

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Adinilson Marques Reis

**Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a
partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino
médio**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**São Paulo
2011**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Adinilson Marques Reis

**Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a
partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino
médio**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para
obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Gerson Pastre de
Oliveira**.*

**São Paulo
2011**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

A minha esposa amada e companheira Arlene (Quinha), que nas horas difíceis teve paciência e soube me confortar.

Aos meus pais Benedito Reis (in memoriam) e Guiomar Simão Reis pelo amor e pelo alicerce construído.

Ao meu irmão Hamilton Antônio Reis (in memoriam) pelos bons exemplos deixados o qual me espelhei.

Sinceros agradecimentos,

A DEUS, acima de tudo, por me guiar em todas as etapas difíceis da minha vida.

À Nossa Senhora Aparecida, pela interseção e atendimento a inúmeros pedidos de proteção a minha família e durante as viagens.

A minha esposa, que sempre acreditou em mim e sempre me incentivou com palavras de fé, carinho e incentivo.

Ao meu orientador, Professor Gerson Pastre de Oliveira, pelas correções, sugestões e discussões, que tanto contribuíram para minhas reflexões como pesquisador.

Às Professoras Doutoras Celina Aparecida Almeida Pereira Abar e Adriana Clementino, pelas sugestões e comentários no Exame de Qualificação que muito contribuíram para a conclusão desse trabalho.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, por ter-me concedido a bolsa de estudo.

As Senhoritas Priscila, Sara, Samanta e Sr. Jhonie, meus cães, companheiros incondicionais no combate ao estresse.

RESUMO

Este trabalho parte da constatação das dificuldades apresentadas nos conceitos de função afim pelos alunos por meio da elaboração e aplicação de uma sequência diagnóstica de atividades seguida de outra, baseada nos erros cometidos e intermediada pelo *software* GeoGebra. A investigação se deu em uma escola pública de São José dos Campos, com alunos da 1ª série do Ensino Médio. Com esse objetivo em mente, a pesquisa se propôs a responder a seguinte questão: “como o uso reconstrutivo do erro pode auxiliar na elaboração de uma sequência de ensino sobre função afim entre estudantes do Ensino Médio, a partir de uma estratégia pedagógica com uso do *software* GeoGebra?”. Na tentativa de compreender melhor o funcionamento cognitivo em relação às dificuldades dos alunos, a investigação apoiou-se na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, enquanto que a coleta e análise dos dados basearam-se nos procedimentos metodológicos da Engenharia Didática de Michèle Artigue. A elaboração e aplicação da sequência diagnóstica foram embasadas nos documentos oficiais que tratam do processo de ensino e aprendizagem, bem como na Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Foram considerados, igualmente, os resultados de avaliações como o SARESP e a Prova Brasil dos alunos pesquisados. Com relação à proposta da sequência de atividades com o uso do *software* GeoGebra, os resultados obtidos na fase diagnóstica foram usados para elaborar as atividades subsequentes. Os resultados indicam contribuições para ampliar os estudos já realizados sobre o tema e a compreensão ao considerar os erros na aprendizagem e no preparo de atividades com o uso do *software* GeoGebra.

Palavras-chave: Função afim, registros de representação semiótica, tecnologias na Educação Matemática, GeoGebra, erro no processo de aprendizagem.

ABSTRACT

This research starts with the observation of the difficulties presented in the concepts of function in order for the pupils through the development and implementation of a diagnostic sequence of activities, followed by other, based on errors made by students, supported by software GeoGebra. The investigation takes place in a public school in Sao Jose dos Campos with students from the 1st grade of high school. With that goal in mind, the research intended to answer the following question: “how the reconstructive use of error can assist in building knowledge about affine function among high school students, from a pedagogical strategy with use of GeoGebra software?”. In an attempt to better understand cognitive functioning in relation to students’ difficulties, we support our research into the theory of semiotic representation registers of Raymond Duval, while data collection and related analysis was based on the methodological procedures of the Didactical Engineering of Michèle Artigue. The design and implementation of diagnostic sequence were based on official documents those dealing with teaching and learning as well as the Curriculum Proposal of the State of São Paulo. We considered also the results of assessments as “SARESP” and “Prova Brasil” of the students involved in research. Regarding the proposal of the sequence of activities using the software GeoGebra, the results obtained in the diagnostic phase were used to develop subsequent activities. The results indicate contributions to expand the studies already done on the subject and improvements in the understanding about it, when considering the errors in learning and the possibilities those emerged with preparation of activities using the software GeoGebra.

Keywords: Affine function. Semiotic representation register. Technologies in Mathematics Education. GeoGebra. Error in the learning process.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação dos diferentes registros do funcionamento matemático	43
Figura 2 – Quadro geral dos conteúdos do 2º bimestre da 1ª Série do EM	54
Figura 3 – Quadro geral de conteúdos do caderno do professor	57
Figura 4 – Atividade 1	59
Figura 5 – Item a, Atividade 2	60
Figura 6 – Atividade 3	61
Figura 7 – Grandezas diretamente proporcionais	62
Figura 8 – Atividade 6	62
Figura 9 – Atividade 8	63
Figura 10 – Função $f(x) = ax + b$, com $b \neq 0$	64
Figura 11 – Atividade 5, Situação de Aprendizagem 2	66
Figura 12 – Atividade 8	67
Figura 13 – Atividade 9	68
Figura 14 – Níveis de desempenho da Escala de Proficiência do SARESP	76
Figura 15 – Níveis de Proficiência de Matemática – SARESP 2008	78
Figura 16 – Grupos de competências avaliadas nas provas do SARESP 2008.....	79
Figura 17 – Bloco de ATIVIDADE I, sequência didática diagnóstica	83
Figura 18 – Bloco de ATIVIDADE II, sequência didática diagnóstica	88
Figura 19 – Bloco de ATIVIDADE III, sequência didática diagnóstica.....	93
Figura 20 – Bloco de ATIVIDADE IV, sequência didática diagnóstica	95
Figura 21 - Protocolo de Erro do item “a”, ATIVIDADE I.....	100
Figura 22 – Protocolo de Acerto do item “a”, ATIVIDADE I.....	101
Figura 23 – Protocolo de Acerto parcial do item “b”, ATIVIDADE I.....	102
Figura 24 – Protocolo de Acerto parcial do item “c”, ATIVIDADE I	102
Figura 25 – Protocolo de Acerto parcial do item “c”, ATIVIDADE I	103
Figura 26 – Protocolo de Erro da dupla de Nº 04, do item “d”, ATIVIDADE I.....	104
Figura 27 – Protocolo de Erro da dupla de Nº 03, do item “d”, ATIVIDADE I.....	104
Figura 28 – Protocolo de Acerto parcial do item “e”, ATIVIDADE I.....	105
Figura 29 – Protocolo de Acerto parcial do item “f”, ATIVIDADE I.....	106
Figura 30 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item “a”, ATIVIDADE II	109
Figura 31 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item “b”, ATIVIDADE II	109

Figura 32 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item “c”, ATIVIDADE II	110
Figura 33 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item “d”, ATIVIDADE II	110
Figura 34 – Protocolo de Acerto parcial da dupla de Nº 09, 4ª questão, ATIVIDADE II	113
Figura 35 – Protocolo de Acerto parcial da dupla de Nº 10, 4ª questão, ATIVIDADE II	114
Figura 36 – Protocolo de Erro da 4ª questão, ATIVIDADE II	114
Figura 37 – Protocolo do exemplo de Erro da 5ª questão, ATIVIDADE II	115
Figura 38 – Protocolo do exemplo de Erro, ATIVIDADE III	116
Figura 39 – Protocolo de respostas da 1ª afirmação, ATIVIDADE IV.....	117
Figura 40– Protocolo de respostas da 2ª afirmação, ATIVIDADE IV.....	118
Figura 41 – Protocolo de respostas da 3ª afirmação, ATIVIDADE IV.....	118
Figura 42 – Conversões e representações da Atividade 1	122
Figura 43 – Layout GeoGebra do interruptor $f(x) = ax + b$, Atividade 1	123
Figura 44 – Conversões e representações da Atividade 2	124
Figura 45 – Layout GeoGebra dos interruptores, Atividade 2.2.....	125
Figura 46 – Visualização do ‘triângulo dinâmico’ de proporcionalidade constante...	127
Figura 47 – Conversões e representações da Atividade 3	127
Figura 48 – Conversões e representações da Atividade 4	129
Figura 49 – Layout GeoGebra da Atividade 4.....	130
Figura 50 – Conversões e representações da Atividade 5	130
Figura 51 – Layout GeoGebra da Atividade 5	131
Figura 52 – Layout <i>GeoGebra</i> , Atividade 1	168
Figura 53 – Layout <i>GeoGebra</i> , Atividade 2	169
Figura 54 – Layout <i>GeoGebra</i> , Atividade 3	170

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Resultado dos níveis de proficiência dos alunos pesquisados.....	80
Quadro 2 - Distribuição do resultado das categorias apuradas na ATIVIDADE I.....	100
Quadro 3 - Distribuição dos resultados apurados na 1ª Questão, ATIVIDADE II.....	108
Quadro 4 - Distribuição dos resultados apurados na 2ª Questão, ATIVIDADE II.....	109
Quadro 5 - Distribuição dos resultados apurados na 3ª Questão, ATIVIDADE II.....	111
Quadro 6 - Distribuição dos resultados da 4ª e 5ª Questões, ATIVIDADE II	112
Quadro 7 - Adaptação da Matriz de Referência do Saresp 2008, 8ª série	141
Quadro 8 - Quadro de conteúdos de Matemática do 2º bimestre do EM.....	171
Quadro 9 - As dez metas do novo Plano Político Educacional.....	171

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 PROPOSTA DE PESQUISA E ESTUDOS REALIZADOS	21
1.1 Justificativa e objetivo	21
1.2 Ensino-aprendizagem de funções nos documentos oficiais federais ...	22
1.3 Trabalhos acadêmicos sobre funções afins que utilizaram tecnologias	27
1.4 Justificativa das escolhas feitas	32
1.5 As tecnologias no ensino-aprendizagem em Matemática.....	32
1.6 A escolha do software educacional GeoGebra.....	38
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	41
2.1 Fundamentos teóricos da noção de registro de representação semiótica	41
2.2 A análise do erro e a noção de obstáculo	45
3 A PROPOSTA CURRICULAR PAULISTA.....	51
3.1 A atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo.....	51
3.2 A organização dos cadernos de Matemática do professor.....	53
3.3 A organização dos cadernos de Matemática do aluno.....	69
4 METODOLOGIA	71
4.1 Procedimentos metodológicos	71
4.2 Descrição da escola	74

4.3	Descrição e escolha dos sujeitos	74
5	COLETA E ANÁLISE DE DADOS.....	81
5.1	A sequência didática diagnóstica	81
5.2	Análises a priori sequência didática diagnóstica	82
5.3	Aplicação da sequência didática diagnóstica.....	96
5.4	Análises a posteriori e validação	99
6	INSTRUMENTO COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA.....	119
6.1	Introdução	119
6.2	Sequência didática com o uso do GeoGebra.....	121
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	133
	REFERÊNCIAS.....	137
	APÊNDICES	141
	ANEXOS	171

INTRODUÇÃO

Vivemos numa sociedade cada vez mais repleta de instrumentos tecnológicos, quer seja para o nosso lazer, diversão, formação e aprimoramento profissional – ou como ferramenta no processo educativo. São tecnologias que sempre se renovam, por meio de novas versões e máquinas, mais poderosas e sofisticadas. Como reflexo do meio social no qual se insere, o ambiente escolar não poderia ficar infenso a semelhante processo.

A sociedade contemporânea, que parece solicitar que os cidadãos permaneçam em um contínuo processo de formação/aquisição de habilidades e competências, de forma a buscarem soluções para os novos problemas que surgem, exige, também, uma escola que os oriente na construção dos conhecimentos necessários.

De acordo com as OCEM - Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 69), “nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. [...], deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas.” Esse documento também considera importante o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na formação escolar em dois sentidos que interessam particularmente a este trabalho: a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. De fato, “por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática.” (*idem*, p. 87). Para tal asserção, professores e alunos têm que estar preparados.

Conforme destacam os PCNEM (BRASIL, 1999) - Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - e os PCN+ (BRASIL, 2002) - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, documentos oficiais que organizam as diretrizes e parâmetros nas escolas do Ensino Médio, definem *áreas de conhecimento* que, para a Matemática especificamente, definiram como área das Ciências da Natureza, Matemática e

suas Tecnologias. Organizam o aprendizado em termos de competências. “São eles: **representação e comunicação; investigação e compreensão; e contextualização sócio-cultural**” (p. 23) e que convergem com as *áreas de Linguagens e Códigos* e *área de Ciências Humanas*.

Estes Parâmetros, acima citados, cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias para o aperfeiçoamento da prática educativa.

O Ensino Médio no Brasil, etapa final do ensino básico, estabelecida pela LDBEN (Lei nº 9.394/96) - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação e pelos PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais - procurou atender a uma reconhecida necessidade de atualização da educação brasileira. De acordo com a Lei,

o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.(BRASIL, 2006).

A nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo - PCESP - apresenta a Matemática como uma área específica, porém, “visa apenas a uma exploração mais adequada de suas possibilidades de servir as outras áreas, na ingente tarefa de transformar a informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação”. (SÃO PAULO, 2008, p. 39). A tecnologia apresentada no *currículo* tem o sentido de preparar o aluno e futuro cidadão, com uma educação tecnológica básica e compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos da produção de bens e serviços da sociedade atual.

