PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

MARIA LÚCIA TORELLI DORIA DE ANDRADE

Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

MARIA LÚCIA TORELLI DORIA DE ANDRADE

Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

SÃO PAULO

2011

Banca Examinadora

_____

_____

_____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de foto-copiadora ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

"... Não devemos exigir que a ciência nos revele a verdade. Num sentido corrente, a palavra verdade é uma concepção muito vasta e indefinida. Devemos compreender que só podemos visar a descoberta de realidades relativas. Além disso, no pensamento científico existe sempre um elemento poético. A compreensão de uma ciência, assim como apreciar uma boa música, requer em certa medida processos mentais idênticos. A vulgarização da ciência é de grande importância se proceder de uma boa fonte. Ao procurar-se simplificar as coisas não se deve deformá-las. A vulgarização tem de ser fiel ao pensamento inicial. A ciência não pode, é evidente, significar o mesmo para toda a gente. Para nós, a ciência é em si mesma um fim, pois os homens da ciência são espíritos inquisitores. (...) a sociedade torna possível o trabalho dos sábios, alimenta-os. Tem pois o direito de lhes pedir por seu lado uma alimentação digestiva".

Albert Einstein

Dedico este trabalho aos meus pais, Márcia e Adelson, que sempre estiveram do meu lado em todos os momentos, e sempre me apoiaram.
E a minha querida avó Diomar que não esteve presente no final desta conquista, mas com certeza sempre estará do meu lado.

Agradecimentos

Aos meus pais Adelson e Márcia por toda paciência e amor que sempre tiveram comigo e principalmente neste período que me proporcionaram conforto, tranquilidade para chegar ao fim desta pesquisa.

Ao Beto, meu Cassavetes, por me proporcionar em todos os momentos desta pesquisa palavras, gestos, atitudes que me acalmaram, fizeram rir, pensar, repensar e me deram forças para continuar.

A minha avó Diomar que sempre estará comigo com sua alegria e carinho.

A meu avô Filberto por ter me ensinado a gostar de estudar e sempre ir atrás dos meus sonhos.

A minha querida tia Maria José por ser a responsável por eu ter escolhido esta profissão e a gostar tanto da matemática.

Aos meus irmãos Paulo e Fernando que mesmo muitas vezes distantes sempre estarão comigo e me fazem sentir uma pessoa melhor.

As minhas sobrinhas Thayná e Geovana que com suas travessuras e brincadeiras me proporcionaram momentos de alegria para continuar nos momentos mais difíceis.

A Suzana e Seu Roberto, por seu carinho e ajuda nos momentos que precisei.

A amiga Ana Rebeca por estar comigo em todos os bons momentos desta jornada e nos que "surtei" e, por suas valiosas contribuições em meu trabalho. Você sempre terá um lugar especial em meu coração.

Ao amigo Robson, "el cabelo", seu amor pela matemática sempre me inspirou.

Aos colegas do mestrado, Adriana, Aida, Gilson, Carlos Eduardo, Érika, Enéias, Carlos, Graziele, que sempre estiveram comigo dando conselhos e boas risadas.

A colega Marina, sua contribuição foi fundamental para melhora do meu texto.

As minhas amigas Renata e Eliane que mesmo distantes torceram por mim.

A colega Milene por me ajudar nos momentos que precisei e na formatação de meu trabalho.

A minha orientadora Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva (Zezé) por suas valiosas contribuições nesta pesquisa e por me fazer crescer e amadurecer durante todo este processo.

A professora Doutora Marisa da Silva Dias por ter aceitado fazer parte de minha banca e dar contribuições pertinentes a meu trabalho.

Ao professor Doutor Saddo Ag Almouloud por suas contribuições pertinentes no decorrer desta pesquisa e por sua conduta profissional.

A Professora Doutora Ana Maria Martensen Roland Kaleff que contribuiu de forma significativa para a conclusão desta pesquisa, e me mostrou novos caminhos.

A todos os professores do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, por suas valiosas contribuições para minha formação profissional e pessoal.

Aos alunos que participaram desta pesquisa voluntariamente.

A Capes, pela concessão da bolsa de estudos tão importante para meu aperfeiçoamento profissional.

A Deus por me fazer realizar este sonho e estar sempre comigo.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de ensino. Além disso, objetivava que ao resolver as atividades desta sequência, os sujeitos de pesquisa realizassem os tratamentos e conversões dos Registros de Representação Semiótica pertinentes aos objetos matemáticos da Geometria Esférica a serem estudados. Buscamos responder a seguinte questão de pesquisada: *Como uma sequência didática articulando diferentes registros de representação pode avaliar alunos do Ensino Médio na aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica?* Assim, aplicamos junto a dois alunos do Ensino Médio a sequência de ensino. Nos embasamos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como fundamentação teórica dessa pesquisa. A abordagem desta investigação foi qualitativa e, como metodologia adotamos pressupostos da Engenharia Didática. Observando as produções dos sujeitos de pesquisa no decorrer das atividades da sequência, constatamos que esses realizaram as conversões e os tratamentos dos registros de representação semiótica de acordo com Duval (2009), como quando fizeram a conversão do registro em língua natural (enunciado da atividade) para o registro material (bola de isopor), o que os levou a resolver a atividade e compreender o conceito de reta na Geometria Esférica. Nesse sentido, pudemos destacar o registro material de representação semiótica, e inferir que esse contribuiu para a apropriação dos conceitos requeridos por parte dos sujeitos de pesquisa.

Palavras-chave: Geometrias não-Euclidianas. Geometria Esférica. Registro de Representação Semiótica

Abstract

The objective of the current work is to investigate ownership of Spherical Geometry elementary concepts by students in the second year of high school, from a teaching sequence. In addition, it aimed to solve the activities of this sequence, the subjects carry out research treatments and Semiotic Registers Representation conversions relevant to the mathematical Spherical Geometry objects to be studied. We seek to answer the following question: *How a didactic sequence articulating different Registers Representation can evaluate high school students in learning Spherical Geometry concepts?* Therefore, we applied to two high school students teaching sequence. We based it on Raymond Duval's Semiotic Registers Representation Theory and Guy Brousseau's Didactic Situations Theory as theoretical foundation of this research. The research approach was qualitative and, as methodology we adopted Engineering Curriculum assumptions. Watching the subjects research production in the course of the activities sequence, we found out these individuals performed conversions and registers treatments by semiotic representation according to Duval (2009), as well as they did the record conversion in natural language (activity statement) to record material (Styrofoam ball), which led them to solve the activity and understand Spherical Geometry straight line concept. In this sense, we could highlight semiotic representation material record, and infer that it contributed to the concepts ownership required by the research subjects.

Keywords: non-Euclidean Geometries. Spherical Geometry. Semiotic Registers Representation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Registro figural da reta na Geometria Esférica 36

Figura 2 – Quinto Postulado de Euclides 38

Figura 3 – Quadrilátero de Sacheri 39

Figura 4 – Hipóteses de Sacheri 39

Figura 5 - Intersecção de Circunferências Máximas em dois pontos 41

Figura 6 - Distância do ponto A ao B 42

Figura 7 – Superfície Esférica 43

Figura 8 - Plano e Superfície Esférica 44

Figura 9 - Plano tangente à superfície esférica 45

Figura 10 – Plano secante a uma superfície esférica 45

Figura 11 – Plano secante a superfície esférica 46

Figura 12 – Retas Perpendiculares 47

Figura 13 – Arco de circunferência máxima 48

Figura 14 – comprimento do segmento de reta AB 48

Figura 15 – Ângulo Esférico 49

Figura 16 – Ângulo Diedral 49

Figura 17 – Triângulo Esférico 50

Figura 18 – Medição da circunferência da Terra por Eratóstenes 52

Figura 19 – Mapa Mundi de Ptolomeu 52

Figura 20 – Planisfério baseado na Projeção de Mercator 53

Figura 21 – latitude de um ponto A 54

Figura 22 – longitude de um ponto A 55

Figura 23 – Representação do segmento SF ou FS 61

Figura 24 – Representação do Triângulo SOF 61

Figura 25 – Representação de um arco de circunferência 62

Figura 26 – Protocolo do aluno Paulo referente ao triângulo que representa o problema da atividade 01 62

Figura 27 - Protocolo do aluno Paulo referente a circunferência que representa o problema da atividade 01 63

Figura 28 – Representação do menor caminho entre dois pontos 65

Figura 29 – Representação da intersecção de duas circunferências máximas 65

Figura 30 – Protocolo da aluna Márcia referente a infinitas retas no plano que passam por um ponto 66

Figura 31 – Protocolo do aluno Paulo referente a infinitas linhas traçadas por um ponto bola de isopor 66

Figura 32 – Protocolo do aluno Paulo referente à existência do menor caminho entre dois pontos em uma superfície esférica 67

Figura 33 – Representação dos Pólos Terrestres 69

Figura 34 – Representação da latitude de um lugar L 70

Figura 35 – Representação da longitude de um lugar L 71

Figura 36 - Protocolo de Paulo e Márcia referente à latitude e longitude da cidade e do forte ... 71

Figura 37 – Representação do Equador, Paralelos e Meridianos 73

Figura 38 - Protocolo da aluna Márcia referente ao arco de circunferência e o ângulo central .. 76

Figura 39 – Protocolo referente ao registro produzido por Paulo 78

Figura 40 – Protocolo do aluno Paulo de uma régua esférica 78

Figura 41 – Protocolo referente ao registro realizado por Márcia 79

Figura 42 – Protocolo da aluna Márcia de uma régua esférica 79

Figura 43 – Representação em perspectiva de duas circunferências máximas 81

Figura 44 – Protocolo da aluna Márcia referente aos pontos de intersecção e arcos 82

Figura 45 – Protocolo do aluno Paulo referente ao registro figural e simbólico do ângulo no plano 83

Figura 46 – Resposta dada pelos alunos a questão 8 84

Figura 47 – Protocolo do aluno Paulo referente à representação figural da circunferência 84

Figura 48 – Protocolo do aluno Paulo referente a um triângulo esférico com as medidas dos ângulos internos 87

Figura 49 – Protocolo do aluno Paulo referente a um triângulo plano 87

Figura 50 – Protocolo do aluno Paulo referente a um triângulo esférico 88

Figura 51 – Protocolo do aluno Paulo referente a circunferência máxima desenhada por Paulo 89

Figura 52 – Protocolo do aluno Paulo referente ao registro figural do triângulo esférico feito pelos alunos 90

Figura 53- Protocolo referente a representação da reta tangente feita pelo aluno Paulo..... 93

Figura 54 – Protocolo da aluna Márcia referente à representação figural do triedro convexo.... 94

Figura 55 – Protocolo do aluno Paulo referente à representação figural do triedro convexo 94

Figura 56 - Protocolo do aluno Paulo na resolução do item (b)..... 95

Figura 57 – Resposta dada pelos alunos a questão 11..... 96

Figura 58 – Protocolo do aluno Paulo referente ao triângulo esférico PFS 100

Figura 59 – Protocolo do aluno Paulo referente ao registro figural das latitudes ϕ_F e ϕ_S..... 101

Figura 60 – Protocolo do aluno Paulo referente às longitudes λ_F e λ_S 101

Figura 61 – Protocolo do aluno Paulo referente ao triângulo esférico..... 102

Lista de Quadros

Quadro 1 - Registros de Representação Semiótica para o segmento de reta 35

Quadro 2 – Objetivos das questões referentes ao questionário aplicado aos alunos..... 57

Quadro 3 – Cronograma das atividades realizadas pelos alunos 59

Sumário

Introdução 15

Capítulo 1: Problemática 19

1.1 Pesquisas referentes às Geometrias Não-Euclidianas 19

1.2 Delimitação do Problema 23

1.3 Metodologia e Procedimentos 25

1.4 Referencial Teórico 28

1.4.1 Teoria das Situações Didáticas 28

1.4.2 Registros de Representação Semiótica 32

Capítulo 2: Estudos Preliminares do Objeto Matemático 37

2.1 Breve Estudo a respeito das Geometrias não-Euclidianas 37

2.2 Noções Matemáticas Elementares de Geometria Esférica 43

2.3 Algumas noções a respeito de elementos Geográficos 50

Capítulo 3: A experimentação 57

3.1 Análise do Questionário 57

3.2 Sujeitos 58

3.3 Descrição da Aplicação da Sequência Didática 58

3.4 Análise dos Resultados 59

Considerações Finais 107

Referências 111

Apêndice A – Questionário 115

Apêndice B – Sequência de Ensino 117

Introdução

Ao trabalharmos em nosso TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) de Graduação, intitulado “Da Geometria de Euclides ao Hiperespaço de Einstein: Uma nova visão da Geometria além do 5º Postulado” tivemos a oportunidade de constatar que a Geometria Plana é uma geometria, entre muitas, que o professor pode trabalhar em sala de aula.

A atuação como professores da rede pública do Estado de São Paulo, no Ensino Fundamental e Médio, permite-nos perceber que a única Geometria que os alunos possuem algum conhecimento é a Geometria Euclidiana. O que nos leva à questão: Qual a importância do ensino de outras Geometrias, mais especificamente a Geometria Esférica se não estão presentes no currículo e nos livros didáticos?

Uma das justificativas para esta questão se encontra nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) os quais justificam a importância do ensino de outras Geometrias, aos adolescentes:

> [...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma **pluralidade de modelos geométricos**, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 24, grifo nosso).

Os PCN de matemática (BRASIL, 1998, p. 24) também apontam entre os objetivos do pensamento geométrico, a exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a “resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo [...]”. Além disso, os PCN do Ensino Médio defendem que:

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas podem ser desenvolvidas com trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1999, p. 257).

Dessa maneira, indo ao encontro das orientações dos PCN em relação ao pensamento geométrico, acreditamos que este pode ser estendido ao ensino da Geometria Esférica.

No entanto, encontramos uma preocupação inicial com o desenvolvimento de conhecimentos voltados à Geometria Esférica, na Proposta Curricular para o ensino de matemática do 1º grau, 4ª edição, de 1991, do estado de São Paulo. São sugestões de conteúdos que envolvem elementos de uma superfície esférica, a serem desenvolvidos com a 5ª série, a partir de:

> [...] cortes diversos em bolas de isopor ou de colagem de tiras estreitas de fitas adesivas, e cores diversas, na superfície dessas bolas, concretizar as noções de círculos máximos e circunferência máximas, respectivamente, em esferas e superfícies esféricas, e o fato de que nem todas as circunferências que podem ser traçadas numa superfície esférica, são máximas. (SÃO PAULO, 1991, p. 88).

Percebemos que, ao sugerir o manuseio de materiais manipulativos por parte dos alunos, tanto a proposta curricular quanto nosso trabalho, corroboram com o pensamento de Lénárt (1996)[1] que acredita na exploração dos conteúdos de Geometria Esférica por meio de material manipulativo. Para o autor, o estudante deverá ser estimulado a experimentar e a investigar por si mesmo o objeto matemático em questão, a partir de atividades investigativas, ou seja, não triviais, em pequenos grupos, ao afirmar que os alunos aprendem melhor quando se comunicam a respeito do que aprenderam. Tal prática possibilita a construção de ideias e a colaboração entre eles, provocando uma reflexão sobre o que se aprende.

Outro autor que também aborda a temática das Geometrias não-Euclidianas é Coutinho (2001), que defende o seu estudo como uma forma de relacionar a Geometria a um campo atual e ativo de pesquisa científica, por meio de uma compreensão que vai além das ideias de Euclides. Dessa forma defendemos a Geometria Esférica, como um tema que

[1] Istvan Lénárt – autor do livro "Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere". Este livro apresenta uma sequência de atividades investigativas comparando a Geometria Plana com a Esférica.

visa à interação entre alguns campos do conhecimento, tais como: Geometria, Trigonometria, Física, Geografia, História.

Essa compreensão também é defendida pelas autoras Martos (2008) que propôs a utilização de conceitos de Geometria Esférica na 8ª série do Ensino Fundamental e a necessidade de repensar o ensino de Geometria com o papel que lhe cabe na Educação Matemática, e Bonete (2000), que estudou as Geometrias Não-Euclidianas em cursos de licenciatura ressaltando que:

> [...] é o fato que o conhecimento das Geometrias Não-Euclidianas pode proporcionar aos futuros professores um melhor preparo para que possam atuar no ensino fundamental e médio com a disciplina de matemática e, em especial, com o ensino da geometria. Tal conhecimento permitirá a melhoria da qualidade do ensino da geometria euclidiana e possibilitará também a inclusão dessas geometrias nesses níveis de ensino, uma vez que, com esse conhecimento não terão a geometria euclidiana como a única geometria possível e verdadeira, mas como, uma das possíveis e verdadeiras. (BONETE,2000, p.229).

Sendo assim, nosso objetivo com esta pesquisa é investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de ensino e permitir que, ao resolver as atividades propostas, os alunos realizem tratamentos e conversões de Registros de Representação Semiótica pertinentes ao objeto a ser estudado.

Deste modo, encontramos nossa fundamentação teórica na teoria de Registro de Representação Semiótica[2], pois entendemos que o aluno ao articular diferente registros, terá condições de compreender as situações propostas no processo de aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica. Portanto, aprender uma nova Geometria não significa deixar de ensinar Geometria Euclidiana, ao contrário, significa resgatá-la, para a apreensão de conceitos em Geometria Esférica. E ainda buscamos em Brousseau, aportes teóricos que têm como foco central de estudo a situação didática na qual são apresentadas interações estabelecidas entre professor, aluno e o saber matemático, que propiciem ao aluno um conhecimento relacionado ao processo de sua evolução como ser humano.

Escolhida nossa fundamentação teórica, partimos para elaboração da sequência de atividades que seria desenvolvida com os alunos do Ensino Médio. Durante essa elaboração, mudanças e ajustes foram realizados a fim de que ela pudesse nos fornecer

[2] Teoria desenvolvida por Raymond Duval, que será abordada no capítulo 1.

dados que dessem elementos para responder à questão de nossa pesquisa. Partimos, então, para a aplicação da sequência que propiciou a coleta e análise de dados. Apresentamos agora a estrutura do trabalho.

No primeiro capítulo, mostraremos pesquisas realizadas que abordaram o mesmo tema e apresentaremos os referenciais teóricos que darão suporte à nossa pesquisa: a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Ainda neste capítulo, apresentaremos nossa questão de pesquisa, os objetivos que pautarão nosso trabalho, além da metodologia adotada.

No segundo capítulo, faremos um breve histórico a respeito da Geometria Esférica, objeto de nosso estudo. Além disso, apresentaremos algumas noções matemáticas elementares de Geometria Esférica e um recorte histórico da Cartografia.

No terceiro capítulo, abordaremos a elaboração de um estudo exploratório e a aplicação e análise da sequência didática para alunos do 2º ano do Ensino Médio, à luz de nossa fundamentação teórica.

Por fim, apresentaremos nossas considerações finais, buscando responder nossa questão norteadora da pesquisa, constatar se os objetivos foram ou não atingidos e, finalmente, estabelecer perspectivas para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Capítulo 1: Problemática

Neste capítulo, apresentaremos alguns estudos relacionados com nosso tema, a questão de pesquisa, o objetivo, as hipóteses e os procedimentos metodológicos que delinearão a mesma.

1.1 Pesquisas referentes às Geometrias Não-Euclidianas

Nesta parte do trabalho fizemos um levantamento de pesquisas que tratam de Geometrias Não-Euclidianas. Apresentaremos as dissertações de Brito (1995), Souza (1998) e Bonete (2000) que apontaram em seus trabalhos estudos histórico-pedagógicos, Martos (2002), Pataki (2003) e Reis (2006) que destacaram o uso de atividades matemáticas em Geometria Esférica e, finalmente, Franca (2007) que relatou como o quinto postulado de Euclides foi abordado em duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio.

Brito (1995) apresentou um estudo histórico-pedagógico na forma de um diálogo hipotético entre professora e alunos de um curso de licenciatura em matemática, na disciplina referente às Geometrias-Não-Euclidianas. O eixo central de seu estudo foram os contextos históricos em que surgiram as Geometrias Não-Euclidianas, nos quais destacou as reconstituições racionais da história que não convinham para alcançar seu objetivo, já que além das críticas a elas endereçadas, também colocavam em segundo plano os fatores externos no processo de produção do conhecimento matemático. Sendo assim, buscou as relações entre o discurso matemático e os de outros campos do saber, e, também, entre esses discursos e campos de práticas não discursivas. Para a autora o estudo de outras Geometrias, que não a euclidiana, pode possibilitar a superação do senso comum que as pessoas têm sobre a Geometria, e proporcionar ao futuro professor estabelecer ligações entre figuras, propriedades e também sistemas axiomatizados.

Souza (1998) analisou o quinto postulado de Euclides, também conhecido como postulado das paralelas, sob três pontos de vista: o matemático, o histórico e o qualitativo. Para isto, buscou investigar o conhecimento dos professores a respeito deste postulado, analisando a influência dos livros didáticos no ensino da Geometria e a importância das Geometrias Não-Euclidianas para o mundo atual. A autora realizou atividades a partir de

situações-problema, com professores de graduação e da rede pública, nos quais foram abordados assuntos como: o comprimento de curvas sobre superfícies não-planas, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo em uma superfície esférica e comparação intuitiva entre áreas de figuras sobre as superfícies plana, elíptica e hiperbólica. Tais atividades permitiram à autora concluir que estes professores ainda viam a Geometria euclidiana como a única forma de descrever a realidade e que os conteúdos matemáticos que estes possuíam e os quais seriam usados nas demonstrações das atividades propostas não estavam suficientemente consolidados. Ressaltou que uma das razões para se ensinar as Geometrias Não-Euclidianas é o avanço tecnológico e que muitas das aplicações da Física estão baseadas nestas novas Geometrias. Apontou, ainda, a Geometria Euclidiana como promotora de uma série de suposições práticas, mas não todas, visto que a terra não é plana.

Bonete (2000) tinha como objetivo de sua pesquisa fazer uma reflexão e discutir o ensino das Geometrias Não-Euclidianas em cursos de licenciatura. Para isso, realizou no curso de licenciatura de Ciências, em diferentes salas de aula, experiências de investigação, com questões a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo. A autora concluiu que o estudo das Geometrias Não-Euclidianas pode proporcionar aos futuros professores mudanças nas concepções de verdades matemáticas, uma visão mais ampla dos conhecimentos geométricos euclidianos e não-euclidianos e uma compreensão filosófica desses conhecimentos. Concluiu, também, que o conhecimento das Geometrias Não-Euclidianas pode fazer com que futuros professores tenham um melhor preparo para atuar no ensino básico de Geometria, além de destacar que a Geometria de Euclides não deveria ser substituída pelas Geometrias Não-Euclidianas no ensino e sim complementadas por estas outras Geometrias, constatando a Geometria de Euclides não como a única possível, mas sim, uma das possíveis e verdadeiras.

Temos ainda Martos (2002) cuja pesquisa teve como objetivo proporcionar o ensino e a aprendizagem de Geometria Esférica, por alunos de uma 8ª série, da rede pública. A autora apresentou uma proposta didática com fichas de trabalho envolvendo situações-problema que visavam à articulação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica. Martos, em suas considerações finais, destacou que o trabalho pedagógico com a Geometria Esférica proporcionou aos alunos vislumbrar sua inserção no mundo em que vivem. E os conceitos abordados nas fichas de trabalho, o uso de materiais manipulativos, como bolas de isopor, bem como a discussão em grupo permitiram aos alunos a

apropriação dos conceitos referentes a esta Geometria abordada. Apontou, ainda, que cabe aos professores avançar na busca de novos conhecimentos, trabalhando para desenvolver não somente as potencialidades dos estudantes, mas também seu espírito crítico e sua autonomia.

Já Pataki (2003), propôs a professores da rede estadual de São Paulo uma sequência didática envolvendo a interdisciplinaridade entre a Geometria Esférica e a Geografia. Esta sequência tinha como objetivo proporcionar aos professores envolvidos reflexões e questionamentos a respeito de alguns aspectos do ensino da Geometria esférica. Pataki investigou como uma sequência de ensino pode possibilitar a apropriação de conceitos de Geometria Esférica e propiciar ao educador a reelaboração do seu pensar. Inferiu que a sequência de ensino proposta pareceu consistente e coerente, pois proporcionou a relação entre a teoria/experimentação finalizada e a validação/institucionalização dos saberes envolvidos nas atividades propostas. A autora ainda percebeu que os conhecimentos/saberes adquiridos levaram os professores a manifestar um olhar mais amplo do mundo e afirmou que sua pesquisa mostrou a possibilidade do professor introduzir os conteúdos de Geometria Esférica abordados em seu plano de aula, articulando teoria e prática, ensino e aprendizagem, interdisciplinaridade e contextualização.

A pesquisa de Reis (2006) tinha como objetivo estudar o uso de materiais manipulativos, tais como: esferas de isopor, o software Cinderella e caleidoscópios, no ensino e aprendizagem de Geometria Esférica, para dez alunos do curso de graduação em licenciatura de Matemática. A autora no estudo dos dados coletados percebeu que a utilização das esferas de isopor para representações geométricas podem ser menos precisas do que o uso do software, mas a manipulação através do tato, além da visão, mostrou ser um aspecto importante nas investigações e explorações dos alunos pesquisados. Também constatou que o uso do software Cinderella, auxiliou a verificação de propriedades conhecidas e a descoberta de outras. Outro diferencial está na possibilidade de movimentar os objetos geométricos depois da sua construção. Já os caleidoscópios possibilitaram, segundo a autora, a visualização de duas tesselações esféricas utilizando padrões geométricos construídos. Assim, concluiu que o uso de materiais manipulativos no ensino e aprendizagem de Geometria Esférica proporcionou momentos de experimentação, conjectura, partilha e discussão, porém não colaborou de forma significativa com atividades que envolviam demonstrações. Verificou ainda que o estudo de conceitos e

propriedades básicas de Geometria Esférica pode auxiliar o futuro professor na busca por propostas alternativas para o ensino de Geometria.

E por fim, Franca (2007), em seu trabalho examinou como o conceito de retas paralelas é abordado pelas duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio, mais utilizadas em 2006, nas escolas públicas brasileiras, segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento Escolar (FNDE). São elas: Matemática Aula por Aula de Barreto e Silva (2003) e Matemática de Dante (2004). Em seu estudo, relatou como o quinto postulado de Euclides é o fator fundamental para o desenvolvimento lógico-histórico e para a criação das geometrias não-euclidianas, e analisou até que ponto as constatações encontradas são influenciadas por concepções euclidianas, isto é, o quanto cada constatação é decorrente deste postulado. A análise incluiu, também, os desenhos e fundamentou-se na conversão de registros semióticos proposta por Duval. Franca, diante das constatações mapeadas em seu estudo, concluiu que as menções referentes às Geometrias não-Euclidianas são meramente ilustrativas quanto ao seu valor histórico para o desenvolvimento da Matemática e das Ciências. Ressalta ainda, que os livros didáticos analisados reconhecem e fazem menção às Geometrias não-Euclidianas como determinantes para o avanço das ciências exatas no século XX, porém nenhuma incorporação de seus conteúdos é apresentada como atividade didática que venha levar o aluno a ter qualquer noção relativa a esses novos conhecimentos. Ainda segundo o pesquisador, em relação aos registros semióticos, estes, como os apresentados nos livros didáticos analisados, possivelmente, levarão os alunos do Ensino Médio a utilizarem apenas registros euclidianos.

