PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Lieth Maria Maziero

Quadriláteros: Construções Geométricas com o uso de Régua e Compasso

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Lieth Maria Maziero

Quadriláteros: Construções Geométricas com o uso de Régua e Compasso

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.***

São Paulo

2011

Banca Examinadora

Esse trabalho é dedicado a minha mãe Cacilda e aos meus filhos Maitê e Marcos Paulo por serem tão especiais e por estarem do meu lado em todos os momentos, me apoiando com muito carinho.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por me oportunizar realizar este sonho.

Ao Professor Doutor Saddo Ag. Almouloud, pela sua orientação, por confiar em mim, por respeitar meu tempo e me acolher em todos os momentos

A Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori, que tanto se dedicou e me auxiliou, em toda trajetória,

Aos membros da banca, Professoras Doutoras Sonia Barbosa Camargo Igliori e Ana Chiummo, pelas valiosas contribuições e sugestões para essa pesquisa.

A colega Luciane, pelo companheirismo, presente como observadora em todos os encontros.

A todos funcionários do Centro de Ciências Exatas da PUC-SP, pelo convívio durante esse tempo, especialmente ao Francisco, pela valiosa companhia.

A todos os colegas de turma 2008 a 2010.

Ao corpo docente do programa de pós-graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática,

Aos Professores Celina A. A. Pereira Abar, Cileda Queiroz e Silva Coutinho, Armando Traldi, Ana Lúcia Manrique, Maria José Ferreira, Saddo Almouloud, Sônia Pitta e Benedito Antonio da Silva.

A Professora Doutora Paulina Dambrozio que com tanta dedicação colaborou com esse trabalho.

Aos meu pais Laerth Maziero (in memoriam) e Cacilda Capelozza Maziero pelo incentivo para meu estudo.

Ao meu padrasto Durval Fuzzinato.

Ao meu querido esposo Dr. Douglas Ferraz de Campos Filho e meus enteados: Paola, Nicole e Manuel.

Aos meu queridos avós José Capelozza (in memorian), Aurora N.

Capelozza (in memorian), Gilio Mazziero (in memorian) e Amábile Gamba Maziero (in memorian) que tanto carinho me deram.

Ao meu irmão Laerth Maziero Junior, meu sobrinho, Luan Maziero e sua mãe Vilma Keuchgueriam, minha querida Tia Zenaide Maziero, meus tios: Neovaldo Capelozza, Dagmar, Maria Aparecida Maziero, meus primos: Pedro, Lia, Neila, Kleber, Kelma, Tereza, Miriam e Claudia. Em especial a minha prima Silvana Capelozza Marques e Vicente Marques, por estarem sempre do meu lado.

A Secretaria de Educação de Piracicaba-SP, pelo investimento em minha educação.

As minhas amigas: Denise Rafael, Marcia Coelho e Neuza Bezaggio, que tanto apoio emocional me deram.

A todas pessoas que, de alguma forma, contribuíram para realização deste trabalho.

Em especial para Abelzinho Pereira, por cuidar da minha filha quando eu estava ausente.

A Autora

RESUMO

Esta pesquisa se insere no âmbito das pesquisas de formação de professores, e teve como proposta a elaboração de uma sequência didática envolvendo construções geométricas com régua e compasso de quadriláteros. O trabalho objetivou responder à seguinte questão de pesquisa: A utilização de construções geométricas com régua e compasso favorece o desenvolvimento dos conhecimentos dos professores em Geometria? Os sujeitos de pesquisa são professores de Matemática do Ensino Básico. A metodologia utilizada é de cunho qualitativo, mais especialmente, a pesquisa ação. Para o desenvolvimento da pesquisa apoiamo-nos nos estudos e Imbernón (2010) e Shulman (1996). A análise dos resultados da pesquisa revelou dificuldades por parte dos professores, participantes, em relação ao uso da régua e do compasso, assim como a articulação das diversas propriedades das figuras a serem construídas e as justificativas das construções. O produto final, resultante deste trabalho, é uma sequência de atividades para uso de professores do Ensino Básico.

Palavras-Chave: Construções geométricas, formação de professores, quadriláteros.

ABSTRACT

The objective of this research is to consider the professor continued formation, which background is a didactical sequence related to geometric constructions with a ruler and quadrilateral compass. The work developed intended to respond to the following research point: Is the use of geometric constructions with a ruler and a compass an instrument which favors the development of the geometry knowledge of the professors? The target public was made of primary mathematics professors. The research has a qualitative imprint, but we have especially considered the principles of the action research. For this research development we have relied on Ibermon (2010) and Shulman (1996) studies. The research results evaluation has disclosed difficulties on the part of these professors, related to the ruler and compass use, as well as the various figures properties articulation to be constructed as a way to justify such constructions. These findings are a sequence of activities to be used by primary school professors.

Word-Key: Geometric constructions, professors formation, quadrilaterals.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

Nossa intenção neste trabalho é contribuir com a melhoria do ensino de Geometria. O interesse pelo ensino dessa área da Matemática é antigo, e é ele que nos levou a participar de um curso de formação continuada para professores. Nesse curso pudemos perceber dificuldades que alguns dos professores participantes demonstravam quando as atividades envolviam construções geométricas. O interessante é que durante nossa trajetória profissional, já havíamos percebido que as construções geométricas causavam também dificuldades aos nossos alunos.

No Mestrado nos reportamos a essa experiência de formação continuada de professores e elegemos como tema de pesquisa as construções geométricas, em particular os quadriláteros. E definimos como público alvo os professores do Ensino Fundamental que atuam na Rede Pública Estadual de Ensino. Estabelecemos então como objetivo da pesquisa a contribuição com a formação de professores assim como com a prática profissional dos mesmos.

O passo inicial desta pesquisa foi a realização de levantamento bibliográfico das pesquisas realizadas sobre o tema Geometria, no Programa de Educação Matemática da PUC/SP. Desse levantamento três trabalhos foram escolhidos como norteadores desta pesquisa: Maioli (2002), Araújo (2007) e Jesus (2008) por se aproximarem mais do enfoque escolhido por nós.

Os procedimentos metodológicos que conduziram esta investigação são aqueles adequados à metodologia da pesquisa-ação.

A proposta é de construir atividades com construções geométricas de quadriláteros que levem em conta as dificuldades referidas.

A elaboração das atividades se fundamenta nas teorias de Duval (2003), sobre os registros de representação semiótica, de Brousseau (1986), sobre a Teoria das Situações Didáticas. O estudo de Imbernón (2010) nos referencia sobre a formação de professores, um dos aspectos pretendidos.

O conjunto dessas atividades, devidamente analisado, vai se constituir o pretendido produto resultante de uma pesquisa do Mestrado Profissional. O mesmo se encontra em separado dessa dissertação.

O relatório desta pesquisa está estruturamos em três capítulos, e o produto.

No primeiro capítulo apresentamos alguns aspectos da história da Geometria e algumas reflexões sobre as construções geométricas, e também um breve estudo sobre o retângulo áureo e suas implicações na arte e natureza.

No segundo capítulo expomos os estudos preliminares para a realização deste trabalho, o problema de pesquisa, a fundamentação teórica, e uma análise de livros didáticos com foco no tema das construções geométricas.

No capítulo três são abordados os procedimentos metodológicos da pesquisa, a elaboração, descrições, comentários e soluções possíveis das atividades com as análises *a priori* e *a posteriori*. Nesse capítulo estão os resultados da aplicação das atividades, e as atividades reorganizadas em função da análise *a posteriori.*

O produto é composto pelas atividades reorganizadas com explicações que podem auxiliar os professores em sua prática docente e contribuir com sua formação relativa a esse conteúdo.

CAPÍTULO 1

UM BREVE ESTUDO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Neste capítulo, apresentamos alguns aspectos da História da Matemática, focada, especificamente, no contexto da Geometria, tendo em vista que temos por pressuposto que os conhecimentos históricos devem fazer parte dos conhecimentos dos professores. Também neste capítulo tratamos de temas relacionados às construções geométricas e exploramos algumas aplicações do retângulo áureo.

1.1 Aspectos da História da Geometria

> Desde o momento em que o homem adquiriu um grau razoável de civilização, eis que começou a interessar-se por problemas de medidas de comprimentos, de áreas, etc. e, dessa forma, se viu obrigado a comparar distâncias e a determinar as dimensões dos corpos que o rodeavam. Conjectura-se que tenha sido isto a origem da geometria. Por exemplo, egípcios, assírios e babilônios já conheciam as principais figuras geométricas, bem como as noções de ângulo que usavam na medição de áreas e na Astronomia. Primeiro, com uma geometria intuitiva, passando em "seguida" a uma geometria científica e desta, para o que temos na atualidade, que é entre tantas outras, uma geometria demonstrativa (ARAUJO, 2007, p. 1).

O enfoque neste item é o das etapas de evolução da Geometria, sendo a primeira delas a da Geometria Subconsciente. Boyer (1974, p. 2 e 4) apresenta dados sobre essa fase dizendo que:

Boyer (1974, p. 4) afirma que:

> Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia.... Heródoto mantinha que Geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria. Podemos considerar as ideias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da Matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. O fato de os geômetras egípcios serem às vezes chamados "estiradores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a Matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto.

E que:

> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a Geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar.

Em Eves (1994, p. 1) podemos encontrar outras referências sobre essa etapa da Geometria. Para ele foi a capacidade humana de comparar formas e tamanhos que fez surgirem as primeiras considerações sobre a Geometria. Esse autor afirma que:

> Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a certo montante de descobertas geométricas subconscientes. A noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a ser desenvolvido. A necessidade de delimitar a terra levou a noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos simples, como as noções de vertical, paralela e perpendicular, teriam sido sugeridos pela construção de muros e moradias.

E que:

> Muitas observações do seu cotidiano devem ter levado o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies e sólidos. Os exemplos de circunferência eram numerosos – entre outros o contorno do Sol e da Lua, o arco-íris, as sementes de muitas flores, o corte transversal de um tronco de árvore. [...], os círculos concêntricos provocados na superfície de um lago por uma pedra nele arremessada [...]. Corpos de homens e animais, a maioria das folhas e flores e certas conchas e cristais ilustram a ideia de simetria, [...]. Esta geometria subconsciente era empregada pelo homem primitivo para fazer ornamentos decorativos e desenhos, e provavelmente é correto dizer-se que a arte primitiva preparou em grande escala o caminho para o desenvolvimento geométrico posterior.

Em Dante, (2009, p. 197) podemos encontrar dados sobre a Geometria Demonstrativa, a Experimental, a Física, os quais contemplam até o início do século VI a. C. Nessa etapa as figuras geométricas eram vistas da mesma maneira que os objetos físicos. E, além disso, eram tomadas decisões sobre propriedades e relações entre figuras geométricas por aparência e por medidas aproximadas. Mas hoje sabemos que as aparências podem nos enganar. O exemplo da Figura 1 ilustra esse fato. Questionando-se: qual segmento de reta é maior: AB ou CD? Se nos guiarmos pelas aparências nossa resposta será CD, e, se efetuarmos uma medida, perceberemos que essa estimativa não está correta.

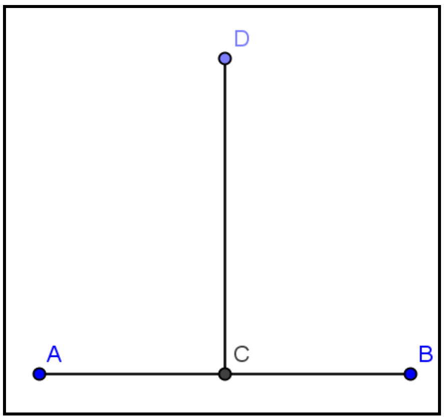


Figura 1. Segmentos AB e CD perpendiculares

Para Eves,

> Um novo modo de ver a Geometria surgiu na primeira metade do século VI a.C. Tales de Mileto – 64 a.C - 550 a.C –, foi um dos primeiros gregos a insistir que fatos geométricos devem ser estabelecidos por raciocínio lógico e não por observação, experimentação, tentativa e erro. Ele foi fundador da geometria demonstrativa. Seus esforços serviram de base para o incomparável trabalho de Euclides (300 a.C.), Os Elementos. Tales, Euclides e outros gregos elevaram a Geometria de um nível puramente físico para um nível mais lógico e abstrato. Os Elementos, obra memorável de Euclides, é uma cadeia dedutiva única de 465 proposições de álgebra geométrica grega (EVES, 1994, p. 7).

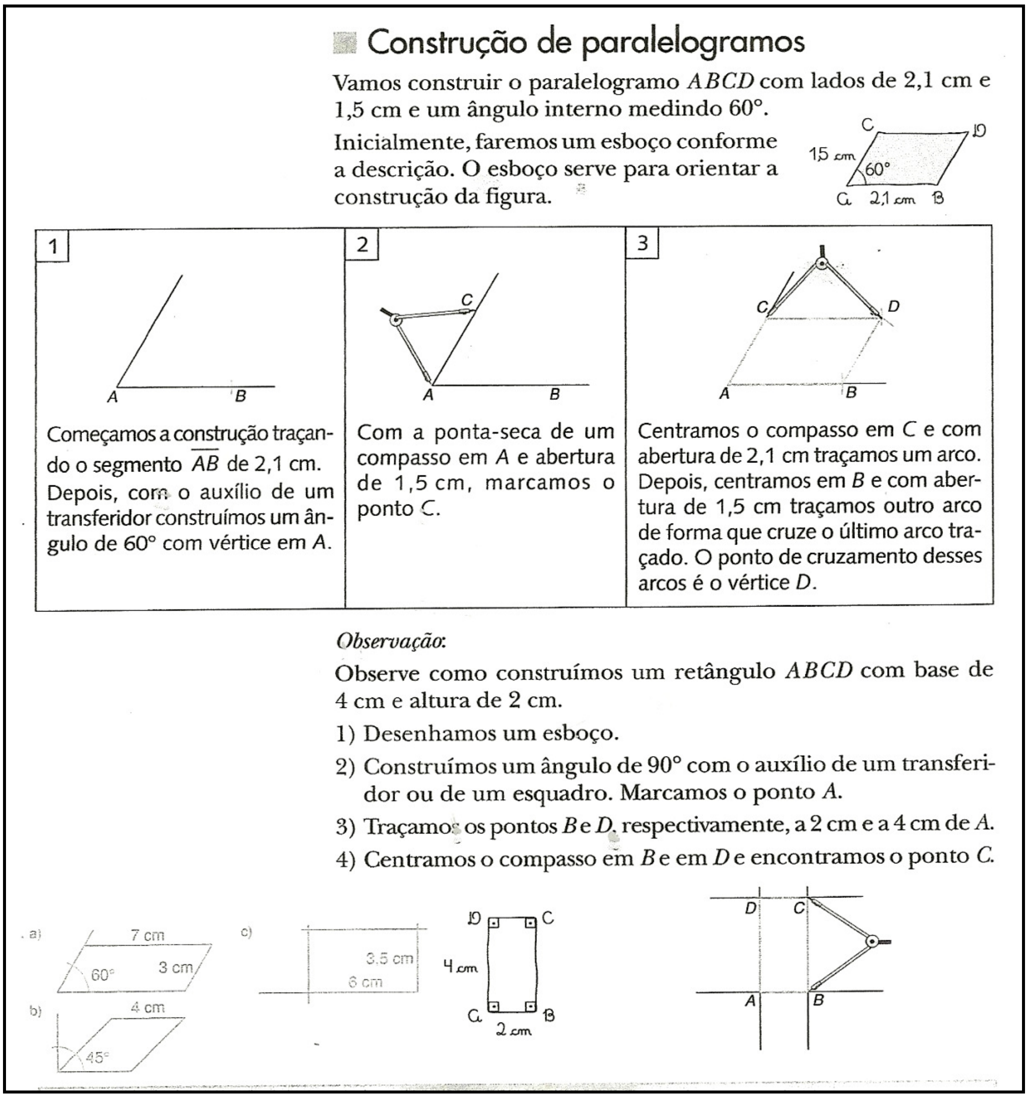
1.2 Construções geométricas

As construções geométricas são até hoje de grande importância na compreensão da Matemática Elementar. Os problemas que se utilizam de construções geométricas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento de teoremas e propriedades da Geometria.

> Por uma construção geométrica devemos entender um problema do seguinte tipo: a partir de elementos dados ou prontamente construídos (pontos, retas, círculos, ângulos) outros elementos podem ser derivados de acordo com as regras seguintes, com base em Breidenbach & Suss (1983, p. 198-237, apud ARAUJO, p. 18).

As construções geométricas possibilitaram questionamentos entre os matemáticos, tais como: Que construções são possíveis quando se utilizam apenas a régua e compasso? E que construções são possíveis se acrescentamos à régua e compasso o transferidor?

No ensino, o uso dos instrumentos é indicado para resolução de problemas de construções geométricas. Em livro didático encontramos indicações para o uso do transferidor na construção do paralelogramo para medir ângulo, conforme Figura 2 (BARROSO, 2006, p. 10).



Construção de paralelogramos

Vamos construir o paralelogramo $ABCD$ com lados de 2,1 cm e 1,5 cm e um ângulo interno medindo 60°.

Inicialmente, faremos um esboço conforme a descrição. O esboço serve para orientar a construção da figura.

