2006), os estudos sobre lógica, historicamente, deixaram de lado reflexões sobre como argumentos produzidos em diversas áreas podem ser criticados e avaliados a fim de serem validados ou refutados. E, por isso, foi fortemente questionada por filósofos e por historiadores da ciência, Toulmin (2006), por exemplo, contesta o ideal lógico da razão como um projeto histórico da modernidade que nós tenhamos que apreciar. Essa perspectiva foi superada, segundo o autor, pelos fatos da ciência do século XX.

Dessa forma, a análise lógica concebida sobretudo pelas demonstrações matemáticas não é suficiente para os argumentos produzidos em sala de aula de matemática da Escola Básica. Provavelmente, as comunicações de ideias no contexto escolar assemelhem-se mais às argumentações de outros domínios, tais como o direito, em que o debate público dos fatos e os relacionamentos entre eles são relevantes.

> [...] os raciocínios matemáticos não podem ser reduzidos a raciocínios demonstrativos, que permitem deduzir conclusões a partir de premissas dadas por meio de regras de inferência explicitadas progressivamente. Há raciocínios matemáticos, específicos que querem simplesmente fornecer as razões de aceitação ou de refutações de certas proposições (PEDEMONTE, 2002, p. 23, tradução nossa).

Com efeito, podemos focar nossa atenção para caracterização das argumentações dos alunos, na tentativa que esses se apropriem de competências argumentativas que lhes favoreçam a compreensão de conceitos em matemática. As interações propiciadas pelo processo argumentativo devem se desenvolver a fim de se obter a validação ou refutação das conjecturas oriundas dos debates. É necessário, para isso, um meio de analisar e qualificar essas argumentações.

Um dos instrumentos para analisar argumentos produzidos por alunos que vem sendo usado nas áreas de linguística, ciências e matemática é o modelo de Toulmin (2006). Este modelo é muito importante na análise de argumentações, pois estabelece relações entre vários elementos e as argumentações propriamente ditas. Favorece análises que levem em conta as impossibilidades matemáticas, e dá significado ao papel das evidências para a construção de explicações causais. Em nossa concepção, o modelo e as fases anunciadas pelo autor podem potencializar a prática da argumentação como método que favorece a compreensão de conceitos em matemática.

2.2 Em torno do Modelo

Toulmin (2006) decompõe um raciocínio válido em argumentos. Nessa perspectiva, um raciocínio válido é um modelo estrutural de argumentos e pode ser analisado de maneira sequencial. Toulmin evoca a validade formal para tratar de argumentos do quotidiano.

O autor afirma que trata de problemas *lógicos* num certo sentido, pois não são problemas *de lógica,* mas *sobre lógica.*

> [...] são problemas que só surgem com força especial, não dentro da ciência da lógica, mas quando a pessoa se afasta por um momento dos requintes técnicos e pergunta pela relação que deve haver entre a ciência e as descobertas, de um lado, e, de outro, alguma coisa que está fora da pessoa: como se aplicam os argumentos, na prática? Que ligações há entre os cânones e métodos que usamos quando, na vida do dia-a-dia, avaliamos de fato, a solidez, a força e o caráter conclusivos de argumentos. (TOULMIN, 2006, p. 2).

Um dos principais objetivos do autor é identificar como a análise formal da lógica teórica pode ter alguma ligação como o que se visa a obter pela crítica racional dos argumentos. Para tal, faz uso da jurisprudência:

> [...] Os argumentos podem ser comprados a processos judiciais; e as alegações que fazemos e os argumentos que usamos para “defendê-las”, em contextos extralegais, são como as alegações que as partes apresentam nos tribunais; e os caso que oferecemos para provar cada uma de nossas alegações são jurisprudência consagrada. (TOULMIN, 2006, p. 10).

Seja no caso da jurisprudência, como em situações apropriadas em sala de aula de matemática, sempre se pode confirmar ou contestar uma asserção. Em qualquer um dos casos, devemos ter atenção aos fundamentos em que a asserção se baseia. Assim, ao sustentarmos ou contestarmos asserções, temos, que apresentar justificativas que o argumento que produzimos para apoiá-las ou refutá-las está coerente com nosso sistema de referência.

Há uma função específica dos argumentos que o autor se propõe a tratar e que nos interessa em demasia: os argumentos justificatórios apresentados como apoio de asserções; as estruturas que se pode esperar que tenham; os méritos que podem reivindicar; e como começamos a classificá-los, avaliá-los e criticá-los. Para Toulmin está é, de fato, a função primária dos argumentos; e os outros usos ou das outras funções que os argumentos tenham são secundárias.

Visto que os argumentos justificatórios apresentam origens diversificadas, Toulmin (2006) tenta responder à seguinte questão: argumentos de diferentes áreas podem ser avaliados pelo mesmo procedimento, usando-se para todos os mesmos tipos de termos e aplicando-se a todos o mesmo tipo de padrão?

Para enfrentar tal problema o autor, primeiramente, divide os argumentos em campos (*field of arguments*), afirmando que dois argumentos pertencem ao mesmo campo quando os dados e as conclusões em cada um dos dois argumentos são, respectivamente, do mesmo tipo lógico. E diferentes quando pertencem a tipos lógicos diferentes.

O primeiro problema destacado pelo autor é

> [...] que, coisas, na forma e nos méritos de nossos argumentos, não variam conforme o campo (*field-invatiant*) e que coisas, na forma e nos méritos de nossos argumentos, variam conforme o campo (*field-dependent*)?. Que coisas, nos modos como avaliamos os argumentos, nos padrões de referência pelos quais os avaliamos e no modo como qualificamos nossas conclusões sobre eles, são sempre as mesmas em todos os campos (traços-campo-invariáveis); e quais dessas coisas variam quando abandonado os argumentos de um campo e adotamos argumentos de outro campo (traços dependentes de campo)? Até que ponto, por exemplo, se podem comparar os padrões de argumento relevantes: num tribunal de justiça, para julgar um texto; para uma prova matemática, etc.? (TOULMIN, 2006, p. 21).

O interesse do autor é saber até que ponto se pode dizer que há padrões que podemos usar para criticar argumentos em diferentes campos. E, de fato, talvez valha à pena perguntar se, em termos rigorosos, pode-se falar em comparabilidade, no caso de argumentos em diferentes campos.

Toulmin (2006) caracteriza as fases pelas quais passam naturalmente argumentos justificatórios, a fim de ver até que ponto essas fases podem ser consideradas semelhantes, em campos diferentes. Para iniciar a caracterização dessas fases do processo argumentativo, o autor analisa os termos modais "não pode", impossível, "provavelmente" e suas variações.

No primeiro estágio, temos que admitir que uma série de diferentes soluções mereça ser considerada. Todas estas, no primeiro estágio, têm de ser admitidas como possíveis soluções (possibilidades relevantes).

É importante perceber que há situações em que a informação que temos em nossa disposição aponta, inequivocadamente, para uma solução específica; e que, nestas situações, temos indícios para aceitar que aquela "tem de" ser a solução. Por exemplo, para argumentar sobre a questão do relacionamento entre as dimensões de uma unidade de medida escolhida e a medida da área de uma dada região, podemos sugerir uma situação criada em programas como o *Geogebra* que possibilitam a variação imediata das dimensões da unidade em questão, favorecendo a simples contagem das unidades para se justificar que quanto maior a unidade escolhida menor a medida da área em jogo.

No decorrer da validação, algumas soluções são descartadas. Nesse processo, pode-se fazer uso de termos modais do tipo: “não pode ser”, “é impossível” e outros semelhantes.

De acordo com Toulmin (2006), do ponto de vista histórico, os termos modais que exprimem “necessidade” ou “probabilidade” foram privilegiados pela filosofia. Mas, segundo o autor, é possível que durante as argumentações se comece pela noção de “impossibilidade”: como, por exemplo, uma situação que mostre que a variação da medida da área de um triângulo, não faz variar, necessariamente, seu perímetro.

Toulmin (2006, p. 43) atribui ao termo modal “não pode” dois aspectos: “*força*” e “*critérios”*.

> Por “força” de um termo modal, entendo as implicações práticas de usar um determinado termo; a força do termo “não pode” inclui, por exemplo, a injunção geral implícita de que se tem de excluir uma coisa-ou-outra, deste ou daquele modo, e por tal razão. Esta força pode ser contrastada com os critérios, padrões bases e razões, em referência aos quais decidimos, em cada contexto, qual o termo modal específico mais apropriado a ser usado em cada caso.

Para esclarecer a importância da distinção entre *critério e força,* podemos lançar mão de um exemplo no campo da Matemática.

1. O critério ou padrão em referência em que se descarta uma medida de área negativa pode ser apoiado por uma versão do postulado da unidade da área, o qual estabelece que “para cada região poligonal unitária dada há uma correspondência que assinala um único número real positivo a cada região poligonal, o número 1 é assinalado como unidade da região poligonal dada”, (ROSSKOPF; SITOMER; LENCHNER, 1966 apud WAGMAM, 1975, tradução nossa).
2. A força recai sobre as consequências de se admitir que uma medida de área seja negativa, visto que essa afirmativa não tem consistência matemática.

A força de caracterizar uma conjectura de “uma impossibilidade” está em excluí-la por critérios matemáticos; o fundamento da exclusão deve ser “aceito” pelas normas matemáticas. O critério da contraditoriedade em termos matemáticos pode ser um critério de impossibilidade; a *moral ou força implícita* que determina uma impossibilidade é impedir que a noção continue a ser usada nos argumentos matemáticos seguintes.

> [...] A força da conclusão “não pode ser o caso que...” ou “x é impossível” é a mesma, independentes do campo: os *critérios* ou os tipos de motivo necessários para justificar a conclusão variam de campo para campo. Em qualquer campo, no caso de alguma coisa *ser* a conclusão de que ela “*não pode ser”* tem sempre de ser excluída. (TOULMIN, 2006, p. 51, grifos do autor).

Assim, a força de termos modais que indicam “impossibilidades” é a mesma independentemente do campo, mas os critérios para aplicação dos termos variam de um campo a outro. Em matemática, as impossibilidades, estão relacionadas ao que Toulmin (2006) chama de incongruência conceitual, que leva a contradições, podendo ser excluídas à luz de contraexemplos. Quando dizemos, em qualquer campo, que temos uma resposta impossível a uma determinada questão, essa deve ser excluída por critérios da área na qual estiver inserida.

Do ponto de vista da matemática, para que se justifique dizer que uma idéia é uma possibilidade, basta que não lhe seja imputada nenhuma contradição. Esse é um dos pontos que deve nortear a prática da argumentação em sala de aula de matemática, elegendo a convergência argumentativa como ponto regulador do processo.

Em relação ao termo modal “provavelmente”, Toulmin o considera também com força invariável em qualquer campo, mas com um elemento dependente da área na qual estiver inserido o critério. O autor ressalta que o termo em questão tem a função de qualificar as afirmações e representa indícios, sendo usado para dar garantias cautelosas, provisórias e restritas, também pode ser usado quando temos de explicitar “previsões para as quais, por uma ou outra razão concreta, não estamos preparados, com certeza, para nos comprometer” (TOULMIN, 2006, p. 73).

Em consequência, a partir de ações, como, por exemplo, movimentar uma figura na tela do computador, pode-se apresentar soluções candidatas anunciadas como prováveis ou plausíveis, mas que não sejam apropriadas. Nesse caso, podemos propor atividades à luz de novos eventos, que forneçam indícios, e pode acontecer de, no decorrer da comunicação de ideias, ser preciso modificar respostas ineficazes, que não estejam de acordo com as propriedades, definições, teoremas da matemática.

Para Toulmin (2006, p. 129), "a qualidade do indício ou argumento à disposição da pessoa que fala é que determina que tipo de qualificador aquela pessoa tem o direito de incluir em suas afirmações".

O autor ressalta que a função dos termos modais é caracterizar a força do argumento e os usamos como indícios e possibilidades que garantam credibilidade a justificativas que por ventura estejam sendo avaliadas. Segundo o autor, em qualquer que seja o campo em que sejam empregados os termos "provável", "não pode", e suas variações, mantém-se uma força invariante.

2.3 Estrutura dos Argumentos

Toulmin (2006, p. 135) compara o argumento a um organismo que apresenta uma estrutura bruta "anatômica" e outra mais fina "fisiológica".

> Quando explicitamente expomos em todos os seus detalhes, um só argumento [...] podem-se distinguir as fases principais que marcam o progresso do argumento a partir da afirmação inicial de um problema não-resolvido, até a apresentação final de uma conclusão. Cada uma dessas fases [...] representa as principais unidades anatômicas do argumento – seus "órgão", por assim dizer. E pode-se reconhecer uma estrutura mais fina, dentro de cada parágrafo, quando se desce ao nível das sentenças individuais; com esta estrutura mais fina é que os lógicos têm-se principalmente ocupado. Neste nível fisiológico introduziu-se a idéia de forma lógica e, afinal de contas, é ali que a validade de nossos argumentos tem de ser estabelecida ou refutada.

O autor caracteriza as fases que compõem o processo argumentativo como parte anatômica e estuda a parte fisiológica, que o possibilita analisar as operações dos argumentos sentença por sentença, a fim de ver como sua validade ou não validade está conectada ao modo como os dispomos, e que relevância tem esta conexão com a noção tradicional de forma lógica.

Para proceder à análise anunciada anteriormente, o autor parte das seguintes questões:

> Como devemos expor um argumento, se quisermos mostrar as fontes de sua validade? E em que sentido a aceitabilidade ou inaceitabilidade dos argumentos depende de seus defeitos e méritos "formais"? (TOULMIN, 2006, p. 136).

Toulmin critica o que caracteriza como "a simplicidade aristotélica", na qual se apresentam os argumentos: *premissa menor, premissa maior, portanto, conclusão*. Interroga-se se estas categorias são suficientes para análise geral de argumentos e propõe que a jurisprudência pode auxiliar em uma análise mais ampla do processo argumentativo.

> [...] Podemos adequadamente classificar todos os elementos de nossos argumentos sobre os três títulos, "premissa maior", "premissa menor" e "conclusão", ou será que nos enganamos, e não bastam três categorias? E será que as premissas maior e menor são suficientemente semelhantes para que possam ser agrupadas, com proveito, sob a mesma rubrica de "premissa"? A analogia com a jurisprudência pode iluminar estas questões (TOULMIN, 2006, p. 137-138).

Para apresentar sua proposta, o autor faz uma distinção entre a alegação/conclusão (C) e os fatos aos quais recorremos como fundamentos em que o argumento é baseado – que denomina de *dados* (D)[16]; em nosso caso serão construídos a partir das evidências experimentais ou teóricas, fatos, informações oriundas do pesquisador ou material didático, etc., ou seja, da interação do discente com as atividades propostas. Se desafiarmos, por exemplo, alunos que ainda não conhecem as fórmulas de áreas de figuras planas a apresentarem justificativas para determinação da medida da área de um retângulo a partir de uma dada unidade de medida de área, com o seguinte

[16] Jiménez Aleixandre et al. (1998) caracterizam os dados do modelo de Toulmin como: dado fornecido (DF) pelo professor, livro, texto, roteiro de experimento ou como um dado obtido (DO). Este último ainda é classificado como um dado empírico (DE), que pode proceder de uma experiência no laboratório, ou como dado hipotético (DH).

questionamento: o que você tem para seguir em frente? Uma resposta possível é que esses apresentem os dados ou a informação que lhes estejam ao alcance para chegarem a uma solução.

Pode acontecer da pergunta ser outra “como você chegou até aí?”. O discente pode apresentar um número específico de dados, como base para determinada conclusão específica que os comprometem com a passagem dos dados à conclusão; e a questão agora é sobre a natureza e justificação dessa passagem.

> [...] Nossa tarefa já não é reforçar a base sobre a qual construímos nosso argumento, mas em vez disso, consiste agora em mostrar que, tomando-se aqueles dados como ponto de partida, é apropriado e legítimo passar dos dados à alegação ou conclusão apresentada (TOULMIN, 2006, p. 141).

De fato, precisamos de afirmações gerais, hipotéticas, que sirvam como pontes, e autorizem o tipo de passo com o qual nos comprometemos em cada um dos nossos argumentos específicos. Normalmente, assevera o autor, este processo é escrito muito resumidamente, na expressão “se D, então C”. Pode-se, contudo, expandi-la, e reescrevê-la como: “dados do tipo D nos dão o direito de tirar as conclusões C”.

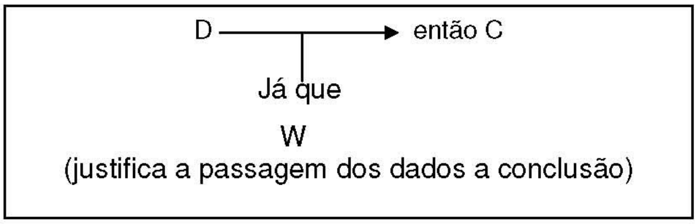
O autor chama este tipo de proposição de garantias ou justificativas (W) para passar dos dados à conclusão, para distingui-las, por um lado, das conclusões, e, por outro, dos dados. Essas “garantias” correspondem, em salas de aula de matemática, às justificativas dadas pelos alunos a conclusões que chegam, a partir do momento que resolvem um determinado problema, manipulam materiais concretos ou na tela do computador e observam fatos. São utilizadas pelos discentes como permissão de inferências e estão alicerçadas em raciocínios abdutivos, que, segundo Crespo (2007) correspondem à interpretação dos dados, extraindo destas informações significativas que possam explicar ou justificar a conclusão.

Esse tipo de raciocínio de acordo com Pedemonte (2002) e Crespo Crespo (2007) revela o grau de convicção que outorgamos a conclusão, a partir de fatos observados ou suposição da verdade de uma regra cuja hipótese consideramos a mais plausível.

A garantia é a parte do argumento que estabelece a conexão lógica entre os dados e a conclusão, em um primeiro momento, representa a razão de aceitação ou refutação do argumento. Essa nos permite, ainda, identificar as funções da argumentação, visto que pode assumir papel de explicação, comunicação e descoberta.

A partir desse novo elemento Toulmin (2006) propõe, então, um primeiro esquema padrão para analisar argumentos (Figura 7).

Figura 7 – Modelo com indicação da garantia



Fonte: Toulmin (2006).

De acordo com esse modelo, o apelo explícito a um argumento emerge da tentativa de se fornecer dados que possam fundamentar as conclusões; a garantia é, num certo sentido, incidental e explanatória, com a única tarefa de registrar, explicitamente, a legitimidade do passo envolvido. Buscamos a explicitação desse elemento, que pode revelar a força do argumento e possibilitar a convergência das argumentações para uma solução específica, fundamentada nas definições, propriedades, etc.

Recorre-se aos dados de modo explícito; e às garantias de modo implícito, essa distinção entre dados e garantias, afirma o autor, é semelhante à distinção que se faz, nos tribunais de justiça, entre questões de fato e questões de direito, e a distinção legal é de fato um caso especial do caso mais geral.

> [...] Algumas garantias nos autorizam a aceitar inequivocadamente uma alegação, sendo os dados apropriados; estas garantias nos dão o direito, em casos adequados, de qualificar nossa conclusão com o advérbio “necessariamente”; outras nos autorizam a dar provisoriamente o passo dos dados para a conclusão; ou a só dá-lo sob certas condições com exceções ou qualificações – para estes casos, há outros qualificadores modais mais adequados, como “provavelmente” e “presumivelmente” (TOULMIN, 2006, p. 144).

Em determinadas situações, não bastará que especifiquemos nossos dados, garantias e conclusão, pode ser preciso acrescentar alguma referência explícita ao grau de força que nossos dados conferem à nossa alegação em virtude de nossa justificativa.

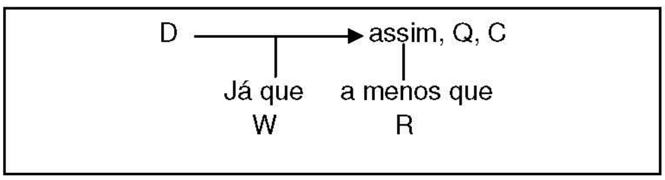
> [...] pode acontecer de termos que inferir um *qualificador*. É o que acontece também nos tribunais de justiça, onde, muitas vezes, não basta recorrer a um estatuto dado ou doutrina do direito comum, mas é necessário discutir também, explicitamente, o limite até o qual se aplica, num caso determinado, uma determinada lei específica; se a lei de ser inevitavelmente aplicada em tal caso, ou se tal caso pode ser tomado como uma exceção à regra, ou é um caso em que a lei só pode aplicar-se se for limitadas a determinadas qualificações (TOULMIN, 2006, p. 145).

Tomando em consideração estas características do argumento, o autor propõe uma estrutura para analisar os argumentos mais complexos. Com quantificadores modais (Q) e condições de execução ou refutação (R), que são diferentes dos dados e das garantias, por isso merecem lugares separados em seu modelo. Assim, uma garantia (W) não é em si nem um dado (D) nem uma conclusão (C), visto que implicitamente faz referência a D e C, a saber:

1) O passo de um para o outro é legítimo;
2) Q e R são em si diferentes de W, já que comentam implicitamente a relação entre W e aquele passo.

Os qualificadores (Q) indicam a força (grau de confiança) conferida pela garantia a esse passo – verdadeiro, provavelmente verdadeiro, provável; Q designa o qualificador da verdade, necessária ou plausível, enquanto que as condições de refutação (R) indicam circunstância nas quais se tem de deixar de lado a autoridade geral da garantia (Figura 8).

Figura 8 – Modelo com indicações do qualificador e refutação

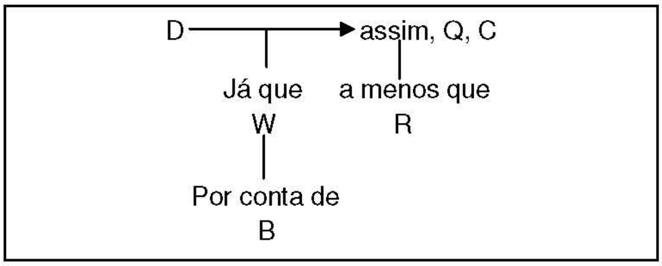


Fonte: Toulmin (2006).

Segundo Toulmin (2006), por vezes, nossa garantia pode ser desafiada, precisamos então de fatos adicionais com objetivo de legitimar e auxiliar na validação ou refutação de uma garantia. Temos, dessa forma, um novo elemento no modelo o apoio das garantias (B), que não precisa ser explicitado, “pelo menos para começar, as garantias podem ser aceitas sem desafio, o seu apoio pode ser deixado subentendido” (TOULMIN, 2006, p. 152).

De fato, o que subjaz nossas garantias e as autoriza são os apoios ou como se refere, por vezes, o autor, os conhecimentos de base, sem eles nem as próprias garantias teriam autoridade ou vigência (Figura 9).

Figura 9 – Modelo de Toulmin completo



Fonte: Toulmin (2006).

Afirmações de garantias são hipóteses, mas o apoio para as garantias pode ser expressos na forma de afirmações categóricas de fato, como também pode ser expressos os dados invocados em suporte direto para nossas conclusões.

O apoio em sala de aula de matemática, em grande parte das vezes, não é explicitado, mas é por meio deste elemento do modelo que se regula o processo de validação do argumento. No decorrer da prática argumentativa em sala, o professor ou por vezes os próprios alunos, recorrem aos apoios tanto para buscar contraexemplos para refutar argumentações, que estiverem em desacordo com as propriedades, definições e axiomas da matemática, como para validar argumentos que estejam em conformidade com as normas matemáticas.

Esse modelo nos permite um recorte da argumentação e, ao mesmo tempo, nos possibilita visualizar os encadeamentos dos argumentos, “é muito útil para determinar o tipo de raciocínio (dedutivo, indutivo, abdutivo, etc.) subjacente a argumentação” (PEDEMONTE, 2002, p. 40, tradução nossa).

Como vimos, Toulmin (2006) postula que o processo argumentativo é composto de duas partes uma anatômica, outra fisiológica. A primeira engloba todas as etapas do processo, desde a colocação de um problema até a apresentação de um veredicto para a solução proposta. A segunda é formada por elementos da primeira parte que favorecem a análise, para aceitação ou refutação das argumentações, vai dos dados à conclusão e é apresentada em um modelo conforme as Figuras sete, oito e nove.

Este autor apresenta a parte anatômica dividida em três etapas: o anúncio de um problema, as discussões sobre o problema e o veredicto. Segundo o autor, as etapas são demasiadamente complexas e podem requerer muitas páginas caso se queira transcrevê-las e analisá-las. Por esse motivo, direciona seus esforços nas análises da parte fisiológica, na qual amplia a idéia aristotélica de premissas e conclusão propondo uma estrutura que contempla, dentre outros elementos, justificativas para passagem à conclusão que podem requer apoios que atribuem consistência a argumentação e qualificadores que indicam a força que as justificativas apresentam.

Concordamos com Toulmin a respeito da necessidade da análise fisiológica para qualificarmos os argumentos, exibindo sua validação ou rejeição. Entretanto, acreditamos que, em sala de aula de matemática, seja de fundamental importância focar, também, a parte anatômica, pois essa abrange o planejamento do professor, tanto das atividades quanto das estratégias para envolver os alunos na prática da argumentação. O estudo da parte anatômica pode fornecer os caminhos necessários para se implementar essa prática como método de ensino, de forma a favorecer a compreensão dos conceitos em estudo.

Para descrevermos os principais aspectos de cada fase que compõe a parte anatômica da argumentação, utilizamos a ideia da experiência de referência proposta por Douek e Scali (2000), a classificação de argumentos de Pedemonte (2002) e Cabassut (2005). Desse último autor, elegemos também as funções de validação de argumentos em matemática, e, por fim, a noção de convergência argumentativa de Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005).

Em relação à parte fisiológica, pesquisadores como Pedemonte (2002), Knipping (2003), dentre outros, utilizaram o modelo na forma reduzida (Figura 7), pois, segundo essas pesquisadoras, são os elementos dessa estrutura que identificaram em suas pesquisas. Outros como Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007) trabalham com o modelo completo, em decorrência das justificativas em matemática apresentarem apoios, mesmo que de forma implícita, e momentos em que os alunos não estão com plena certeza de suas afirmações, mas têm razões para acreditarem no que falam, quando, por exemplo, fazem uso da intuição que, em geometria, muitas vezes pode nos induzir ao erro. Em nossa perspectiva, o processo argumentativo pode contemplar elementos das estruturas representadas nas Figuras sete, oito e nove dependendo de uma série de fatores tais como: a atividade proposta aos alunos, a forma de mediação do professor e o envolvimento dos discentes na prática da argumentação. Assim, podemos nos deparar com as três estruturas ao elegermos a prática da argumentação como método de ensino.

A prática da argumentação em matemática, na Escola Básica, pode ser desenvolvida em Aritmética, Álgebra ou Geometria, o que se busca com essa prática em qualquer dessas áreas é que os alunos, a partir de procedimentos empíricos, possam refletir e conjecturar por intuição, observação, analogias, experimentação, etc. Optamos pela Geometria por acreditarmos que esses procedimentos são peculiares a própria natureza geométrica e que o estudo deste campo requer a articulação com a Aritmética e a Álgebra.

Além disso, segundo Fonseca et al. (2001), nas salas de aula das séries iniciais, pouco tempo é dedicado ao trabalho com Geometria. Concordamos com as autoras ao relatarem que tal fato se justifica em decorrência de grande parte dos professores não terem clareza sobre o que ensinar de geometria.

Passamos a elencar a problemática relativa ao ensino de Geometria. Dentro desse campo, direcionaremos nossas reflexões para o estudo sobre os conceitos de área e perímetro de figuras planas, destacando as concepções que adotaremos desses conceitos, a partir dos referenciais descritos a seguir. Assim, pudemos propor uma sequência que favoreceu a emergência da prática da argumentação que favoreceu a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.

2.4 Reflexões sobre o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área e Perímetro de Figuras Planas

Na década de 1990, várias pesquisas denunciavam o abandono da Geometria no ensino básico, no Brasil, como podemos constatar em Perez (1991) e Pavanelo (1993), ao afirmarem que a Geometria estava ausente ou quase ausente da sala de aula. Este e outros fatores desencadearam uma série de pesquisas, a fim de minimizar as dificuldades apontadas.

Um dos argumentos utilizados pelas pesquisas foram as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) que destacam a importância de se resgatar o trabalho com Geometria no Ensino Fundamental, enfatizando o valor da Geometria e a relevância da construção de situações-problema que favoreçam a argumentação o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas.

> Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esse conteúdo (BRASIL, 1998, p. 86).

Segundo Lorenzato (1995), para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essas habilidades, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que tenham tratamento geométrico. Também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano.

De fato, a Geometria é um campo de estudo que nos possibilita observar diferentes formas de raciocínio, além de poder se integrar e auxiliar no ensino de Aritmética e Álgebra.

Acreditamos na importância da Geometria, tanto por sua aplicação prática, como por sua necessidade de institucionalização e também por suas diversas relações com outras áreas do conhecimento. Podemos identificar elementos da Geometria por toda parte, por isso, o trabalho com o espaço e a forma está intimamente relacionado à percepção espacial.

Os PCN sinalizam a importância de se trabalhar com a Matemática, em sala de aula, sob dois aspectos: 1) as aplicações no cotidiano; 2) as aplicações e avanços na própria ciência Matemática. É desta forma, também, que concebemos o estudo da Geometria, que desde os primórdios de sua criação, fala da inserção do homem no espaço Terra, da utilização deste espaço, da sua divisão e da construção de estratégias para resolver problemas relacionados à forma e ao espaço.

Duval (1995, 2003), em suas pesquisas, afirma que o estudo da Geometria na Escola Básica depende estritamente de duas formas de representação, uma para representar as figuras e suas propriedades e outro para enunciar as definições, os teoremas, as hipóteses, enquanto que, em outras áreas da matemática, podem-se fazer os tratamentos, por exemplo, na escrita simbólica ou em representação gráfica, convertendo-se o resultado de forma conveniente.

Os saberes que compõem o estudo da geometria inserem o conhecimento aritmético e algébrico, como podemos exemplificar na construção do conceito de áreas de figuras planas, que está associado à compreensão do conceito de unidade, do conceito de mudança de unidade, na contagem das unidades, e nas fórmulas do cálculo.

Com efeito, elegemos o estudo de área e perímetro de figuras planas por contemplarem aspectos que abordamos, e pela complexidade que envolve a compreensão desses conceitos.

2.4.1 Ensino e Aprendizagem de Área e Perímetro de Figuras Planas

Acreditamos que o conteúdo “medida” é um tópico que mostra as interconexões entre Geometria, Aritmética e Álgebra, auxiliando no desenvolvimento de habilidades e competências, não só para agir com destreza no cotidiano, frente a tarefas que lhe exijam este saber, mas, também, no entendimento da construção matemática desde seu aspecto experimental até seu caráter dedutivo.

Em nossa prática, como professor e pesquisador, evidenciamos as dificuldades dos alunos para entenderem os conceitos de área e perímetro de figuras planas. O foco na aplicação de fórmulas leva o aluno a uma aprendizagem mecânica e o distancia do real significado desses conceitos (NUNES, 2007).

Na escola primária, em geral, introduz-se o conceito de medida de área usando malhas quadriculadas e contagem dos quadrados no interior de uma figura geométrica. Gradualmente, usa-se o quadrado como unidade de medida. E, finalmente, aprende-se a calcular as áreas por meio de fórmulas. Constatamos nesse sequenciamento a ausência de atividades de manipulações, construções e conjecturas, especialmente aquelas que articulem instituições argumentativas como os ambientes não informatizados e informatizados. Além disso, a falta de atividades que apresentem a construção do conceito de medida de área de forma autônoma, que destaquem a variação das medidas de área e de perímetro, que possibilitem a manipulação de medidas não padronizadas na escola, causa a maioria das dificuldades no que diz respeito à apreensão deste tópico (WAGMAN, 1975; DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, BALTAR, 1996, 1998).

Uma grande quantidade de pesquisa centra-se sobre os processos necessários para se apreender o conceito de medida de área, assim como sobre as razões pelas quais os estudantes enfrentam dificuldades para compreender tal conceito (PIAGET; INHELDER; SZEMINSKA, 1948; WAGMAN 1975; ROMERO; CARRETERO; CUADRA, 1993; ROGALSKI, 1982; DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; BALACHEFF, 1988; BALTAR, 1996; LIMA, 1995; NUNES, 2007; CHIUMMO, 2002; FACCO, 2005). A maneira como este objeto matemático é ensinado é geralmente apontada, pelas pesquisas anunciadas anteriormente, como responsável pela dificuldade de compreensão da medida de área.

As pesquisas precedentes classificam como complexa e problemática a aprendizagem dos conceitos de área e perímetro. Vale ressaltar que essas constataram a confusão que os discentes fazem entre os esses conceitos

(WAGMAN, 1975; DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; BALACHEFF, 1988; LIMA, 1995; BALTAR, 1996).