Como a opção de nosso estudo é investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de ensino e, permitir que, ao resolver as atividades propostas os alunos realizem os tratamentos e conversões propostos por Duval, acreditamos que a revisão bibliográfica forneceu subsídios para estabelecer os princípios norteadores desta pesquisa.

Assim, a relevância de nossa pesquisa para a área de Educação Matemática, apresenta-se por procurar avançar as discussões a respeito do ensino e aprendizagem da Geometria Esférica. Nosso trabalho se aproxima principalmente de Martos (2002) e Pataki (2003). Diferencia-se da primeira por tratar do mesmo assunto matemático com alunos do Ensino Médio e não do Ensino Fundamental e, da segunda, por trabalhar com alunos e não professores.

Sendo assim na próxima sessão passaremos a delimitar nosso problema de pesquisa.

1.2 Delimitação do Problema

A partir da revisão bibliográfica realizada, percebemos o interesse de alguns pesquisadores com o ensino e aprendizagem de Geometrias não-euclidianas, mais especificamente com a Geometria Esférica. Estes estudos apontaram contribuições para nossa pesquisa como: perceber a importância histórica das Geometrias Não-Euclidianas; definir os sujeitos de pesquisa, visto que nenhuma trabalhou com alunos do ensino médio; aproximar nossa pesquisa de trabalhos como de Martos (2002) e Pataki (2003), que por meio de situações-problema ou sequências de ensino ressaltaram que é possível trabalhar com conteúdos de Geometria Esférica em sala de aula; e consolidar a escolha de nosso referencial teórico, pela Teoria de Registro de Representação Semiótica, proposta por Duval, já que nenhum estudo faz uso desta teoria para analisar as produções realizadas pelos alunos do Ensino Médio mediante a uma sequência de ensino.

Indo ao encontro dos estudos expostos, encontramos pesquisadores como Kaleff (2007), que mencionam que nas últimas duas décadas, surgiram oportunidades para a inserção de conteúdos provenientes das diversas Geometrias, Euclidiana e não-Euclidiana, nos conhecimentos geométricos escolares voltados à formação de alunos para este século.

Para que estes conteúdos sejam trabalhados em sala de aula, acreditamos que os alunos têm potencial para desenvolver habilidades matemáticas que possibilitem a solução de atividades trabalhadas de forma diferente das que usualmente estão acostumados, desde que este trabalho vise à interação entre alunos, ou seja, vá ao encontro do que aponta Almouloud (2007), quando explica:

> [...] os processos de aquisição de conhecimentos não são unicamente situados do lado dos sujeitos individualmente, mas da classe; a aquisição deve ser o resultado de um processo de adaptação dos sujeitos às situações que o professor organizou, nas quais as interações com os outros alunos terão um papel importante. (ALMOULOUD, 2007, p. 25).

Entendemos ainda, que o desenvolvimento do conhecimento geométrico pode ser trabalhado com os alunos sob novas abordagens, mobilizando conhecimentos já apreendidos, para assim desenvolver uma percepção de mundo reformulada. A este

respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) defendem que:

> [...] os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico [...]; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões. (BRASIL, 1999, p. 265-266).

Ressaltamos que o trabalho com a Geometria se faz necessário para compreensão e construção de modelos que interpretem questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Corrobora com esta opinião o PCNEM (BRASIL, 1999, p. 257), quando ressalta:

> [...] perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para leitura do mundo através dos olhos das outras ciências [...].

Nesse sentido, entendemos que trabalhar com a Geometria Esférica pode ser um fator de estímulo à aprendizagem dos alunos, pois concordamos com Lénárt (1996), quando afirma que:

> [...] Dentro da matemática, a Geometria Esférica é amplamente utilizada em sólidos geométricos, trigonometria, topologia, cálculo infinitesimal, geometria projetiva e diferencial, geometria finita, teoria dos números complexos, e a teoria das funções. [...] a geometria esférica tem muitas aplicações na física clássica e moderna, química orgânica e inorgânica, cristalografia, ciências da terra, astronomia, navegação, desenho artístico e técnico, design industrial, engenharia e muitas outras ciências. (tradução nossa)[3] (LÉNÁRT, 1996, p. viii).

Desta forma, entendemos que, com a realização de nossa pesquisa, teremos como objetivo investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de ensino e; permitir que, ao

[3] Em inglês lê-se: "Within mathematics, spherical geometry is widely used in solid geometry, trigonometry, topology, infinitesimal calculus, projective and differential geometry, finite geometries, complex number theory and the theory functions.[…], spherical geometry has many applications in classical and moderny physics, inorganic and organic chemistry, crystallographi, earth sciences, astronomy, navigation, artistic and technical drawing, industrial design, engineering, and many other sciences.

resolver as atividades propostas, os alunos realizem os tratamentos e conversões dos Registros de Representação Semiótica pertinentes ao objeto a ser estudado.

Dessa maneira, procuramos responder à seguinte questão de pesquisa:

Como uma sequência didática articulando diferentes registros de representação pode avaliar alunos do Ensino Médio na aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica?

Para respondermos essa questão, escolhemos uma metodologia, partindo do pressuposto de que a sequência de ensino contribuirá para a apreensão por parte dos alunos de conceitos de Geometria Esférica, e acreditamos que com este trabalho, esta se dará de forma consistente.

Esperamos ainda que os alunos atuem no processo de construção de novos conhecimentos matemáticos e articulem os Registros de Representação Semiótica, pois concordamos com Duval (2009), quando explica que a compreensão em Matemática, supõe a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica.

Para responder nossa questão de pesquisa, bem como atingir nossos objetivos, apresentaremos, no que segue, a metodologia e os procedimentos adotados para a realização desta pesquisa.

1.3 Metodologia e Procedimentos

Nossa proposta de pesquisa tem como instrumento uma sequência de ensino envolvendo conceitos de Geometria Esférica. O método de investigação será a pesquisa qualitativa que, de acordo com Bicudo (2006), é o modo de pesquisar que é dado: "[...] pela intenção de atingir aspectos do humano sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de método previamente definidos e, portanto, sem ficar preso a quantificadores e aos cálculos decorrentes". (BICUDO, 2006, p. 107).

A pesquisa qualitativa não visa a enumerar ou medir eventos. Seu foco de interesse é amplo, pois dela parte a obtenção de dados descritivos com contato direto e interativo do pesquisador com os sujeitos e objeto de estudo.

Já a construção e análise das atividades nesse trabalho terão por base os pressupostos da Engenharia Didática, que segundo Artigue (1996, p. 196) se caracteriza "por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

Para Artigue (1996) a Engenharia Didática também se caracteriza pelo registro dos estudos sobre o caso a ser estudado e pela validação interna que se baseia na confrontação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*, ressaltando a singularidade da Engenharia Didática em relação a outros métodos de pesquisa.

Nesse sentido, a autora distingue quatro fases para uma Engenharia Didática: análises prévias ou preliminares; construção e análise a *priori* das situações didáticas da engenharia; experimentação; análise a *posteriori* – validação. Ainda para autora pode-se distinguir na Engenharia Didática dois níveis de engenharia a micro engenharia que envolve pesquisas locais de um determinado assunto levando em conta a complexidade da sala de aula e as pesquisas de macro engenharia que permitem relacionar os resultados das pesquisas de micro engenharia, e outros fenômenos ligados ao processo de ensino e aprendizagem. Em nossa pesquisa, iremos adotar o nível de micro engenharia, por termos como meta específica o estudo de alguns conceitos elementares da Geometria Esférica na sala de aula.

Na primeira fase da pesquisa, as análises preliminares, se apóiam em três dimensões, conforme a autora explica: epistemológica que visa à análise histórica e epistemológica dos conteúdos abordados, na seção que trata do recorte histórico a respeito da Geometria Esférica; didática que está relacionada com o sistema de ensino e pontos de vista adotados, contemplando a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e Médio, publicações acerca de Geometria Esférica, como livros didáticos e dissertações na área da Educação Matemática relativas à Geometria Esférica, com intuito de obter subsídios para a elaboração da sequência didática; e por fim, a dimensão cognitiva que está associada a características cognitivas dos alunos, tais como: dificuldades, procedimentos, concepção dos alunos que envolvem o estudo de Geometria.

Após conceber as análises preliminares, inicia-se a segunda fase da engenharia, isto é, a construção e análise a *priori* das atividades propostas, conforme Artigue (1996). Em nossa pesquisa, a sequência didática será baseada em atividades desenvolvidas por Lénárt (1996), Pataki (2003) e Santos (2009). Para Brousseau (2008) a análise a *priori* esclarecerá o que poderá ocorrer com os saberes em jogo quando a situação é colocada em funcionamento. Alguns elementos de uma análise a *priori*, de acordo com Artigue são: objetivo da atividade; análise dos conhecimentos necessários para a resolução da atividade; possíveis estratégias esperadas dos alunos na resolução da atividade; possíveis dificuldades que encontrarão nas atividades.

Na terceira fase, de experimentação, aplicamos a sequência de ensino que concebemos aos alunos. Segundo Artigue é importante, nesta fase, respeitar as escolhas feitas na análise *a priori*, a fim de evitar o fracasso da engenharia. Porém, cabe ressaltar que, após cada sessão, podemos revisar e corrigir as escolhas feitas, a partir de uma breve análise a *posteriori*.

Na análise a *posteriori* e validação, quarta fase da Engenharia Didática, interpretamos as informações coletadas durante a experimentação que nos levarão a validar nossas hipóteses de pesquisa. Esta análise é baseada nos protocolos de observação, na análise a *priori*, e é feita para vincular os fatos observados com os objetivos definidos a priori, a partir do referencial teórico abordado.

Além disso, adotamos alguns aportes do estudo de caso como estratégia de pesquisa, por entendermos ser a mais adequada para nossa investigação e corresponder ao que assinala Ponte (2006) quando escreve "um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, uma disciplina, um sistema educativo". Ainda para o autor, o estudo de caso tem por objetivo:

> Compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse. (PONTE, 2006, p. 2).

Ponte ressalta ainda que o objetivo desse tipo de pesquisa não é o de formular generalizações, e sim produzir conhecimento acerca do objeto a ser estudado. Corroborando com Ponte, Yin (2005) acrescenta que os estudos de caso não fazem uma generalização em extensão, mas para a teoria; ou seja, auxiliam a fazer surgir novas teorias ou a confirmar ou não as teorias existentes.

Dentro da abordagem escolhida, nosso procedimento metodológico foi a aplicação de um questionário (Apêndice A) para identificar o perfil dos alunos. Tal questionário, com questões que puderam nos fornecer os conhecimentos prévios dos alunos referentes à Trigonometria, estudadas no Ensino Básico, teve a finalidade de auxiliar-nos nas análises das atividades propostas na sequência de ensino. Seguimos as recomendações de Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 117) quando aponta: "questionários podem servir como fonte

complementar de informações, sobretudo na fase inicial e exploratória da pesquisa. Além disso, eles podem ajudar a caracterizar e a descrever os sujeitos do estudo.”

Destacamos que os dados foram coletados mediante as observações feitas pela pesquisadora com gravações em áudio e vídeo, realizadas durante todos os encontros, com a intenção de suprir possíveis dúvidas das observações efetuadas na coleta de dados.

Conhecidos nosso problema de pesquisa e a metodologia adotada, no que segue, apresentaremos a base teórica de nossa pesquisa.

1.4 Referencial Teórico

Neste item, apresentamos as teorias que darão suporte para nossa pesquisa: a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (2009).

1.4.1 Teoria das Situações Didáticas

A teoria desenvolvida por Guy Brousseau pesquisador francês da Universidade de Bordeaux, busca criar a interação entre os alunos, o saber e o meio no qual a aprendizagem se desenvolve. Tem, como foco central de estudo a situação didática em que são apresentadas interações estabelecidas entre professor, aluno e o saber matemático.

Brousseau (2008, p.19) define situação como “o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável”.

Essa interação torna-se didática, segundo o autor se, e somente se, um dos sujeitos tiver a intenção de modificar o que o outro conhece por meio de decisão, vocabulário, argumentação e referências culturais. Logo, as situações didáticas descrevem as atividades do professor e do aluno que proporcionam aos alunos um conhecimento relacionado com a construção do saber matemático.

Almouloud (2007) destaca que três hipóteses fundamentam a Teoria das Situações Didáticas:

1ª) a aprendizagem do aluno decorre de processos de adaptação, desequilíbrios, contradições, mediante situações problemas;

2ª) a aquisição do conhecimento matemático pelo aluno ocorrerá se houver intenção didática, ou seja, o professor deverá criar e organizar um meio que proporcione a aprendizagem do conhecimento matemático;

3ª) o meio e as situações didáticas precisam estar engajadas com os saberes matemáticos presentes no processo de ensino e de aprendizagem.

O autor ainda ressalta que como parte essencial da situação didática temos a *situação adidática*, definida como uma situação em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor com a intenção de levar o aluno, por iniciativa própria, a adquirir conhecimentos matemáticos.

Brousseau explica que existirá situação adidática quando do momento em que:

> [...] o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (BROUSSEAU, 2008, p. 35).

O autor ainda ressalta as seguintes características para uma situação adidática:

1ª) ao pensar em uma resposta inicial acerca das situações-problema propostas, o aluno buscará estratégias para resolvê-las, porém as respostas encontradas nem sempre serão as desejadas.

2ª) as atividades são escolhidas com o intuito de fazer o aluno adquirir novos conhecimentos justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos por necessidade própria e não imposta pelo professor ou pela escola.

3ª) por meio de atividades propostas pelo professor, o aluno assume o papel de ator principal da construção do conhecimento matemático.

De acordo com Brousseau (2008), para analisar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, a Teoria das Situações Didáticas fundamenta-se em quatro situações, em que o saber assume funções diferentes e o aluno não tem a mesma relação com o saber. Estas são: situação de ação, formulação, validação e institucionalização. Nas situações de ação, o professor propõe um problema ao aluno de modo que este possa agir, refletir sobre o resultado obtido e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do professor. Nas situações de formulação, em linguagem natural ou matemática o aluno troca

informações com uma ou várias pessoas, que envolvem repertórios lingüísticos (sintaxe e vocabulário) variados. Nas situações de validação, o aluno submete o modelo criado por ele ao julgamento de um interlocutor. Nessa fase, cada um pode posicionar-se em relação a um enunciado e o aluno, não concordando, pode pedir uma demonstração ou exigir que o outro justifique suas declarações. E, por fim, nas situações de institucionalização, o saber é fixado explicitamente pelo professor e torna-se saber oficial, que deverá ser utilizado pelos alunos na resolução de problemas. Brousseau destaca que o papel do professor nesta fase é fundamental, pois, se feita muito cedo, a institucionalização pode interromper a construção do saber, causando dificuldades para o professor e o aluno; se feita tardiamente, reforça interpretações incorretas, atrasa a aprendizagem e dificulta aplicações.

A evolução dessas fases não ocorre de forma linear, pois estão estritamente relacionadas, e fazem com que o aluno tenha responsabilidade de gerenciar sua relação com o saber nas situações de ação, formulação e validação; e, o professor, seja responsável pela institucionalização do saber. A este respeito Brousseau (2008, p.31-32), diferencia saber de conhecimento. Para ele:

> Os **conhecimentos** são meios transmissíveis (por imitação, iniciação, comunicação, etc.), ainda que não necessariamente demonstráveis, de controlar uma situação e obter dela um resultado determinado, de acordo com uma expectativa e uma exigência social. O **saber** é o produto cultural de uma instituição que tem como objetivo identificar, analisar e organizar os conhecimentos, a fim de facilitar sua comunicação. (grifo nosso).

Para o autor, o saber é construído, perpassando pelas fases de ação, formulação, validação, para depois ser institucionalizado e dessa maneira, quando nos referirmos ao saber estaremos de acordo com o ponto de vista do autor.

Outro aspecto que permeia uma situação didática e as relações que se estabelecem entre o professor e seus alunos é a noção de *Contrato Didático*, para Brousseau, é entendido como o conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos e vice-versa, ou seja:

> Uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. (BROUSSEAU, 1986, apud ALMOULOUD, 2007, p. 89).

De acordo com Almouloud (2007), especificamente, o Contrato Didático tem como foco a aquisição de saberes pelos alunos, e este aspecto é o que o distingue do contrato pedagógico, pois este último privilegia as relações sociais, regras e convenções do ambiente escolar, e não coloca em jogo o saber que evolui e se transforma.

Em relação ao funcionamento do Contrato Didático, o autor observa que este depende de diferentes escolhas pedagógicas, do tipo de trabalho apresentado aos alunos, das avaliações propostas, entre outros. E ressalta que um Contrato Didático mal administrado pode gerar dificuldades para a aquisição de novos conhecimentos matemáticos. Para Brousseau:

> [...] o professor não pode se comprometer a "fazer o aluno entender" um conhecimento e, muito menos, fazer com que este se produza: ninguém sabe como "se faz" uma matemática nova e, menos ainda, como se pode "fazer com que seja feita" de maneira acertada. (BROUSSEAU, 2008, p. 73).

Segundo o autor, a qualquer momento no processo de ensino e aprendizagem, o Contrato Didático pode ser rompido e quando isto ocorre, deverá haver uma renegociação entre aluno, professor e o saber, que pode provocar aspectos positivos ou negativos para a aprendizagem.

Outro aspecto apresentado na Teoria das Situações Didáticas se refere aos conhecimentos construídos pelos alunos e que eventualmente podem gerar dificuldades, ou erros, na ocasião da aprendizagem de novos conhecimentos. O erro para Brousseau:

> [...] não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso [...], mas o efeito de um conhecimento anterior que tinha o seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles se constituem em obstáculos. Tanto no funcionamento do mestre como naquele do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido. (BROUSSEAU, 1986 apud PATAKI, 2003, p. 79).

A partir desta ideia, na realização das atividades propostas aos alunos entendemos que os possíveis erros que poderão eventualmente surgir fazem parte da construção de um novo saber.

No que segue, abordaremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Para este autor, estudar os fenômenos relativos ao conhecimento matemático se torna impossível sem recorrer à noção de representação desse conhecimento.

1.4.2 Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval desenvolveu a Teoria dos Registros de Representação Semiótica pautado no funcionamento cognitivo, baseado, principalmente na atividade matemática e nos seus problemas de aprendizagem. Desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, em termos de mudança de registros de representação semiótica, em que uma análise do conhecimento matemático é essencialmente uma análise das produções referentes às representações semióticas desse conhecimento. Duval (2009) destaca que alguns autores caracterizam as representações recorrendo a uma das duas oposições clássicas: interna/externa e consciente/não-consciente, porém defende que podem ser consideradas como duas formulações equivalentes de uma mesma partição dos fenômenos cognitivos. O autor explica essas oposições da seguinte forma:

> A **oposição consciente/não-consciente** é a oposição entre o que, de uma parte, aparece a um sujeito e que ele nota, e, de outra parte, o que lhe escapa completamente e que ele não pode notar. [...] A **oposição externa/interna** é a oposição entre aquilo que, de um individuo, de um organismo, ou de um sistema, diretamente visível e observável e aquilo que, ao contrário não é. (DUVAL, 2009, p. 40-41, grifo nosso)

Ainda para o autor, as representações externas são as representações semióticas, que preenchem uma função de comunicação, e aponta: "Uma representação interna pode ser consciente ou não-consciente, enquanto que uma representação consciente pode ser, ou não, exteriorizada" (DUVAL, 2009, p. 43), portanto, para o autor, as representações semióticas são ao mesmo tempo conscientes e externas.

Para o autor, não se pode compreender a matemática, se não houver uma diferenciação entre o objeto e sua representação, por exemplo, tomando como objetos matemáticos os números, as funções, as retas e respectivamente suas representações como as escritas decimais ou fracionárias, os gráficos e os símbolos. Sob o ponto de vista deste teórico, um mesmo objeto matemático, pode possuir diversas representações, o que caracteriza a atividade matemática.

Corroborando com Duval, Damn (1999, p. 137) ressalta que "não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação". Para melhor ilustrar, Damn cita um professor em uma aula de matemática falando, por exemplo, de bissetrizes internas de um triângulo. Para a autora, a assimilação dos alunos ficaria provavelmente comprometida sem ter a representação deste objeto na lousa. Duval ainda aponta a especificidade das representações semióticas como podemos verificar a seguir:

> [...] consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica, ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. (DUVAL, 2009, p.32).

O autor defende que a particularidade da aprendizagem da matemática requer a utilização de sistemas de expressão e representação além da linguagem natural ou das imagens, e ressalta ainda:

> [...] sistemas variados de escritura para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. (DUVAL, 2009, p.13).

Assim, pressupomos que a noção de representação semiótica se refere a diferentes sistemas semióticos, que devem permitir segundo o autor o cumprimento de três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação, que são:

> Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma coisa* em um sistema determinado. Em seguida transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p. 36-37, itálico do autor).

O autor aponta que nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades fundamentais, os sistemas semióticos que possuem essas atividades são chamados de registros de representação semiótica. Em palavras do autor, um registro de

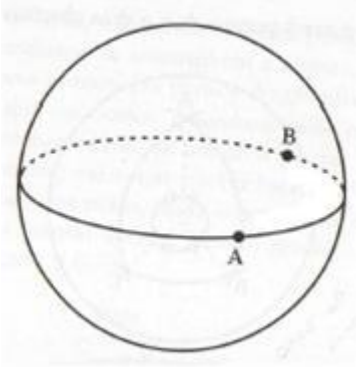
representação é: “Um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente”. (DUVAL, 1999 apud ALMOULOUD, 2007, p.71).

Além disso, os registros de representação semiótica são identificados por Duval (2009) como multifuncionais que envolvem a língua natural, associações verbais e forma de raciocinar em forma de representação discursiva e as figuras geométricas em uma forma de representação não discursiva. Existem ainda os registros monofuncionais que envolvem as escritas algébricas, numéricas e simbólicas, bem como o Cálculo na representação discursiva e as representações gráficas como representação não discursiva. O autor considera que para o funcionamento cognitivo e apreensão de um objeto matemático é necessário a utilização de no mínimo dois registros de representação semiótica para esse objeto. Ressalta que a aprendizagem, segundo sua teoria, se dá quando ocorrem dois tipos de transformações na produção de registros de representação semiótica, os tratamentos e conversões, que define como:

> Um **tratamento** é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A **conversão** é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p.39, grifo nosso)

De acordo com o autor essas transformações têm se revelado uma tarefa difícil para muitos alunos em diversos níveis de ensino, e às vezes, até impossível. Destaca uma pesquisa feita por Schoenfeld em que constata ao final de um ano letivo que alunos não conseguiram utilizar conversões no ensino de geometria. Para o autor geralmente, no ensino de Geometria, são trabalhadas questões que dão ênfase ao registro figural, que requerem um reconhecimento dos dados fornecidos em registro na língua natural, seguido da solicitação de algum tratamento. Defende ainda, que em oposição, deveriam ser propostas questões no registro da língua natural, para conversão em registro figural para então, se realizar o tratamento.

Focaremos nosso trabalho, em três tipos de registros de representação semiótica, o registro em língua natural, o registro simbólico e o registro figural. No quadro 1, apresentamos representações para o objeto matemático segmento de reta, na Geometria Esférica, nesses diferentes registros.

Registro em Língua Natural	Registro Simbólico	Registro Figural
Segmento de reta AB	$\overline{AB}$	

Quadro 1 - Registros de Representação Semiótica para o segmento de reta

Entendemos que nas conversões de registros na Geometria Esférica o registro figural apresentado no quadro 1, se refere ao segmento de reta AB ($\overline{AB}$), enquanto na Geometria Euclidiana Espacial representa o arco de circunferência AB ($\overset{\frown}{\text{AB}}$), ou seja, temos o mesmo registro figural mobilizado para diferentes objetos matemáticos. O que permite diferenciar, em qual Geometria estamos trabalhando, são os registros em língua natural e o simbólico. Desta maneira, acreditamos não ser necessária a caracterização entre o registro figural da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica. Observamos ainda, que para a captura e compreensão do que significa um objeto matemático, são necessárias diversas representações de diferentes sistemas semióticos; o que, aliado às várias formas de representação matemática torna a apreensão do significado deste um processo complexo, principalmente na prática educativa, como Kaleff (2007) destaca:

> [...] Esta complexidade se expressa na prática educacional, quando se enfrenta as situações do ensino de conceitos matemáticos que não possuem um significado *a priori*, como acontece no caso das Geometrias advindas dos sistemas formais, cujos objetos só possuem o significado instituído pelos matemáticos, por meio de convenções. (KALEFF, 2007, p. 75).

Abordaremos neste trabalho ainda o registro material citado no trabalho de Jesus (2008). Esta classe de registro não é mencionada nos trabalhos de Duval, porém defendemos que, em nosso trabalho, o uso do registro material se faz necessário porque os alunos manipularão uma bola de isopor por ter as características exigidas pelo Registro de Representação Semiótica.

Entendemos que essas características se fazem presentes quando ao manipular a bola de isopor, os alunos realizam uma produção de nível de funcionamento consciente, por meio da qual podem ser observadas as três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação, que em síntese podemos descrever como sendo a primeira, uma atividade verbal exteriorizada pelo sujeito, em seguida uma atividade de transformação de uma representação no mesmo registro e por fim as atividades que envolvem as transformações de uma representação entre registros distintos.

Assim entendemos a manipulação da bola de isopor como uma produção de um registro material de representação semiótica. Compreendemos que, nessa produção do registro, podemos identificar, por exemplo, o objeto matemático reta na Geometria Esférica, por meio do desenho da reta na bola de isopor. Desta forma, para que os alunos façam a conversão para o registro figural, no sentido de Duval (2009), é necessário que desenhem no papel a reta, conforme figura 1.

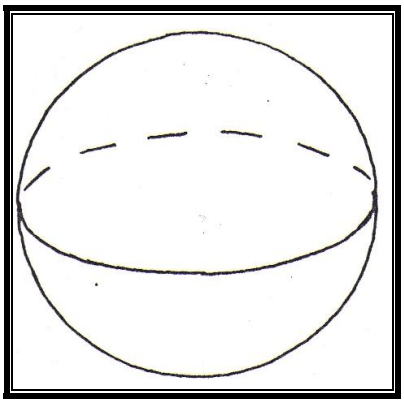


Figura 1 – Registro figural da reta na Geometria Esférica
Fonte: Lénárt (1996, p. 20)

Ou seja, a apreensão conceitual do objeto matemático, reta, neste caso somente será possível com a coordenação de vários registros de representação. Como podemos notar quando Damm (1999, p. 144) afirma “quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto”.

Uma vez conhecidos nosso referencial teórico, nosso problema de pesquisa e a metodologia adotada, no próximo capítulo, apresentaremos os estudos preliminares de nossa pesquisa necessários para compor o processo de nossa metodologia.

Capítulo 2: Estudos Preliminares do Objeto Matemático

Neste capítulo, apresentaremos um breve histórico referente às Geometrias não-Euclidianas, mais especificamente a Geometria Esférica. Abordaremos também alguns conceitos matemáticos elementares a respeito de Geometria Esférica, bem como um recorte histórico da cartografia.