1 — Começamos a construção traçando o segmento $\overline{AB}$ de 2,1 cm. Depois, com o auxílio de um transferidor construímos um ângulo de 60° com vértice em A.

2 — Com a ponta-seca de um compasso em A e abertura de 1,5 cm, marcamos o ponto C.

3 — Centramos o compasso em C e com abertura de 2,1 cm traçamos um arco. Depois, centramos em B e com abertura de 1,5 cm traçamos outro arco de forma que cruze o último arco traçado. O ponto de cruzamento desses arcos é o vértice D.

Observação:

Observe como construímos um retângulo $ABCD$ com base de 4 cm e altura de 2 cm.

1) Desenhamos um esboço.
2) Construímos um ângulo de 90° com o auxílio de um transferidor ou de um esquadro. Marcamos o ponto A.
3) Traçamos os pontos B e D, respectivamente, a 2 cm e a 4 cm de A.
4) Centramos o compasso em B e em D e encontramos o ponto C.

Figura 2. Uso de transferidor

O uso do conjunto régua, compasso e transferidor amplia a quantidade de construções que se podem realizar. Segundo Leite,

> [...] a restrição de um desses instrumentos constitui um ponto de interesse central nos problemas de construções geométricas, como é o caso do que se pode construir apenas com a régua. Nesse caso, a ausência do compasso é uma restrição real e muito significativa, sendo que o estudo sistemático do que é possível fazer usando somente a régua nos leva a Geometria Projetiva (LEITE, 1983, p. 3, apud ARAUJO, 2007, p. 22).

Segundo Eves, “Em 1797 Mascheroni publicou Geometria Del compasso, onde mostrou que os problemas de construção podem ser resolvidos apenas por meio de compasso” (1994, p. 30).

Segundo esse autor (Eves, 1994, p. 32), um teorema provado em 1833 por Steiner diz que nas construções euclidianas não se pode abandonar totalmente o compasso, usando o compasso para traçar a circunferência e seu centro, e depois, sim, pode dispensá-lo para utilização apenas da régua.

Toda a temática histórica que estudamos está vinculada a importância do conhecimento das construções geométricas.

> Em 1904, o italiano F. Severi foi muito mais além, mostrando que é suficiente dispor de um arco de circunferência (por menor que seja) o seu centro, a fim de cumprir todas as construções euclidianas com a régua apenas. (apud ARAUJO, 2007, p. 24).

O estudo histórico-epistemológico da Geometria nos indica sua grande importância para o desenvolvimento dos povos. Esse fato nos auxilia a despertar o interesse em introduzir a História da Geometria no seu ensino e nos motiva a aprofundarmos os conhecimentos sobre os tópicos tratados neste trabalho, como é o caso dos quadriláteros e as suas construções geométricas.

Esta pesquisa visa salientar a importância do conhecimento das construções geométricas. Constam também neste estudo textos que desenvolvem o material básico de aplicações das construções geométricas no Ensino de Geometria, assim como sua História.

1.3 Razão Áurea

O estudo de razão áurea iniciou-se com a Geometria. Essa razão apresenta propriedades geométricas, aritméticas e algébricas muito interessantes.

A presença da razão áurea é comum em algumas figuras planas, como no retângulo áureo. É nossa intenção destacar as propriedades da razão áurea e resgatar algumas das propriedades dessa razão como uma proposta de orientação didática da seguinte forma: utilizar as diversas propriedades geométricas, aritméticas, algébricas da razão áurea para estudar certas construções geométricas.

A seguir, apresentamos alguns dados sobre a razão áurea.

Em um segmento de reta AB com medida de 1 unidade de comprimento, podemos localizar um ponto C, de tal modo que C divida AB na seguinte proporção: o segmento todo está para a parte maior, assim como a parte maior está para a parte menor. Veja Figura 3.

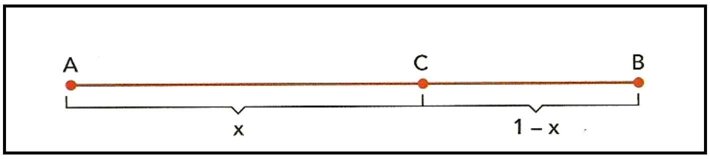


Figura 3. Razão áurea

(DANTE, 2009, p. 122).

Diante do acima exposto, a proporção será a seguinte:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB} \text{ ou ainda } \frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$$

A igualdade acima implica:

$$x^2=1-x \text{, portanto, } x^2+x-1=0 \quad \text{(equação 1)}$$

A solução positiva da equação 1 é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. E então

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

O número irracional $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, que com aproximação de seis casas decimais é 1,618034, é conhecido como número de ouro ou razão de ouro ou razão áurea (DANTE, 2009, p. 122).

Esta razão recebeu o nome Número de Ouro dos Gregos, mais especificamente do escultor grego Phidias.

Eves (1994) indica que a secção áurea foi estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides. Alguns quadros de Leonardo da Vinci e o Pártenon grego respeitam as proporções da razão áurea.

Para esse autor, a natureza apresenta modelos envolvendo a razão áurea. Em todos eles a razão a/b é aproximadamente de 1,6. Os flósculos da margarida estão dispostos em dois conjuntos de espirais, tais como a do girassol em que a = número de espirais no sentido anti-horário (aproximadamente 34), b = número de espirais no sentido horário (aproximadamente 21) encontrados em várias plantas e modelos espirais.

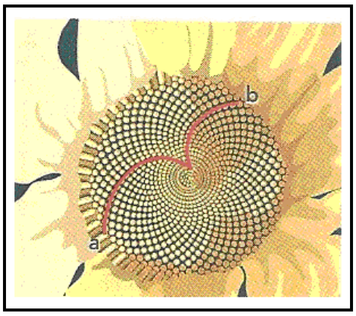


Figura 4. Girassol
(DANTE, 2009, p. 122)

No que segue, apresentamos o retângulo áureo, e, segundo alguns autores como Corbo (2005, p. 24), o trabalho com o “retângulo áureo” pode auxiliar o professor na revisão, ampliação e aprofundamento em conceitos e procedimentos ligados às construções geométricas, tais como: razão, proporção, semelhança de figuras planas e demonstrações.

1.4 Retângulo Áureo

O retângulo áureo pode possibilitar a elaboração de atividades para o ensino que incentive o aprendizado das construções geométricas. Na sequência, apresentamos a construção do retângulo áureo, assim como aplicações e propriedades. Esse retângulo tem, ao longo dos tempos, influenciado a arte, pois é considerado perfeito, na medida em que é o retângulo mais agradável à visão.

O retângulo áureo é aquele em que a razão entre o lado maior e o lado menor é o número de ouro.

O retângulo ABDE (Figura 5) é um retângulo áureo.

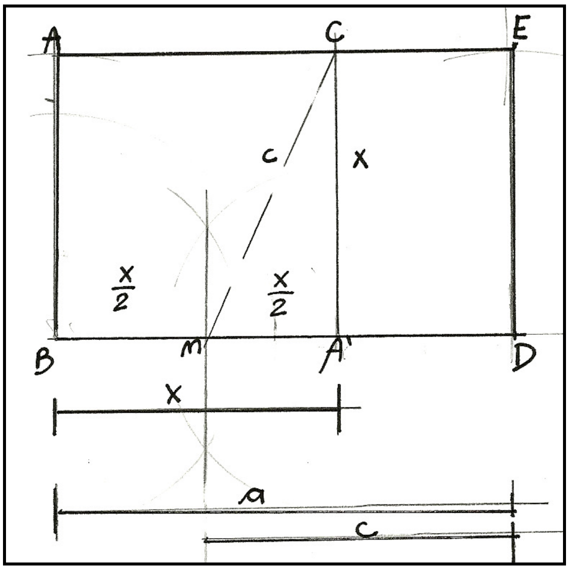


Figura 5. Retângulo áureo
(construção própria)

Indicando-se $BD = a$

$$BA' = A'C = x$$

$$BM = \frac{x}{2}$$

$$MC = MD = c$$

No retângulo de ouro, temos:

$$\frac{a}{x} = a : x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,6$$

É fato que:

> Leonardo da Vinci ao pintar “São Jerônimo”, em 1843, utilizou um retângulo áureo. O mesmo aconteceu com Seurat e outros artistas. Também o desenho do Pártenon de Atenas (440 a.C.) se encaixa num retângulo áureo. Os antigos diziam que todo trabalho colocado dentro de um retângulo áureo, isto é, dentro de um retângulo cuja razão entre o comprimento e a largura é a constante phi, se sobressaía mais esteticamente (Projeto – MEC - PREMEN/UNESP. 2002, p. 20).

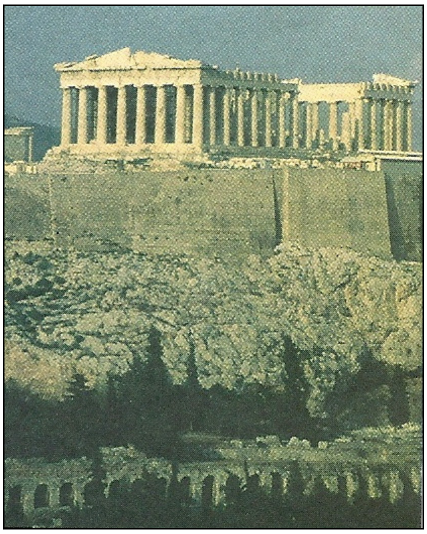


Figura 6. Paternon (Fonte: Dante, 2009, p. 123)

> Construído há muitas centenas de anos depois, por volta de 447 e 433 a.C., o Partenon Grego, templo representativo do século de Péricles contém a razão de ouro no retângulo que contém a fachada, o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa. O escultor e o arquiteto encarregado da construção desse templo foi Fídias. A designação adaptada para o número de ouro é a inicial do nome desse arquiteto – a letra grega Φ. (Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf>. Acesso em: 3 mar. 2011).

Segundo Dante,

> Os antigos diziam que todo trabalho colocado dentro de um retângulo áureo, isto é, dentro de um retângulo cuja razão entre o comprimento e a largura é a constante phi, se sobressaía mais esteticamente. Vejamos alguns casos pitorescos na natureza onde ocorre o número phi. Conchas, Caracóis, Caranguejos e Peixes. As formas harmoniosas dos caracóis foram objeto de muitos estudos que mostram como elas se abrem em espirais logarítmicos caracterizadas pelas proporções da seção áurea. Uma típica espiral logarítmica do crescimento de uma concha mostra que cada estágio consecutivo de expansão é contido por um retângulo áureo que é um quadrado maior que o anterior: um padrão que Jay Hambidge chamou de “quadrados rodopiantes” (Projeto - MEC - PREMEN/UNESP, 2002., p. 20).

Figura 7. Espiral do Caramujo
(Disponível em: <http://marciobrasil7.blogspot.com/2010/01/giovani-pasini>. Acesso em: 12 set. 2010).

É possível desenhar vários retângulos de ouro um dentro do outro. E, com eles, traçar uma espiral.

Para encontrar o pólo da espiral traçamos os segmentos AD e GB.

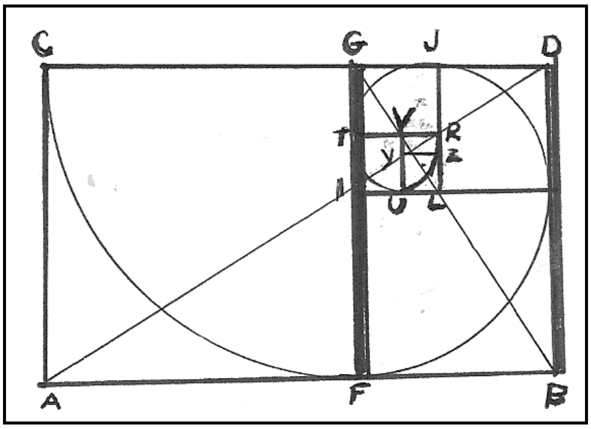


Figura 8. Construção da Espiral.
Construção própria

É também chamada de equiangular, pois corta todos os raios vetores sob o mesmo ângulo; é uma curva gerada por um ponto que caminha em torno de um pólo. O ponto se desloca no raio vetor em progressão geométrica, enquanto o raio polar gira em torno do pólo em progressão aritmética numa sucessão de ângulos iguais.
(Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica/php/dg/dg_4t.php>. Acesso em: 3 mar. 2011).

> Para os gregos, o número de ouro representava harmonia, equilíbrio e beleza. Por esse motivo, muitas construções gregas tinham como base esse número. Mas foi no século XII que o matemático Fibonacci constatou que o número de ouro está presente também na natureza. No Renascimento, a revalorização dos conceitos estéticos gregos levou grandes artistas, como Leonardo da Vinci, a utilizar o número de ouro em suas pinturas (DANTE, 2009, p. 122).

Nossa proposta é de acordo com os PCN (Brasil, 1998), a importância das habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica para que o aluno utilize as formas e propriedades geométricas para visualização do mundo. Usamos da construção e verificação das obras de artes que se enquadram no retângulo áureo, bem como da análise da natureza como o espiral de um caracol.

Além disso, pudemos destacar a conexão entre a Matemática e outras áreas de conhecimento. Segundo os PCN, no estudo do espaço e forma devem se utilizar de obras de arte, pinturas e desenhos, destacando a interdisciplinaridade entre a Matemática e outras áreas de conhecimento.

CAPÍTULO 2

DADOS PREPARATÓRIOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a motivação para a escolha do tema de pesquisa, trabalhos que orientaram a pesquisa, estudos preliminares, referências teóricas e análise de alguns livros.

2.1 A escolha do tema

Em nossa prática docente ministramos aulas de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, há 15 anos, e lecionamos Desenho Geométrico em turmas de 5.ª a 8.ª séries do Ensino Fundamental. Essa experiência nos forneceu material para esta pesquisa. Além disso, cursamos a graduação em Desenho Industrial (1984) – Unesp Bauru, e nesse curso foram desenvolvidas habilidades de utilização do compasso.

Em um curso de formação continuada para professores de Matemática da Rede Pública, com o tema Ensinando Matemática por meio das Artes, tivemos a oportunidade de perceber dificuldades encontradas pelos participantes do curso ao realizarem resolução de problemas da Geometria Plana por meio do uso de régua e compasso.

No Programa de Mestrado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, a escolha do tema foi feita com clareza, pois o estudo das construções geométricas no ensino e aprendizagem da Geometria nos instigava.

No desenvolvimento da pesquisa nos deparamos com artigos sobre o tema, além de percebermos as vantagens de utilização do *software* Cabri-Géomètre na resolução dos problemas de construções geométricas. Esses novos ganhos ampliaram nosso interesse em pesquisar sobre o tema Geometria, mais especificamente em construções geométricas. Como reforço destacamos as palavras de Costa:

> [...] a falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1.º grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à regua e compasso (COSTA, 1981 p. 89-90).

2.2 Questão de Pesquisa

Os trabalhos sobre a dificuldade da resolução de problemas da Geometria Plana por meio do uso de régua e compasso que selecionamos no levantamento bibliográfico são: Maioli (2002), Araújo (2007) e Jesus (2008). Nesses trabalhos os questionamentos foram:

"Como trabalhar com formação de professores de forma a contribuir com saberes referentes à Geometria e, ao mesmo tempo, proporcionar aprimoramento em conhecimentos didáticos inerentes a este conteúdo?" (MAIOLI, 2002, p. 12).

Em sua pesquisa, a autora apresenta exercícios de construções geométricas elaboradas para 12 professores do Ensino Fundamental e Médio, por meio de uma oficina composta por atividades envolvendo os quadriláteros. Após a oficina, ela fez a institucionalização e o estudo dos diferentes registros de representação utilizados em Geometria, levando em consideração aspectos importantes, como o uso de definições na construção de quadriláteros e demonstrações matemáticas. Em seguida, analisou se com a oficina houve evolução no conhecimento de conceitos de Geometria.

Maioli norteou sua pesquisa basicamente nos trabalhos de: Lorenzato (1995), Perez (1995) e Carrascosa (1996)

Lorenzato (1995 apud MAIOLI, 2002, p. 11) afirma que, presentemente, está estabelecido um círculo vicioso que envolve os docentes: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la. E assevera, também, que “é preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar” (p. 4).

Segundo Perez (1995 apud MAIOLI, 2002, p. 11), os professores participantes de sua pesquisa sustentaram que lhes faltavam conteúdos e metodologia adequados sobre como desenvolver o ensino de Geometria em sala de aula.

Carrascosa (1996, p. 8, apud MAIOLI, 2002, p. 11) diz que “a falta de conhecimentos específicos sobre o conteúdo que se deseja ensinar constitui, com certeza, o primeiro e grave impedimento para que os professores possam desenvolver um ensino de qualidade”.

Nesta pesquisa buscamos aprofundar alguns dados apresentados nesses estudos e buscamos responder questões deixadas em Jesus (2008).

Esse foi o contexto da delimitação do problema desta pesquisa definindo a questão: A utilização de construções geométricas com régua e compasso em resoluções de problemas de Geometria é um instrumental que favorece o desenvolvimento dos conhecimentos dos professores em Geometria?

As observações feitas na pesquisa de Maioli (2002), conforme explicitado anteriormente, nos levaram a focar esta pesquisa no estudo dos quadriláteros. Os estudos de Maioli (2002) colaboraram com a reflexão de nossa própria além de contribuir com a estruturação desta pesquisa.