2.4.2 Análise de Propostas para Aquisição do Conceito de Área

As contribuições dos trabalhos de Piaget e seus colaboradores referentes à compreensão do conceito de medidas são reconhecidamente significativas. Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) identificam duas operações fundamentais de que depende o entendimento do processo de medida: *conservação e transitividade*.

A conservação de área diz respeito a qualidades do objeto que permanecem inalteradas quando submetidos a certas transformações, como, por exemplo, as isometrias de rotação e translação, a invariância da área de um triângulo ou paralelogramo, quando deslocamos um dos seus vértices sobre uma reta suporte paralela a base da figura, ou a reconfiguração de superfícies por recorte e colagem.

Quanto à transitividade, podemos recortar um paralelogramo em sua diagonal e montar um retângulo que será equivalente ao paralelogramo, a partir do retângulo formar um triângulo, por transitividade a área do primeiro é equivalente a do terceiro.

Para Wagman (1975), os estudos relacionados ao desenvolvimento de conceitos de área, realizados por Piaget e seus colaboradores, omitem a investigação de alguns dos aspectos significativos da medida da área do ponto de vista matemático.

Segundo o autor, o grupo de Genebra não realizou tarefas relacionadas diretamente com as propriedades de “congruência” e “aditividade” de área, tarefas de duplicação de área principalmente considerando regiões quadradas, tarefas de unidade de medida de área relativas ao uso das unidades e a habilidade de considerar o relativo tamanho de diversas unidades. Não são estudadas, também, tarefas que relacionem a área em função de uma unidade arbitrária e como as medidas de área variam com a escolha da unidade (WAGMAN, 1975).

Wagman (1975) reconhece a grande contribuição de Piaget e seus colaboradores, porém ressalta a ausência de atividades relacionadas aos axiomas, de área, aditividade, congruência e unidade, como comentaremos e exemplificaremos a seguir, a partir dos destaques do autor:

1. Axioma da área. Se P é uma região poligonal dada, existe uma correspondência que associa a cada região poligonal P um único número positivo, tal que o número atribuído à região poligonal dada é único. Como exemplo, suponha que uma dada região R é um quadrado cuja medida do lado é 1 cm, atribuímos como medida de área para R o número positivo 1 cm^2. R é denominado de unidade de área e pode auxiliar para mensurar outras figuras, bastando saber quantas vezes essa unidade cabe na dada figura.
2. Axioma da aditividade. Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então a área dessa região é determinada pela soma das áreas daquelas regiões.

São duas as possibilidades de tarefas que se aproximam deste axioma.

1.1 Aditividade com decomposição – se dá na decomposição de uma região em sub-regiões, e o aluno deve descobrir uma reordenação das sub-regiões de tal sorte a cobrir toda a primeira região.

2.2 Aditividade sem decomposição – o sujeito deve realizar cortes em uma região para obter sub-regiões e realizar composições de outras regiões com elas.

3. Axioma da congruência. Se dois triângulos são congruentes, então, as respectivas regiões triangulares contidas pelos triângulos e seus interiores têm a mesma área relativa a uma unidade de área dada. Para aplicação deste axioma, podemos apresentar aos alunos dois triângulos retângulo congruentes e perguntar se eles têm a mesma medida de área. A intervenção que pode levar o aluno a utilizar um teorema em ato coerente ao axioma é o recobrimento – os alunos, a partir de uma

unidade de área triangular, devem encontrar quantas destas unidades necessitam para cobrir cada um dos triângulos.

4. Axioma da unidade. Dadas um par de unidades para medir distâncias, a área de um retângulo em respeito à unidade “quadrada” é o produto das medidas dos lados consecutivos do retângulo.

Esta proposta nos indica que a axiomática que compõe a construção do conceito de área deve ser levada em conta ao propormos sequências didáticas que ponham em evidência os conceitos de área e perímetro de figuras planas. Vejamos outros pontos de vista que podem nos auxiliar no desenvolvimento de nossa proposta. As indicações e mais especificamente as propostas seguintes nos serviram de apoio para elaboração de nossa sequência.

2.4.3 Construção do Conceito de Área na perspectiva de Douady e Perrin-Glorian

No intuito de construir um processo de aprendizagem para o conceito de área de superfície plana, para alunos de 9-12 anos, Douady e Perrin-Glorian (1989) partem das seguintes hipóteses:

1. Desenvolver o conceito de área, como grandeza ajuda os alunos a estabelecerem as relações necessárias entre o quadro geométrico e numérico.
2. Uma identificação precoce entre as grandezas e os números reforça as confusões feitas pelos alunos entre medida de comprimento e de área.

Na elaboração do processo de aprendizagem de área, as autoras propõem criar condições necessárias para uma apropriação consciente do lugar ocupado por uma superfície em um plano. Definindo, para tal, uma aplicação F de certo conjunto Σ de superfícies planas de tal sorte que todas as figuras que nos deparamos no ensino básico façam parte desse conjunto; associando posteriormente tais superfícies a valores em R^+.

A aplicação F deve verificar as seguintes propriedades:

- Se as superfícies S_1 e S_2 não apresentam pontos de seu contorno em comum, então: $(S_1 \cup S_2) = F(S_1) + F(S_2)$.
- Se a superfície S tem interior não vazio, então $F(S) > 0$.
- Para toda isometria g do plano e toda superfície S em Σ, $F((g(S)) = F(S)$; propriedade da invariância por deslocamento.

A aplicação F pode ser definida pela escolha de uma unidade, por exemplo, escolhendo-se um quadrado de lado A, tem-se $F(A) = 1$. Isto permite determinar a medida da área de certas superfícies; para as outras, procede-se por enquadramento.

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), para definir uma aplicação medida entre superfície e número com suficiente sentido para o aluno é preciso construir o conceito de área como grandeza autônoma e distinguir área e superfície assim como área e medida de área (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

As autoras afirmam, também, ser necessário diferenciar os conceitos de área e perímetro antes mesmo de obter um meio para medir as duas grandezas.

Baseadas em suas investigações, as autoras alegam que

> em relação ao objeto área, os alunos desenvolvem uma “concepção forma” ligada ao quadro geométrico ou uma “concepção número” ligada ao quadro numérico, ou as duas, mas de forma independente, eles tratam os problemas sem estabelecer uma relação entre os dois pontos de vista. Ora os problemas sobre áreas abordam essencialmente as relações entre os quadros numérico e geométrico (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 395, tradução nossa).

Por esta razão, as pesquisadoras são levadas a distinguirem três pólos: o pólo geométrico com as superfícies consideradas como parte do plano, o pólo grandeza como área e o pólo numérico como medida.

A aplicação medida representada pela relação entre as superfícies e os números estaria, assim, justificada didaticamente pela apropriação do conceito de área enquanto grandeza. O que reforça a primeira hipótese.

Com efeito, uma escolha conveniente de uma unidade de medida de área permite estabelecer as relações entre as medidas de comprimento e de área facilitando, assim, a construção da aplicação medida F.

Em suas pesquisas, as autoras identificaram erros comuns dos alunos associados à construção do conceito de área

> Por exemplo, uma diminuição de área é compreendida como uma diminuição da forma de sua superfície e provoca simultaneamente uma diminuição do perímetro: área e perímetro são então confundidos (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 395, tradução nossa).

Além dessa dificuldade apresentada pelos discentes, revelada nas pesquisas das autoras, deve-se atentar que a área é um número que se obtém por meio de cálculos no plano e que, geralmente, não se revela os elementos pertinentes para esse cálculo, como é o caso da associação que se deve fazer entre o número e a superfície, definida a partir da escolha de uma superfície unitária. No caso de alteração da superfície unitária, altera-se a medida de área, mas a área permanece a mesma.

A partir de suas constatações Douady e Perrin-Glorian (1989) distinguem três pontos de aprendizagem para a construção do conceito de área:

(a) Construir a noção de área como grandeza autônoma que consiste na comparação direta de superfícies por inclusão ou indiretamente por recorte e colagem, na atribuição a uma superfície de medida para recobrimento de formas variadas – que leva a diferenciar área e superfície e distinguir área e medida de área, controlando ao mesmo tempo a correspondência entre superfície e número.

b) Estender a aplicação medida a superfícies não preenchidas totalmente (recoberta) com uma dada unidade A. Dois pontos de vistas são possíveis: utilizar recorte e colagem para construir uma superfície S’ de mesma área que S e recobrir com A; utilizar os enquadramentos de S para recobrir as superfícies com A, ou com subdivisões de A que se aproxime de S por falta ou por excesso.

c) Destacar as diferenças e estabelecer a relação entre área e perímetro focando-se nas variações respectivas usando-se várias transformações.

Além da concepção de área apresentada pelas autoras, algumas constatações, no decorrer da intervenção, são de grande interesse para a nossa proposta. Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 408), há alunos que apresentam a seguinte concepção – o espaço ocupado por uma superfície está ligado à sua forma, ou seja, os alunos não aceitam que uma superfície de forma irregular possa ocupar menos espaço que outra figura compacta; confusões entre área e perímetro aparecem frequentemente – a ligação entre superfície e área aparece quando se pede aos discentes para modificarem uma dada superfície para fabricar outra de área menor e perímetro maior; a área é ligada ao recorte da superfície e o recorte é ligado as suas dimensões.

Quanto à abordagem de medida, as autoras relataram que os alunos não encontraram dificuldades para associar números diferentes à mesma superfície. As dificuldades surgiram nos casos em que os números eram fracionários.

As autoras constatam em sua investigação que há progresso do ponto de vista da independência de área e sua forma, e do ponto de vista da diferenciação entre área e perímetro. Mas as concepções errôneas reaparecem durante toda a intervenção.

> Aparentemente os vários pontos de vistas que emergem no decorrer das atividades levam os alunos a produzirem respostas erradas. Entretanto, as dificuldades foram superadas no momento das entrevistas, pela confrontação dos diferentes pontos de vistas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 414, tradução nossa).

Tal fato reforça nossa proposta de confrontar pontos de vistas na forma de argumentos em sala de aula, ou seja, nas explicações e/ou justificativas em matemática que possam diminuir os erros e as incertezas no momento das formulações. Assim, podemos evidenciar a importância de conjectura, contraexemplo e prova. Valorizando as atividades de formulação de conjecturas, podemos enfatizar o valor da argumentação como instrumento de compreensão, evidenciando que o caráter provisório das conjecturas é um componente necessário na atividade matemática.

As autoras constataram que os alunos levam em conta em suas decisões os efeitos das deformações, o efeito contínuo sobre as superfícies que manipulam, sobretudo nos casos de superfícies usuais. Com isso, alguns alunos identificavam um paralelogramo como um retângulo deformado. Para eles, os comprimentos dos lados não variam na deformação, e consequentemente a área também não.

No quadro geométrico, as autoras distinguiram dois pontos de vista sobre as superfícies e a forma como elas se relacionam: o estático como, por exemplo, a utilização do recorte e colagem que contempla uma superfície e não uma família de superfícies, originada de uma deformação, e o dinâmico, que privilegia os efeitos das ações sobre as superfícies, como por exemplo, a deformação de um paralelogramo de forma a alterar sua altura sem modificações nas medidas dos lados. As autoras apontam que, no quadro geométrico, uma interação entre os pontos de vista estático e dinâmico é necessária para construção conceitual da grandeza área e em sua dissociação com o perímetro.

Esse estudo evidencia complexidades que devem ser consideradas ao tratarmos do conceito de área de figuras planas. Essas ideias são corroboradas por Baltar (1996), que apresenta um aprofundamento das pesquisas iniciadas por Douady e Perrin-Glorian (1989). Apresentamos, a seguir, as contribuições da primeira autora e, por fim, elencaremos os pontos que consideramos necessários para nossa pesquisa em relação as duas investigações.

2.4.4 A Proposta de Baltar

Em sua pesquisa, Baltar (1996) buscou viabilizar a apreensão do conceito de área, ampliando a proposta de Douady e Perrin-Glorian (1989) sobre a aquisição da noção de área no Ensino Básico. A autora aborda o conceito de área focando principalmente a passagem da grandeza unidimensional para bidimensional.

Concordamos com Baltar (1996) ao afirmar que a diferenciação entre área e perímetro se apresenta sob vários pontos de vista, como, por exemplo: o ponto de vista topológico – pelo qual dissociar área e perímetro corresponde a reconhecer que área e perímetro não se referem exatamente ao mesmo objeto geométrico, pois a área corresponde ao interior da superfície e o perímetro a seu contorno; e o ponto de vista das variações que perpassa pela aceitação que a modificação da área não implica necessariamente na alteração do perímetro.

Por outro lado, as dificuldades de aprendizagem que podem aparecer nas situações-problema em torno da dissociação entre área e perímetro não são as mesmas segundo a natureza das superfícies. Assim, a autora distingue três casos possíveis para abordarmos tais dificuldades: superfícies quaisquer, retângulos e paralelogramos. Em relação ao primeiro caso, a autora afirma que dissociar área e perímetro de superfícies quaisquer do ponto de vista topológico consiste em associar área ao interior da superfície e o perímetro a seu contorno. Assim, propõe que

> A noção de área como grandeza unidimensional e a invariância de área por recorte-colagem permitem dissociar área e superfície: superfícies de formas variadas podem ter mesma área e apresentar perímetros diferentes. Essa dissociação é uma etapa importante para o questionamento das concepções geométricas e por consequência na aquisição da dissociação das variações respectivas entre área e perímetro de superfícies quaisquer (BALTAR, 1996. p. 66, tradução nossa).

De fato, atividades de recorte e colagem são necessárias para auxiliar na compreensão dos conceitos de área e perímetro como, por exemplo, nos casos em que precisamos mostrar que duas superfícies podem ter a mesma área sem apresentar, necessariamente, o mesmo perímetro e, que podem ter o mesmo perímetro, sem ter, necessariamente, a mesma área, essas características são válidas para qualquer que seja a superfície.

Outro caso que a autora destaca e que se deve ficar atento é o das superfícies utilizadas com maior frequência em sala de aula, como, por exemplo, o retângulo cujas fórmulas para se calcular as medidas de área e perímetro permitem evidenciar o cálculo da medida de área em termos de produto e o do perímetro em termos de soma.

E, por fim, os paralelogramos que, assim como os triângulos, possibilitam atividades em que podemos explorar a dissociação entre área e perímetro, por meio de situações que enfatizem as deformações dessas figuras e suas respectivas variância e/ou invariância de medida de área e perímetro.

> Durante a deformação "deslocamento de um dos lados sobre uma reta suporte", a área do paralelogramo não varia e seu perímetro varia [...]. No caso da "mudança de eixo de um dos lados em torno do vértice", ao contrário, o perímetro é conservado enquanto que a área varia. (pois as medidas dos lados não variam, e a altura varia) (BALTAR, 1996. p. 67, tradução nossa, grifos da autora).

Acreditamos que atividades assim construídas podem permitir aos alunos uma aproximação com a questão da validade de conjecturas. Além disso, podem se revelar como instrumentos que possibilitam aos discentes a formulação e teste de conjecturas, favorecendo, assim, a participação destes na produção de argumentos matemáticos.

Balacheff (1988) afirma que, ao analisar a tomada de decisão dos alunos sobre a validade de asserções, há dois pólos de concepções possíveis relativos ao conceito de medida de área e perímetro de um retângulo. Na primeira concepção, o aluno confunde área e superfície, perímetro e contorno; na segunda concepção, que ele denomina de concepção aritmética, as asserções são tratadas em referências às fórmulas de cálculo de área e perímetro.

Para estudar os aspectos de invariâncias que permitem conservar área e perímetro a autora apóia-se na proposta de Douady e Perrin-Glorian (1989), já discutida anteriormente, que distingue no quadro geométrico dois pontos de vista necessários para a construção do conceito de áreas e sua dissociação com o perímetro: o estático e o dinâmico.

O objetivo principal das atividades com papel e lápis propostas pela autora foi de desenvolver os elementos necessários à compreensão das fórmulas de área e perímetro das figuras estudadas e de disponibilizar aos alunos as fórmulas por meio de ações que requeiram o trabalho com medições. O objetivo da aprendizagem nas atividades dinâmicas foi estudar as fórmulas de área e perímetro do ponto de vista dos invariantes geométricos[17] em jogo. "Isso não significa que o aspecto dinâmico esteja totalmente ausente no papel e lápis, pois nada impede que os alunos coloquem implicitamente em prática os raciocínios dinâmicos" (BALTAR, 1996, p. 112, tradução nossa). Para efeito de maior controle da variável "estático-dinâmico", a autora associa o ponto de vista estático ao trabalho com papel e lápis e o ponto de vista dinâmico ao uso de um ambiente informatizado no caso utilizando o *cabri-géomètre*.

A manipulação de figuras na tela do computador possibilita evidenciar situações de invariância de área que favoreçam conjecturas como, por exemplo, que a área de um triângulo é invariante quando as medidas da base e da altura são conservadas.

Atividades como as descritas anteriormente favorecerem a formulação de conjecturas e devem ser aproveitadas, principalmente, porque fazem surgir episódios de argumentação em matemática. É necessário aproveitar as comunicações de ideias favorecidas por situações que possam, além de favorecer a apropriação dos conceitos em jogo, nos revelar as características intrínsecas das argumentações.

Para construção de nossa sequência, admitimos as concepções de Douady e Perrin-Glorian (1989), ao assumirem a área de figuras planas como uma aplicação medida F, cuja implicação é que, para dar sentido ao conceito de área, é necessário que o aluno realize atividades nas quais trate esse conceito como grandeza autônoma, ou seja, sem relacioná-la inicialmente ao número que representa a medida de área. Construímos, então, atividades que favoreceram a distinção entre área e superfície, assim como área e medida de área; trabalhos com unidades de medidas diversificadas, tanto em sua forma, quanto em dimensões, que, segundo as autoras, facilitam a construção da aplicação medida F; questões que abordem variações de medidas de área e perímetro, que

[17] Nesse sentido, os invariantes geométricos são relativos às invariâncias de áreas ou perímetros, quando submetemos determinadas figuras a certas deformações como, por exemplo, a conservações da área de um triângulo construído entre duas paralelas – ao deslocarmos um dos vértices sobre uma reta suporte e fixarmos outros dois.

minimizam as confusões que normalmente os discentes apresentam sobre esses conceitos, conforme constatado pelas autoras; atividades de recorte e colagem incluindo superfícies cuja unidade escolhida não as recubra totalmente, que, segundo as autoras, são necessárias para estender a aplicação medida.

Outra questão, anunciada pelas autoras, à qual recorremos para idealizar nossa sequência, foi a da necessidade de propor atividades que possibilitem a distinção e interação entre os pontos de vista estático e dinâmico. O primeiro está relacionado a questões como as de recorte e colagem, utilização de fórmulas, etc., o segundo aborda, por exemplo, o deslocamento de um dos vértices de um triângulo sobre uma reta suporte.

A construção de nossa sequência leva em conta, também, as investigações propostas por Baltar (1996), ao sugerir que a compreensão do conceito de área perpassa pela diferenciação entre área e perímetro. A autora sugere atividades que abranjam o ponto de vista topológico, como, por exemplo, aquelas que dissociam área e perímetro, evidenciando que área corresponde ao interior da superfície e o perímetro a seu contorno; e o ponto de vista das variações relacionado à aceitação que a modificação da área não implica necessariamente na alteração do perímetro.

Tomando como referência as indicações de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996) admite a necessidade de se formular atividades que evidenciem os pontos de vista estático e dinâmico, para compreensão dos conceitos de área e perímetro, assumindo que o ponto de vista dinâmico pode ser explorado na tela do computador com uso de *softwares* geométricos. Tal como essa autora, propomos nossas atividades utilizando o *software* Geogebra, propondo atividades como rotação e translação de um quadrado na tela do computador e invariância de área com variação de perímetro e vice-versa, evidenciando, a distinção entre esses conceitos.

Para viabilizar a concretização de nossa proposta, passaremos a descrever a metodologia adotada, com seus respectivos procedimentos metodológicos.

3 Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Neste capítulo, anunciaremos os pressupostos da Engenharia Didática, utilizados em nossa pesquisa, assim como os procedimentos metodológicos que nos possibilitaram a coleta e respectiva análise dos dados.

3.1 Pressupostos da Engenharia Didática Adotados

Utilizamos aqui pressupostos metodológicos da engenharia didática, que coadunam com nosso experimento, visto que, de acordo com Almouloud (2007a), esta metodologia é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental construído, realizado, observado e analisado em sessões de ensino na sala de aula. "Caracteriza-se também como uma pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhes são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*" (ALMOULOUD, 2007a, p. 171).

Realizamos um levantamento a respeito das temáticas que compõem nossa pesquisa: a argumentação e os conceitos de área e perímetros de figuras planas, tal levantamento se constitui na primeira fase de uma engenharia didática que são as análises preliminares. Tais análises, segundo Artigue (1988), constam das considerações realizadas sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos do assunto em questão. Apoiada na análise epistemológica dos conteúdos objetos de ensino, análise do ensino habitual e dos seus efeitos, análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos; da compreensão das condições da realidade, sobre a qual a experiência será realizada e dos objetivos específicos da observação.

Esta primeira fase possibilitou a realização da análise *a priori* que nos permitiu prever as possíveis dificuldades que os alunos teriam na realização dos problemas propostos, os objetivos de cada atividade, as estratégias que poderiam utilizar nas resoluções, as análises dos conhecimentos necessários para a obtenção das soluções de cada atividade, a descrição de cada atividade e a coerência das ligações entre cada uma delas.

No momento da experimentação, ou seja, no momento em que se deu o contato do pesquisador com os alunos sujeitos da investigação, observamos as atitudes e as produções dos discentes, uma vez que essas foram de grande relevância para a análise.

Para procedermos à análise *a posterioriI,* apoiamo-nos em dados colhidos durante a experimentação e as produções dos alunos em classe. Nesta fase, fizemos uso das observações de dados obtidos por meio da utilização de metodologias externas: gravações, filmagens, anotações, entre outros.

Por fim, no momento da validação dos resultados, confrontamos os dados da análise *a priori* e *a posteriori*, validando ou não a sequência didática proposta.

Intervenção e Registros

A intervenção foi realizada pelo próprio pesquisador no decorrer do período letivo de 2010, em 10 sessões de uma hora e meia de duração cada. O experimento foi desenvolvido em duas instituições argumentativas: a sala de aula e laboratório de informática, no âmbito de uma escola municipal, situada na Região Metropolitana de Belém do Pará, com seis alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, divididos em duas equipes, cada uma compostas por três discentes. Trata-se de uma pesquisa experimental, com observação participativa, cujas aulas foram gravadas em vídeo e em áudio e transcritas para serem analisadas.

Perfil dos Sujeitos

Em relação à geometria plana, os PCN (1997) indicam que um dos objetivos para o segundo ciclo é possibilitar ao aluno identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetria, ampliações e reduções. Nesse nível, segundo esse documento, os discentes devem tratar, dentre outros conteúdos, do cálculo de medidas de área por meio de malhas, representação e identificação de figuras poligonais e circulares, assim como suas semelhanças e diferenças; composição e decomposição de figuras planas; exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc.

Na turma em que desenvolvemos a investigação, os discentes tinham aulas com um professor generalista que focou, segundo seus relatos, primordialmente a leitura, escrita e problemas com as quatro operações matemática. A classe contava também com outra professora que ministrou aos alunos da turma do 5º ano a disciplina artes, na qual, de acordo com a referida docente, trataram entre outras coisas, de desenho geométrico, devolveram trabalhos com elementos básicos da geometria plana e espacial, como ponto, reta (posições), plano, ângulos, reconhecimento de figuras geométricas pela forma, assim como os elementos que as compõem, como vértices, lados, ângulos, diagonal e uso de instrumentos de desenho como régua, compasso e transferidor.

Os discentes já apresentavam conhecimentos básicos de Geometria plana, necessários ao bom andamento das atividades propostas relativas aos conceitos de área e perímetro de figuras planas.

Além disso, nossa familiaridade com referida escola, em que ministramos aulas de matemática para alunos do 6º ao 9º ano, durante 07 anos, possibilitou-nos identificar que a maior parte dos professores do 1º ao 5º ano prioriza trabalhar a aquisição da capacidade de ler, escrever e calcular. Assim, optamos pela geometria em virtude do apelo à intuição e de ser um campo ainda pouco explorado neste nível de ensino, já que, em relação ao ensino de matemática nos primeiros ciclos do ensino fundamental, o foco recai sobre os números naturais e as quatro operações. Deste modo, mesmo com alunos apresentando conhecimentos básicos da Geometria, foi possível explorar questões pouco presentes no cotidiano escolar daqueles, fato importante quando se quer por em destaque conjecturas, validações, refutações, etc.

TERCEIRA PARTE

EXPERIMENTO E ANÁLISE

Nesta parte, destacaremos características relativas à escola e aos sujeitos da pesquisa, descreveremos e analisaremos as atividades propostas projetando as prováveis dificuldades e estratégias que os alunos poderão apresentar, ao se defrontarem com as resoluções dos problemas propostos. Cada atividade será apresentada com seus respectivos objetivos, justificativas e análises *a priori e a posteriori*. Procederemos, também, as análises à luz de nossos referenciais teóricos, a fim de elegermos a argumentação como método de ensino.

1 Escola e Sujeitos da Pesquisa: relatos do experimento

A intervenção foi realizada no âmbito da Escola Municipal Florestan Fernandes, situada na Região Metropolitana de Belém do Pará com 06 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Em relação às instituições argumentativas utilizadas nesta pesquisa optamos por trabalhar não somente na sala de aula, mas também no laboratório de informática, visto que tanto o processo de argumentação quanto as peculiaridades na compreensão dos conceitos que elegemos para desencadear o processo de comunicação de ideias nos remetem, segundo nosso quadro teórico, a envolver nossos sujeitos de pesquisa nos ambientes supracitados. Assim, poderemos ampliar as possibilidades de exploração da argumentação em matemática.

A sala de aula naturalmente é o espaço no qual podemos observar as nuances do processo argumentativo, mas não podemos deixar de lado que o ambiente informatizado está cada vez mais presente no processo de ensino e aprendizagem e tem sido foco de grande parte das pesquisas sobre argumentação em matemática. Assim sendo, partimos do pressuposto que o uso do computador como ferramenta para ensino e aprendizagem de matemática, mais particularmente dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, permite a abordagem de problemas complexos de formas mais atrativas, já que a experiência de construção na tela do computador consente observações mais imediatas de propriedades das figuras, como por exemplo, da invariância por deslocamento. Dessa forma, pode-se validar ou não as conjecturas que antecedem as construções, desencadeando, por conseguinte, um processo mais imediato de comunicação de ideias.

As instituições se justificam basicamente em decorrência de:

1. A problemática envolvida na aquisição dos conceitos de área e perímetro, segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), requer que tais conceitos sejam abordados articulando os pontos de vista estático e dinâmico que se impõem por questões didáticas. O ponto de vista dinâmico pode ser concebido de várias formas. Em sua tese de doutorado, Baltar (1996) adotou a dinamicidade propiciada pela geometria dinâmica do programa *Cabri Géomètre*, como ferramenta que possibilita as ações necessárias que abrangem esse ponto de vista. Em decorrência da escola em que desenvolvemos nossa proposta contar com uma sala de informática adequada a este tipo de trabalho, seguimos as indicações desta autora e admitimos que o ponto de vista dinâmico, necessário à apropriação dos conceitos em questão, fosse abordado, usando-se a geometria dinâmica favorecida pelo programa Geogebra.

2. Em segundo lugar, as pesquisas mais difundidas sobre argumentação, como as de Pedemonte (2002), Hoyles e Healy (1999), Healy e Hoyles (2000), Parzysz (2002, 2006) dentre outras, como já destacamos anteriormente, indicam-nos que o ambiente informatizado auxilia em demasia o processo argumentativo nas aulas de matemática, funcionando como uma motivação a mais para a integração do aluno na dinâmica de comunicação de ideias.

Com referência ao ambiente informatizado (Figura 10), as duas primeiras intervenções foram compostas por atividades de familiarização com o *software* Geogebra.

Nosso objetivo, naquele momento, foi familiarizar os participantes com ferramentas básicas do *software* Geogebra como: ocultação da janela de álgebra e dos eixos, criação e manuseio de ponto, reta, semi-reta, segmento de reta; posições entre retas; ângulos e polígonos; indicação de pontos e respectiva movimentação desses; exibição de rótulo e objeto e renomeação de pontos.

Figura 10 – Foto dos alunos na sala de informática

Fonte: Autor

Na fase de familiarização com o programa, usávamos o último horário de aula da turma na segunda-feira. Para não comprometermos o planejamento dos professores, solicitamos autorização do professor, da escola e dos pais dos alunos, para realizarmos as atividades em horário diferente do horário de aula (11 h às 14 h 45 min), ficando então estabelecido o momento de estudo nos dias de terça e sexta feiras nos horários de 9 h 30 min às 11 h.

A intervenção contou com seis alunos, o que favoreceu o desenvolvimento das atividades, tanto pela melhor captação das comunicações de ideias como pela facilitação de mediação das discussões. Os discentes trabalharam em grupos de dois ou três componentes de acordo com a frequência em cada sessão (Figura 11). As sessões foram gravadas em vídeo e áudio e transcritas para serem analisadas. Doravante denominaremos os grupos pelas letras “A” e “B”. Não pretendemos divulgar os nomes dos integrantes dos grupos, por esse motivo os identificaremos por pseudônimos: Grupo A (Léo, Mary e Anne), Grupo B (Will, Roni e Nei).

Figura 11 – Foto dos alunos na sala de aula

Fonte: Autor

Concentraremos nossas análises em um dos grupos (grupo “A”). Eventualmente, discorreremos sobre o grupo “B” e discussões entre os grupos. Procederemos dessa forma, em decorrência de ser suficiente a análise dos dados fornecidos por um dos grupos para alcançarmos nosso objetivo.

Nós não apresentaremos a análise detalhada de todas as atividades, pois o que nos interessa são as comunicações de ideias evidenciadas em cada fase que possibilitaram o estabelecimento da argumentação enquanto método de ensino, enfocando a apreensão do conceito de área e perímetro de figuras planas. As análises estão compostas em duas etapas: a primeira, que Toulmin denomina de parte anatômica das argumentações; e, a segunda, contendo a parte fisiológica. Essa última foi representada em quadros divididos em duas colunas, nas quais realizaremos as análises estrutural e funcional. À esquerda, transcrevemos trechos das comunicações de ideias suscetíveis a recortes e respectivo enquadramento no modelo de Toulmin exposto à direita.

2 Experimento

Apresentaremos a seguir a metodologia que concebemos para proceder às análises de nossa sequência didática, inspirados nas etapas que compõem o processo argumentativo de Toulmin (2006). A partir das idéias do autor, propomos os pontos constitutivos das etapas e suas respectivas funcionalidades em sala de aula de matemática, a fim de estabelecermos a prática da argumentação como método de ensino.

2.1 Metodologia da Sequência

Ao afirmar que a função primária dos argumentos são as justificações apresentadas como apoio de asserções, Toulmin (2006) propõe as fases que normalmente nos defrontamos na constituição de uma argumentação. Em sua proposta, o autor não está preocupado em discutir sobre as nuances de cada fase, e sim, os pontos principais do processo argumentativo, que compõem segundo ele, a parte fisiológica desse processo. Assim, proporemos as características de cada fase no âmbito do ensino de matemática, a partir de nossas pesquisas na área, apoiando-nos nas investigações de Douek e Scali (2000), Pedemonte (2002), Cabassut (2005) e Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005). Nossas inferências perpassam por eleger a experiência de referência como uma forma de desencadear uma problemática, identificar os tipos de argumentos e suas respectivas funções de validação no decorrer da comunicação de ideias e analisar a força das argumentações tendo como parâmetro sua convergência para uma solução específica. Dessa forma, postulamos que estas fases podem servir como orientações para que a prática da argumentação possa ser desenvolvida no ensino de matemática, de modo a favorecer a compreensão dos conceitos estudados.

As fases de uma argumentação acrescidas de nossas inferências de acordo com Toulmin (2006) são:

1. Apresentação do problema – A problemática central relativa à apreensão de um determinado conceito, como os de área e perímetro de figuras planas, é composta por problemas periféricos que compõe particularidades necessárias à aquisição conceitual do objeto em jogo, como, por exemplo, o entendimento de área enquanto região e medida de área como mensuração desta região, a partir da escolha de uma unidade de medida.

Para efeito de fase inicial, conceberemos um primeiro problema que possa transversalizar a sequência e envolver os alunos no processo de comunicação de ideias. Em nossa concepção, este momento inicial pode se dar em termos de experiência de referência anunciada por Douek e Scali (2000). Considerando as devidas adaptações aqui sugeridas, como a de situar a referida experiência de forma pontual, ou seja, no momento inicial e quando necessária para se abordar novas particularidades do conceito em jogo.