Diante do exposto, entendemos que a escola deve ser um ambiente que ofereça recursos físicos e humanos para propiciar meios para que os jovens, autonomamente, relacionam a teoria e prática a fim de participar ativamente de uma sociedade tecnológica como a atual. Entende-se por recursos físicos todos os instrumentos midiáticos, como sala de informática, projetores, *softwares* específicos em cada área do conhecimento que sejam utilizados pedagogicamente. Já os recursos humanos são os professores preparados e uma

equipe de gestão participativa. Esta concepção é confirmada em Oliveira (2007, p. 71) ao afirmar a importância de compreender o aspecto revolucionário das TICs - Tecnologias de informação e Comunicação - e “como ponte para a compreensão da lógica pela qual estão presentes no cotidiano [...]” e ao lembrar que “as tecnologias não estão presas ao âmbito dos equipamentos, apenas. Elas envolvem as pessoas ao funcionar como suportes, meios e extensões de suas atitudes, pensamentos e palavras, o que significa que interferem no modo de agir, sentir, pensar e falar dos usuários.” (*idem* p. 77).

Com relação ao ensino de Matemática, concordamos com Lopes (2004, p. 11) em sua dissertação de mestrado que “a Matemática ensinada hoje nas escolas ainda tem um extenso e exigente caminho a percorrer na retificação dos modelos disciplinares vigentes, em geral, pautados pela transmissão e recepção irrefletida de conhecimentos [...]”. E, ainda, acreditamos que tais articulações serão alcançadas após pleno entendimento do objeto matemático.

Ao trabalhar nesta investigação com construção do conhecimento matemático, especificamente o conceito de função afim, adota-se a consciência de que, historicamente, principalmente nas escolas públicas os sistemas de representação desse conhecimento matemático têm caráter estático. Em seu artigo as autoras Gravina e Santarosa conferem esse sistema, pois

“vê-se isto observando os livros ou assistindo uma aula ‘clássica’. Este caráter estático muitas vezes dificulta a construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenho a ser memorizado.” (GRAVINA; SATAROSA, 2008, p. 9).

Assim sendo, as tecnologias oferecem possibilidades de mediação nos processos de ensino-aprendizagem, que só se materializam dadas algumas condições essenciais, descritas por Oliveira (2009):

- Consideração de que *softwares* e dispositivos computacionais têm o papel de interfaces mediadoras, e não compõem, por eles mesmos, quaisquer objetivos didáticos que não tenham sido planejados por professores, gestores e demais figuras humanas do entorno escolar;
- Os planejamentos de aulas dinâmicas e interativas, capazes de mobilizar conhecimentos prévios e de subsidiar a construção de novos saberes, leva em consideração o papel do professor como *orientador* no processo, ao

empregar estratégias pedagógicas com uso das mais variadas tecnologias – inclusive, as ditas tradicionais, como giz e lousa – e dos estudantes como sujeitos detentores de saberes prévios e de histórias distintas, e que devem ter incentivado o caráter autônomo de construção das aprendizagens.

Outra característica importante é a de que as representações, a partir do uso das interfaces computacionais, podem passar a ter um caráter dinâmico, e isto pode causar reflexos nos processos cognitivos.

O psicólogo Raymond Duval desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, considerando as mudanças de registros de representação. Para Duval (1995, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 207) o processo de resolução de um problema, que envolve um objeto matemático, deve proporcionar ao aluno condições de compreender que em um *quadro* poderá ter diferentes *pontos de vista* e, suas mudanças, além da *conversão dos registros* são fundamentais para o cumprimento da tarefa proposta. Segundo Almouloud, para este autor, “se num nível cognitivo o aluno conseguir realizar as mudanças de registros as mais variadas possíveis para um determinado objeto matemático, então aprenderá Matemática”.

Observamos que um trabalho articulado entre as TICs e as *orientações* oficiais à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Duval, poderemos entender melhor as dificuldades e/ou erros encontrados pelos alunos e até mesmo estratégias de ajudá-los a alcançar êxito na resolução das tarefas.

O presente trabalho configura-se como uma pesquisa qualitativa, que se consolida a partir de observações, advindas da experiência em salas de aula de escolas públicas e sobre as dificuldades dos alunos no aprendizado do conceito de função afim, tema central desta investigação. Conforme as avaliações externas ao ambiente escolar cotidiano, como aquela promovida pelo SARESP 2008, Prova Brasil/Saeb 2007, percebe-se que essas dificuldades não são locais. Assim sendo, planejou-se elaborar essa dissertação sobre a temática mencionada, objetivando uma proposta de intervenção de ensino que auxilie na redução das dificuldades existentes, com auxílio de uma estratégia pedagógica com uso do *software* GeoGebra.

Inevitavelmente, as dificuldades relativas à aprendizagem de certo tema levam o estudante a cometer erros quando da realização de atividades correlatas. Com a função afim não seria diferente. Nesta investigação, consideramos o

posicionamento de Perrenoud (2000) sobre o uso do erro na aprendizagem, trabalhando com o mesmo como elemento de reconstrução, crítica e como estratégia formativa de avaliação e consolidação dos conhecimentos.

Diante do exposto, com esta pesquisa, espera-se contribuir para reflexões e estudos em Educação Matemática, especificamente quanto à aprendizagem do conceito de função afim, considerando os erros cometidos pelos alunos na consecução de atividades sem o uso de interfaces computacionais. A *estratégia pedagógica com uso de tecnologias* (Oliveira, 2009) adotada nesta investigação, que é relatada mais adiante, busca responder a seguinte questão de pesquisa: “*como o uso reconstrutivo do erro pode auxiliar na elaboração de uma sequencia de ensino sobre função afim entre estudantes do Ensino Médio, a partir de uma estratégia pedagógica com uso do software GeoGebra?*”.

Para lidar com tal questionamento, a estrutura deste texto está dividida em capítulos, descritos a seguir.

O Capítulo 1, organizado em seis blocos, apresenta a proposta de pesquisa e os estudos realizados e uso de TICs no ensino de funções afins no primeiro ano do Ensino Médio. No primeiro bloco, são apresentadas as justificativas e os objetivos de pesquisa que nortearam o trabalho. No segundo bloco objetivamos discutir algumas orientações didáticas relativas ao conceito de função no Ensino Médio, apresentadas nos documentos oficiais, e como essas diretrizes expressam o erro na aprendizagem. No terceiro bloco é apresentada uma breve revisão de como a produção acadêmica da PUC vem trabalhando com este conceito, especificamente no que diz respeito à utilização de TICs no ensino e aprendizagem. No quarto bloco apresentamos nossa justificativa das escolhas feitas. No quinto, são trazidas opiniões de pesquisadores no campo da educação Matemática (KENSKI, 2003; VALENTE, 1993, 1997 e 2002; BORBA E PENTEADO, 2001) que mostram pesquisas relacionadas ao uso e contribuição do computador em sala de aula. No quinto bloco temos as considerações na escolha do *software* educacional GeoGebra.

No Capítulo 2, organizado em dois blocos, fundamentamos nossa pesquisa apontando algumas características essenciais do modelo teórico proposto por Raymond Duval (2005) em relação às transformações realizadas nos registros de representação semiótica. No primeiro bloco discutimos as principais formas de *conversão* dos registros matemáticos e como se dá a organização de ensino, pelo

professor, com pensamento nos dois tipos de transformação das representações de maneira a compreender melhor as dificuldades de aprendizagem. No segundo bloco fizemos uma síntese da *Didática da Matemática* de Brousseau (1987), descrevendo a ideia de avaliação e *obstáculo* de seu modelo de interação para melhorar o ensino-aprendizagem.

No Capítulo 3, organizado em três blocos, abordamos a Proposta Curricular do Estado de São Paulo em suas implicações no processo de ensino-aprendizagem do nosso objeto matemático, função afim. No primeiro bloco apresentamos um breve histórico desse documento sobre as reorientações curriculares. No segundo e terceiro blocos apresentamos, respectivamente, a organização dos cadernos de matemática do professor e do aluno da atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

No capítulo 4, organizado em quatro blocos, descreveremos os referenciais metodológicos referentes às duas fases desta pesquisa. No primeiro bloco, destacamos nosso procedimento metodológico. No segundo bloco descrevemos as características da instituição de ensino que foi aplicada as sequências didáticas. No terceiro bloco apresentamos os sujeitos da pesquisa, com ênfase nos critérios que foram utilizados para sua escolha e, no quarto bloco, apresentamos os resultados SARESP 2008 obtidos pelos pesquisados.

No capítulo 5, organizado em quatro blocos, descrevemos os procedimentos de coleta e análise dos dados referentes à primeira fase dessa pesquisa. No primeiro bloco, descrevemos os objetivos da sequência didática diagnóstica aplicada. No segundo, apresentamos as análises *a priori* da sequência didática diagnóstica e no terceiro descrevemos o processo de aplicação da mesma. No quarto bloco, relatamos as análises *a posteriori* e validação dos resultados obtidos em categorias de erros.

No capítulo 6, estruturado em dois blocos, descreveremos os procedimentos para a elaboração do instrumento com o uso do software GeoGebra referente à segunda fase dessa pesquisa. No primeiro bloco, temos uma reflexão do capítulo 3. No segundo bloco, descrevemos o instrumento proposto: a sequência didática com o uso do *software* GeoGebra.

Nas considerações finais são alinhados comentários acerca dos resultados obtidos, bem como recomendações relativas a outras pesquisas possíveis no contexto da investigação aqui apresentada.

1 PROPOSTA DE PESQUISA E ESTUDOS REALIZADOS

Neste capítulo, apresentaremos nossa justificativa e objetivo de escolha para o tema; uma breve discussão de algumas orientações didáticas relativas ao conceito de função no Ensino Médio apresentadas nos documentos oficiais federais, bem como a maneira pela qual tais diretrizes expressam o erro na aprendizagem; uma revisão bibliográfica dos trabalhos acadêmicos realizada na PUCSP - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - sobre funções afins que utilizaram tecnologias; nossas justificativas sobre as escolhas feitas e a opção pelo *software* educacional GeoGebra.

1.1 Justificativa e objetivo

Uma questão motivadora para essa pesquisa são as experiências vividas em sala de aula. Delas, observamos que é muito comum que os alunos, ao concluírem o 1º ano do Ensino Médio¹, não diferenciem a equação do 1º grau e a função afim. Além disso, os estudantes apresentam extrema dificuldade da transcrição da linguagem natural para a linguagem algébrica na resolução de situações-problema. E ainda, os resultados das avaliações externas como o SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e dos sistemas nacionais de avaliação, como o Saeb (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e a Prova Brasil reforçam essa inquietação e apontam não ser um problema pontual e localizado.

Outra questão motivadora é que, normalmente, a ênfase para o ensino de funções se dá via álgebra e com o uso de livros didáticos. Não que os livros sejam inadequados – a discussão aqui não é esta – mas é visível que as tecnologias estão presentes em nosso dia-a-dia, porém nem sempre são utilizadas no ambiente escolar. Assim sendo, oferecer diferentes representações, em caráter dinâmico (algébrica, gráfica, tabular, simbólica ou em linguagem natural) para

¹ Conteúdo proposto para o 2º bimestre, conforme Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática, São Paulo. SEE, 2008.

uma mesma função, estimula a formulação de conjecturas e a coordenação de diversas representações de conceitos como a função afim. Desta forma, é possível que novas aprendizagens sejam construídas em uma sala de aula heterogênea, comum em escolas públicas.

Esse “caminho” para o conhecimento de funções ganha força com a dinâmica dos ambientes computacionais, que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas, permitindo destacar como os diferentes registros estão associados.

Desta forma, o objetivo desta pesquisa é o de aplicar uma sequência didática diagnóstica, para registrar e analisar os erros cometidos pelos alunos no conceito de função afim e, em seguida, propor uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra, planejada e estruturada a partir da análise destes mesmos erros, de forma a verificar possíveis avanços na aprendizagem.

1.2 Ensino-aprendizagem de funções nos documentos oficiais federais

Atualmente, o Sistema Educacional Brasileiro tem, em sua estrutura, dois segmentos principais bem definidos: o Ensino Básico e o Ensino Superior. O Ensino Básico se encontra subdividido em níveis, quais sejam o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, este segmentado em três séries, dentre as quais a primeira série foi a escolhida para esta investigação.

O objetivo aqui é discutir algumas orientações didáticas relativas ao conceito de função no Ensino Médio, apresentadas nos documentos oficiais, e como essas diretrizes expressam o erro na aprendizagem. A importância de se conhecer o erro cometido pelo aluno e em que pontos o estudante não consegue superar um dado *obstáculo cognitivo* (PERRENOUD, 2000) reside no fato de que, ao lidar com os erros dos aprendizes, o professor tem a sua disposição dados importantes para intervenções mais individualizadas, além de reconhecer as idiossincrasias discentes. Este modelo pressupõe a recolha de informação sobre os progressos e dificuldades, a interpretação e o diagnóstico dos fatores que estão na origem das dificuldades e a adaptação das atividades de ensino e aprendizagem de acordo com a interpretação das informações recolhidas na sala

de aula.

Nesse contexto, o estudo dos documentos oficiais pode permitir um olhar mais crítico e um pensar reflexivo sobre o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função afim. Compreender os erros como agentes na construção desse conceito matemático pode servir de ponto de partida para avanços no processo de construção do conhecimento matemático.

A LDBEN (BRASIL, 2006) explicita que o Ensino Médio é a “etapa final da educação básica” (Art.36), o que significa assegurar aos estudantes mais do que instrumentos que permitam “continuar aprendendo”, precisa garantir uma preparação básica do cidadão para o trabalho e a cidadania, tendo em vista o desenvolvimento da compreensão dos “fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos” (Art.35, incisos I a IV). De acordo com a Lei,

o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos (BRASIL, 2006)

Para assegurar uma educação de base científica e tecnológica, foi proposta pelas DCNEM - Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1998a) - a organização do Ensino Médio em termos de áreas do conhecimento, como as das Ciências da Natureza e da Matemática, aqui em questão.

A presença da Matemática nessa área (que inclui Física, Química e a Biologia) “se justifica pelo que de ciência tem a Matemática, por sua afinidade com as Ciências da Natureza, na medida em que é um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos destas últimas, e finalmente pela importância de integrar a Matemática com os conhecimentos que lhe são mais afins” (BRASIL, 1998a, s/p).