2.1 Breve Estudo a respeito das Geometrias não-Euclidianas

De acordo com Bicudo (2009) um dos capítulos mais importantes e pouco conhecidos da história cultural é a transformação do conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na matemática grega, considerada dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas.

Talvez um dos matemáticos gregos mais conhecidos seja Euclides de Alexandria, do qual segundo o autor restam-nos apenas poucas informações sobre a vida e a personalidade do homem. Atualmente, a maior parte do que temos sobre o lugar de nascimento ou das datas em que nasceu ou morreu, procede por inferências.

Estima-se que Euclides compilou a Geometria Euclidiana que conhecemos hoje, por volta de 300 a. C., quando surgiu sua obra escrita, Os Elementos, que teve êxito ao resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos e apagar praticamente os rastros dos que o precederam. Para Sant'Anna (2003, p.01):

> Os livros que compõem os Elementos de Euclides, escritos entre 330 e 320 a.C., trazem na verdade contribuições creditadas a Pitágoras, Hipócrates de Chios [...]. No entanto o método axiomático utilizado para expor a geometria se estabeleceu por milênios, e até os dias de hoje é uma excelente ferramenta didática [...].

Segundo Boyer (1974), essa obra é composta de treze livros ou capítulos. Os seis primeiros livros tratam de Geometria Plana Elementar; os três seguintes sobre Teoria dos Números, o livro X sobre Incomensuráveis e os três últimos sobre Geometria no espaço, principalmente. O livro I é composto por teoremas demonstrados a partir de várias definições e de uma lista de cinco postulados e cinco axiomas.

Os cinco postulados de Euclides, traduzidos por Bicudo (2009, p. 98) do grego para o português, são:

> I) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
>
> II) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
>
> III) E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
>
> IV) E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
>
> V) E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO, 2009, p. 98).

O último postulado é ilustrado na figura 2.

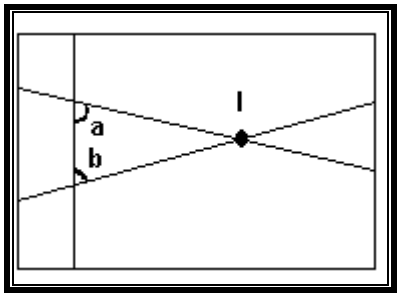


Figura 2 – Quinto Postulado de Euclides
Fonte: produção nossa

De acordo com Boyer (1974), desde no mínimo o século 3 a.C até o século XIX d.C. muitos estudiosos, dedicaram-se ao estudo do quinto Postulado, conhecido também como Postulado das Paralelas, no campo da Geometria Euclidiana. Assim, o começo do século XIX encontrou os geômetras ainda em busca de uma prova do quinto Postulado de Euclides, o que redundou na ampliação do conhecimento dessa Geometria. Foi a partir da tentativa, de provar, negar e/ou substituir o quinto Postulado modificando a definição de retas paralelas que os conhecimentos de Geometria foram aprofundados e propagados.

Segundo Veloso (1998), muitos foram os que tentaram demonstrar o quinto postulado, deduzindo-os a partir dos outros. Entre eles, o padre jesuíta Gerolamo Sacheri (1667 – 1733) foi talvez o primeiro a ensaiar uma abordagem inteiramente nova para se demonstrar o quinto postulado. No seu livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de qualquer defeito) tentou utilizar a técnica de redução ao absurdo, admitindo a negação do quinto postulado de Euclides com vista a obter algum absurdo. De acordo com o autor, Sacheri considera um tipo especial de quadrilátero, depois chamado de quadrilátero de Sacheri. Nele existe um par de lados opostos iguais e perpendiculares a um

terceiro lado, um lado chama-se base e o lado oposto chama-se topo, os ângulos α e β são chamados ângulos de topo, conforme figura 3.

Para demonstrar o quinto postulado utilizou o quadrilátero da figura 3, e demonstrou que o ângulo α era congruente ao ângulo β.

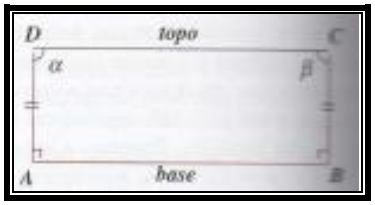


Figura 3 – Quadrilátero de Sacheri
Fonte: Veloso (1998, p. 346)

Chegou a três hipóteses para esses ângulos, como podemos ver na figura 4, hipótese do ângulo obtuso (HAO), hipótese do ângulo reto (HAR) e hipótese do ângulo agudo (HAA).

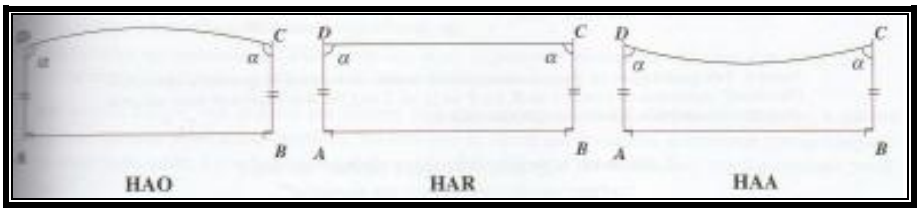


Figura 4 – Hipóteses de Sacheri
Fonte: Veloso (1998, p. 347)

Ainda de acordo com o autor, Sacheri provou que a hipótese do ângulo reto conduzia à Geometria Euclidiana, ou seja, era equivalente ao quinto postulado de Euclides. Depois tentou demonstrar que o quinto postulado era um teorema da Geometria Euclidiana por redução ao absurdo. Para isso, bastaria considerar sucessivamente cada uma das outras hipóteses, isto é, do ângulo obtuso e agudo, às possíveis negações do quinto postulado, e chegar a contradições em qualquer dos casos. Porém, Sacheri, algum tempo depois, acabou por julgar erroneamente ter encontrado uma contradição que não existia.

Outro matemático, anos depois de Saccheri, o francês Lambert (1728 – 1777) fez a mesma tentativa. Mas a ambos escapou a ideia sutil, de que os estranhos resultados obtidos até então, de maneira alguma encerravam contradições que desqualificassem um raciocínio matemático.

Entretanto, essa ideia não escapou ao matemático Carl Gauss (1777 – 1855) que escreveu em seu caderno de notas: "*Estou convencido de que prescindir do postulado das paralelas não leva nenhuma contradição, embora se obtenham (conclusões) que se apresentem paradoxais*" (BOYER, 1974, p.396). Não chegou a publicar suas deduções, talvez por temor as possíveis críticas a uma verdade evidente.

Segundo Veloso (1998), Nicolai Lobachevsky (1792 – 1856), por volta de 1826, matemático russo, afirmou que o quinto postulado não podia ser deduzido das outras proposições fundamentais da Geometria e se atreveu a negar a verdade deste postulado. Afirmou que por um ponto fora de uma linha reta, pode-se traçar não uma, mas ao menos duas linhas paralelas a ela. Deduziu uma série de teoremas, sem chegar a nenhuma contradição. Lobachevsky, com seu trabalho, mostrou que o quinto postulado não poderia ser demonstrado, e algo mais importante sobre o ponto de vista lógico, é possível conceber outras Geometrias tão consistentes como a Geometria de Euclides. Em seu artigo "Géométrie Imaginaire", Lobachevsky afirma:

> Depois de ter desenvolvido uma nova teoria das paralelas, propus-me mostrar que nada, a não ser a observação directa, nos dá razão para supor que a soma dos ângulos de um triângulo é dois rectos, e demonstrar que outra geometria pode existir, se não na natureza, então pelo menos na matemática, na qual se admite que a soma dos ângulos é inferior a dois rectos. (LOBACHEVSKY, 1837 apud VELOSO, 1998, p. 351).

Ainda de acordo com o autor, as ideias de Lobachevsky não foram aceitas de imediato por serem ousadas para época e irem de encontro às crenças de quase todos matemáticos. Quase que simultaneamente o matemático húngaro Janos Bolyai (1802 – 1860) seguiu também caminhos parecidos ao de Lobachevsky. Porém o matemático russo expôs publicamente primeiro suas ideias, por isso, seus estudos ficaram conhecidos por Geometria de Lobachevsky ou Hiperbólica.

Referente ao estudo da Geometria Hiperbólica, Veloso ainda destaca que a melhor maneira de visualizar o que realmente se passa quando trocamos o quinto postulado de Euclides pelas versões não euclidianas é considerar a construção de modelos. O autor ainda explica que um modelo para um determinado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos, de modo que os axiomas sejam todos propriedades verdadeiras. Segundo o autor, foram desenvolvidos pelo menos três modelos consistentes para Geometria Hiperbólica. O primeiro modelo foi desenvolvido por Eugenio Beltrami (1835 –

1900), a pseudoesfera, o outro foi criado pelo matemático Félix Klein (1849 – 1925) e o modelo do disco de Poincaré (1854 – 1912).

De acordo com Veloso (1998) enquanto matemáticos como Lobatchewsky e Bolyai desenvolviam as bases da Geometria Hiperbólica, em 1854, o matemático alemão, Riemann (1826 – 1866), em sua dissertação "*Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria*", descreve uma Geometria que substitui o quinto postulado pelo seguinte enunciado: Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar outra reta paralela a uma reta dada.

Nesta outra Geometria chamada Elíptica ou Esférica, Riemann afirma que não existem paralelas a uma reta dada. Interpreta o plano como a superfície de uma esfera e uma reta como uma circunferência máxima sobre essa esfera. Neste caso, entre alguns resultados obtidos no desenvolvimento de seu estudo, temos a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo maior que 180 graus.

Coutinho (2001, p. 73) afirma que: "Na Geometria de Riemann abandona-se a noção de, 'estar entre' e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitada". Ou seja, as circunferências máximas de uma esfera (as retas ou geodésicas) são finitas (percorrendo-as sempre se volta ao ponto de partida), mas ilimitadas (pode-se percorrê-las indefinidamente). Ainda segundo o autor, diferente da Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica as retas podem, eventualmente, interceptar-se em mais de um ponto (as circunferências máximas sempre se interceptam em dois pontos), como podemos ver na figura 5.

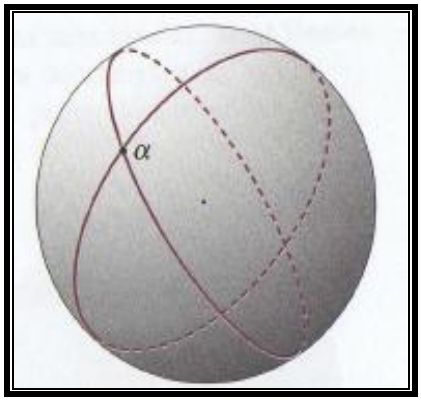


Figura 5 - Intersecção de Circunferências Máximas em dois pontos
Fonte: Veloso (1998, p. 333)

O desenvolvimento de outras Geometrias consistentes a partir dos quatro primeiros postulados de Euclides e da substituição do quinto postulado por outros igualmente válidos, serviu para demonstrar o quanto este postulado é independente dos outros, e por isso, não podia ser provado, além de contribuir para se fazer um exame mais cuidadoso dos fundamentos da Matemática. Apesar de não ser o objetivo de nosso estudo, podemos destacar além da Geometria Hiperbólica e Esférica, outras Geometrias consistentes tais como: a Geometria Inversiva e a Geometria do motorista de táxi, entre outras. De acordo com Veloso (1998), na Geometria Inversiva, aparentemente, as maiores diferenças em relação à Geometria Euclidiana são as considerações de um ponto no infinito e a não distinção entre retas e circunferências. O autor destaca que a inversão é rica em aplicações e exerce papel fundamental na construção de modelos da Geometria Hiperbólica, como a utilização da inversão em construções no modelo hiperbólico do disco de Poincaré.

Já na Geometria do motorista de táxi, Veloso, destaca que a noção de distância não é a mesma dada na Geometria Euclidiana. Nesta Geometria, supõe-se um motorista de táxi que apanha um cliente no ponto A e este lhe diz que quer ir ao local representado pelo ponto B, conforme figura 6.

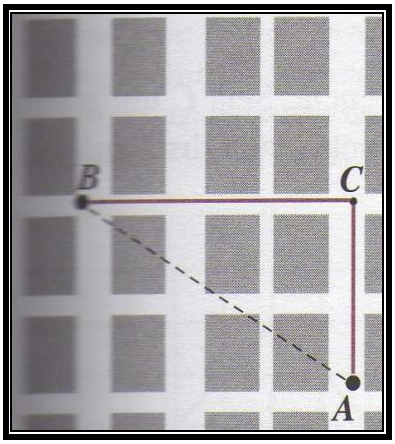


Figura 6 - Distância do ponto A ao B
Fonte: Veloso (1998, p. 327)

Segundo o autor, o motorista não pode percorrer o caminho direto de A para B, ele terá que ir primeiro ao ponto C, e depois seguir para B. A distância que vai percorrer no trajeto não é explicada pela definição de distância entre dois pontos AB da Geometria Euclidiana, mas pela soma de duas distâncias em direções perpendiculares AC + CB.

A partir do que foi exposto e dando continuidade aos nossos estudos preliminares, mostraremos no próximo item, algumas noções matemáticas elementares de Geometria Esférica.

2.2 Noções Matemáticas Elementares de Geometria Esférica

Abordaremos algumas noções matemáticas elementares de Geometria Esférica, que serão trabalhadas na sequência de ensino, tais como: superfície esférica, circunferência máxima, arco de circunferência máxima, distância entre dois pontos em uma superfície esférica, ângulo esférico, triângulo esférico, e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Em um primeiro momento explicaremos o que vem a ser uma superfície esférica, utilizaremos a definição de Alves (2008), conforme figura 7: seja *O* um ponto e *r* um número real positivo. A superfície esférica de centro *O* e raio *r* é o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a *O* é igual a *r*.

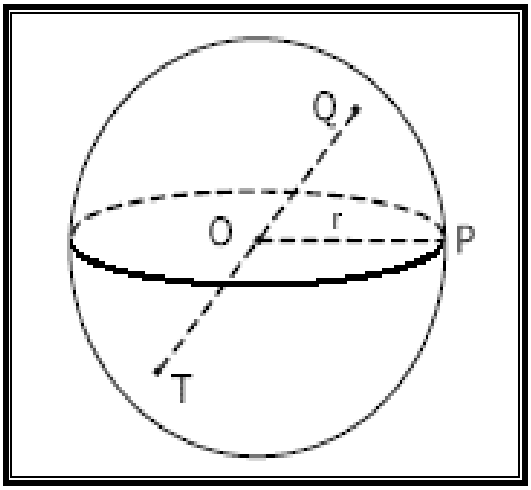


Figura 7 – Superfície Esférica
Fonte: Alves (2008, p. 1)

Ainda segundo Alves (2008), os pontos do espaço cuja distância a O é menor que r são interiores à superfície esférica e aqueles cuja distância a O é maior que r são exteriores a ela. A reunião da superfície esférica de centro O e raio r com seus pontos interiores é chamada de *esfera* de centro O e raio r. O segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado *um raio da superfície esférica* enquanto que o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado *corda*.

Podemos inferir que a relação entre superfícies esféricas e planos no espaço é similar à relação existente entre circunferências e retas no plano, o que nos leva à considerar que quando um plano é tangente a uma superfície esférica a intersecção entre ambos é exatamente um ponto, chamado de *ponto de tangência*. Dizemos que o plano e a superfície esférica se tangenciam nesse ponto. Caso a intersecção se dê em mais de um ponto, podemos dizer que o plano é secante à superfície esférica.

Essas inferências podem ser caracterizadas por meio de teoremas como podemos verificar quando Alves propõe: Um plano perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica é tangente à mesma e sua recíproca é verdadeira. Na figura 8, o autor explica que sendo E um plano perpendicular ao raio OT em T, nenhum outro ponto de E está na superfície esférica.

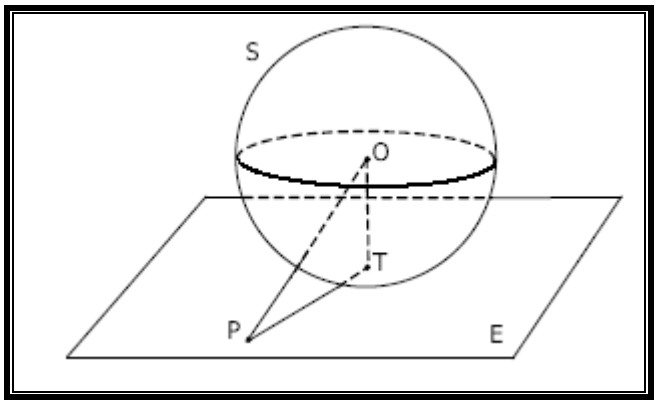


Figura 8 - Plano e Superfície Esférica
Fonte: Alves (2008, p. 2)

Ao considerarmos P um ponto qualquer de E, mas distinto de T. Como E é perpendicular a OT temos que ΔOPT é um triângulo retângulo com hipotenusa OP e catetos OT e PT. Logo, OP > OT = r e, portanto, P não está na superfície esférica.

Reciprocamente se considerarmos E um plano tangente à superfície esférica no ponto T, e supormos por absurdo, que E não seja perpendicular ao raio OT, verificamos que ao fazer esta suposição somos levados a uma contradição. Na figura 9, podemos observar que se considerarmos F o ponto da perpendicular ao plano E traçada a partir de O, temos $F \neq T$, pois E não é perpendicular a OT. E sendo R o ponto da reta FT tal que T – F – R e FR = FT. Então os triângulos OFR e OFT são congruentes pelo caso LAL (lado, ângulo, lado) de congruência de triângulos de modo que OR = OT = r e, portanto, R está na superfície esférica. Logo E intersecta a superfície esférica em um ponto R distinto de T, o que é impossível, pois E é um plano tangente.

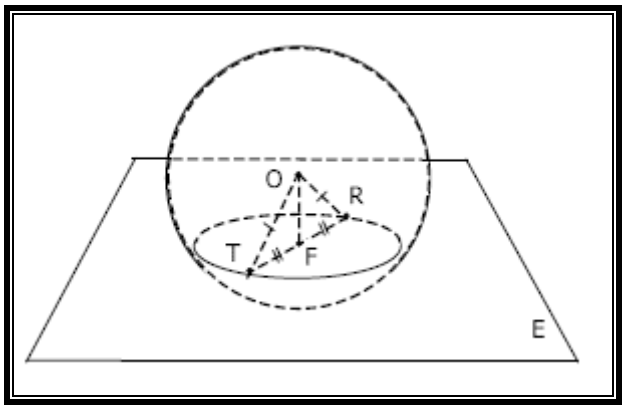


Figura 9 - Plano tangente à superfície esférica
Fonte: Alves (2008, p. 3)

Alves (2008) também propõe que quando um plano secante corta uma superfície esférica, temos que a intersecção, considerando um plano passando pelo seu centro, é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio da superfície esférica. Dada uma superfície esférica S com centro O e raio r e um plano E que passa por O, como vemos na figura 10, a intersecção entre a superfície e o plano é o conjunto de todos os pontos de E cuja distância a O é igual a r, percebemos então que essa é exatamente a definição de uma circunferência de centro O e raio r.

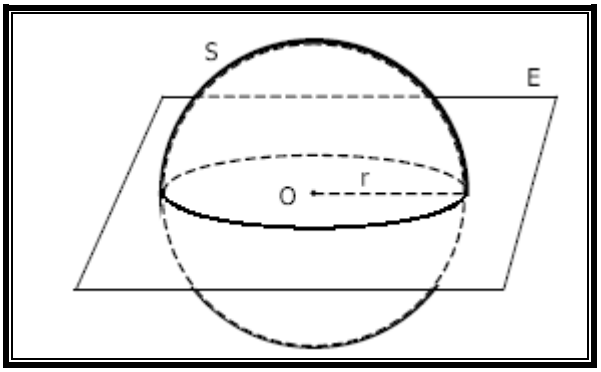


Figura 10 – Plano secante a uma superfície esférica
Fonte: Alves (2008, p. 3)

Para uma situação mais geral, o autor propõe o seguinte teorema: Se um plano contém um ponto do interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica. Como podemos ver

na figura 11 se considerarmos E um plano que não passa pelo centro O da superfície esférica S e que contém um ponto Y do seu interior. Sendo F o pé da perpendicular a E traçada a partir de O, mostraremos que a intersecção da superfície esférica e o plano é uma circunferência de centro F.

Sabemos que OY < r, pois Y está no interior de S. O triângulo OFY é retângulo, portanto $\overline{OY}$ é hipotenusa, enquanto $\overline{OF}$ é cateto. Logo OF < OY < r, ou seja, F também está no interior de S.

Se considerarmos X um ponto qualquer na intersecção da superfície esférica com o plano. Então o triângulo OFX tem um ângulo reto em F e, pelo teorema de Pitágoras, $OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2$ (1) e, portanto, $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$ (note que $r^2 - OF^2 > 0$).

Logo X está na circunferência de centro F e raio FX. Provamos assim que a intersecção E ∩ S está contida na circunferência de centro F e raio FX.

Isso ainda não significa que a intersecção é a circunferência, o que podemos deduzir de (1) e concluirmos que OX = r e X pertence à superfície esférica S.

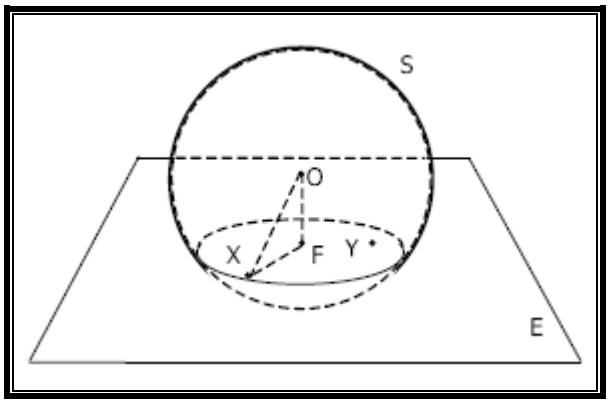


Figura 11 – Plano secante a superfície esférica
Fonte: Alves (2008, p. 4)

Para Alves (2008), a intersecção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada de *circunferência máxima ou geodésica*, que é definida como reta na Geometria Esférica. Este nome se justifica, pois as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica. Sabemos, por exemplo, que o

Equador é uma circunferência máxima, mas os outros paralelos no globo terrestre não o são[4].

Na figura 12, as retas ACA' e ADA', perpendiculares à reta BCDE, interceptam-se nos pontos antípodas A e A' (extremidades de um mesmo diâmetro da esfera). A reta BCDE perpendicular às retas ACA' e ADA' é chamada de *polar comum* dos pontos A e A', e estes dois pontos são os pólos da reta BCDE, de acordo com Coutinho (2001). A distância de A ou A' a qualquer ponto da reta BCDE é constante. Percebemos que duas retas secantes como ACA' e ADA' da figura 12 tem em comum uma única reta perpendicular BCDE.

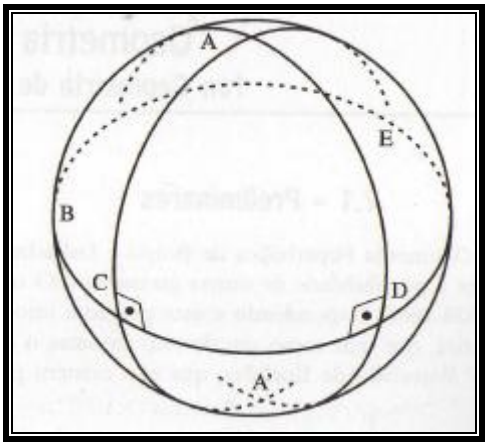


Figura 12 – Retas Perpendiculares
Fonte: Coutinho (2001, p. 74)

Ainda na figura 12, considerando as duas retas ACA' e ADA', e A e A' pólos dessas retas, temos na Geometria Esférica, a distância de qualquer reta ao pólo como sendo uma constante igual para todas as retas. Portanto, segundo Coutinho, uma reta tem um comprimento finito, que é quatro vezes a distância polar.

Outro ponto importante a considerar é que, na Geometria Esférica não existem retas paralelas, pois quaisquer duas circunferências máximas sempre se encontram.

Se tomarmos dois pontos quaisquer sobre uma superfície esférica, o menor comprimento entre eles é dado por um trecho da reta, denominado arco de circunferência máxima, que é definido como segmento de reta na Geometria Esférica. (figura 13).

[4] O uso do termo paralelo geográfico será mais detalhado no capitulo 2, seção 2.3.

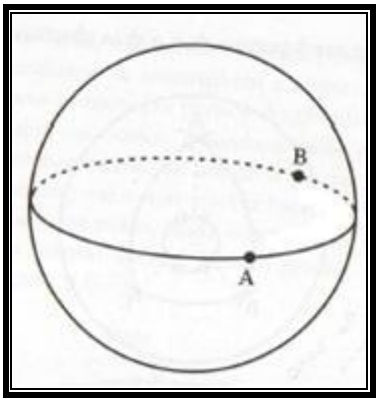


Figura 13 – Arco de circunferência máxima
Fonte: Coutinho (2001, p. 83)

A medida desse comprimento como podemos ver na figura 14, pode ser obtida a partir do conhecimento da medida α do ângulo AÔB em que O é o centro da superfície esférica S. Como o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, temos **d(A,B) = 2πrα/360**, onde r é o raio da superfície esférica e α e ângulo central dado em graus.

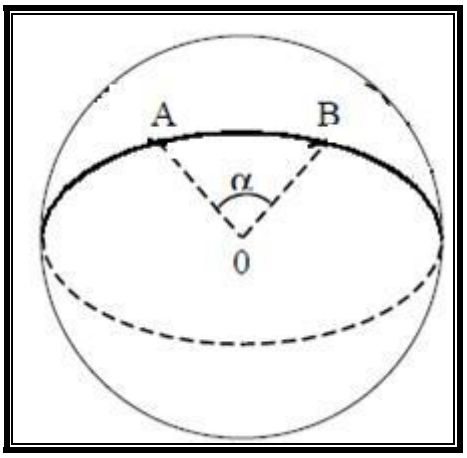


Figura 14 – comprimento do segmento de reta AB
Fonte: Alves (2008, p. 38)

Para as atividades desenvolvidas neste trabalho há necessidade de se definir e medir ângulos na superfície esférica. Na esfera, existem duas maneiras para definirmos a medida do ângulo entre duas retas.

Coutinho (2001) define ângulo esférico como sendo a intersecção de duas retas e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes à superfície esférica pelo ponto de intersecção. Na figura 15 o ângulo esférico tem igual medida ao ângulo plano formado pelas retas t_1 e t_2, tangentes à superfície esférica.

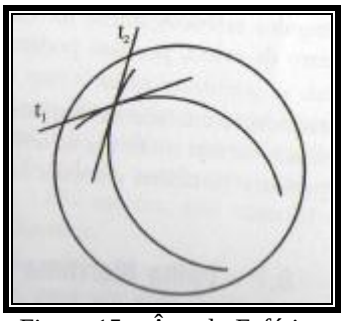


Figura 15 – Ângulo Esférico
Fonte: Coutinho (2001, p. 83)

Outra maneira de definirmos ângulos na superfície esférica, segundo Santos (2008), é o ângulo diedral entre os semi-planos que contém as semi-circunferências máximas. Ângulo diedral (ou diedro), como mostra a figura 16, é o ângulo formado pela intersecção de dois semiplanos com a mesma origem. O ângulo diedral é formado pelas semicircunferências *m* e *n*.