2. Opinião sobre o problema – A ação dos alunos sobre as atividades deve lhes possibilitar coletar indícios que possam apresentar em defesa de uma solução específica. Esta fase, em geral, pode se desdobrar em uma série de estágios que veremos mais à frente. Ressaltamos, nesse momento, as afirmações de Toulmin (2006) a respeito de que qualquer que seja a natureza de uma asserção específica, sempre se pode contestar a asserção e/ou pedir atenção aos fundamentos em que a asserção se baseia. Assim, poderemos analisar, classificar e avaliar as argumentações justificatórias a partir de seus apoios, estruturas e méritos que possam reivindicar no interior de um determinado campo.
3. Veredicto – relacionamos esta fase com a validação, ou seja, com uma das etapas que o processo de argumentação está sujeito. Lembrando que o veredicto pode remeter a outro ato judicial derivado deste, assim como a validação local pode remeter a uma problemática que exija a validação global, como, por exemplo, podemos validar que o triângulo pode ser usado como unidade de medida; em seguida evidenciar que várias figuras, que apresentam características próprias necessárias ao recobrimento de uma determinada superfície, podem ser usadas da mesma forma.

2.1.1 Características da Primeira Fase

Na primeira fase, a comunicação de ideias é bem dispersa, não há um núcleo comum, mas alguns indícios coletados na atividade levam a um direcionamento que converge para argumentações sobre o objeto que se queira focar. A experiência de referência deve, então, de alguma forma suscitar os conceitos relacionados ao objeto, que devem emergir nas discussões. Adotaremos, assim, a experiência de referência como introdutória do processo argumentativo que tenha finalidade da aquisição conceitual de um determinado objeto.

Douek e Scali (2000) postulam que para atingir a construção conceitual por meio de argumentações em sala de aula é necessária uma atividade que possa ser considerada uma experiência de referência. Tal atividade está condicionada a uma situação de argumentação, no qual os alunos precisem explicar, justificar ou contrastar argumentações a respeito de um dado conceito, seja em nível básico ou avançado. Dessa forma, para apreender o objeto em jogo a partir de experiência de referência, esta deve estar conectada de forma funcional às representações simbólicas desse conceito.

Tal experiência, de acordo com as pesquisas de Douek e Scali (2000), deve possibilitar argumentações que possam desencadear ideias sobre os objetos do saber em jogo, no caso, área e perímetro de figuras planas, além de envolver os alunos em situações que suscitem cooperação e comunicação de ideias, necessárias ao desencadeamento de argumentação em matemática. O envolvimento de algumas representações simbólicas, aliadas ao uso consciente[18] destas possibilitam aos discentes relacionarem a experiência aos saberes envolvidos nela, favorecendo assim interpretações semânticas desses.

A experiência de referência deve envolver o aluno em uma problemática na qual este possa buscar soluções de forma interativa com seus pares e professores. Ela deve igualmente permitir aos discentes que relacionem representações simbólicas usadas em determinados contextos a novas situações,

[18] Para Douek e Scali (2000), a comparação entre procedimentos alternativos para resolver um dado problema pode ser uma importante maneira de desenvolver este uso consciente.

acentuando-se dessa forma o ideal da devolução ao aluno da responsabilidade da apreensão conceitual. Tal experiência, em nossa concepção, deve se desenvolver em um primeiro momento da sequência e ser retomada em vários outros momentos de forma transversal, a fim de favorecer a relação necessária entre uma atividade e outra.

2.1.2 Características dos Estágios da Segunda Fase

Nesta fase, as comunicações de ideias se intensificam. É o momento em que devemos realizar uma análise profícua das argumentações (funcional e estrutural), classificando-as e direcionando-as para a última fase, a de validação. Toulmin (2006) subdivide esta fase em três estágios:

- No primeiro estágio, em qualquer problema, há de se admitir que uma série de diferentes sugestões mereça ser considerada. Todas estas, no primeiro estágio, têm de ser admitidas como candidatas ao título de "solução".
- O segundo estágio é o da exposição das possíveis soluções. A subjetividade que comporta as argumentações desse estágio evidencia ligações entre conhecimentos já constituídos e em vias de constituição. A intuição leva a congregar estes conhecimentos. Aqui se faz emergir o objeto explicitamente, articulando às representações, o gestual, a comunicação e o confronto de ideias contraditórias. Esse estágio nos remete a momentos em que Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005) indicam haver argumentos isolados que devem interagir e se articularem em torno de um dado assunto.
- Por fim, uma das alegações candidatas à solução é singularmente boa. Assim, rejeitam-se algumas das sugestões usando os termos modais "não pode ser", "é impossível" e outros semelhantes, a fim de eliminarmos as que não se adéquam aquela problemática. Assim mesmo, poderemos ter uma solução cujo termo modal mais adequado seja "provavelmente", "possivelmente", indicando que temos uma resposta mais plausível, mas que não podemos ser categóricos em

apontá-la como a solução. Estes termos modais podem se apresentar de forma explícita, por correlatos ou afirmações que os enquadrem em um processo de exclusão ou de possibilidade.

Concebemos que o primeiro e segundo estágios, ocorram normalmente, em sala de aula, de forma simultânea, assim, vamos considerá-los como único.

As rejeições às soluções candidatas podem dar-se à luz de informações novas, que possam nos levar a considerá-las descartáveis. As observações, ações e discussões dentro de um contexto específico são úteis para que se vá em direção a uma solução específica. Neste momento, é importante o registro das soluções "provisórias" para que possamos identificar a marca do progresso das soluções plausíveis, transitórias às categóricas e irrefutáveis.

Por conseguinte, as ações requeridas pelas atividades devem possibilitar a coleta de indícios que favoreçam a ampliação de uma ideia em uma argumentação insuficiente ou que não tenha validade em um determinado campo. Assim, as verdades transitórias são postas à prova diante de fatos (que fornecem os dados) oriundos de atividades e podem fortalecer as crenças, ou seja, agregar mais força ao argumento ou reduzir a força deste até o ponto em que se evidencie a validação ou refutação do argumento.

Este direcionamento está em consonância com a perspectiva de Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005), ao afirmarem que uma das funções da argumentação é a de congregar em torno de um assunto específico, várias ideias que em um primeiro momento estão dispersas, mas, a partir da mediação do professor devem convergir para uma solução específica que esteja de acordo com as especificidades da área de estudo em questão. Desse modo, vai se configurando a força de um argumento, à medida que esse esteja em conformidade com as normas estabelecidas pelo campo de estudos em que esteja inserido.

Devemos levar em conta no processo de convergência argumentativa as indicações de Cabassut (2005), ao destacar que as transformações sofridas pelas argumentações, relacionadas ao ensino de matemática, se dão em decorrência dessas serem compostas por uma dupla transposição[19] – de argumentos matemáticos e argumentos não matemáticos.

No decorrer desse processo, o qual Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005) chamam de convergência, acreditamos ser necessário procedermos a uma caracterização dos argumentos. Estes, quanto à sua natureza, podem ser pragmáticos, semânticos ou formais. Em relação à natureza dos raciocínios utilizados pelos alunos, poderão ser dedutivos, indutivos ou abdutivos. Essa caracterização qualifica os argumentos e pode auxiliar tanto para direcionar a validação em conformidade com seu estatuto de conjectura, definição, teorema, etc., quanto para evidenciar o estabelecimento de competências argumentativas (cf. PEDEMONTE, 2002; cf. CABASSUT, 2005; cf. GRÁCIO, 2009).

2.1.3 Características da Terceira Fase

Como ressaltamos anteriormente, Cabassut (2005) assume que para termos compreensão do processo de validação de argumentação em sala de aula de matemática, devemos levar em conta que esse processo resulta da articulação entre argumentações matemáticas e argumentações não matemáticas.

A validação matemática, segundo o autor, está relacionada aos saberes relativos à matemática, como as definições, teoremas, propriedades que compõem o processo de demonstração – organizados em instituições matemáticas[20] –, nas quais ela seja objeto do saber. A apropriação desses saberes possibilita a compreensão do processo de validação ali presente.

---

[19] Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de *transposição didática* (CHEVALLARD, 1991, p. 39, tradução nossa).

[20] São instituições nas quais são produzidos novos conhecimentos sobre a área, como por exemplo, as universidades (CABASSUT, 2005).

> A demonstração matemática é o procedimento de validação nas instituições matemáticas, nas quais ela e objeto de saber. A organização desse saber pode variar em função das instituições matemáticas consideradas (CABASSUT, 2005, p. 77, tradução nossa).[21]

Por outro lado, tem-se as argumentações não matemáticas como as pragmáticas, anunciadas por Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005), que estão presentes em sala de aula, como, por exemplo, o recurso a uma ação, seja de observação, manipulação, etc., que possa justificar uma conclusão. Neste caso, a garantia será sustentada pela realização da ação que fornecerá os dados necessários para que se chegue a uma conclusão. Tais argumentações remetem, de acordo com Cabassut (2005), a validações não matemáticas que produzem saberes, como aquelas utilizadas em outras áreas do conhecimento e os "saberes não científicos" da vida cotidiana produzidas em instituições como a família, grupo de amigos, etc.

Para o autor, as instituições de ensino de matemática são instituições que recorrem a validações matemáticas e não matemáticas. Assim, observamos que as argumentações pragmáticas, como aquelas oriundas da visualização na tela do computador, podem auxiliar na compreensão de propriedades geométricas.

É necessário destacar que as argumentações não matemáticas e suas respectivas validações servirão de apoio para se compreender propriedades, definições, provas, etc., e, assim, auxiliam na validação presente no ensino da matemática (CABASSUT, 2005).

Para evidenciar essa composição de argumentos em sala de aula, Cabassut (2005) classifica os argumentos em pragmáticos, semânticos e formais que já foram elencados e discutidos na primeira parte dessa tese e são retomados para compor a segunda e terceira fases do processo argumentativo. Essa classificação, em conjunto com a categorização sugerida por Pedemonte (2002), auxilia na identificação e análise da natureza e dos raciocínios dos

---

[21] La démonstration mathématique est la procédure de validation dans les institutions mathématiques dont elle est un objet de savoir. L'organisation de ce savoir peut varier suivant les institutions mathématiques considérées (CABASSUT, 2005, p. 77).

argumentos considerados pelos alunos como argumentos confiáveis para validação.

Para auxiliar na análise e qualificação dos argumentos produzidos pelos alunos, levaremos em consideração, também, as funções de validação da argumentação, que remetem à última fase do processo argumentativo. As referidas funções já discutidas são: função de verificação, de explicação, de sistematização, de descoberta ou invenção e de comunicação.

A compreensão do processo de validação, segundo Toulmin (2006), pressupõe que se tenha consciência de que uma boa causa, solidamente construída, uma alegação bem fundada ou fortemente apoiada pelos critérios do campo em que se insere, resistirá à crítica e será a “causa” que corresponde ao padrão exigido, para a qual se pode esperar veredicto favorável.

As funções ocorrem, em geral, de forma simultânea, mas é possível evidenciar a prevalência de uma ou mais delas no processo argumentativo. Partindo desse pressuposto, em nossas análises, caracterizaremos a partir dessa preponderância as funções da validação.

3 A sequência

Nossa sequência foi proposta a partir das considerações anunciadas por Wagman (1975), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), a respeito da compreensão dos conceitos de área e perímetro. A sequência aqui apresentada busca atender a nossa questão de pesquisa, a fim de estabelecer o processo argumentativo como método de ensino.

A dinâmica das atividades observadas teve por objetivo, sobretudo, criar um ambiente que favorecesse a prática da argumentação, e, ao mesmo tempo, propiciasse ao discente a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. As fases do processo argumentativo, que, segundo Toulmin (2006), compõem a parte anatômica dos argumentos, serão recortadas a fim de exibirmos a parte fisiológica. Esta, de acordo com o autor, pode ser organizada em uma estrutura que comporta os elementos essenciais de uma argumentação, o que nos fornece dados necessários para análise e constatação de que a prática da argumentação leva à compreensão de conceitos em matemática. As análises serão realizadas à luz de critérios estabelecidos por nós em cada fase do processo.

As atividades foram compostas por duas instituições argumentativas: ambiente informatizado e não informatizado. No bloco de sessões do ambiente não informatizado, todas as atividades foram feitas com o uso de lápis, papel e material concreto, no qual as validações foram realizadas, em grande parte, de forma empírica. No segundo bloco, realizado em um laboratório de informática, tendo como recurso o *software* Geogebra, as atividades foram verificadas e validadas por meio de manipulações possibilitadas pela geometria dinâmica. Em determinados momentos, recorremos a institucionalizações dos conceitos em jogo.

A elaboração da sequência didática envolve a apropriação dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, a partir do compartilhamento em ambiente informatizado e não informatizado. As atividades baseadas em pesquisa como as de Wagman (1975), Douady e Perrin-Glorian (1989), Romero, Carretero e Cuadra (1993), Franchi et al. (1992), Baltar (1996), dentre outras, consistiram em recorte e colagem, sobreposição, construções, uso de malhas quadriculadas, verificações de propriedades etc., cujas soluções foram apresentadas oralmente e/ou por escrito.

Um problema era considerado resolvido no momento em que fosse apresentada uma argumentação, por meio de justificativas que "garantissem" a validade dessa argumentação, de tal sorte a contemplar as três etapas que elegemos como constitutivas do processo argumentativo.

A sequência proposta deve favorecer a comunicação de ideias, viabilizando a argumentação enquanto método para aquisição conceitual. A sequência foi organizada em consonância com as etapas que propomos, inspiradas em Toulmin (2006), cuja funcionalidade deve atender às especificidades e complexidades do processo de ensino e aprendizagem em matemática. As atividades foram elaboradas de forma a incentivar os confrontos de argumentos e a tentativa de validação de conjecturas, a fim de garantir um ambiente propício à prática da argumentação.

As atividades, que compõem a sequência, devem ainda possibilitar que o aluno apreenda o conceito de área de figuras planas de forma autônoma e diferencie área e perímetro em situações para as quais os axiomas, teoremas, definições e propriedades destes objetos se constituam em ferramentas que permitem a compreensão e o aprofundamento de conhecimentos necessários para compreensão dos referidos conceitos.

Levando em conta a complexidade do processo argumentativo, daremos atenção às controvérsias que, por ventura, ocorrerem, “agindo com diplomacia” nas palavras de Boavida (2005, p. 907), a fim de:

> (a) tornar visível para os alunos que a validação do saber matemático assenta em argumentos internos ao campo da Matemática; (b) permitir a construção de significados matemáticos pela mobilização e relacionamento de diferentes conhecimentos; (c) favorecer a compreensão, pelos alunos, da importância de se colocarem na perspectiva do outro, ou seja, de se descentrarem de si próprios; e (d) contribuir para aprenderem a dar valor a ideias oriundas dos seus pares e não apenas do professor.

Em relação às análises, nosso intuito foi transcrever as discussões que se mostraram relevantes de acordo com o modelo e em conformidade com as fases, possibilitando, assim, analisar a qualidade das argumentações favorecidas pela sequência, tendo como objetivo a apreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas pelos alunos.

Investigamos a argumentação em ambiente informatizado e não informatizado, como propício à devolução aos discentes de uma etapa importante da aprendizagem em matemática: a produção e validação de suas conjecturas.

3.1 Análises das Atividades

Descreveremos o experimento, suas análises e implicações, a partir da organização dos diálogos no modelo de Toulmin. As discussões dos dados estão fundamentadas nos critérios de análise propostos na metodologia da sequência, considerando-se as características que compõem cada uma das fases do processo argumentativo.

Segundo Toulmin (2006), a primeira fase que se deve considerar para a explicitação de argumentos é a apresentação de um problema. Nessa fase, daremos ênfase à experiência de referência.

Assim, propomos uma experiência de referência dentro de um contexto que pudesse favorecer o desencadeamento das sessões subsequentes da pesquisa, pondo em jogo a argumentação como forma de apropriação de saber.

Partindo desse pressuposto, na primeira sessão, propusemos uma atividade composta de quatro questões, cujo objetivo foi o de possibilitar a diferenciação intuitiva entre os conceitos de área (região interna) e perímetro (contorno), e envolver os alunos em situações que suscitam cooperação e comunicação de ideias, necessárias ao desencadeamento de argumentação em matemática. Concebemos esta atividade de forma que seja posta como uma experiência de referência, indicando o primeiro momento para o desencadeamento de argumentações.

A experiência de referência versava sobre o Bosque Rodrigues Alves Jardim Botânico da Amazônia.

Todos os alunos já haviam visitado o Bosque (Figuras 12 e 13) e tinham conhecimento de seu espaço físico, pois a escola desenvolve atividades pedagógicas nesse ambiente, que apresentaremos para efeito de situar o problema propostos.

Figura 12 – Bosque Rodrigues Alves

Fonte: http://earth.google.com.br

Figura 13 – Foto da Fachada do Bosque

Fonte: http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=450381

O Bosque Rodrigues Alves foi criado pela Lei Nº 624 de 22 de novembro de 1870; porém, foi instalado e inaugurado somente em 25 de agosto de 1883. Localizado em uma área central na cidade de Belém-PA, apresenta extensão de 150 mil metros quadrados, em 2002, adquiriu o *status* de primeiro Jardim Botânico da Amazônia, com base na resolução 266, do Conselho Nacional de Meio Ambiente (CONAMA). Comporta uma flora com aproximadamente 4.987 tipos arbóreos, e uma fauna de vertebrados com de cerca de 70 espécies nativas, entre peixes, anfíbios, répteis, aves e mamíferos (Figuras 14 e 15) (OLIVEIRA et al., 2002).

Figura 14 – Foto do Espaço Multiuso e Orquidário

Fonte: http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=450381

Figura 15 – Foto do Viveiro das Aves

Fonte: http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=450381

O jardim Botânico constitui-se de cerca de 80% de área verde e o restante de edificações e vias de passeio, apresenta espaços favoráveis a atividades didáticas que recebem diariamente visitas agendadas por escolas públicas e particulares da grande Belém (Figuras 16 e 17).

Figura 16 – Foto da Brinquedoteca

Fonte: http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=450381

Figura 17 – Foto da Oficina de Brinquedos

Fonte: http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=450381

A partir desse contexto, anunciaremos a experiência de referência que introduz a implementação de nossa proposta.

Atividade 1

Nesta atividade, estiveram presentes 06 alunos divididos em dois grupos e as seguintes questões foram propostas:

Atividade 1: Elaboração da história e representação figural do viveiro e respectiva discussão sobre as propostas apresentadas.

1. No Bosque Rodrigues Alves, Jardim Botânico da Amazônia, vai chegar um novo animal. Elabore um texto que possa indicar a espécie, a origem do animal e como chegou ao parque, dentre outras informações. Após a produção e leitura do texto, planeje e desenhe o ambiente (viveiro) no qual o animal ficará.
2. Desenhe o viveiro como se estivéssemos observando-o de cima para baixo. Em seguida, recorte os canudinhos e cole sobre as linhas que representam o cercado, recorte e cole a folha de EVA para representar o gramado do viveiro.
3. Qual o formato do viveiro que você desenhou?
4. Seu desenho ficou composto por duas partes, quais são e quais as diferenças entre elas?

Não nos deteremos em relatar os textos elaborados pelos alunos (cf. anexo 1), pois nosso interesse está direcionado para o esboço do viveiro, mais particularmente ao desenho da vista superior deste e as discussões relacionadas a ele, para assim termos indícios que favoreçam a resolução do item quatro da atividade.

Nossa expectativa era que os alunos projetassem viveiros na forma de quadriláteros, para, em seguida, relacionarem intuitivamente o contorno ao perímetro e à região interna do viveiro à área. Os discentes, provavelmente, não encontrarão dificuldades para relacionar o formato de seus esboços a figuras geométricas que já conhecem. A diferenciação entre região interna e contorno é o ponto crítico desta atividade e deve exigir do pesquisador uma intensa mediação, de tal sorte a por em confronto ideias divergentes (soluções candidatas) que possam encaminhar a atividade para um desfecho favorável à compreensão da distinção em jogo (veredicto).

Por outro lado, pretendemos verificar se a questão posta pode ser considerada uma autêntica experiência de referência, se induz à comunicação de ideias relacionadas ao objeto em estudo, se podemos por meio dela transversalizar outras atividades da sequência. E se há indícios de argumentos nessas comunicações, os quais possamos analisar em virtude de força e critérios.

Para o esboço, foram utilizados os seguintes materiais: folhas de papel A4, lápis, régua, borracha, tesoura, canudinho, folhas emborrachas de Etil Vinil Acetato (EVA) e cola (Figura 18).

Figura 18 – Foto dos alunos construindo os modelos de viveiros

Fonte: Autor

No decorrer da atividade, como havíamos previsto para situação de referência, foram utilizadas palavras relacionadas à geometria, como podemos constatar na fala a seguir.

Léo: a linha tem que ficar bem reta não pode ficar torta!

A preocupação do aluno denota a busca de regularidade na construção do desenho e a comunicação de sua ideia, que enseja o termo modal "não pode", conferiu força ao argumento do discente. O que leva seus colegas a atentarem para este fato, descartando outras possibilidades de construção. O critério que subjaz essa assertiva é a própria ideia de reta da geometria euclidiana, vista pelos alunos na disciplina de artes e durante a familiarização com o Geogebra. A força do termo modal para Toulmin (2006) pode ser caracterizada pela sua aceitação ou rejeição – por critérios estabelecidos pelo grupo. Nesse caso, evidenciamos a primeira hipótese.

Discussões relacionadas à geometria permearam toda a atividade, ou seja, a questão se constituía como uma experiência de referência, cumprindo seu papel ao vislumbrar elementos dos objetos de estudo em jogo.

- *Léo: tem que tá no mesmo sentido Mary!*
- *Mary – como assim no mesmo sentido.*

O aluno estava se referindo ao paralelismo das grades do viveiro, buscando como já destacamos, anteriormente, regularidades na construção de seu desenho. No caso de nos perguntarmos se até aqui há de fato argumentações, a resposta seria que, como admitimos a argumentação como processo, então, ela está em vias de constituição. Nesse sentido, Toulmin (2006, p. 34) afirma que “embora não seja um argumento elaborado ou maduro; mas os elementos essenciais estão ali”.

Em relação à questão sobre o desenho da vista superior, que não ficou bem entendida para Mary, evidencia-se que a colaboração vai auxiliar no gerenciamento das argumentações. Nesta asserção, o gestual se coloca como indícios de argumentação pragmática.

- *Mary: não entendi!*
- *Léo – aqui é o desenho da frente precisa ser de cima (mostra no desenho e Mary entende).*

O problema encorajou os alunos a trabalharem em conjunto, assim constatamos que a atividade realmente possibilitou a comunicação de ideias envolvendo os alunos em um ambiente de cooperação.

- *Anne: como fazer o desenho?*
- *Léo: faz o mesmo perímetro da linha tipo um retângulo, com linhas paralelas.*

Notamos aqui o uso explícito de palavras que orientam as comunicações das ideias para os objetos que pretendemos focar; os termos “retângulo” e “paralelas” não nos causaram estranheza, pois já tinham sido tratados durante a familiarização com o Geogebra, o resgate delas evidencia que os alunos buscavam fazer relações com o que já conheciam de geometria plana.

Em seguida, o grupo começou a recortar os canudinhos e as folhas de EVA de acordo com as dimensões do desenho do viveiro. A partir disso, o grupo discute sobre o formato do viveiro visto de cima.

Na sequência das questões, temos a identificação da forma da figura que representava o viveiro, contrariamente ao que prevíamos, os alunos tiveram dificuldades para identificar com exatidão se o viveiro apresentava formato quadrado ou retangular. Percebemos que, para validarem suas conjecturas, os alunos precisariam utilizar algumas das propriedades destas figuras. Então, acrescentamos à sequência uma nova atividade (atividade 02), que abordava as propriedades que caracterizam o quadrado e o retângulo.

Vale a pena destacar que um dos integrantes do grupo “B” identificou seu viveiro como forma circular, o que será tratado mais adiante em nossas análises (atividade 07). A fala, a seguir, nos indica as dificuldades relativas ao formato do viveiro.

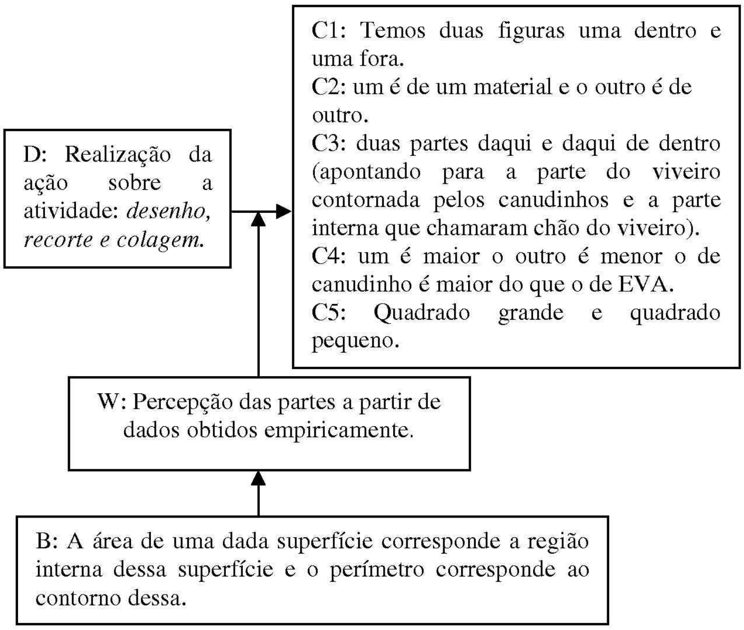
> *- Léo – (Pergunta a seus colegas) qual o formato do viveiro que vocês construíram? O meu é um quadrado ou será que posso dizer que a figura é um retângulo? Isso aqui é um quadrado. A de vocês tudo é quadrado?*

Os colegas de Léo responderam que tinha forma de quadrado, mas não tinham certeza, talvez por não identificarem as figuras por suas características. O termo modal “provavelmente” ficou implícito nesta argumentação. De acordo com Toulmin (2006), tal termo fornece força cautelosa ao enunciado e compromete o interlocutor de forma provisória e com ressalvas, expressando assim a relação que o sujeito tem com o objeto em pauta, o que nos leva a aprofundar discussões a respeito das propriedades dessas figuras.

Como havíamos previsto, as formas do viveiro em grande parte foram construídas tendo como modelo os quadriláteros. A exceção ficou por conta de uma proposta de viveiro de forma circular, como identificado pelos alunos. Mas foi a partir desse viveiro que pudemos aprofundar a discussão sobre o recobrimento e realizar outra atividade relativa ao cálculo de área, assim como uma estratégia para medir seu perímetro (atividade 07).

A questão sobre as partes que compunham o desenho nos possibilitou analisar a componente fisiológica dos argumentos e inseri-las no modelo de Toulmin. Procederemos às análises da solução do item quatro da atividade, a partir das transcrições das comunicações de ideias e dos diálogos entre os alunos e entre o pesquisador e alunos.

Quadro 01 – Análise do primeiro item da primeira questão

Argumentações	Análise estrutural e funcional das argumentações
Léo – temos duas figuras uma dentro e uma fora. Léo – um é de um material e o outro é de outro. Léo – duas partes daqui e daqui de dentro (apontando para a região interna e seu contorno). *Após lerem novamente a questão, os alunos afirmam.* Anne – quadrado grande e quadrado pequeno. Léo – um é maior o outro é menor o de canudinho é maior do que o de EVA. *Mary mostra as partes.* Pesquisador - qual é o quadrado grande e qual o pequeno? Anne – indica a parte recoberta pelos canudinhos e a região interna do viveiro. Léo – um é maior o outro é menor o de canudinho é maior do que o de EVA. Mary: As partes são o chão do viveiro e o cercado. Léo: Contorno pelos canudinhos e região interna.	 A passagem dos dados **D** à conclusão **C** se deu mediante a autorização da garantia **W**, baseada em dados obtidos empiricamente, ou seja, da ação direta sobre a atividade. Assim, a argumentação apoiou-se em observações e constatações. Tal fato aliado à busca de uma solução mais plausível são elementos que caracterizam esta argumentação como pragmática abdutiva. A intervenção do pesquisador "a respeito de uma melhor identificação das partes relativas a C2, C3 e C4" levou os alunos a convergirem os argumento para as seguintes conclusões específicas: *Mary: As partes são o chão do viveiro e o cercado.* *Léo: Contorno pelos canudinhos e região interna.* A validação apresentou-se com função de explicação, visto que as argumentações pragmáticas buscaram esclarecer e convencer os interlocutores da verdade das afirmações, a partir dos fatos evidenciados pelas ações oriundas das atividades de manipulação. A clarificação das asserções emergiu, também, em virtude da mediação do pesquisador que visava a levar os alunos a diferenciar área e perímetro de forma intuitiva, relacionando esses objetos à região interna e ao contorno das configurações construídas pelos alunos, e expresso no apoio **B**.

Léo explicitou uma série de soluções candidatas, a fim de diferenciar "a região e sua fronteira", inclusive apontando as partes para diferenciá-las, já Mary e Anne as diferenciaram inicialmente de forma gestual. Em C1 e C5, percebe-se uma mesma ideia que é a separação em duas figuras – as noções de figuras e quadrado – expressos nesta conclusão, não estão em conformidade aos conceitos em questão, por isso perderam força com a intervenção do pesquisador ao solicitar maiores explicações, enquanto que C2 e C4 estão relacionadas aos diferentes materiais que compõem as partes. Aqui demos mais atenção, em virtude de as entendermos como conclusões mais plausíveis, ou seja, que vão ao encontro de uma solução específica, adquirindo força nos diálogos com o pesquisador. C3 nos indica uma solução gestual que foi determinante na diferenciação entre área e perímetro, a associação dessa conclusão a C2 e C4 compôs soluções específicas, o que levou a questão ao desfecho. As soluções candidatas anunciadas por Toulmin são, de acordo com ele, descartadas em detrimento de uma solução em particular, mas percebemos que estas deram suporte para se chegar a uma resposta mais plausível. Dito de outra forma, elas, neste caso, não são simplesmente descartáveis e sim constitutivas da solução específica, ou seja, convergiram para se chegar ao veredicto.

As associações do contorno ao cercado, ou seja, a construção com canudinhos e região interna ao chão do viveiro foram previstas e contempladas. Assim, obtivemos êxito na primeira aproximação para diferenciar área e perímetro, além de evidenciarmos que a prática da argumentação favoreceu o cumprimento da atividade. Percebemos que o processo argumentativo abrangeu as três fases propostas.

A primeira fase foi contemplada a contento. Nesta fase, a experiência de referência se pôs de forma a motivar a entrada dos discentes no processo de argumentação e sua principal função, que é a justificatória, foi evidenciada. Esse ponto de partida também estabeleceu o contrato didático necessário à inserção do grupo na prática da argumentação.

A segunda fase se cumpriu evidenciando os estágios que a compõem e o encaminhamento para a terceira fase de validação.

Atividade 2

Na sessão seguinte, na sala de informática, estiveram presentes 05 alunos (02 do grupo A e 03 do grupo B). Exploramos aspectos dinâmicos do programa, a fim de possibilitar que a prática da argumentação levasse à identificação do quadrado e retângulo por meio de suas propriedades, a invariância da forma por isometrias de translação e rotação e a percepção da diferença entre perímetro e área.

As questões foram pré-elaboradas no programa Geogebra, conforme os procedimentos constantes nos apêndices I e II, a fim de conservarem suas características após movimentação de arraste com o *mouse*. A construção do quadrado possibilitava a deformação deste (Apêndice II), por meio do arraste do vértice sobre sua diagonal (ocultada). O ponto e o animal foram postos de tal sorte a limitar sua movimentação no contorno e no interior do viveiro, respectivamente.