2.3 Estudos Preliminares

Para subsidiar a realização desta pesquisa procedemos a alguns estudos preliminares sobre o ensino de desenho geométrico. Para tanto, efetuamos um levantamento bibliográfico junto ao Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e em bibliotecas de universidades e no sítio da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Nessa busca, utilizamos como palavras-chave as expressões: desenho geométrico, geometria e construções geométricas. Dos trabalhos pesquisados selecionamos as dissertações de mestrado de Ivanildo Basílio de Araújo, Gilson Bispo de Jesus e Marcia Maioli. Apresentamos a seguir alguns dos elementos das pesquisas desses autores que nos interessaram:

Araújo (2007) afirma que a principal inspiração para sua pesquisa surgiu a partir do contato que teve com a Geometria do compasso. Salienta, ainda, que as construções geométricas têm sido importantes objetos de estudo nas Matemáticas desde a Antiguidade.

Na primeira fase do trabalho de Araújo (2007), foram criados e aplicados três conjuntos de atividades, sendo um deles fora do ambiente do Cabri. No segundo, por sua vez, as atividades tiveram como inspiração a Geometria do compasso.

A fase do *design*, sendo uma delas denominada fase empírica, compreende o desenvolvimento em que se especifica o sujeito e elabora as atividades. Segundo Balacheff (1987 apud ARAÚJO, 2007, p. 56), essa fase é apropriada no que diz respeito à passagem das provas pragmáticas às conceituais, isto é, seja no estágio pragmático ou no conceitual. Interessa ao autor que o conhecimento adquirido pelos estudantes fosse objeto constante de reflexão. Balacheff (1987 apud ARAÚJO, 2007, p. 56) comenta, também, sobre as características hierárquicas que dependem da qualidade das generalizações das provas, assim como da contextualização do conhecimento envolvido, e identifica quatro diferentes formas de validação solidárias ao processo de ascensão.

Para Araújo (2007, p. 57), as provas podem t os aspectos:

> empirismo ingênuo – tem um caráter mais indutivo; assim verificam-se vários casos e, então, conclui-se a validade de todos eles, aceitando o fato como verdadeiro;
>
> experimento crucial – no qual se escolhe um exemplo com determinadas características, com a intenção de verificar sua validade para esse caso específico; se ela for confirmada, conclui-se seu caráter geral;
>
> exemplo genérico – consiste na explicação das razões que validam uma propriedade, com base na escolha de um objeto representativo de uma classe;
>
> experiência mental – é a etapa das construções cognitivas mais complexas, com estruturação do discurso e encadeamento do raciocínio;

Na outra fase da metodologia do *design*, a qual o autor chama de experimentação, ocorreram duas sessões: a primeira refere-se à familiarização das três duplas de estudantes com o *software* Cabri-Géomètre, e a segunda, fase das atividades dos participantes, na qual foram analisadas as produções matemáticas dos aprendizes levando-se em conta três aspectos importantes:

> a) usaram linguagem matemática na descrição/justificativa de cada construção;
> b) fizeram referência às propriedades matemáticas vistas anteriormente;
> c) exploraram os recursos dinâmicos do Cabri para validar as construções.

Jesus (2008) realizou um estudo com professores do Ensino Fundamental e Médio da Rede Pública, com a finalidade de construir o conhecimento acerca da demonstração em Geometria, nas construções geométricas da mediatriz de um segmento. A metodologia utilizada para a formação continuada dos professores nesse projeto é a pesquisa-ação, que significa a resolução de um problema coletivo, como forma de cooperação e participação.

A pesquisa desse autor contempla uma abordagem de experimentos com construções geométricas. As discussões que fazem parte desse estudo são resultantes das interações do professor-pesquisador com os estudantes.

Jesus (2008) propôs a seguinte questão em seu trabalho: “Uma sequência de ensino com enfoque em construções geométricas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos acerca da demonstração em geometria em uma formação continuada de professores?”.

Após estudos acerca desse questionamento, o pesquisador afirma que:

> Podemos enfatizar que a sequência de atividades elaboradas, aplicadas e analisadas por nós parece ter contribuído de fato para a formação dos professores envolvidos, no que diz respeito aos conhecimentos de demonstração em Geometria, no caso específico da mediatriz do segmento (JESUS, 2008, p. 200).

Em seu trabalho, o autor assevera que as produções matemáticas dos sujeitos investigados foram analisadas levando-se em consideração três aspectos importantes:

- Se a demonstração pode permear, de maneira natural, o processo de construção dos conceitos matemáticos;
- Se os professores justificaram as construções geométricas realizadas;
- Se eles puderam perceber que um registro de representação pode ter vantagens em relação a outro.

A pesquisa indicou que a formação continuada dos professores parece ter contribuído para um melhor entendimento a respeito do que seja uma definição e uma propriedade em matemática (JESUS, 2008, p. 200).

Ao fazer uma análise sobre seu trabalho, Maioli (2002, p. 144) verifica que a oficina contribuiu para a formação dos professores, facilitando-lhes a aquisição de conteúdos e o aprimoramento de conhecimentos que os auxiliassem na elaboração de estratégias adequadas ao seu trabalho com geometria em sala de aula.

2.4 Os PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1999) do Ensino Médio destacam a importância das habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, as quais podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. Desde a análise da natureza, como o espiral de um caracol, como podemos construir, ou a análise das obras de artes, que utilizam o retângulo áureo, como o quadro da Monalisa.

> Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (PCN, 1998, p. 51).

Segundo Zuin (2002, p. 5), em todas as interfaces que a Matemática faz com a linguagem gráfica, o conhecimento de Desenho entra como ferramenta enriquecedora. Por exemplo, o estudo da Geometria Analítica fica bastante facilitado para alunos que tiveram aulas de Desenho. De acordo com os PCN,

> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para leitura do mundo através dos olhos das outras ciências (PCN, 1999, p. 257).

Apoiados nos resultados e indicações de pesquisas e dos documentos oficiais que orientam o ensino brasileiro, elaboramos atividades que têm por objetivo colaborar com a formação dos professores no que se refere às situações que envolvem construções geométricas com compasso e régua. Segundo os PCN,

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas (PCN, 1998, p. 51).

Ainda de acordo com os PCN:

> Da mesma forma, os autores do PCN (1998) sugerem que o professor proponha atividades que, a partir da resolução de problemas, podem levar os alunos à descoberta de regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas, desenvolvendo a capacidade de perceber a existência de elementos comuns a várias situações. Segundo os autores, esse trabalho pode propiciar a elaboração de conjecturas, generalizações e deduções e, além disso, possibilita o aperfeiçoamento das representações (PCN, 1998, p. 63 apud CORBO, 2005, p. 39).

Os estudos de Maioli (2002), Jesus (2008) e Araújo (2007) revelam que os professores têm dificuldades no tocante às construções geométricas e, em razão disso, os alunos, por não receberem os ensinamentos necessários, apresentam a mesma dificuldade em trabalhar com essas construções. Assim, pretendemos com esta pesquisa contribuir para um trabalho cujo foco é a formação de professores em geometria, utilizando atividades voltadas a construções geométricas de quadriláteros.

Embasados nos PCN nos quais são indicados que o trabalho de espaço e forma deve apresentar algumas construções geométricas, apresentamos nesta dissertação uma sequência didática para a resolução de problemas de construções geométricas, confrontados com situações do mundo real.

2.5 Formação de Professores

A formação de professores é um tema relacionado a esta tese na medida em que os sujeitos de pesquisa são os professores. Assim sendo, preocupamo-nos em realizar estudos sobre os conhecimentos específicos na formação de professores. Alguns autores nos possibilitaram perceber a importância do conhecimento específico na formação de professores. Passamos a citar algumas considerações feitas por eles.

> A reelaboração de propostas curriculares para o ensino fundamental encontra professores despreparados para atuarem profissionalmente. Em relação ao ensino das construções geométricas a situação é mais grave. As construções geométricas, abandonadas no ensino básico e em cursos de licenciatura de Matemática, por muitos anos, não se incorporaram à formação básica e /ou acadêmica de diversos professores. Deste modo, como o professor é quem comanda as atividades nas suas aulas, não é garantido que ele trabalhe as construções geométricas com os seus alunos. Além disso, a transposição didática dependerá da prática pedagógica de cada professor, de sua formação, e do projeto pedagógico de cada escola, o qual elege ou relega determinados saberes. Todos estes aspectos nos indicam que as construções geométricas não tratadas por décadas em geometria continuarão como um saber não acessível a todos (ZUIN, 2002, p. 7).

Imbernón (2010) sugere que o professor deve criar questões válidas sobre sua própria prática e definir objetivos que tratem de responder a tais questões, baseadas em sua experiência, assim recolhendo seus próprios dados é possível que se gere um conhecimento válido mediante a formação.

> O modelo de “treinamento” deverá mudar mediante planos institucionais, para dar espaço a um modelo questionador e de desenvolvimento de projetos, no qual os professores de um contexto determinado assumam o protagonismo merecido e sejam aqueles que planejem executem e avaliem sua própria formação (IMBERNÓN, 2010, p. 95).

Segundo Imbernón, a formação deve deixar de ser um espaço de "atualização" e passar a ser um espaço de reflexão, formação e inovação, permitindo a aprendizagem docente. Isso implica, por parte dos formadores e das políticas de formação, uma visão diferente do que seja a formação, do papel dos professores nesta, e, portanto, uma nova metodologia de trabalho com eles.

Ainda com base em Imbernón, destacamos no Quadro 1 as diferenças de formas de ensino, entre o Assessor Acadêmico e o Assessor Colaborativo que nos leva a refletir sobre as práticas de ensino na formação de professores.

Quadro 1. Diferenças entre o Assessor Acadêmico e o Assessor Colaborativo

Formador/Assessor Acadêmico ou Especialista	Formador/ Assessor Colaborativo ou de Processo
Espera que os professores confiem em seus conhecimentos e sabedoria superiores para identificar, esclarecer e resolver seus problemas	Colabora com os professores na identificação das necessidades formadoras, no esclarecimento e na resolução de seus problemas.
Realiza uma comunicação unidirecional, Os professores não sabem. O assessor sim. Enquanto este fala, os professores escutam e obedecem, podem perguntar, mas dificilmente questionar.	A empatia, o trabalho em grupo e a comunicação com os professores são bidirecionais e extremamente importantes para se compreender as situações a partir de seu ponto de vista.
Entende e coordena as situações em que se encontra, exclusivamente em termos de categorias de conhecimento especializado	A prática profissional baseia-se em uma compreensão holística das situações educacionais
O juízo profissional do assessor baseia-se mais em um estereótipo intuitivo do que na reflexão das situações reais. Sua perspectiva é a única realmente válida.	O juízo profissional é um produto da autorreflexão de todos. Este é o meio de superar os juízos e as respostas estereotipadas.
As mudanças aparecem de vez em quando e podem ser planejadas. Tem sentido em uma sociedade concebida como estável e invariável.	A mudança social e educacional sempre é possível, embora, ás vezes, seus planejamento seja bastante complicado. Tem sentido em uma sociedade dinâmica, imprevisível e baseada na mudança
Atua como fonte especialista de conhecimento pertinente.	Participa de um processo colaborativo de resolução de situações problemáticas
A aquisição do conhecimento proposicional ("saber que") e o desenvolvimento da competência profissional são dois processos diferentes. O primeiro pode ser adquirido fora do trabalho, enquanto o segundo apenas pode ser desenvolvido a partir da experiência direta.	A aquisição do conhecimento pertinente e útil não pode ser separada do desenvolvimento da competência profissional, concebida esta como um conjunto de capacidades de atuação prática em situações sociais e educativas complexas e imprevisíveis.

(Fonte: Imbernón - Formação continuada de professores, 2010. p. 98)

Para Shulman (1996), uma formação de professores deve contemplar aspectos que destaquem um processo de aprender, pela experiência, os conteúdos matemáticos.

É nossa compreensão de que os conhecimentos elencados no Quadro 1, no qual se diferencia o Assessor Acadêmico do Assessor Colaborativo, contribuem com a postura do formador.

> Dessa forma, o formador deverá considerar a diversidade dos professores participantes, buscando conhecer cada um, acreditando na capacidade de aprendizagem deles e procurará contextualizar a aprendizagem quer seja do ponto vista pessoal quanto do profissional (sala de aula) (JESUS, 2008 p. 49).

2.6 OS livros Didáticos

Em virtude da importância do material didático no contexto do ensino-aprendizado, entendemos ser compatível com os propósitos deste trabalho analisar nos livros didáticos de que forma são abordadas as construções geométricas em seu conteúdo.

Por meio da análise de livros didáticos pretendemos verificar se o resgate da Geometria e dos traçados geométricos acontece, com suas conjecturas, demonstrações, registros de representação e motivação por meio de situação-problema.

Putnoki (apud ZUIN, 2002, p. 9) autor de coleções de livros didáticos de Desenho Geométrico para o Ensino Fundamental e Médio, considera importante o ensino das construções geométricas com as devidas pontes com a teoria que as fundamenta – a Geometria. Esse autor pondera:

> [...] não há Geometria sem Régua e Compasso. Quando muito, há apenas meia Geometria, sem os instrumentos euclidianos. A própria designação Desenho Geométrico me parece inadequada. No lugar, prefiro Construções Geométricas. Os problemas de construções são parte integrante de um bom curso de Geometria. O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização". Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem "experimentar". Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas.

Com esses pressupostos analisaremos a seguir como é apresentado o tema dos quadriláteros em livros didáticos.

Examinamos o volume da 5.ª série (6.º ano) de uma coleção de Matemática de 5.ª a 8.ª séries do Ensino Fundamental, classificada pela comissão de avaliação do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2008). A análise está centrada na apresentação dos conteúdos, a fim de fazer um levantamento sobre quais momentos as construções geométricas são propostas.

De acordo com Zuin:

> Os PCN de Matemática para o 3.º e 4.º ciclos do ensino fundamental enfatizam que as atividades geométricas devem centrar-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Desse modo, o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico. Trabalhar com as construções geométricas possibilitaria aos alunos visualizar, elaborar conjecturas, entender e fazer demonstrações. Atendendo a estas e outras recomendações os autores dos livros didáticos, cada vez mais, tentam se aproximar das mesmas, realizado modificações em suas obras. Tudo gira em torno desses parâmetros, não há como negar a sua grande influência no âmbito escolar. Nossas análises indicam que alguns autores de livros didáticos de Matemática já incluíram as construções geométricas em suas coleções (ZUIN, 2002, p. 6).

Os livros-coleções de 5.ª a 8.ª séries do Ensino Fundamental, que foram escolhidos para análise, são aqueles utilizados na Escola Estadual em que realizamos esta pesquisa com os professores.

Os livros selecionados são os seguintes:

Quadro 2. Análise dos livros didáticos

Título	Autor	Editora	Ano
Matemática na medida certa	Marília Centurión José Jakubovic (jakubo)	Scipione	2009
Projeto Araribá	Juliane Matsubara Barroso	Editora Moderna	2006
Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2009

A análise dos livros didáticos foi realizada segundo alguns critérios, sendo um deles as recomendações dos PCN, por exemplo:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas (PCN 5.ª A 8.ª SÉRIES, 1998, p. 51).

Na análise dos livros didáticos, utilizamos as mesmas questões propostas por Maioli. (2002, p. 36).

Assim, estabelecemos os seguintes critérios:

(CI) O autor apresenta os conteúdos partindo de situação-problema?

(CII) O autor apresenta atividades de construções geométricas?

(CIII) As atividades permitem ao aluno fazer conjeturas?

(CIV) As atividades envolvem demonstrações?

(C V) O autor trabalha com diversos registros de representação?

Acrescentaremos uma questão que é de fundamental importância para a nossa pesquisa:

(C V I) O autor faz alguma referência ao retângulo áureo?

Quadro 3. Análise dos livros didáticos

	1	2	3
CI	Não inicia com a situação problema, utiliza os quadriláteros como figura do cotidiano.	No inicio propõe a resolução do problema com observação de figuras.	No inicio propõe a resolução do problema com observação de quadriláteros, conforme a quantidade de lados.
CII	Não apresenta construções geométricas.	Apresenta diversas construções geométricas, bissetriz, transporte de ângulos.	Não apresenta construções geométricas.
CIII	O aluno faz diversas conjecturas por meio das atividades.	O aluno faz diversas conjecturas por meio das atividades.	O aluno faz diversas conjecturas por meio das atividades.
CIV	As atividades não apresentam demonstrações.	As atividades não apresentam demonstrações	As atividades não apresentam demonstrações
CV	O autor trabalha com diversos registros de representação.	O autor trabalha com diversos registros de representação.	O autor trabalha com diversos registros de representação.
CVI	O autor não faz referência ao retângulo áureo.	O autor não faz referência ao retângulo áureo	O autor faz referência ao retângulo áureo no 9º ano.

Nas coleções analisadas há ênfase na apresentação dos quadriláteros com figuras do cotidiano. Passemos às coleções.

COLEÇÃO 1

Na perspectiva de análise de como o tema quadrilátero é abordado pudemos verificar que na coleção 1 o assunto quadriláteros é tratado com o uso no cotidiano e apresenta figuras de objetos com formato de quadriláteros.

Na perspectiva de análise confrontada com normas do PCN pode-se dizer que nessa coleção são privilegiadas a observação e a compreensão de relações dos objetos com figuras do cotidiano. Conferir, como exemplo, a atividade indicada na Figura 9. O triângulo aparece na estrutura triangular submarina de extrato de petróleo, assim como os arranjos de polígonos formam mosaicos nos tapetes e a forma hexagonal nos ladrilhos.