Esta última justificativa “é, sem dúvida, mais pedagógica do que epistemológica, e pretende retirar a Matemática do isolamento didático em que tradicionalmente se confina no contexto escolar.” (BRASIL, 1998a, p. 93).

Em consonância com os termos da lei e dessas diretrizes, os PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - apontam para o ensino

não isolado do conceito de função das demais áreas do conhecimento, além das conexões internas à própria Matemática, em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Segundo os PCNEM,

o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, p. 255).

Ainda segundo o documento, o estudo das diferentes funções deve estar no conceito fundamental (dependência de duas grandezas), em suas propriedades e na interpretação de seus a gráficos, bem como nas aplicações. Essa articulação entre as áreas do conhecimento pressupõe um aprendizado com o desenvolvimento de competências e habilidades gerais e a conversão de registros de representação semiótica (Duval, 2005).

Nesse sentido, para cumprir esses pressupostos, é preciso promover atividades coletivas ou individuais para que os alunos deixem de ser passivos e passam a ser protagonistas nos fazeres. O professor, nesse processo de ensino e aprendizagem, pode promover o uso de tecnologias e discutir a questão da avaliação nos dois sentidos: a avaliação da aprendizagem dos alunos e a avaliação do processo de ensino – a tecnologia, então, teria um papel mediador (Oliveira, 2007).

A sociedade atual, envolvida com o dinamismo tecnológico, pode ter uma tendência a tratar o erro como se fosse um experimento descomprometido do problema original, por tentativas, de modo a procurar o acerto, sem refletir e avaliar para detectar o real problema. Em Educação Matemática, o erro tratado por tentativas pode resultar em obstáculos de aprendizagem, por não fornecer resultados esperados ou nunca chegar ao acerto. Assim sendo, o tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem torna-se relevante, e conseqüentemente, as questões relacionadas à avaliação.

Para Almouloud (2007), com relação à aprendizagem de conceitos

matemáticos,

a maioria dos pesquisadores em didática da Matemática defende a idéia (sic) de que um dos fatores que mais influenciam essa aprendizagem é o tratamento que o professor dá ao erro do aluno. Tal tratamento está intimamente ligado à concepção de aprendizagem que tem esse professor. (ALMOULOU, 2007, p. 130).

Essa ideia é reforçada por Pinto (2000, p. 54) quando comenta que, ao utilizar a avaliação de modo classificatório, priorizando o acerto na resposta, as informações contidas no erro provavelmente não serão aproveitadas pelo professor na organização da aprendizagem do aluno.

Perrenoud (2000) reforça essa concepção de aprendizagem pelo professor ao enfatizar o pouco conhecimento e despreparo dos mesmos para usar o erro como instrumento de avanço na aprendizagem, sinalizando mudanças nas práticas escolares.

A ausência de registros, desta forma, implica na ausência das escolhas feitas pelo aluno e, conseqüentemente, impossibilita identificar a origem da dificuldade: o professor perde informações para refletir sobre a própria prática e para reconstruir o processo que orienta.

Diante desse contexto, seria importante considerar, nas avaliações, os erros cometidos como mecanismo de investigação. Para tanto, as atividades que permitem recolher registros das estratégias de resolução produzem mais do que erros ou acertos: mostram ao professor a evolução da aprendizagem do aluno e meios de intervenção para a construção do conhecimento. Encontramos nos PCN a importância de atividades que permitem reflexão do aluno a partir de suas respostas:

O fato do aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado do problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (BRASIL, 2000, p. 45).

Pinto (2000) afirma que a utilização da avaliação investigativa contribui positivamente para o aluno, pois estes podem compreender seus erros e assim, como ponto de partida, procurar meios para avançar na busca do acerto. Desse modo, “é necessário que o professor busque conhecer e entender os erros cometidos pelos alunos nas atividades propostas, já que, [...] quando um aluno

comete um erro, ele expressa o caráter incompleto de seu conhecimento" (PINTO, 2000, p. 54). Para que a análise do erro surja como uma alternativa didática, a autora afirma que o erro se torna uma pista para o professor organizar o ensino e “deixa de ser apenas uma resposta a ser analisada: ele passa a ser uma questão desafiadora que o aluno coloca ao professor – portanto, um elemento desencadeador de um amplo questionamento de ensino” (*idem*, p. 11-12).

Segundo Almouloud (2007, p. 104) os pesquisadores em didática da Matemática “dão bastante importância e consideram que, para a avaliação ser um meio de estudo dos fenômenos de ensino e de aprendizagem, não pode dispensar o aluno e seus erros”, ao considerar o impacto que o processo avaliativo tem sobre as aprendizagens.

Para a avaliação da função afim, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (Brasil, 2006) não mencionam, diretamente, nenhuma recomendação. Relatam, de maneira geral, para as áreas do conhecimento de *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* a importância do erro, ao expor que:

Na escola, uma das características mais importantes do processo de aprendizagem é a atitude reflexiva e autocrítica diante dos possíveis erros. Essa forma de ensino auxilia na formação das estruturas de raciocínio, necessárias para uma aprendizagem efetiva, que permita ao aluno gerenciar os conhecimentos adquiridos. (BRASIL, 2006, p. 46).

Os PCN+ relatam esta abordagem como *estratégias para a ação*. Conforme este documento, “para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática” (BRASIL, 2000, p. 129), a avaliação deve considerar que a observação e os registros são as formas mais adequadas para acompanhar o processo de ensino e de aprendizagem, ainda que outros instrumentos possam se aliar a esse trabalho, inclusive a tradicional prova.

A resolução de problemas é a perspectiva metodológica desta proposta e, na seleção das atividades, deve garantir uma postura investigativa:

O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo,[...]. (BRASIL, 2002, p. 129).

Diante do exposto, consideramos relevante aplicar em nossa pesquisa uma sequência de atividades, referentes ao objeto matemático função afim, com o objetivo de constatar através dos registros os possíveis erros de aprendizagem.

1.3 Trabalhos acadêmicos sobre funções afins que utilizaram tecnologias

Assim como esta pesquisa, diversas dissertações têm como objetivo o aprimoramento da aprendizagem do objeto matemático função com a utilização de uma tecnologia. A análise, com a finalidade de verificar de que forma se deu a utilização de recursos tecnológicos, e a metodologia empregada, ajudou no processo de elaboração da sequência didática aplicada nesta investigação.

Neste sentido, fizemos primeiramente um levantamento das dissertações do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUCSP, procurando trabalhos que usaram alguma tecnologia. Iniciamos consultando os resumos², palavras-chaves e títulos das dissertações do mestrado acadêmico em Educação Matemática e profissional em Ensino de Matemática desta instituição até o ano de 2010, considerando quais delas apresentavam este perfil. Neste aspecto, segundo Borba e Penteado:

[...] Esses estudos teóricos podem servir de orientação para que o computador não seja utilizado somente como um instrumento para melhorar o resultado em um dado teste nacional, regional ou local. É preciso que a chegada de uma mídia qualitativamente diferente, como a informática, contribua para modificar as práticas do ensino tradicional vigentes (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 51).

Dentre os trabalhos encontrados, selecionamos apenas aqueles que tratavam do conceito de função afim.

Pinto (2009), em sua pesquisa de mestrado em Educação Matemática, teve como objetivo analisar as dissertações PUC/SP publicadas desde o ano de 1994 até o ano de 2007, com a finalidade de verificar qual foi o resultado da

² Disponibilizados nos sites:

<http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/trabalhos_defendidos_prof.html>. Acesso em: 15 jan. 2011.

<http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacoes_defendidas_acad.html>. Acesso em: 15 jan. 2011.

utilização da tecnologia, como se deu a pesquisa e se é possível concluir que a tecnologia usada contribuiu com o processo de construção do conhecimento de Álgebra como um todo, e não de forma direcionada e pontual. Para a seleção das pesquisas usadas em seu trabalho, a autora tomou como referencial teórico os conceitos de estado da arte de Romberg (1992). De posse dos dados, procedeu as análises dos objetivos, da metodologia, dos resultados e das conclusões das pesquisas acima com a finalidade de averiguar como ocorreram os processos de Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991) e Transposição Informática (BALACHEFF, 1994).

Ainda, conforme a autora, os PCN (2008) mencionam que a Álgebra é abordada sobre diferentes aspectos: Aritmética generalizada, Funcional, Equações e Estrutural. Nesse sentido, escolhemos consultar os resultados das análises da autora das dissertações que possuem a concepção de *dimensão funcional*, pois “nessa concepção a variável é um argumento, isto é, representa os valores de domínio de uma função ou é um parâmetro, representa um número do qual dependem outros números. Neste caso a Álgebra se refere ao estudo de relações entre as grandezas, em que as variáveis assumem qualquer valor do conjunto universo”. (PINTO, 2009, p. 25). Em seguida, fizemos um novo recorte na escolha dessas dissertações, focando mais nas utilizaram o conceito matemático de função afim (três dissertações). Na análise dessas dissertações, a autora utilizou-se das questões propostas por Almouloud (2007), que têm como finalidade a de apontar as relações entre o uso das tecnologias e a aprendizagem de Álgebra. A autora assevera, a partir das análises, que “o professor que pretende utilizar uma tecnologia para o auxílio na aprendizagem algébrica pode ter um embasamento maior para refletir sobre quais conhecimentos um ambiente informático permitirá ao trazer tal recurso de ensino para sua realidade educativa” (PINTO, 2000, p. 103). Concluiu que todas as dissertações mostraram a eficácia do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem ao qual se referiam.

Dando continuidade, fizemos o levantamento das dissertações PUCSP publicadas nos anos de 2008 a 2010.

Augusto (2008), em sua pesquisa de mestrado em Educação Matemática, realizada na PUC/SP, teve como objetivo investigar a possibilidade da apropriação de conceitos relativos à função afim por alunos de 3º ano de Ensino

Médio, a partir de uma intervenção de ensino subsidiada pelo uso do *software Graphmatica*. Fundamentou teoricamente sua pesquisa na Teoria das Situações Didáticas, da Teoria dos Campos Conceituais e ainda da visão da utilização de tecnologias a luz da Etnomatemática. Inicia com uma abordagem da função a partir de três perspectivas: na primeira, o autor descreve a história da origem do conceito de função e uma breve abordagem do tema funções no livro didático³ e suas contribuições para construção de conceitos relativos à função, mais especificamente função afim. A segunda perspectiva relata as propostas curriculares e os sistemas de avaliação nos documentos oficiais e federais. E a terceira, *A Perspectiva da Educação Matemática*, menciona o surgimento da Educação Matemática, da Etnomatemática até algumas “Pesquisas contemporâneas” relevantes ao tema funções e o uso da tecnologia. A pesquisa foi realizada dentro de três fases: Pré-teste, Intervenção de Ensino e Pós-teste. Na primeira fase, o Pré-teste, o autor separou aleatoriamente os sujeitos em dois grupos: GC (grupo controle) e GE (grupo experimental), cuja análise dos resultados trouxe a tona elementos importantes a serem trabalhados na etapa de intervenção, como a não familiaridade com o termo função. Na segunda fase, intervenção de Ensino, as atividades da intervenção junto ao GE objetivaram em corrigir e ampliar os conceitos sobre função com o auxílio do *software* de ensino *Graphmatica* e equipamentos de apoio necessários para o seu uso: computadores e projetor multimídia. Durante esta fase, o GC permaneceu isento de uma intervenção coletiva formal, visto que os resultados do pré-teste dos mesmos têm o papel, neste experimento, de dados comparativos, que foram utilizados juntamente com os dados obtidos no pós-teste aplicado conjuntamente aos dois grupos.

Na terceira e última fase desse experimento, houve aplicação de um pós-teste nos grupos GE e GC. A finalidade foi analisar o progresso, ou não, do GE em relação ao pré-teste, realizado pelos mesmos, possibilitando ainda, comparar o resultado do pós-teste do GE e do GC. O pesquisador concluiu que o resultado geral obtido na Intervenção de Ensino de funções, com o auxílio de um ambiente computacional e o uso de um *software* adequado, proporciona condições para a descoberta de invariantes pertencentes ao conceito de função afim. Em uma de

³ DANTE, Luis Roberto. **Matemática, contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2003

suas sugestões finais, a de aplicar a intervenção em turmas finais do EF ou início do EM, justificando-se pelo momento adequado desta intervenção, conforme as Propostas Curriculares, vem ao encontro da nossa intenção de pesquisa de aplicar uma sequência com o uso de um *software* em alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Scano (2009), em sua pesquisa de mestrado em Educação Matemática, realizada na PUC/SP, teve como objetivo desenvolver uma sequência de ensino mediada pelo uso do *software* GeoGebra, para iniciar o estudo do conceito de função afim com alunos do 9º ano do EF de uma escola particular da Grande São Paulo. À luz da Teoria das Situações Didáticas, da Teoria dos Registros de Representações Semióticas e nos princípios da Engenharia Didática, o autor desenvolveu uma sequência de ensino que contribuísse para o desenvolvimento do aluno no que se refere à capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta, relacionando os coeficientes da equação da reta com o gráfico. A justificativa de seu trabalho se deu nos resultados do SARESP, partindo de uma breve revisão bibliográfica das dissertações produzidas na PUC/SP com foco no objeto matemático função.

Dentre essas dissertações analisadas pelo autor, destacamos a de Ardenghi (2008), que fez um mapeamento das pesquisas que tratam do ensino e aprendizagem de função, realizadas no Brasil, entre 1970 e 2005. Neste trabalho, Ardenghi concluiu propondo uma revisão do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função nas escolas e sugeriu que esse processo inicie-se com base nos reais conhecimentos dos alunos. Desta sugestão, temos indícios de que a reformulação no ensino feita pela PCESP (São Paulo, 2008) era necessária e reforça nossa intenção de verificar as aprendizagens a partir dos erros cometidos pelos alunos.

Em seguida, o autor fez uma análise das indicações apresentadas pelos documentos oficiais, quanto ao estudo de funções e o uso de tecnologias, seguido da apresentação do *software* GeoGebra. Este em suas considerações finais, após as análises *à priori* e *posteriori*, concluiu que com o uso do GeoGebra contribuiu nas análises do comportamento do gráfico e os resultados evidenciaram que os alunos utilizaram diferentes registros de representação no processo de iniciação aos estudos da função afim, o que favorece a compreensão deste saber

matemático.