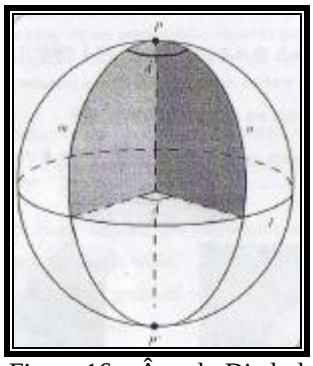


Figura 16 – Ângulo Diedral
Fonte: Santos (2009, p. 9)

Segundo Coutinho (2001), a porção da superfície esférica limitada exclusivamente por segmentos de reta, é chamada de polígono esférico.

Um polígono que trabalharemos em nossa pesquisa é o triângulo esférico, que é formado por três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Na figura 17, os pontos A, B e C pertencentes a uma superfície esférica qualquer, unidos dois a dois por segmentos de reta formam um triângulo esférico. Estes arcos são os lados do triângulo esférico, conforme o autor.

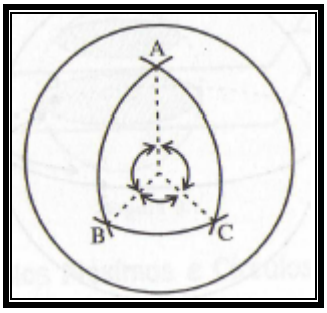


Figura 17 – Triângulo Esférico
Fonte: Coutinho (2001, p. 84)

Os lados BC, AC e AB do triângulo esférico podem ser denotados, respectivamente, por *a, b e c*, e medidos pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera, e desta forma podem ser medidos em graus ou radianos. Os ângulos internos do triângulo ABC são os ângulos esféricos BÂC, A $\hat{B}$ C e AĈB.

A Geometria Esférica, segundo Coutinho, sendo independente do quinto postulado de Euclides, nos leva a concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico não seja constante, isto é, varie entre 180º e 540º, tendo um valor dependente do triângulo considerado. Portanto, dado um triângulo esférico ABC, o máximo que se pode afirmar sobre a soma das medidas dos seus ângulos internos é: 180º < med(Â) + med($\hat{B}$) + med(Ĉ) < 540º.

Em relação à soma das medidas dos lados *a, b e c* do triângulo esférico, persiste, também, uma faixa de variação de extremos 180º e 360º, ou seja: 180º < med(a) + med(b) + med(c) < 360º, sendo que nenhum dos lados pode ter medida maior do que 180º. Os triângulos esféricos podem ter três ângulos retos medindo cada um 90º.

Dando continuidade aos nossos estudos preliminares, no próximo item mostraremos algumas noções referentes a conceitos da Geografia.

2.3 Algumas noções a respeito de elementos Geográficos

Entendemos que, além das noções matemáticas elementares de Geometria Esférica, é necessário apresentar também determinadas noções geográficas que foram utilizadas nas atividades da sequência didática trabalhada com os alunos. Desta forma, nesta seção passaremos a descrevê-las focando essa utilização.

De acordo com Santos (2002), um dos maiores enigmas da humanidade foi a procura pela compreensão do que acontece a sua volta. Segundo o autor, a maioria dos povos da Antiguidade era constituída de comerciantes e navegantes que precisavam

conhecer as rotas marítimas e, consequentemente, o planeta Terra, ainda que de modo específico, sendo aos gregos atribuída a base do sistema cartográfico atual, por serem estudiosos do planeta Terra e já afirmarem que este tinha a forma redonda.

Outro autor que também ressalta a preocupação do homem em conhecer o mundo à sua volta é Duarte (2006, p. 16), que afirma "os homens desde muito cedo se preocuparam em fixar os limites de seu horizonte espacial, de seu território, ou mesmo de seu itinerário, seja ele terrestre, fluvial ou marítimo". Ou seja, percebemos que a preocupação em representar o meio ambiente de forma duradoura era constante. Sendo assim, não podemos negar a importância dos mapas como uma forma de representar e delimitar as orientações, para os mais variados povos. Dentre esses povos, o autor observa que os gregos tiveram importância significativa no desenvolvimento da Cartografia ocidental. Ressalta que por volta do século IV a.C., havia diversas especulações a respeito da forma da Terra. Uma delas, defendidas pelos estudiosos gregos, dizia que nosso planeta, como criação divina, deveria ser esférico, pois a esfera era a forma geométrica perfeita. Com isso foram nesta época firmadas as definições das linhas da rede geográfica[5]: equador, trópicos, círculos polares, meridianos.

Dentre esses estudiosos gregos, Duarte (2006) destaca Eratóstenes de Cirene (276 a 196 a.C) que, com base em seus conhecimentos de Geometria, por meio de um experimento mediu a circunferência da Terra, obtendo um resultado próximo de 46 mil quilômetros. O autor ainda ressalta que diversos outros estudiosos daquela época também fizeram seus cálculos, porém foi Eratóstenes que chegou mais próximo da medida atual de aproximadamente 40 mil quilômetros, um erro de mais ou menos 14% na medida da circunferência terrestre e assim concluiu que a Terra era redonda. Segundo o autor, o estudioso grego calculou a medida da circunferência terrestre ao tomar conhecimento de que, em 21 de junho, o dia mais longo do ano, os raios solares incidiriam perpendicularmente num poço de Siena (atual Assuan). Na figura 18, podemos verificar o método de medição utilizado por Eratóstenes. Para o autor a questão fundamental neste método seria determinar o ângulo "b", formado no centro da Terra pelo prolongamento imaginário das estacas colocadas em Siena e Alexandria, por uma propriedade de Geometria, o ângulo "a" deveria ser igual ao "b" (ângulos alternos internos) mediu o

[5] Entende-se por rede geográfica o conjunto formado por paralelos e meridianos, ou seja, pelas linhas de referência que cobrem o globo terrestre com a finalidade permitir a localização precisa de qualquer ponto sobre sua superfície, bem como orientar a confecção de mapas. (DUARTE, 2006, p. 47)

ângulo “a” e deduziu um valor para o ângulo “b” um pouco maior que 7º. Considerou ainda, que a distância entre Siena e Alenxandria fosse de 5000 estádios (um estádio equivalia a 41,25 m), e verificou que um meridiano da Terra deveria medir 250000 estádios, isto é, aproximadamente, 28000 milhas ou 45000 km.

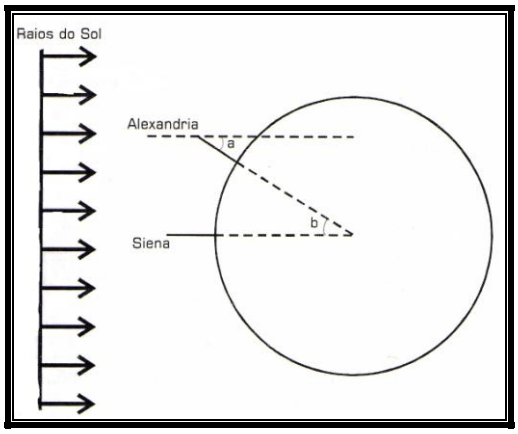


Figura 18 – Medição da circunferência da Terra por Eratóstenes
Fonte: Duarte (2006, p. 31)

Já na era cristã, de acordo com Duarte (2006), o nome grego mais famoso foi o de Cláudio Ptolomeu (90 a 168 d.C.) que escreveu uma obra que tratava de vários assuntos das ciências da Terra, Astronomia e da Cartografia. Sua obra foi acompanhada também de um mapa-múndi (figura 19) e diversos outros mapas, constituindo-se num dos atlas mais antigos que se conhece.

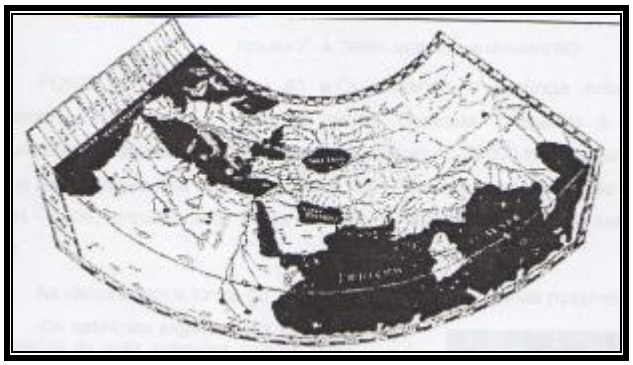


Figura 19 – Mapa Mundi de Ptolomeu
Fonte: Pataki (2003, p. 38)

A partir de Ptolomeu, o autor destaca que houve um período de decadência na Cartografia, marcado pela Idade Média. Mas, ainda nessa época, começou a circular na

Europa um tipo de mapa com caráter mais científico e utilitário chamado de *portulano*. Duarte relata que sua origem no continente europeu ainda é um tanto controvertida, porém alguns historiadores acreditam que os *portulanos* tenham sido idealizados por militares genoveses durante o século XIII, a fim de orientar a navegação. Para o autor, a Cartografia na Europa sofreu impulso a partir das viagens de exploração de novas terras no período do Renascimento. Os navegadores sentiam a necessidade de poder contar com mapas cada vez mais atualizados e aperfeiçoados. Dentre os cartógrafos mais importantes nessa época na Europa temos o matemático e geógrafo Gerhard Mercator (1512 – 1594). Entre seus trabalhos está o mapa da Europa, feito em 1554, que reduziu o Mar Mediterrâneo para 53 graus de comprimento. Duarte (2006) ainda nos aponta um dos trabalhos de Mercator mais conhecidos, a projeção cartográfica, com meridianos retos e equidistantes e paralelos também retos, porém, cada vez mais espaçados entre si na direção dos pólos, como vemos na figura 20. Esta projeção foi idealizada em 1569 para confecção de seu mapa-múndi de dezoito folhas. A palavra "atlas" que hoje utilizamos para indicar publicações que reúnem um conjunto de mapas foi feita por Mercator.

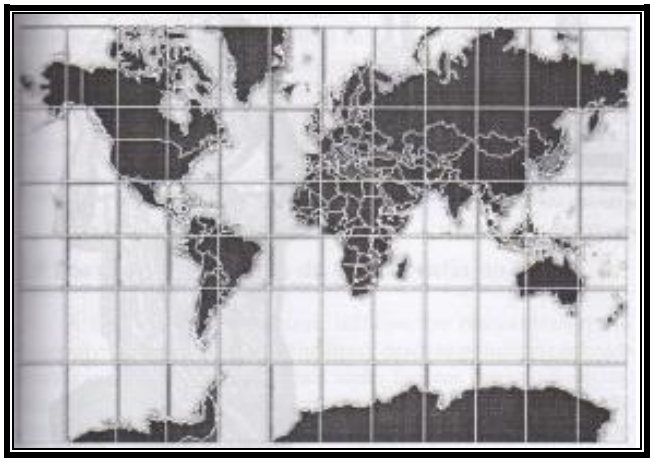


Figura 20 – Planisfério baseado na Projeção de Mercator
Fonte: Duarte (2006, p. 39)

Após esse breve relato a respeito da Cartografia, apresentamos o Sistema de Coordenadas Terrestres, utilizado em nossa sequência de ensino em que utilizamos as definições de *Paralelos, Meridianos, Equador, longitude e latitude* dadas por Duarte (2006) e ALVES (2008). Segundo Duarte, podemos definir meridianos como:

> Semicircunferências de círculos máximos, cujas extremidades são os dois pólos geográficos da Terra. O plano de cada meridiano contém o eixo da Terra e todos eles têm como ponto comum os pólos verdadeiros. Qualquer deles divide a Terra em dois hemisférios: um a leste e outro a oeste, mas uma convenção internacional adotou aquele que passa por Greenwich, em Londres, como sendo o meridiano base para determinação dos hemisférios (oriental e ocidental) e também para contagem da longitude. (DUARTE, 2006, p. 48)

Existem também os paralelos que para Alves (2008, p. 8), são: "as secções da superfície terrestre através de planos paralelos (ou coincidentes) ao plano do Equador". Entre estes paralelos recebem nomes especiais, o Equador que Duarte (2006, p. 51) define como: "é o paralelo cujo plano é perpendicular ao eixo da Terra e está eqüidistante dos pólos geográficos, dividindo o globo terrestre em dois hemisférios: norte e sul". Aqui fazemos uma ressalva em relação aos paralelos geográficos: apesar destes receberem o nome de paralelos, na Geografia não equivalem a retas paralelas da Geometria Esférica visto que, nesta Geometria, duas retas quaisquer sempre se encontram, ou seja, não existem retas paralelas. Alves (2008) ainda ressalta que a nomenclatura utilizada por profissionais não matemáticos, no caso, geógrafos, não precisa coincidir necessariamente com a usada pelos matemáticos.

Outro conceito abordado é o da coordenada geográfica latitude (figura 21), representada por ϕ, para Coutinho (2001, p. 89) é: "a latitude A é o arco de meridiano que principia no Equador e vai até o paralelo do lugar A, sendo denominada *norte* ou *sul*, de acordo com o hemisfério a que pertence o lugar A".

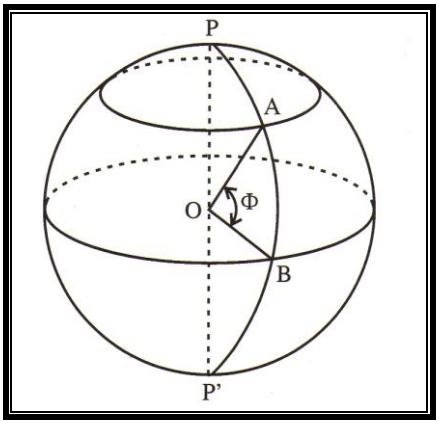


Figura 21 – latitude de um ponto A
Fonte: Coutinho (2001, p. 89)

Já a coordenada geográfica, longitude (figura 22), representada por λ, será definida como:

> [...] A longitude de um lugar A é o arco de Equador, contando a partir do ponto em que o meridiano de Greenwich corta aquele círculo máximo, até o meridiano do lugar, e é denominada leste ou oeste, dependendo se o lugar A fica, respectivamente, à direita ou à esquerda de um observador voltado para o meridiano de Greenwich. (COUTINHO, 2001, p. 89).

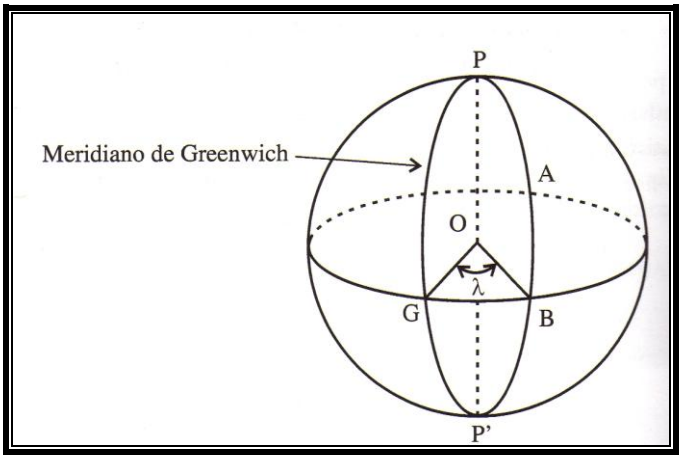


Figura 22 – longitude de um ponto A
Fonte: Coutinho (2001, p. 90)

Com base nas definições dadas, podemos determinar as coordenadas, ou seja, a latitude e a longitude de qualquer ponto situado sobre a superfície terrestre. Para determinação da latitude, são considerados os paralelos enquanto que, para a longitude, levamos em consideração os meridianos.

Com o que foi descrito acima, entendemos que os elementos necessários para o estudo foram apresentados. Sendo assim, no próximo capítulo, apresentaremos o desenvolvimento do trabalho com os sujeitos de pesquisa e os resultados obtidos.

Capítulo 3: A experimentação

Neste capítulo, apresentamos a análise do questionário aplicado aos sujeitos de pesquisa, o perfil deles, descrevemos a aplicação da sequência e a análise de seus resultados.

3.1 Análise do Questionário

Aplicamos um questionário aos sujeitos de pesquisa com intuito de obter informações a respeito de seu perfil, bem como de quais conhecimentos prévios estes dispunham em relação à Trigonometria para a resolução das atividades da sequência de ensino.

Os objetivos das questões estão dispostos conforme podemos ver no Quadro 2.

Questões	Objetivos das Questões
1 à 6	Levantar os dados para compor o perfil dos alunos.
7	Identificar as noções conhecidas do campo da Matemática que estuda os triângulos, a fim de auxiliar na análise da resolução das atividades propostas na seqüência.
8 à 11	Verificar que significado atribui a um ângulo, ao triângulo retângulo, às relações trigonométricas seno e cosseno e à lei dos cossenos, com o objetivo de identificar se esse significado pode ser utilizado em um novo contexto, no caso a Geometria Esférica.
12 e 13	Verificar o que o aluno entende como um arco de circunferência e um ângulo central a ela e se ocorre o estabelecimento de relações entre esses objetos matemáticos para a resolução da atividade 5 da seqüência.
14	Verificar quais unidades de medida o educando utiliza na medição de arcos de circunferência a fim de perceber se o mesmo compreende que essa unidade é utilizada na mensuração de distâncias entre dois pontos numa superfície esférica.
15	Verificar quais unidades de medidas atribui para medição do comprimento de circunferência, e de como se calcula o comprimento dessa circunferência, com a finalidade de levantar os conhecimentos prévios a respeito do assunto abordado.
16	Verificar se o educando realiza operações envolvendo graus, minutos e segundos, para desta forma investigar se possuem os conhecimentos necessários para a realização da atividade da seqüência.

Quadro 2 – Objetivos das questões referentes ao questionário aplicado aos alunos

De acordo com as respostas obtidas constatamos que os sujeitos possuíam os conhecimentos prévios referentes a ângulos, triângulo retângulo, relações trigonométricas

seno e cosseno, arco de circunferência, ângulo central a uma circunferência e unidades de medida para medir arcos de circunferência. Já a respeito dos conhecimentos envolvendo a Lei dos Cossenos para um triângulo qualquer, a relação entre um arco de circunferência e o ângulo central que o determina, as operações com graus, minutos e segundos, pudemos verificar que estes não sabiam ou não se lembravam de acordo com as respostas dadas por eles. Acreditamos ser pertinente abordar esses conhecimentos no momento em que os sujeitos se depararem com os mesmos nas atividades da sequência.

3.2 Sujeitos

Em nosso estudo trabalhamos com dois alunos do 2º ano do Ensino Médio, sendo um aluno da rede pública estadual e outro da rede particular, de escolas localizadas na zona leste da cidade de São Paulo.

A fim de resguardar a identidade de cada um dos alunos, seus nomes foram trocados e aqui serão identificados como Márcia e Paulo.

Na ocasião da pesquisa, Paulo tinha 16 anos. Sempre estudou na mesma escola da rede particular de ensino, desde o inicio de sua formação e considera a disciplina de Matemática interessante embora afirme que: "*não me dou muito bem nela na escola*".

Márcia estudou em uma escola da rede pública durante o ensino fundamental I e II e ao ingressar no ensino médio passou a estudar em outra escola da mesma rede. Também tinha 16 anos na época da pesquisa e informou que gosta de matemática, mas possui certa dificuldade.

3.3 Descrição da Aplicação da Sequência Didática

Durante a experimentação, desenvolvemos uma sequência composta por nove atividades, aplicadas a dois alunos do Ensino Médio. Os cinco encontros foram realizados em uma sala previamente reservada na escola onde lecionamos, aconteceram no período de cinco de julho de 2010 a 16 de julho do mesmo ano, totalizando 5 horas e 30 minutos. Os dias dos encontros, as atividades realizadas, a duração dos encontros por dia, podem ser vistos no quadro 3.

Dia	Atividades Realizadas	Duração dos Encontros
05/Julho	01, 02, 03 e 04	1 hora e 20 minutos
08/Julho	05	55 minutos
14/Julho	06 e 07	50 minutos
15/Julho	08	1 hora e 15 minutos
16/Julho	09	1 hora e 10 minutos

Quadro 3 – Cronograma das atividades realizadas pelos alunos

A seguir, realizaremos a análise a *priori* e *posteriori* da sequência didática realizada com os alunos.

3.4 Análise dos Resultados

As análises foram realizadas com base nas atividades de dois alunos do Ensino Médio que estiveram presentes durante todo o período da aplicação das atividades. Ao propor a sequência didática, esperamos que os alunos utilizem e articulem os Registros de Representação Semiótica de Duval (2009).

Apresentaremos, a seguir, as nove atividades que foram adaptadas de Santos (2009) e Pataki (2003), com suas análises a *priori* e *posteriori*, realizadas pelos alunos mencionados.

Atividade 01

Sejam bem-vindos alunos! Vocês agora são parte da tripulação do navio BRA ESFERUS. A missão de vocês é encontrar uma coleção de artefatos militares que, há muitos anos, esteve escondida no Forte São Julião da Barra, em Portugal.

Considerado no passado como o Escudo do Reino, maior fortificação marítima no país, constitui o maior e mais completo complexo militar de defesa remanescente em Portugal.

Para não levantar suspeitas sobre as atividades da marinha brasileira, vocês partirão de San Juan, capital de Porto Rico. Essa missão exige o máximo de sigilo e precisão.

Qual será a distância que a tripulação do BRA ESFERUS deverá percorrer ao sair de San Juan para chegar ao Forte São Julião da Barra?

Análise

Esta atividade tem como objetivo permitir aos sujeitos perceber que somente com os conhecimentos da Geometria Euclidiana não é possível solucioná-la; promover a interdisciplinaridade entre a Geometria Esférica e a Geografia, e proporcionar um estímulo inicial para resolução da sequência.

Acreditávamos que os sujeitos, por razão de seus conhecimentos em Geometria Euclidiana, responderiam que seria em linha reta e percebessem que novos conhecimentos seriam necessários. E ainda, com os conhecimentos que tivessem até o momento, verificassem que a distância do Forte São Julião da Barra até San Juan, não poderia ser determinada.

No diálogo que segue entre a pesquisadora e os sujeitos, observamos as discussões e reflexões entre eles na busca da solução do problema:

***Pesquisadora**: O que acham? Como seria a distância?*

***Paulo**: Em linha reta.*

***Márcia**: Reta.*

***Pesquisadora**: Para tripulação sair da cidade e chegar até o forte só reta é possível?*

***Paulo**: Não vejo outra coisa.*

***Márcia**: Também.*

Percebemos na fala de ambos que a distância deveria ser somente em linha reta. O que vai ao encontro do esperado em relação aos conhecimentos que possuem a respeito do assunto, que não são suficientes.

Atividade 02

a) Para a tripulação do BRA ESFERUS chegar ao Forte São Julião da Barra como você acha que será o percurso percorrido?
b) Em Geometria, qual a figura que você usaria para representar esse percurso?
c) Como você representaria no papel a situação do problema referente à atividade 01?

Análise

Esta atividade tem como finalidade os sujeitos perceberem que a trajetória percorrida pela tripulação seria dada por uma figura não-plana; e que representem, por meio de um registro figural (triângulo, circunferência, reta), a trajetória da tripulação de San Juan até o Forte São Julião da Barra.

Para esta atividade fornecemos a eles um globo terrestre, para manipulação e auxílio nas discussões entre os sujeitos.

No item (a), esperávamos que respondessem que "seria curvo" e justificassem com o fato da Terra ter forma arredondada e/ou que "seria reto", em virtude do conhecimento vindo da Geometria Euclidiana, de que a menor distância entre dois pontos é dada por um segmento de reta.

No item (b) e (c), poderiam usar, como exemplo para a situação, figuras planas como um "segmento" de extremidades dadas pelas coordenadas do Forte São Julião da Barra (F) e San Juan (S) como a figura 23, a seguir:

S_____F ou F_____S

Figura 23 – Representação do segmento SF ou FS

Ou por um triângulo de vértices O, no qual O corresponderia à localização de um observador, F ao Forte São Julião da Barra e S a San Juan como mostra a Figura 24:

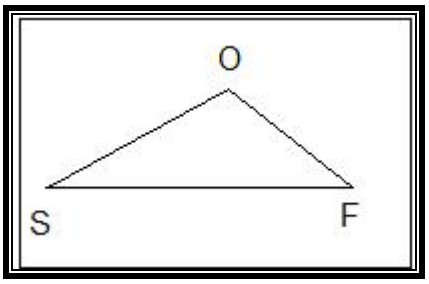


Figura 24 – Representação do Triângulo SOF

Esperávamos que eles percebessem que o percurso de San Juan até o Forte São Julião da Barra fosse feito por um arco de circunferência máxima, conforme mostra a figura 25.

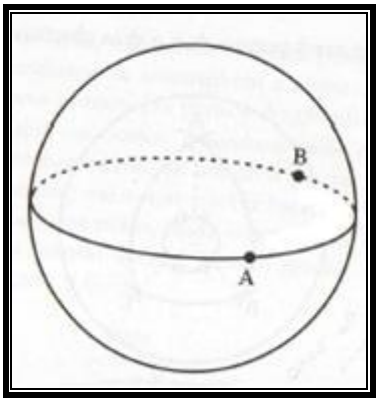


Figura 25 – Representação de um arco de circunferência
Fonte: Coutinho (2001, p. 83)

Para tanto, mobilizariam conhecimentos euclidianos de ponto, plano, curvas, figuras planas (especialmente, o triângulo) e figuras não-planas (representação em perspectiva da esfera). Acreditávamos que dificuldades poderiam surgir na identificação de um arco de circunferência como o caminho percorrido pela tripulação, na representação de uma figura em perspectiva no plano e na compreensão da esfera como um meio de conceber a situação. Levantado o que esperávamos da atividade proposta, apresentamos a seguir as análises das produções realizadas pelos sujeitos.

No item (a), afirmaram que o percurso deveria ser em linha reta. E a figura que melhor representaria esta situação seria um triângulo, conforme podemos ver no registro figural feito por Paulo (figura 26).

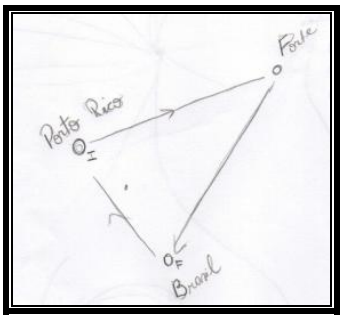


Figura 26 – Protocolo do aluno Paulo referente ao triângulo que representa o problema da atividade 01

No decorrer da realização da atividade Paulo perguntou: "*Onde fica a cidade de Porto Rico em relação ao Brasil?"* Até esta fala, tanto para Paulo quanto para Márcia a trajetória percorrida pelo navio seria em linha reta, por este motivo entendemos ser pertinente pedir a eles que manipulassem o globo terrestre, para que com seu auxílio, pudessem notar que o percurso poderia ser feito por vários "desvios" ou curvas. Paulo considerou então, que a melhor figura poderia ser uma circunferência, como mostra a

figura 27. Os pontos representam a cidade, o forte e o Brasil, que para o aluno representa o observador como esperado inicialmente.