O uso dos polígonos

Os polígonos são usados nas mais diversas situações. Veja três exemplos de uso de polígonos:

Divulgação/Editora Abril

Nas construções, as formas triangulares aparecem em vários tipos de estruturas. Observe a plataforma submarina de extração de petróleo Enchova, na bacia de Campos (RJ).

Mizue Jyo

Arranjos com polígonos formam mosaicos como nesse tapete.

Carlos Lemos Moraes/Editora Abril

São comuns pisos com ladrilhos hexagonais. Observe também a forma octogonal do heliponto na plataforma petrolífera.

Figura 9. O uso dos polígonos
Fonte: CENTURIÓN, 2009, p. 69.

COLEÇÃO 2

A coleção 2 mostra que os quadriláteros são formados no entrelaçamento das palhas do cesto. E, logo abaixo, já inicia o assunto com classificação dos quadriláteros.

A atividade indicada na Figura 10 demonstra que nessa coleção se privilegiam a observação e a compreensão de relações dos objetos com figuras do cotidiano.

2 Quadriláteros

ROSA GAUDITANO/STUDIO R

O artesanato é uma das expressões culturais de um povo, e as orientações sobre o aprender-fazer são transmitidas de geração a geração.

Alguns cestos são produzidos com o entrelaçamento de palha ou um material similar.

MARCO ANTÔNIO SÁ/KINO

ROSA GAUDITANO/STUDIO R

Observando o vão que se forma ao entrelaçar 4 palhas, podemos identificar a forma de que polígono?

Um polígono é convexo quando todos os seus ângulos internos medem menos que 180°.

Polígono convexo

Polígono não-convexo

Elementos do quadrilátero

Nos entrelaçamentos de palha mostrados acima, o vão tem forma de quadrilátero.

Os quadriláteros são polígonos com 4 lados.

Destacamos quatro elementos dos quadriláteros: **vértices**, **lados**, **ângulos internos** e **diagonais**.

Vértices: A, B, C e D.

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

Ângulos internos: $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$.

Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Classificação dos quadriláteros

Os quadriláteros podem ser classificados quanto ao paralelismo dos lados em quadriláteros que têm 0, 1 ou 2 pares de lados opostos paralelos.

Paralelogramos	Trapézios	Outros quadriláteros
Os paralelogramos são quadriláteros que têm dois pares de lados opostos paralelos. São sempre convexos.	Os trapézios são quadriláteros que têm somente um par de lados opostos paralelos. São sempre convexos.	Nenhum par de lados opostos paralelos. Podem ser convexos ou não.

Figura 10. Quadriláteros
Fonte: Projeto Araribá (BARROSO, 2006, p. 233).

Na coleção 2 o tema paralelogramo é introduzido com uma situação-problema. Desse modo, o estudo do espaço e formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, no qual motiva o aprendizado do aluno. A atividade da Figura 12 exemplifica o que argumentamos aqui.

Figura 11. Paralelogramos
Fonte: Projeto Araribá (BARROSO, 2006, p. 235).

Na coleção 2, após a observação do formato da peneira é apresentado o seguinte desafio (Figura 13), o qual motiva o aluno a traçar e a descobrir os quadrados existentes em cada figura.

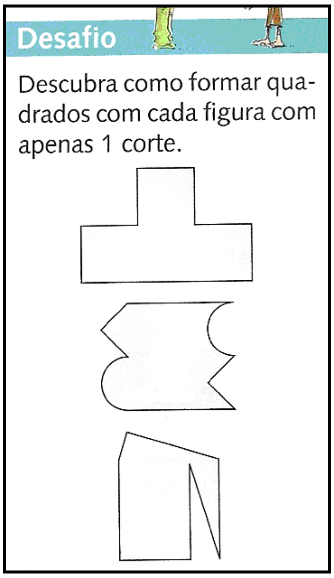


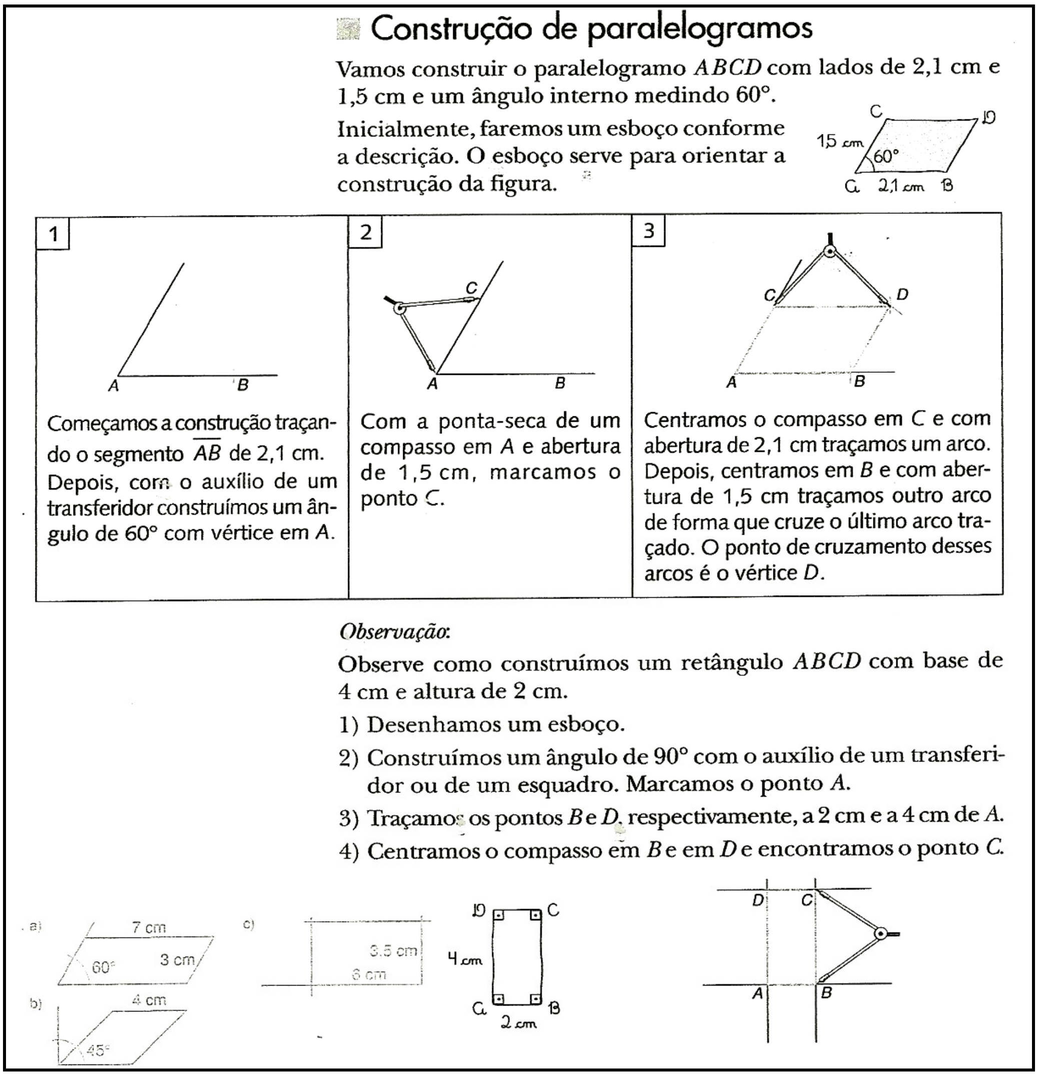
Figura 12. Desafio
Fonte: Projeto Araribá (BARROSO, 2006, p. 235).

Nossa proposta nesta dissertação é a de salientar a importância das construções geométricas realizadas apenas com régua e compasso. É este o enfoque no que segue.

Segundo os PCN, o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática se utilize de algumas construções geométricas com régua e compasso.

Como já salientamos, o uso da régua, compasso e transferidor amplia as possibilidades de construções geométricas. No entanto, é a restrição ao uso do transferidor e o traçado realizado apenas com régua e compasso que nos interessam.

Portanto, analisemos a construção do paralelogramo da coleção 2 da Figura 15.



Construção de paralelogramos

Vamos construir o paralelogramo *ABCD* com lados de 2,1 cm e 1,5 cm e um ângulo interno medindo 60°.

Inicialmente, faremos um esboço conforme a descrição. O esboço serve para orientar a construção da figura.

1 — Começamos a construção traçando o segmento $\overline{AB}$ de 2,1 cm. Depois, com o auxílio de um transferidor construímos um ângulo de 60° com vértice em *A*.

2 — Com a ponta-seca de um compasso em *A* e abertura de 1,5 cm, marcamos o ponto *C*.

3 — Centramos o compasso em *C* e com abertura de 2,1 cm traçamos um arco. Depois, centramos em *B* e com abertura de 1,5 cm traçamos outro arco de forma que cruze o último arco traçado. O ponto de cruzamento desses arcos é o vértice *D*.

Observação:

Observe como construímos um retângulo *ABCD* com base de 4 cm e altura de 2 cm.

1) Desenhamos um esboço.
2) Construímos um ângulo de 90° com o auxílio de um transferidor ou de um esquadro. Marcamos o ponto *A*.
3) Traçamos os pontos *B* e *D*, respectivamente, a 2 cm e a 4 cm de *A*.
4) Centramos o compasso em *B* e em *D* e encontramos o ponto *C*.

Figura 13. Construção de paralelogramos
Fonte: Projeto Araribá (BARROSO, 2006, p. 239).

Nesse caso, é efetivada a construção com os seguintes passos: Traçar um segmento de reta AB, e pelo ponto A construir um ângulo de 60º com transferidor.

Com o compasso marcar o ponto C com a ponta seca em A. Centrando a ponta seca em C traçar um arco e com o compasso em B cruzar o arco. O cruzamento é o ponto D (BARROSO, 2006, p. 239).

Analisemos também a seguinte atividade, em que se apresenta a proposta: Observe como construímos um retângulo ABCD em que sua base é 4 cm e sua altura é 2 cm.

1) Desenhamos um esboço
2) Construímos um ângulo de 90º com o auxílio de um transferidor o de um esquadro. Marcamos o ponto A.
3) Centramos o compasso em B e em D e encontramos o ponto C (BARROSO, 2006, p. 239).

Nesse caso, é proposto o uso do transferidor para traçar os ângulos necessários, no entanto toda a construção poderia ser realizada apenas com régua e compasso.

COLEÇÃO 3

Na coleção 3 observamos que os quadriláteros não são introduzidos por meio de uma situação-problema, e sim mediante fotos de objetos que são encontrados com frequência nas telas de arames, nas grades de portas, janelas, portões e vitrais.

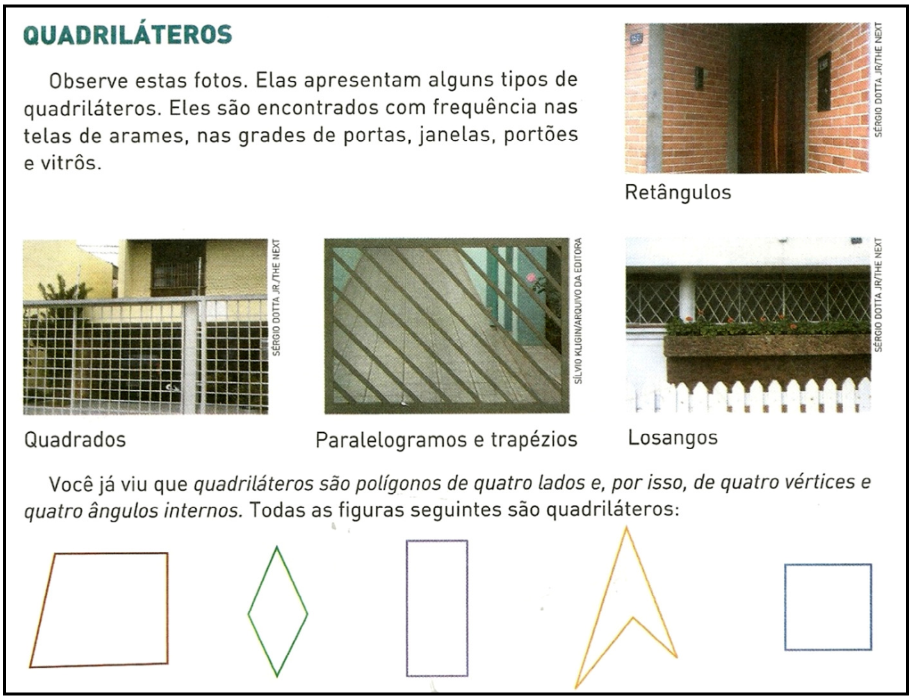


Figura 14. Aplicação dos Quadriláteros
Fonte: Dante, 2009, p. 251.

Outra atividade faz uso da observação e motiva o aluno a classificar os quadriláteros que têm lados paralelos; os que têm dois pares de lados paralelos e os que têm só um par de lados paralelos.

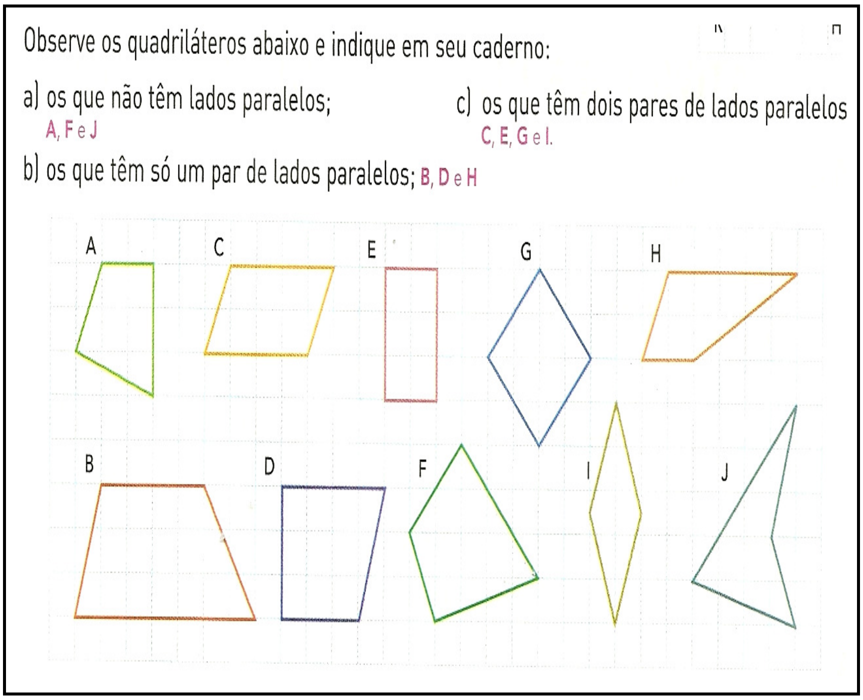
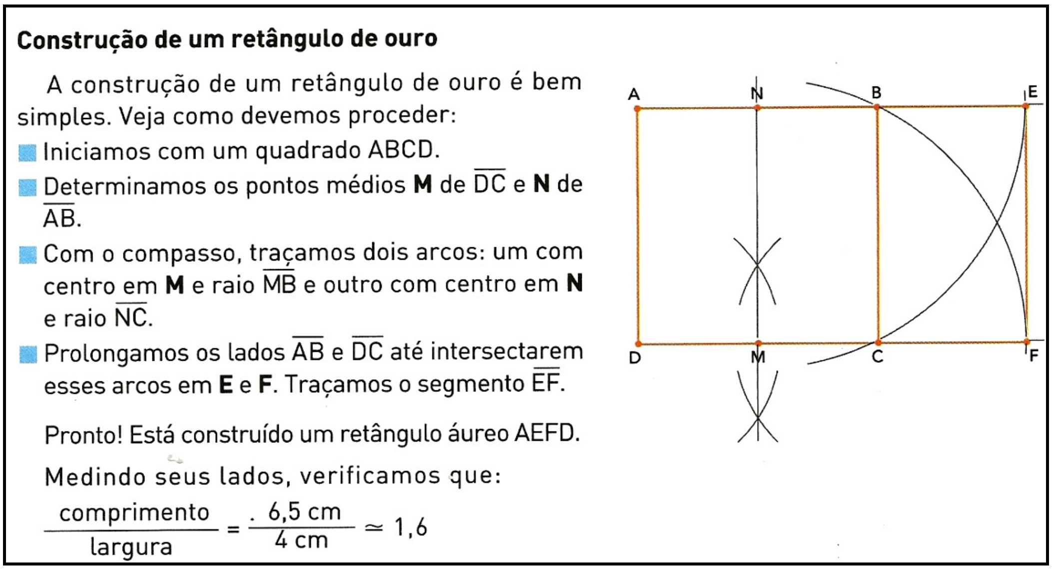


Figura 15. Resolução de problemas
Fonte: Dante, 2009, p. 251.

Na coleção 3, no livro do 9.º ano é abordada a construção de um retângulo áureo com o compasso, e explorada sua geometria como descreve Dante:



Construção de um retângulo de ouro

A construção de um retângulo de ouro é bem simples. Veja como devemos proceder:

- Iniciamos com um quadrado ABCD.
- Determinamos os pontos médios **M** de $\overline{DC}$ e **N** de $\overline{AB}$.
- Com o compasso, traçamos dois arcos: um com centro em **M** e raio $\overline{MB}$ e outro com centro em **N** e raio $\overline{NC}$.
- Prolongamos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ até intersectarem esses arcos em **E** e **F**. Traçamos o segmento $\overline{EF}$.