Costa (2010) desenvolveu uma investigação com o objetivo de identificar o modo pelo qual quinze professores de Matemática exploram os aspectos didáticos na elaboração de atividades usando o *software Winplot* nos ensino de funções polinomiais do 1º e 2º graus e se os mesmos são capazes, no âmbito de um processo de formação, de elaborar estratégias didáticas que integrem o *software* e as funções em questão no processo de ensino. Com base em documentos oficiais, o autor inicia a pesquisa apresentando autores que abordam o tema “formação de professores de Matemática” e o uso de TICs como estratégias pedagógicas para o ensino da Matemática. Procura relacionar os resultados dos últimos concursos públicos promovidos pela SEE/SP nos anos de 1993, 1998, 2007 e 2010 para contratação de professores com os resultados de avaliações externas, como o SARESP, aplicadas aos alunos. Sua metodologia foi a de coleta e análise dos dados relacionados à atuação e formação dos professores através de oficinas. Utilizou, como primeiro instrumento, um questionário que revelava o perfil e que mostrava a visão que os docentes investigados possuem acerca da utilização das TICs como instrumento de auxílio para a sua ação pedagógica. Em linhas gerais, constatou-se que a maioria dos professores não tinha experiências ou não sabia usar as TICs em suas aulas. O segundo instrumento, na forma de atividades, teve o objetivo de observar nos professores possíveis dificuldades didáticas e de conteúdo.

O terceiro consistia em um roteiro de atividades proposto com o uso do *software Winplot* e foi realizado para a observação do pesquisador das possíveis dificuldades dos participantes no uso das TICs em condições didáticas. O quarto instrumento empregado consistia na elaboração de um plano de aula pelos participantes das oficinas, com intuito de promover o uso do *software Winplot* como parte de uma estratégia pedagógica. Nas considerações finais, o autor observou sobre o distanciamento que têm os professores acerca de uma formação mais sólida para o uso das TICs em suas aulas de Matemática, indicando mudanças nos currículos dos cursos de Licenciaturas em Matemática. Com relação ao nível de uso das tecnologias pelos participantes, indica que os professores ainda permanecem na escala de *consumidores da tecnologia*.

1.4 Justificativa das escolhas feitas

Após consultar os trabalhos acima citados e os documentos oficiais, resolvemos prosseguir com nossa pesquisa ao entender, por um lado, que a proposta de abordagem do objeto matemático da maneira como é oferecido pela SEE/SP - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo - o *Caderno* do aluno e o *Caderno* do professor – possivelmente será utilizada pela maioria dos professores da rede devido à praticidade da apresentação, ou seja, uma série de atividades impressas, como se formassem uma apostila. Nesse sentido, uma sequência de atividades pode complementá-las. Por outro, o uso dos recursos da tecnologia pode ampliar os processos de ensinar a Matemática, pois proporcionam diferentes maneiras de raciocínios e resoluções aos alunos.

1.5 As tecnologias no ensino-aprendizagem em Matemática

Aqui será apresentado um breve estudo de como alguns documentos oficiais recomendam o uso e aplicação da tecnologia para ensinar Matemática. Também, logo em seguida, citaremos as asserções de alguns pesquisadores na área da Matemática que consideram a tecnologia como parte importante tanto no processo de ensino e aprendizagem como uma ferramenta adicional para superação e detecção dos erros cometidos pelos alunos.

Iniciamos com uma síntese da reforma curricular ao longo do tempo, culminando com a proposta curricular atual do Estado de São Paulo que, no caso específico da Matemática, considera como um dos fatores de inclusão o acesso ao conhecimento da tecnologia.

Conforme Pires (2000), foi a partir dos anos 1950, mais precisamente em 1952, o início das discussões da reforma do ensino de Matemática e, conseqüentemente, mudanças no currículo escolar. Outros movimentos como movimento da Matemática Moderna (a partir do final de 1959) “assumia a Matemática como base de uma cultura voltada para a ciência e a tecnologia e tinha como meta ensinar o aluno mais a abstrair do que se preocupar com as

aplicações diretas” (PIRES, 2000, p. 16-17). Segundo a autora, as discussões prosseguem e a partir da década de 1980 as reformas são colocadas em prática. As novas propostas são desenvolvidas de forma isolada, “mas procurando incorporar os debates dos muitos encontros internacionais promovidos em torno da Educação Matemática” (*idem* p. 16). No Brasil, as discussões ocorreram através dos Congressos Brasileiros do Ensino de Matemática (a partir de 1955), que impactaram de alguma forma quando da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (L. F. nº 5692/71).

Na década de 1990, a elaboração dos PCN significou uma nova visão da Matemática, ao salientar a interconexão entre esta disciplina e a tecnologia. Para o EF, os parâmetros enfatizam a importância de o aluno aprender a utilizar instrumentos tecnológicos disponíveis, como a calculadora e computador, para resolver situações-problema, bem como a recomendação do uso de tais artefatos como instrumentos de motivação, investigação e de verificação de resultados.

Nos PCN+ (2002), a contextualização no ensino de *ciências* compreende competências de inserção da ciência e de suas tecnologias em um processo histórico, social e cultural. Esses parâmetros fazem referência a três grandes competências, dentre as quais a **contextualização sócio-cultural** explicita o que se espera do aluno:

- Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história [...];
- Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade [...] (BRASIL, 2002, p. 117-118).

Ainda segundo esses parâmetros, o conhecimento científico é necessário na cultura contemporânea e devido “o grau de especificidade efetivamente presente nas distintas ciências, em parte também nas tecnologias associadas, seria difícil de se aprender no Ensino Fundamental, estando naturalmente reservado ao Ensino Médio”. (BRASIL, 1998, p. 6).

Seguindo as diretrizes e parâmetros nacionais, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo preconiza uma concepção de que, devido à influência da tecnologia, pelo acúmulo de informações, as estruturas escolares precisam ser

reformuladas. A escola que ensinava passa também a aprender a ensinar, como os alunos, pois “tanto as instituições como os docentes terão de aprender” (SÃO PAULO, 2008, p. 12). O documento, valendo-se do princípio de que ninguém conhece tudo e de que o conhecimento coletivo é maior, se justifica pela versatilidade da tecnologia: “a vantagem é que hoje a tecnologia facilita a viabilização prática desse ideal” (SÃO PAULO, 2008, p. 12). E mais, sem isentar do compromisso de educar, “a escola hoje já não é mais a única detentora da informação e do conhecimento, mas cabe a ela preparar seu aluno para viver em uma sociedade em que a informação é disseminada em grande velocidade” (SÃO PAULO, 2008, p. 19).

No caso específico para a Matemática, a PCESP propõe articular um tema por bimestre com os demais conteúdos do referido período, possibilitando alternativas metodológicas no ensino tradicional dos conteúdos e, “sempre que possível, favorecer o uso da tecnologia [...]” (SÃO PAULO, 2008, p. 50).

Diante do exposto, entendemos que ao longo da história, esforços foram feitos para que os atuais documentos oficiais ofereçam respaldo e condições para uma prática docente diferenciada. Reconhecendo a tecnologia como ferramenta de aprendizagem e aliada às novas exigências da sociedade contemporânea, tais documentos criam uma responsabilidade para o professor em usar, além dos instrumentos tradicionais, o dinamismo das TICs.

Em sequência, iremos considerar na visão de Kenski (2003), que o conceito de tecnologia compreende o “conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em determinado tipo de atividade” (KENSKI, 2003, p. 24).

Kenski (2003), ao relatar a relação entre educação e tecnologias, define que tecnologias não são apenas aparelhos e equipamentos. O conceito vai além das máquinas, engloba todas as coisas que o cérebro humano descobriu em todas as épocas, como por exemplo, a linguagem. Na escola, segundo a autora, é comum o uso das tecnologias por meio de narrativas: “a voz do professor, a televisão e o vídeo e outros tipos de “equipamentos narrativos” assumem o papel de “contadores de histórias” e os alunos, de seus ouvintes” [...] (KENSKI, 2003, p. 29).

Ainda segundo a autora, a utilização correta das TICs está em compreender e incorporá-las pedagogicamente como aliadas do processo

educacional, da motivação do aluno e dos conhecimentos do professor, o que poderá facilitar o acesso à aprendizagem de qualidade. Ressalta que um bom uso da tecnologia na educação está em considerar a complexidade que envolve essa relação, pois “quando bem utilizadas, provocam a alteração dos comportamentos de professores e alunos, levando-os ao melhor conhecimento e maior aprofundamento do conteúdo estudado” (KENSKI, 2003, p. 45).

Vários pesquisadores têm mostrado potencialidades da tecnologia no meio didático, considerando seu aspecto mediador, quando utilizada adequadamente, para enriquecer ambientes de aprendizagem.

Perrenoud (2000, p. 12) aborda a profissão do professor propondo um rol de competências que contribuem para “redelinear a atividade docente”, com uma intenção precisa: “orientar a formação contínua para torná-la coerente com as renovações em andamento no sistema educativo” (*idem*, p. 12).

Define como competências a “uma capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos para enfrentar um tipo de situações” (PERRENOUD, 2000, p. 15) e relaciona em dez grandes famílias:

1. Organizar e dirigir situações de aprendizagem.
2. Administrar a progressão das aprendizagens.
3. Conceber e fazer evoluir os dispositivos de diferenciação.
4. Envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho.
5. Trabalhar em equipe.
6. Participar da administração da escola.
7. Informar e envolver os pais.
8. Utilizar novas tecnologias.
9. Enfrentar os deveres e os dilemas éticos da profissão.
10. Administrar sua própria formação contínua. (PERRENOUD, 2000, p. 14).

Cabe ressaltar que são competências de referência para o EF, porém o autor considera também para o EM a competência *utilizar novas tecnologias*. Ao explorar as potencialidades didáticas dos programas em relação aos objetivos do ensino, o autor menciona que não há necessidade de que o professor torne-se especialista em informática ou em programação para utilizar no ensino e aprendizagem, pois os sistemas permitem acessos e procedimentos já programados.

Assim sendo, cabe ao professor possuir uma concepção, organização e acompanhamento ao trabalhar com a TICs. Ainda segundo o autor, a principal

competência de um professor neste domínio é ser:

- um usuário alerta, crítico, seletivo do que propõem os especialistas dos softwares educativos e da AA⁴;
- um conhecedor dos softwares que facilitam o trabalho intelectual, em geral, e uma disciplina, em particular, com familiaridade pessoal e fértil imaginação didática, para evitar que esses instrumentos se desviem de seu uso profissional. (PERRENOUD, 2000, p. 134).

Contudo, alerta o autor, a não exigência de ser especialista em TICs não significa que o professor não deva ter um conhecimento básico e domínio das ferramentas: “a facilidade pessoal no manejo de diversos softwares não garante uma correta aplicação para fins didáticos, mas o torna isso possível” (PERRENOUD, 2000, p. 134).

Nesse sentido, entendemos que, ao pretender usar *software* educativo de Matemática, o professor desenvolva fluência no manuseio do computador e, ao lidar com o programa em si, compreenda quais as vantagens de sua utilização para a organização do pensamento e a socialização do aluno.

Para Valente (1993, p.33), “o uso do computador requer certas ações que são bastante efetivas no processo de construção do conhecimento. Quando o aprendiz está interagindo com o computador, ele está manipulando conceitos e isso contribui para o seu desenvolvimento mental”.

Segundo Valente (2002), os alunos, utilizando o computador para resolverem problemas, realizam uma sequência de ações-*descrição-execução-reflexão-depuração-descrição* - identificada por ele como espiral de aprendizagem. Nessa sequência, o aprendiz elabora e faz a *descrição* da solução, por meio de uma série de comandos próprios do *software*, utilizando o conhecimento pertinente. O computador, com a *execução* dos comandos dados, apresenta um resultado - *feedback* fiel e imediato. A partir dessa resposta, o aprendiz fará uma análise e *reflexão* sobre as informações recebidas pelo computador. Se a resposta for a desejada, ele poderá realizar uma nova tarefa. Caso não tenha conseguido o esperado, ele irá retornar à descrição original, ou seja, realiza uma *depuração*, para novamente realizá-la. Nesse caso, ele se encontra em outro nível de desenvolvimento.

⁴ Aplicação concebida para o ensino, Aprendizagem Assistida por computador. (PERRENOUD, 2000, p. 132).

Quando o aluno detecta o seu erro, pelo ato de *depuração*, este passa a ser um aprimoramento no processo de aprendizagem ao interagir com o conceito. De acordo com Valente (1993, p.35), “o processo de achar e corrigir o erro constitui uma oportunidade única para o aluno aprender sobre um determinado conceito envolvido na solução do problema ou sobre estratégias de resolução de problemas”.

Segundo Borba e Penteado (2001, p. 11), a informática se tornou uma das principais tendências da Educação Matemática. Para os autores, o discurso passado de que o seu uso pelo aluno o tornaria “mero repetidor” está sendo substituído por argumentos de que o computador pode ser a solução nas dificuldades de ensino em geral, como elemento mediador. Ainda segundo os autores, especificamente na Matemática, mais do que analisar os avanços ou não que a tecnologia informática traz na educação, é importante estudar o novo ambiente de possibilidades e dificuldades que ela proporciona. Entendemos que uma nova estruturação do *milieu* adidático de Brousseau (1987) é feita no ingresso desse novo cenário, a tecnologia. Ao possibilitar inúmeras situações de aprendizagem, o aluno pode partir de ações e tentativas para interagir nas *situações* de aprendizagem organizadas pelo professor.

Tais questões são relevantes, sem dúvida, e conduzem à reflexão reativa às estratégias didáticas para uso do computador em sala de aula, como preconiza Oliveira (2009), para que o uso contínuo deste artefato não se torne desinteressante, como pode acontecer com o giz e lousa, por exemplo (BORBA E PENTEADO, 2001). Além disso, em pesquisa realizada com auxílio de calculadoras gráficas, estes autores enfatizam que os alunos passam a entender que gráficos em geral representam “fragmentações”, conceito fundamental no ensino de funções e na coordenação de seus registros de representação.