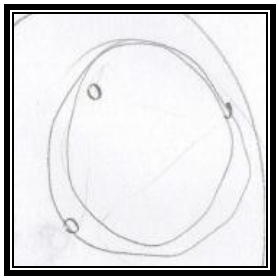


Figura 27 - Protocolo do aluno Paulo referente a circunferência que representa o problema da atividade 01

Percebemos que o globo terrestre foi utilizado como um material manipulativo como destacam English e Halford (1995, p. 97), "são um importante e poderoso sistema de representação na aprendizagem de matemática" (tradução nossa)[6]. Notamos que até o globo ser utilizado pelos sujeitos, ainda acreditavam que o percurso seria em linha reta e a figura que melhor representaria a situação proposta na atividade 01 seria um triângulo. Segundo o autor, um material manipulativo tem pouco significado em si, mas proporciona relações intrínsecas e operações que podem reproduzir os conceitos e procedimentos matemáticos. Estes podem facilitar na construção de *modelos mentais*[7], como podemos notar na figura 27, e que de acordo com English e Halford (1995) dão uma imagem mais adequada das representações que os indivíduos usam para compreender e raciocinar.

Após os sujeitos apresentarem suas soluções e seus argumentos durante a realização da atividade, procedemos com a *institucionalização* quando concluímos que o percurso realizado pelo navio, da cidade (S) até o forte (F) não deveria ser em linha reta e sim, um arco de circunferência, em virtude da forma "esférica" do globo terrestre e que a representação dessa situação seria um arco de circunferência de extremidades S e F.

[6] Em inglês lê-se: Manipulative materials are a significant and powerful representational system in the learning of mathematics.

[7] Modelos Mentais para Halford (1995, p. 23), são: "representações ativas enquanto resolvem um problema particular e fornecem um espaço de trabalho para inferências e operações mentais. [...] tendem a refletir a experiência de um indivíduo, e são normalmente de um conteúdo específico".

Atividade 03

a) Marque um ponto no papel dado. Quantas linhas distintas podem ser traçadas por esse ponto?
b) Você recebeu uma bola de isopor. Marque um ponto nela. Quantas linhas podem ser traçadas por esse ponto? Essas linhas possuem fim?
c) Agora, marque dois pontos na bola de isopor. Ligue-os por vários caminhos. Qual é o menor caminho que liga esses pontos? Esse caminho tem fim?
d) Prolongue esse menor caminho nos dois sentidos. Quantos caminhos você obteve? É possível determinar o comprimento dos caminhos encontrados?
e) Se considerarmos duas linhas distintas, em uma superfície esférica, elas têm ponto de intersecção? Quantos?

Análise

Esta atividade tem como objetivos descrever e definir os caminhos que passam por um ponto e dois pontos distintos em uma superfície esférica; e definir a concorrência de duas circunferências máximas em uma superfície esférica.

Nessa atividade, os sujeitos receberam bolas de isopor e canetas coloridas, cuja manipulação, acreditávamos, facilitaria as reflexões e conclusões das questões propostas. E ainda, que fariam as devidas conversões do registro em linguagem natural para figural, do registro em linguagem natural para o material e, ainda, os tratamentos nesses registros de acordo com a Teoria de Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2009).

No item (a), esperávamos que os alunos respondessem que infinitas retas poderiam ser traçadas por um ponto, em um plano, por ser um postulado da Geometria Euclidiana trabalhado no Ensino Básico.

No item (b), com o auxílio da utilização da bola de isopor esperávamos que eles respondessem que por um ponto poderiam ser traçadas infinitas linhas de comprimento finito, tais como: circunferências menores e circunferências maiores, e/ou retas.

No item (c), esperávamos que eles concluíssem que dois pontos numa superfície esférica poderiam ser ligados por infinitos caminhos, todos de comprimento finito, sendo o menor deles dado por uma curva, ou dissessem que esse menor caminho seria dado por um arco de circunferência, como mostra figura 28. Esperávamos que a conversão do registro

em linguagem natural para o registro figural e/ou material seria facilitada pelas bolas de isopor (registro material).

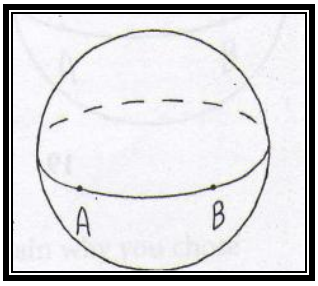


Figura 28 – Representação do menor caminho entre dois pontos
Fonte: Lénárt (1996, p. 15)

No item (d), alguns sujeitos poderiam responder que, obteríamos "infinitos caminhos" unindo os pontos A e B, se não tivessem compreendido que o menor caminho é um arco de circunferência. Para outros, se prolongarmos esse menor caminho nos dois sentidos, a resposta seria "dois caminhos" somente, ou seja, o caminho de A até B e o de B até A, circundando a superfície esférica, o que seria a resposta adequada. Em ambos os casos, os comprimentos desses caminhos poderiam ser determinados.

No item (e), esperávamos que os alunos respondessem que essas linhas distintas teriam "dois pontos" de intersecção, como mostra figura 29, o que poderia ser facilitado com o manuseio da bola de isopor (registro material).

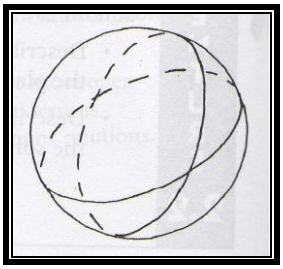


Figura 29 – Representação da intersecção de duas circunferências máximas
Fonte: Lénárt (1996, p. 28)

Nessa atividade, os alunos mobilizariam os conhecimentos da Geometria Euclidiana a respeito de caminhos. Acreditávamos, inclusive, que dificuldades poderiam ocorrer na escolha do menor caminho entre os infinitos caminhos traçados entre dois pontos, o que os conduziria a associá-lo à medida da distância entre dois pontos em uma superfície esférica, aspecto ainda não abordado. Outro impasse seria verificar que dois caminhos de comprimento máximo sempre se interceptam em dois pontos, o que poderia

gerar polêmica, por romper com os conhecimentos a respeito de retas concorrentes no plano. Ainda nesta atividade fizemos a *institucionalização* do termo circunferência máxima, que é definida como reta na Geometria Esférica. Segue a análise das produções realizadas pelos alunos.

No item (a), os alunos responderam que "*infinitas linhas podem ser traçadas por um ponto no papel"* e representaram conforme figura 30.

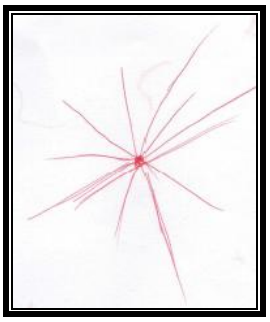


Figura 30 – Protocolo da aluna Márcia referente a infinitas retas no plano que passam por um ponto

Paulo e Márcia em (b), após fazerem a conversão do registro da língua natural (enunciado do item) para o registro material (bola de isopor) e desenharem diversas linhas na bola de isopor passando por um ponto qualquer, como vemos na figura 31, concluíram adequadamente, como podemos constatar na fala de Paulo quando afirmou: "*muitas linhas curvas, com começo e fim no ponto dado"*. Paulo ainda observou que as linhas traçadas, passando por um ponto qualquer, tinham comprimento diferente uma das outras, e questionou o porquê isto acontecia. E então definimos que aquelas linhas que possuem comprimento máximo são chamadas de circunferências máximas ou geodésicas, o que equivale à reta na superfície esférica.

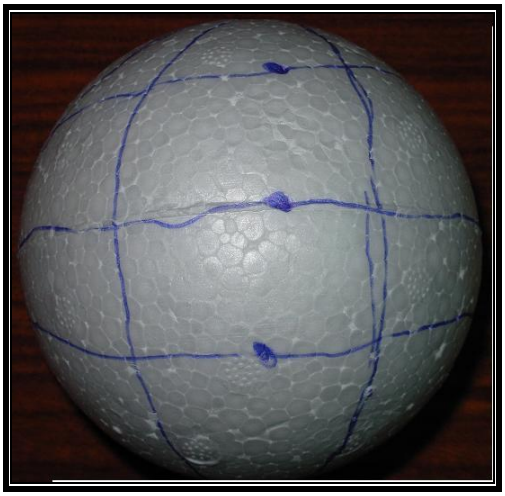


Figura 31 – Protocolo do aluno Paulo referente a infinitas linhas traçadas por um ponto bola de isopor

Em (c), depois de ligarem e nomearem de A e B dois pontos distintos por vários caminhos (figura 32), cada um em sua bola de isopor, Paulo respondeu: "*é a menor distância em linha reta"*, porém Márcia destacou estarem traçando o caminho sobre a bola de isopor, ou seja, não era possível ser em linha reta. Contudo Paulo afirmou que: *"na verdade é linha curva, mas como vimos no item (b) a linha curva é uma reta*", e ainda que a trajetória fosse de: "*comprimento menor com começo meio e fim e em linha curva"*. Reforçando a possibilidade de o caminho ser finito, ou seja, ter comprimento determinado.

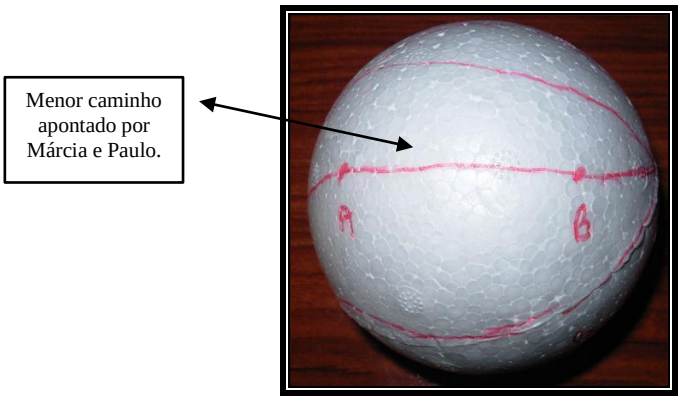


Figura 32 – Protocolo do aluno Paulo referente à existência do menor caminho entre dois pontos em uma superfície esférica

No item (d), ao prolongarem o menor caminho entre dois pontos distintos, ambos consideram somente um caminho, achando que poderiam ser vários tipos de curvas, confirmando a nossa expectativa, já que não observaram que esse caminho é dado por um arco de circunferência. Questionamos a eles se este caminho só tinha a parte da frente, e responderam que não. Márcia afirma: "*tem a parte da frente e a parte de trás, tem dois caminhos*". Aproveitamos então para estabelecer que: por dois pontos distintos quaisquer, em uma superfície esférica, existem várias possibilidades de caminhos. Dizemos que o menor caminho entre dois pontos distintos é um arco de circunferência máxima, o que equivale ao segmento de reta na superfície esférica. Prolongando-se esse menor caminho, nos dois sentidos, as suas extremidades se encontram, determinando dois arcos de comprimento finito.

Em (e), Paulo respondeu: "*que dois caminhos distintos, têm dois pontos de intersecção"*, e aponta para os pontos na bola de isopor e Márcia afirma: *"dependia do caminho que vai ser traçado"*. Aguardávamos essas respostas, uma vez que poderia ocorrer uma ruptura na noção da Geometria Euclidiana a respeito da concorrência entre

retas. Vimos, então, que duas circunferências máximas distintas têm, exatamente, dois pontos de intersecção.

Nesta atividade acreditamos que, com as conversões e tratamentos dos registros produzidos, a idéia da circunferência máxima como uma reta na superfície esférica, pode ter sido compreendida pelos sujeitos e desta forma entendemos que isto promove a continuidade da sequência, o que corrobora com Damm (1999) quando aponta que "o ensino e a aprendizagem de qualquer conhecimento está estreitamente vinculado à compreensão de diferentes registros de representação".

Atividade 04

a) Localize e determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição do Forte São Julião da Barra e a cidade de San Juan.
b) O globo terrestre possui um eixo de rotação imaginário. Como se chamam as intersecções da superfície terrestre com esse eixo?
c) Localize e caracterize o Equador.
d) Identifique quais circunferências máximas você vê na superfície do globo terrestre.
e) Quais das circunferências são denominadas paralelos terrestres?
f) Quais das circunferências são denominadas Meridianos?

Análise

Com esta atividade pretendíamos atingir os seguintes objetivos: localizar um ponto no globo terrestre, e determinar, aproximadamente, a posição global do Forte e da cidade, determinando suas coordenadas geográficas (latitude e longitude). Tinha também por finalidade localizar e definir os Pólos Terrestres; identificar e definir o Equador, os Paralelos Terrestres e Meridianos, relacionando-os às circunferências e semi-circunferências máximas.

No item (a), esperávamos que os sujeitos localizassem um ponto no globo terrestre e descrevessem o caminho, utilizando os conhecimentos das coordenadas geográficas que abrangem o Equador, os Meridianos, e os Paralelos terrestres. Acreditávamos que responderiam que a localização seria feita pelas coordenadas geográficas do ponto, que são a latitude e longitude.

Para a latitude, julgávamos que eles procurariam, ao Norte, um paralelo terrestre próximo, pois havia uma graduação no globo terrestre de 10º em 10º. Para a longitude, a intersecção do Equador com um Meridiano próximo, observando que 0º corresponde ao Meridiano de Greenwich, bem como se a direção é Leste ou Oeste. Acreditávamos que a posição aproximada do Forte e da cidade seria conseguida com êxito.

Foi fornecido para os alunos um globo terrestre, com objetivo de facilitar suas reflexões e conclusões a respeito da atividade.

No item (b), acreditávamos que os sujeitos responderiam que as intersecções do globo terrestre com o eixo de rotação são chamadas de pólos, por serem objetos de estudo da Geografia, desde o Ensino Fundamental, como mostra a figura 33.

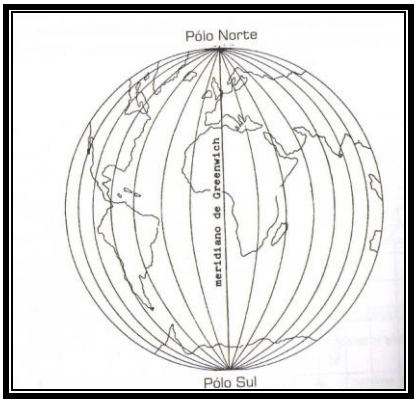


Figura 33 – Representação dos Pólos Terrestres
Fonte: Duarte (2006, p. 48)

Em (c), esperávamos que eles localizassem corretamente o Equador, em virtude do termo já ter sido trabalhado e institucionalizado no item (a), mas a caracterização poderia ser também como "arco de circunferência que divide o globo em dois hemisférios" ou como "circunferência máxima que separa o globo em duas partes", ou ainda, "linha imaginária que divide o globo em dois hemisférios", por ser uma das definições dadas em Geografia.

No item (d), tínhamos como objetivo verificar se os sujeitos identificariam os tipos de circunferências presentes na superfície do globo terrestre como circunferências máximas ou maiores (equador) e circunferências menores (paralelos terrestres).

Em (e), acreditávamos que os sujeitos poderiam denominar os Paralelos Terrestres como "circunferências de raios menores", uma vez que já haviam percebido a existência de circunferências máximas e necessitassem complementar que essas circunferências deveriam ser "paralelas" ao Equador.

Já em (f), esperávamos que os sujeitos denominassem os Meridianos como “circunferências máximas” ou “circunferências máximas que passam pelos pólos” ou também como “semicircunferências máximas que passam pelos pólos”.

Para isso, os alunos necessitariam mobilizar conhecimentos provenientes da Geografia, tais como, pólos, eixo de rotação terrestre, Equador, Meridianos e Paralelos Terrestres, e também os conhecimentos sobre circunferências e semicircunferências máximas já estudadas anteriormente.

Além disso, acreditávamos que poderiam ter dificuldades em definir Meridianos como semicircunferências máximas e poderiam considerá-los como circunferências máximas, se não tivessem observado que uma das definições dadas em Geografia é que “são semicírculos imaginários traçados sobre a Terra de pólo a pólo”. Nesta atividade pretendíamos institucionalizar conceitos da Geografia, como: latitude, longitude, Equador, Meridianos, e suas relações com a Geometria Esférica. A seguir as análises referentes às produções realizadas pelos alunos.

No item (a) os alunos, com auxílio do globo terrestre, localizaram a cidade de Porto Rico e o forte que se encontra no mar próximo a Portugal. Para determinar a posição aproximada da cidade e do forte, ficaram com dúvidas. Questionamos qual conhecimento era necessário para localizar uma cidade nas aulas de Geografia. Os sujeitos citaram a latitude e longitude, porém não lembraram como determiná-las na situação dada.

Dessa forma informamos que a latitude ϕ de um lugar L é a medida do arco de meridiano, que vai do Equador ao paralelo do lugar, sendo chamada Norte, se pertencer ao Hemisfério Norte e chamada Sul, se estiver no Hemisfério Sul, conforme figura 34. A sua unidade de medida é, usualmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0^o a 90^o[8].

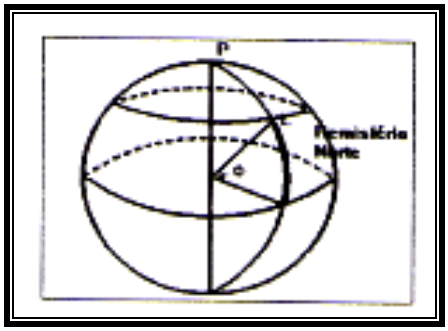


Figura 34 – Representação da latitude de um lugar L
Fonte: Pataki (2003, p. 105)

[8] Nos baseamos na definição dada por Coutinho (2001,p.89) para latitude e longitude.

A longitude λ de um lugar L é a medida do arco de Equador, com extremos na intersecção do Meridiano de Greenwich com o Equador e na intersecção do meridiano do lugar com o Equador. Será denominada Leste, se o lugar ficar à direita do observador (que estará de frente para aquele meridiano) e Oeste, se estiver à esquerda,conforme figura 35. A sua unidade de medida é, geralmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0º a 180º. A latitude e a longitude formam o Sistema de Coordenadas Geográficas.

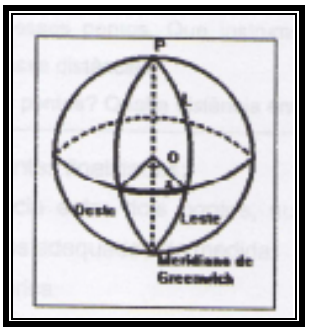


Figura 35 – Representação da longitude de um lugar L
Fonte: Pataki (2003, p. 106)

Após relembrarmos qual o significado da latitude e longitude de um ponto, Paulo e Márcia, com auxílio do globo terrestre, registraram as latitudes e longitudes da cidade e do forte, conforme figura 36.

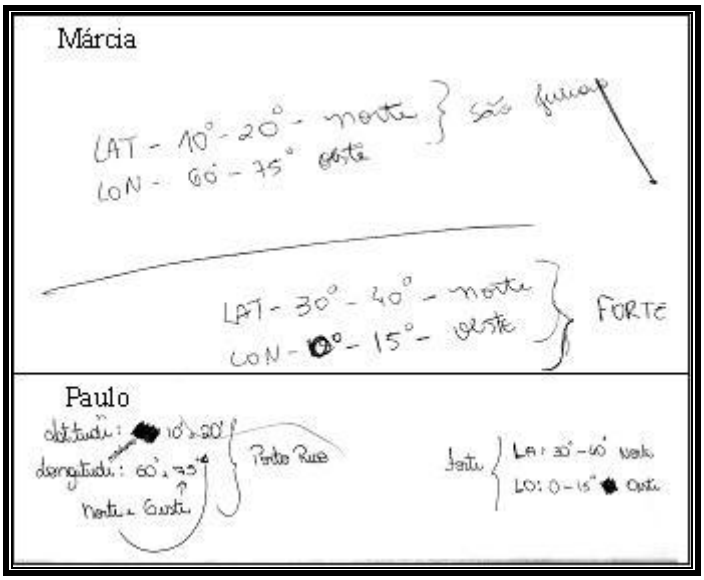


Figura 36 - Protocolo de Paulo e Márcia referente à latitude e longitude da cidade e do forte

Ao solicitarmos aos sujeitos no item (a) as coordenadas geográficas propostas na atividade, entendemos haver a necessidade de aprofundar o conhecimento dos componentes latitude e longitude da cidade e do forte, para então localizarem suas posições aproximadas. De acordo com English e Halford (1995), quando os alunos identificam esses

componentes e têm um modelo do que foi proposto, eles podem proceder para desenvolver um modelo do problema indicado. Para o autor, isto pode ser feito com auxílio de materiais manipuláveis, no caso, o globo terrestre. Desta forma, entendemos que os alunos com os conhecimentos referentes ao sistema de coordenadas geográficas e em contato com o globo perceberam as graduações localizadas nele que permitiram encontrar as posições da cidade e do forte, registradas como podemos ver na figura 36. English e Halford ainda destacam que a estrutura de modelos concretos e a linguagem que o acompanha são particularmente importantes para ajudar os alunos a formar uma representação significativa do que foi proposto.

Os alunos questionaram como faríamos para saber precisamente a posição da cidade e do forte. Perguntamos a eles se conheciam o Google Earth[9]. Disseram-nos que sim e comentamos que poderiam utilizar essa ferramenta para obter, de forma mais precisa, as coordenadas geográficas da cidade e do forte. Então, com o auxílio do Google Earth obtivemos as seguintes coordenadas: do forte, $\phi_F = 38º40'N$ e $\lambda_F = 9º19'W$ e da cidade $\phi_S = 18º27'N$ e $\lambda_S = 66º06'W$. Não nos aprofundamos na utilização do Google Earth, bem como nas interações dos sujeitos com essa ferramenta, pois o objetivo desse uso era obter apenas as coordenadas geográficas de forma mais precisa a fim de auxiliar nos cálculos da atividade 09.

No item (b), os alunos responderam que os pólos são as intersecções do globo terrestre com seu eixo de rotação imaginário.

Na questão (c), os dois alunos localizaram adequadamente o Equador e Márcia disse que este "*divide a terra em norte e sul"*.

Percebemos no item (d), que Paulo e Márcia reconheceram o Equador e o Meridiano de Greenwich como circunferências máximas. Disseram que existiam "muitas" circunferências máximas, porém não tinham nomes especiais.

Em (e), ambos citaram os trópicos de Câncer e Capricórnio. Não esperávamos essas respostas de cunho geográfico.

Já em (f), os alunos identificaram que os meridianos eram "meia" circunferência (semi-circunferências) que vão de um pólo ao outro e perceberam ainda que o meridiano

[9] É um programa de computador que permite a visualização de imagens aéreas e de satélite em alta resolução, fotos, terrenos elevados, marcadores de ruas e rodovias, listas comerciais. Informação retirada no site: http://earth.google.com/support/bin/static.py, acesso feito em: 21/03/2011.

de Greenwich era uma semicircunferência máxima, e não uma circunferência máxima como haviam respondido no item (d)

A atividade proposta possibilitou que fossem percorridas todas as fases da Teoria das Situações Didáticas como a *formulação*, em que, por meio de discussões, os alunos declararam que os Meridianos são *"'meias-circunferências' que vão de um pólo ao outro, passando pelo eixo de rotação da terra"*; *validação* quando Paulo afirmou que os Meridianos são *"todas as semicircunferências máximas que interceptam o eixo de rotação da terra e cortam o equador em dois pontos"*. Após as discussões realizadas pelos sujeitos estabelecemos as seguintes definições:

Na Terra, há referencias fundamentais, como os Pólos, o Equador, os Meridianos, os Paralelos (figura 37).

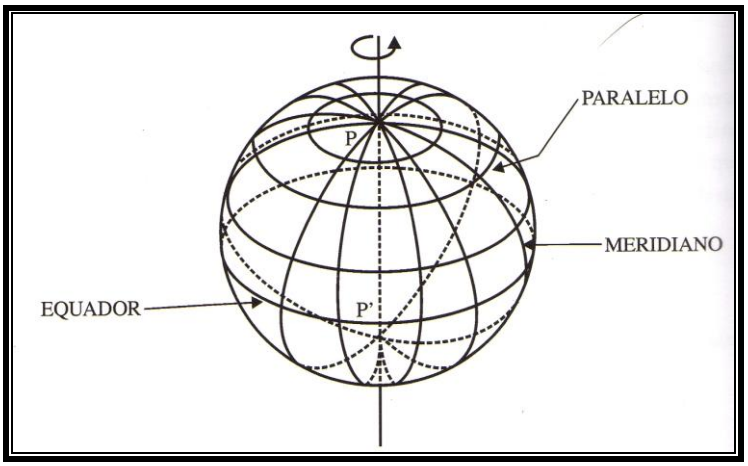


Figura 37 – Representação do Equador, Paralelos e Meridianos
Fonte: Coutinho (2001, p. 88)

Dizemos que a Terra gira, diariamente, no sentido anti-horário em torno do seu eixo de rotação imaginário. Esse eixo intercepta a superfície terrestre em dois pontos chamados Pólo Norte e Pólo Sul.

Temos uma circunferência máxima denominada Equador, cujo diâmetro é perpendicular ao eixo de rotação da Terra. O equador divide o globo em duas partes iguais o Hemisfério Norte e o Hemisfério Sul.

Existem, também, várias semicircunferências máximas chamadas Meridianos, que vão de um pólo ao outro. Sendo que, pelos pólos, passam dois meridianos, um é o antimeridiano (ou antípoda) do outro.

Além disso, há diversas circunferências menores paralelas ao Equador que são os *Paralelos terrestres*. À direção anti-horária do giro da Terra chamaremos de Leste e a direção oposta de Oeste.

Atividade 05

Como você observou, unindo dois pontos distintos em uma superfície esférica, obtemos um arco de circunferência.

a) Procure medir a distância entre esses pontos. Como você mediu essa distância?

b) Há uma única distância entre esses pontos? Qual a distância entre os pólos Norte e Sul?

Análise

Esta atividade tem como objetivo definir e medir a distância entre dois pontos, em uma superfície esférica, utilizando instrumentos adequados de medida; construir uma régua esférica e ainda reconhecer a unidade de medida usada na atividade.

Serão colocados à disposição dos alunos, sem comentário algum, os seguintes materiais: régua em cm, cortes de barbante, fita métrica, tira de cartolina, além de bolas de isopor.

No item (a), acreditávamos que os sujeitos tentariam utilizar, inicialmente, a régua em cm e ao verificar a impossibilidade de medir com ela, buscariam outros instrumentos e, finalmente, concluiriam ser a fita métrica o mais adequado para medir a distância entre dois pontos em uma unidade de comprimento conhecida.

Após as discussões, esperávamos que considerassem que uma das unidades de comprimento de um arco de circunferência poderia ser dada em graus e/ou radianos, e a fita métrica então não seria o instrumento mais adequado. Desta forma poderiam perceber a necessidade de confeccionar um instrumento para esse fim, sendo a tira de cartolina uma alternativa para medir a distância entre dois pontos em uma superfície esférica. Quanto às unidades de medida dessa distância, poderiam concluir ser em graus ou radianos.

Em (b), acreditávamos que os sujeitos poderiam determinar que a distância entre os dois pontos "não seria única", porque foi visto que "prolongando-se o menor caminho entre dois pontos distintos, numa superfície esférica, dois arcos de comprimento finito são

determinados" (Atividade 03) e a medida desse comprimento poderia ser definida. Também poderiam considerar, intuitivamente, ser apenas uma distância pelos conhecimentos da Geometria Plana. Esperávamos que a ruptura no estabelecimento de uma unidade de medida conhecida para determinar a distância entre dois pontos poderia ser provocada quando solicitássemos a distância entre os pólos Norte e Sul, ao verificarem ser única e correspondente a 180º.