Pronto! Está construído um retângulo áureo AEFD.

Medindo seus lados, verificamos que:

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}} = \frac{6{,}5\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} \simeq 1{,}6$$

Figura 16. Construção da Coleção 3
Fonte: Dante, 2009, p. 123.

> A geometria é explorada informalmente. Inicia-se esse conteúdo com os sólidos geométricos, em seguida passa-se às regiões planas e chega-se aos contornos (linhas fechadas), com atividades que favorecem a manipulação de embalagens, visualização e identificação de seus elementos, bem como as diferenças e semelhanças entre essas formas. As regiões planas, sua composição e decomposição são trabalhadas relacionando-as com sinais de trânsito, arte e mosaicos. As atividades são feitas por meio de dobraduras, recortes e pintura, estimulando a criatividade do aluno. O trabalho com contornos de figuras planas leva o aluno a conhecer os mais importantes: quadrado, retângulo, triângulo e circunferência (DANTE, 2009, p. 54).

Tomando por referência o PCN na análise dos livros didáticos, pudemos observar que apenas a coleção 2 faz uso de algumas construções geométricas.

Nossa proposta é compatível com os PCN, pois defendemos que o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática utilize de algumas construções geométricas com régua e compasso. Por isso, a nosso ver, dever-se-ia ressaltar nos livros didáticos a presença de construções geométricas, para evidenciar a importância delas, para que o professor, ao fazer o uso do livro didático, pesquise, se atualize e saiba utilizá-las. Concordamos com os dizeres:

> Especificamente para o 3.º ciclo – 5.ª e 6.ª séries do ensino fundamental – é valorizado o desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo este possibilitado com a “exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução”.
>
> A utilização dos instrumentos de desenho aparece com finalidades determinadas quando se coloca que um dos aspectos que merecem atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes (ZUIN, 2002, p. 10).

E também as palavras de Maioli, quando afirma que:

> Suspeitamos que, mesmo que o livro didático atenda as recomendações dos PCN, se o professor não tiver uma formação que lhe permita conhecer os PCN, o livro pode ser utilizado de maneira inadequada, de forma que os objetivos propostos pelos PCN, e esperados pelos autores, não sejam atingidos. Como não investigamos este fato, trata-se apenas de uma hipótese, que pode ser investigada em outras pesquisas (MAIOLI, 2002, p. 38).

No próximo capítulo apresentamos os dados essenciais da pesquisa.

CAPÍTULO 3

PROPOSTA DE UMA SEQUENCIA DE ATIVIDADES SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMETRICAS

Neste capítulo, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, a sequência de atividades elaboradas, suas análises prévias e *a posteriori.*

3.1 Metodologia de Pesquisa

O trabalho foi desenvolvido com um grupo de professores da Rede Pública. É um estudo empírico de campo, sendo feita a coleta de dados no próprio local, através de entrevista, observação, aplicação de questionário.

A metodologia utilizada é a de pesquisa-ação

> é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes, ou seja, é uma modalidade de atuação e observação centrada na reflexão-ação. Apresenta-se como transformadora, libertadora, provocando mudança de significados (FIORENTINI, 2004, p. 112)

As informações foram coletadas pela pesquisadora em reuniões de estudo com os sujeitos da pesquisa e também em entrevistas individuais, quando elas se revelarem necessárias.

Uma das virtudes da pesquisa-ação é a de contribuir com a análise do aprendizado da Geometria plana, mais especificamente com o estudo de quadriláteros mediante construções geométricas, usando régua e compasso.

Para o desenvolvimento e análise das atividades desta pesquisa, nos fundamentamos nos pressupostos da Engenharia Didática.

Segundo Almouloud (2007, p. 171)

> a engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Nesse sentido, (ARTIGUE, 1988, apud ALMOULOUD, 2007) salienta as diferentes fases da metodologia da engenharia didática: análises prévias, construção das situações e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.

Segundo Almouloud (2007, p. 172)

> Um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questõa(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos das pesquisa.

Fizemos nos capítulos 1 e 2, um breve levantamento histórico sobre a Geometria, e um estudo sucinto do estado da arte sobre o ensino e aprendizagem da Geometria plana por meio de construções geométricas.

Na construção e análise *a priori* das situações, escolhemos atividades que deveriam garantir o alcance de nossos objetivos. De acordo com Almouloud (2007, p. 173-174),

> O objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos admitir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido.

Na fase de experimentação, observamos as produções dos professores e coletamos dados complementares por meio de um questionário e entrevistas individuais. Fizemos depois uma análise *a posterior* das diferentes sessões. Lembramos que,

> Uma análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados colhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. (ALMOULOUD, 2007. p. 177).

3.2 Procedimentos Metodológicos

Neste item descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, a sequência de atividades, as análises prévias e as análises *a posteriori*.

Os professores responderam um questionário cujo objetivo é verificar seus perfis, o tempo de trabalho, sua relação com a geometria e as construções geométricas. Elaboramos as seguintes perguntas para este estudo:

Como foi sua formação em Geometria? Teve aulas de Geometria na faculdade?
Durante o seu aprendizado de Geometria, você aprendeu as construções fundamentais utilizando régua e compasso?
Ao ministrar suas aulas, faz uso das construções fundamentais utilizando régua e compasso? Se a resposta for negativa, justifique sua resposta.

Depois de respondida as perguntas, foram realizadas atividades que envolvem construções geométricas com régua e compasso.

Foram registrados todos os passos realizados pelos sujeitos quando da construção geométrica de quadriláteros. Foram realizadas entrevistas estruturadas ou eventuais sobre questões que emergiram na sala dos professores. Os procedimentos basearam-se nos moldes de uma pesquisa qualitativa.

Nossa pesquisa foi desenvolvida em dois encontros com uma hora cada um, e composta por duas atividades.

3.3 Os Professores

Perfil do grupo

O grupo era constituído por 6 professores, dos quais 2 do sexo masculino e 4 do sexo feminino. Todos com mais de 30 anos, conforme o quadro 4

Quadro 4. Tempo de Magistério

Professores	Idade	Tempo de serviço	Nível que leciona	Ano de conclusão
Marcio	30 anos	4 anos	Fundamental	2006
Silvania	50 anos	20 anos	Fundamental e Médio	1984
Lonise	54 anos	20 anos	Fundamental e Médio	1977
Maribel	59 anos	30 anos	Fundamental e Médio	1972
Dauto	42 anos	14 anos	Fundamental e Médio	1996
Lais	31anos	5 anos	Fundamental e Médio	2000

Fonte: própria autora

As atividades da oficina

Apresentamos as atividades que foram desenvolvidas na oficina, com os objetivos, comentários didáticos e relato dos principais fatos que ocorreram durante o desenvolvimento da mesma.

3.4 Atividade 1

a) Construa um retângulo ABED qualquer utilizando apenas lápis, compasso e régua:
b) Construir e medir suas diagonais. Suas diagonais são congruentes?
c) Demonstrar este teorema
d) As diagonais de um retângulo são congruentes e cortam-se nos seus pontos médios? Por quê?
e) Construir um paralelogramo cujas diagonais cortam-se nos seus pontos médios e são congruentes. ABED é um retângulo? Por quê?
f) Pode-se concluir que todo quadrilátero que possui as diagonais congruentes é um retângulo.

Justifique sua resposta.

Análise da atividade

Os objetivos desta atividade são, de um lado, construir (com régua e compasso) um retângulo com menor número de operações possíveis, e, por outro, demonstrar as propriedades do retângulo.

Queremos investigar o conhecimento dos professores a respeito da construção de um retângulo com régua e compasso, e como lidam as propriedades desse objeto geométrico.

Existem diversas formas de realizar a construção do retângulo, portanto, segundo Marmo (1926), devemos escolher o processo que tem o menor número de operações gráficas. Apresentamos a seguir as soluções com a quantidade de operações realizadas:

Construa um retângulo ABED qualquer utilizando apenas lápis, compasso e régua:

Solução possível:

1º processo

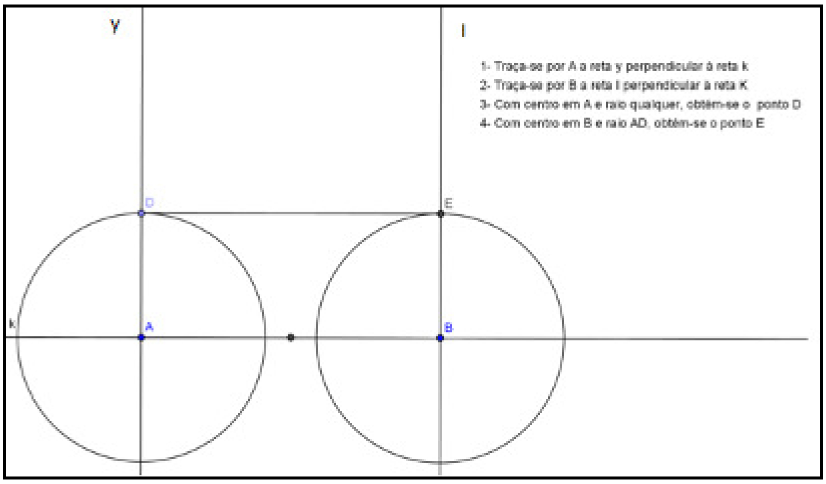


Figura 17. Construção do retângulo
Construção própria.

Traça-se por A a reta y perpendicular a reta k.
Traça-se por B a reta l perpendicular a reta k.
Com centro em A e raio qualquer, obtém-se o ponto D.
Com centro em B e raio AD, obtém-se o ponto E.

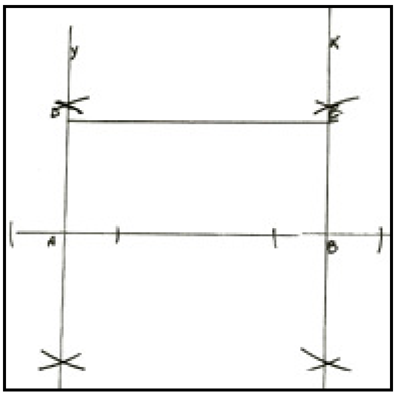


Figura 18. Construções do Retângulo com régua e compasso
Construção da própria autora

2º Processo

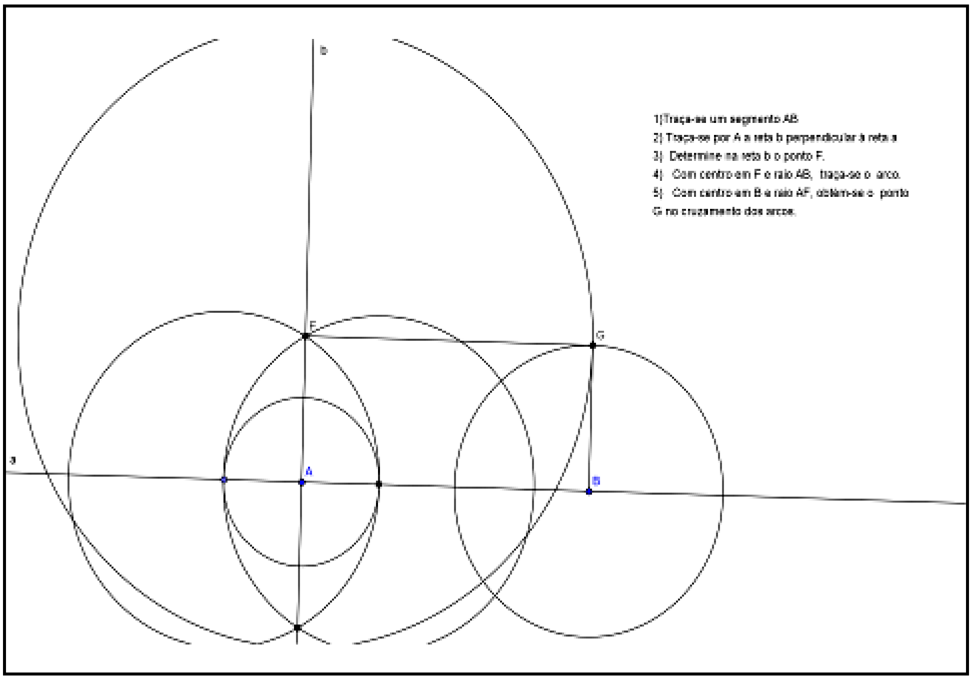


Figura 19. Construção do retângulo
Construção própria

Traça-se um segmento AB
Traça-se por A a reta b perpendicular à reta a
Determine na reta b ponto F.
Com o centro em F e raio AB, traça-se o arco.
Com o centro em B e raio AF, obtém-se o ponto G no cruzamento dos arcos.
Evidentemente o 1º processo, que tem só 4 operações, tem um custo cognitivo menor que o 2º, que tem 5 operações.

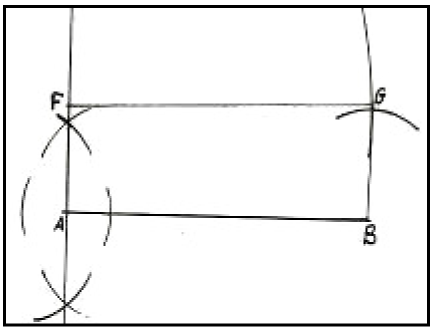


Figura 20. construção do retângulo com régua e compasso
(Construção da própria autora)

Segundo Marmo (1926, p. 25), "não fazer operações supérfluas, mas aproveitar traços já desenhados".

b) Construir um retângulo e medir suas diagonais. Suas diagonais são congruentes?

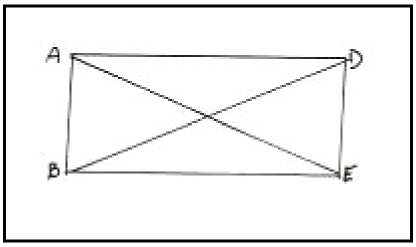


Figura 21. Análise das diagonais do retângulo
Construção própria

Solução possível: A diagonal BD é congruente à diagonal AE, portanto a figura é um retângulo.

c) Demonstrar este teorema

Solução possível: Analisando os elementos do triângulo ABE e do triângulo DEB, temos:

AB = EB (lados opostos de um retângulo)
Os ângulos ABD e DEB são retos.
AB = BA (lados comuns)
Pelo caso LAL, temos que os triângulos ABD e DEB são congruentes. Portanto, AE = BD.

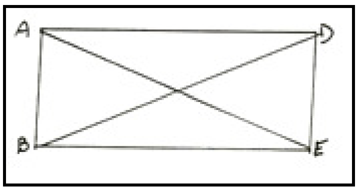


Figura 22. Retângulo
(Construção própria)

d) As diagonais de um retângulo são congruentes e cortam-se nos seus pontos médios? Por quê?

Solução possível: Considerando as propriedades demonstradas, podemos afirmar que “as diagonais de um retângulo são congruentes e cortam-se nos seus pontos médios”.

e) Construir um paralelogramo cujas diagonais cortam-se ao meio e são congruentes. ABED é um retângulo? Por quê?

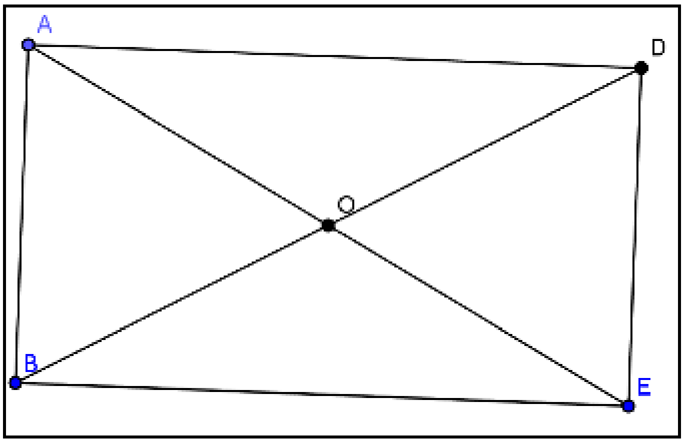


Figura 23. Análise do retângulo
Construção própria

Solução possível:

Seja O a intersecção das diagonais $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$ do paralelogramo ABED. Como as diagonais são congruentes, os triângulos ABO e DOE são isósceles e congruentes, portanto, $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A \cong O\hat{D}E \cong O\hat{E}D$. Os triângulos OAD e OBE são isósceles e congruentes, portanto, $O\hat{B}E \cong O\hat{E}B \cong O\hat{A}D \cong O\hat{D}A$. Deduz-se que $\text{med}(A\hat{B}E) = \text{med}(A\hat{B}D) + \text{med}(D\hat{B}E) = \text{med}(D\hat{E}O) + \text{med}(O\hat{E}B) = \text{med}(B\hat{E}D)$, e sabe-se que $A\hat{B}E \cong A\hat{D}E$ e que $B\hat{A}D \cong D\hat{E}B$. Portanto, é um $\text{med}(A\hat{B}E) + \text{med}(B\hat{E}D) + \text{med}(E\hat{D}A) + \text{med}(D\hat{A}B) = 4\text{med}(D\hat{A}B) = 360^{\circ}$, portanto $\text{med}(D\hat{A}B) = 90^{\circ}$ ABED é um paralelogramo que tem um ângulo reto, portanto é um retângulo. Podemos então enunciar a seguinte propriedade: *Um paralelogramo que suas diagonais congruentes, é um retângulo.*

f) Pode-se concluir que todo quadrilátero que possui as diagonais congruentes é um retângulo. Justifique sua resposta.