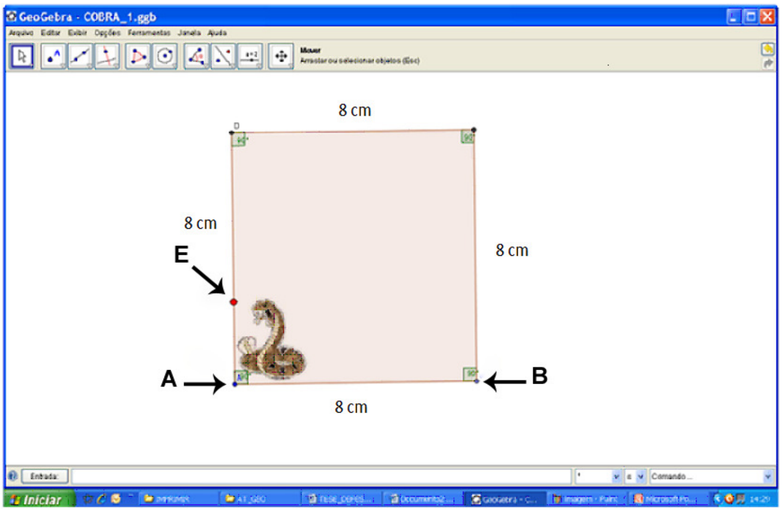
Nossa expectativa, nesta atividade, era que os alunos reconhecessem o quadrado e o retângulo pela configuração e após intervenções do pesquisador, associassem as figuras às propriedades que garantem suas especificidades. Esperávamos, também, que estes apresentassem dificuldades na identificação dos ângulos retos e que as diferentes posições levassem os discentes a acreditarem se tratar de outra figura após movimento de rotação, como já constatado em pesquisas como as de Baltar (1996). Como a atividade tem relação com a anterior da sala de aula, esperávamos que os alunos associassem a movimentação de um observador na borda do viveiro ao contorno (perímetro) e a movimentação do animal ao interior do viveiro (área).

Os saberes mobilizados nessa tarefa são os de ângulo reto, retas paralelas e perpendiculares e isometrias de rotação e translação, além de área e perímetro associados, respectivamente, ao contorno e à região interna.

Nesta atividade, objetivávamos Identificar as figuras quadrado e retângulo – por meio de suas propriedades, além de identificar que, mesmo movimentando a figura (translação e rotação), continuaria sendo um quadrado ou um retângulo; em decorrência da conservação de tais propriedades. Com a atividade, também, pretendíamos reforçar a diferenciação entre a região interna e seu contorno, com auxílio da possibilidade de movimentação de um observador, representado por um ponto vermelho (E) e do animal identificado no interior do viveiro (Figura 19). Em seguida, institucionalizar área e perímetro, como correspondentes às partes discutidas na sala de aula.

A atividade deve revelar a apropriação do saber, via argumentações, a partir da contemplação das fases aqui propostas.

Figura 19 – Configuração da atividade proposta ao grupo A



Fonte: Autor

Inicialmente, os alunos renomearam o ponto que representava o visitante com as iniciais de seus nomes. Em seguida, responderam as seguintes questões:

Atividade 2: Explorando o viveiro do novo animal recém chegado ao Jardim Botânico de Belém.

1. Renomeie o ponto vermelho E (Figura 19), em seguida movimente-o e responda, por onde o observador pode se movimentar. Faça o mesmo para o animal e diferencie os dois movimentos.
2. Qual o formato do viveiro? Justifique.
3. Movimente os pontos A e B (Figura 19) e verifique o que ocorre com a figura? As diferentes posições alteram o formato da figura? Justifique.

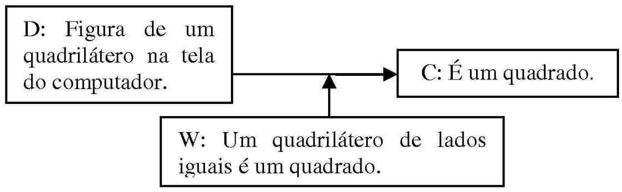
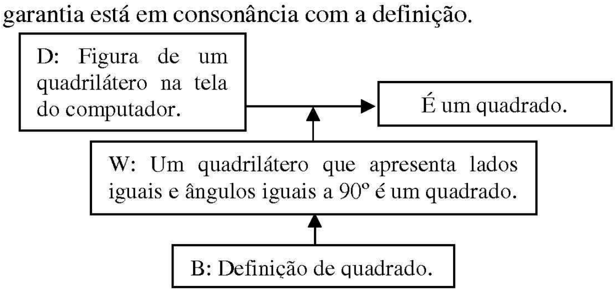
Após a identificação do observador e a exploração dos movimentos do ponto e do animal, os alunos relacionaram a questão à primeira atividade e após mediação do pesquisador se pronunciaram da seguinte forma:

Léo - É igual o da sala.
Pesquisador – onde o observador pode caminhar.
Léo - no contorno.
Pesquisador – chamamos o contorno de perímetro.
Pesquisador – e o animal?
Léo – no chão do viveiro.
Mary – na região interna.
Pesquisador – chamamos esta região de área.

A argumentação pragmática que compõe a fala dos alunos apresentava-se em conformidade com os conceitos dos termos institucionalizados, assim as correspondências evidenciadas pelo pesquisador provocaram a convergência das argumentações para uma solução específica que desencadeou a institucionalização local dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.

O grupo “A” constatou que a figura geométrica que formava o viveiro era um quadrado, como analisaremos a seguir, com auxílio do modelo de Toulmin.

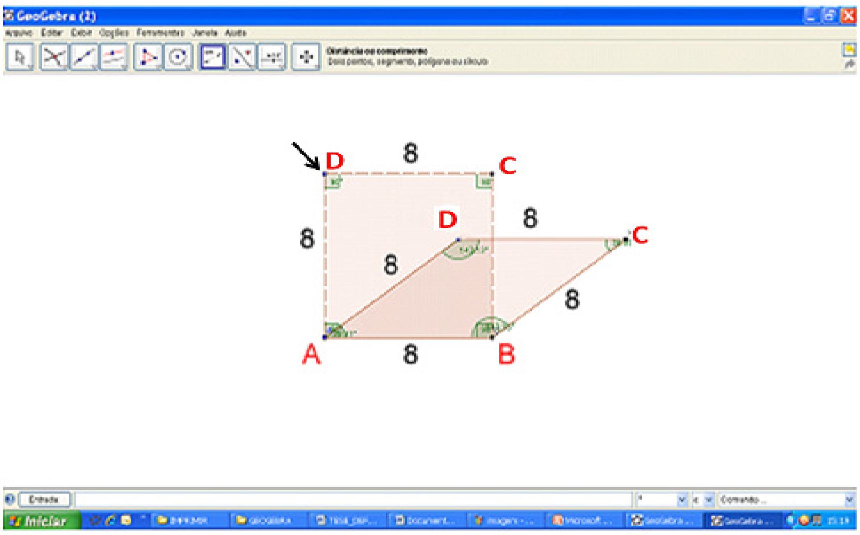
Quadro 02 – Análise do segundo item da atividade dois

Argumentações	Análise estrutural e funcional da argumentação
Grupo - A figura é um quadrado. Pesquisador - Como podemos reconhecer que é um quadrado? Grupo - Todos os lados são iguais (validaram a afirmativa por meio da ferramenta comprimento. Os lados apresentavam 8 cm). *Pesquisador apresenta um quadrado que ao ser deformado (na tela do computador) continua com 4 lados iguais, mas os ângulos são modificados em razão da deformação (Figura 20). Após isso, pergunta aos alunos se continuava sendo um quadrado, obtendo a seguinte resposta:* Alunos - Não, não é mais um quadrado! *Pesquisador solicita aos alunos que prestem atenção no que se altera, quando deformamos a figura.* Mary – O ângulo vai mudando. Pesquisador retoma posição que configura um quadrado e solicita aos alunos que observem a medida do ângulo. Mary - Os ângulos têm 90º. *Após algumas manipulações na figura, os discentes afirmaram.* Mary – O quadrado tem 90º. Pesquisador – Essa é a outra característica que precisamos para afirmar que a figura é um quadrado. Léo – Os lados são iguais e todos os ângulos são de 90º.	 Notamos que a garantia **W** que sustenta o argumento está baseada estritamente nos dados **D** obtidos na observação na tela do computador. Isso o caracteriza como pragmático do tipo abdutivo, pois se busca a justificativa mais plausível para a conclusão **C**. Por outro lado, ao referir-se ao conceito de quadrado, a argumentação é considerada, também, como "semântica". Esta segunda classificação nos possibilita inferir que a força do argumento "*basta ter lados iguais para ser quadrado*" leva a caracterizá-lo como incompleto e consequentemente provisório. Assim, buscamos indícios que pudessem favorecer sua convergência para uma argumentação coerente com o significado do termo quadrado, por meio de critérios baseados na definição de quadrado. Para tal, procedemos a ações que possibilitaram à coleta de indícios que favoreceram a ampliação da ideia provocando sua convergência. Pudemos assim reorganizar a argumentação dos alunos, após intervenção do pesquisador em uma nova estrutura, na qual o apoio da garantia está em consonância com a definição.  A validação, baseando-se em argumentações pragmáticas oriundas de observações e manipulação de ferramentas do programa, apresentou-se predominantemente com função de validação por sistematização em nível local, em decorrência de se admitir uma justificativa visual a partir de um número limitado de resultados. A atividade de manipulação e a mediação do pesquisador possibilitaram a convergência do argumento, que se configurou de acordo com a definição do quadrado, atribuindo à conclusão consistência teórica. Assim, a validação se deu pelo reconhecimento da figura por suas propriedades, a partir das ferramentas do programa, o que nos remete à seguinte questão: o trabalho em particular com o quadrado que representava o viveiro foi tomado como representante da classe do objeto "quadrado". Evidenciamos, nessa estrutura, um caso de argumentação indutiva por passagem ao limite.

Na análise apresentada, no Quadro 02, observa-se inicialmente uma estrutura simples que evidencia a resposta imediata, a partir de conhecimentos já estabelecidos pelos alunos sobre a configuração de um quadrado, sem apelo a fundamentações teóricas como propriedade e definições. A partir da mediação do pesquisador, pudemos exibir, na estrutura, mais um elemento que apoia a justificativa e auxilia na validação da argumentação. Outro ponto que nos chama atenção é que a convergência das soluções ocasionou uma validação com função de sistematização local para o conceito de quadrado.

A convergência se deu mediante apresentação de um contraexemplo (Figura 20), um dos princípios básicos da matemática para se refutar asserções, que não estejam conforme definições, propriedades, etc., no campo da matemática. Aqui Toulmin (2006) chama a atenção para impossibilidades estabelecidas por critérios correspondentes a cada campo. Assim, o termo modal “não pode ser” ou no caso “não é suficiente”, subtendido no processo argumentativo, leva à coleta de indícios (ação possibilitada pelo programa) que permitiu o desfecho da questão.

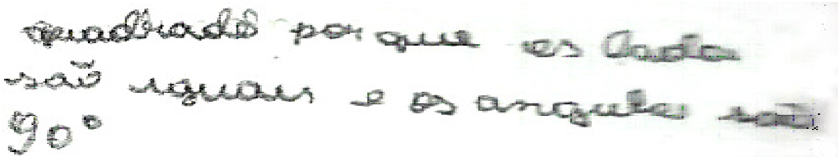
Figura 20 – Ilustração da deformação do quadrado apresentada aos alunos



Fonte: Autor

Como previmos, os alunos identificaram o quadrado pela percepção de sua forma, mas, após diálogo com o pesquisador, passaram a reconhecê-lo pela mobilização das propriedades de tal figura (Figura 21). Não houve dificuldades no trato do ângulo de 90º. Isto quer dizer que estes alunos se apropriaram desse conceito em atividades, ou nas aulas de artes ou na familiarização com o Geogebra.

Figura 21 – Solução escrita pelos alunos



Fonte: Produção dos alunos

Na sequência da atividade, a questão posta foi primeiramente identificar a figura. Em seguida, incorrer na prática da argumentação, mediada pelo pesquisador, a fim de caracterizar o viveiro com formato retangular.

Quadro 03 – Análise do segundo item da atividade dois

<table>
<tr><th>Argumentações</th><th>Análises estrutural e funcional da argumentação</th></tr>
<tr><td>
Grupo - retângulo.

Léo - Como sei que é um retângulo?

Léo – tem dois lados que não são iguais.

Pesquisador – faz sentido o que o Léo falou, podemos reconhecer um retângulo pela sua forma, mas precisamos identificá-lo não somente pelo formato.

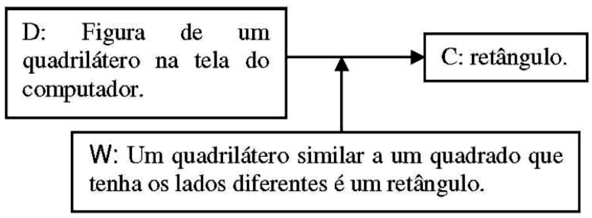
Para isso vamos recordar inicialmente as posições dos lados que formam o retângulo.

Léo - paralelas e perpendiculares.

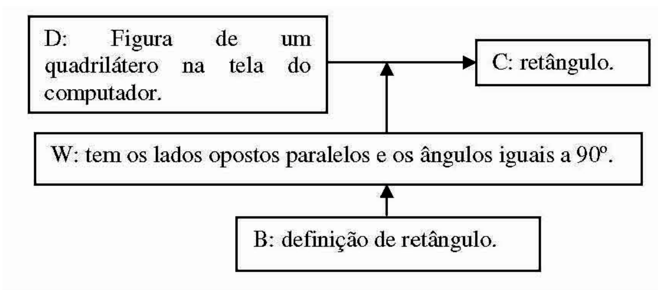
Professor - e os ângulos?

Mary – 90º

Pesquisador – Assim podemos garantir que seja um retângulo, basta ter os lados opostos, ou seja, um em frente ao outro, paralelos e os ângulos de 90º.

Mary – O retângulo tem os lados paralelos e os ângulos iguais a 90º.
</td><td>


A garantia W desta argumentação está baseada na similaridade que o retângulo tem com o quadrado, e a diferença se faz pela não congruência dos lados não paralelos. Assim temos uma argumentação pragmática e abdutiva devido à busca mais plausível de uma justificativa para a solução C. A interação com o pesquisador possibilitou a retomada das propriedades já apropriadas pelos alunos (lados opostos paralelos e ângulos de 90º) e o direcionamento para uma conclusão de acordo com a definição de retângulo, assim a argumentação adquire força que leva a convergência argumentativa representada na seguinte estrutura.



A validação apresentou-se predominantemente com função de sistematização local, em decorrência de um número limitado de resultados levar a esse tipo de organização. Neste caso a intervenção do pesquisador se fez necessária para que a fundamentação B da afirmativa estivesse de acordo com a definição de retângulo. Pudemos assim reorganizar a argumentação dos alunos, após intervenção do pesquisador em uma nova estrutura na qual o apoio da garantia está em consonância com a definição.
</td></tr>
</table>

O Quadro 03 apresenta, em princípio, uma estrutura simples que contempla uma justificativa “W” em desacordo com a definição de retângulo. A partir da mediação do pesquisador, a justificativa passou a apoiar-se na definição de retângulo, assim obtemos uma nova configuração estrutural. Novamente, a solução específica que proporcionava a validação do argumento apresentou função de sistematização local para o conceito de retângulo.

É importante ressaltar que, nas séries iniciais, como afirma Bongiovanni (2004), prevalece a concepção de Euclides e Legendre sobre quadriláteros. Por esse ponto de vista, os quadrados, losangos, retângulos e paralelogramos são identificados dentro de quatro classes distintas de objetos matemáticos. Na definição 19, do livro I, dos *Elementos*, por exemplo, temos que “oblongo[22] é uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais”. Da mesma forma, Legendre (1793) (apud BONGIOVANNI, 2004), em seu livro *Elementos de Geometria*, caracterizava este quadrilátero da seguinte maneira: “O retângulo tem ângulos retos sem ter os lados iguais”. Já em *Leçons de Géométrie Élémentaire* de Hadamard (1898) (apud BONGIOVANNI, 2004), as restrições impostas aos retângulos e aos losangos foram eliminadas e retângulo passa a ser um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, consequentemente, retos. Assim todo quadrado pode ser considerado retângulo.

Aos poucos, estas características devem ser reveladas aos alunos para que se possa argumentar de forma eficaz, mas temos que ter atenção para no momento adequado vislumbrar estas definições, em nosso caso, como os alunos já apreenderam o que é um ângulo reto e posição de retas, não houve dificuldades para se apropriarem desse conceito.

A questão seguinte versava sobre a movimentação de dois pontos localizados nos vértices A e B de um quadrado (Figura 19) e posterior descrição do ocorrido. O problema era saber se a figura se altera ou permanece a mesma, após o arraste com o *mouse*.

Os saberes mobilizados nessa tarefa são os de ângulo reto, retas paralelas e perpendiculares, definição de quadrado e rotação e translação de figuras.

[22] Caso particular do que hoje conhecemos como retângulo.

A expectativa é que os alunos inicialmente admitam que alterando a posição, a figura se altera. Esta ideia foi atestada, em pesquisas com as de Franchi et al. (1992) e Baltar (1996).

Neste item da atividade 02, levamos em conta a fala de um aluno do grupo "B" (Will), em decorrência de sua pertinência ao processo argumentativo que levou à conclusão.

Quadro 04 – Análise do terceiro item da atividade dois

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Will – O ponto B gira o viveiro e o A movimenta para qualquer lugar. Léo - Com o movimento formou outra figura. Léo e Mary – Sim, é outra figura. *Após algum tempo de exploração do movimento possibilitado pela construção, o pesquisador retoma as discussões.* Pesquisador – Observem as medidas dos lados e dos ângulos. Léo – A única diferença é que mudou de posição. Mary – Continua a mesma figura que era. Fica o mesmo tamanho e o mesmo jeito. Léo – Movimentando, continua lados iguais e ângulos iguais. Pesquisador pergunta novamente – Mudando a posição muda a figura? Grupo – Não! Continua sendo um quadrado.	D: Figura e movimentação dos pontos na tela do computador. → C: É outra figura. W: Quando mudamos a posição de uma figura sua forma se altera. Notamos que a garantia **W** que sustenta o argumento está baseada estritamente na observação na tela do computador, isso o caracteriza como pragmático do tipo abdutivo, em decorrência da justificativa enunciada ser a mais plausível para a solução, apresentando o argumento provisório "*o movimento formou outra figura*" passivo de objeções e posterior convergência. Assim, buscamos a mudança desta perspectiva por meio da mobilização de conhecimentos relativos às propriedades que definem o quadrado, já visto anteriormente, e assim nos valermos da convergência para uma argumentação eficaz. A coleta de fatos propiciados pela geometria dinâmica revelou novos dados, ou seja, informações que possibilitaram a alteração da convicção do argumento. Assim, temos uma nova estrutura na qual o apoio **B** da garantia está em consonância com a propriedade que sustenta as justificativas. D1: A única diferença é que mudou de posição. D2: Movimentando continua lados iguais e ângulos iguais. → C: Continua sendo um quadrado W1: As diferentes posições não alteram a natureza da figura. W2: continua a mesma figura que era. Fica o mesmo tamanho e o mesmo jeito. B: Propriedade da invariância por translação e rotação. A validação baseou-se em argumentações pragmáticas oriundas de observações e manipulação da figura na tela do computador, apresentando-se predominantemente com função de descoberta, uma vez que as ações levaram os discentes a descobrirem relações novas da figura em questão. A atividade de manipulação e a mediação do pesquisador possibilitaram a convergência para uma argumentação em consonância com as propriedades. Assim, garantimos que os vários deslocamentos das figuras construídas a partir de suas propriedades não alteram a natureza dessas.

No Quadro 04, observa-se uma solução candidata que não contempla a idéia de invariância por isometrias de rotação e translação; a estrutura ternária indica uma justificativa “W” que não apresenta apoio na referida propriedade. Após a mediação do pesquisador, o modelo passou a admitir um apoio “B” que assegurou força à garantia, possibilitando a validação da argumentação.

Constatamos, também, que a associação desta atividade com a primeira levou os alunos a não apresentarem dificuldades em relação às propriedades que caracterizam a figura como um quadrado, e favoreceu a associação da movimentação do visitante ao contorno e do animal a região interna do viveiro. Reforçando, assim, a distinção entre área e perímetro e, ao mesmo tempo, possibilitando a institucionalização por parte do pesquisador dos objetos em jogo.

De acordo com nossa previsão, os discentes acreditavam inicialmente que o movimento de rotação gerava uma nova figura, após coleta de indícios favorecida pelo *software* e mediação do pesquisador, tendo mudado suas concepções a respeito da possível modificação das figuras, após deslocamentos dessas.

O aspecto dinâmico explorado nesta tarefa foi de suma importância para apreensão dos conhecimentos envolvidos nela: ressaltamos a motivação e a otimização como elementos essenciais a serem explorados no ambiente informatizado.

Atividade 3

O objetivo desta atividade foi diferenciar superfície e área, de tal forma que o aluno percebesse que ao modificarmos uma dada superfície e construirmos outra, a área permaneceria a mesma. As relações entre os objetos, nesse caso, por exemplos, são as transformações de um polígono em outro equivalente, assim, buscamos explorar a conservação de área por equidecomponibilidade. A percepção e a comparação, oriundas das ações de manipulação das peças recortadas em cartolina na forma de figuras, devem permitir ao aluno elaborar o significado de área enquanto quantidade de material ocupado pela figura.

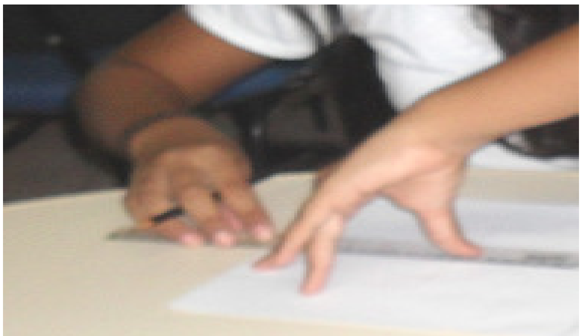
Esperamos que os alunos manipulem e observem o ocorrido, e por meios de suas primeiras impressões manifestem suas conjecturas, valendo-se de justificativas provisórias e parciais, apoiadas em argumentações pragmáticas. A ação deve possibilitar a coleta de indícios que levem a convergência a uma solução específica constituindo-se, assim, o processo de validação. A partir da manipulação, esperamos, também, que os alunos pudessem argumentar que as figuras compostas de diferentes formas, disposto de maneiras diferentes, mas com a mesma quantidade de “material”, possuem áreas iguais.

As dificuldades podem aparecer em decorrência dos alunos não perceberem que figuras diferentes podem apresentar a mesma área. Pois as modificações das peças alteram as formas e as dimensões das figuras, esses fatos podem levar o aluno a pensar que a área é alterada.

A prática da argumentação deve permear todo o processo de apropriação do saber, habilitando-se como alternativa para aquisição conceitual.

Nesta atividade, os alunos receberam cartolinas recortadas em formatos de quadrados que se encontravam sobre a bancada (Figura 22). Como precisaram recortar a figura em sua diagonal, fornecemos também tesouras, e, para identificarem e marcarem a diagonal da figura, eles precisaram, também, de régua graduada e tranferidor.

Figura 22 – Alunos desenvolvendo a atividade



Fonte: Autor

Esta atividade contou com os seis alunos divididos em dois grupos (A e B) e versava sobre as seguintes questões.

Atividade 3: Conservação de área por recorte e colagem

1) Que figura está representada no recorte de cartolina que você tem? Justifique.
2) Recorte a figura em sua diagonal e a partir das duas peças obtidas forme um triângulo.
3) Qual a relação entre as áreas das duas figuras? (primeira e segunda figura).

Em relação ao primeiro ítem da atividade, inicialmente, os alunos deram a seguinte resposta:

Léo - Quadrado. Parece um quadrado.

A partir dessa resposta, o pesquisador pergunta – *como podemos ter certeza que seja um quadrado?* - obtendo como resposta a seguinte assertiva:

Mary - precisa medir.

O pesquisador prosseguiu na solicitação de explicações – a partir das medidas, como podemos afirmar que seja um quadrado?

Mary - todos os lados iguais e tem que ver as medidas desses lados aqui tem que medir 90°.

Assim, ficou evidente que a atividade desenvolvida no laboratório parece possibilitar a apreensão do conceito de quadrado. A partir disso, os alunos utilizaram régua e transferidor para validarem que realmente se tratava de um quadrado.

As questões dois e três são discutidas simultaneamente, pois não houve dificuldades com relação ao recorte na diagonal e respectiva formação de um triângulo a partir das duas peças obtidas.

No decorrer da solução do problema, houve contradição entre as argumentações dos dois grupos, com relação à igualdade ou não entre as figuras, a partir da ação de recortar e colar. Por esse motivo, as análises a seguir trazem a discussão gerada pela controvérsia evidenciando, cada vez mais, o grande valor da prática da argumentação para compreensão de conceitos matemáticos na escola.

Quadro 05 – Análise do terceiro item da atividade três

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Grupo B – A área é a mesma. **Pesquisador** – Por que é a mesma? **Nei** – Porque é a mesma. A gente não “tiramos” a área, porque a gente não pegou outro papel para fazer outra área quadrada, a gente “cortamos”, já havia uma área nela. **Grupo A** – É diferente. **Léo** – Porque a quantidade de papel é maior do triângulo do que do quadrado. *Como as duas respostas se contradiziam, confrontamos as opiniões, por meio de um representante de cada equipe.* **Nei** – Discordo! A área é a mesma porque o quadrado teve que ser dividido. **Léo** – O quadrado pode até ter sido dividido, mas juntando aquelas duas partes o triângulo formou uma parte maior. **Nei** – Discordo, também, não dá pra comparar assim, porque o quadrado é de quatro partes e o triângulo é de três. **Léo** – Mesmo de três partes, as partes deles são maiores. Ele tem maior quantidade, a gente não discute com as partes das linhas que eles têm, as partes é da quantidade de dentro do papel. **Pesquisador** – O Léo fez uma boa observação temos que discutir a região interna das figuras. **Nei** – A parte da área professor? É a mesma! **Pesquisador** - Nei, diga a seus colegas por que você afirma que a área é a mesma? **Nei** – Porque a gente não tirou a área, ficou a mesma. *Pesquisador manipula as peças para que os alunos percebam se as áreas se alteram ou ficam a mesma.* **Pesquisador** – Nei justifique mais sua resposta! **Nei** – Ela permaneceu assim, porque a gente não tirou mais papel e nem colocou mais papel, tem a mesma quantidade, só dividiu o papel. *Pesquisador manipula, novamente, as peças e solicita que os grupos percebam o ocorrido, ou seja, se as áreas se alteram ou ficam as mesmas.* **Nei** – É a mesma. **Léo** – Dobrou. **Pesquisador** – Precisamos de uma só resposta, já que as duas são afirmações contrárias. **Léo** – Dobrou porque formou a parte maior, já que dobrou a quantidade de papel, esse triângulo ficou maior do que o quadrado. **Nei** – É a mesma porque a gente não colocou mais papel e não “tiramos”. **Léo** – É acho que elas têm a mesma quantidade de papel. **Pesquisador** – Você deu uma resposta que concorda com a afirmação do seu colega! Que é a mesma quantidade de papel. **Mary** – Concordo. **Léo** – É, eu concordo. **Pesquisador** – Se é a mesma quantidade de papel, o que podemos afirmar sobre as áreas **Alunos** – É a mesma. **Léo** – só dividiu.	**Argumentação grupo B.** **D:** Manipulação das peças recortadas. → **C**: é a mesma. **W:** A gente não tiramos a área, porque a gente não pegou outro papel para fazer outra área quadrada a gente cortamos já havia uma área nela. **B:** Invariância por equidecomponibilidade **Argumentação grupo A.** **D:** Manipulação das peças recortadas. → **C**: é diferente. **W:** a quantidade de papel é maior do triângulo do que do quadrado. Os dados **D** obtidos pela manipulação das peças e observação do ocorrido levam a uma argumentação pragmática e abdutiva, pois a conclusão específica **C** do grupo “B” é justificada por meio dessas ações. Da mesma forma caracteriza-se a solução do grupo A, como este tipo de argumento leva a soluções plausíveis e transitórias, constata-se que há uma contradição entre as conclusões que devem ser confrontadas, de tal sorte que os critérios necessários a validação de uma das soluções sejam mediados pelo pesquisador. Pretendíamos assim envolver os alunos num processo de reflexão que favorecesse a convergência dos argumentos conflitantes, com base na ideia de invariância por equidecomponibilidade, já contemplada pela equipe “B”. A validação apresentou-se com prevalência da função de comunicação baseando-se em argumentações pragmáticas, ou seja, apoiadas em observações e constatações oriundas das atividades de manipulação e na mediação do pesquisador que buscava a compreensão da propriedade de invariância por equidecomponibilidade por meio da percepção que figuras diferentes podem apresentar a mesma área.

A diferença estrutural dos dois argumentos (Quadro 5) evidencia que a força da justificativa “W” é garantida pelo apoio “B”, que remete a conceitos, propriedades, etc., assim, a segunda justificativa não encontra apoio nos critérios estabelecidos pela matemática, sendo a argumentação representada na forma estrutural mais simples. Após a discussão mediada pelo pesquisador, defrontamo-nos com uma validação na qual prevalece a função de comunicação, e, mais uma vez, o ensejo da questão evidencia função de sistematização local para a propriedade de invariância da área por equidecomponibilidade.

A situação de controvérsia, mesmo sendo presumida durante a concepção das atividades, não foi prevista, particularmente, para esta atividade. Tal questão foi conduzida de acordo com as indicações de Boavida (2005), e, assim, o argumento que estava em desacordo com as normas da matemática (grupo “A”) foi perdendo força, as afirmações passaram primeiramente ao campo das possibilidades, para, em seguida, serem substituídas pela argumentação do grupo “B”, que estava em conformidade com a definição de equidecomponibilidade de área. Assim, a questão específica do grupo “A”, que se apresentava em desacordo com a propriedade de invariância da área, convergiu, com a mediação do pesquisador, para a argumentação do grupo “B”, que foi mais eficaz, pois se apresentava em conformidade com a propriedade supracitada, chegando assim à validação da solução do problema proposto.

Além de alcançarmos nosso objetivo relativo à apreensão da conservação de área, ligada à ideia que figuras diferentes podem apresentar áreas iguais, a atividade permitiu, também, aos alunos que estes levassem em conta a opinião dos colegas, e revelou que o confronto de ideias pode ser um processo negociado de construção de conhecimento.

Atividade 4

O objetivo nesta atividade foi que o aluno tivesse uma primeira aproximação com unidades de medida de área, e pudesse, a partir da retomada da experiência de referência agir, argumentar e justificar suas conjecturas e, eventualmente contrastar argumentações a respeito das unidades não padronizadas de medida de área, para assim chegar ao conceito de unidade padrão.

Nossa expectativa é que o discente faça uso de unidades de medidas variadas, para que possa eleger uma delas como unidade padrão. Acreditávamos que o recobrimento do viveiro fosse associado à ideia de pavimentação com lajotas, presente no cotidiano dos alunos, e, assim, que esses percebessem que o encaixe das formas deveria se complementar de forma a não deixar espaços vazios.

Nas primeiras pavimentações, é provável que os alunos não apresentem dificuldades, mas, nas formas em que precisarem usar “pedaços” das peças podem achar que não possam recobrir, recusando, assim, como unidade de medida de área, as formas que apresentarem essa característica. Para um dos viveiros de formato irregular, não apresentaremos os recortes e sim discutiremos a melhor forma de pavimentá-lo.

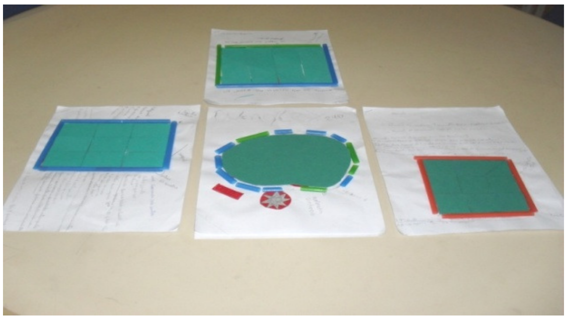
Nesta atividade, estiveram presentes quatro alunos, compondo duas duplas, e a seguinte questão foi proposta:

1. Você recebeu recortes em EVA de vários formatos. Qual (ais) o(s) recorte(s) que melhor recobre(m) o chão do viveiro, sem sobreposição. Justifique sua resposta.

Fornecemos recortes em formatos quadrados, retangulares, triangulares e circulares, em folhas de Etil Vinil Acetato (EVA) para recobrir o chão do viveiro. O grupo identificou sem dificuldades as formas em questão.

Os recortes em EVA foram feitos de acordo com as dimensões dos modelos dos viveiros construídos pelos alunos. Solicitamos aos discentes que pavimentassem o chão do viveiro, ou seja, a área, e escolhessem o formato que pudesse recobrir a parte interna sem sobreposição, ou seja, lado a lado, sem ficar um sobre o outro, e sem deixar espaços vazios (Figura 23).

Figura 23 – Modelos dos viveiros elaborados pelos alunos



Fonte: Autor

A seguir apresentamos a análise das comunicações de ideias de uma das duplas, que iniciou a tentativa de pavimentação pelo formato quadrado.