Para esta atividade esperávamos que fossem mobilizados os conhecimentos de Geometria Euclidiana a respeito das unidades de comprimento do arco de circunferência e comprimento de uma circunferência dada, em graus e radianos; da relação entre as unidades de medida, grau e radiano, bem como entre a medida do ângulo central e o comprimento do arco correspondente, além das noções institucionalizadas anteriormente, como arco de circunferência máxima e circunferência máxima. E ainda acreditávamos que os alunos poderiam apresentar dificuldades em relacionar e/ou perceber a correspondência entre um arco de circunferência e o ângulo central que o determina.

Provavelmente, para medir a distância entre dois pontos, poderiam surgir dificuldades relacionadas com a unidade de medida adequada (o grau), o que pode romper com a idéia de medir uma distância entre dois pontos, utilizando o sistema métrico decimal. Outro ponto de dificuldade poderia ser a confecção de um instrumento para medir a distância entre dois pontos, em uma superfície esférica, que, no caso, seria uma construção inédita. Seguem as análises referentes às produções dos alunos.

No item (a), Paulo e Márcia, cada um com uma bola de isopor, marcaram dois pontos e traçaram um arco unindo-os, colocaram o barbante sobre ele, o esticaram e mediram com uma régua o seu comprimento. A medida encontrada por Paulo foi de 6 cm e a de Márcia foi 10,5 cm. Questionamos a eles a respeito de terem encontrado diferentes medidas para o comprimento dos arcos e ambos disseram que era porque haviam traçado pontos diferentes na bola de isopor. Após este questionamento, intervirmos com os sujeitos para esclarecermos se conseguiam estabelecer outras unidades de medida para o arco, como segue diálogo:

> ***Pesquisadora**: Essa é a única unidade de medida possível para medir a distância entre esses pontos que fizeram na superfície esférica (bola de isopor)?*
>
> ***Paulo**: Não sei se é a única, mas acho que é mais ideal pelo tamanho, o cm é a melhor medida para tamanhos pequenos.*

***Pesquisadora**: E se a bola fosse maior, ou lembrem lá da atividade 01 queremos a distância entre San Juan e o forte, que é uma grande distância, ainda seria o cm?*

***Márcia**: Então pode ser o km, para maiores distâncias.*

Paulo e Márcia não perceberam até o momento que o arco de circunferência máxima ou o segmento de reta da Geometria Esférica é uma relação entre o arco de circunferência e o ângulo central correspondente a ele. E continuam achando que o centímetro, o quilômetro sejam a melhor unidade de medida. Indo ao encontro do que esperávamos em nossas análises a priori e ao que foi respondido no questionário aplicado a eles. Na questão 12 do mesmo, tanto Paulo como Márcia, identificaram o arco de circunferência e o ângulo central, como vemos na figura 38. E responderam que o grau e o radiano são usados como unidades de medida para medir arcos de circunferência. Porém, na questão 13, ao serem questionados se sabiam qual era a relação entre o arco de circunferência e o ângulo central, Márcia respondeu com o mesmo desenho da questão 12 (figura 38) e Paulo escreveu: *o ângulo central determina os raios de circunferência*. Concordamos com English e Halford (1995) quando estes destacam que entender um conceito implica ter uma representação interna, cognitiva ou um modelo mental que reflete a estrutura desse conceito. E notamos, então, que esta relação não era tão intuitiva como esperávamos, frente às respostas dadas por eles.

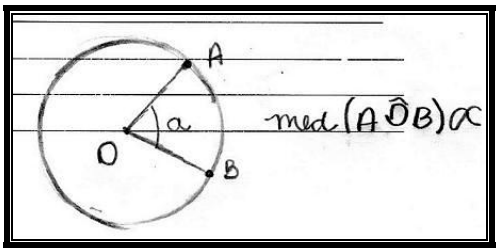


Figura 38 - Protocolo da aluna Márcia referente ao arco de circunferência e o ângulo central

Frente a essa percepção, desenhamos no papel dois ângulos (um obtuso e outro agudo), e solicitamos que medissem os ângulos, Márcia pediu uma régua para medir os ângulos e disse: *"ela tem um nome especial não lembro, qual é?"*. Paulo diz: *"transferidor*". Feito isto, pedimos que traçassem uma circunferência com centro no vértice do ângulo a ser medido, com auxílio do compasso. Isto para perceberem a relação entre o comprimento de arco de circunferência e o ângulo central, e chegarem à unidade de medida para medir o arco de circunferência. Destacamos a seguir um trecho de nossa mediação com os alunos:

***Pesquisadora**:* O *transferidor serve para medir ângulos no plano do papel. Voltando para a bola de isopor, vocês começaram a medir o arco de circunferência com um barbante, colocaram o barbante no arco, esticaram-no no papel, e mediram a distância em cm com a régua. De novo, minha pergunta, o centímetro, o quilômetro, o metro são as unidades de medida mais indicadas para medir a distância entre os dois pontos que desenharam na bola de isopor?*

***Paulo**: Não. O ângulo também é a unidade de medida, e 'enxerga' o arco.*

***Pesquisadora**: Na verdade não é o ângulo a unidade de medida. O que é?*

***Paulo**: O grau.*

***Pesquisadora**: Concorda Márcia?*

***Márcia**: Concordo. Não estava conseguindo entender porque a distância entre os pontos é dada em graus, mas com os desenhos que você pediu para fazermos dos ângulos e depois traçar as circunferências e com o que o Paulo disse do ângulo 'ver' o arco, acho que estou começando a entender.*

***Pesquisadora**: Então, eu pergunto, a gente pode medir a distância entre dois pontos na bola de isopor com o transferidor?*

***Paulo**: Não. Porque não é superfície reta.*

***Pesquisadora**: Como faríamos para achar esta distância em graus? O que vocês poderiam utilizar para fazer esta medição?*

***Paulo**: Acho que com a cartolina podemos transformar a 'reta' em ângulo.*

Interpretamos que quando cita o termo "reta" se refere a uma linearização do arco. Perguntamos o que vem a ser "reta" para ele, e este diz: *"centímetro, metro, quilômetro"*, isto é, Paulo propõe transformar a unidade de comprimento para medir a distância entre dois pontos de uma reta no plano (*cm*, *km*, *mm*, entre outros) em graus.

Paulo sugere a confecção de uma régua com a cartolina e que esta seja graduada de 60º em 60º. Para isto, coloca a cartolina em volta da circunferência máxima da bola de isopor (diâmetro 10 cm) e anota a medida do comprimento dessa circunferência que é de 32 cm. E monta a seguinte regra de três, como podemos ver em seu registro numérico (figura 39):

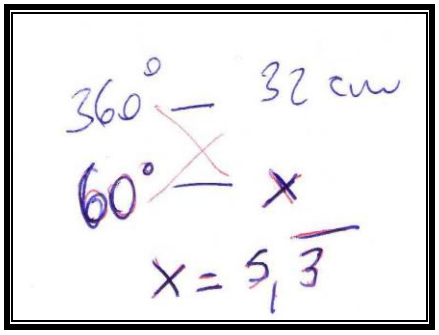


Figura 39 – Protocolo referente ao registro produzido por Paulo

Na tira de cartolina, com a régua, faz a marcação de 5,3 cm e nesta marcação escreve 60º. Novamente, com a régua marca 5,3 cm e anota 120º na cartolina, e assim, sucessivamente, até completar 360º, conforme podemos ver na figura 40.

Figura 40 – Protocolo do aluno Paulo de uma régua esférica

Já Márcia sugere que a graduação da cartolina seja feita de 20º em 20º. Coloca a cartolina em volta da circunferência máxima da bola de isopor (diâmetro 10 cm) e anota a medida do comprimento dessa circunferência que é de 32 cm. E escreve o seguinte registro numérico (figura 41):

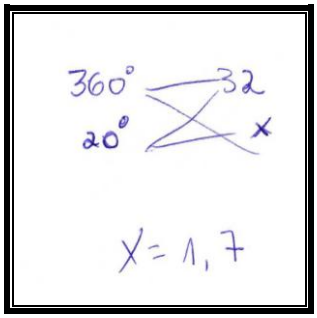


Figura 41 – Protocolo referente ao registro realizado por Márcia

Com auxílio da régua, faz a marcação na tira de cartolina de 1,7 cm e anota 20º na mesma. Depois novamente marca 1,7 cm, escreve 40º, e assim por diante até completar 360º, como podemos ver na figura 42:

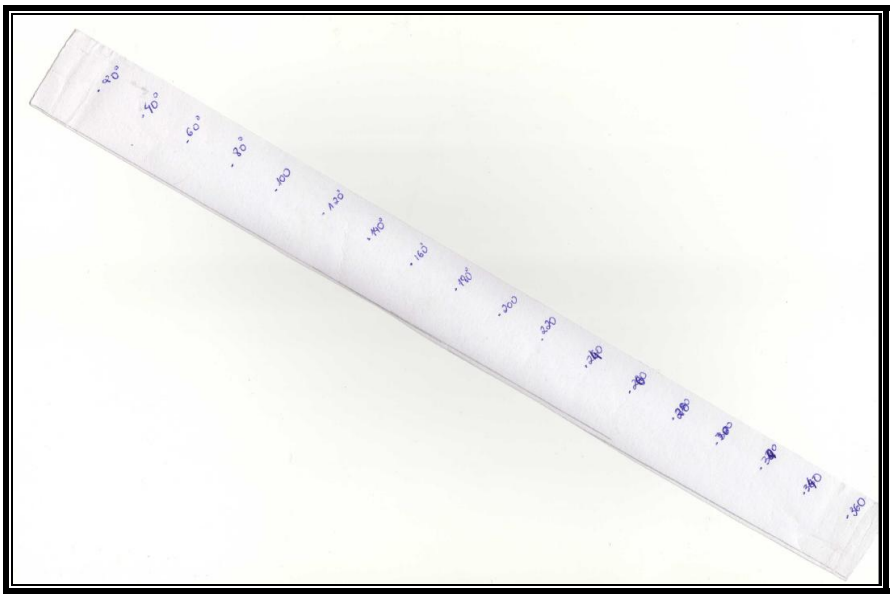


Figura 42 – Protocolo da aluna Márcia de uma régua esférica

Confeccionada a régua esférica pelos sujeitos, cada um com a sua, fizeram a medição da distância entre os dois pontos traçados em suas bolas de isopor. Márcia e Paulo verificaram que a distância, respectivamente, seria aproximadamente de 118º e 68º. Feita a medição questionaram qual seria o melhor intervalo para graduar a régua. Pedimos que refletissem e ambos responderam que não existia um melhor, que as duas réguas serviam para medir as distâncias. E que talvez uma graduação de 10º em 10º fosse mais precisa.

Essa atividade foi seguida de muitas discussões, para que cada um pudesse validar suas idéias e, após alguns debates, concluíram que o instrumento de medida da distância entre dois pontos em uma superfície esférica deveria ser um material maleável e que a

unidade de medida do comprimento de um arco de circunferência poderia ser o grau, denominando a tira de cartolina de *régua em graus*.

Percebemos que os alunos desenvolveram um *modelo mental* adequado ao confeccionarem a *régua em graus* para fazer medições de distâncias em uma superfície esférica. English e Halford (1995, p. 48, tradução nossa)[10] enfatizam que "modelos mentais podem nortear o desenvolvimento de estratégias e a aquisição de habilidades cognitivas". Os autores destacam que a maior vantagem das estratégias e habilidades baseadas em modelos mentais é que elas podem ser adaptadas para mudar as circunstâncias. E mais, modelos mentais constituem um conhecimento que pode ser transferido para outros contextos e usado para gerar novas estratégias para aquele. Notamos isso quando Paulo propõe transformar a "reta" em ângulo com a cartolina e utiliza o algoritmo da regra de três, ou seja, adapta aquilo que já conhece, no caso a relação (grau – centímetro), e a transfere para o contexto de confeccionar um instrumento para medir distâncias na superfície esférica.

Na questão (b), ambos responderam duas distâncias "*uma maior e outra menor*". Paulo respondeu: *"180º, pois a distância entre os pólos é a metade da circunferência que passa por eles de medida 360º"*. Márcia concorda com Paulo, porém não justifica.

Percebemos que o processo de ensino e aprendizagem passou pela fase de *formulação* quando os alunos criaram um instrumento de medida – a régua esférica – e estabelecemos que:

Dois pontos dividem a superfície esférica em dois arcos de circunferência e para medirmos um arco, necessitamos compará-lo com outro, unitário: o grau ou o radiano. Para medirmos o arco que une dois pontos nele contido, usamos o instrumento por eles denominado *régua em graus* e que a partir de agora chamaremos de régua esférica. A unidade de medida é o grau. Observa-se, entretanto, que há duas medidas possíveis de distância entre dois pontos na superfície esférica. Adotamos a menor delas.

[10] Em inglês lê-se: Mental models can guide the development of strategies and acquisition of cognitive skills.

Atividade 06

Na bola de isopor que você possui, faça o esboço de duas circunferências máximas.

a) Quantos são os pontos de intersecção e quantos são os arcos determinados por esses pontos?

b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na bola de isopor? Quantos?

c) Se existir algum ângulo na superfície esférica (bola de isopor), defina esse ângulo. Que elementos o constituem?

d) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura desse ângulo? E como faria para medi-lo?

Análise

Esta atividade tem como objetivos identificar e definir ângulo, em uma superfície esférica, como formado pela intersecção de duas circunferências máximas; e utilizar a unidade de medida grau ou radiano como adequada para ângulo esférico.

No item (a), esperávamos que respondessem que houvesse dois pontos de intersecção entre duas circunferências máximas e quatro arcos determinados por esses pontos, conforme figura 43.

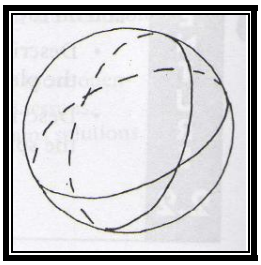


Figura 43 – Representação em perspectiva de duas circunferências máximas
Fonte: Lénárt (1996, p. 28)

Em (b), acreditávamos que os sujeitos responderiam que "sim" e identificariam oito ângulos.

Em (c), esperávamos que definissem ângulo esférico como uma figura "formada por dois arcos de circunferências máximas" e também como "a região limitada por dois arcos de circunferências máximas", qualquer uma das afirmações poderiam ser consideradas satisfatórias. Acreditávamos ainda que pudessem encontrar os elementos do

ângulo esférico, porém teriam dificuldades em nomear os elementos de um ângulo como sendo lados (arcos de circunferências máximas) e vértices (ponto de intersecção dos arcos de duas circunferências máximas).

Na questão (d), entendemos que seria provável eles responderem que a unidade de medida para medir a abertura de um ângulo esférico fosse o grau e que o transferidor plano não seria um instrumento de medida adequado, devendo ser de um material maleável.

Assim, para essa situação, deveriam ser mobilizados os conhecimentos de arco de circunferência máxima, ângulo plano e seus elementos e unidade de medida de um ângulo plano e, como mencionamos, uma dificuldade poderia estar na denominação dos elementos de um ângulo esférico, possivelmente, por julgarem serem diferentes do que conheciam. A seguir apresentamos as análises das produções realizadas pelos sujeitos.

Na questão (a), ao realizarem a conversão do registro em língua natural (enunciado da questão) para o registro material (bola de isopor) puderam identificar dois pontos de intersecção entre as duas circunferências máximas e quatro arcos formados pelos dois pares de pontos, o que nos leva a acreditar que estas conclusões foram facilitadas pelo uso do registro material (bola de isopor), como vemos na figura 44.

Figura 44 – Protocolo da aluna Márcia referente aos pontos de intersecção e arcos

Em (b), Paulo e Márcia identificaram primeiramente quatro ângulos esféricos, porém Paulo observou o outro ponto de intersecção entre as circunferências máximas e modificou para oito ângulos.

No item (c), os sujeitos sentiram dificuldade em definir e identificar os elementos que constituem o ângulo na superfície esférica. Por esta razão, propusemos a seguinte questão: "*o que é preciso para se formar um ângulo no plano"*? Originando a seguinte discussão:

***Paulo**: Três pontos.*

***Pesquisadora**: Represente no papel o que está dizendo.*

Paulo elabora a seguinte representação, conforme figura 45.

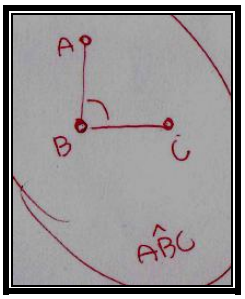


Figura 45 – Protocolo do aluno Paulo referente ao registro figural e simbólico do ângulo no plano

***Paulo**: Os elementos são o vértice B que representa o ângulo, e os segmentos de retas AB e BC.*

***Pesquisadora**: Então, como podemos representar o ângulo B?*

***Márcia**: Acho que $A\hat{B}C$, é melhor, mais prático.*

***Paulo**: Concordo.*

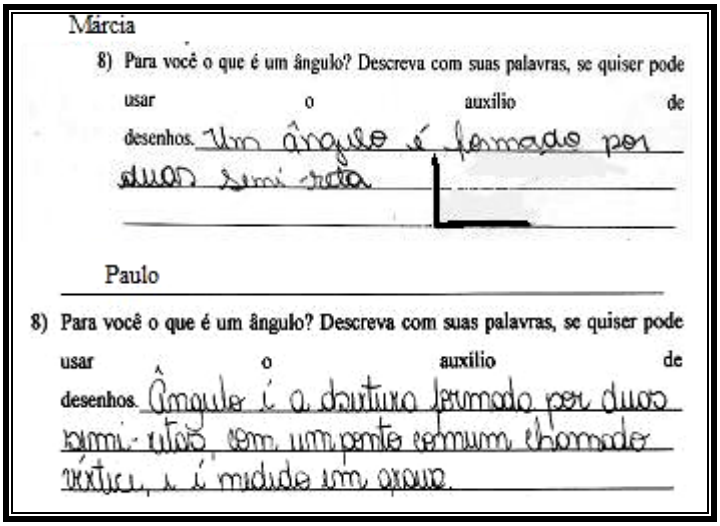
***Pesquisadora**: Observem os ângulos na bola de isopor novamente, e indiquem e nomeiem um ângulo qualquer.*

***Paulo**: O ângulo A, este ângulo é o vértice desse ângulo e os arcos de circunferência máxima são os "segmentos" que o constituem.*

***Márcia**: Concordo com Paulo.*

Percebemos que, ao tentar definir ângulo no plano, o aluno Paulo utiliza dois registros de representação semiótica: figural e o simbólico. Ao questionarmos como representariam o ângulo, por suas falas, destacamos as vantagens de um registro em relação ao outro, um proporciona a compreensão dos elementos que constituem um ângulo (registro figural) e o outro permite uma fluidez na escrita (registro simbólico). O que não significa a valorização de um em detrimento do outro, mas sim uma melhor adequação do registro ao que é solicitado, como defende Duval (2009).

Identificamos por meio do questionário aplicado aos sujeitos, na questão 8, que estes possuíam conhecimentos a respeito de ângulos como podemos verificar na figura 46 abaixo:


Márcia

8) Para você o que é um ângulo? Descreva com suas palavras, se quiser pode usar o auxílio de desenhos. Um ângulo é formado por duas semi-reta

Paulo

8) Para você o que é um ângulo? Descreva com suas palavras, se quiser pode usar o auxílio de desenhos. Ângulo é a abertura formado por duas semi-retas, com um ponto comum chamado vértice, e é medido em graus.

Figura 46 – Resposta dada pelos alunos a questão 8

Deste modo, entendemos que se os sujeitos possuem os conhecimentos a respeito do objeto matemático, ângulo, logo podemos inferir que seus registros de representação se mostram relevantes. A este respeito Almouloud (2007, p. 72) ressalta que: "falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da matemática".

Em (d), os alunos responderam que a unidade de medida da abertura de um ângulo esférico também seria o grau, como na Geometria Plana. E ainda, consideraram o transferidor plano inadequado como instrumento de medida de um ângulo esférico, como podemos verificar na fala de Paulo quando afirma: *"o transferidor é usado no papel"*.

Ao serem indagados como fariam para medir o ângulo esférico, Paulo sugeriu: *"posso representar a esfera com o ângulo, no papel e meço com o transferidor"*. Pedimos então que fizesse a representação no papel, que pode ser vista na figura 47.

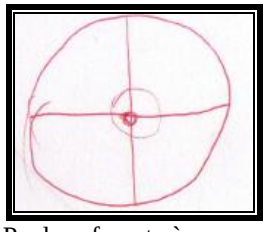


Figura 47 – Protocolo do aluno Paulo referente à representação figural da circunferência

Paulo, ao realizar a conversão do registro material (bola de isopor) para o registro figural (figura 47), faz a representação do ângulo esférico de forma planificada. Questionamos se a representação do ângulo feita estava de acordo com a bola de isopor, e

este respondeu que não. Para Duval (2009), a maior parte dos problemas de ensino e de aprendizado da Geometria que envolve a coordenação de diferentes registros de representação ligados ao tratamento dos conhecimentos, não se opera espontaneamente, mesmo em um ensino que mobilize esses diferentes registros. Ainda para o autor modificar a forma de uma representação:

> [...] se revela ser, para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e, por vezes, mesmo impossível. Tudo se passa como se a compreensão que a grande maioria dos estudantes tivesse de um conteúdo ficasse limitada à forma de representação utilizada. (DUVAL, 2009, p. 34)

Após essa discussão, os sujeitos sugeriram a utilização da régua esférica, mas Paulo afirma: *"esta régua mede distâncias na esfera, e não ângulos"*, Márcia concorda. Então, Paulo sugere o transferidor com nome de transferidor esférico. Percebemos, com sua resposta, que o mesmo interpreta de modo correto a medição de um ângulo esférico, o que vem ao encontro do esperado para esta questão. Paulo, ainda, nos pergunta como seria esse transferidor. Explicamos que esse instrumento poderia ser confeccionado em cartolina, na forma de uma circunferência dividida em 24 partes de 15º, por exemplo, que correspondem aos fusos, ou poderia ser confeccionado em acrílico como o do material de Lenárt (1996). Mostramos a eles esse material com intuito de responder à questão levantada por Paulo a respeito do transferidor.

Durante a atividade, notamos o saber em seus diferentes aspectos, desde o instante em que os alunos inferiram em relação ao conteúdo em estudo quando Paulo definiu um ângulo esférico como: *"um ângulo A é o vértice desse ângulo e os arcos de circunferência máxima são os segmentos dele"*.

Acreditamos que os alunos vivenciaram as fases da Teoria das Situações Didáticas como, na fase de *formulação* em que os alunos discutiram qual instrumento, *transferidor esférico*, seria o mais adequado para medir ângulos em uma superfície esférica.

Atividade 07

Na bola de isopor, marque três pontos distintos, tais que dois a dois pertençam a uma mesma circunferência máxima. Ligue esses pontos, usando a régua esférica que você construiu.

a) Descreva a figura encontrada. Ela se assemelha alguma figura da Geometria Plana? Que nome você daria a essa figura?

b) Faça na bola de isopor, um esboço, da atividade 01, de tal maneira que o vértice (F) seja o ponto de localização do forte, o vértice (S) seja o ponto de localização da cidade e o vértice (P) esteja no pólo. A figura encontrada no item anterior pode representar a situação proposta na atividade 01?

Análise

Esta atividade tem por finalidade identificar e definir triângulo em uma superfície esférica; e representar a situação da atividade 01 por meio de um triângulo esférico, cujos vértices são um pólo, o forte e a cidade.

No item (a), acreditávamos que, ao ligarem os três pontos distintos, nas condições dadas, a figura encontrada seria facilmente identificada como um triângulo, que se assemelharia a um triângulo plano, apesar de estar em uma superfície esférica. Poderiam descrever a figura como composta por três lados e três vértices, ou diriam por três arcos de circunferências máximas e três vértices, que são pontos de intersecção dos arcos.

Em (b), julgávamos que o triângulo seria esboçado e os seus vértices nomeados adequadamente.

Esta situação mobilizaria os conhecimentos já institucionalizados, para que fosse possível o esboço do triângulo nas condições dadas pela situação da atividade 01; manuseio da régua esférica para o traçado dos lados do triângulo e a representação da posição aproximada do forte, da cidade e de um pólo, a partir das coordenadas geográficas. Dessa forma aguardávamos que não houvesse dificuldade na resolução da atividade. Apontamos a seguir as análises das produções obtidas pelos alunos.

Na questão (a) da atividade o aluno Paulo não compreendeu o enunciado. Márcia, por sua vez, realizou a conversão do registro em língua natural para o registro material com sucesso. Em seguida, Paulo realizou o mesmo em sua bola de isopor. Os dois acharam que a figura se assemelhava a um triângulo, dando-lhe o nome de *"triângulo esférico".* Ambos

caracterizaram como uma figura com três lados de arcos de circunferências máximas e três vértices que pertenciam aos ângulos esféricos internos dessa figura. Paulo e Márcia pediram para utilizar o transferidor esférico, do material de Lénárt para medir os ângulos internos do triângulo, apesar de não ser o objetivo desta atividade, realizaram as medições, como vemos na figura 48.

Figura 48 – Protocolo do aluno Paulo referente a um triângulo esférico com as medidas dos ângulos internos

Após realizarem as medições, relembraram que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano resulta em 180º, realizaram a soma dos ângulos internos da figura encontrada e ambos verificaram, cada um em seu registro material, que a soma resultou em um número maior que 180º. Questionaram-nos o porquê disto, e explicamos, sem nos aprofundar, que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico está entre 180º e 540º e que existe uma demonstração matemática para tal fato, porém não a realizaríamos por não ser o foco desta atividade. Explicamos, ainda, que em outras superfícies, essa soma poderia ser inferior a 180º, como é o caso da superfície hiperbólica.

Em (b), os alunos esboçaram o triângulo esférico sem dificuldade alguma na bola de isopor. Pedimos que representassem o triângulo no papel, Paulo realizou a construção, mas desenhou um triângulo com segmentos de reta, conforme figura 49.

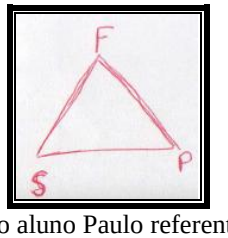


Figura 49 – Protocolo do aluno Paulo referente a um triângulo plano

Questionamos se esta representação estava de acordo com o que foi desenhado na bola de isopor, conforme diálogo:

***Pesquisadora**: Vocês estão representando o triângulo no plano do papel, agora lá na bola (esfera) se eu quiser passar para o papel, esses lados do triângulo são retos?*

***Paulo**: Não.*

***Pesquisadora**: Então vocês acham que este desenho (figura 49) está representando bem este triângulo?*

***Paulo**: Não está igual da bola.*

***Pesquisadora**: Este triângulo que desenharam é esférico?*

***Paulo**: Se eu colocar numa esfera será.*

E Paulo desenha conforme figura 50.