Solução possível: Nem todo quadrilátero que possui as diagonais congruentes é um retângulo. Construímos a figura que apresenta diagonais congruentes e não é um retângulo.

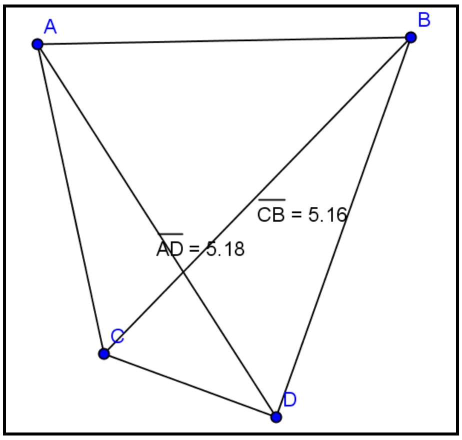


Figura 24. Quadrilátero irregular
Construção própria

3.5 Atividade 2

Construa um retângulo ABCD qualquer utilizando apenas lápis, compasso e régua, de modo que o lado AB tenha a medida 7 cm e o lado BC, 4 cm.

Solução possível

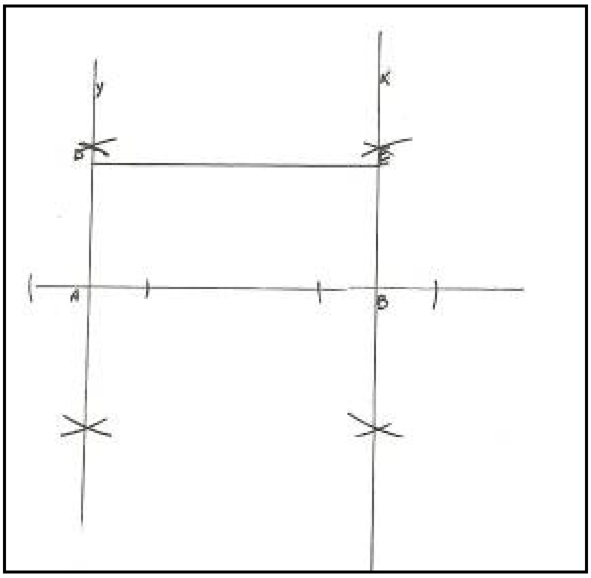


Figura 25. Solução possível para atividade 2

Relato e comentários:

O quadro 5 (conferir a numeração) apresenta o perfil do professores que participaram da pesquisa. O quadro mostra que eles não tiveram uma formação adequada em geometria. Esses professores afirmam também que lhes falta habilidade para lidar com situações envolvendo construções geométricas.

Quadro 5. Perfil dos professores participantes

	Utilização nas atividades	Utilização nas atividades	Licenciatura				
Professores	Régua	Compasso	Formação	Construções	Sim	Não	Justificativa
MARCIO	x	x	Não teve	Não		x	Não tenho habilidade suficiente
SILVANIA	x		fraca	Não	x		Falta material, salas numerosas.
DENISE	x	x	1 semestre	Número insuficiente		x	Não tem hábito
MARIBEL	x	x	1 semestre	Número insuficiente		x	Não tem habilidade para usar o compasso.
DAUTO	x		Fraca não tem	Quantidade insuficiente		x	Não sabe utilizar o compasso por falta de uso.
LAIS	x		Não teve	sim		x	Não tem habilidade para usar o compasso.

Vemos que os professores utilizam na resolução das duas situações preferencialmente, a régua como recurso de construção geométrica do retângulo.

As construções Geométricas do retângulo com régua e compasso deveriam ser acompanhadas de justificativas apoiando-se nas diferentes propriedades de um retângulo. Mas de modo geral, as construções nem sempre foram acompanhadas de justificativas. A quase ausência de justificativas demonstra as dificuldades com a argumentação e a demonstração, assim como com a linguagem natural.

A construção com a ferramenta compasso foi usada muito precariamente. Algumas dificuldades marcantes estão relacionadas ao uso do compasso, talvez por falta de experiência no uso dessa ferramenta.

É interessante notar que as professoras Denise e Maribel não apresentaram dificuldade para realizar a construção com régua e compasso. A professora Maribel, que concluiu o curso de Licenciatura em 1972, e a professora Denise, em 1977, afirmam ter uma formação em Desenho Geométrico, fato que parece ter tido uma impacto positivo sobre o desempenho das duas professoras.

REFLEXÕES E PROPOSTA DE OUTROS ENCAMINHAMENTOS

Segundo Almouloud (2007, p. 177), o objetivo de uma análise a posteriori é "relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados". Reconhecemos que as duas situações propostas e as escolhas feitas não permitiram colher dados confiáveis que permitem relacionar as observações com os objetivos definidos nesta pesquisa. Pretendíamos contribuir na formação de seis professores no que diz respeitos às construções geométricas envolvendo quadriláteros, mas podemos afirmar que este objetivo não parece ter sido alcançado em razão da proposta e do tempo reservado a essa formação. Na análise dos dados, também, não conseguimos fazer um trabalhos que articule os dados recolhidos, os objetivos da pesquisa, o referencial teórico e os resultados de pesquisas sobre o mesmo tema.

O fato elencado acima nos levou a propor outra sequencia de atividades que foca as construções geométricas com régua e compasso, e envolvem várias caracterizações de quadriláteros, mais especificamente os quadriláteros notáveis (paralelogramo, retângulo, quadrado e losango). A sequência proposta pode ser utilizada em sala de aula, bem como na formação continuada de professores. Segue nossa proposta:

Sequência didática para construções geométricas de quadriláteros

Atividade 1: Construir um paralelogramo, dados três vértices.

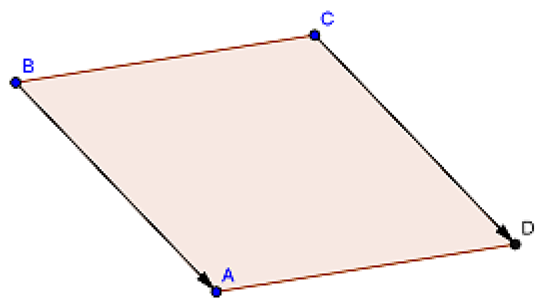
Dados três pontos do plano, A, B e C não alinhados. Construa o ponto D tal que ABCD seja um paralelogramo. Justifique sua construção.

Análise da atividade:

O objetivo é construir, usando régua e compasso, quadriláteros que conservam suas propriedades. Obtêm-se essas figuras, em geral, a partir de três pontos livres, A, B, e C.

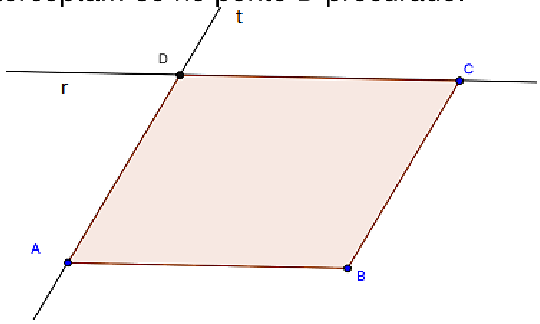
Podemos proceder de três formas para construir o paralelogramo ABCD, o ponto D sendo o vértice procurado.

a) Usando a translação de vetor $\overrightarrow{BA}$, por exemplo:

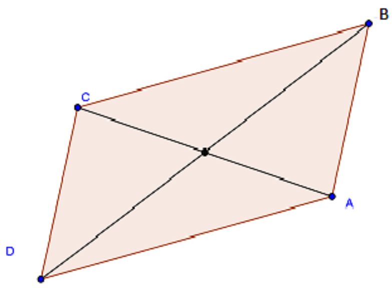


Como $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, então o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

b) Usando o paralelismo dos lados opostos
Sendo os pontos A, B e C dados, construímos a reta r paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C, e a reta s paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e passando por B. As retas r e t interceptam-se no ponto D procurado.



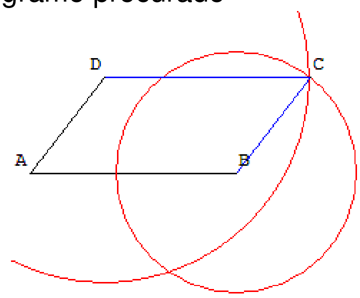
c) Usando a propriedade das diagonais de um paralelogramo
Construímos a diagonal AC e seu ponto médio O. O ponto D procurado é o simétrico de B em relação ao ponto O. Como as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero ABCD têm mesmo ponto médio, então, ABCD é um paralelogramo.



Atividade 2: Construir um paralelogramo ABCD, dadas as medidas de dois lados consecutivos e de uma diagonal.

Análise da atividade

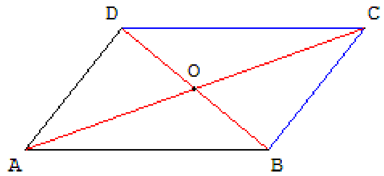
a) Com compasso e régua
Sejam m_1 e m_2 as medidas respectivas dos lados AB e AD. Constroem-se as circunferências de centro D e raio m_1, e de centro B e raio m_2. C é o ponto de intersecção dessas duas circunferências. ABCD é o paralelogramo procurado



b) Construção usando a simetria central

Constrói-se o ponto médio O da diagonal $\overline{BD}$, o ponto C, simétrico de A em relação ao ponto O.

ABCD é um paralelogramo, os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos e congruentes (pois, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são simétricos em relação ao ponto O.)

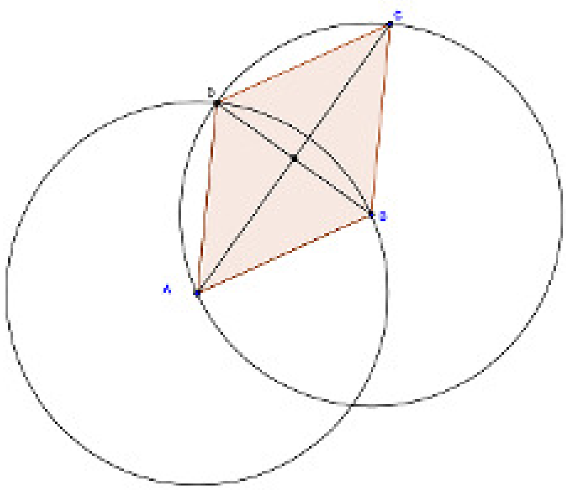


Atividade 3: construir um losango, dada a medida do lado

Descreva um procedimento que permita construir um losango, dada a medida do lado $\overline{AB}$. Faça a construção e justifique seu procedimento.

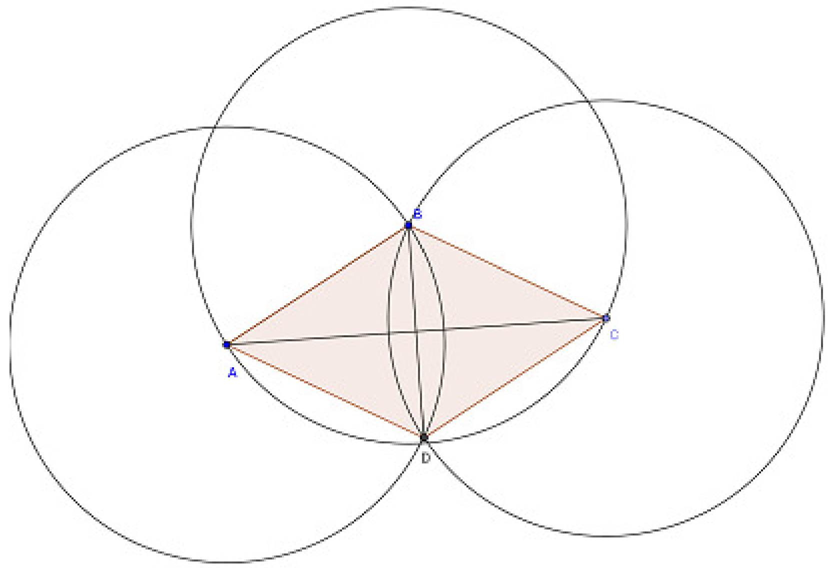
Análise da situação

a) Desenhamos o segmento $\overline{AB}$. Construímos a circunferência de centro B e raio AB, a circunferência de centro A e raio AB. Qualquer um dos pontos de interseção dessa circunferência é o ponto D procurado. Para construir o ponto C, basta construir o simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{BD}$.



b) Podemos proceder também da seguinte forma:

Criamos o segmento $\overline{AB}$ e depois, construímos a circunferência de centro B e raio AB. Escolhemos um ponto C qualquer nessa circunferência e traçamos o segmento $\overline{AC}$. Construímos as circunferências de centros A e C, passando por B. O ponto D é o segundo ponto de intersecção dessas circunferências. Finalmente, desenhar os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.



Atividade 4: Construir um losango a partir de uma diagonal $\overline{AC}$.

a) Crie dois pontos A e C.

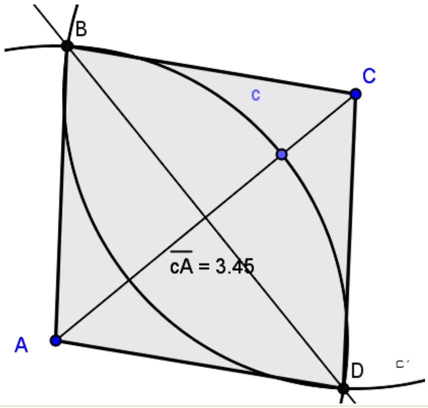
b) Construa uma circunferência *c* de centro A e de raio *a maior que* AC/2.

c) Construa uma circunferência *c'* de mesmo raio que c e de centro C. As circunferências *c* e *c'* interceptam-se nos pontos B e D. A reta $\overleftrightarrow{BD}$ é mediatriz do segmento $\overline{AC}$.

d) Construa o quadrilátero ABCD e demonstre que ABCD é um losango.

Análise da atividade:

Os pontos B e D são equidistantes de extremos do segmento $\overline{AC}$, pois são pertencem á mediatriz desse segmento. Portanto, AB=BC=CD=DA e as diagonais são perpendiculares. ABCD é então um losango.



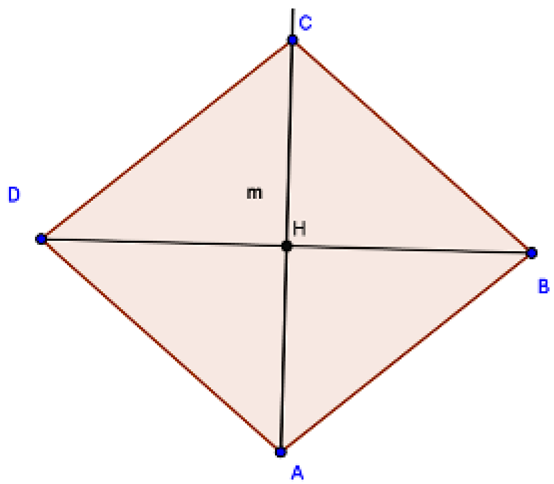
Atividade 5: Construir um losango a partir de um lado e a direção de uma diagonal.

a) Crie um segmento $\overline{AB}$ e a semi-reta $\overrightarrow{Am}$, suporte da diagonal $\overline{AC}$.

b) Construa o losango ABCD. Justifique sua construção.

Análise da atividade:

O vértice D é o simétrico de B em relação á semi-reta $\overrightarrow{Am}$. O vértice C é o simétrico de b em relação à reta BD. ABCD é losango, pois tem seus lados congruentes.



Atividade 6: Construção de um retângulo.

a) Crie um segmento $\overline{AB}$

b) Construa a reta r, perpendicular a $\overline{AB}$ passando por A. Crie um ponto D na reta r.

c) Construa a reta s passando por C e paralela à reta AB.

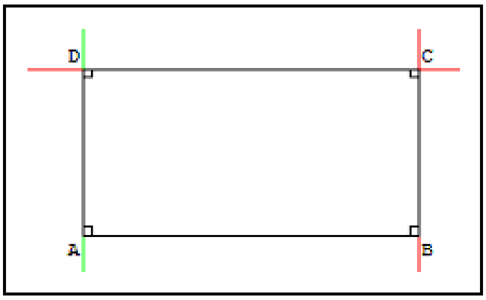
d) Construa a reta t passando por A e paralela à reta BC.

e) Construa o ponto C, intersecção das retas s e t.

f) O quadrilátero ABCD é um retângulo? Justifique sua resposta.

Análise da atividade

ABCD é paralelogramo que têm seus ângulos retos, é então um retângulo.



Atividade 7: Construção de um quadrado a partir de um lado $\overline{AB}$.

a) Crie um segmento $\overline{AB}$.

b) Construa a reta m perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e passando por B.