Borba e Penteado (2001) ressaltam a importância em adotar discussões teóricas nas pesquisas como meio de fortalecer a compreensão e reflexão das experiências vividas, a fim de tornar públicos os resultados. Considerando como “atores” (*idem*, p. 46), as calculadoras gráficas e computadores modificam coletivamente a maneira de pensar do homem em sua relação com a mídia. Na perspectiva destes autores, “os computadores não substituem ou apenas complementam os seres humanos. Os computadores, como enfatiza Tikhomirov (1981), reorganizam o pensamento” (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 46-47).

Estas reflexões nos levaram, então, a propor uma sequência com o uso do *software* GeoGebra em blocos de atividades de fácil entendimento, em seguida aos erros diagnosticados em atividade anterior, com curto tempo de resolução. Foi nossa expectativa superar eventuais desmotivações por parte dos aprendizes, a medida que os mesmos passam a intervir no cenário no qual se dá a construção do conhecimento, em uma perspectiva dinâmica e interativa.

1.6 A escolha do *software* educacional GeoGebra

Para a escolha do *software* adequado, utilizado na segunda fase desta pesquisa, focou-se na necessidade do aluno retomar os erros cometidos na fase anterior e, com o auxílio das interfaces proporcionadas pelo sistema, manipular o objeto matemático de maneira diferente, quando comparado aos métodos da sala de aula, quase sempre estáticos.

Segundo Valente (1997), existem várias maneiras de classificar os *softwares* usados na educação. Para ele, uma abordagem de ensino e aprendizagem com um *software* educacional é caracterizada em dois grandes pólos:

- Computador→*Software*→Aluno – nessa polaridade, o computador assume o papel de máquina de ensinar: o ensino é auxiliado pelo computador, substituindo o papel ou o livro;
- Aluno→*Software*→Computador – nesse sentido de polaridade, o aluno pode representar suas ideias: “nesse caso, o computador pode ser visto como uma ferramenta que permite ao aprendiz resolver problemas ou realizar tarefas como desenhar, escrever, comunicar-se, etc.” (VALENTE, 1997, p. 2-3).

Durante a participação do grupo de pesquisa PUCSP “**Tecnologias Digitais na Educação Matemática – TecDEM**”, coordenado pela Dra Celina A. A. P. Abar e pelo Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira, que tem como objetivo principal desenvolver ambientes de aprendizagem com o uso de tecnologias digitais que possam subsidiar a prática docente da Matemática no ensino básico e superior, tive a oportunidade de conhecer e manipular alguns *softwares*

educacionais.

Exploramos as ferramentas dos *softwares* de domínio público em português como *Winplot*, *Graphmatica*, *Régua e compasso*, *Logo*, *Graph*, e *GeoGebra*. Também os programas comerciais *Cabri Geometry* e *Geometer's Sketchpad*. Com as reflexões nos encontros, as oficinas permitiram experimentos práticos que enriqueceram minha escolha. Assim sendo, o *software* *GeoGebra* foi escolhido pelo acesso gratuito e pelas possibilidades de interatividade em trabalhar os conceitos da função afim, objeto matemático desta pesquisa, em diferentes registros de representação.

Nosso objetivo, ao utilizar o computador e o *software* educacional *GeoGebra*, a partir dos erros detectados em uma sequência didática diagnóstica, foi a de propor uma nova sequência, baseada em uma anterior, com questões que possibilitavam aos alunos registros e reflexões, com perguntas abertas, de forma a confirmar suas hipóteses ou soluções ao manipularem as ferramentas do *software*.

Neste ambiente, os alunos são apresentados a um modelo já pronto, **a sequência didática com o uso do software GeoGebra**, em que a disposição das atividades pretende orientá-los em situações com o objetivo de superar os erros conceituais da função afim.

Para isso, tivemos o cuidado de verificar as características que consideramos importantes no *software* escolhido: favorecer a realização da *espiral da aprendizagem*; analisar os aspectos estéticos, técnicos e pedagógicos; estimular a produção individual e coletiva, o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade; possibilitar as conversões dos registros semióticos e superar os erros diagnosticados ao promover a compreensão de conceitos do tema abordado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, visando investigar a produção de significados para a elaboração e construção das sequências, apresentaremos nossa fundamentação teórica. Também buscamos estudos a respeito do erro no ensino-aprendizagem da Matemática que nos auxiliassem atender nosso objetivo.

A escolha do referencial teórico, de forma voluntária, deve, além de promover um aprofundamento do conhecimento para quem a usa, também propor ações ou mecanismos testados para contribuir de forma positiva com uma pesquisa. Encontramos, nos Registros de Representação Semiótica, elementos consistentes para análises dos registros obtidos, pois “falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da Matemática.” (1999, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 72).

Além disso, encontramos, na Teoria das Situações Didáticas um modelo de interação entre professor, o saber e o *milieu*, cujo objetivo “é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos.” (1986, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 31-32). Consideramos, também, as propostas de Perrenoud (2000) em nossas ações docentes, pois o autor desta pesquisa também é o professor dos estudantes pesquisados.

2.1 Fundamentos teóricos da noção de registro de representação semiótica

Segundo a teoria de Duval (1999, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 71), “registro” de representação é um sistema formado de registros e códigos que tem funções cognitivas. Diferem-se, pelos níveis de funcionamento cognitivo, os registros no consciente e os códigos no não-consciente. Os códigos não permitem

diretamente que um conteúdo de conhecimento seja reconhecido ou entendido⁵. E mais, as mudanças que ocorrem nos *registros* são de duas maneiras distintas: o *tratamento* e a *conversão*.

Um tratamento é a transformação de uma representação de uma outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados.

Uma conversão é a transformação de uma representação de um registro D em uma outra representação de um registro A, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas mudando, de fato, o conteúdo da representação. (DUVAL, 1999 *apud* ALMOULOU, 2007, p. 72).

Ainda segundo o autor, em investigações relacionadas à didática da Matemática, uma análise cognitiva do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. Neste sentido, há necessidade de distinguir as transformações.

Esta conversão entre registros, conforme Machado (2003, p. 19), apoiando-se na Teoria de Duval (1995), pode apresentar dois fenômenos:

1. As variações de *congruência* e de *não-congruência*.

- Ocorre a congruência quando há correspondência termo a termo entre os dois registros.
- Ocorre a não-congruência quando há necessidade de reorganização da expressão do registro de partida para se obter a expressão correspondente no registro de chegada.

2. A *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão* – pode conduzir a variações consideráveis de acerto quando se inverte o sentido de conversão. Assim, trabalhar num só sentido de conversão não garante que o aluno compreenda o outro.

No entendimento desses fenômenos, consideramos, em nossas sequências didáticas, as variações de congruência – quando as variáveis

⁵ Segundo Almouloud (2007, p. 71), “o que é *codificado* deve ser *decodificado* para poder ser compreendido, pois a *codificação* consiste em *colocar em correspondência unidades de um código com unidades de uma mensagem* já expressa ou objetivada de modo explícito em um outro sistema.”

identificadas como pertinentes na resolução do exercício são mobilizadas na coordenação espontânea dos registros de entrada e saída – e de não-congruência, caracterizadas pela não-espontaneidade das conversões entre esses registros.

Duval (1995, *apud* MACHADO, 2003, p. 14) classifica as diferentes transformações da *conversão e tratamento*.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Linguagem natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (linguagens formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Figura 1 – Classificação dos diferentes registros do funcionamento matemático

Fonte: MACHADO, 2003, p. 14

Os registros monofuncionais são aqueles nos quais se podem estabelecer um algoritmo para levar a atividade proposta a efeito. A par disto, existem registros que não seguem um algoritmo propriamente dito: estes são os registros multifuncionais.

Ainda segundo a autora, os registros de representação servem para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados na Matemática – sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e a linguagem natural – e a completa aprendizagem em Matemática supõem a coordenação de, ao menos, dois registros.

Em Matemática, os objetos existem como construções mentais e são conhecidos por meio de suas representações, diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, que podem utilizar a experimentação e a

visualização em seu estudo. Nesse sentido, isso significa que o desenvolvimento das habilidades do “pensar matemático” (BRASIL, 2006, p. 70) está intimamente ligado ao objeto e sua representação, ou seja, para possibilitar a compreensão dos objetos matemáticos é necessário trabalhar com suas representações.

Retomando, Machado (2003), apoiando-se em Duval (1995), afirma que somente na coleta de dados que saberemos quais sistemas cognitivos são necessários para acrescentar aos objetos matemáticos, para efetuar as várias transformações que constituem os tratamentos matemáticos e caracterizar a especificidade do funcionamento do pensamento matemático em relação às outras áreas do conhecimento científico. E, para ele, somente após a possibilidade de entendimento cognitivo é que poderemos, então, voltar à análise das dificuldades dos alunos. Para Duval (1995), o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. As representações semióticas são externas e conscientes da pessoa.

Em uma análise da aprendizagem de Matemática, verificam-se três fenômenos complexos, reveladores e observáveis nas produções dos alunos, que estão estreitamente relacionados:

- a diversidade dos registros de representação semiótica;
- a diferenciação entre representante e representado;
- a coordenação entre os diferentes registros.

Almouloud (2007) afirma que um *registro* de representação é uma maneira típica de representar um objeto matemático, ou um problema, ou uma técnica: “já a noção de *registro* se refere ao domínio dos sinais que servem para designar qualquer coisa (por exemplo, o mapa que *representa* o Brasil não é o Brasil)” (ALMOULOUD, 2007, p. 80 *apud* Duval, 1999). E no caso do objeto matemático função, o mesmo pode ser representado por quatro registros de representação semiótica: registro de tabelas, das formulas algébricas, gráfico e simbólico. Passar de um registro de representação para o outro possibilita explicitar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto na compreensão da Matemática. Assim, duas representações desse mesmo objeto, geradas em dois registros diferentes, não têm o mesmo conteúdo e “toda conversão tem um sentido a ser considerado” (ALMOULOUD, 2007, p. 73) e é condição para não “confundir o conteúdo da representação com o objeto representado [...]” (*idem*, p. 73).

Com essas considerações, notamos que uma sequência didática deve ser elaborada de modo que suas atividades privilegiem os dois sentidos de conversão e utilizem, também, os casos de congruência e não-congruência. Assim, na perspectiva de Duval (1995), a compreensão Matemática pressupõe a capacidade de mudar de registro, pois somente com essa articulação o aluno reconhece um mesmo objeto matemático em diferentes representações. Esse reconhecimento, que é específico à aprendizagem da Matemática, cria condições para que um aluno espontaneamente modifique formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema.

Como estamos interessados em investigar, através de uma sequência didática, a construção do conhecimento e a concretização do conceito de função afim, a teoria dos registros de representação semiótica – elaborada por Duval (1995) – nos fornece um referencial estruturado de análise do funcionamento cognitivo de um aluno diante de uma situação de ensino envolvendo esse objeto matemático. Nesta pesquisa, consideramos os registros mencionados na seguinte perspectiva:

- Registro Simbólico: utiliza os registros na linguagem numérica (tabelas) e algébrica; possuem característica discursiva e os seus *tratamentos* são algoritmizáveis;
- Registro da Linguagem Natural: com mesma característica, porém seus tratamentos não são algoritmizáveis;
- Registro Gráfico: seus tratamentos não são algoritmizáveis; e
- Registro figural: desenhos.

2.2 A análise do erro e a noção de obstáculo

Ao praticar a avaliação, o professor deve considerar sua finalidade, que é a de verificar se os seus objetivos iniciais de ensino, estabelecidos em um plano de ação, foram atingidos. Nesta perspectiva, “a avaliação deve estar centrada tanto no julgamento dos resultados apresentados pelos alunos quanto na análise do processo de aprendizado” (BRASIL, 2006, p. 40). Conforme o documento, na área de Matemática, a análise do erro, de maneira reflexiva e autocrítica, é importante,

pois “essa forma de ensino auxilia na formação das estruturas de raciocínio, necessárias para uma aprendizagem efetiva, que permita ao aluno gerenciar os conhecimentos adquiridos” (*idem*, p. 46).

Com relação à aprendizagem de conceitos matemáticos, concordamos com Almouloud (2007, p. 130) quando afirma que “a maioria dos pesquisadores em didática da Matemática defende a ideia (*sic*) de que um dos fatores que mais influenciam essa aprendizagem é o tratamento que o professor dá ao erro do aluno.” E que, em pesquisas nesse campo, a análise do erro apóia-se na noção de obstáculos, desenvolvidas por Bachelard e introduzidas e classificadas por Brousseau.

Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade ou falta de conhecimento; esse conhecimento produz respostas adequadas em certo contexto freqüentemente encontrado; mas ele produz respostas falsas, fora desse contexto [...].
(BROUSSEAU, 1989, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 133).

Podemos mencionar, dentre outros⁶, as análises do erro de Pinto (2000), que afirma que, ao tornar o erro uma alternativa didática, a avaliação ganha novas dimensões, passa a atribuir os erros como uma pista para o professor organizar a aprendizagem do aluno. Desse modo, é necessário que o professor busque conhecer e entender os erros cometidos pelos alunos nas atividades propostas, já que “[...] quando um aluno comete um erro, ele expressa o caráter incompleto de seu conhecimento” (PINTO, 2000, p. 54).

Da mesma maneira, Perrenoud (2000) relata a importância de se conhecer o erro cometido pelo aluno e em que pontos ele não consegue superar um dado *obstáculo cognitivo*. O professor tem à sua disposição dados precisos para intervenções mais individualizadas, através da avaliação formativa, definida como “toda prática de avaliação contínua que pretenda contribuir para melhorar as aprendizagens em curso, qualquer que seja o quadro e qualquer que seja a extensão concreta da diferenciação do ensino” (p.78).