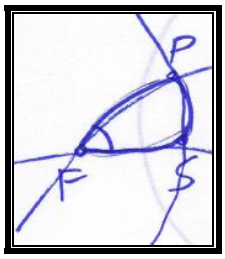


Figura 50 – Protocolo do aluno Paulo referente a um triângulo esférico

***Pesquisadora**: Você colocou na esfera?*

***Paulo**: Não.*

***Pesquisadora**: Como vocês desenhariam, o triângulo numa esfera, representada no papel? O que são os lados desse triângulo esférico?*

***Paulo**: Circunferências máximas.*

***Pesquisadora**: Como faremos para passar da bola de isopor para o papel?*

***Márcia**: Não sei ainda.*

***Paulo**: Tenho dúvidas.*

***Pesquisadora**: Vamos lembrar o que vocês fizeram. Primeiro desenharam um triângulo com os lados em linha reta. Depois desenharam com os lados arredondados, mas isso não garante que o triângulo seja esférico, certo?*

***Paulo e Márcia**: Sim.*

Pedimos para eles descreverem passo a passo como fizeram para traçar o triângulo esférico na bola de isopor do item (a) da mesma atividade.

***Márcia**: Marcamos três pontos e com a régua esférica traçamos uma circunferência máxima passando por dois pontos, depois mais uma circunferência máxima passando por dois outros pontos e mais uma vez a mesma coisa para o que faltava.*

Feita a descrição de Márcia, à qual Paulo só acompanha, solicitamos a eles, com a bola de isopor em mãos, para tentar desenhar no papel o que foi dito.

***Pesquisadora**: Como representariam, a bola, no papel?*

***Paulo**: Desenharia uma circunferência.*

E desenha no papel a circunferência.

***Pesquisadora**: Depois, como desenharia a circunferência máxima, a reta?*

Paulo desenha, conforme figura 51.

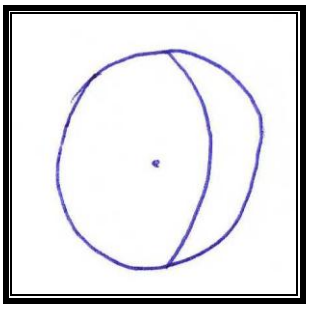


Figura 51 – Protocolo do aluno Paulo referente a circunferência máxima desenhada por Paulo

***Pesquisadora**: Está faltando alguma coisa?*

***Paulo**: Acho que é a parte de trás.*

E desenha pontilhado.

***Pesquisadora**: Por que desenhou pontilhado?*

***Paulo**: É a parte que não vejo.*

***Pesquisadora**: Concorda com o que estamos falando, Márcia?*

***Márcia**: Concordo. Não sabia do pontilhado, nunca vi isso.*

***Pesquisadora**: Já temos o triângulo esférico desenhado? O que está faltando?*

***Márcia**: mais duas circunferências máximas.*

Após nossa última fala, representaram o triângulo esférico, de acordo com a figura 52.

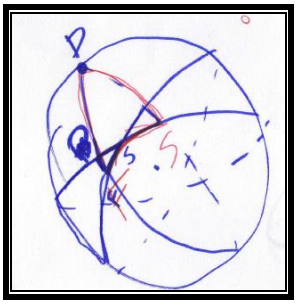


Figura 52 – Protocolo do aluno Paulo referente ao registro figural do triângulo esférico feito pelos alunos

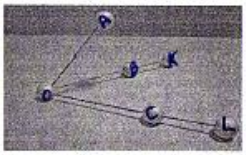
Percebemos que a conversão do registro material para o registro figural, não foi realizada com sucesso em um primeiro momento. Duval (2009, p. 63) nos diz que "a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos".

Podemos também constatar que o processo de ensino e aprendizagem passou, pela fase de *formulação*, quando Paulo descreveu o triângulo encontrado como *"uma figura com três lados de arcos de circunferências máximas e três vértices que seriam os ângulos esféricos"*; de *validação* ao nomearem a figura como "*triângulo esférico*". E estabelecemos que, ao unirmos três pontos distintos, em uma superfície esférica, tais que dois a dois pertençam a um mesmo arco de circunferência máxima, obtemos uma figura denominada triângulo esférico. Um triângulo esférico pode ser definido como uma figura formada por três arcos de circunferências máximas, cujos vértices são os pontos de intersecção dos arcos, tais que dois a dois de seus pontos pertençam ao mesmo arco.

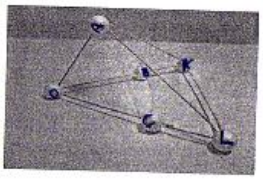
Atividade 08

Você irá determinar a Relação Fundamental dos triângulos esféricos, também chamada fórmula do Cosseno.

Os palitos de madeira representarão as semirretas, e as bolinhas de isopor os pontos. Assim, construa um triedro convexo[11] e nomeie cada ponto como mostram as figuras abaixo.



Complete o triedro construído anteriormente como mostra figura abaixo. O ponto O indica o centro de uma esfera E, e os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo esférico de E. Devem ser construídos os segmentos AL e AK tangentes, respectivamente, às circunferências máximas AC e AB no ponto A. O segmento OA é raio da esfera E.



No triedro construído temos um triângulo esférico ABC de uma esfera de centro O e raio unitário[12] OA. Sejam $\hat{A}$ = m(CAB), $\hat{B}$ = m(ABC) e $\hat{C}$ = m(BCA) as medidas de seus ângulos internos e c, a e b as medidas dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Mostrar que cos a = cosb cosc + senb senc cosA. Para isto:

a) Encontrar e anotar todos os triângulos planos que compõe o triedro.

b) A relação que se quer mostrar envolve senos e cossenos de argumentos específicos (a, b, c, A). Encontrar, em cada um dos triângulos esboçados, as relações entre senos e cossenos que envolvam esses argumentos.

c) É possível que esta relação mostrada solucione a situação da atividade 01? Justifique.

[11] Sejam O_r, O_s e O_t semirretas não coplanares com origem comum O. O triedro convexo é o conjunto dos pontos da intersecção dos semiespaços e_1, e_2 e e_3, em que e_1 é o semiespaço com origem no plano (st) contendo a semirreta O_r; e_2 o semiespaço com origem no plano (rt) contendo a semirreta O_s; e e_3 o semiespaço com origem no plano (rs) contendo a semirreta O_t.(SANTOS, 2008, p.07)

[12] A lei dos cossenos para lados de um triângulo esférico independe do raio da esfera, optamos pelo raio unitário para facilitar os cálculos.

Análise

Esta atividade tem por finalidade determinar a Lei dos cossenos para lados de triângulos esféricos.

No item (a), esperávamos que encontrassem e esboçassem os triângulos OAK (retângulo em A), OAL (retângulo em A), LOK e LAK, com os pontos pré-definidos.

No item (b), esperávamos que no triângulo OAK usassem a relação:

$sen\ c = \frac{KA}{KO} \rightarrow \mathrm{KA} = KOsenc$;

$cos\ c = \frac{AO}{KO} \rightarrow \mathrm{KO} = \frac{1}{\cos c}$

$\mathrm{KO}^2 = 1+\mathrm{KA}^2$

Já no triângulo OAL cheguem a $sen\ b = \frac{LA}{LO} \rightarrow \mathrm{LA} = LOsenb$;

$cos\ b = \frac{AO}{LO} \rightarrow \mathrm{LO} = \frac{1}{\cos b}$

$\mathrm{LO}^2 = 1+\mathrm{LA}^2$

No triângulo LOK, esperávamos que utilizassem à relação dos cossenos no plano, e que o ângulo O correspondesse ao lado *a* do triângulo esférico ABC, chegando à seguinte relação:

$\mathrm{KL}^2 = \mathrm{LO}^2 + \mathrm{KO}^2 - 2LOKO\cos a$ (I)

E no triângulo LAK à seguinte relação:

$\mathrm{KL}^2 = \mathrm{LA}^2 + \mathrm{KA}^2 - 2LAKA\cos A$ (II)

Substituindo (I) em (II) temos:

$$\cos a = \cos b \cos c + senbsenc\cos A$$

Sendo esta a Relação Fundamental para triângulos esféricos que permite associar as medidas dos lados e de um ângulo em um triângulo esférico.

Em (c), acreditávamos que pudessem associar as medidas dos lados e de um ângulo em um triângulo esférico. Ainda julgávamos que os sujeitos considerariam que essa relação mostrada poderia solucionar a situação da atividade 01 proposta, já que esta estabeleceria correspondências entre os lados e ângulos de um triângulo esférico.

Acreditávamos que dificuldades poderiam aparecer, tais como a aplicação das relações trigonométricas seno e cosseno em um triângulo retângulo e a lei dos cossenos

para um triângulo qualquer no plano. Apresentamos nos próximos parágrafos as análises das produções realizadas pelos alunos.

A relação fundamental para os triângulos esféricos, objeto de estudo dessa atividade, foi determinada por intermédio de questionamentos, exigindo troca de informações dos sujeitos, a fim de que novos conhecimentos se desenvolvessem. A construção do triedro convexo foi realizada de forma satisfatória. Também questionamos os sujeitos em relação a alguns termos no enunciado da atividade, conforme diálogo abaixo:

***Pesquisadora**: O que significa segmentos tangentes?*

***Paulo**: O que tá por fora, aquela reta que cruza em certo ponto. Não sei explicar.*

***Pesquisadora**: Faça o desenho.*

E Paulo desenha, conforme figura 53

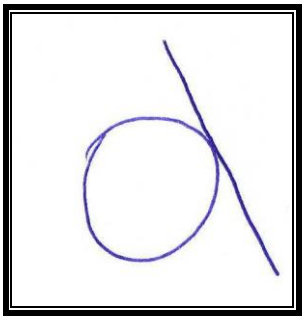


Figura 53- Protocolo referente a representação da reta tangente feita pelo aluno Paulo

***Pesquisadora**: Qual é a característica da reta tangente, neste ponto, que cruza a circunferência, forma um ângulo de quantos graus?*

***Paulo**: 90º.*

***Pesquisadora**: Agora, onde estão as circunferências máximas?*

Paulo e Márcia apontam no triedro para os segmentos AC e AB.

***Pesquisadora**: O segmento AO é raio, OB e OC o que posso falar sobre eles?*

***Márcia**: Também são raios.*

***Pesquisadora**: O que entendem por raio unitário?*

***Paulo**: Único.*

***Márcia**: Uma unidade.*

***Pesquisadora**: O que significa Â?*

***Paulo**: Ângulo A.*

***Pesquisadora**: Em relação aos lados AB, BC e CA, qual é a unidade de medida desses lados?*

***Paulo**: Acho que é o grau.*

***Pesquisadora**: E você Márcia?*

***Márcia**: Também.*

***Pesquisadora**: Por quê?*

***Paulo**: São lados de um triângulo esférico.*

***Pesquisadora**: E as letras a, b, e c da fórmula, o que representam mesmo?*

***Márcia**: Os lados.*

***Pesquisadora**: O que queremos mesmo com esta atividade?*

***Márcia**: Achar a fórmula. cos a = cos b cosc + sen b sen c cos Â.*

Antes de anotarem os triângulos, pedimos para Paulo e Márcia fazerem o desenho do triedro convexo no papel, com intuito de perceber se fariam a conversão do registro em linguagem natural (enunciado do exercício, com auxílio do triedro) para o registro figural. Márcia realizou a seguinte representação, conforme figura 54.

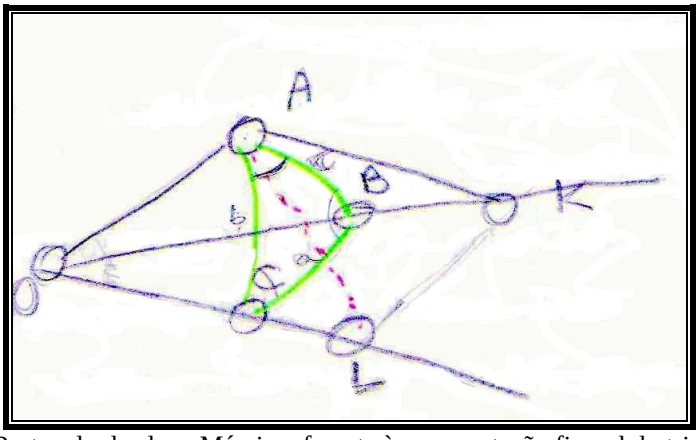


Figura 54 – Protocolo da aluna Márcia referente à representação figural do triedro convexo

Já Paulo representou o triedro de acordo com a figura 55.

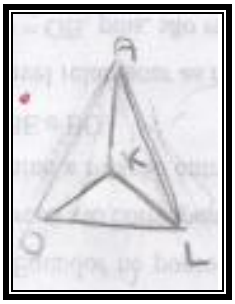


Figura 55 – Protocolo do aluno Paulo referente à representação figural do triedro convexo

Percebemos na construção de Paulo que este realizou a representação de um tetraedro. Este questionou que não fez o "*triângulo esférico dentro"*, e esclarecemos que havia feito uma representação planificada. O que nos leva a inferir uma possível dificuldade do aluno em visualizar o que foi pedido.

Nesta experimentação, o saber foi sendo estruturado, organizado passo a passo, à medida que os itens eram debatidos e respondidos, um em conexão com o outro, fazendo com que novos conhecimentos fossem incorporados e surgisse um novo saber.

No item (b), Márcia nos informou que não se lembrava de ter visto estas relações. Já Paulo encontrou as relações seno e cosseno para os argumentos pedidos, conforme figura 56 e foi explicando para Márcia estas relações.

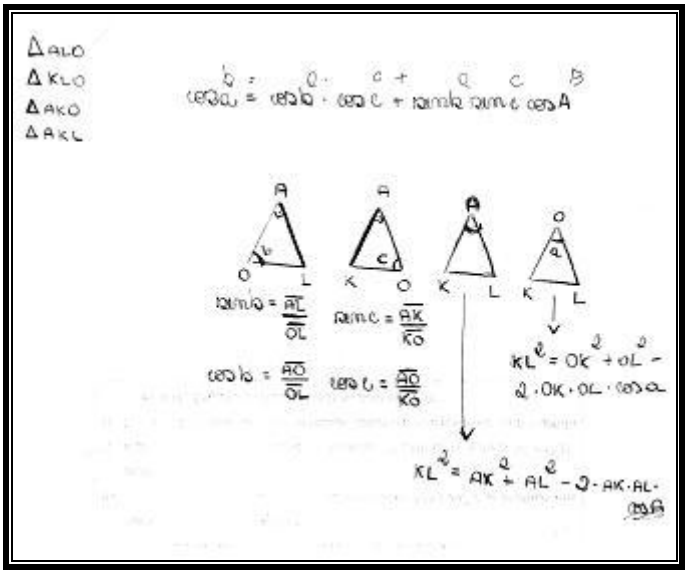


Figura 56 - Protocolo do aluno Paulo na resolução do item (b)

Cabe destacar que nos triângulos AKL e KLO, Paulo percebeu que não eram triângulos retângulos, portanto não poderia utilizar as razões seno e cosseno. Mostramos a eles a Lei dos cossenos para um triângulo qualquer, pois estes de acordo com as respostas dadas no questionário, ou não sabiam ou não tinham muita certeza a respeito do que se tratava como podemos ver na figura 57.

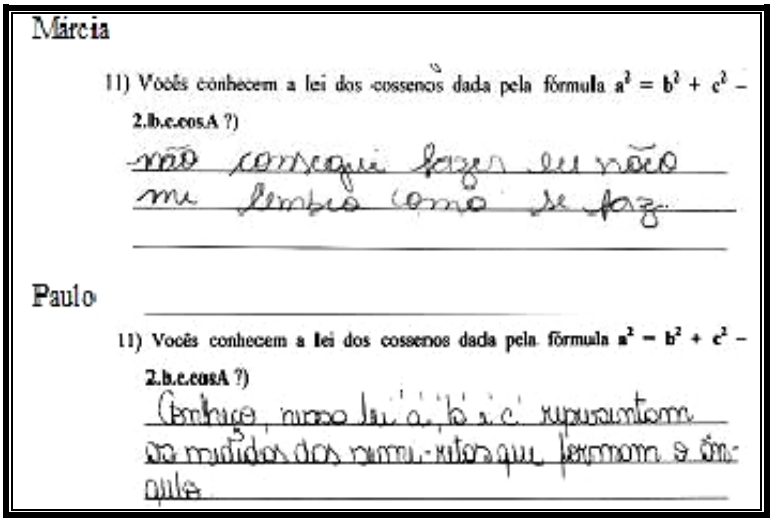


Figura 57 – Resposta dada pelos alunos a questão 11

Sendo assim, decidimos intervir promovendo discussões para chegar à relação proposta na atividade (Relação Fundamental dos triângulos esféricos), conforme diálogo abaixo:

***Pesquisadora**: Vocês encontraram o seno e cosseno para os triângulos ALO e AKO, certo? Agora se eu tenho um triângulo retângulo, qual outra relação que envolve hipotenusa e o cateto, alguém lembra?*

***Paulo**: Pitágoras.*

***Pesquisadora**: Como ficaria então para esses dois triângulos o teorema de Pitágoras?*

Paulo e Márcia escrevem $OL^2 = AL^2 + OA^2$ e $OK^2 = AK^2 + OA^2$.

***Márcia**: Dá para fazer isto (seno e cosseno, Pitágoras) para os outros dois triângulos (AKL e OKL)?*

***Paulo**: Acho que não. Não são retângulos.*

***Pesquisadora**: Muito bem. Como faço então para trabalhar com o seno e cosseno quando o triângulo não é retângulo?*

***Márcia e Paulo**: Não sei.*

***Pesquisadora**: Vocês já viram a Lei dos Cossenos para um triângulo qualquer?*

***Paulo**: acho que sim, mas não me lembro.*

***Márcia**: nunca vi.*

Desenhamos no papel um triângulo qualquer, mostramos a eles a Lei dos Cossenos, discutimos para que serve e quais elementos de um triângulo envolve; ambos escreveram a

Lei conforme figura 56. Encontrada a lei dos Cossenos para um triângulo qualquer, continuamos a discussão:

***Pesquisadora**: Para que estamos fazendo isso mesmo?*

***Márcia**: Para chegar à fórmula.*

***Pesquisadora**: Qual?*

Anotam no papel a relação fundamental para triângulos esféricos.

***Pesquisadora**: Já chegaram a ela?*

***Paulo e Márcia**: Não.*

***Pesquisadora**: O que falta?*

***Paulo**: Não sei.*

***Márcia**: Também.*

***Pesquisadora**: Estas duas últimas fórmulas que acharam (leis dos cossenos), vocês têm alguma sugestão do que podemos fazer com elas?*

***Paulo**: Não sei.*

***Pesquisadora**: As duas (fórmulas) dependem de que lados?*

***Paulo**: KL.*

***Pesquisadora**: Então o que podemos fazer?*

***Paulo**: Igualar.*

***Pesquisadora**: Como?*

Paulo escreve $\boldsymbol{LO^2 + KO^2 - 2.LO.KO.cosa = LA^2 + KA^2 - 2.LA.KA.cosA}$.

***Pesquisadora**: Já temos a fórmula que queremos achar?*

***Márcia**: Não. Mas está parecida. Já temos cosA.*

Depois dessa última fala de Márcia, pedimos para que voltassem nas relações encontradas no item (b) para que pudessem chegar à relação fundamental para triângulos esféricos.

Na resolução do item (c) desta atividade, os sujeitos vivenciaram a fase de *formulação* ao notarem a utilidade da relação encontrada no item anterior e a possibilidade de ela solucionar a situação da atividade 01. O aluno Paulo respondeu: *"Sim, pois se passar o triângulo esférico para o globo, poderíamos associar com a distância de P.R (Porto Rico). até Portugal"*. Já Márcia afirmou: *"Sim, porque dá para imaginar o triângulo no plano esférico".*

O termo *plano esférico* utilizado pela aluna Márcia não é o adequado, porém novamente destacamos que não consideramos a inexatidão do termo, por deixar ao aluno a possibilidade de expressar suas ideias em uma linguagem não necessariamente formal.

Atividade 09

Para resolver a situação da atividade 01 proposta, utilizaremos as conclusões obtidas anteriormente, lembrando que as coordenadas do forte são ϕ_F = 38º40'N e λ_F = 9º19'W e da cidade são ϕ_S = 18º27'N e λ_S = 66º06'W.

a) Como representaria por meio de um desenho no papel, o triângulo esférico PFS, no qual P é o pólo, F a posição do Forte e S a posição da cidade. Chame *d* a distância do forte à cidade.

b) O que você necessita traçar para representar, o desenho anterior?

c) Represente, no desenho anterior, a latitude ϕ_F e determine a medida do lado FP.

d) Represente, no desenho anterior, a latitude ϕ_S e determine a medida do lado SP.

e) Represente a longitude λ_F e λ_S, no desenho anterior. A diferença das medidas das longitudes de S e F corresponde à medida de qual ângulo do triângulo esférico? Determine essa medida.

f) Você pode aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos, para solucionar a situação da atividade 01? Justifique.

g) Para essa situação da atividade 01, como pode ser escrita a relação fundamental?

h) Utilizando a calculadora, determine a medida da distância d, em graus.

i) Determine a distância d, em km, sabendo que o raio do planeta Terra, é aproximadamente 6371 km.

Análise

Esta atividade tem como objetivo solucionar a situação da atividade 01 proposta deste trabalho.

Como esta situação envolveu operações com medidas de ângulos e transformações de unidades, foi necessário o uso de calculadora científica para auxiliar nos cálculos.

Em (a), esperávamos que os alunos fizessem uma conversão do registro em língua natural para o registro figural da situação proposta na atividade 01.

No item (b), seria necessário traçar os Pólos, o Meridiano de Greenwich, o eixo de rotação da Terra, o Equador, os Paralelos e os Meridianos.

Em (c), acreditávamos que representassem a latitude do forte, para determinar a medida do lado FP, e precisariam saber que a unidade de medida de um arco de circunferência (o lado FP) é o grau e que o ângulo central correspondente a esse arco mede $90º - \phi_F$, então a medida de FP seria dada por 90º - 38º40' = 51º20'.

Em (d), esperávamos que representassem a latitude da cidade e para determinar a medida do lado SP, fariam os procedimentos análogos e, assim, a medida de SP seria dada por 90º - 18º27' = 71º33'.

Na questão (e), depois de representarem a longitude do forte e a longitude da cidade, verificariam que a diferença das medidas dessas longitudes corresponde à medida do ângulo P, cuja medida será dada por 66º06' – 9º19' = 56º47'.

Em (f), esperávamos que afirmassem que é possível aplicar a Relação Fundamental para os triângulos esféricos porque, no triângulo esférico SFP, foram determinadas as medidas dos lados SP e FP e do ângulo P.

Na questão (g), lembrando que d é a distância do forte à cidade, escreveriam a relação como:

$$\cos d = \cos SP \cos FP + senSPsenFP \cos P$$

Em (h), substituiriam os valores de SP por 71º33', FP por 51º20' e P por 56º47'e, transformando os minutos em graus, tendo a seguinte relação:

cos d = cos 71,53º. cos 51,32º + sen 71,53º. sen 51,32º. cos 56,78º

Com o auxílio da calculadora científica, determinariam os valores dos senos e cossenos necessários para chegarem ao valor da distância igual a 52,87º.

Na questão (i), deveriam recorrer à regra de três simples, em que:

360º-------2πR, onde R é o raio da Terra

52,87º-----x km

Concluindo que a distância entre o forte e a cidade é de 5879 km.

Para solucionar a situação da atividade 01, esperávamos que os sujeitos mobilizassem os conhecimentos das atividades precedentes, mais a relação entre a medida

de um ângulo central com a do arco correspondente, as operações com números decimais, as operações com medidas de ângulos, a regra de três simples, a transformação de unidades de medida de comprimento e as relações da Trigonometria plana.

Provavelmente, surgiriam dificuldades no manuseio da calculadora científica e na conversão de medidas de ângulos. A seguir, as análises das produções realizadas pelos alunos.

Na questão (a), os alunos realizaram a conversão do registro em língua natural para o registro figural, conforme figura 58. Representaram o Equador, o Meridiano de Greenwich, o eixo de rotação da Terra e as três circunferências máximas que passam pelos vértices do triângulo esférico PFS, o que já respondeu o item (b).

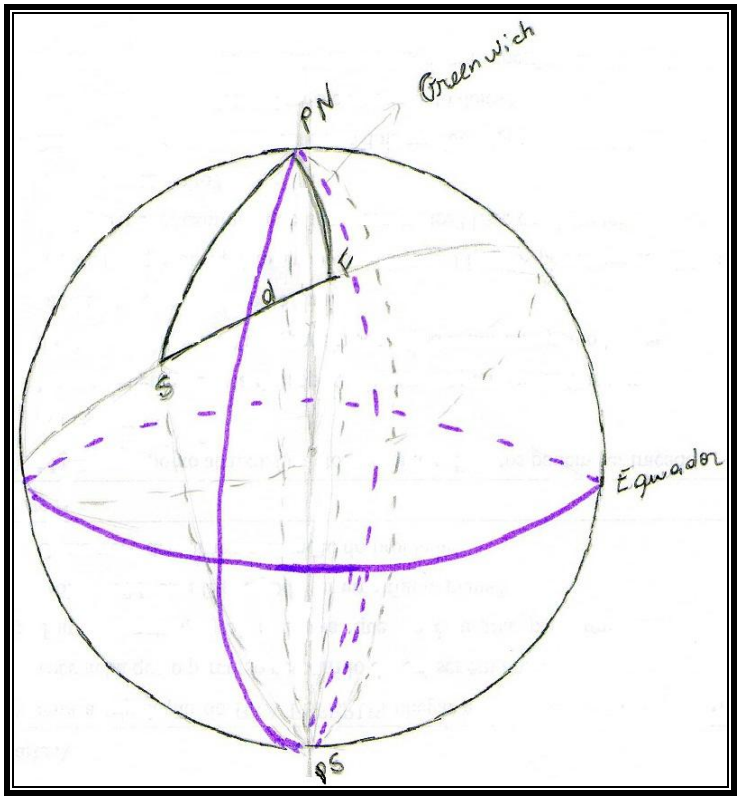


Figura 58 – Protocolo do aluno Paulo referente ao triângulo esférico PFS

Nos itens (c) e (d) a latitude da cidade e da ilha foram representadas pelos alunos, de acordo com a figura 59. Márcia questionou se as latitudes eram os lados do triângulo esférico. E Paulo disse: *"o ângulo ϕ_F, não 'enxerga' o lado FP, e sim o ângulo que vou chamar de D, que é 90º - ϕ_F"*. Analogamente Paulo chegou à mesma dedução para encontrar a medida do lado SP. Paulo e Márcia não se lembravam de como realizar a subtração de ângulos, conforme pudemos constatar pelas respostas dadas por eles no questionário. Então intervimos e perguntamos: *"quantos minutos equivalem um grau?"* E

Paulo respondeu: *"sessenta minutos"*. Mostramos alguns exemplos de subtrações de ângulos, para que pudessem realizar $90^o - \phi_F$ e $90^o - \phi_S$

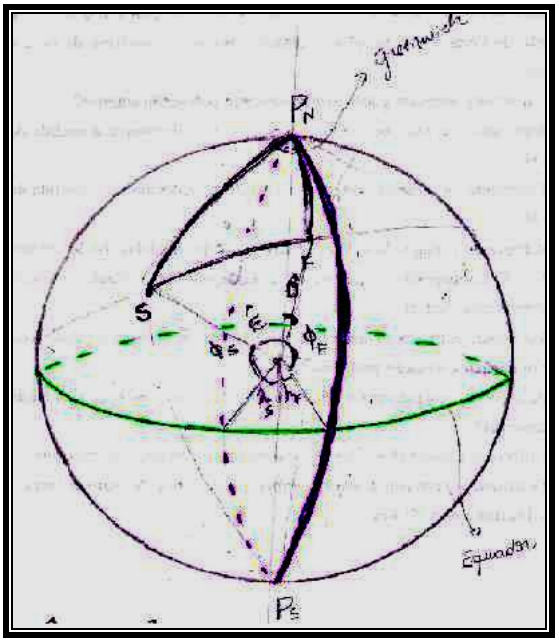


Figura 59 – Protocolo do aluno Paulo referente ao registro figural das latitudes ϕ_F e ϕ_S

Já em (e) os alunos sentiram dificuldade para representar a longitude. Pedimos para relembrarem o conceito de longitude visto anteriormente, e a representaram, como visto na figura 60. E perceberam que a diferença entre estas medidas seria o ângulo P.