Quadro 06 – Análise da atividade quatro relativa a pavimentação de formato quadrado

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Léo - vou recobrir com quadrados. Mas posso recobrir com retângulos. Tá bom o quadrado. Léo – professor sobre a pergunta, qual o melhor recorte. Acho que é o quadrado. Mary – o que melhor recobre é o quadrado porque cobre mais e não deixa muito espaço. O quadrado é o que cobre melhor o chão.	Q_1: posso recobrir com retângulos. Tá bom o quadrado. Q_2: Acho que é o quadrado. D: Vou recobrir com quadrados. → C: O quadrado é o que cobre melhor o chão. W: O quadrado porque cobre mais e não deixa muito espaço. B: O encaixe das formas, no caso dos polígonos, deve se complementar formando 360°. O que justifica a passagem dos dados **D** à conclusão **C** é a percepção oriunda da atividade empírica de recobrimento, o que caracteriza a argumentação como pragmática, que levou a aluna a dar como garantia **W** dessa passagem a assertiva que "*cobre mais e não deixa muito espaço*". A passagem à conclusão é intercalada por qualificadores **Q1** e **Q2,** que indicam hesitações na assertiva, evidenciando que o argumento precisaria adquirir força. Para isso, foi testado por critérios experimentais com a finalidade de convergir para o seguinte argumento "em um recobrimento, as formas geométricas planas devem se encaixar sem que haja espaço entre elas e sem que haja superposição", dessa maneira, elas podem ocupar todo o plano, preenchendo-o ,e assim garantido uma unidade de medida. A conclusão evidencia a função de descoberta no momento da validação, visto que se chega à afirmação positiva do recobrimento pelo quadrado, a partir de argumentações pragmáticas oriundas das atividades e da mediação do pesquisador que visava a convergência da argumentação para o seguinte apoio **B** *o encaixe das formas, no caso dos polígonos, deve se complementar sem deixar espaços* - que subentende que formem 360° nos encaixes.

A estrutural (Quadro 6) revela o qualificador modal que caracteriza a força da argumentação, evidenciando a cautela e a incerteza atribuída à afirmação. Esse modal é característico de assertivas cuja validação apresenta função de descoberta. O apoio à justificativa indica que o argumento encontra-se em conformidade com o axioma da aditividade de área.

Nesta atividade, evidenciamos a preferência pelo formato do quadrado como uma primeira aproximação da unidade padrão.

Na sequência, analisaremos a possibilidade de recobrimento por formas retangulares.

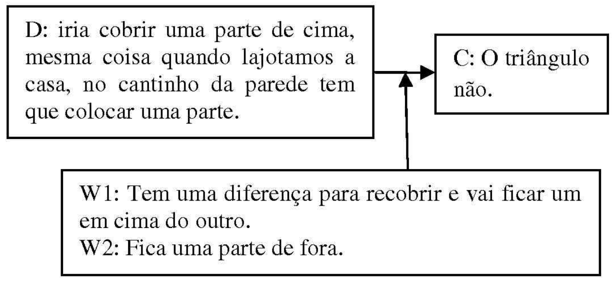
Quadro 07 – Análise da atividade quatro relativa a pavimentação de formato retangular

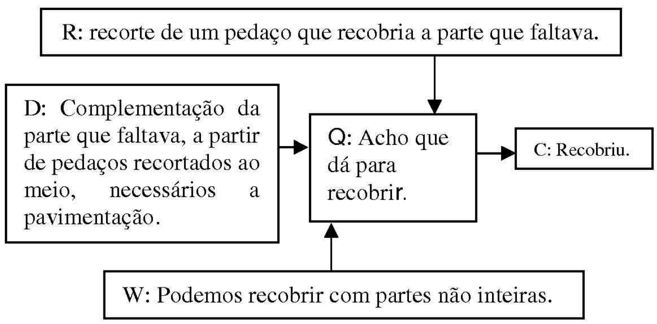
<table>
<tr><th>Argumentações</th><th>Análise funcional e estrutural</th></tr>
<tr>
<td>
Pesquisador – Mostrando uma peça de formato retangular, pergunta: e o retângulo pode recobrir?
Léo – Não, é muito grande.
Mary – Não, porque ele é torto (se referindo às desigualdades das dimensões dos lados) e grande.
Léo – É torto e grande.
Léo – O retângulo iria precisar só de um pouco para recobrir o chão.
Léo – Mas tem que ter uma medida exata, para dar aqui, se não fica uma parte aberta.
Léo – Se tiver grande, não vai dar, preciso de menos pedaços.
Após recobrirem completamente o chão do viveiro com as peças em EVA de formas retangulares, Mary afirmou.
Mary – Professor, dá para preencher o chão com retângulos.
Alunos – Podemos recobrir com o retângulo também!
</td>
<td>
D1: O retângulo iria precisar só de um pouco para recobrir o chão.
D2: Tem que ter uma medida exata, para dar aqui, se não fica uma parte aberta.
D3: Se tiver grande não vai dá preciso de menos pedaços.
C1: Não é muito grande.
C2: Não porque ele é torto e grande.
C3: O retângulo não recobre.
W: Forma e tamanho definem o recobrimento da superfície.
A série de dados D1, D2 e D3, obtidos empiricamente, levou os alunos a acreditarem que figuras de formatos retangulares não poderiam recobrir o chão do viveiro. Tais dados são hipóteses que os alunos admitiram como plausíveis e estão fundamentadas na garantia W de que a forma e o tamanho definem o recobrimento da superfície e que só podemos recobrir uma dada superfície com uma única forma. O argumento perde força a partir da ação de recobrimento, que leva os alunos a perceberem a possibilidade da pavimentação com o retângulo e, por conseguinte, as soluções candidatas foram refutadas.
D: Ação de recobrimento da superfície com formatos retangulares.
C: Podemos recobrir com o retângulo também!
W: Dá para preencher o chão com retângulos.
B: Em uma sobreposição, as formas geométricas planas devem se encaixar sem que haja espaço entre elas e sem que haja superposição.
A intervenção do pesquisador e a ação dos alunos sobre a atividade levaram-nos à convergência dos argumentos. Assim, mudaram suas concepções sobre o recobrimento.
A modificação da concepção dos alunos sobre o recobrimento com formas retangulares levou a uma validação com função de descoberta e assim se deu a convergência da argumentação que levou os alunos a assumirem o retângulo como possibilidade de unidade de medida.
</td>
</tr>
</table>

A primeira estrutura (Quadro 7) indica conclusões que convergem para uma negação da possibilidade de pavimentação com figuras em forma de retângulos, mas o argumento relativo à estrutura não encontrou apoio em propriedades matemáticas que lhe proporcionem força para ser validado. A partir das ações de recobrimento, expõe-se um argumento cuja organização estrutural revela um apoio “B”, que lhe garantiu a validação.

Em seguida passamos a analisar a possibilidade de recobrimento por formas triangulares.

Quadro 08 – Análise da atividade quatro relativa a pavimentação de formato triangular

<table>
<tr><th>Argumentações</th><th>Análises estrutural e funcional da argumentação</th></tr>
<tr><td>
Pesquisador – E o triângulo?
Mary – O triângulo não, ele já tem uma diferença para recobrir e vai ficar um em cima do outro, já o quadrado é uma melhor forma.
Pesquisador – Iria sobrepor se fosse o triângulo?
Léo – Iria cobrir uma parte de cima, mesma coisa quando lajotamos a casa, no cantinho da parede tem que colocar uma parte de retângulo.
Pesquisador – É assim mesmo, se precisarmos de um pedaço podemos cortar o tamanho que for necessário para recobrir o espaço que faltar. Não poderia preencher todo com formas triangulares?
Léo – Fica uma parte de fora.
Pesquisador apresentou pedaços recortados ao meio que recobriam a parte que faltava.
Mary – Acho que dá para recobrir.
Léo – Recobriu!
Pesquisador – Então, já vimos que dá o quadrado o retângulo e o triângulo.
</td><td>


Os dados D hipotéticos que levam à conclusão C são justificados por meio da garantia baseada na ideia que só podemos recobrir uma dada região com partes inteiras. Após iniciarem o recobrimento com as peças em formatos triangulares, os alunos observaram que haveria espaços que precisariam apenas de metade do recorte feito, por isso, descartaram a possibilidade do triângulo. Essa argumentação pragmática abdutiva perde força (evidenciada pelo qualificador) e é refutada após apresentação de recortes das peças que recobriam a parte que faltava. Assim, as ações de pavimentação e intervenção do pesquisador trazem novas evidências e fazem com que o argumento convirja como se vê abaixo.


A validação apresentou-se com função de descoberta baseando-se em argumentações pragmáticas oriundas das atividades de manipulação e mediação do pesquisador que visava, por um lado reforçar a ideia da diversidade de unidade de medida, e por outro vislumbrar a ideia de que podemos recobrir com partes não inteiras.
</td></tr>
</table>

O Quadro 08 indica duas estruturas: a primeira revela que as observações dos alunos os levaram a negar a possibilidade de recobrimento da superfície com formas triangulares, mas as ações subsequentes provocaram a mudança da ideia inicial. Uma nova perspectiva é indicada pelo qualificador modal “Q”, que subentende a possibilidade do recobrimento por formas triangulares e a refutação “R” da primeira opinião se deu pela ação do pesquisador de recortar um pedaço da figura que faltava para completar o espaço. A garantia não precisou de apoio para adquirir força e possibilitar a validação do argumento.

Por fim, as possibilidades de recobrimento com o circulo foram discutidas.

Quadro 09 – Análise da atividade quatro relativa a pavimentação de formato circular

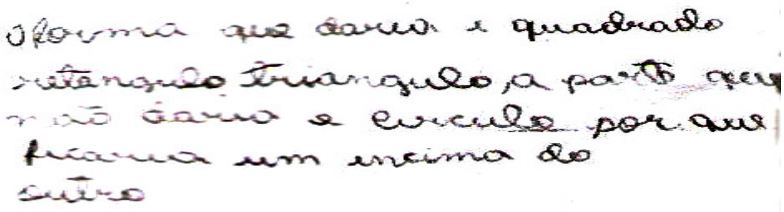
Argumentações	Análises estrutural e funcional da argumentação
Pesquisador – já vimos que dá o quadrado o retângulo e o triângulo. Léo – eu tenho certeza que não dá o circulo. Mary – o circulo não dá, é o único que não dá. Porque ele é redondo e iria ficar um em cima do outro. Léo – não dá porque vai ficar faltando espaço, coloca esse aqui fica faltando um espaçinho e o chão não vai ficar completo. É tipo lajota. Pesquisador – chegamos a conclusão que o circulo não pode. Mas vimos que várias formas podem ser usadas para recobrir regiões com formatos de quadriláteros.	D: vai ficar faltando espaço, coloca esse aqui fica faltando um espaçinho e o chão não vai ficar completo. É tipo lajota. → C: O círculo não dá. W: ele é redondo e iria ficar um em cima do outro. A justificativa para a afirmação se deu pela atividade empírica de recobrimento. B: Em uma sobreposição, as formas geométricas planas devem se encaixar sem que haja espaço entre elas e sem que haja superposição. A coleta de evidências das discussões anteriores levou os alunos a perceberem que algumas figuras recobrem totalmente as superfícies em questão, mas outras podem não recobrir, deixando espaços que não podem ser preenchidos por formas idênticas ao modelo em uso, ou partes dele, assim caracteriza-se constatamos uma argumentação semântica por passagem ao limite, pois além do encadeamento com ideias anteriores, assume-se como geral um caso particular. Assim, a impossibilidade de recobrir com formas circulares, regiões representadas por quadriláteros, como neste caso, ganha força e é validada por estar em consonância com os critérios matemáticos, que lhe conferem força necessária à validação, no caso, o apoio **B** “em uma sobreposição, as formas geométricas planas devem se encaixar sem que haja espaço entre elas e sem que haja superposição”. Aqui, a validação apresenta preponderância da função de verificação, pois se buscou validar a plausibilidade da asserção, assim, os discentes constataram que o círculo não recobriu a região em questão.

A estrutura representada no Quadro 09 indica que as pavimentações anteriores levaram os discentes a perceberem que os recortes em formatos circulares deixariam espaços vazios e impediria o completo recobrimento da superfície. Assim, a argumentação contemplou o elemento de apoio “B” a garantia “W” que auxiliaram na validação legitimando a conclusão “C”.

Cada item revela predomínio de uma das funções, mas no geral a atividade mediada pelo pesquisador favoreceu a emergência da validação com função de sistematização local. O encaminhamento dessa atividade permitiu o relacionamento de várias formas possíveis de se pavimentar uma dada superfície, valorizando saberes já estabelecidos e reforçando as características dessa função.

Após as discussões sobre os formatos para recobrimento, os alunos responderam ao pesquisador que as formas que se encaixam sem deixar “buracos” podem ser usadas para pavimentação das superfícies. A resposta conclusiva do grupo “A” pode ser constatada na Figura 24.

Figura 24 – Argumentação escrita dos alunos


oforma que daria é quadrado retangulo triangulo, a parte que não daria e circulo por que ficaria um encima do outro

Fonte: Produção dos alunos

Um dos alunos relacionou o recobrimento da superfície à pavimentação de pisos por lajotas como previmos. As dificuldades relacionadas à negação de algumas possíveis unidades que se apresentavam como argumentos transitórios e ineficazes foram perdendo força pela coleta de indícios que favoreceram a convergência das argumentações, assim, remetendo à validação no interior da trama argumentativa.

Chamamos a atenção dos discentes a respeito das possibilidades de escolha de variadas unidades como parâmetro para recobrimento de mesma área e anunciamos que a escolha de uma delas poderia se dar, tanto pela facilidade de encaixe entre as partes, como pela necessidade de se eleger uma delas como padrão.

O objetivo foi alcançado, pois, os alunos tomaram ciência de diversas unidades não usuais que podem ser utilizadas para pavimentação de uma dada região e tiveram uma primeira aproximação com a medida de área. O quadrado foi evidenciado como melhor forma de recobrimento, habilitando-se como unidade padrão. As etapas que compõem o processo argumentativo foram contempladas no sentido de favorecer a compreensão do conceito em jogo.

Atividade 5

Nesta atividade, estiveram presentes 05 alunos (dois do grupo A e três do grupo B). Esperava-se, com tal atividade, que os alunos constatassem que a alteração da superfície unitária provoca alteração na medida da área, mas a área permanece a mesma. Retomamos a experiência de referência para ampliarmos as discussões sobre as unidades de medidas não convencionais, e utilizamos as malhas quadriculadas do Geogebra com a finalidade de apresentar uma unidade-padrão de medida de área.

O trabalho com unidades não usuais deve favorecer a emergência de argumentações pragmáticas, que apresentem argumentos provisórios e transitórios, que possam ser validados ao convergirem para uma solução específica de acordo com as fases do processo argumentativo. Assim, o aluno deve gradualmente passar de uma ideia subjetiva propiciada pelo trabalho com unidades informais, e, no decorrer do processo, chegar ao conceito de unidade padrão. É importante compreender também que a medida da área depende da unidade de medida escolhida como parâmetro, e explora a possibilidade de um mesmo problema apresentar duas respostas numericamente diferentes. Com efeito, esperamos que o aluno compreenda o conceito de unidade de medida de área.

Nossa expectativa era que os alunos fizessem uso da contagem simples (um a um) dos quadradinhos que compunham a malha, a fim de determinarem a medida da área da figura dada. Provavelmente, os alunos encontrão dificuldades para admitir que uma mesma figura possa apresentar medidas diferentes para a mesma área.

Além da medida de área, nesta situação, pretendíamos solicitar aos alunos uma forma de contagem mais rápida do que “um a um”, a fim de uma primeira aproximação da área enquanto grandeza bidimensional.

Nas atividades anteriores, os alunos já acenaram por optar pelo quadrado como unidade de medida, assim, as questões envolvendo o uso do Geogebra e da malhas quadriculadas pautaram-se nesse direcionamento.

Para iniciar a atividade, retomamos a experiência de referência e a conclusão do grupo “A” da atividade anterior: *A forma que daria é quadrado, triângulo, retângulo. O que não daria é o círculo porque ficaria um em cima do outro para recobrir.* A partir disso, solicitamos aos alunos que recordassem sobre as possibilidades de recobrimento do chão do viveiro, e indicassem qual das unidades escolheriam para medir a área. Destacamos as falas dos componentes do grupo “A”, que, por ventura, prevaleceram nas discussões.

> *Mary - Existem vários recortes, mas eu acho que o quadrado é melhor.*
> *Léo - concordo que é o quadrado.*

A retomada da experiência se deu pela necessidade de se usar uma unidade padrão. Como, na última atividade, já havíamos trabalhado com as unidades não padronizadas, havia indícios de que bastava escolher uma das unidades e contar.

A atividade foi composta por cinco questões anunciadas a seguir:

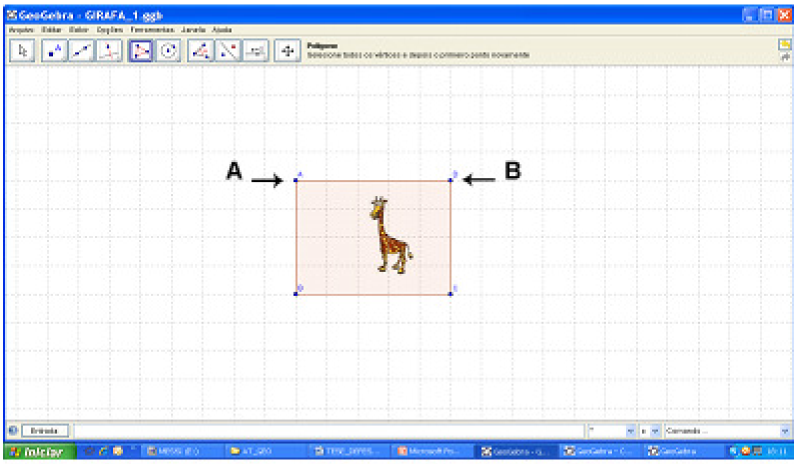
Atividade 5:

1) Quantos quadradinhos compõem a área do seu viveiro?
2) Recorte cada quadradinho na diagonal de forma a obter duas partes iguais. E conte novamente a área do viveiro.
3) Na tela do computador, há uma representação do viveiro (Figura 25), para calcular a medida de área e perímetro dele faça o que se pede:

   No menu exibir: acione exibir malha. Considerando que cada quadrado da malha corresponde a uma unidade de área e cada lado do quadrado uma unidade de comprimento, determine a quantidade de quadradinhos que recobrem o chão do viveiro. Determine a distância de A até B e a medida do perímetro.

4) Acione a parte direita do *mouse* em cima da malha, fora do viveiro e escolha o ícone propriedades. Na janela de visualização, acione o ícone malha, marque (clicar no quadradinho) a palavra distância. Clique com o botão esquerdo do *mouse* no retângulo indicado pela letra X, que contêm o número 1 e substituir pelo número dois. Repita o procedimento no retângulo que contêm a letra Y (cf. Apêndice III). Feche a janela ajuste a figura e determine a quantidade de quadradinhos. O que você percebeu? Comente com seu (sua) colega e registre o comentário.
5) Repita o procedimento, substituindo o dois por zero ponto cinco (0.5) e comente novamente com o (a) colega, o que você percebeu.

Figura 25 – Representação da questão na tela do computador grupo B



Fonte: Autor

O quadro a seguir (Quadro 10) apresenta as discussões dos itens um e dois da atividade cinco da sequência. Nele, são descritas as análises referentes ao recobrimento da região interna do viveiro construído pelos alunos, com recortes em EVA de formato quadrado. Em seguida, as peças são recortadas na diagonal para uma nova contagem utilizando o triângulo como unidade de medida.

Quadro 10 – Análise da atividade cinco relativa a pavimentação do viveiro

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Pesquisador – quanto deu a medida de área. Léo – o meu tem 9 quadradinhos. Mary – o meu também. Alunos – representa a área. Pesquisador – corte na diagonal dos quadradinhos e conte novamente a medida da área. Pesquisador – quanto é que tem de área, agora? Mary – tem 18. Pesquisador – por quê? Alunos – porque dobrou. Pesquisador – já escreveram a nova área. Mary – tem 18 porque dobrou.	D1: Manipulação das peças em EVA. D2: Contagem das unidades de área. → C: tem 9 quadradinhos. W: A contagem das unidades possibilita a determinação da medida da área da figura. B: Determina-se a área de uma figura comparando sua superfície com a de outra figura tomada como unidade. O resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes a figura contém a unidade de área. A observação e manipulação das peças em EVA e a contagem das unidades representaram os dados **D1** e **D2** que possibilitaram aos alunos determinarem a medida de área da região interna do viveiro. A garantia **W** implícita nas ações de contagem das unidades representa a justificativa, cujo apoio **B** ratifica a estratégia de contagem e expressa a ideia que a fundamenta. Considerando como unidade de medida o triângulo, obtido pelo recorte do quadradinho na diagonal, a área indicada pelos discentes é de 18, que é justificada por representar o dobro de peças do quadrado. D1: Manipulação das peças em EVA. D2: Contagem das unidades de área. → C: tem 18. W: porque dobrou. Os indícios coletados na ação necessária à determinação da medida da área favoreceram a argumentação pragmática e abdutiva, visto que se buscaram as justificativas mais plausíveis como garantias das asserções. A argumentação foi eficaz e convergiu para uma solução específica em consonância com o cálculo de medida de área pela soma das unidades eleitas, assim, a validação se deu com a função de verificação na primeira estrutura, e de explicação na segunda.

No Quadro 10, podemos identificar que a garantia “W”, que subsidia a conclusão é revelada no modelo, mas não é explicitada pelos alunos, que é exibida, em decorrência de servir de estratégia, com a qual os discentes chegarem à solução “C”. O apoio “B” é dado pela definição da aplicação medida em função da escolha da unidade. Na segunda estrutura, a justificativa é explicitada pelos alunos. A evidência para se chegar à conclusão e justificá-la não necessitou de apoio para ser validada, ou seja, a representação mais simples do modelo foi eficaz para se validar a argumentação.

A retomada da experiência de referência se deu por possibilitar a exploração da medida, a partir dos recortes já apresentados aos alunos no momento do recobrimento das regiões internas do viveiro (atividade 4). O trabalho com esse material, já apreendido pelos discentes, favoreceu o desenvolvimento da atividade.

A seguir, apresentamos o terceiro item da atividade cinco (Quadro 11), relativa ao cálculo da medida da área do viveiro, construído no Geogebra pelo pesquisador, e apresentado aos alunos na tela do computador (Figura 25).

Quadro 11 – Análise da atividade – cálculo da medida de área do viveiro na tela do computador

<table>
<tr><th>Argumentações</th><th>Análises estrutural e funcional do raciocínio</th></tr>
<tr><td>Pesquisador – como podemos calcular a medida da área do viveiro?
Mary – contado os quadradinhos de um em um dois em dois.
Mary – tem 64 quadradinhos.
Pesquisador – como você fez para obter este valor?
Mary – contando de 8 em 8.
Pesquisador – você contou as filas?
Mary – sim.
Esta pergunta tem o propósito de suscitar a contagem da medida de área do quadrado por meio do produto das dimensões.
Pesquisador – cada quadradinho deste mede um centímetro de comprimento em cada lado. Dizemos que a região interna do quadradinho mede 1 cm^2, neste caso, dizemos que a área mede 64 cm^2.
Pesquisador – Como cada lado mede 1 cm quanto vale a medida de A até B (Figura 25).
Léo - 8.
Pesquisador – 8 o que?
Léo – centímetros.
Pesquisador – Qual o valor do perímetro?
Alunos - mede 32 cm.
Pesquisador – Como calcularam?
Mary – contando todo o contorno deu 32.</td><td>D1: Observação de um quadrado sobre malha quadriculada na tela do computador.
D2: Contagem das unidades de área.
→ C: 64 quadradinhos.
W: A contagem das unidades possibilita a determinação da medida da área da figura.
B: Escolhido o quadrado como unidade de medida de área, a área de uma figura é o número de quadrados necessários para recobrir uma a superfície delimitada pela figura

A partir dos dados D1 e D2, obtidos pela observação e contagem de medida de área numa perspectiva unidimensional, ou seja, da simples contagem de unidades, os alunos determinaram a medida da área da figura, explicitando sua solução por meio de uma argumentação pragmática e abdutiva. Não foi identificada nenhuma contradição na justificativa para concluir que a medida da área era de 64 unidades, assim o argumento, provisório, ganha força e converge para uma solução específica, cuja validação apresentou-se com a função de explicação. A intervenção do pesquisador foi no sentido de suscitar uma contagem mais rápida das unidades e de institucionalizar as médias de área e perímetro de figuras planas.

D1: Observação de um quadrado sobre malha quadriculada na tela do computador.
D2: Soma das medidas do contorno.
→ C: mede 32 cm.
W: A soma das medidas do contorno da figura fornece o valor da medida do perímetro.

Da mesma forma, para a determinação do perímetro, uma argumentação baseada na observação e na soma das medidas do contorno compõe uma argumentação pragmática do tipo abdutiva, pois se buscou a garantia mais plausível para justificar a conclusão. A intervenção do pesquisador provocou uma validação explicativa no processo.</td></tr>
</table>

Na primeira estrutura, apresentada no Quadro 11, a garantia “W” utilizada como estratégia para a determinação da medida da área do viveiro é respaldada pelo apoio “B”, baseado na definição da aplicação medida (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), o que lhe possibilitou a validação da argumentação. Na segunda estrutura, os conhecimentos prévios dos discentes, a respeito da associação do perímetro ao contorno da figura e os indícios oriundos da atividade, possibilitaram a validação da conclusão, sem a necessidade de se recorrer a um apoio.

A distinção entre área e perímetro em destaque, desde a primeira atividade, é mais uma vez abordada, e os discentes não apresentam dificuldades para diferenciá-los.

Na próxima questão, abordamos a mudança de unidade. Procurava-se saber o que aconteceria com o número que representava a medida da área, se as dimensões do quadrado de referência fossem aumentadas ou diminuídas.

Quadro 12 – Análise da atividade relativa ao cálculo da medida de área do viveiro na tela do computador

Argumentações	Análises estrutural e funcional dos argumentos
Mary- "Fica" menos quadrados dentro do chão do viveiro. Alunos – Tem 16. Mary – De 64 baixou para 16 quadrados. Mary – Ficou 16, vai ficar maior o quadrado e ficou menor a quantidade de quadrados. Léo – Ficou menor a quantidade, tinha mais quadrado, agora ficou menos. Pesquisador – Quanto é a nova área? Mary – 16. Pesquisador – 16 o quê? Mary – Centímetros quadrados. Pesquisador – E o perímetro? Alunos – 64 cm. Pesquisador – Quanto maior o quadrado usado para medir, o que acontece com a medida da área. Mary – Vai diminuindo. Léo – Coloca o 3, para vermos o que acontece? Léo – Não ficou legal, não dá para contar coloca o dez. Mary – Não vai nem aparecer. Pesquisador – Vamos colocar 0.5. O que significa 0.5? Mary – É muito pequeninho. Léo - É meio. Mary – Eu sei que vai ter é 128. Pesquisador – Por quê? Mary – Diminuindo o tamanho do quadradinho, aumenta a quantidade de quadradinho no chão do viveiro, vai ser o dobro do 64. *Léo começa a contar de um por um.* Pesquisador – Tem uma maneira de contar mais rápido. Léo – Na linha tem a mesma quantidade das outras, por exemplo, tu "conta" 16 fileiras e (diz quanto tem) aqui tem quanto? Mary – Também tem 16. Pesquisador – E agora o que faz Léo – Agora soma 16+16+16..... vai dar 256 cm^2. Mary – o perímetro é 48 cm.	D1: Observação de um quadrado sobre malha quadriculada na tela do computador. D2: de 64 baixou para 16 quadrados. C1: ficam menos quadrados dentro do chão do viveiro. C2: ficaram 16, vai ficar maior o quadrado e ficou menor a quantidade de quadrados. W1: ficou menor a quantidade tinha mais quadrado, agora ficou menos. W2: vai diminuindo. B: O número correspondente à área de uma figura depende da unidade de medida escolhida. A partir dos dados **D1**, obtidos na tela do computador e de **D2**, hipotético representado pela redução do número de quadrados, os alunos apresentaram as soluções correspondentes específicas **C1** e **C2**, que evidenciam uma argumentação pragmática indutiva por passagem ao limite, já que os discentes ao certificar-se que a propriedade era verdadeira, para uma determinada situação, tomaram-na como caso geral. As garantias **W1** e **W2** evidenciam a compreensão da alteração da medida de área provocada pela mudança da unidade de medida. Com o apoio **B**, o argumento ganha força e converge para duas soluções específicas que se equivalem. Assim, chega-se à validação, cuja função foi de descoberta. D: Observação de um quadrado sobre malha quadriculada na tela do computador. C1: vai ter é 128. C2: vai dá 256 cm^2. W1: vai ser o dobro do 64. W2: o valor de área é quatro vezes maior que a área inicial B: O número correspondente à área de uma figura depende da unidade de medida escolhida. A solução candidata **C1**, apesar de apresentar apoio coerente, tem justificativa **W1** equivocada: "*a redução das dimensões pela metade provocaria uma duplicação na medida da área*". O argumento perdeu força com a ação da contagem total dos quadradinhos que revelou uma solução específica **C2**, evidenciando que *o valor de área é quatro vezes maior que a área inicial.* O processo evidenciou uma argumentação pragmática indutiva por passagem ao limite, convergindo para uma solução específica, cuja validação apresentou-se com a função de descoberta.

As estruturas apresentadas no Quadro 12 indicam que as ações e observações dos discentes sobre a atividade lhes possibilitaram dar garantias às conclusões, cujos apoios relativos à dependência do valor da área, em função da unidade de medida escolhida, permitiram a validação do argumento.

Alcançamos nossos objetivos, visto que os alunos apreenderam que a alteração da superfície unitária provoca alteração na medida da área. A retomada da experiência de referência possibilitou introduzir a ideia de unidades de medidas, favorecendo a compreensão da unidade-padrão de medida de área e perímetro. A prática da argumentação possibilitou a compreensão, por parte dos alunos, de que a medida da área depende da unidade de medida escolhida.

A apreensão conceitual foi favorecida pelo processo argumentativo, contemplando as fases que revelam a prática da argumentação enquanto método de ensino.

Uma aproximação com a generalização levou uma aluna a concluir que, ao reduzir pela metade as dimensões da unidade de medida, sua área iria duplicar. A contagem das unidades de área provocou a mudança na concepção da discente, que passou a admitir que a área fosse quadriplicada. Não houve estranheza no entendimento de que uma mesma figura pode apresentar medidas de áreas diferentes para mesma região.

A contagem das filas para determinação da área evidenciou o início da passagem da contagem das unidades para multiplicação das dimensões.

Atividade 6

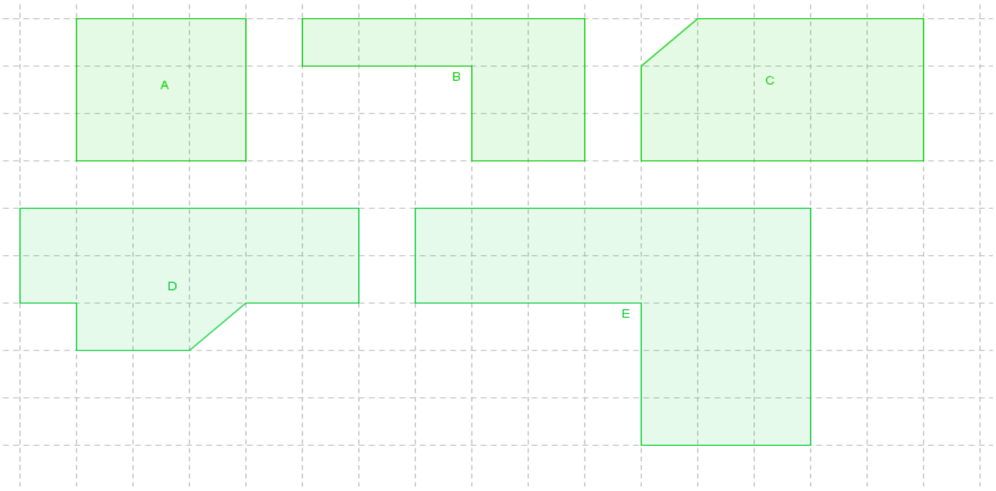
Definimos dois objetivos para esta atividade: primeiramente, fazer com que os alunos argumentassem que figuras com formas diferentes podem apresentar a mesma área e que figuras de mesma forma podem apresentar áreas diferentes; em segundo lugar, que eles pudessem, também, perceber e justificar que a medida da área depende da unidade de medida escolhida como parâmetro. A possibilidade de um mesmo problema apresentar duas respostas numericamente diferentes auxilia o aluno na compreensão do conceito de unidade de medida de área e favorece o entendimento da diferença entre as duas respostas, já que ambas representam a mesma área.