⁶ Para conhecer mais pesquisadores, ver MIRANDA, Werventon S. **Erros e Obstáculos: Os conteúdos Matemáticos do Ensino Fundamental no Processo de Avaliação**. 129 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2007. Disponível em: http://www.ufpa.br/.../Dissertacoes_Werventon%20dos%20Santos%20Miranda.pdf. Acesso em 10 jul. 2009.

Segundo Brousseau (1983 apud Almouloud, 2007) as origens dos obstáculos são distintas, podendo ser tais elementos epistemológicos, didáticos, psicológicos ou ontogênicos.

Quando deparamos com a palavra obstáculo é natural associá-la com uma espécie de barreira intransponível ou a se vencer, no presente, de maneira concreta. Diferentemente na área de educação o conceito obstáculo é mais abrangente e depende do passado, pois se hoje ele é percebido, é porque houve, em tempos anteriores, alguns erros no processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, o obstáculo denominado epistemológico é caracterizado por um conhecimento que impede ou atrapalha o aprendiz de adquirir outro mais novo: “não se pode nem se deve fugir dele” (BROUSSEAU, 1983 apud ALMOULLOUD, 2007, p. 139).

Os obstáculos de origem didática, segundo Almouloud (2007), nascem da escolha de estratégias de ensino, no momento da aprendizagem, que, no futuro, poderão tornar-se obstáculos no desenvolvimento dos conceitos. Com relação aos obstáculos psicológicos, o autor se refere a seu aparecimento quando a aprendizagem não traduz as representações do aluno, e cita como exemplo o número zero, que “causa obstáculos psicológicos pelo medo do ‘nada’ e sobretudo que ‘não é bom’ dividir por zero” (*idem*, p. 145). Os obstáculos ontogênicos aparecem pela limitação do aluno, frente a um problema, em que a sua resolução está além da sua capacidade, o que pode envolver fatores neurofisiológicos.

Almouloud (2007) ressalta a utilidade da noção de obstáculos na construção de engenharias didáticas, e que essa construção implica na identificação das variáveis didáticas que permitiram organizar as informações.

Conforme texto dos Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP (SEMA, 2008), intitulado de *Brousseau e a ideia de Situação Didática*, o autor francês enfatiza o duplo papel do professor nas situações de ensino que cria, de modo a aproximar o aluno do saber do qual ele deve se apropriar.

- procurar situações onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pelo aluno.
- ajudar seus alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, como fazem os matemáticos, de modo a tornar as produções dos alunos fatos universais e reutilizáveis. (SEMA, 2008, p. 4).

Através de sucessivos desequilíbrios deste ciclo de contextualizar/descontextualizar, o aluno tende a avançar em seus conhecimentos. Brousseau afirma que:

Para o professor, é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder. (BROUSSEAU, 1999, p. 49, *apud* SEMA, 2008, p. 4).

Neste sentido, é a partir de elementos anteriores que se desenvolve um novo aprendizado, ocorrendo “dessa forma um desequilíbrio que impulsionará o aluno a buscar modificações na estratégia inicial através de acomodações em seu sistema de conhecimentos, onde as modificações provocadas pela situação serão o motor de sua aprendizagem” (*idem*, p. 4).

Ainda que não haja necessidade de elaborar situações didáticas em todos os conteúdos, o seu planejamento pelo professor é necessário para “evitar que os alunos rapidamente identifiquem a situação com seu contexto matemático, que poderia ocasionar desgaste da situação didática” (*ibidem*, p. 5).

Para gerenciar as relações entre professor e aluno frente à situação didática, Brousseau (*apud* SEMA, 2008, p. 6) introduz o conceito de “contrato didático”⁷ que tem por objetivo a aquisição dos saberes pelos alunos. Para Almouloud (2007, p. 90), o *contrato didático* é diferente do contrato pedagógico “já que este último privilegia relações sociais, atitudes, regras e convenções, mas não coloca em jogo o saber” e, quando mal gerenciado, pode ser a fonte de dificuldades na aprendizagem.

Ainda com relação à *situação didática*, Almouloud (2007), apoiado na teoria de Brousseau, define em as situações didática e adidática. O objeto central de sua teoria é, então, a situação didática, vista como

o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo *milieu*, (contendo eventualmente instrumentos ou objetos), e um sistema educativo (o professor) para que estes alunos adquiram um saber constituído ou em constituição. (BROUSSEAU, 1978 *apud* ALMOULOU, 2007, P. 33).

⁷ Brousseau (1980, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 89) “define o *contrato didático* como o conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor.”

Para Almouloud (2007), o professor e o aluno possuem uma relação assimétrica em relação ao saber. Nesse sentido, o que se espera da relação didática é mudar este quadro inicial do aluno face ao saber. E isto confere ao professor um papel fundamental nessa relação: iniciar o aluno no novo saber científico, que Brousseau (1987) postula como possível de viabilizar através de situações de ensino que provocam essa nova aprendizagem.

Parte essencial da *situação didática*, a *situação adidática*, caracteriza-se pela situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. O termo *milieu* indica o meio adidático, sem intenção didática (BROUSSEAU, 1996 apud ALMOULOU, 2007).

As hipóteses teóricas de Brousseau, segundo o autor, são de que o aluno aprende Matemática adaptando-se a um *milieu* dificultador, que o conduz a respostas novas que comprovam a aprendizagem. Outra hipótese é que “o *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz.” (*idem*, p. 32). As intenções acontecem quando o *milieu* é organizado e desenvolvido didaticamente pelo professor.

O trabalho do professor se inicia com a escolha das situações-problema (atividades) a serem trabalhadas com os alunos. Esta é uma etapa fundamental e deve ser realizada com bastante cuidado pelo professor, já que ele é quem conhece a realidade da turma e terá a capacidade de fazer as escolhas das variáveis didáticas adequadas e compatíveis para os alunos.

E, enfim, a terceira hipótese preconiza que esse *milieu* e as situações devem “engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem” (*idem* p. 33).

Diante dessa concepção, concluímos ser relevante considerar os resultados das avaliações oficiais SARESP e Saeb/Brasil dos pesquisados. Tais resultados podem sinalizar erros de aprendizagem que, mesmo após a abordagem proposta no caderno da SEE/SP, permanecem como obstáculos. Assim sendo, as atividades que compõem as sequências foram pensadas e aplicadas após a abordagem do caderno e considerações dos resultados das avaliações oficiais.

3 A PROPOSTA CURRICULAR PAULISTA

Neste capítulo, descreveremos uma síntese dos elementos apresentados nos cadernos do aluno e do professor da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, parte integrante da atual Proposta, para um direcionamento das atividades constantes nas sequências existentes neste trabalho.

3.1 A atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo

A atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo, visando à melhoria da qualidade de ensino e à democratização do acesso a escola, parte das experiências anteriores e pretende organizar uma base comum de conhecimentos e competências, para “que nossas escolas funcionem de fato como uma rede” (SÃO PAULO, 2008, p. 8). Inova ao propor um sistema de avaliação de rendimentos com consultas periódicas, o SARESP.

A contextualização da Proposta tem como norte os dispositivos da LDBEN, das normas das Diretrizes Curriculares Nacionais e das recomendações dos PCN. Esse documento também se inspirou nas anteriores⁸ e organizou os conteúdos em quatro grandes áreas, que serão trabalhadas de modo a favorecer a interdisciplinaridade ou mesmo a transdisciplinaridade:

- **Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:** Física, Química, Biologia e, no Ensino Fundamental, Ciências;
- **Área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias:** Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Arte e Educação Física;
- **Área de Ciências Humanas e suas Tecnologias:** História, Geografia e,

⁸ Refere-se às seguintes propostas:

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 1º grau**. 5. ed. São Paulo, 1997.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 2º grau**. 3. ed. São Paulo, 1992.

para o Ensino Médio, acrescenta-se a Filosofia e a Sociologia⁹;

- **Área de Matemática e suas Tecnologias:** Matemática.

O documento considera a diversidade dos contextos escolares e ressalta que a proposta não pode ser compreendida como algo fechado e inflexível. A organização apresenta sugestões nos *Cadernos do Professor*, de forma que o mesmo “dê especial atenção ao planejamento sobre “o que”, “como” e “com que grau de profundidade” irá abordar os conteúdos sugeridos na grade bimestral” (SÃO PAULO, 2008, p. 48). No ANEXO A é apresentado o quadro de conteúdos do 2º bimestre para as três séries do EM, em que consta o tema função afim.

A apresentação dos conteúdos utiliza de narrativas, importantes na arquitetura de cada aula, cuja fonte primária é a História da Matemática: “é contando histórias que os significados são construídos” (SÃO PAULO, 2008, p. 50). Também valoriza a ideia na exploração de cada tema destacando a problematização, de equacionamento de problemas, de tradução de perguntas formuladas em diferentes contextos em equações a serem resolvidas além de valorizar respostas com cálculos aproximados.

Podemos, então, observar que a mecanização de algoritmos, a memorização de regras, a formulação precoce e a eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de geometria foram alguns problemas diagnosticados para o processo de implantação de propostas curriculares ao longo do tempo (1986, *apud* PIRES, 2000, p. 50), conferindo à Matemática, de forma equivocada e limitante, dupla função no currículo: “ela é necessária em atividades práticas [...] e [...] desenvolve o raciocínio lógico [...]”. A interdisciplinaridade foi a via escolhida pela Proposta Curricular de 1992 para a superação do problema que os educadores tinham em relação à Proposta Curricular de 1986: conteúdos compartimentados e fragmentados.

Ainda podemos observar que a última Proposta Curricular, de 2008, priorizou as competências de leitura e de escrita, auxiliando a disciplina de Matemática à incorporar os inúmeros recursos tecnológicos disponíveis para a representação de dados e o tratamento de informações.

As abordagens de tecnologia apresentadas na proposta atual têm o sentido de preparar o aluno e futuro cidadão através de uma educação para uso de

⁹ SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Resolução nº 83, de 25 de novembro de 2008. **Diário Oficial [do] Estado de São Paulo**, São Paulo, SP, 28 setembro 2008.

artefatos desta natureza de nível básico. Também pretende esta proposta desenvolver uma compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos da produção de bens e serviços da sociedade atual. Contudo, apesar de reconhecer sua importância no acesso e na disseminação do conhecimento, o documento não oferece nenhum mecanismo curricular em que a tecnologia esteja inserida.

3.2 A organização dos cadernos de Matemática do professor

Tendo em vista que o objetivo deste trabalho foi o de produzir, aplicar e propor uma sequência de atividades em alunos de escola pública, mais especificamente do 1º ano do EM, optamos por analisar a organização e apresentação do conceito de função afim nos cadernos de Matemática do professor da SEE/SP da 1ª série do EM. À luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), analisaremos se as atividades do documento permitem ou propõem o aluno fazer as conversões nos diferentes registros.

Com a instituição da Base Curricular pela SEE/SP, referência comum em todas as escolas da rede estadual, foi possível orientar e organizar o currículo escolar. Parte integrante da PCESP (São Paulo, 2008), o Caderno do Professor oferece orientações para o desenvolvimento das situações de aprendizagem propostas no Caderno do Aluno, para cada disciplina.

Esses documentos são oferecidos, respectivamente, para todos os professores e alunos matriculados na rede pública do Estado de São Paulo a partir do ano letivo de 2008. De caráter interdisciplinar os *cadernos do professor* visam aprimorar o trabalho pedagógico e docente, em suas práticas de sala de aula. A sociedade exige dos indivíduos competências e habilidades específicas que são desenvolvidas por alguns, no processo de escolarização.

Para isso, foram identificados e organizados, nos Cadernos do Professor, os conhecimentos disciplinares por série e bimestre, assim como as habilidades e competências a serem promovidas. Trata-se de orientações para a gestão da aprendizagem na sala de aula, para a avaliação, e também de sugestões bimestrais de projetos para a recuperação das aprendizagens. (SÃO PAULO, 2008a, p. 6).

As sugestões de abordagem do conceito de função e função afim, segundo caderno do professor de Matemática, foram organizadas em cinco das oito unidades, conforme mostra a Figura 2. As unidades são apresentadas em dois capítulos denominados de *Situações de Aprendizagem 1*, para as unidades de 1 a 4, e *Situações de Aprendizagem 4*, para a unidade 8.

Descreveremos somente os objetivos propostos das atividades contidas nessas unidades, sem apresentá-las, para confrontarmos com o *caderno* do professor de 2009. Nosso objetivo é observar se a nova versão do caderno acrescenta novas abordagens quando comparadas com a primeira versão.

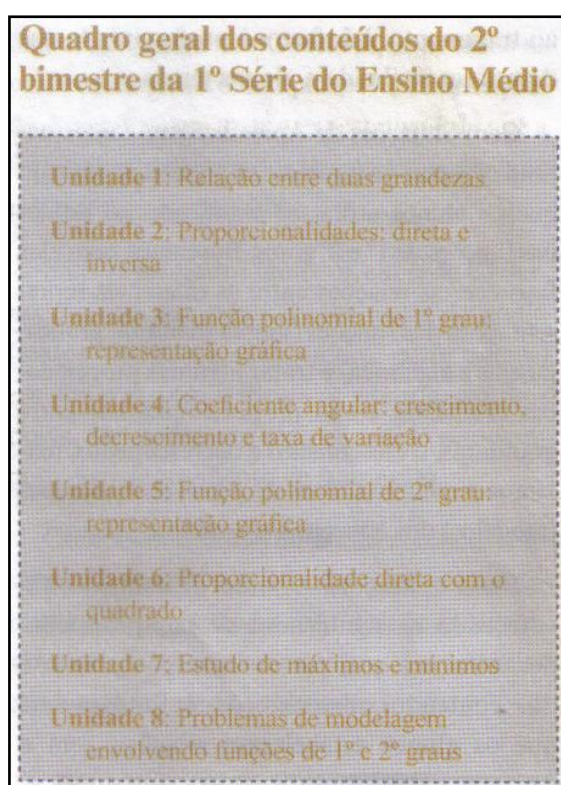


Figura 2 – Quadro geral dos conteúdos do 2º bimestre da 1ª Série do EM
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2008a, p. 10

As unidades organizadas na *Situação de Aprendizagem 1* enfatizam as diferentes representações (linguagem natural, gráfica, tabela e algébrica) de função e da função afim. Apresentam como sugestões de abordagem dez atividades, todas resolvidas e comentadas, com um tempo de aplicação previsto de uma semana.