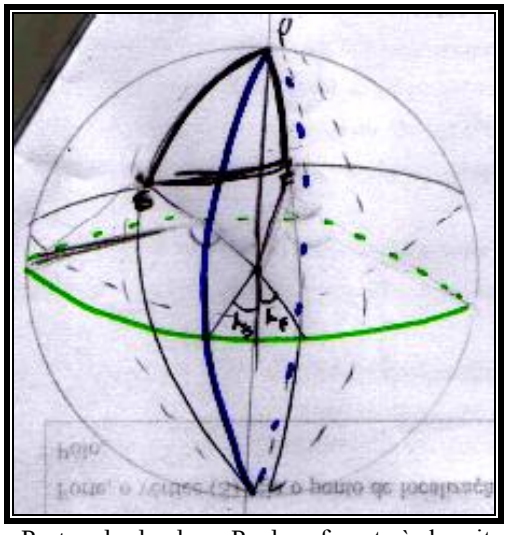


Figura 60 – Protocolo do aluno Paulo referente às longitudes λ_F e λ_S

Em resposta à questão (f), Paulo afirmou que: *"sim, pois temos os lados SP e FP e o ângulo P"*. Questionamos a possibilidade de desenhar no papel o que estava afirmando e Paulo esboçou o desenho que podemos ver na figura 61.

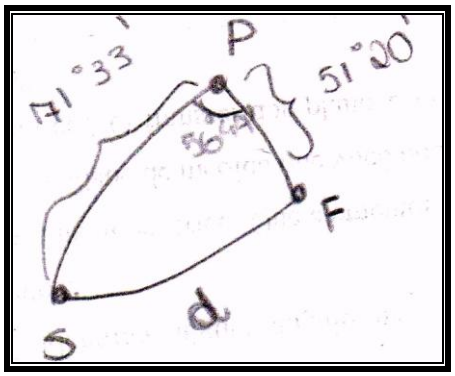


Figura 61 – Protocolo do aluno Paulo referente ao triângulo esférico

No item (g) escrevem a relação *cos d = cos SP. cos PF + sen SP sen PF cos P*, conforme esperado.

Já no item (h), Paulo e Márcia apresentaram certa dificuldade para utilizar a calculadora científica, intervimos e explicamos como é utilizada. Com o registro figural (figura 61) feito por eles e a relação fundamental para triângulos esférico, encontraram a distância procurada.

E por fim no item (i), Márcia questiona como relacionar a distância em graus do item anterior com a unidade de comprimento *km*. Paulo responde: "fazer uma regra de três". E escreve: 53º____x *km*. A pesquisadora intervém conforme diálogo que segue:

***Pesquisadora**: O que está faltando nesta regra de três?*

***Paulo**: Trabalhar com o raio da Terra. Posso considerar a Terra uma circunferência e esta mede 360º?*

***Pesquisadora**: Está no caminho certo. A circunferência mede 360º, se eu quisesse saber em km e imaginar em circundar a circunferência com um barbante e depois cortar e esticar, o que seria isto?*

***Paulo**: O comprimento dela.*

***Pesquisadora**: Vocês sabem como é calculado o comprimento de uma circunferência?*

***Paulo**: Tem alguma coisa com o pi?*

***Pesquisadora**: Sim. Em uma circunferência qual o nome da distância entre o centro e um ponto qualquer dela?*

***Márcia**: É o raio?*

***Paulo**: É sim.*

***Pesquisadora**: Então, voltando para o barbante que circundou a circunferência, se eu esticá-lo, o que vai aparecer?*

***Márcia**: Raio mais raio.*

***Paulo**: Ou duas vezes o raio. E acho que lembrei. O comprimento é 2rπ.*

***Pesquisadora**: Quanto vale π?*

***Márcia**: Três virgula alguma coisa.*

***Paulo**: 3,14. E mais um monte de casas.*

Após esta última fala de Paulo, ele e Márcia montaram a regra de três, 53º corresponde a x *km* assim como 360º corresponde a 6371 x2 x 3,14, descobrindo o valor da distância entre Porto Rico e o forte em quilômetros conforme esperado.

Analisando os resultados, percebemos o dinamismo que o saber possui, visto que a situação proposta na atividade 01, cuja resolução foi fundamental para nosso trabalho, movimentou saberes que perpassaram pela Aritmética, Álgebra que, por sua vez, se integrou à Trigonometria, e esta à Geometria Esférica, proporcionando discussões, ações, validações, reflexões e institucionalizações.

Para solucionar a situação da atividade 01, os alunos necessitaram transferir saberes contidos desde a primeira até a nona atividade e mais os conhecimentos prévios de cada um. Precisaram, ainda, compartilhar seus conhecimentos com o outro, modificando-os, se preciso.

Na atividade 01, que apresentava uma situação em que um navio partia de uma cidade e chegava a um forte e questionava os sujeitos de pesquisa a respeito de qual seria esta distância, entendemos que estes, até o momento, tinham fortemente a ideia que esta distância seria em linha reta, como acreditávamos desde o inicio, pois os conhecimentos referentes à Geometria Euclidiana eram o que possuíam.

Na atividade 02, que estabeleceu a distância entre dois pontos em uma superfície esférica como sendo um arco de circunferência máxima, verificamos que desenharam o percurso na forma de um triângulo plano, visto que para eles a distância seria em linha reta. Mereceu destaque nesta atividade a utilização do globo terrestre, que para nós foi utilizado como um material manipulável que proporcionou aos alunos perceberem que a distância então, seria dada por linhas curvas. Neste momento, com as discussões realizadas pelos alunos acreditamos que tenham se apropriado da ideia de que uma trajetória em uma superfície esférica é dada por um arco de circunferência máxima, segmento de reta.

Na atividade 03, em que foi apresentado o objeto matemático, reta, na Geometria Esférica e a concorrência entre duas retas nesta Geometria, verificamos que, ao manipular a bola de isopor, os sujeitos realizaram as conversões do registro em língua natural (enunciado da atividade) para o registro material (bola de isopor), com intuito de resolver a atividade e compreender os conceitos abordados a serem mobilizados no decorrer da sequência.

Na atividade 04, em que foram estabelecidas as coordenadas geográficas (latitude e longitude) da cidade e do forte, definidos os Pólos Terrestres, Equador, Paralelos Terrestres, e Meridianos, verificamos que os sujeitos sabiam que um ponto na Terra era dado pela latitude e longitude, porém não sabiam como localizá-lo. Novamente, foi necessário o uso do globo terrestre como um material manipulável para que eles determinassem, aproximadamente, as coordenadas geográficas da cidade e do forte. O uso deste material foi fundamental para definirmos os outros conceitos geográficos pedidos na atividade necessários para resolução da situação da atividade 01.

Na atividade 05, na qual foi medida a distância entre dois pontos em uma superfície esférica, com auxílio de uma régua esférica confeccionada pelos sujeitos, notamos que a ideia de distância dada em unidade de comprimento linear está muito presente na fala deles, por não conseguirem relacionar o arco de circunferência (a distância entre os pontos) com a medida do ângulo central correspondente a ele. Após discussões, chegaram à unidade grau para medição de arcos. Entendemos que, para a confecção da régua esférica, desenvolveram a relação (grau – centímetro) de forma adequada. Podemos então, verificar que os sujeitos tenham se apropriado da ideia de que a distância entre dois pontos em uma superfície esférica pode ser dada em grau e que essa não deverá ser medida com régua e/ou fita métrica.

Na atividade 06, em que foi definido o ângulo esférico como sendo medido em graus, e formado pela intersecção de duas circunferências máximas, verificamos que com a conversão do registro em língua natural (enunciado da questão) para o registro material (bola de isopor), os sujeitos se apropriaram do objeto matemático, ângulo esférico. Notamos ainda, nesta atividade, que a medição, feita no papel, deste ângulo foi sugerida por eles e ao fazer a conversão do registro material (bola de isopor) para o registro figural, percebemos que apresentaram dificuldades, porém estas não prejudicaram o objetivo da atividade.

Na atividade 07, quando foi definido e representado o triângulo esférico, verificamos que, primeiramente, as conversões do registro material para o registro figural foram feitas com os lados retos do triângulo, porém após discussões entre os sujeitos, em que mobilizaram os conhecimentos que já possuíam e os que foram desenvolvidos ao longo da sequência, estes realizaram as conversões de forma a produzir um registro adequado da situação proposta na atividade 01.

Na atividade 08, em que foi determinada a Lei dos cossenos para lados de triângulos esféricos, notamos que os sujeitos realizaram a conversão do registro em língua natural (enunciado do exercício) para o registro figural. A partir da conversão para o registro figural, estes fizeram os tratamentos algébricos pertinentes nesse registro. Apresentaram dificuldades em relação à lei dos cossenos para um triângulo qualquer da Geometria Plana, por não conhecerem e/ou não saberem sua utilização. Após discussões, chegaram à relação pedida da atividade para relacioná-la com o triângulo esférico que representa a situação da atividade 01.

Na atividade 09, na qual foi encontrada a distância da cidade de San Juan até o forte de São Julião da Barra, verificamos que os sujeitos realizaram a conversão do registro em língua natural para o registro figural, e que fizeram os tratamentos aritméticos pertinentes a cada item da atividade. Destacamos a importância dessa conversão, pois, por exemplo, para os sujeitos encontrarem a distância SP do triângulo esférico, dada por $90^o - \phi_S$, a utilização do registro figural foi significativa e importante para realizarem os tratamentos aritméticos na busca pela solução da atividade e para o entendimento da mesma.

Ao longo deste capítulo, descrevemos e analisamos o que foi observado durante os encontros realizados com os sujeitos de pesquisa, juntamente com o que nos foi relatado no questionário, não perdendo de vista nossos objetivos. Ainda, sabendo que um trabalho de pesquisa sempre será um produto inacabado e que esta particularidade é que lhe confere sua singularidade; a seguir, apresentaremos nossas considerações finais, destacando os pontos conclusivos e as perspectivas futuras.

Considerações Finais

Esta pesquisa se propôs a investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de ensino. Partimos do pressuposto de que a sequência pudesse contribuir para a apreensão por parte dos alunos de conceitos de Geometria Esférica, e permitisse que ao resolver as atividades propostas, esses realizassem os tratamentos e conversões propostos por Duval (2009) pertinentes ao objeto estudado.

Nesse sentido, os aspectos metodológicos escolhidos contribuíram para que a experimentação com os sujeitos de pesquisa se desenvolvesse de maneira efetiva e atendesse os nossos objetivos. Os pressupostos da Engenharia Didática favoreceram a elaboração, aplicação e análise da sequência de atividades que foram analisadas com base na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009).

A partir da problemática que apontou, entre outros fatores, a inquietação de alguns pesquisadores com o ensino e aprendizagem da Geometria Esférica e de que é possível trabalhar com conteúdos dessa Geometria em sala de aula, e mais, essa pode ser um fator de estímulo à aprendizagem dos alunos, levantamos a seguinte questão de pesquisa: ***Como uma sequência didática articulando diferentes registros de representação pode avaliar alunos do Ensino Médio na aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica?***

Durante o desenvolvimento da pesquisa, na sequência didática foram propostas diversas atividades, que, em sua maioria, exigiam dos sujeitos de pesquisa discussões a respeito do que aprenderam, promoviam o estímulo de novas ideias e favoreciam o desenvolvimento de um ambiente de ajuda mútua que levava a uma reflexão do que foi trabalhado e apreendido. Além disso, ao trabalhar com materiais manipuláveis, como por exemplo, o globo terrestre, quando determinaram as coordenadas geográficas da cidade e do forte, verificamos que estes tiveram condições de compreender as situações propostas no processo de aprendizagem dos conceitos referentes à Geografia e para a resolução das outras atividades, além de promover a construção de *modelos mentais*, que de acordo com English e Halford (1995) proporcionam uma imagem mais adequada das representações que os indivíduos usam para compreender e raciocinar.

Observando as produções dos sujeitos de pesquisa no decorrer das atividades da sequência, também constatamos que esses realizaram as conversões e os tratamentos dos registros de representação semiótica de acordo com Duval (2009), como quando fizeram a conversão do registro em língua natural (enunciado da atividade) para o registro material (bola de isopor), o que os levou a resolver a atividade e compreender o conceito de reta na Geometria Esférica. Logo, entendemos que nosso objetivo foi alcançado já que os sujeitos desta pesquisa se apropriaram dos conceitos de Geometria Esférica.

Outro ponto de destaque também relacionado aos registros de representação semiótica, foi a constatação de sua potencialidade durante todo o trabalho, pois a todo o momento trabalhamos com, pelo menos, dois registros de representação, nos quais os sujeitos de pesquisa efetuaram conversões. Entendemos que quando os sujeitos escreveram o objeto matemático, ângulo, na atividade 06, usando dois registros de representação, além de compreenderem a atividade em questão, puderam, também, perceber que um registro tem vantagens em relação ao outro, quer seja na economia da escrita, como é o caso do registro simbólico, ou no que diz respeito a explicitar informações não presentes em outro.

Neste contexto, destacamos ainda que o registro de representação semiótica material identificado por nós, bola de isopor, além de contribuir para a realização deste trabalho, no que diz respeito à realização das atividades que necessitavam de sua utilização, também pode ser trabalhado em outras pesquisas, com diferentes objetos matemáticos além dos trabalhados nesta. Desse modo em nossas análises, constatamos que, ele se mostrou como um elemento fundamental ao permitir as conversões e tratamentos específicos para os sujeitos se apropriarem dos conceitos de Geometria Esférica e, com isso, proporcionar a resolução das atividades propostas, como ocorreu quando os sujeitos trabalharam o registro figural a partir das idéias desenvolvidas com o registro material.

Enfim, destacamos que a relevância da nossa pesquisa está em contribuir para uma reflexão a respeito do ensino e aprendizagem da Geometria Esférica, pois observamos que ao utilizar uma sequência de ensino, articulando diferentes registros de representação, esta proporcionou aos alunos do Ensino Médio se apropriarem de conceitos não trabalhados da Geometria Esférica conjuntamente com os já conhecidos da Geometria de Euclides, a única conhecida por eles, mostrando que é possível de ser trabalhada, mesmo não fazendo parte dos currículos educacionais. Por isso, destacamos a importância de outras pesquisas buscarem solidificar outros conhecimentos a respeito de Geometria Esférica.

Acreditamos que um aprofundamento com uma atividade envolvendo a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, poderia ser interessante já que foi algo que surgiu em nosso trabalho e não foi aprofundado, pois não era o foco de nosso estudo.

Outro estudo que poderia ser realizado seria o de introduzir conceitos de Geometria Esférica, tais como: construção de retas e a verificação do não-paralelismo entre elas, congruência e semelhança de triângulos, entre outros podendo ser trabalhados com o software Cinderella ou Cabri-3D.

Desta forma, entendemos que nossa pesquisa pode auxiliar professores a introduzir esses e outros conceitos abordados na sequência desenvolvida neste trabalho, em sala de aula, afinal a Geometria Euclidiana proposta no currículo não é a única possível, mas uma das muitas possíveis.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

_____ **Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos**. In: MACHADO, S.D.A. (org.) **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica.** Campinas, SP : Papirus, 2003. p. 125 – 148.

ALVES, S. **Geometria Não Euclidiana**. São Paulo: IME – USP: material para oficina; Semana da Licenciatura, 2008.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didáctica**. In: BRUN, J. *Didáctica das Matemáticas*. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.(Coleção Horizontes Pedagógicos).

BICUDO, I. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BICUDO, M.A.V., Pequisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba, M.C. e Araújo, J.L. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica,2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BONETE, I. P. **As Geometrias não-euclidianas em cursos de Licenciatura: algumas experiências**. Guarapuava, 2000. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro-Oeste.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRITO, A. de J. Geometrias **não-euclidianas: Um estudo Histórico-Pedagógico. Campinas**, 1995, 187 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DAMM, R.F. Registros de Representação. In: MACHADO, S.D.A. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135–153. (Série Trilhas).

DUARTE, P.A. **Fundamentos da Cartografia** – 3 Ed. – Florianópolis: Ed. da UFSC, 2006.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora da Física, 2009.

ENGLISH, L.D., HALFORD, G.H., **Mathematics education: models and processes**. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaun, 1995.

FIORENTINI, D., LORENZATO, S. (org.) **Investigação em educação matemática – percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

FRANCA, J. C. **Uma análise da Apresentação de Retas Paralelas em Livros Didáticos do Ensino Médio**. Monografia de Curso de Especialização. Niterói: Instituto de Matemática. UFF. 2007.

JESUS, G.B. **Construções Geométricas: Uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada**. São Paulo, 2008. 243.f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

KALEFF, A.M.M.R. **Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática**. Bolema, Rio Claro, Ano 20, n 28, p. 69-94, 2007.

LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: Investigations in Planar and Spherical Geometry**. Emeryville: Key Curriculum Press, 1996.

MARTOS, Z. G. **Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental**. Rio Claro, 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

PATAKI, I. **Geometria Esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar**. São Paulo, 2003. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PONTE, J.P. **Estudos de Caso em Educação Matemática**. Bolema, ano 19, n.25, p.1-23, 2006.

REIS, J. D. S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. Rio Claro, 2006. 158 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

SANT'ANNA, A.S. **O que é um axioma**. São Paulo: Manole, 2003.

SANTOS, D. **A reinvenção do espaço: diálogos em torno da construção do significado de uma categoria** – São Paulo: Editora UNESP, 2002.

SANTOS, J.C.A.P. **Uma proposta de geometria não euclidiana para sala de aula**. São Paulo: IME – USP; Projeto de ensino de matemática, 2009.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta curricular para o ensino de matemática, 1º grau. 4ª ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SOUZA, M. C. G. O. **5° Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico**. Rio de Janeiro, 1998. 225 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais materiais para professores** – Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos** 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

Apêndice A – Questionário

Caro aluno:

Você está recebendo um questionário que faz parte de minha pesquisa de mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo que aborda o tema *Geometria Esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico*.

O questionário tem como finalidade a obtenção de informações sobre seu perfil bem como de quais noções possui referentes à Trigonometria. As informações obtidas neste questionário serão mantidas em sigilo, servindo apenas para a finalidade desta pesquisa. A sua colaboração é de fundamental importância.

Grata pela sua contribuição,

Maria Lúcia Torelli Doria de Andrade

Questionário

1) Qual é o seu nome?
2) Qual é a sua idade?
3) Qual é a escola em que estuda? Em que bairro está localizada?
4) Sua escola é da rede:
   ( ) Particular ( ) Pública Estadual ( ) Pública Municipal
5) Há quanto tempo estuda nesta escola?
6) Você gosta da disciplina de Matemática
7) Você sabe o significado da palavra Trigonometria? Em caso afirmativo escreva qual é, se não sabe, escreva o que você acha que siginifica
8) Para você o que é um ângulo? Descreva com suas palavras, se quiser pode usar o auxílio de desenhos
9) O que é um triângulo retângulo?
10) Você já estudou as relações trigonométricas seno e cosseno? Em caso afirmativo, quais são e o que elas representam?)
11) Vocês conhecem a lei dos cossenos dada pela fórmula:

$a^2 = b^2 + c^2 – 2.b.c.\cos A$? Para que serve?

12) Você sabe identificar um arco de circunferência e um ângulo central? (Novamente, se quiser use o auxílio de desenhos)
13) Você sabe qual é a relação matemática entre um arco de circunferência e o ângulo central que o determina? Novamente, se quiser pode usar o auxílio de desenhos para responder à pergunta
14) Qual (is) unidade(s) de medida usamos para medir arcos de circunferência?
15) Qual (is) unidade(s) de medida é (são) utilizada(s) para medir o comprimento de uma circunferência? Como é calculado o comprimento de uma circunferência?
16) Como você resolveria a seguinte operação 180 graus menos 48 graus e 30 minutos, ou seja, 180º - 48º30'?

Apêndice B – Sequência de Ensino[13]

Atividade 01

Sejam bem-vindos alunos! Vocês agora são parte da tripulação do navio BRA ESFERUS. A missão de vocês é encontrar uma coleção de artefatos militares que, há muitos anos, esteve escondida no Forte São Julião da Barra, em Portugal.

Considerado no passado como o Escudo do Reino, maior fortificação marítima no país, constitui o maior e mais completo complexo militar de defesa remanescente em Portugal.

Para não levantar suspeitas sobre as atividades da marinha brasileira, vocês partirão de San Juan, capital de Porto Rico. Essa missão exige o máximo de sigilo e precisão.

Qual será a distância que a tripulação do BRA ESFERUS deverá percorrer ao sair de San Juan para chegar ao Forte São Julião da Barra?

Atividade 02

a) Para a tripulação do BRA ESFERUS chegar ao Forte São Julião da Barra como você acha que será o percurso percorrido?Em Geometria, qual a figura que você usaria para representar esse percurso?
b) Como você representaria no papel a situação do problema referente a atividade 01?

Atividade 03

a) Marque um ponto no papel dado. Quantas linhas distintas podem ser traçadas por esse ponto?
b) Você recebeu uma bola de isopor. Marque um ponto nela. Quantas linhas podem ser traçadas por esse ponto? Essas linhas possuem fim?
c) Agora, marque dois pontos na bola de isopor. Ligue-os por vários caminhos. Qual é o menor caminho que liga esses pontos? Esse caminho tem fim?
d) Prolongue esse menor caminho nos dois sentidos. Quantos caminhos você obteve? É possível determinar o comprimento dos caminhos encontrados?
e) Se considerarmos duas linhas distintas, em uma superfície esférica, elas têm ponto de intersecção? Quantos?

[13] A atividade 01 foi adaptada de SANTOS, 2009 e as demais atividades foram baseadas em PATAKI, 2003.

Atividade 04

a) Localize e determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição do Forte São Julião da Barra e a cidade de San Juan.
b) O globo terrestre possui um eixo de rotação imaginário. Como se chamam as intersecções da superfície terrestre com esse eixo?
c) Localize e caracterize o Equador.
d) Identifique quais circunferências máximas você vê na superfície do globo terrestre.
e) Quais das circunferências são denominadas paralelos terrestres?
f) Quais das circunferências são denominadas Meridianos?

Atividade 05

Como você observou, unindo dois pontos distintos em uma superfície esférica, obtemos um arco de circunferência.

a) Procure medir a distância entre esses pontos. Como você mediu essa distância?
b) Há uma única distância entre esses pontos? Qual a distância entre os pólos Norte e Sul?

Atividade 06

Na bola de isopor que você possui, faça o esboço de duas circunferências máximas.

a) Quantos são os pontos de intersecção e quantos são os arcos determinados por esses pontos?

b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na bola de isopor? Quantos?

c) Se existir algum ângulo na superfície esférica (bola de isopor), defina esse ângulo. Que elementos o constituem?

d) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura desse ângulo? E como faria para medi-lo?

Atividade 07

Na bola de isopor, marque três pontos distintos, tais que dois a dois pertençam a uma mesma circunferência máxima. Ligue esses pontos, usando a régua esférica que você construiu.

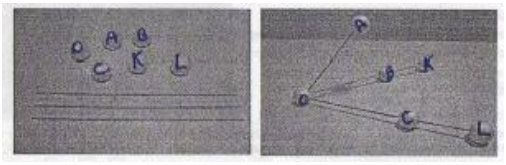
a) Descreva a figura encontrada. Ela se assemelha alguma figura da Geometria Plana? Que nome você daria a essa figura?

b) Faça na bola de isopor, um esboço, da atividade 01, de tal maneira que o vértice (F) seja o ponto de localização do forte, o vértice (S) seja o ponto de localização da cidade e o vértice (P) esteja no pólo. A figura encontrada no item anterior pode representar a situação proposta na atividade 01?

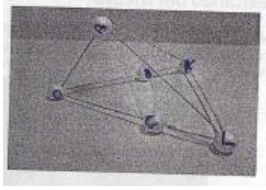
Atividade 08

Você irá determinar a Relação Fundamental dos triângulos esféricos, também chamada fórmula do Cosseno.

Os palitos de madeira representarão as semirretas, e as bolinhas de isopor os pontos. Assim, construa um triedro convexo e nomeie cada ponto como mostram as figuras abaixo.



Complete o triedro construído anteriormente como mostra figura abaixo. O ponto O indica o centro de uma esfera E, e os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo esférico de E. Devem ser construídos os segmentos AL e AK tangentes, respectivamente, às circunferências máximas AC e AB no ponto A. O segmento OA é raio da esfera E.



No triedro construído temos um triângulo esférico ABC de uma esfera de centro O e raio unitário OA. Sejam Â = m(CAB), $\hat{B}$ = m(ABC) e $\hat{C}$ = m(BCA) as medidas de seus ângulos internos e c, a e b as medidas dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Mostrar que cos a = cosb cosc + senb senc cosA. Para isto:

a) Encontrar e anotar todos os triângulos planos que compõe o triedro.

b) A relação que se quer mostrar envolve senos e cossenos de argumentos específicos (a, b, c, A). Encontrar, em cada um dos triângulos esboçados, as relações entre senos e cossenos que envolvam esses argumentos.

c) É possível que esta relação mostrada solucione a situação da atividade 01? Justifique.

Atividade 09

Para resolver a situação da atividade 01 proposta, utilizaremos as conclusões obtidas anteriormente, lembrando que as coordenadas do forte são ϕ_F = 38º40'N e λ_F = 9º19'W e da cidade são ϕ_S = 18º27'N e λ_S = 66º06'W.

a) Como representaria por meio de um desenho no papel, o triângulo esférico PFS, no qual P é o pólo, F a posição do Forte e S a posição da cidade. Chame *d* a distância do forte à cidade.

b) O que você necessita traçar para representar, o desenho anterior?

c) Represente, no desenho anterior, a latitude ϕ_F e determine a medida do lado FP.

d) Represente, no desenho anterior, a latitude ϕ_S e determine a medida do lado SP.

e) Represente a longitude λ_F e $\lambda_{S,}$no desenho anterior. A diferença das medidas das longitudes de S e F corresponde à medida de qual ângulo do triângulo esférico? Determine essa medida.

f) Você pode aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos, para solucionar a situação da atividade 01? Justifique.

g) Para essa situação da atividade 01, como pode ser escrita a relação fundamental?

h) Utilizando a calculadora, determine a medida da distância d, em graus.

i) Determine a distância d, em km, sabendo que o raio do planeta Terra, é aproximadamente 6371 km.