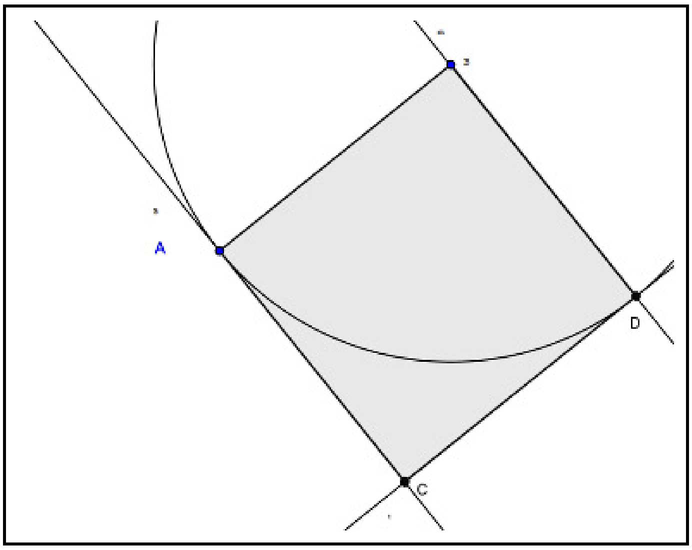
c) Construa a circunferência c de centro B e passando por A. Nomeie de D, uma das intersecções de m e c.

d) Construa as retas s e t passando por A e C, respectivamente perpendiculares aos segmentos $\overline{AB}$ e m. Nomeie de C a intersecção de s e t.

e) ABDC é um quadrado de lado $\overline{AB}$? Justifique.

Análise da atividade:

ABDC é um retângulo que tem seus lados consecutivos congruentes, é, então, um quadrado.



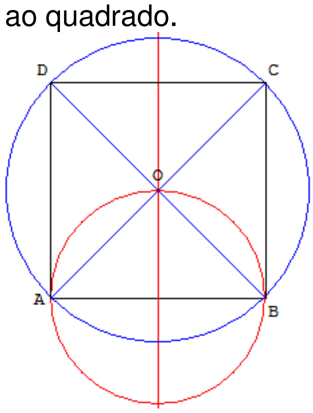
Atividade 8: Construção de um quadrado a partir de um lado e da circunferência circunscrita.

Descreva um procedimento que permita construir um quadrado, dados um lado $\overline{AB}$ e a circunscrita a esse quadrado. Justifique sua construção.

Análise da atividade

Método de construção 1:

Criamos um segmento $\overline{AB}$ e construímos a mediatriz m de $\overline{AB}$. A circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ intercepta m no ponto O, que é centro da circunferência circunscrita ao quadrado. Para achar os dois outros vértices, procede-se como segue: Pelo ponto A, construímos a reta r, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Nomeamos de D, o ponto de intersecção da reta r e a circunferência circunscrita ao quadrado. Pelo ponto B, construímos a reta s, perpendicular ao $\overline{AB}$. Nomeamos de C, o ponto de intersecção da reta s e a circunferência circunscrita ao quadrado.



O quadrilátero ABCD é quadrado procurado, pois, o ponto O está igual distância dos pontos A, B, C e D, e tem um ângulo reto

Método de construção 2:

Usando régua e compasso, construímos a circunferência de centro A e passando por B, a circunferência de centro B, passando por A. A reta que passa pelas intersecções das duas circunferências é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. O centro do quadrado é um dos pontos de intersecção da mediatriz e da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. A circunferência (c) de centro O, passando por A, é a circunferência circunscrita ao quadrado.

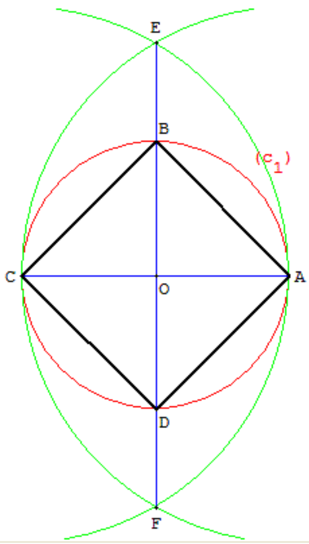
O vértice C é o segundo ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AO}$ e da circunferência circunscrita c. Igualmente, o ponto D é a intersecção da reta BO e da circunferência c.

Atividade 9: Construção de um quadrado, dada uma diagonal.

Descreva um procedimento que permita construir um quadrado, dada sua diagonal $\overline{AC}$. Justifique sua construção.

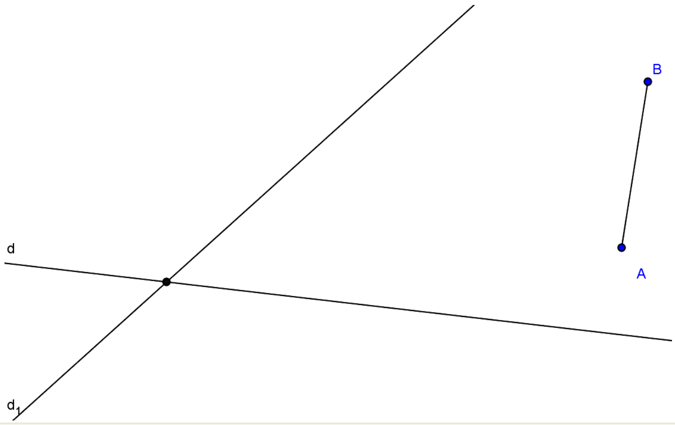
Análise da atividade

Criamos o segmento AC e construímos seu ponto médio O. A mediatriz d de $\overline{AC}$ intercepta a circunferência c de diâmetro $\overline{AC}$ em B e D. os pontos B e D são a igual distância de A e C, portanto AB=BC=CD=DA. O triângulo ABC é retângulo, pois inscrito em uma semicircunferência. Portanto, ABCD é um quadrado, pois é um losango que tem um ângulo reto.



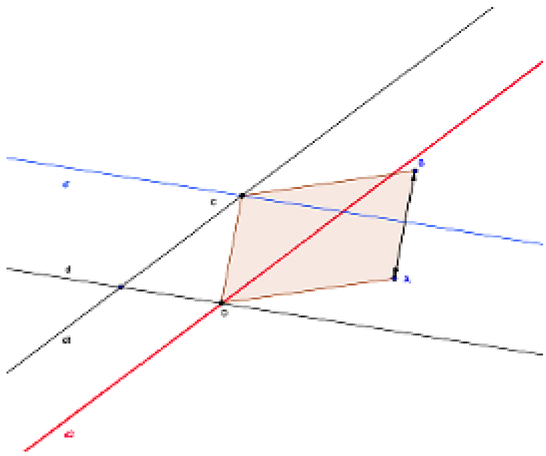
Atividade 10: Construir um paralelogramo cujos dois vértices pertencem a duas retas.

Consideram-se dois pontos A e B e duas retas d e d_1 concorrentes e diferentes da reta AB. Existe um ponto C sobre d_1 e um ponto D sobre d tal que o quadrilátero ABCD seja um paralelogramo? Justifique.



Análise da atividade

Construímos a imagem d´ da reta d pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$. As retas d e d´interceptam-se no ponto C. Depois construímos a imagem d_2 da reta d_1 pela translação de vetor $\overrightarrow{BA}$. As retas d_2 e d interceptam-se no ponto D. Como $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$: o paralelogramo ABCD é a solução do problema.



Considerações Finais

A principal inspiração para este trabalho surgiu a partir do contato com a Geometria do Compasso num curso de aperfeiçoamento realizado pela rede pública. Nesse curso, foram desenvolvidas as habilidades trabalhadas com o compasso e deparamos com as dificuldades encontradas pelos professores de matemática ao realizarem atividades que envolviam a Geometria plana com construções geométricas com régua e compasso. Com está preocupação elaboramos a pesquisa cujo foco é construções geométricas com régua e compasso.

Ao pesquisarmos trabalhos sobre a dificuldade em construções geométricas percebemos que os autores Gilson (2008), Maioli (2002) e Araújo (2007) verificam este fato nas suas pesquisas.

Buscamos em nosso trabalho analisar a importância do estudo da Geometria e mostrar aos educadores a relevância dos estudos pertinentes às construções geométricas, bem como os benefícios destes a vida acadêmica.

Esta pesquisa se propôs a contribuir com a formação continuada de professores de Matemática. Com esse foco, elaboramos a aplicação de uma sequência de atividades com construções geométricas.

Outro aspecto importante, abordado neste trabalho focou-se nos estudos realizados por alguns autores sobre a formação de professores, o que justificou o nosso interesse de uma formação centrada em Geometria, de acordo com Imbernon (2010) e Shulman (1996) como forma de subsidiar a formação continuada.

Baseamos-nos nos PCN (1988) que sugerem ao professor a exploração de situações em que sejam utilizadas construções geométricas com régua e compasso, assim como os conceitos geométricos de forma que o aluno desenvolva o conhecimento permitindo-lhe compreender, descrever e representar o mundo em que vive.

Os PCN propõem uma mudança no ensino para a construção do conhecimento do aluno. Os docentes apresentam dificuldade em lidar com a reelaboração de propostas curriculares para o ensino fundamental e se apoiam nos livros didáticos.

Assim sendo, avaliamos alguns livros didáticos de Matemática (Jakubovic, jakubo, 2009; Barroso 2006. Dante, 2009). Segundo a nossa análise, nos livros didáticos de matemática apresentam poucos tópicos com atividades que trabalham as construções geométricas, com um conteúdo reduzido.

Os PCN sugerem por meio do estudo de obras de arte, pintura, desenhos, esculturas estabeleça uma conexão entre a Matemática e outras áreas de conhecimento.

Salientamos o estudo do retângulo áureo e suas aplicações na natureza e nas obras de arte, relacionando a Matemática com as artes.

Gostaríamos de investigar com a nossa questão de pesquisa quais os avanços proporcionados pelas construções geométricas no conhecimento dos professores com relação à Geometria. Assim, nós delimitamos o problema desta pesquisa, cuja questão foi:

A utilização de construções geométricas com régua e compasso em resoluções de problemas de Geometria é um instrumental que favorece o desenvolvimento dos conhecimentos dos professores em Geometria?

Com atividades elaboradas pretendíamos contribuir com a formação de seis professores.

De modo geral, as construções geométricas realizadas com régua e compasso não justificadas usando as regras dedutivas. Os sujeitos da pesquisa tiveram muita dificuldade em justificar suas construções por meio de diferentes propriedades das figuras solicitadas.

As dificuldades foram marcantes com relação à utilização do compasso nas construções geométricas, talvez por falta de experiência no uso dessa ferramenta.

Preparamos atividades que as escolhas feitas não permitiram colher dados confiáveis que possam relacionar as observações com os objetivos definidos nesta pesquisa. Com este fato propomos outra sequência de atividades para formação continuada de professores que foca nas construções geométricas com régua e compasso e envolvem os quadriláteros notáveis.

As informações resultantes da pesquisa fornecem novos questionamentos que, certamente poderão se constituir em novas questões de estudo.

As futuras pesquisas abordando o tema construções geométricas deverão ser conduzidas na base de experimentos de ensino de longa duração. Também seria interessante pesquisar um grupo de alguns professores que já tenha tido alguma experiência com construções geométricas com régua e compasso e confrontar os resultados com outro grupo que não teve esse tipo de experiência.

Além das atividades envolvendo a utilização de régua e compasso, deixamos a sugestão de se trabalhar atividades semelhantes no ambiente de geometria dinâmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007

ARAÚJO, Carlos César de, A Espiral de Arquimedes (www.gregosetroianos.mat.br/spiral.asp. acessado em 21/09/2010)

ARAÚJO, Ivanildo do Basílio. Uma abordagem para a prova com construções geométricas e cabri-geométre, 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BARISON, Maria Bernadete. (coord.). Desenhos e animações construídos por Giuliano Miyaishi Belussi. (Aluno do Curso de Bacharelado em Matemática- UEL-Ago/2004) entes25/elenicezuint19.rtf.

BELUSSI, Giuliano Miyaishi, GERALDINI, Daniel Aparecido, PRADO, Enéias de Almeida, BARISON, Maria Bernadete. Número de ouro (in http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf, acessado em 3/3/2011)

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide, São Paulo: Edgar Blucher, 1991. 496 p.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher e Edusp, 1974

BRASIL, Ministério da Educação e Desportos (MEC), Parâmetros Curriculares Nacionais, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF 1998

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999. 364p.

BREIDENBACH, W: SUSS, W. Geometric Constructions. In BEHNKE, H. et al. Fundamentals of Mathematics. Geometry, volume II. Traduzido por S. H. Gould. Massachusetts: MIT, 1983 (três volumes).

CORBO, A. Seção áurea: um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática. Ed. São Paulo. Ática, 2009. 197p 8º ano, 259p 6º ano

DANTE, Luiz Roberto. Divisão Áurea. Projeto- MEC- PREMEN/UNESP

EVES, H. Introdução a história da Matemática. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844 p.

FIORENTINI, D. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos/ Dario Fiorentini, Sergio Lorenzato. 2ª Ed.rev.- Campinas, SP. Autores associados, 2007 - (Coleção Formação de professores).

JESUS, G. B. Construções Geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em formação continuada. São Paulo, SP- PUC, 2007. Dissertação de mestrado

GRAVINA, M. A. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IV congresso RIBIE, 1998. Artigo

HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 178p.

IMBERNÓN, Francisco. Formação continuada de professores. Tradução Juliana dos Santos Padilha, Porto Alegre: Artmed, 2010 - 95p., 98p.

KELLY, A. E & LESH. R. A. Research Design in Mathematics and Science Education. London: LEA, p. 192-195, 2000

LEITE, Paulo Ferreira. Construções com o compasso. SBM, 1983 (texto de uma palestra)

LELLIS, Marcelo; IMENES, Luiz Márcio. A Matemática e o novo ensino médio. Educação Matemática em Revista, número 9, ano 2008; (Artigo), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LISBOA, Joaquim L. de A. *A geometria do compasso ou geometria de Macheroni:* Construções geométricas graphicas effectuadas somente com o compasso. Rio de Janeiro: Typ. Revista dos Tribunaes, 1915. 217 p.

MAIOLI, M. *Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros,* 2002. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MARMO, Carlos, 1926*. Curso de desenho*. São Paulo, Ed. Moderna, 1974. 64p

MASCHERONI, I. *Geometrie du Compass*. Paris: Monom, 1980

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. *Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman.* São José do Rio Preto/SP; IBILCE/UNESP, 2004. (in http://coralx.ufsm.br/revce/revce/2004/02/a3.htm, acessado Revista Educação, UFSM, edição 2004, vol. 29, n. 2 acessado em 12/10/2010)

PAVANELLO, Regina Maria. *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências.* In: Revista Zetetike. Campinas/SP; UNICAMP, ano 1, n 1, 1993.

RIVERA, Félix; NEVES, Juarenze; GONÇALVES, Dinei (1986). Traçados em Desenho Geométrico. Rio Grande: Editora da Furg, 389 p.

WILLOUGHBY, Stephen S. Learning Mathematics for a New Century, 2000

ZUIN. Elenice de Souza Lodron. *Da Régua do Compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil,* 2001. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.anped.org.br/25/exced.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Lieth Maria Maziero

Produto Final da Dissertação apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em 25 de maio de 2011, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática: quadriláteros: construções geométricas com o uso de régua e compasso.

Nossa intenção neste trabalho é contribuir com a melhoria do ensino de Geometria. O interesse pelo ensino dessa área da Matemática é antigo, e é ele que nos levou a participar de um curso de formação continuada para professores. Nesse curso pudemos perceber dificuldades que alguns dos professores participantes demonstravam quando as atividades envolviam construções geométricas. O interessante é que durante nossa trajetória profissional, já havíamos percebido que as construções geométricas causavam também dificuldades aos nossos alunos.

No Mestrado nos reportamos a essa experiência de formação continuada de professores e elegemos como tema de pesquisa as construções geométricas, em particular os quadriláteros. E definimos como público alvo os professores do Ensino Fundamental que atuam na Rede Pública Estadual de Ensino. Estabelecemos então como objetivo da pesquisa a contribuição com a formação de professores assim como com a prática profissional dos mesmos.

A proposta é de construir atividades com construções geométricas de quadriláteros que levem em conta as dificuldades referidas.

A elaboração das atividades se fundamenta nas teorias de Duval (2003), sobre os registros de representação semiótica, de Brousseau (1986), sobre a Teoria das Situações Didáticas. O estudo de Imbernon (2010) nos referencia sobre a formação de professores, um dos aspectos pretendidos.

As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática Elementar. Os problemas utilizando de construções geométricas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento de teoremas e propriedades da Geometria.

> Por uma construção geométrica devemos entender um problema do seguinte tipo: a partir de elementos dados ou prontamente construídos (pontos, retas, círculos, ângulos). (BREIDENBACH & SUSS, 1983, p. 198-237apud, ARAUJO, p. 18)

As construções geométricas possibilitaram questionamentos entre os matemáticos tais como: Que construções são possíveis quando se utiliza apenas a régua e compasso? E que construções são possíveis se acrescentamos à régua e compasso o transferidor?

No ensino o uso dos instrumentos é indicado para resolução de problemas de construções geométricas. Em livro didático encontramos indicações para o uso do transferidor na construção do paralelogramo para medir ângulo, conforme Figura 2. (BARROSO, 2006, p. 10).