Acreditamos que o aluno irá se basear no princípio básico de contagem, ou seja, contará os quadrados que compõem as figuras, visto que essa ideia foi abordada na atividade cinco. A relação entre formas e medida de área deve se evidenciar mais uma vez, por isso não deverá haver dificuldades no estabelecimento desta relação. O debate sobre os valores diferenciados dos dois grupos deve reforçar a percepção que a unidade escolhida influencia no valor da medida.

Provavelmente, não haverá grandes dificuldades para se cumprir a atividade. É possível que no ítem “C” seja evidenciado uma série de soluções candidatas cujo processo de validação deve direcionar a uma solução específica. Nesse sentido, a questão deve exigir uma mediação do pesquisador, a fim de que se chegue a uma conclusão para onde devem convergir as argumentações isoladas.

Na atividade apresentada, a seguir, estiveram presentes quatro alunos, dois de cada grupo, que se reuniram em dupla para solucionarem as questões propostas.

Atividade 6: Outras turmas também apresentaram suas ideias para construir o viveiro do animal, como podemos observar a seguir (visto de cima). Vamos analisar estas propostas:

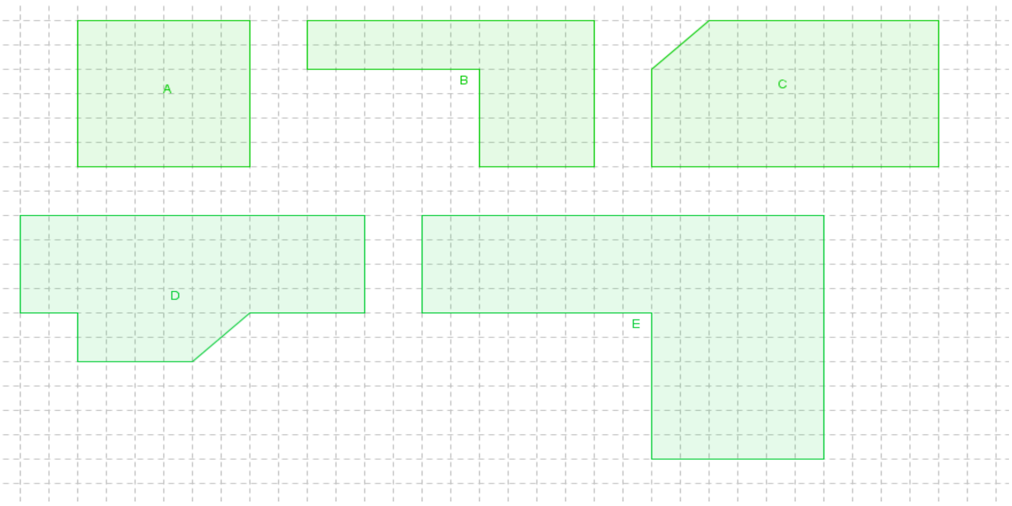


a) Quais têm a mesma forma?

b) Quais têm a mesma medida de área?

c) Após essa verificação, o que podemos afirmar, em relação à forma e às medidas de áreas dessas figuras?

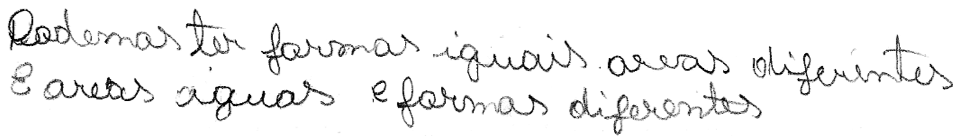
O comando da questão era o mesmo para os dois grupos, mas as malhas tinham tamanhos diferentes.



Quadro 13 – Análise da atividade relacionadas a equivalência de medidas de área

Argumentações	Análises estrutural e funcional dos argumentos
Após contagem dos quadrados um a um, os alunos afirmaram que A e B; C e D tinham a mesma área e E e B a mesma forma. Com respeito ao item C, descreveremos a seguir: **Mary** – Umas são diferentes, umas são iguais, podem ser "igual", mas com a área e o perímetro diferente. **Léo** – Podemos afirmar que as formas podem ter a mesma área e perímetros diferentes ou iguais. **Alunos** – Podemos afirmar que B e E têm áreas diferentes as formas são iguais; umas podem ter tamanho grande e ter a mesma forma e diferente área e perímetro. *Pesquisador retoma a questão e diz que a tarefa se refere apenas à área, apesar da boa observação dos alunos.* **Léo** - Podemos afirmar que podem ter a mesma área, mas tem uma que tem a mesma forma outras não. **Léo** – A área pode ser diferente uma da outra, mas pode ter a mesma forma. **Pesquisador** – Relacionem forma e área. **Mary** – Podem ter a mesma forma e áreas diferentes. **Alunos** – Podemos ter formas iguais, áreas diferentes e áreas iguais e formas diferentes (Figura 26).	D1: Observação das formas. D2: Constatação a partir da contagem das unidades. C1: Podemos afirmar que B e E têm áreas diferentes as formas são iguais, umas podem ter tamanho grande e ter a mesma forma e diferente área e perímetro. C2: A área pode ser diferente uma da outra, mas pode ter a mesma forma. C3: Podem ter a mesma forma e áreas diferentes. C4: Podemos ter formas iguais, áreas diferentes e áreas iguais e formas diferentes. W1: umas são diferentes umas são iguais podem ser igual, mas com a área e o perímetro diferente. W2: podemos afirmar que as formas podem ter a mesma área e perímetros diferentes ou iguais. W3: Podemos afirmar que podem ter a mesma área, mas tem uma que tem a mesma forma, outras não. B: Área corresponde ao espaço ocupado pela figura e sua medida depende da quantidade de unidade de medida contida na figura independente da forma. Os dados **D1** e **D2**, baseados na estratégia de contagem das unidades de medida e na percepção das formas, forneceram evidências que favoreceram a emergência de argumentações pragmáticas indutivas por passagem ao limite. A exposição das possíveis soluções candidatas, descritas em **C1**, **C2** e **C3** se apresentam como plausíveis e solicitam garantias justificatórias, cuja força é expressa por meio de justificativas transitórias ratificadas na frase *pode ser*, evidenciando a necessidade de aprofundamento para se estabelecer uma melhor relação do sujeito com o saber em jogo. Estas soluções possibilitaram chegar à conclusão mais específica **C4.** Essa convergência foi mediada pelo pesquisador a partir do apoio **B.** Assim, a argumentação ganhou força, não com a exclusão das candidatas, como afirma Toulmin, mas sim pela composição delas. Na validação, constatamos a predominância da função de explicação, pois o processo argumentativo permitiu encontrar uma solução que explicou as relações solicitadas a partir das ações proporcionadas pela atividade.

Figura 26 – Síntese das discussões dos alunos



Fonte: Produção dos alunos

A análise contida no Quadro 13 evidencia que a interação argumentativa flexibiliza o modelo no sentido de evidenciar uma variedade de dados, garantias e conclusões. As conclusões sofreram o processo de convergência até que se alcançasse uma solução específica que não descartou as outras soluções. As garantias foram explicitadas a partir das ações sobre a atividade e o apoio serviu de referência para o pesquisador direcionar a argumentação para validação.

Não houve discussões sobre as unidades, diferentemente do previsto, em relação à constatação das afirmações dos alunos de que, quanto maior o quadradinho escolhido para unidade de medida, menor será o valor da medida da área. Assim, os alunos justificaram os diferentes valores entre as medidas, o que evidencia a distinção entre área e medida de área.

Os discentes fizeram uso da contagem simples das unidades de área, como previsto, e explicitaram várias soluções que se habilitaram como possíveis respostas ao problema (TOULMIN, 2006). Por meio do processo de convergência, chegaram a uma solução específica, que foi validada no decorrer do processo argumentativo sob mediação do pesquisador.

Atividade 7

Aqui como em outras atividades, buscamos dissociar as grandezas área e perímetro. Nesse sentido, nosso objetivo foi obter as medidas de área e perímetro por estimativa, a fim de confrontar possíveis soluções divergentes, de forma que os alunos pudessem justificar suas soluções candidatas e validá-las no decorrer do processo argumentativo. A medida da área, cuja superfície apresentou forma irregular (Figura 26), deve permitir a ampliação dessa idéia, a partir do seu cálculo, aproximado, utilizando-se de números decimais.

Os recursos utilizados nesta atividade foram: o viveiro de Nei (Figura 27), papel quadriculado, barbante, lápis, régua graduada e borracha. Estiveram presentes cinco aluno (dois do grupo “A” e três do grupo “B”).

Figura 27 – Viveiro construído por um dos alunos

Fonte: Produção dos alunos

Acreditamos que os alunos não encontrariam grandes dificuldades na resolução desta atividade, a não ser pelo tratamento com números decimais.

Para obter uma aproximação da área, esperamos que os alunos possam fazer uso de estratégias de contagem por falta ou por excesso. Isso provocaria soluções diferentes que suscitariam argumentações justificatórias, o que acarretaria avaliação de suas estratégias, além de reconhecerem outras possibilidades de soluções, a partir das justificativas dos colegas. Para determinação do perímetro, nossa expectativa é que os discentes façam uso da estratégia de contornarem o viveiro, utilizando o fio e comprovem o valor na escala da régua. Para a área, esperamos que utilizem o recobrimento em EVA e desenhem o contorno no papel quadriculado.

No decorrer da experiência de referência, a esquematização de um dos viveiros se diferenciou do restante, o que possibilitou sua retomada, a fim de explorarmos estratégias para o cálculo aproximado da medida de área e perímetro. A atividade mediada pelo pesquisador, a partir da coleta de indícios propiciados pela ação, possibilitou a emergência de justificativas embasadas por critérios eleitos pelos alunos para contagem de valores aproximados da área. As discussões oriundas da experiência, propriamente dita, apesar de apresentarem-se muito dispersas permitiram a identificação de elementos que compõem uma argumentação mais complexa.

O modelo proposto por Toulmin (2006) congrega os elementos essenciais de um processo argumentativo, ou seja, a parte fisiológica desse, a parte anatômica, como afirma o autor, apresenta complexidades que provocam recortes no processo em função de dados, justificativas, conclusões, etc. Ao retomarmos a experiência de referência, essa complexidade pode ser evidenciada pela dispersão das enunciações, pelo fato de a atividade não se centrar na busca de soluções específicas. Em virtude disso, analisaremos esta atividade fora da estrutura proposta pelo autor.

A atividade versava sobre a seguinte questão.

Atividade 7
Determinar a medida aproximada da área e do perímetro do viveiro do Nei.

As respostas são analisadas a seguir.

Pesquisador - Como calcular a área?
Mary - vamos contar os quadradinhos.
Léo - como é que vamos contar esses quadrados?

Mary - vamos contar só os quadradinhos inteiros.

A estratégia de contar os quadradinhos advém de outras atividades já realizadas no decorrer da sequência aqui proposta. A novidade era como contar partes não inteiras. Estes argumentos, como destacam Douek e Scali (2000), relacionam-se a novas experiências e prepararam o terreno para construções e descrições, inicialmente pessoais e posteriormente coletivas, de procedimentos apropriados à resolução do problema.

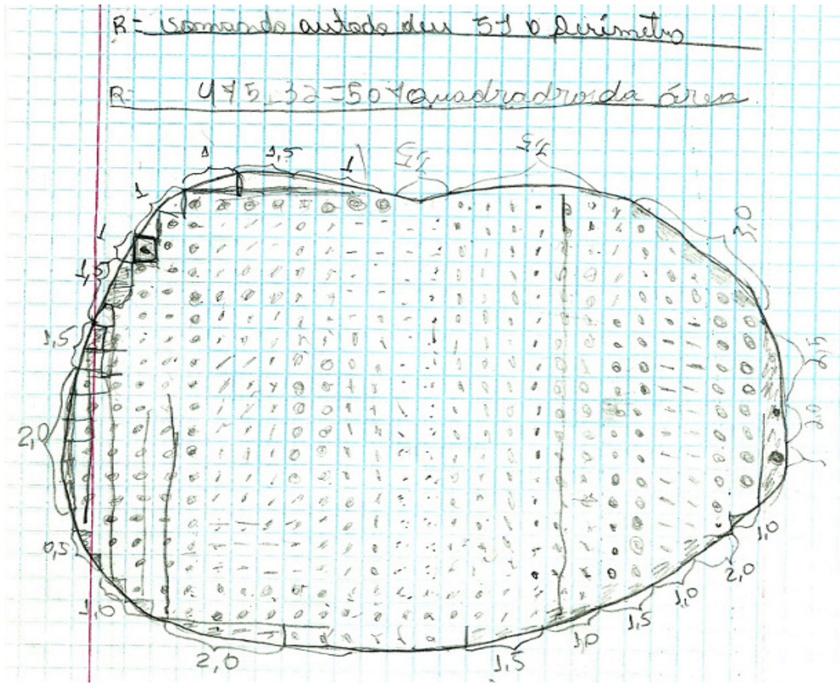
Pesquisador – como podemos contar considerando as partes que não são inteiras?
Léo – podemos juntar metade e contar.
Mary – como vou contar?
Léo – conta nas fileiras.

A troca de ideias, possibilitada pela experiência de referência, favoreceu a apreensão de estratégias que levam à solução do problema, e a mediação do pesquisador auxiliou os alunos a se engajarem no processo argumentativo.

As ações, a seguir, evidenciam estratégias diferenciadas na abordagem do problema.

Mary marca as fileiras com quadradinhos inteiros. Primeiramente, o grupo “A” desenha um retângulo dentro da figura e conta as filas formadas por 19 colunas e 16 linhas. Em seguida, conta um a um os quadradinhos inteiros; após isso, junta as partes de meio em meio estimando quadrados inteiros, totalizando 507 quadrados de área, como indicado na Figura 28.

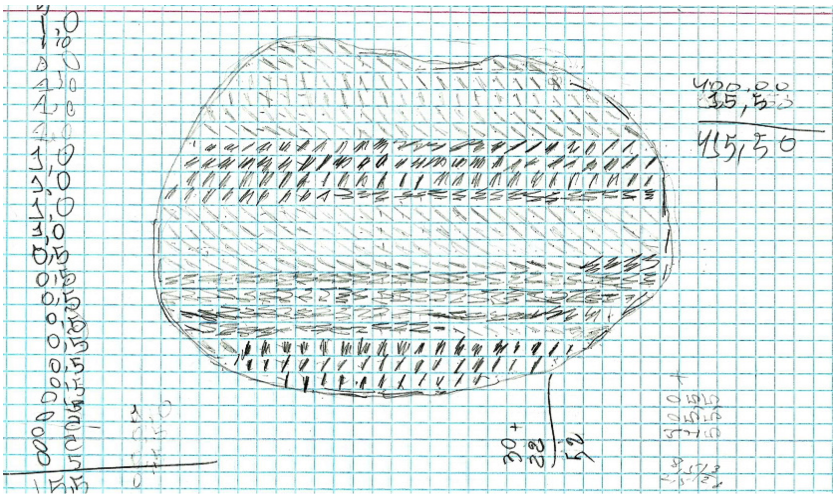
Figura 28 – Solução dos alunos do grupo "A"



Fonte: Produção dos alunos

O grupo “B” fez riscos diferenciados nas filas, agrupando-as em 4 colunas de 24 linhas, conferindo o restante de um a um e meio em meio, totalizando 415, 50 quadradinhos de área (Figura 29).

Figura 29 – Solução dos alunos do grupo "B"



Fonte: Produção dos alunos

O pesquisador confronta as duas medidas de área e pergunta por que deu diferente, obtendo as seguintes justificativas.

Will - por causa dos espaços que eles contaram diferentes do nosso.
Mary - a contagem dos pedacinhos fez ficar diferentes.

A intervenção do pesquisador incentivou os discentes a argumentarem, a partir de ações do desenho em papel quadriculado e contagem aproximada dos quadradinhos da região interna da figura. As justificativas indicam indícios que os alunos compreenderam as razões das diferencias entre as respostas encontradas.

Para encontrar o perímetro, os dois grupos determinaram a medida, contornando o fio pelo viveiro e, em seguida, mediram o fio com a régua, enquanto Léo e Mary mediram o comprimento do contorno em duas etapas na mesma régua, obtendo o seguinte cálculo: 30 cm + 21 cm = 51 cm.

Léo - 30 cm e sobrou um pedacinho que começa daqui. 51 cm ao todo professor!

Por sua vez, Will, Rony e Nei juntaram duas réguas para obterem o comprimento relativo ao perímetro, obtendo o seguinte cálculo: 30 cm + 20 cm = 50 cm.

O pesquisador perguntou: Por que há diferença nos resultados?

Will - Eles usaram uma régua e nós duas e vai passando esse espaço (Will aponta para parte sem indicação numérica).

Após a justificativa de Will, mostramos aos alunos que, na estratégia do grupo "B", não foi medido de fato quase um centímetro, referente ao espaço indicado pelo aluno.

Como prevêem Douek e Scali (2000), a trama argumentativa possibilitada pela experiência de referência fez emergir muitos argumentos expressos em sua diversidade de representações, sejam simbólicas, gestuais, linguísticas, etc. A justificativa requerida pela referida experiência está de acordo com a principal função da argumentação anunciada por Toumin (2006), e se estabelece como primeira fase para emergência do processo argumentativo, apresentando, se não a estrutura completa, elementos que evidenciam a presença da argumentação.

Atividades 8 e 9

Estas atividades se complementam. Por esse motivo, realizaremos suas análises *a priori* de forma simultânea. Nelas, temos por objetivo favorecer, por meio do processo argumentativo, a compreensão e a dedução da fórmula para se calcular a medida de área do retângulo e do quadrado. Além disso, a comunicação de ideias, a partir de ações de recorte e colagem, apoiadas na propriedade de invariância de área por equidecomponibilidade, deve possibilitar a determinação das fórmulas para o cálculo da medida de área do paralelogramo e do triângulo.

Nossa expectativa é que as argumentações favoreçam a comunicação e troca de idéias entre os alunos, de tal forma que possam passar gradativamente da simples contagem das unidades de medidas, para, em seguida, conferi-las agrupadas em filas e finalmente passem da estratégia aditiva para multiplicativa. Após essa transição, esperamos que os discentes recorram à fórmula de cálculo da medida de área do retângulo para determinarem as respectivas fórmulas para o quadrado, paralelogramo e triângulo. Consideramos que essa atividade possibilita a compreensão e a atribuição de significado às fórmulas que utilizamos para calcular a medida de área de algumas figuras planas.

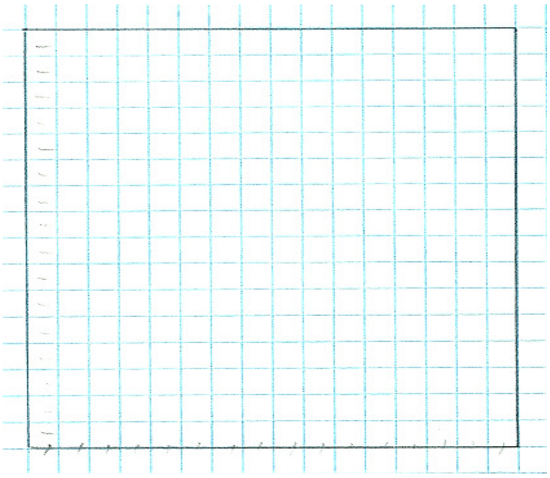
O ponto crucial dessas atividades é a passagem do modelo de contagem de medida de área como grandeza unidimensional a bidimensional. Deste modo, provavelmente, os discentes apresentarão dificuldades para associarem que a multiplicação equivale a contar os quadrados unitários para pavimentar um retângulo. A extensão da idéia de cálculo da medida de área do retângulo para a do quadrado não deve trazer problemas aos discentes. Quanto ao paralelogramo, a relação de equivalência por equidecomponibilidade deve levar os alunos a perceberem a relação de igualdade entre áreas, mas, para chegarem à fórmula, deve haver dificuldades, em decorrência da medida da altura em geral ser confundida com a medida do lado inclinado dessa figura. Para se chegar à fórmula, que determina a medida da área do triângulo, a partir da fórmula do paralelogramo, os discentes provavelmente argumentarão que a medida da área do triângulo corresponde à metade da medida da área do paralelogramo, mas para transcreverem a relação por meio da fórmula deverão apresentar dificuldades.

Na atividade apresentada, a seguir, foram utilizados os seguintes materiais: papel quadriculado, lápis, borracha e régua graduada. Estiveram presentes quatro alunos, dois de cada grupo, que compuseram as duplas.

Atividade 8

1) Considerando que cada quadradinho do papel tenha 1 cm de lado, construa as figuras solicitadas a seguir e encontre uma maneira para determinar o valor da medida da área de cada uma delas sem precisar contar os quadradinhos um por um.
   a) Quadrado com 16 cm de lado (Figura 30).
   b) Retângulo com 12 cm de comprimento e 6 cm de altura.
   c) Retângulo com 21 cm de comprimento e 4 cm de altura.
   d) Retângulo com “b” de comprimento e “h” de altura.

Figura 30 – Desenho do quadrado de lado 16 cm



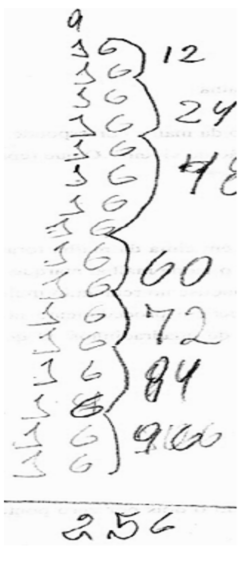
Fonte: Produção dos alunos

A seguir, apresentaremos as argumentações oriundas da atividade 08 e suas respectivas análises estrutural e funcional. Como houve divergência entre os valores calculados pelos dois grupos, as análises contemplaram a fala de alunos do grupo “B”.

Quadro 14 – Análise da atividade relacionada ao cálculo da medida de área por agrupamento de unidades

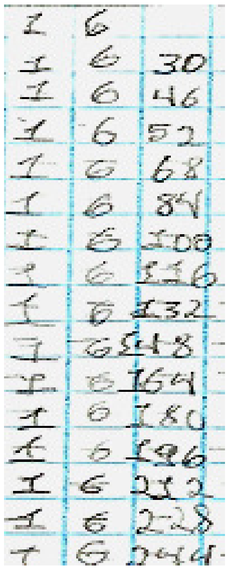
Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Alunos contam as filas. Mary – Tem dezesseis, dezesseis, dezesseis, dezesseis. Léo – Faz dezesseis, dezesseis aí. Léo – Aqui dá um número e aqui dá outro (apontando as filas), pega os resultados e soma tudo. *Após fazerem os cálculos, os alunos relatam.* Will e Roni – Vai dar 256 (Figura 31). Mary e Léo – 244 (Figura 32). Léo – O Roni e o Will fizeram igual ao nosso (ao olhar o do colega), mas eles se enganaram em algum cálculo. Pesquisador – Confiram os cálculos para ver se há algum erro! *Alunos analisam os cálculos passo a passo para detectarem o erro. Após perceberem que tinham somado 16+16=30, Mary exclamou.* Mary – O Roni está certo! Pesquisador – Como podemos determinar a medida da área de forma mais rápida para o retângulo de 12 cm por 6 cm? Léo – Contando as filas. Tem seis filas de doze (o aluno agrupa 12-24-36-48-72).	D: Figura em papel quadriculado. → C: Contando as filas. W: Aqui dá um número e aqui dá outro (apontando as filas), pega os resultados e soma tudo. B: Obtém-se a medida da área de uma figura, desenhada em malha quadriculada, contando as filas formadas pelas unidades de medidas. Os dados **D** empíricos, obtidos a partir da simples contagem das unidades de medida na malha quadriculada, fazem emergir argumentação pragmática e abdutiva, visto que se procurou as justificativas **W** mais plausíveis como garantia para conclusão. Em relação à forma de calcular com mais rapidez a medida da área em questão, a argumentação convergiu para solução específica **C**, sem conflitos de ideias. A validação apresentou-se com a função de explicação, como se pode constatar nas tentativas dos alunos para fornecerem explicações para convencer seus pares e o pesquisador, quanto ao fato ser verdadeiro.

Figura 31 – Soma das filas realizadas pelos alunos do grupo “B”



Fonte: Produção dos alunos

Figura 32 – Soma das filas realizadas pelos alunos do grupo “A”



Fonte: Produção dos alunos

A garantia foi explicitada no sentido de justificar a passagem dos dados à conclusão, como se pode observar no Quadro 14. Essa justificativa evidencia a compreensão da contagem das filas como processo mais imediato em relação à contagem das unidades de medidas uma a uma, além de favorecer que se chegue ao processo de multiplicação das dimensões e consequente uso da fórmula para o cálculo da medida de área do retângulo e do quadrado. O apoio relativo à contagem da unidade de medida possibilitou a validação do argumento.

Discutimos com os alunos que a soma de parcelas iguais pode ser representada de outra forma. Exploramos algumas somas desse tipo, como por exemplo, 4+4+4, 10+10+10+10+10, 21+21+21+21, solicitando que fossem representadas de outra forma. Os alunos responderam que poderia ser quatro vezes três (4x3), dez vezes cinco (10x5) e vinte e um vezes quatro (21x4), respectivamente. Em seguida, retomamos a questão e interrogamos sobre como ficaria a conta no caso do doze. Trouxemos aqui a fala de um aluno do grupo “B”, que contribuiu no processo argumentativo do grupo “A”, como constataremos a seguir no Quadro 15.

Quadro 15 – Obtenção da fórmula para calcular a medida da área do retângulo

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Mary – Seis vezes o doze. Will – Vai dar setenta e dois. Pesquisador – Qual a medida da área no caso da questão sobre o retângulo com 21 cm de comprimento por 4 cm de altura? Léo – Vinte e um vezes quatro. Mary – Oitenta e quatro. Mary - É só multiplicar. *Em seguida, os discentes passaram a questão do quadrado com medida de lado 16 cm.* Mary – Fica dezesseis vezes o dezesseis. Mary – 16 X 16 Alunos – Tiraram a prova realizando a multiplicação. *Como os alunos não representaram o desenho do item "d", o pesquisador explica que as dimensões "b" e "h" representam a base e a altura de um retângulo qualquer, ou seja, pode ser desenhado com qualquer medida.* Mary - Com as letras não dá pra multiplicar. Pesquisador – Podemos deixar a conta armada, mostrando a multiplicação entre as letras. Alunos – Fica só bxh. Pesquisador – Sim, essa forma de escrever representa a fórmula que usamos para calcular a medida de área de qualquer retângulo, bastando substituir os valores de b e h que estiverem indicados nas figuras.	D1: Conclusão do item anterior. D2: Comando da questão. → C1: seis vezes o doze. C2: vinte e um vezes três. C3: dezesseis vezes o dezesseis. C4: é só multiplicar. C5: fica só bxh. ↑ W: Obtém-se a medidas da área de um retângulo multiplicando-se as dimensões. Os dados **D1** e **D2,** fornecidos pela questão e pelo item anterior levam, após mediação do pesquisador, os alunos a multiplicarem os resultados para obterem a medida da área das figuras dadas. A garantia **W** não precisou de apoio, pois sua consistência apresentou força suficiente para ser validada sem contra-argumentações. As conclusões **C1**, **C2**, **C3** e **C4** apresentaram-se como soluções candidatas, e, se articularam, convergindo para que se chegasse a uma solução específica **C5**. O processo revelou uma argumentação semântica com passagem ao limite, uma vez que esse procedimento de obtenção de medida de área remete-se à otimização da contagem das filas da questão anterior e toma como referência um caso particular para generalizar o processo. Segundo Cabassut (2005), a obtenção de uma fórmula explica as relações entre as ações e o uso da fórmula. Assim, a validação apresenta-se com função de explicação.

O processo de convergência das soluções candidatas C1, C2, C3 e C4 para a solução específica C5 indica que a observação de Toulmin (1996) sobre a eliminação das soluções candidatas nem sempre é verificada, pelo menos no caso da sala de aula de matemática. Observa-se, também, na estrutura (Quadro 15), que o pesquisador não precisou recorrer ao apoio da garantia para controlar o processo de validação, em virtude de os alunos explicitarem uma justificativa em conformidade com as normas da matemática que lhes possibilitou validar a conclusão.

Outro aspecto a se destacar, nessa atividade, foi que, além de identificar os elementos que compõem o processo argumentativo como dados e garantias, também foi necessário perceber que, em situações diversificadas, o que num determinado momento tem funcionalidade de conclusão pode aparecer como dado em outra situação.

> Ou seja, o que constitui os dados, garantias e fundamentos de uma argumentação não é algo predeterminado, mas antes negociado pelos participantes enquanto interagem. (BOAVIDA, 2005, p. 82).

Assim, a mediação do pesquisador revela-se como ponto crucial na prática da argumentação em sala de aula. Esse deve ter domínio suficiente, tanto da matemática quanto da teoria de Toulmin, para identificar os diferentes papéis que as enunciações podem assumir na interação argumentativa.

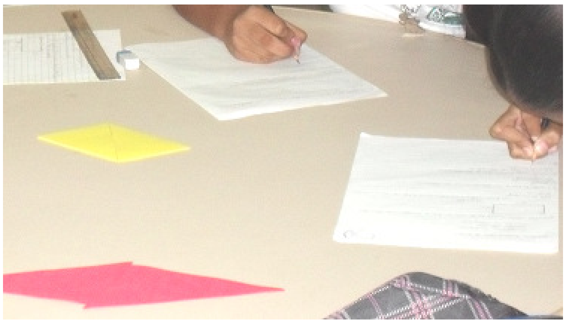
As atividades relativas à pavimentação das regiões favoreceram a passagem da idéia de contagem da unidade para filas e posterior multiplicação das dimensões, apesar da complexidade dessa passagem, o processo argumentativo se apresentou como método eficaz para se compreender a fórmula como ferramenta para o cálculo das medidas de áreas das figuras. Nesse processo, foi essencial a sequência proposta e a mediação do pesquisador.

Na sessão seguinte, demos sequência à atividade para obtenção das fórmulas para calcular a medida de área e perímetro do paralelogramo e do triângulo. Na atividade proposta, foram utilizados: a representação de um retângulo em folha de EVA recortado na diagonal, papel, lápis, borracha e régua. Na atividade a seguir, estiveram presentes quatro alunos dois de cada equipe.

Atividade 9

1. Identificar a figura vermelha representada pelo recorte em EVA (Figura 33).
2. Calcule a medida da área e do perímetro dessa figura.
3. Forme um paralelogramo a partir da figura vermelha e determine a medida de sua área e perímetro.

Figura 33 – Manipulação dos recortes em EVA pelos alunos



Fonte: Autor

A seguir, apresentaremos as análises das argumentações produzidas pelos discentes a partir da resolução da atividade proposta.

Quadro 16 – Determinação da fórmula para calcular a medida de área do paralelogramo

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Pesquisador – Que figura e essa? Mary – É o retângulo. Como podemos calcular a medida da área desse retângulo? Léo – Desenhando no papel e contando as filas de quadradinhos. Mary – Medindo com a régua a base e a altura. *Os alunos desenharam a figura correspondente ao retângulo em uma folha de papel, e indicaram após medição com régua as medidas 15 cm comprimento por 10 de altura.* *Pesquisador solicita o cálculo.* Léo – Quinze vezes dez (15 X 10). Mary – 150. Pesquisador - Como calculamos o perímetro? Mary – 15 + 15 + 10 + 10. *A próxima questão requeria que a partir do retângulo fosse formado um paralelogramo. E determinada a medida da área e do perímetro da nova figura.* Alunos - Dá pra formar um paralelogramo. Alunos mediram com a régua as dimensões 15 e 18 cm. Pesquisador - Já temos a medida da área do retângulo, qual será a medida da área do paralelogramo? Mary – Mesmo mudando a figura a quantidade vai ficar a mesma. Léo – Continua a mesma quantidade de papel, é a mesma área do retângulo. Pesquisador – E o perímetro? *Após medirem os lados inclinados, os alunos relataram.* Mary – Aqui dá dezoito mais dezoito mais quinze mais quinze (18 + 18 +15 + 15), dá sessenta e seis (66), o perímetro é diferente. Mary – O paralelogramo tem a mesma área do retângulo, mesmo mudando a forma não muda nada. Léo – Sabe o que muda aí é o retângulo. Pesquisador – Como calculamos a medida da área do retângulo? Mary – Contando a base e a altura. Pesquisador – Você quer dizer multiplicando a base pela altura. Pesquisador – Como medimos a altura do paralelogramo? Léo – Na linha inclinada (alunos tentaram medir a linha). Após o pesquisador esclarecer que a medida da altura precisa formar 90º com a base, ou seja, ser perpendicular à base, os discentes medem corretamente. Léo – A mesma coisa do retângulo. Pesquisador – Qual vai ser a fórmula do paralelogramo? Mary - A mesma do retângulo. Pesquisador – Qual é? Léo – Altura vezes base (hxb). Pesquisador – Pode ser também base vezes altura (bxh).	D1: Reconfiguração e medida da figura D2: Cálculo da medida de área do retângulo. C1: mesmo mudando a figura a quantidade vai ficar a mesma. C2: continua a mesma quantidade, é a mesma área do retângulo. C3: o paralelogramo tem a mesma área do retângulo, mesmo mudando a forma não muda nada. C4: a mesma coisa do retângulo. C5: h x b (altura vezes base). W: dá pra formar um paralelogramo. B: Invariância de área por equidecomponibilidade. Os dados **D1** e **D2**, fornecidos pela ação de reconfiguração e pelo cálculo da medida da área do retângulo, possibilitaram a explicitação das soluções candidatas **C1**, **C2**, **C3** e **C4,** que, por um processo de convergência argumentativa, mediado pelo pesquisador, favoreceram a obtenção se uma solução específica **C5**, cuja justificativa **W** se baseou na propriedade de invariância de área por equidecomponibilidade (**B**), garantindo a relação de igualdade entre as áreas do retângulo e do paralelogramo. Caracterizamos a argumentação, desse item da atividade, como semântica do tipo indutiva por passagem ao limite, em virtude da determinação da fórmula para calcular a medida de área do paralelogramo se remeter ao cálculo da medida da área do retângulo e de ser um caso particular para se chegar a uma conclusão geral. A validação apresenta prevalência para função de explicação, já que o processo de argumentação explica as relações entre as ações e a obtenção da fórmula.