Para as atividades da Situação de Aprendizagem 1, tem-se:

- **Atividade 1** - apresentada nos registros linguagem natural e gráfico, espera-

se que os alunos expressem, por meio da linguagem natural, os significados e propriedades das funções como crescimento, decrescimento, taxa de variação e relação entre duas grandezas.

- **Atividade 2** - propõe inicialmente, através de tabelas, a compreensão de que a representação gráfica de uma função afim é uma reta. Com o objetivo de dar subsídios para que os alunos compreendam a representação gráfica e a inclinação da reta, os itens **a, b, c, d, e, f** da atividade buscam ressaltar a relação entre duas grandezas direta e inversamente proporcionais e a interpretação da taxa de variação com o coeficiente angular. Ressalta a importância dos alunos assimilarem que os gráficos sempre são formados por pontos colineares, não havendo necessidade de atribuir inúmeros valores para a variável x em sua construção. As recomendações para o docente além, de propor o estudo de novas tabelas, enfatizam as translações que ocorrem na representação gráfica e funções para explorar o paralelismo. Em seguida, é explorada a propriedade de crescimento e decrescimento das funções afins. Nesse momento, o documento sugere que o professor, utilizando de vários contextos, como aplicações em Economia e na Física, elabore atividades nas quais o aluno consiga generalizar as ideias e concluir que é válida a seguinte afirmação “toda função dada por $y = ax + b$, com $a > 0$, é crescente; se $a < 0$, então a função é decrescente e ressaltar que se $a = 0$ a função é constante.” (SÃO PAULO, 2008a, p. 16).

- **Atividades 3 e 4** - apresentadas nos registros da linguagem natural e numérico (tabelas), buscam explorar as variações de grandezas interdependentes, quando são direta ou inversamente proporcionais.

- **Atividades 5, 6, 7 e 8** - apresentadas na linguagem natural e algébrica, exploram tratamentos numéricos e as conversões para o registro gráfico. As atividades **5 e 6** contemplam a proporcionalidade direta e as de números **7 e 8**, a proporcionalidade inversa das variáveis.

A unidade 8, organizado na *Situação de Aprendizagem 4*, aborda situações-problema com Modelagem Matemática. Com um tempo previsto de uma semana, apresentam quatro atividades como sugestões de abordagem pelo professor.

Para as atividades da Situação de Aprendizagem 4, citaremos somente as que abordam o conceito de função afim. Essa situação de aprendizagem foi

excluída no caderno de 2009, como veremos mais adiante, e algumas das atividades foram inseridas no caderno do aluno ou adaptadas no novo caderno. De acordo com o documento, um dos principais objetivos “é propor atividades que possibilitem aos estudantes desenvolver habilidades para resolver problemas aplicando propriedades das funções estudadas no presente caderno. Além disso, propor atividades em que os estudantes possam fazer conversões entre as diferentes representações das funções.” (SÃO PAULO, 2008a, p. 29).

Ressaltamos que o documento considera o termo modelo matemático como “uma descrição de um fenômeno que poderá ou não fazer parte de um problema prático (do mundo real)” (*idem*, p. 29), cujo propósito é o de entender melhor o conceito envolvido.

Com o objetivo de comparar com o novo caderno, lançado em 2009, apresentaremos somente os registros trabalhados nas atividades. Assim, para as atividades da Situação de Aprendizagem 4, tem-se:

- **Atividade 1** – apresentada no registro da linguagem natural, busca explorar a relação dos custos fixos e variáveis com o custo total e produção unitária de um bem de consumo. Para as soluções, usa-se o registro algébrico e gráfico.
- **Atividade 2** – é apresentada no registro da linguagem natural. Para a resolução das questões, é necessário fazer a conversão do registro natural para o algébrico (funções afim e quadrática) e em seguida para o numérico (tabelas) e gráfico (função quadrática).
- **Atividade 3** – é apresentada nos registros da linguagem natural e figural, utilizando-se de conceitos geométricos. Para a resolução, é necessária a conversão para o registro algébrico e gráfico.
- **Atividade 4** – apresentada nos registros de linguagem natural e gráfico, solicita, em sua resolução, a conversão para o registro algébrico (sistema com três equações).

Nas **Considerações sobre a avaliação final**, o caderno enfatiza que o desenvolvimento de algumas habilidades específicas ao conteúdo abordado são fundamentais e deverão ser contempladas e avaliadas ao final do bimestre. O Caderno, contido na Proposta (São Paulo, 2008a), no caso da função afim, recomenda que, ao encerrar o conteúdo os alunos, devem, além de resolver situações-problema que envolvam as funções afim e quadrática,

compreender algumas propriedades das funções, tais como: reconhecer o gráfico de uma função do 1º grau como uma reta e o coeficiente angular como uma taxa de variação e como a inclinação da reta saber reconhecer e diferenciar as proporcionalidades de grandezas direta e inversamente proporcionais e suas respectivas constantes de proporcionalidade [...](SÃO PAULO, 2008a, p. 33)

Além dessas habilidades específicas, o caderno recomenda considerar as matrizes de avaliações externas, como o SARESP e Enem/Prova Brasil, dentre outras, que podem oferecer dados importantes sobre dificuldades dos alunos e também servem de fonte confiável para aferir o conteúdo essencial do bimestre.

É apresentada, em 2009, uma versão revisada dos cadernos do professor e aluno. Esta nova versão inclui sugestões e críticas apresentadas pelos professores da rede, através de um questionário¹⁰ online oferecido durante o primeiro ano letivo de implantação da proposta.

Os Cadernos foram lidos, analisados e aplicados, e a nova versão tem agora a medida das práticas de nossas salas de aula. Sabemos que o material causou excelente impacto na Rede Estadual de Ensino como um todo. Não houve discriminação. Críticas e sugestões surgiram, mas em nenhum momento se considerou que os Cadernos não deveriam ser produzidos. Ao contrário, as indicações vieram no sentido de aperfeiçoá-los. (SÃO PAULO, 2009, p. 5).

Quadro geral de conteúdos do 2º bimestre da 1ª série do Ensino Médio
Unidade 1 – Funções como relações de interdependência.
Unidade 2 – Funções de 1º grau – Significado, gráficos, crescimento, decrescimento, taxas.
Unidades 3, 4, 5 – Funções de 2º grau – Significado, gráficos, interseções com os eixos, vértice, sinais.
Unidades 6, 7 e 8 – Problemas envolvendo funções de 2º grau – Problemas de máximos e mínimos.

Figura 3 – Quadro geral de conteúdos do caderno do professor
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 10

Esta nova versão dá continuidade ao projeto político-educacional do Governo de São Paulo (ANEXO B). Nesta edição revisada, foi feita uma nova organização das aprendizagens, porém, manteve-se a abordagem dos conteúdos

¹⁰ Questionário fornecido somente aos professores da rede no endereço eletrônico www.saopaulofazescola.gov.br. Acesso em 15 de agosto de 2010.

(Figura 3). Com apenas duas unidades de estruturação, as atividades propostas estão organizadas em duas Situações de Aprendizagem.

O caderno também apresenta algumas considerações para apresentação das atividades ligadas ao conceito de função:

Tais assuntos já foram apresentados aos alunos em series anteriores. Na 6ª série do Ensino Fundamental foram exploradas situações envolvendo a proporcionalidade direta e inversa entre grandezas, e que conduzem a relações do tipo $y = kx$, [...]. Na 8ª série, foram estudadas as funções $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tendo sido construídos seus gráficos. (SÃO PAULO, 2009, p. 9).

E ainda,

Agora, o estudo dessas funções será apresentado de modo mais sistematizado. Tudo será feito, no entanto, de tal forma que, mesmo se o professor estiver tratando desse assunto pela primeira vez, o aluno não terá grandes dificuldades em acompanhar as atividades propostas. (SÃO PAULO, 2009, p. 9).

A forma como as atividades são apresentadas, não havendo uma linguagem formal excessiva, sugere uma apropriação por parte do aluno sem que haja interferência da dificuldade de dominar uma linguagem mais técnica. Esta abordagem cognitiva deve-se ao fato de que o objetivo do ensino da Matemática na forma inicial, “é o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização” (DUVAL, 2005, p. 11).

Cabe ressaltar que todas as atividades contidas nas duas aprendizagens são utilizadas na sequência de atividades do *Caderno* do aluno, que veremos mais adiante. Assim sendo, ao apresentar as análises das atividades, verificamos se as aprendizagens contemplam os objetivos apresentados e, de forma geral, se atendem aos requisitos para aprendizagem do conceito de função afim.

As unidades 1 e 2 são apresentadas em duas *Situações de Aprendizagem*. Assim, a unidade 1 está organizada na *Situação de Aprendizagem 1*, enfatizando as funções como relações de interdependência. Apresenta como sugestões de abordagem dez atividades, todas resolvidas e comentadas com um tempo previsto de uma semana e meia. A unidade 2 foi organizado na *Situação de Aprendizagem 2*, que aborda a função afim como expressão de uma proporcionalidade direta entre grandezas e os conceitos de coeficientes, crescimento, decrescimento, taxa de variação, gráfico e inequação. Com um

tempo previsto de uma semana e meia, apresenta nove atividades como sugestões de abordagem pelo professor.

Na *Situação de Aprendizagem 1*, para conceituar a ideia de função, o documento inicia com um texto informativo de **Grandezas e Funções**, apresentando três exemplos para relacionar as grandezas **x** (variável independente) e **y** (variável dependente). Argumenta que **y** é uma função de **x**: a área **A** de um quadrado é uma função de seu lado **x** ($A = f(x) = x^2$), o comprimento **C** de uma circunferência em função de seu raio **r** ($C = f(r) = 2\pi r$) e a altura **H** de uma pessoa é uma função de sua idade **t** ($H = f(t)$). Ressalta, neste último, “não sabemos exprimir a relação de interdependência $f(t)$ por meio de uma fórmula.” (SÃO PAULO, 2009, p. 11-12).

Encerra o texto, ressaltando que a proporcionalidade direta exige mais do que um aumento simultâneo nos valores de **x** e **y**, é preciso que a razão $\frac{y}{x}$ seja constante. Analogamente, a proporcionalidade inversa é mais do que uma diminuição nos valores de uma das grandezas quando aumentam os valores da outra grandeza: é preciso que o produto dos valores de **x** e **y** permaneça constante. Utiliza cinco atividades para esta abordagem, que analisaremos a seguir.

A **atividade 1**, Figura 4, é apresentada nos registros da linguagem natural e sua resolução exige a conversão para o registro algébrico. Essa atividade, segundo Duval (2005), possui um caráter *não-congruente*.

Atividade 1

Em cada um dos casos a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade. Se existir, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade.

- a) A altura **a** de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade **t**?
- b) A massa **m** de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade **t**?
- c) O perímetro **p** de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado **a**?
- d) A diagonal **d** de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado **a**?
- e) O comprimento **C** de uma circunferência é diretamente proporcional ao seu diâmetro **d**?

Figura 4 – Atividade 1

Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 22

Também observamos que, nesta atividade, após verificar a existência de proporcionalidade, o aluno é solicitado a fazer a conversão do enunciado na linguagem natural para o registro algébrico e, para indicar os valores das constantes de proporcionalidade, no registro simbólico.

Nas **Atividades 2 e 3**, o formato de abordagem é dado por uma tabela, permitindo a visualização dos dados de forma separada, preenchendo explicitamente a função cognitiva de identificação. Para toda a Atividade 2 não temos conversão, conforme mostra a Figura 5.

Atividade 2

As tabelas a seguir relacionam pares de grandezas. Indique se existe ou não proporcionalidade (direta ou inversa).

a) Produção de automóveis e produção de tratores (anual, em milhares)

País	Automóveis	Tratores
A	100	8
B	150	12
C	200	16
D	225	18
E	250	20
F	300	24
G	350	28
H	400	32
I	450	36

Figura 5 – Item a, Atividade 2
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 10

Nesta atividade, o documento contempla um objetivo muito específico do uso de tabelas:

O objetivo das tabelas é apenas o de consolidar o fato de que duas grandezas podem crescer ou decrescer conjuntamente, ou então podem variar em sentidos opostos (quando uma cresce, a outra decresce) sem que haja proporcionalidade direta ou inversa. (SÃO PAULO, 2009, p. 14).

Para a **Atividade 3**, Figura 6, temos os registros de entrada Linguagem natural e simbólica (tabela), de caráter *congruente*. A resolução implica na conversão dos registros Linguagem Natural → Tabela e Tabela → Algébrico, ambas congruentes.

Em relação à atividade anterior, observamos que a forma de apresentação e o uso da tabela na Atividade 3 possibilita uma generalização da relação de interdependência entre as variáveis **x** e **n**, apesar de não ser este objetivo. Ao

expressar corretamente a relação $n \cdot x = 400000$, o aluno poderá, com um *tratamento*, generalizar com outro registro algébrico, $x=f(n)=400000/n$, a ideia de função.

Atividade 3

Um prêmio **P** da loteria deve ser dividido em partes iguais, cabendo um valor **x** a cada um dos **n** ganhadores. Considerando um prêmio **P** de R\$ 400 000,00 preencha a tabela abaixo e expresse a relação de interdependência entre **x** e **n**.

n	1	2	4	5	8	10	20
x							

Figura 6 – Atividade 3

Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 14

As **Atividades 4 e 5**, apresentadas nos registros da linguagem natural, exigem *tratamentos*. Os tratamentos ocorrem quando, apesar da transformação, o registro permanece o mesmo. Para a atividade 5 não há conversão de registros. As conversões ocorrem quando há mudança de sistema, porém, conservando as mesmas referências ao objeto estudado.