Vemos que os professores, sujeitos da pesquisa, utilizam na resolução das situações propostas preferencialmente a régua como recurso de construção geométrica do retângulo. Essas construções com régua e compasso deveriam ser acompanhadas de justificativas apoiando-se nas diferentes propriedades de um retângulo. Mas de modo geral, as construções nem sempre foram acompanhadas de justificativas. A quase ausência de justificativas demonstra as dificuldades com a argumentação e a demonstração, assim como com a linguagem natural. A construção com a ferramenta compasso foi usada muito precariamente. Algumas dificuldades marcantes estão relacionadas ao uso do compasso, talvez por falta de experiência no uso dessa ferramenta.

Segundo Putnoki (apud ZUIN, 2002, p. 15), autor de coleções de livros didáticos de Desenho Geométrico para o ensino fundamental e médio, considera de fundamental importância o ensino das construções geométricas com as devidas pontes com a teoria que as fundamenta.

Uma discussão sobre este tipo de atividades pode promover aos professores (e aos seus alunos) condições de refletirem sobre seus conhecimentos e sua prática em sala de aula. Esperamos que esta proposta contribua de forma significativa para a formação de professores e suas práticas de sala de aula.

PRODUTO FINAL: Sugestão de material para encontros de formação continuada de Matemática com professores do Ensino Fundamental II, e para sala de aula.

Atividade 1: Construir um paralelogramo, dados três vértices.

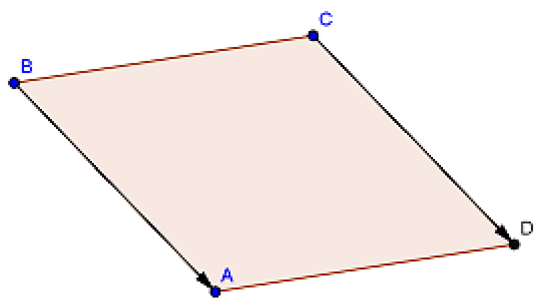
Dados três pontos do plano, A, B e C não alinhados. Construa o ponto D tal que ABCD seja um paralelogramo. Justifique sua construção.

Análise da atividade:

O objetivo é construir, usando régua e compasso, quadriláteros que conservam suas propriedades. Obtêm-se essas figuras, em geral, a partir de três pontos livres, A, B, e C.

Podemos proceder de três formas para construir o paralelogramo ABCD, o ponto D sendo o vértice procurado.

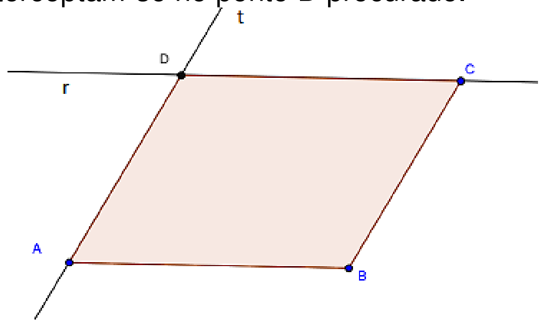
a) Usando a translação de vetor $\overrightarrow{BA}$, por exemplo:



Como $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, então o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

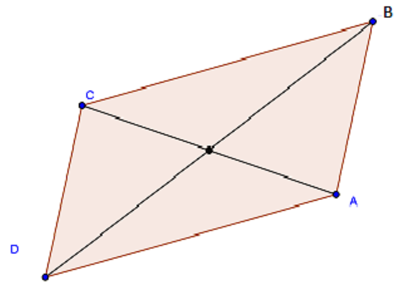
b) Usando o paralelismo dos lados opostos

Sendo os pontos A, B e C dados, construímos a reta r paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C, e a reta s paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e passando por B. As retas r e t interceptam-se no ponto D procurado.



c) Usando a propriedade das diagonais de um paralelogramo

Construímos a diagonal AC e seu ponto médio O. O ponto D procurado é o simétrico de B em relação ao ponto O. Como as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero ABCD têm mesmo ponto médio, então, ABCD é um paralelogramo.

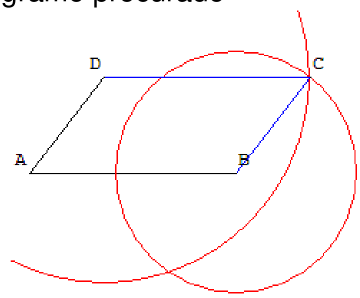


Atividade 2: Construir um paralelogramo ABCD, dadas as medidas de dois lados consecutivos e de uma diagonal

Análise da atividade

a) Com compasso e régua

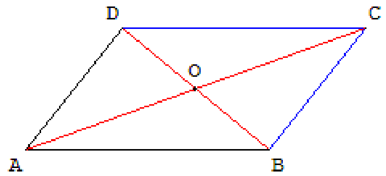
Sejam m_1 e m_2 as medidas respectivas dos lados AB e AD. Constroem-se as circunferências de centro D e raio m_1, e de centro B e raio m_2. C é o ponto de intersecção dessas duas circunferências. ABCD é o paralelogramo procurado



b) Construção usando a simetria central

Constrói-se o ponto médio O da diagonal $\overline{BD}$, o ponto C, simétrico de A em relação ao ponto O.

ABCD é um paralelogramo, os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos e congruentes (pois, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são simétricos em relação ao ponto O.)

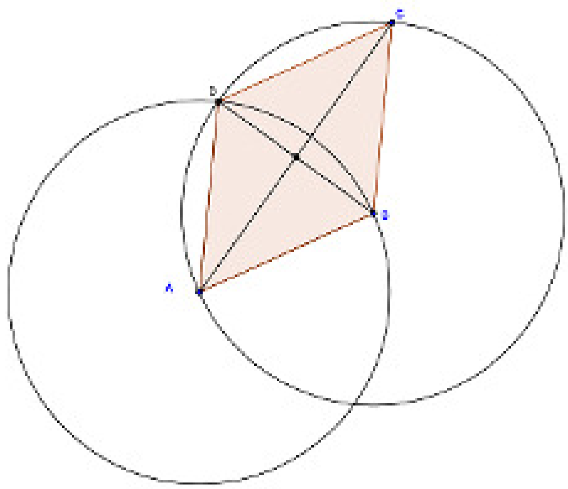


Atividade 3: Construir um losango, dada a medida do lado

Descreva um procedimento que permita construir um losango, dada a medida do lado $\overline{AB}$. Faça a construção e justifique seu procedimento.

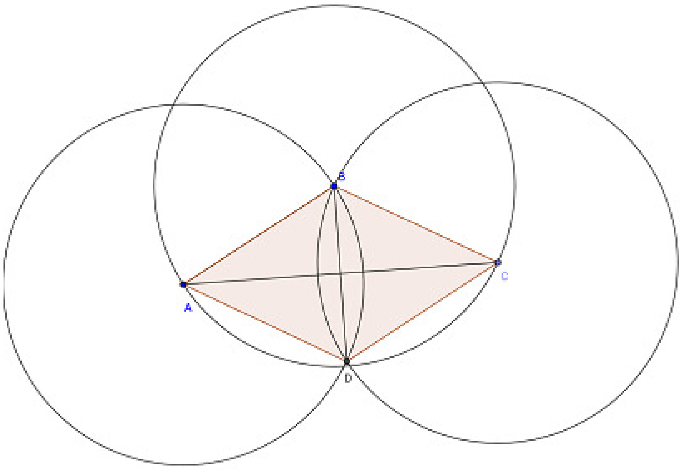
Análise da situação

a) Desenhamos o segmento $\overline{AB}$. Construímos a circunferência de centro B e raio AB, a circunferência de centro A e raio AB. Qualquer um dos pontos de interseção dessa circunferência é o ponto D procurado. Para construir o ponto C, basta construir o simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{BD}$.



b) Podemos proceder também da seguinte forma:

Criamos o segmento $\overline{AB}$ e depois, construímos a circunferência de centro B e raio AB. Escolhemos um ponto C qualquer nessa circunferência e traçamos o segmento $\overline{AC}$. Construímos as circunferências de centros A e C, passando por B. O ponto D é o segundo ponto de intersecção dessas circunferências. Finalmente, desenhar os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.



Atividade 4: Construir um losango a partir de uma diagonal $\overline{AC}$.

e) Crie dois pontos A e C.

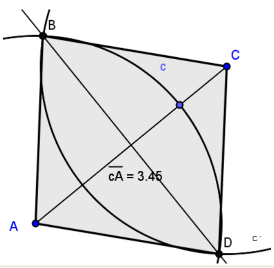
f) Construa uma circunferência *c* de centro A e de raio *a maior que* AC/2.

g) Construa uma circunferência *c'* de mesmo raio que c e de centro C. As circunferências *c* e *c'* interceptam-se nos pontos B e D. A reta $\overleftrightarrow{BD}$ é mediatriz do segmento $\overline{AC}$.

h) Construa o quadrilátero ABCD e demonstre que ABCD é um losango.

Análise da atividade:

Os pontos B e D são equidistantes de extremos do segmento $\overline{AC}$, pois são pertencem á mediatriz desse segmento. Portanto, AB=BC=CD=DA e as diagonais são perpendiculares. ABCD é então um losango.



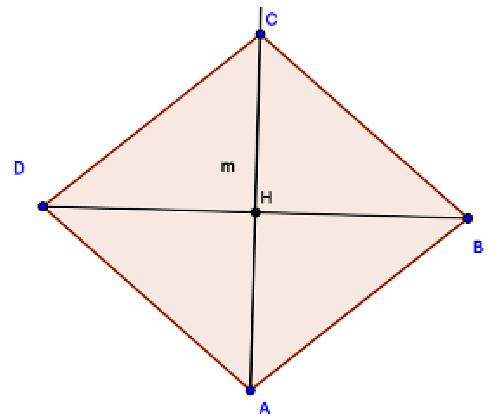
Atividade 5: Construir um losango a partir de um lado e a direção de uma diagonal.

c) Crie um segmento $\overline{AB}$ e a semi-reta $\overrightarrow{Am}$, suporte da diagonal $\overline{AC}$.

d) Construa o losango ABCD. Justifique sua construção.

Análise da atividade:

O vértice D é o simétrico de B em relação á semi-reta $\overrightarrow{Am}$. O vértice C é o simétrico de b em relação à reta BD. ABCD é losango, pois tem seus lados congruentes.



Atividade 6: Construção de um retângulo

g) Crie um segmento $\overline{AB}$

h) Construa a reta r, perpendicular a $\overline{AB}$ passando por A. Crie um ponto D na reta r.

i) Construa a reta s passando por C e paralela à reta AB.

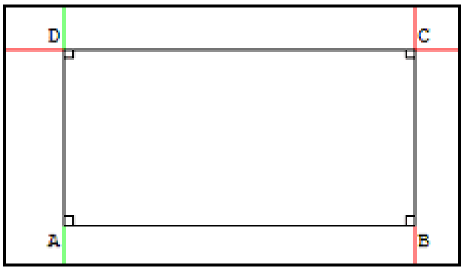
j) Construa a reta t passando por A e paralela à reta BC.

k) Construa o ponto C, intersecção das retas s e t.

l) O quadrilátero ABCD é um retângulo? Justifique sua resposta.

Análise da atividade

ABCD é paralelogramo que têm seus ângulos retos, é então um retângulo.



Atividade 7: *Construção de um quadrado a partir de um lado* $\overline{AB}$.

f) Crie um segmento $\overline{AB}$.

g) Construa a reta m perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e passando por B.

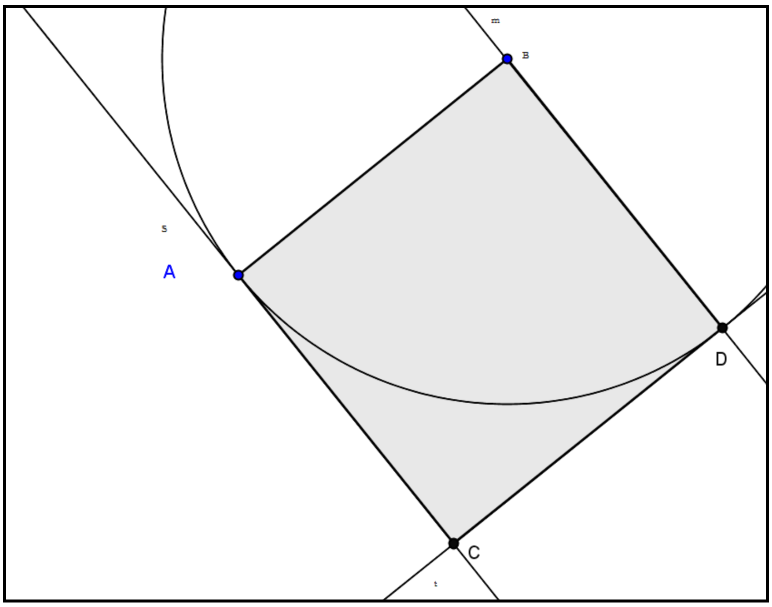
h) Construa a circunferência c de centro B e passando por A. Nomeie de D, uma das intersecções de m e c.

i) Construa as retas s e t passando por A e C, respectivamente perpendiculares aos segmentos $\overline{AB}$ e m. Nomeie de C a intersecção de s e t.

j) ABDC é um quadrado de lado $\overline{AB}$? Justifique.

Análise da atividade:

ABDC é um retângulo que tem seus lados consecutivos congruentes, é, então, um quadrado.



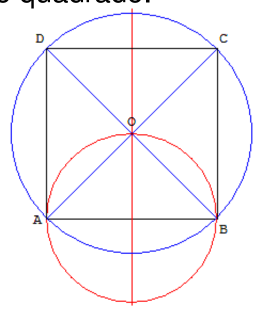
Atividade 8: Construção de um quadrado a partir de um lado e da circunferência circunscrita

Descreva um procedimento que permita construir um quadrado, dados um lado $\overline{AB}$ e a circunscrita a esse quadrado. Justifique sua construção.

Análise da atividade

Método de construção 1:

Criamos um segmento $\overline{AB}$ e construímos a mediatriz m de $\overline{AB}$. A circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ intercepta m no ponto O, que é centro da circunferência circunscrita ao quadrado. Para achar os dois outros vértices, procede-se como segue: Pelo ponto A, construímos a reta r, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Nomeamos de D, o ponto de intersecção da reta r e a circunferência circunscrita ao quadrado. Pelo ponto B, construímos a reta s, perpendicular ao $\overline{AB}$. Nomeamos de C, o ponto de intersecção da reta s e a circunferência circunscrita ao quadrado.



O quadrilátero ABCD é quadrado procurado, pois, o ponto O está igual distância dos pontos A, B, C e D, e tem um ângulo reto

Método de construção 2:

Usando régua e compasso, construímos a circunferência de centro A e passando por B, a circunferência de centro B, passando por A. A reta que passa pelas intersecções das duas circunferências é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. O centro do quadrado é um dos pontos de intersecção da mediatriz e da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. A circunferência (c) de centro O, passando por A, é a circunferência circunscrita ao quadrado.

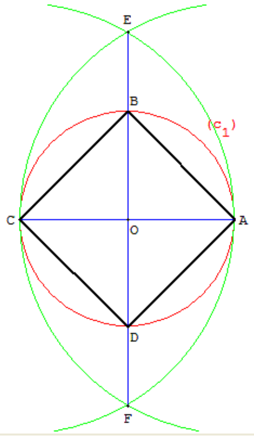
O vértice C é o segundo ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AO}$ e da circunferência circunscrita c. Igualmente, o ponto D é a intersecção da reta BO e da circunferência c.

Atividade 9: Construção de um quadrado, dada uma diagonal

Descreva um procedimento que permita construir um quadrado, dada sua diagonal $\overline{AC}$. Justifique sua construção.

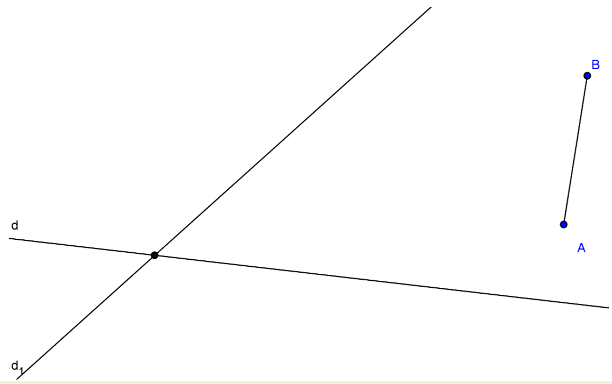
Análise da atividade

Criamos o segmento AC e construímos seu ponto médio O. A mediatriz d de $\overline{AC}$ intercepta a circunferência c de diâmetro $\overline{AC}$ em B e D. os pontos B e D são a igual distância de A e C, portanto AB=BC=CD=DA. O triângulo ABC é retângulo, pois inscrito em uma semicircunferência. Portanto, ABCD é um quadrado, pois é um losango que tem um ângulo reto.



Atividade 10: Construir um paralelogramo cujos dois vértices pertencem a duas retas.

Consideram-se dois pontos A e B e duas retas d e d_1 concorrentes e diferentes da reta AB. Existe um ponto C sobre d_1 e um ponto D sobre d tal que o quadrilátero ABCD seja um paralelogramo? Justifique.



Análise da atividade

Construímos a imagem d´ da reta d pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$. As retas d e d´interceptam-se no ponto C. Depois construímos a imagem d_2 da reta d_1 pela translação de vetor $\overrightarrow{BA}$. As retas d_2 e d interceptam-se no ponto D. Como $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$: o paralelogramo ABCD é a solução do problema.