Novamente, as soluções candidatas “C1”, “C2”, “C3” e “C4” foram articuladas para que obtivéssemos uma solução específica “C5”. Assim, configura-se que, em alguns casos, essas articulações sejam necessárias ao processo, para que o aluno se aproprie da competência argumentativa nas aulas de matemática. O modelo contempla uma garantia “W” hipotética que ganha força por estar de acordo com a propriedade contida no apoio “B” que auxilia o pesquisador a regular o processo de validação.

Como previmos, não houve dificuldade a respeito da equivalência entre as áreas do retângulo e paralelogramo, pois, no decorrer da sequência, os discentes já haviam compreendido essa relação. Constatamos nas comunicações de ideias que os alunos do grupo “A” em questão utilizaram a mesma argumentação da atividade 3 usada pelo grupo “B”, caracterizando além do respeito a opinião do colega, a compreensão da equivalência de área por equidecomponibilidade. Assim, a obtenção da fórmula para cálculo da medida de área do paralelogramo foi relacionada sem grandes problemas a do retângulo. No entanto, como esperávamos, houve dificuldades na identificação da medida da altura dessa figura. A partir da mediação do pesquisador, os discentes passaram a medir corretamente essa dimensão.

Segunda Parte da Atividade 9

4. A figura amarela é composta por duas partes. Identifique as figuras que compõem essas partes e calcule a medida de sua área a partir da medida de área da primeira figura (Figura 33).

Na sequência, apresentaremos as análises relativas à determinação da fórmula para calcular a medida de área do triângulo, utilizando a fórmula do paralelogramo.

Quadro 17 – Determinação da fórmula para calcular a medida de área do triângulo

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Com relação ao reconhecimento das partes que compunham a figura, os discentes relataram o seguinte. Léo – A figura toda é paralelogramo, a parte é triângulo. Mary – Paralelogramo e triângulo. *Pesquisador movimenta as peças em frente aos alunos, que afirmam.* Alunos – Têm dois triângulos. *Em relação ao cálculo da medida de área do paralelogramo, após o pesquisador chamar novamente a atenção a respeito da medida da altura do paralelogramo ser perpendicular à base, os alunos medem corretamente.* Pesquisador – A base dá quanto? Léo – A base dá doze. Pesquisador – E a altura. Léo – Deu oito. Mary – É oito vezes doze ou doze vezes oito. Léo – Vai dar noventa e seis. Pesquisador – Noventa e seis o quê? Alunos – Centímetros quadrados. Pesquisador – Se a área do paralelogramo deu 96 centímetros quadrados, quanto dará a de cada triângulo. *Após alguns cálculos temos:* Mary – Quarenta e oito centímetros quadrados. Pesquisador – Por quê? Mary – Porque é a metade. Pesquisador – E o perímetro? Os alunos medem os lados inclinados e respondem. Mary – O perímetro dá doze mais doze mais oito e meio mais oito e meio. Mary – O perímetro dá quarenta e um centímetros. Pesquisador - Qual é a relação entre as áreas? Mary – Ficou a metade. Pesquisador – O que significa a metade? Alunos – Dividido por dois. Pesquisador - Já sabemos que a área do paralelogramo é b x h e a do triângulo? Mary - Como vou encontrar a metade na fórmula? Léo – Dividindo a altura e a base por dois. Pesquisador – Como fica? Léo – Base vezes altura por dois.	D1: Reconfiguração da figura. D2: Medida da área do paralelogramo. C1: é a metade. C2: ficou a metade. C3: base fezes altura por dois. W: O paralelogramo é formado por dois triângulos equivalentes. B: Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenha pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões. Os dados **D1** e **D2,** fornecidos pela ação de reconfiguração e pelo cálculo da medida da área do paralelogramo, viabilizaram a explicitação das soluções candidatas **C1** e **C2.** Essas soluções, após a mediação do pesquisador, convergiram para uma solução específica **C3,** que representa a fórmula para calcular a medida da área do triângulo. A garantia **W** indica que a manipulação das peças auxiliaram na justificativa de obtenção da fórmula para calcular a medida de área de um triângulo, cujo apoio utilizado pelo pesquisador para considerar válida a conclusão foi o axioma descrito em **B**. A argumentação deste item pode ser caracterizada como semântica do tipo indutiva por passagem ao limite, uma vez que, para obtenção da fórmula que possibilita o cálculo da medida de área do triângulo, os discentes recorreram à fórmula já obtida da área do paralelogramo e por indução de um caso particular alcançaram a forma geral para calcular a medida de área do triângulo. Como já destacamos no processo de obtenção de fórmulas a partir de ações que favoreçam a compreensão daquela, há predominância da função de explicação.

No quadro 17, a garantia “W” representa a justificativa em que os discentes se fundamentaram para respaldar as soluções candidatas “C1”, “C2”, que convergiram para solução específica “C3”, possibilitando a obtenção da fórmula para se calcular a medida de área do triângulo. O apoio “B”, que o pesquisador recorreu para controlar o processo de validação do argumento, representa o axioma da aditividade e forneceu a força suficiente para validar a argumentação.

Com relação à nossa expectativa, previamos que os alunos não apresentariam dificuldades para identificarem a relação entre as figuras paralelogramo e triângulo, mas houve necessidade da intervenção do pesquisador, auxiliando na manipulação das peças para que os discentes percebessem a relação. Quanto à fórmula, como previmos, a argumentação de que o triângulo corresponde à metade emergiu sem grandes problemas, a comunicação de ideias se intensificou para se chegar à fórmula buscada.

A competência argumentativa se revelou, mais uma vez, eficaz para auxiliar na compreensão do significado da fórmula: em primeiro lugar, evidenciou-se que as sub-regiões que compunham o paralelogramo eram formadas por dois triângulos, o que fez emergir a relação de metade entre as medidas das áreas; em seguida, a comunicação de ideias, mediada pelo pesquisador, favoreceu a emergência da fórmula para se obter a medida da área do triângulo.

No decorrer da obtenção de uma fórmula, segundo Cabassut (2005), deparamo-nos com validações, nas quais prevalece a função de explicação, mas percebemos que a função de sistematização em nível local caracteriza muito bem a fase final do processo argumentativo, que provoca a exibição das fórmulas.

Atividade 10

Nessa atividade, temos como objetivo que o processo argumentativo possibilite os alunos comunicar suas ideias a respeito de que área e perímetro não variam necessariamente da mesma forma, ou seja, pode acontecer que o aumento de um deles provoque o aumento ou a diminuição do outro. Assim, a variação de um deles não implica necessariamente na variação no mesmo sentido do outro.

Nossa expectativa é a de que essa atividade permita gerar discussões, entre os alunos, a respeito do uso funcional das fórmulas, ou seja, que provoque reflexões e argumentações sobre como a variação ou não dos elementos que compõem as fórmulas provocam alterações nas áreas e perímetros de figuras planas. Além disso, esperamos que a atividade favoreça a compreensão da dissociação existente entre as variações de área e perímetro, por meio de casos particulares que representam uma família de figuras, como por exemplo, no caso do triângulo.

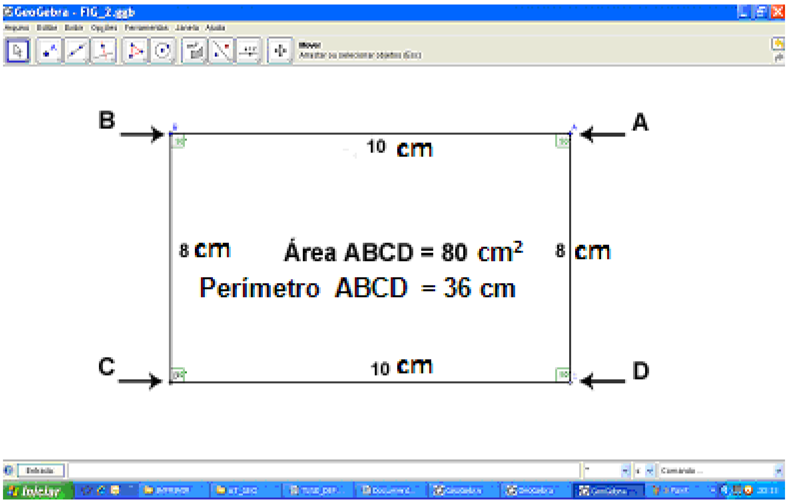
Com base nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), é provável que, ao lerem o comando da questão, os discentes acreditem que aumentando a área de uma figura seu perímetro aumenta necessariamente. A manipulação das figuras na tela do computador, em conjunto com o processo argumentativo, deve favorecer a mudança dessa perspectiva.

Atividade 10

1) Qual a figura representada na tela? (Figura 34).
2) Movimente os pontos “A” e “B” comente e escreva o que ocorreu com as medidas de área e perímetro da figura.
3) No triângulo a seguir movimente o ponto “A”. Comente e escreva o que ocorreu com as medidas de área e perímetro (Figura 35).
5) Sempre que aumentamos a área de uma figura, seu perímetro aumenta também?

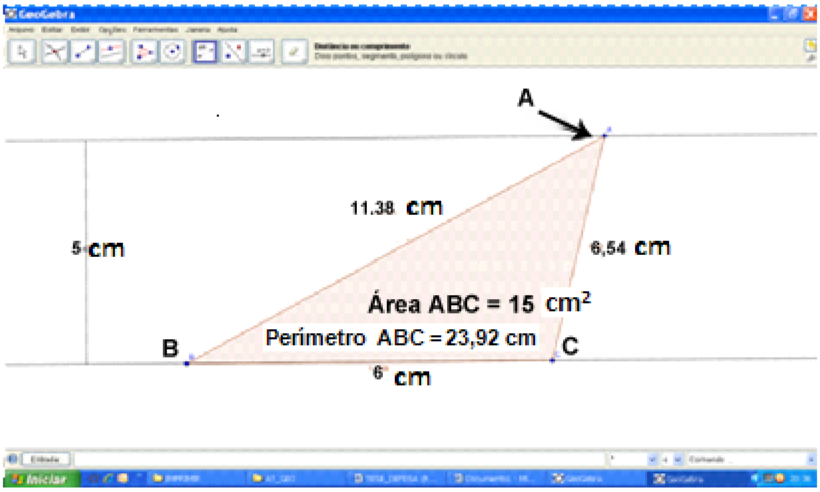
Nesta atividade estiveram presentes 04 alunos dois do grupo “A” e dois do grupo “B”. A atividade consistia em manipulações na tela do computador e anotações das respostas dos grupos em papel A4 e constava das seguintes questões:

Figura 34 – Ilustração do retângulo indicando medidas de área e perímetro



Fonte: Autor

Figura 35 – Ilustração do triângulo indicando medidas de área e perímetro



Fonte: Autor

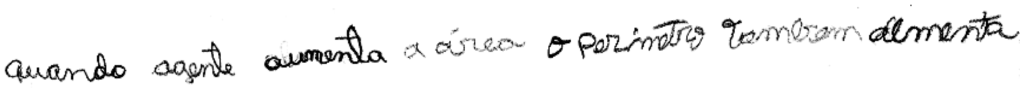
Descrevemos a seguir as análises relativas à questão da variância e invariância de área e perímetro de um retângulo e de um triângulo construído entre duas retas paralelas, fixando dois dos seus vértices e deixando móvel um deles.

Quadro 18 – Variação da medida de área e perímetro

Argumentações	Análises estrutural e funcional das argumentações
Léo – A figura é um retângulo. Mary - Quando mexe, o perímetro e área diminuem, porque fica "mais pequeno" e aumenta quando fica "mais grande" (Figura 34). Pesquisador – Por que o perímetro e área mudaram? Léo – É o contorno, esse contorno aumenta e diminui e a região da área também. *Em relação à questão sobre a movimentação de um dos vértices do triângulo temos.* Léo – A gente "movimentamos" a figura. O perímetro aumenta e diminui, mas a área não muda (Figura 34). Pesquisador – Por que será que a área continua a mesma? Pesquisador – Lembram da fórmula da área do triângulo? Mary – Base vezes altura dividido por dois. *Alunos indicam a altura exibida na figura* Léo - A altura é aqui. Pesquisador – O que significa a medida de B até C (Figura 34)? Alunos – A base. Pesquisador – O que podemos observar em relação à medida da base? Mary – Não muda. Léo – A base continua a mesma porque "tá" sólido ali embaixo. Pesquisador – E a altura? Mary - A altura continua a mesma. Pesquisador – Por que então não mudou a área? Mary – Não mexeu a base. Léo – Nem mudou a altura. Mary – Não mexeu a base, nem a altura. Léo – A área não mudou nada, só o perímetro.	D1: Manipulação na tela do computador. D2: valores das dimensões exibidas pelo programa. C: Quando mexe, o perímetro a área diminuem, porque fica "mais pequeno" e aumenta quando fica mais grande. W: é o contorno, esse contorno aumenta e diminui e a região da área também. B: O aumento ou diminuição das dimensões de um retângulo provocam aumento ou diminuição respectivos do perímetro e da área dessa figura. Os dados **D1** e **D2,** obtidos pela observação e manipulação da figura na tela do computador, favoreceram a emergência de argumentação pragmática abdutiva, pois a garantia **W** fornecida pelos alunos buscou fornecer a justificativa mais plausível para a conclusão **C**. A argumentação ganha força à medida que não há incoerência nas enunciações que compõem os elementos do modelo que estavam de acordo com a propriedade descrita em **B**, na qual o pesquisador fundamenta a argumentação dos discentes. Assim, o argumento é validado. A validação apresentou função de explicação, identificada na comunicação de ideias que convergiu para a conclusão **C**. D1: Manipulação da figura na tela do computador. D2: valores das dimensões exibidas pelo programa. C1: agente "movimentamos" a figura. O perímetro aumenta e diminui, mas a área não muda. C2: a área não mudou nada só o perímetro. W1: A base continua a mesma porque "tá" sólido ali em baixo. B: A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela a base. Os dados **D1** e **D2,** obtidos pela observação e manipulação da figura na tela do computador, provocaram a emergência de argumentação pragmática abdutiva. As garantias **W1** e **W2** evidenciam que as ações e as comunicações de ideias favoreceram a compreensão da propriedade que apóia essas justificativas indicadas em **B**. A interação argumentativa possibilitou a convergência dos argumentos para a solução candidata **C1** e a específica **C2**, que assegurada pelas garantias e pelo apoio foi validada, evidenciando no decorrer do processo de validação a prevalência para função de explicação.

No caso do retângulo, a manipulação e observação de variações das dimensões da figura na tela do computador, indicados no Quadro 18, representaram os dados "D", que possibilitaram a emergência da conclusão "C". A mediação do pesquisador favoreceu a explicitação da garantia "W", que justificou a passagem dos dados à conclusão. A justificativa fundamentada no apoio “B”, que assegura que a ampliação ou redução das dimensões do retângulo provocam simultaneamente as mesmas variações de área e perímetro da figura em questão, possibilitou a validação do argumento. Os discentes compreenderam essa característica e sintetizaram suas discussões da seguinte forma (Figura 35).

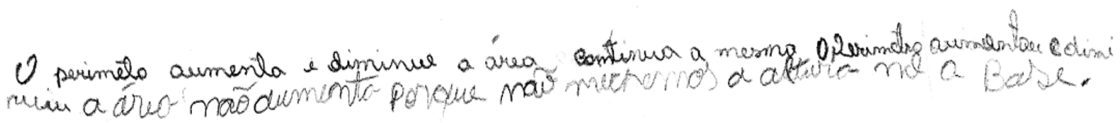
Figura 36 – Resposta dos alunos sobre as variações nas dimensões do retângulo


quando agente aumenta a área o perímetro também aumenta

Fonte: Produção dos alunos

Em relação ao triângulo, de forma similar, a manipulação e observação auxiliaram na obtenção de dados “D”, que provocaram a emergência das soluções “C1” e “C2”. As interações favoreceram a composição da justificativa, que ganhou força, por se apresentar em conformidade com a propriedade indicada no apoio “B”. O entendimento dessa propriedade foi descrita pelos alunos como se revela na Figura 36.

Figura 37 – Resposta dos alunos sobre as variações nas dimensões do triângulo


O perimetro aumenta e diminue a área continua a mesma. O perimetro aumentou e diminuiu a área não aumento porque não mechemos na altura nó a Base.

Fonte: Produção dos alunos

A trama argumentativa propiciou a compreensão de que área e o perímetro não variam necessariamente da mesma forma. Deste modo, os discentes perceberam que não há uma relação direta entre as variações de área e perímetro de figuras planas, como podemos constatar nas respostas dadas, após as discussões sobre essa particularidade que envolve os dois conceitos (Figura 37).

Figura 38 – Conclusão dos alunos sobre a atividade

Quando mexemos numa Figura a área aumenta e o perímetro diminui as vezes fica iguais os dois. o perímetro aumenta e diminui e a area continua a mesma

Fonte: Produção dos alunos

A prática da argumentação possibilitou aos discentes o uso funcional da fórmula que determina a medida de área do triângulo, uma vez que as discussões levaram os alunos a relacionarem as variações de área e perímetro às variações de elementos que compõe a fórmula.

A grande dificuldade dos alunos foi relacionar as variações das medidas de área e perímetro à fórmula. Nesse caso, a mediação do pesquisador foi fundamental para que a prática da argumentação levasse os discentes a chegarem às conclusões de forma satisfatória. A compreensão das propriedades envolvidas perpassou pela manipulação do vértice do triângulo, que fez com que essa figura representasse uma família de formas equivalentes. Estas representações deram aos alunos a oportunidade de separar áreas de suas formas e reforçar a distinção entre área e perímetro de figuras planas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, faremos nossas reflexões a respeito da fundamentação teórica utilizada na execução da pesquisa, dos principais resultados encontrados e de suas respectivas contribuições para a área da Educação Matemática, assim como das suas limitações e perspectivas futuras.

Fundamentação teórica e metodológica

A partir de nossa participação no grupo de pesquisa Pensamento Matemático (PEA-MAT), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), atestamos a problemática relativa à implementação da prática da argumentação em aulas de matemática. Nesse período, tivemos contato com pesquisas que influenciaram nossa escolha, como as de Douek e Scali (2000), Krummerhouer (1995), Pedemonte (2002) e Boavida (2005). Essas investigações destacaram as dificuldades encontradas para se desenvolver trabalhos com essa temática e a pouca atenção dada ao tema. Evidenciaram, também, a figura do professor como o responsável pela difusão da prática da argumentação em sala de aula.

Tendo em vista as pesquisas supracitadas, dentre outras que se encontram no corpo do texto, aceitamos o desafio de revelar a prática da argumentação como método de ensino. Procuramos investigar o processo de ensino e aprendizagem, no qual utilizamos essa prática com objetivo de favorecer a compreensão de assuntos estudados em aulas de matemática. Neste contexto, voltamos nossa atenção para as comunicações de ideias dos alunos das séries iniciais, pois acreditamos que desde cedo devemos inseri-los nessa prática.

O termo argumentação é polifônico e apresenta uma diversidade de concepções. Nossas reflexões teóricas sobre o tema nos levaram a admitir, assim como Grácio (2009, 2010), que a prática da argumentação, a partir das interações entre os alunos e da mediação do professor, favorece a aquisição de competências argumentativas. Segundo esse autor, as circunstâncias que envolvem o processo argumentativo, em torno de determinados assuntos, habilitam essa prática, como uma forma interativa e negociada de promover a compreensão de conceitos estudados em sala de aula.

Ao elegermos a prática da argumentação como objeto de pesquisa, adotamos os pressupostos teóricos de Toulmin (2006), em decorrência de esse autor propor um modelo estrutural, composto por dados, conclusão, garantias, qualificadores modais, refutação e apoio, para analisarmos a validade de argumentos em qualquer que seja o campo. Além disso, esse autor põe em destaque as fases que um processo argumentativo deve contemplar.

Toulmin (2006) propõe que, para analisarmos a validade de argumentações, podemos organizá-las em um modelo estrutural constituído basicamente por **dados** sobre os quais tiramos **conclusões** e **justificativas**, que funcionam como garantias de que a passagem dos dados à conclusão é pertinente. Além desses elementos, pode ser possível que as garantias venham acompanhadas de **qualificadores** modais, como, por exemplo, “não pode”, “provavelmente”, “possivelmente”, etc., que caracterizam a força dada às justificativas, que, por ventura, venham a ser **refutadas** ou validadas. Eventualmente, pode ser necessário dar **apoio** às garantias. Estas estão relacionadas, em matemática, a normas, propriedade, axiomas, que dão sustentação as justificativas.

O autor afirma que o processo argumentativo é composto de duas partes: uma anatômica, na qual se observa a complexidade do processo que inicia com a colocação de um problema, passando pelas discussões relacionadas à solução do problema, até o veredicto que leva à validação ou refutação do argumento; e a parte fisiológica composta pelos elementos essenciais desse processo como os dados, conclusões, justificativas, etc.

Em relação à parte anatômica, Toulmin (2006) detalha algumas características de cada fase anunciada por ele. Na primeira fase, o autor se limita a afirmar que seja posto um problema. No decorrer da segunda fase, o autor alega haver três estágios, com as seguintes características: dado um problema, inicialmente, haverá uma série de soluções candidatas que, em seguida, serão anunciadas e, finalmente, uma das soluções será tomada como solução específica, após a rejeição das outras, que terão sua força evidenciada por qualificadores modais, como “impossível”, “provável” ou “necessário”. Na última fase, dar-se-á o veredicto da solução.

Em nossa investigação, admitimos que, na primeira fase, o problema assumisse a forma de uma experiência de referência, nos moldes de Douek e Scali (2000). Na segunda fase, propomos que o primeiro e segundo estágios se dêem em concomitância, em virtude de o processo argumentativo em sala de aula ser composto por vários interlocutores e de as soluções candidatas sofrerem o processo de convergência argumentativa, postulado por Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005). Assim, pode haver tanto a eliminação das soluções candidatas, que não estiverem em conformidade com as normas da matemática quanto a composição dessas para se chegar à solução específica. Nesses estágios, sugerimos que sejam classificados os argumentos, a fim de compreendermos, por um lado, a natureza dos argumentos utilizados pelos alunos, se são pragmáticos, semânticos ou formais, e, por outro lado, a natureza do raciocínio produzido por eles, como abdutivo, indutivo ou dedutivo. Para essa categorização, tomamos como referência as classificações de Pedemonte (2002) e Cabassut (2005). Na última fase, que Toulmin (2006) denomina de veredicto, admitimos como momento de validação e fizemos uso das funções da validação, anunciadas por Cabassut (2005), para que pudéssemos qualificar as validações.

Postulamos que um processo que seja direcionado por esses momentos pode favorecer que o aluno adquira uma competência argumentativa, necessária, não só para a edificação do conhecimento matemático, mas também para as exigências do convívio em sociedade.

Para analisar como a competência argumentativa se constitui e auxilia na compreensão de assuntos em sala de aula de matemática, tomamos como referência o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.

Nas reflexões teóricas sobre os objetos matemáticos eleitos em nossa pesquisa, apoiamo-nos na problemática anunciada em investigações com as de Wagman (1975), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996). Esses estudos nos possibilitaram elaborar uma sequência didática que vislumbrou aspectos primordiais necessários à apropriação desses saberes.

Esses estudos, aliados aos de argumentação, nos levaram a desenvolver nossa pesquisa em duas instituições argumentativas: a sala de aula e o laboratório de informática. No primeiro caso, utilizamos materiais como lápis, papel, régua, cola, etc.; no segundo, fizemos uso do *software* de geometria dinâmica Geogebra. Essa composição nos auxiliou na exploração de aspectos estáticos e dinâmicos necessários à compreensão dos conceitos em jogo, de acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996). Além disso, a manipulação na tela do computador motivou a participação dos alunos e favoreceu argumentações simultâneas às ações realizadas, como anunciado por Gravina (2001), Parzysz (2002, 2006) e De Villiers (2002).

Para desenvolver nossa pesquisa, utilizamos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, caracterizada como uma metodologia experimental, que requereu análises preliminares. Essas análises nos possibilitaram organizar uma sequência didática que foi analisada *a priori*, evidenciando os objetivos de cada atividade e as previsões de estratégias e dificuldades com as quais os discentes poderiam se deparar; em seguida, procedemos a uma análise *a posteriori*, que exigiu o confronto entre as previsões e o ocorrido de fato em sala após a aplicação da sequência.

Para construir e analisar a sequência, utilizamos as etapas que compõem o processo argumentativo, identificando, nas comunicações de ideias, os elementos que se enquadrassem ao modelo proposto por Toulmin (2006).

Ao por em prática nossa proposta de investigação, elaboramos dez atividades que foram realizadas por um grupo de 06 alunos do quinto ano de uma escola municipal localizada em uma região de periferia de Belém do Pará. Essas atividades foram aplicadas no decorrer do segundo semestre do período letivo de 2010, com sessões de uma hora e meia de duração cada. As sessões foram gravadas em vídeo e áudio; as comunicações de ideias foram transcritas para posterior análise. As questões requeriam, ao final das discussões, uma parte escrita que sintetizava as argumentações utilizadas.

Para que os alunos se inserissem na prática da argumentação, utilizando esta como procedimento de auxílio na solução dos problemas propostos, tomamos como primeiro momento uma experiência de referência, na qual os discentes produziram um texto a respeito de um animal recém chegado ao Bosque Rodrigues Alves, e, após socializarem as historinhas, se engajaram no processo argumentativo para obterem as soluções das questões requeridas pelo problema.

A prática da argumentação em torno dos assuntos área e perímetro de figuras planas se revelou como método que favoreceu a compreensão desses conceitos. As atividades permitiram aos alunos produzir e testar suas conjecturas em conjunto com as ações e a mediação do pesquisador. Essas ações e mediações levaram os discentes a perceber certas relações e propriedades a respeito dos conceitos em jogo.

Questão de pesquisa, hipótese, principais resultados e suas contribuições para área de Educação Matemática

Em nossa pesquisa, tivemos como objetivo investigar em que medida a prática da argumentação pode se apresentar como método que favoreça a compreensão de conceitos em matemática, enfocando os assuntos área e perímetro de figuras planas. Partimos da hipótese de que a prática da argumentação pode favorecer a aquisição de competência argumentativa, que deve auxiliar os discentes, entre outras coisas, a desenvolver a linguagem matemática, e compreender os assuntos estudados.

Para responder à nossa questão, desenvolvemos uma sequência didática que possibilitou aos alunos emitirem hipóteses que foram debatidas, criticadas, alteradas, refutadas ou validadas. Esses debates viabilizaram a comunicação de ideias em sala de aula, favorecendo a emergência do método que possibilitou a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. Assim, a prática da argumentação foi um caminho diferenciado que conduziu os alunos a essa compreensão.

Outro ponto a ser considerado foi o uso do programa Geogebra, cujo objetivo foi auxiliar na compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, sendo uma motivação a mais para engajar os alunos na prática da argumentação referente às propriedades e relações que envolvem os conceitos em jogo. Assim, criamos um contexto que favoreceu a exposição de ideias por meio de conjecturas que puderam ser postas à prova, suscitando a busca de justificativas que as apoiassem.

As atividades desenvolvidas no Geogebra permitiram que os alunos comunicassem suas ideias, descobrindo propriedades envolvidas nas manipulações das figuras na tela do computador. As argumentações que emergiram no decorrer da solução dos problemas levaram os discentes a descobrirem relações entre os elementos de uma figura, que possibilitaram auxiliar na compreensão dos conceitos envolvidos nas atividades.

A prática da argumentação se revelou nessa pesquisa como um método que favoreceu a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, confirmando nossa hipótese.

A prática da argumentação em salas de aula de matemática, como anunciadas nas investigações de Douek e Scali (2000), Boavida (2005) e Boero, Douek e Ferrari (2008), são objetos de pesquisas desde a década de 1980, em nossa tese realizamos um levantamento das investigações mais difundidas a respeito dessa temática. As intervenções que usaram o processo argumentativo, em grande parte, utilizaram-no como método, mas não apresentaram reflexões a propósito de quais os caminhos que podemos tomar para implementar esse processo em sala de aula. Os autores que mais se aproximaram desse encaminhamento foram Douek e Scali (2000) e Boero, Douek e Ferrari (2008), ao proporem a experiência de referência como norteadora do processo. Procuramos, então, avançar nesse delineamento, propondo que o processo argumentativo se dê basicamente em três fases, das quais a primeira se refere à experiência de referência, que, além de favorecer o contrato didático que apresenta a prática da argumentação como processo de ensino, pode ser retomada em novas discussões que remetam à apresentação de novas características do saber em jogo. As fases seguintes devem evidenciar a qualidade das comunicações, sendo identificadas, respectivamente, a natureza dos argumentos e a natureza dos raciocínios utilizados pelos discentes, assim como o processo de convergência argumentativa. A terceira fase representa a culminância do processo que deve ser levado a um veredicto que valida ou refuta o argumento.

O modelo de Toulmin foi introduzido, para analisar argumentos em salas de matemática, por Krummeheuer (1995). Esse autor utilizou o modelo de forma reduzida, não apresentando qualificadores, nem refutações. Pedemonte (2002) e Knipping (2008) utilizaram o modelo considerando-o ternário, exibindo em suas análises apenas os dados, a conclusão e a garantia. Outros como Inglis, Mejina-Ramos e Simpson (2007) fizeram uso do modelo completo. Em nossa perspectiva, as argumentações poderão ser modeladas na estrutura de Toulmin e revelar-se, tanto de forma reduzida como completa, de acordo com diversos fatores como, por exemplo, a relação que o aluno tenha com o objeto de estudo, a mediação do professor, os tipos de atividades propostas, etc.

As pesquisas que utilizaram a perspectiva teórica de Toulmin, das quais fizemos o levantamento, centralizaram suas análises na parte fisiológica do processo argumentativo. Em nossa pesquisa, além da parte fisiológica, estudamos a parte anatômica, o que nos possibilitou modelar o processo argumentativo em termos de fases, e, assim, apresentar a prática da argumentação como método de ensino.

Toulmin (2006), ao propor as fases da parte anatômica, não se detém em esmiuçá-la, chamando a atenção para a complexidade que se iria incorrer para esse feito, sobretudo, porque sua proposta busca universalizar a análise do processo argumentativo. Mas, ao focarmos um campo, como o da matemática escolar, percebemos que seria viável, pois entendemos que as características gerais das fases anunciadas pelo autor podem ser modeladas, em termos de experiência de referência, tipos de argumentos, convergência argumentativa e funções da validação.

Com relação à complexidade da comunicação de ideias que compõem a parte fisiológica, anunciadas pelo autor, percebemos que em momentos isolados da experiência de referência, algumas dessas comunicações, que compunham a parte anatômica, não puderam ser enquadradas no modelo, em decorrência de não se exigir nesse momento convergências para soluções específicas.

Em relação à segunda fase, Toulmin (2006) propõe que essa seja desdobrada em três estágios: o primeiro contemplaria uma série de soluções candidatas ao problema: o segundo anunciaria essas soluções. No entanto, consideramos que, em termos de interação argumentativa, esses dois estágios se apresentem imbricados, de forma que não se consiga identificá-los separadamente no processo. No último estágio, o autor afirma que uma das soluções adquirirá força suficiente, por estar adequada às normas do campo em que estiver inserida, provocando a rejeição das demais soluções candidatas. Porém, em nossa pesquisa, emergiram situações que nos levam a postular que nem sempre esse é o caso, pois constatamos, além de rejeição, a composição de soluções candidatas que levaram à solução específica.

Na última fase, dar-se-á o veredicto, ou seja, a validação ou refutação da argumentação. Para refletirmos sobre essa fase, utilizamos as reflexões teóricas de Cabassut (2005), ao propor as funções da validação.

Limitações e perspectivas

No decorrer da pesquisa, constatamos que os alunos aceitaram com naturalidade a responsabilidade de comunicar suas ideias, a respeito de um dado problema, na forma de argumentos orais, mas, no momento em que solicitávamos o registro por escrito, os discentes apresentavam dificuldades para passar para o papel as soluções que haviam comunicado oralmente. Assim, alguns relatos foram coletados apenas na forma oral.

Outra situação inesperada foi a ausência de componentes dos grupos, que reduzia as equipes de trios para duplas, restringindo possíveis pontos de vistas divergentes, que poderiam fazer emergir mais momentos de controvérsias, ponto fundamental na prática da argumentação.

Apesar de pesquisas com as de Nasser, Tinoco (2001), Leal e Morais (2006), De Villiers (2002), Boavida (2005) e documentos nacionais, como os PCN, e internacionais como o NCTM, indicarem a prática da argumentação como necessária ao processo de ensino e aprendizagem na Escola Básica, desde as séries iniciais, raramente se vê essas indicações serem implementadas em sala de aula, provavelmente em decorrência de haver necessidade que o professor apresente conhecimentos consistentes sobre sua área de atuação; necessidade de que o professor seja capaz de improvisar, para resolver problemas como de pontos de vistas divergentes sobre um mesmo problema e de que ele planeje e coordene atividades que favoreçam o engajamento dos discentes nessa prática.

Em termos de perspectivas futuras, sugerimos que o método proposto nesta pesquisa, seja foco de investigações quando posto em discussão em grupos de professores de matemática.

Outra sugestão refere-se à aplicação ampla desse método, visto que as fases do processo argumentativo que compuseram os critérios de nossa análise se mostraram pertinentes em relação ao campo da Geometria e mais particularmente ao estudo de área e perímetro de figuras planas. Esse fato incorre no seguinte desdobramento: há necessidade de se investigar a funcionalidade desse método em outros assuntos da Geometria, assim como nos campos da álgebra e Aritmética.

Além dessas indicações, sugerimos como perspectiva futura, investigações que acompanhem e análise o impacto da implementação desse método sobre o desempenho dos alunos nas aulas de matemática.

Constatamos em nossa pesquisa que a prática da argumentação levou os discentes a adquirirem competências argumentativas em matemática. Estas favoreceram a mobilização de raciocínios que possibilitaram estratégias necessárias à resolução de problemas, além da apropriação de símbolos e linguagem específicos da matemática, não se limitando a essas funções, pois se constituiu igualmente uma etapa essencial de relações pessoais ao fazer emergir intenções, crenças, tomada de decisões, processo de persuasão, respeito à opinião do outro, etc.

REFERÊNCIAS

ABERDEIN, A. The uses of argument in mathematics. **Argumentation**, v. 19, n. 3, p. 287–301, 2005.

_________. Managing informal mathematical knowledge: Techniques from informal logic. **Lecture Notes in Artificial Intelligence,** v. 4108, p. 208–221. 2006.

ALCOLEA BANEGAS, J. L'Argumentació en matemàtiques. In: E. C. i Moya (Ed.), **XIIè Congrés Valenciaà de Filosofia**). Valencià, Spain: Diputació de Valencià, p. 135–147, 1998.

ALMOULOUD, A. S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007a.

_________. Prova e Demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: Reunião da ANPED, 30., 2007, Caxambú, **ANAIS ELETRÔNICO...** Caxambú: 2007b.
Disponível em < http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/index.htm >. Acesso em: 13/10/2008.

ARTIGUE, M. Ingéniere Didactique. **Recherches en Didactique dês Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Souvage-Éditions, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ANSCOMBRE, J. C.; DUCROT, O. **L'Argumentacion dans la Langue**, Bruxelas: Mardaga, 1983.

BALACHEFF, N. Processus de preuves et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

_________. **Une étude des processs de revue en mathématiques chez des eleves de college**. 1998. 591 f. Tese (Doutorado em Ciências e Didática das Matemáticas) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988.

_________. **L'argumentation est-elle un obstacle?** Invitation à un débat.... Disponível em: < http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990506. html> 1999. Acesso em: 17 set. 2008.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes** : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. 1996. 241 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

_________. Une étude de situations et d'invariants: outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège. **Petit x**, n. 49, p. 45-78, 1998.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em Matemática Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.** 2005. 975f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2005.

BOERO, P.; DOUEK, N.; FERRARI, P. L. **Developing mastery of natural language:** Approaches to Approaches to some theoretical aspects of mathamatics. Virtual Books, 2008. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=63voiv2afgMC&pg=PA262&lpg=PA262&dq=Developing+mastery+of+natural+language:+Approaches+to+Approaches+to+some+theoretical+aspects+of+mathamatics&source=bl&ots=7fHcShVTdt&sig=BKE4bi31C6iu-20TrObbjlNNoCI&hl=pt-BR&ei=7JLzTIjeFYiq8Aa0w4DMDA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CBYQ6AEwAA#v=onepage&q&f=false> Acesso em 13 ago. 2009.

BOERO, P. **Argumentation et démonstration: Une relation complexe, productive et inévitable en mathématique et dans l'enseignement des mathématiques.** Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeFR.html> 1999. Acesso em: 17 set. 2008.

BONGIOVANNI, V. As diferentes definições dos quadriáteros notáveis. **RPM** – Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 55, p. 29-32, 3º quadrimestre de 2004. SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

BOERO, P.; GARUTI, R.; MARIOTTI, M. A. **Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures**, Proceedings of PME-XX, Valencia, v. 2, p. 121-128, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p.

_________. Secretária da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática/Ensino de quinta a oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRETON. P.; GAUTHIER G. **História das Teorias da Argumentação**. Trad. CARVALHO, M. Bizâncio. Lisboa, 2001.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática In: **Didáctica das matemáticas**, Jean Brun (dir.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996, Coleção horizontes pedagógicos.

_________. Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques em mathématiques, 2003, Disponível em: http://perso.wanadoo.fr/daest/guyrousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf. Acesso em: 10 /10/2009.

CABASSUT R. **Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne**. 2005. 424 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Ecole doctorale Savoir scientifique: épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines. Université Paris 7, Paris, 2005.

CHIUMMO, A. **O Conceito de Área de Figuras Planas: Capacitação Para Professores do ensino fundamntal.** 1998. 142f. (Dissertação Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduação e Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1998.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 1991.

CRESPO E CRESPO C. **Las Argumentaciones Matemáticas desde la Visión de la Socioepistemologia**. 2007. 300f. Tese (Doutorado em Ciências e Educação Matemática. Instituto Politecnico Nacional. Centro de investigacion en Ciencia Aplicada y Tecnologia Avanzada. México, 2007.

DE VILLIERS, M. The role and the function of proof in mathematics, **Pythagoras**. n. 24, p. 17-24, 1990.

_________. Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica. In: PROFMAT, 88., 2002. Porto, **Atas**... 2002. Disponível em: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat2.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2008.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico.** 2009. 213 f. Tese (Doutorado Educação em Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2009.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un Processus D'Apprentissage du Concept D'Aire de Surface Plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

DOUEK, N. Analysis of a long term construction of the angle concept in the field of experience of sunshadows, **PME-XXII**. v. 2, p. 264–271, Stellenbosch, 1998.

_________. Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students' performances. **PME XXIII**. v. 2, p. 273-280, Haifa, Israel. 1999.

_________. Importance des Ascpects Argumentatatifs dans la Production et Demonstration de Conjectures. **Compte Rendu de l'Atelier**, 2000.

DOUEK, N.; SCALI, E. About argumentation and conceptualisation, **Proceedings of PME-XXIV,** v. 2, p. 249-256, Hiroshima, 2000.

DOUEK, N.; PICHAT, M. From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. **Proceedings of PME-XXVII**, v. 2, p. 341-348, Honolulu, 2003.

DUCROT, O. **Provar e dizer**: leis lógicas argumentativas. São Paulo: Global, 1981.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée hamuine: registres sémiotiques et apprendisages intellectuales**. Paris, Peter Lang, 1995.

_________. **L'argumentation en question.** Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112.html> 1999. Acesso em: 17 set. 2008.

_________. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

EVENS, H.; HOUSSART, J. Categorizing pupils written answers to a mathematics test question: I know but I can’t explain. **Educational Research**, v. 46, p. 269-282, 2004.

FACCO, S. R. **Conceito de área**: uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2003.

FONSECA, M. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; MAGALHÃES, M. L.; DAYRELL, M. M. M. S. S. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental:** Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte, Autêntica, 2001.

FRANCHI, A. et al. **Geometria no 1º grau**: da composição a decomposição de figuras planas às fórmulas de áreas, São Paulo: CRB Baileiro Editores, 1992. (Coleção ensinando-aprendendo, aprendendo-ensinando, n. 7).

GODINO, J. D.; RECIO, A. M. **Significados institucionales de la demostración: Implicaciones para la educación Matemática.** Enseñanza de las Ciencias, v. 19, n. 3, p. 405-414, 2001.

GOODWIN, J. A argumentação não tem função. **Comunicação e Sociedade**, v. 16, p. 123-144, 2009.

GRÁCIO, R. Com que é que se parece uma argumentação? Representações sociais do argumentar. **Comunicação e Sociedade**, v. 16, p. 101-122, 2009.

_________. **A interacção Argumentativa**, Coimbra: Grácio editor, 2010. (Comunicação e Sociedade, n. 19).

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 207 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HANNA G. Proof, explanation and exploration: an overview, **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 5-23, 2000.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), **Research in collegiate mathematics III**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. p. 234-282, 1998.

HEALY, L. HOYLES, C. A study of proof conctions in algebra. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n.4, p. 396-428, 2000.

HOYLES C., HEALY L. Linking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teachning experiments. **Proceedings of PME XXIII**, Haifa, Israel, 1999.

HOYLES, C.; KÜCHEMANN, D. Students' understanding of logical implication. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, n. 3, p. 193-223, 2002.

INGLIS, M.; MEJIA-RAMOS, J. P.; SIMPSON, A. Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. **Educational Studies Mathematics**, v. 66, p. 3-21, 2007.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de Professores de Matemática sobre Prova e seu Ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: Reunião da ANPED, 30., 2007, Caxambú, **ANAIS ELETRÔNICO...** Caxambú: 2007. Disponível em < http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/index.htm >. Acesso em: 13/10/2008.

JIMÉNEZ ALEIXANDRE, M. P; REIGOSA CASTRO, C.; ÁLVAREZ PÉREZ, Argumentación en el Laboratorio de Física. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, 6., 1998. Florianópolis, **Atas**... Florianópolis, 1998. CD-ROM.

KNIPPING, C. Argumentation structures in classroom proving situations. In M. A. Mariotti (Ed.). **Proceedings of the third congress of the european society for research in mathematics education** (ERME), Bellaria, Italy, 2003.

_________. A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. **Zentralblatt für Didaktikt der Mathematik,** v. 40, p. 427-441, 2008.

KORDAKI, M.; POTARI, D. A learning environment for the conservation f área and its measurement: a computer microworld. **Computer & Education**, v. 31, p. 405-422, 1998.

KRUMMHEUER, G. The ethnography of argumentation. In: P. COBB; H. BAUERSFELD (Eds.), **The emergence of mathematical meaning**: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, NY: Erlbaum, p. 229-269, 1995.

_________. Argumentation and participation in the primary mathematics classroom Two episodes and related theoretical abductions. **Journal of Mathematical Behavior,** v. 26, p. 60-82, 2007.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático:** Provas e Refutações. Trad. Nathanael C. Rio de Janeiro: Caixeiro, Zahar Editores, 1978.

LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. **American Educational Research Journal**, v. *27*, n.1, p. 29-63, 1990.

LEAL, T. F.; MORAIS, A. G. **Argumentação em textos escritos: a criança e a escola**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

LIMA, P. F. Considerações sobre o conceito de área. In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 1995, Recife. **Anais**... Recife, 1995.

LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBM, ano 3, n. 4, p. 4-13, 1º sem., 1995.

MARIOTTI, M. A. Justifying and proving: figural and conceptual aspects. in M. Hejny and J. Novotna (eds.), **Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education**, Podebrady, Czech Republic, 1997.

_________. La preuve em Mathématique. **Zentralblatt für Didaktikt der Mathematik**. v. 34, n. 4, p. 132-144, 2002.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCM, 2000.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. (coord.) **Argumentação e provas no ensino de Matemática. Instituto de Matemática** (projeto fundão), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

NUNES, J. M. V. **História da Matemática e Aprendizagem Significativa da Área do Círculo:** Uma Experiência de Ensino-Aprendizagem. 2007. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas. Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, UFPA, Belém, 2007.

OLIVEIRA, J. M.; COELHO, A. R.; CUNHA, F. A.; UIEDA, W. Levantamento da Fauna de Quirópteros no Jardim Botânico Bosque Rodrigues Alves, Belém-Pa. Anais do In: VI CONGRESSO E XI ENCONTRO DA ABRAVAS. 2002, Guarapari. **Anais**... Guarapari, 2002.

PAVANELO, R. M., O abandono da Geometria no Brasil: casas e consequências. **Revista Zetetiké**, ano 1, v. 1, p. 7-17. UNICAMP, 1993.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Dans des Environnements papier – Crayon et Inoformatique. Extraído do Atas do 29º **Colóquio Inter-IREM des Formateurs et Professeurs charges de la Formation des maîtres**. Tours, 2002, p. 85-92. Ed. Univercité de Montpellier.

_________. La géometrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des école: de quoi s'agit-il? In: **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n. 17, 2006. Itália: Universidade de Palermo.

PEDEMONTE, B. **Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage dês mathématiques**. 2002. 301 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourrier, Grenoble I, Gênova, 2002.

_________. Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. *25*, p. 313-348, 2005.

_________. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? **Educational Studies in Mathematics,** v. 66, p. 23-41, 2007.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Tratado da argumentação: a nova retórica**. Trad. Maria Ermantina Glavão G. Pereira. 2 Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. 1991. 219 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, São Paulo, 1991.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. **La géométrie spontanée de l'enfant**. Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

PLANTIN, Christian. **A Argumentação**: História, teorias, perspectivas.Trad. Marcos Marcionilo. São Paulo: Parábola, 2008.

RODRIGUEZ. A. G. Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizage de la demonstración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. **Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática**, Córdoba, 2005.

ROGALSKI, J. Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). **Recherches en didactique des mathématiques**. v. 3, n. 3, p. 343-396. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1982.

ROMERO, M. A. O.; CARRETERO, M. F. M.; CUADRA, F. G. **Superfície y volumen. ¿algo más que el trabajo con fórmulas?** Madri: Sintesis, 1993.

SECCO. A. **Conceito de Área:** da composição e decomposição de figuras até as fórmulas. 2007. 185 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2007.

TOULMIN, S. E. **Os Usos do Argumento**. Trad. Reinaldo Guarany e Marcelo Brandão Cipolla. 2 Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

THURSTON, W. P. On Proof and Progress in Mathematics. **Appeared in Bulletin of the American Mathematical Society**. v. 30, n. 2, p. 161-177, 1994.

TUFANO, W. Contextualização. In: FAZENDA, I C. A.(Org.) **Dicionário em Construção: interdisciplinaridade.** São Paulo: Cortez, 2001.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (Dir.) **Didáctica das Matemáticas**. Instituto Piaget, Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

YACKEL, E. Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In: M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). **Actas da 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Utrecht: Utrecht University, 2001, p. 1-24.

WAGMAN, H. G. The Child's Conceptions of Area Measure. In: ROSSKOPF, M. F. **Children's Mathematical Concepts**, 1975.

WEBER, K.; ALCOCK, L. Using warranted implications to understand and validate proofs. **For the Learning of Mathematics**, v. 25, n. 1, p. 34-38, 2005.

ANEXO

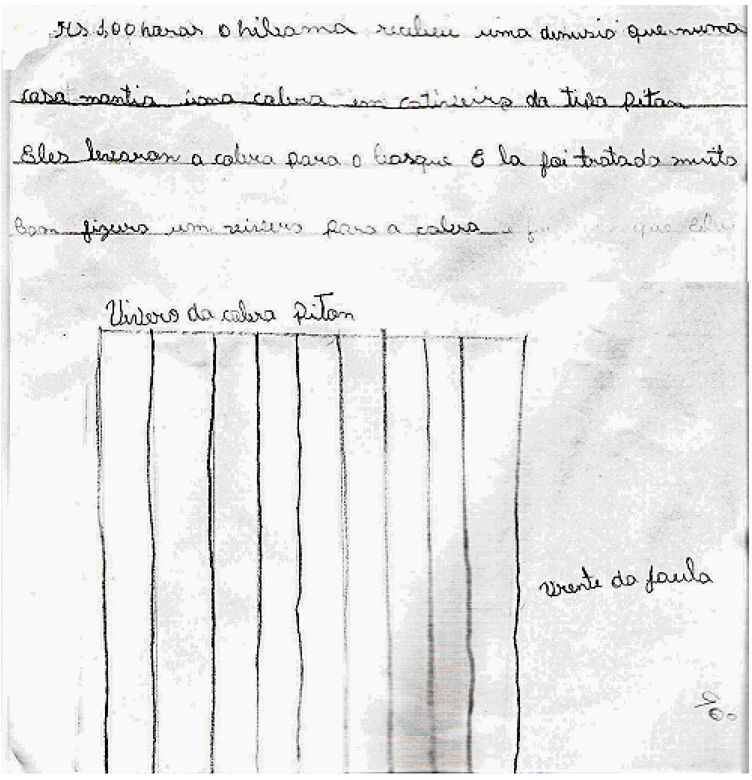
Anexo I

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Textos elaborados pelos alunos relativos ao primeiro item da primeira atividade:

Atividade 1

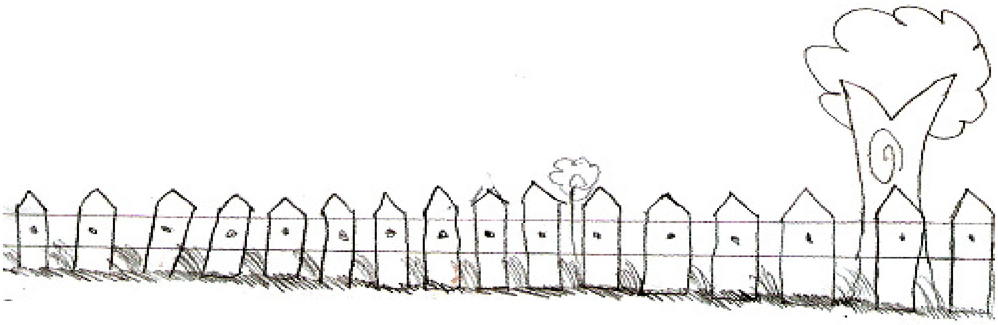
Elaboração da história e representação figural do viveiro e respectiva discussão sobre as propostas apresentadas.



Produção do grupo “A”.

O Vivero da GirAFA

O Vivero da jirAFA tem que ser um Abiente Com bastante Alimento. HAviA uma GirAFe AmeAcAda de estinção Ao chegar no zologico Foi tratada muito bem. dAi elA gostou do Abiente.



Produção do grupo “B”.

APÊNDICES

Apêndice I

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

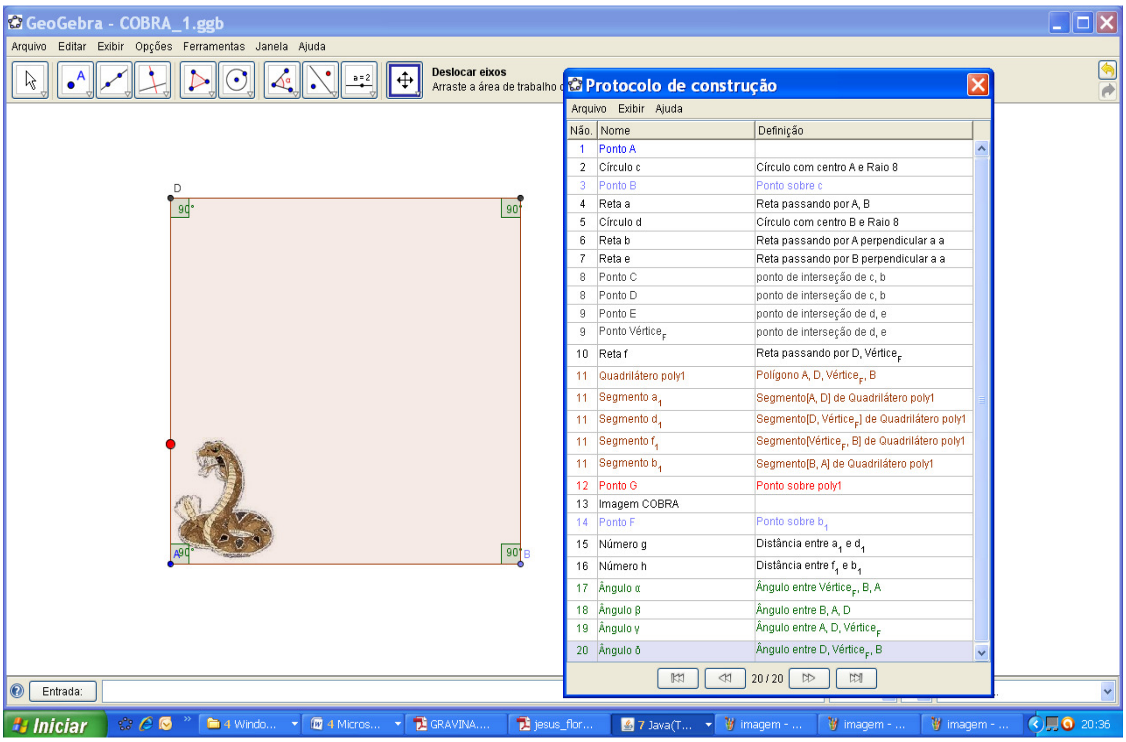
PUC-SP
1946-2006

Procedimentos utilizados na elaboração de atividades no programa Geogebra.

Identificação da figura na segunda atividade (Figura 19):

Atividade 2

Explorando o viveiro do novo animal recém chegado ao Jardim Botânico de Belém.



Apêndice II

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

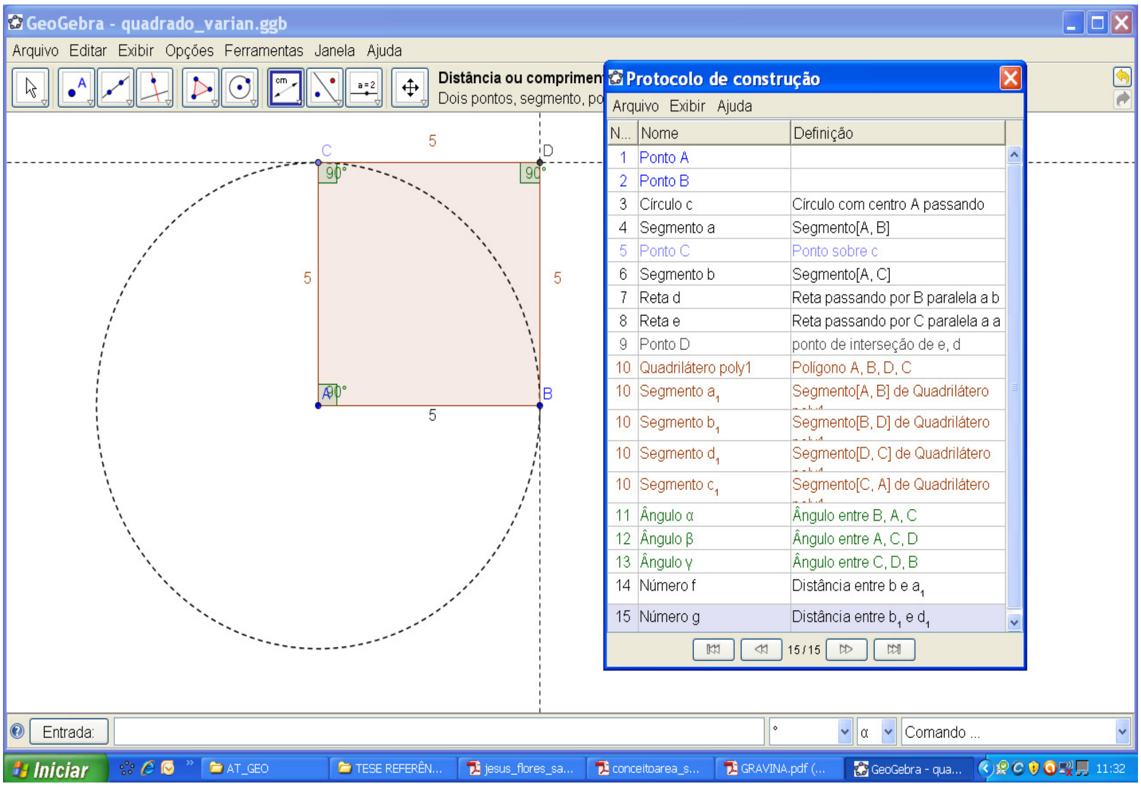
PUC-SP
1946-2006

Procedimentos utilizados na elaboração de atividades no programa Geogebra.

Figura que possibilitava deformação após arraste de um dos vértices pelo *mouse* na segunda atividade (Figura 20):

Atividade 2

Explorando o viveiro do novo animal recém chegado ao Jardim Botânico de Belém.



Apêndice III

PUC-SP
1946-2006

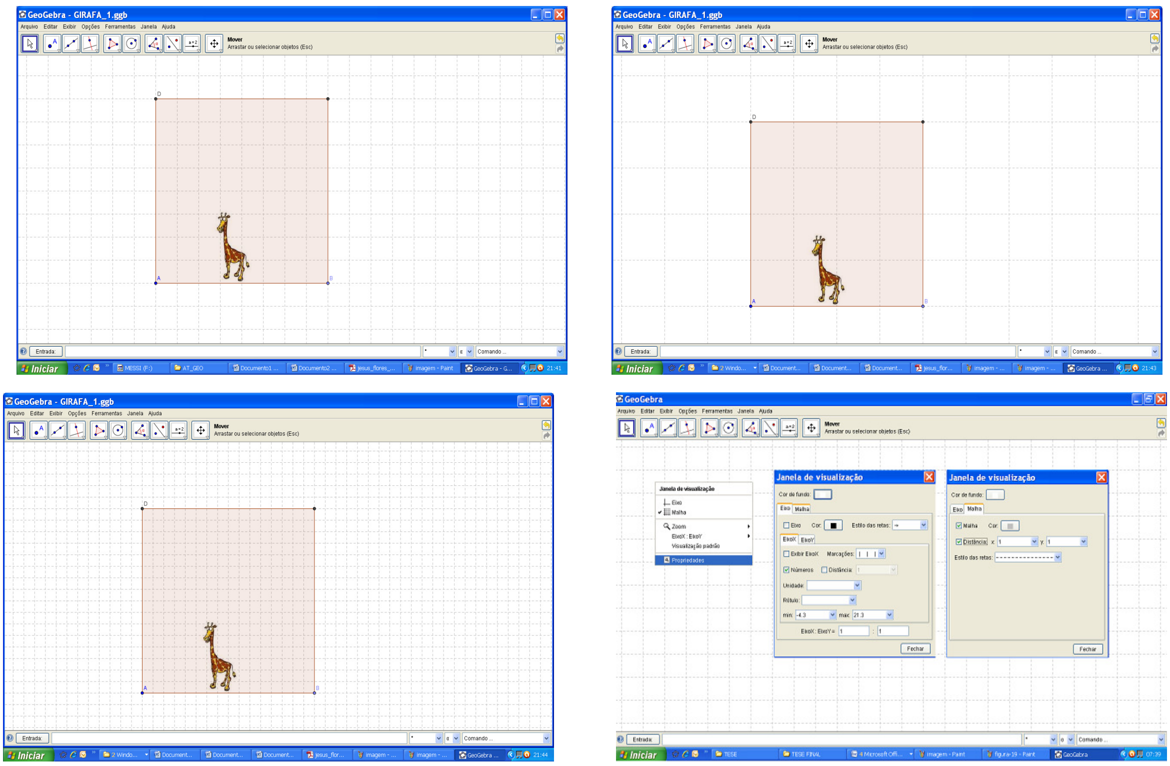
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Procedimentos utilizados na elaboração de atividades no programa Geogebra.

Determinação da medida de área de um quadrado a partir da variação das unidades de medida na atividade cinco (Figura 25):

Atividade 5

Acione a parte direita do *mouse* em cima da malha, fora do viveiro e escolha o ícone propriedades. Na janela de visualização, acione o ícone malha, marque (clicar no quadradinho) a palavra distância. Clique com o botão esquerdo do *mouse* no retângulo indicado pela letra X, que contêm o número um e substituir pelo número dois. Repita o procedimento no retângulo que contêm a letra Y. Feche a janela ajuste a figura e determine a quantidade de quadradinhos. O que você percebeu? Comente com seu (sua) colega e registre o comentário. Repita o procedimento, substituindo o dois por zero ponto cinco (0.5).



Apêndice IV

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

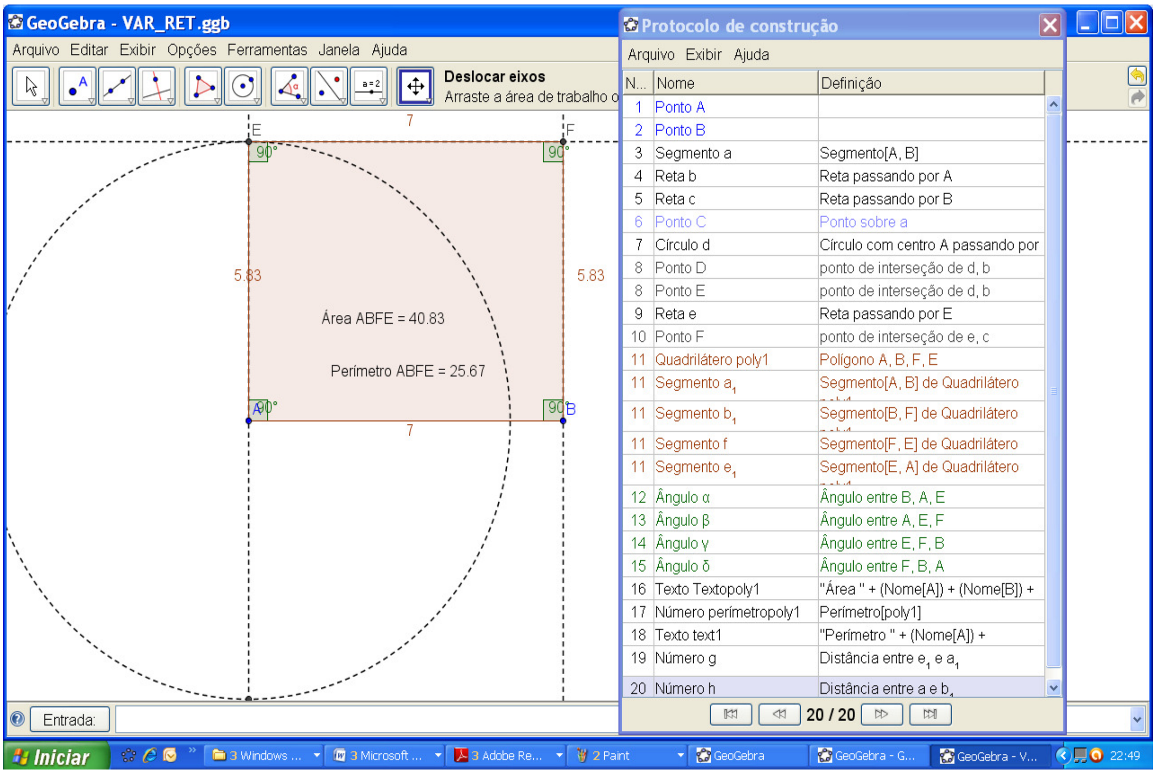
PUC-SP
1946-2006

Procedimentos utilizados na elaboração de atividades no programa Geogebra.

Atividade referente à variância das medidas de área e perímetro do retângulo, a partir do arraste com o *mouse* do ponto "E" (Figura 34):

Atividade 10

Movimente os pontos "A" e "B" e comente e escreva o que ocorreu com as medidas de área e perímetro da figura.



Apêndice V

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Procedimentos utilizados na elaboração de atividades no programa Geogebra.

Atividade referente à invariância da medida de área variância da medida do perímetro do triângulo, a partir do arraste com o *mouse* do ponto "F" (Figura 35):

Atividade 10

No triângulo a seguir movimente o ponto "F". Comente e escreva o que ocorreu com as medidas de área e perímetro (Figura 35).