Na **Atividade 4**, de caráter não-congruente, temos a conversão dos registros linguagem natural para o de caráter algébrico. O documento faz referência à conversão do registro da linguagem natural para o registro figural: “faça uma figura de um quadrado com lado **x** (e área x^2) e de outro com lado $3x$, para mostrar que a área do maior é $9x^2$.” (SÃO PAULO, 2009, p. 15).

Para a **Atividade 5**, não temos conversão. Na abordagem de gráficos de funções, o documento arrola com um texto informativo de **Gráficos de funções**, definindo: “Dada uma função $y=f(x)$, o conjunto de pontos $(x; y)$ do plano cartesiano tal que $y=f(x)$ constitui o gráfico da função.” (*idem*, p. 16).

No caso das grandezas diretamente proporcionais, o documento mostra, nos registros em linguagem natural, “sendo $\frac{y}{x}$ = constante = k , ou seja, $y=f(x)=Kx$, então o gráfico correspondente é uma reta passando pela origem do sistema de coordenadas:” (*ibidem*, p. 16). Da mesma forma, um gráfico é mostrado, conforme se encontra na Figura 7, evidenciando que, nesta representação, a função correspondente a uma reta.

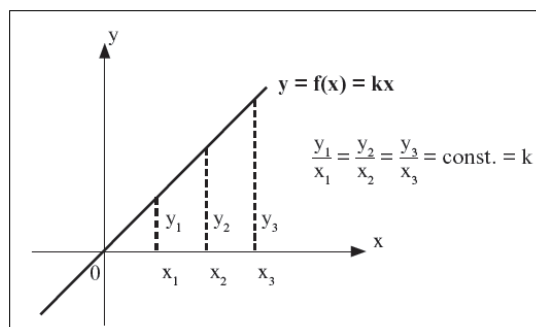


Figura 7 – Grandezas diretamente proporcionais

Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 16

Na **Atividade 6**, Figura 8, e **Atividade 7**, de forma contextualizada, são apresentadas situações em que a proporcionalidade direta existe apenas no cálculo da parcela variável.

Atividade 6

O preço **P** a cobrar em uma corrida de táxi é composto por uma quantia **a** fixada, igual para todas as corridas, mais uma parcela variável, que é diretamente proporcional ao número **x** de quilômetros rodados: $P = a + b \cdot x$ (**b** é o custo de cada quilômetro rodado).

Em certa cidade, temos $P = 15 + 0,8 \cdot x$ (**P** em reais e **x** em km)

a) Qual é o preço a cobrar por uma corrida de 12 km?

b) Calcule a diferença entre os preços de duas corridas, uma de 20 km, outra de 21 km.

c) Esboce o gráfico de **P** em função de **x**.

Figura 8 – Atividade 6

Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 16

No item **c** da Atividade 6, temos a conversão de um registro algébrico para a representação gráfica, de caráter *congruente*: exige que se leve em consideração, de um lado, os valores dos coeficientes da expressão algébrica e que, do outro, se estabeleça a declividade com o coeficiente angular, e assim reconheça valores das variáveis visuais sentido de inclinação e ângulo com os eixos.

Para esta atividade, as variáveis “quantia **a** fixada, igual para todas as corridas” e “número **x** de quilômetros rodados” e, no registro algébrico, $P = a + b \cdot x$ serão articuladas com as variáveis visuais do gráfico (inclinação, intersecção da reta com os eixos).

A **Atividade 8**, Figura 9, e a **Atividade 9**, de forma contextualizada, apresentam situações em que a proporcionalidade é inversa. No item **c** dessas atividades, temos a conversão do registro algébrico para a representação gráfica, de caráter *congruente*, que exige que se leve em consideração, de um lado, os valores dos coeficientes da expressão algébrica e do outro, que se estabeleça uma hipérbole, e assim reconheça valores das variáveis visuais do ramo da hipérbole. Para a atividade 8, as variáveis pertinentes são, no registro da linguagem natural, “número N de dias necessários para esvaziar um reservatório” e “consumo de x litros por dia”, e, no registro algébrico, $N \cdot x = 20\ 000$. Tais elementos serão articulados com as variáveis visuais do gráfico (ramo da curva hipérbole).

Atividade 8

O número N de dias necessários para esvaziar um reservatório de água de 20 000 ℓ depende do consumo diário de água. Se o consumo for de x litros por dia, então os valores de N e x devem satisfazer à condição $N \cdot x = 20\ 000$.

a) Calcule os valores de N para $x_1 = 500$ ℓ por dia e para $x_2 = 800$ ℓ por dia.

b) Esboce o gráfico de N em função de x.

Figura 9 – Atividade 8
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 18

Na **Atividade 10**, de forma contextualizada, existe uma situação de leitura por observação direta do gráfico, sem conversão.

Ressaltamos que as **Atividades 2, 6, 7, 8, 9** são as mesmas, respectivamente, que as **Atividades 4, 5, 6, 7, 8**, do caderno do professor de 2008.

Em **considerações sobre a avaliação**, para essa situação de aprendizagem, o caderno menciona seu objetivo: “é fundamental que a idéia de função como interdependência entre duas grandezas tenha consolidado, com a assimilação da nomenclatura “variável independente” (aquela à qual atribuímos valores livremente) e “variável dependente”, ou a variável que é considerada, no contexto, como uma função da outra” (SÃO PAULO, 2009, p. 19).

Para a *Situação de aprendizagem 2*, o documento inicia com um texto

informativo, **Funções de 1º grau: significado**. No texto, a função afim é definida da seguinte maneira: “uma fórmula do tipo $f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes, sendo $a \neq 0$.” (*idem*, p. 20). A proporcionalidade, aqui, é verificada pelo quociente entre $f(x) - b$ e x , ou seja, $a = \frac{f(x) - b}{x}$.

Em seguida, com exemplos numéricos e gráficos, o texto aborda:

- A consequência da razão constante: a representação gráfica de $f(x) = ax + b$ é uma reta para quaisquer valores de a e b ;
- Quando $a = 0$, a função se reduz a $f(x) = b$, ou seja, a uma função constante;
- O coeficiente b representa o valor de $f(x)$ para $x=0$, quando $a = 0$;
- O coeficiente a representa a inclinação da reta;
- A variação de $f(x)$ para cada unidade a mais de x é igual a a , ou seja, se $f(x) = ax + b$, então $f(x+1) - f(x) = a$.

Em resumo aos comentários sobre a função $f(x) = ax + b$, o documento apresenta um gráfico ilustrativo (Figura 10), explicando as condições da função crescente ($a > 0$) e da função decrescente ($a < 0$), e que “nos dois casos, o valor de a representa a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x , o que representa um aumento quando $a > 0$, ou uma diminuição, quando $a < 0$.” (SÃO PAULO, 2009, p. 19).

O texto informativo observa, ainda, que a função $f(x) = ax$, quando $b = 0$, traz um gráfico cuja reta passa pela origem do sistema de coordenadas. Além disso, se duas funções afins têm o mesmo coeficiente angular, então seus gráficos são retas paralelas. Em sequência, apresenta nove atividades com as respectivas resoluções.

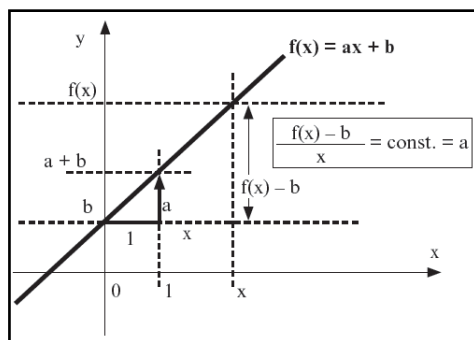


Figura 10 – Função $f(x) = ax + b$, com $b \neq 0$
 Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 21

Analisaremos, a seguir, essas atividades, quais registros *semióticos* foram utilizados e as possíveis conversões, pois as mesmas são aproveitadas na sequência de atividades do caderno do aluno de 2009.

A **Atividade 1** é apresentada nos registros da linguagem natural, gráfico e simbólico. Temos a conversão desde a representação gráfica para a algébrica, explorando os valores dos coeficientes **a** e **b** da função $f(x) = ax + b$. A atividade é *congruente*: exige que se leve em consideração, de um lado, as variáveis do gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) e do outro, os valores dos coeficientes da expressão algébrica (coeficiente angular e linear).

Para a **Atividade 2**, temos, no enunciado, os registros linguagem natural e simbólico. A conversão, no item **b**, é de caráter *congruente*, considerada desde a representação gráfica até a algébrica, e exige que se leve em consideração, de um lado, as variáveis do gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) e do outro, os valores de situações em que a proporcionalidade direta existe apenas no cálculo da parcela variável. Para os demais itens se exige somente tratamentos do registro algébrico.

Na **Atividade 3**, temos no enunciado os mesmos registros da atividade 1. A conversão (Representação gráfica $\rightarrow$ Algébrica) e de caráter *congruente*, exige que se leve em consideração, de um lado, a declividade com o coeficiente angular e intersecção com os eixos, e do outro, os valores dos coeficientes **a** e **b** da expressão algébrica $f(x) = mx$. Explora o caso particular da função $f(x) = mx + n$, quando $n = 0$.

Na **Atividade 4** não temos conversão: a mesma explora as inclinações das retas apresentadas no item anterior, com o coeficiente angular **m** da função afim.

Na **Atividade 5**, exposta na Figura 11, temos os registros linguagem natural e simbólico no enunciado. Consideramos duas conversões, da linguagem natural para a algébrica, no item **a**, de caráter *congruente* e, para o item **b**, a conversão linguagem natural para a gráfica, com caráter *não-congruente*.

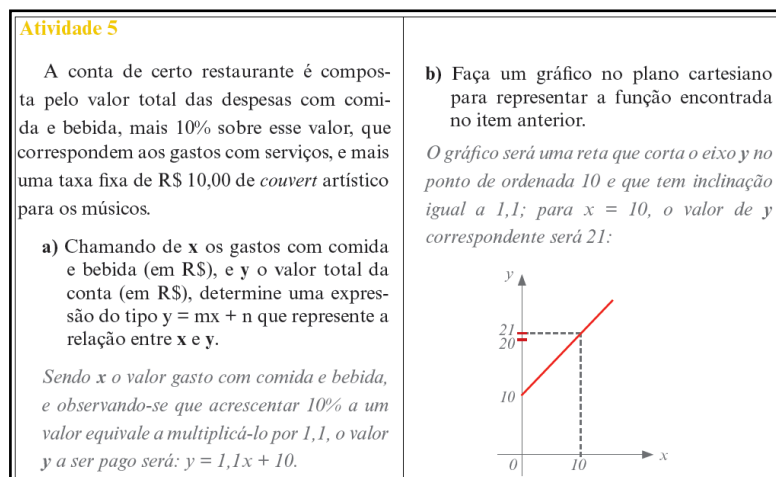


Figura 11 – Atividade 5, Situação de Aprendizagem 2
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 24

Na **Atividade 6**, temos os registros em linguagem natural e simbólico. A conversão da linguagem natural para o registro algébrico, para os itens **a** e **b**, de caráter *não-congruente*, exige inicialmente um tratamento algébrico das variáveis no registro em linguagem natural (registros de entrada), contidas no texto “na escala Celsius, a temperatura de fusão do gelo é 0° e a de ebulição da água é 100° ” e “na escala Fahrenheit, a temperatura de fusão do gelo é 32° e a de ebulição da água é de 212° ” em relação aos coeficientes linear e angular da expressão da função $f(x) = ax + b$. Para os itens **c** e **d**, exige-se somente tratamentos numéricos.

A atividade, ao relacionar as escalas de temperaturas Celsius, Fahrenheit e Kelvin, está de acordo com os PCN (1999), à medida que busca articular a Matemática com as outras áreas de conhecimento, no caso, a Física.

Na **Atividade 7**, temos uma conversão desde a representação gráfica até a linguagem natural, de caráter *congruente*, que exige inicialmente um tratamento algébrico da variável coeficiente angular no registro gráfico (registro de entrada). Relaciona a taxa de crescimento com o coeficiente angular.

Na **Atividade 8**, Figura 12, temos, para os itens **a** e **b**, uma leitura imediata do registro gráfico e, no item **c**, a conversão da representação gráfica para a de caráter algébrico, que relaciona a taxa de crescimento com o coeficiente angular.

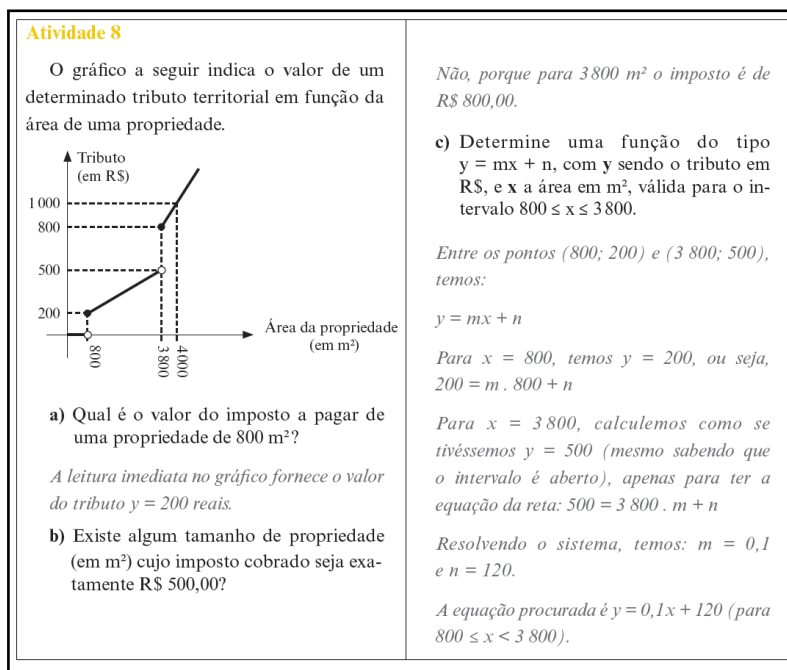


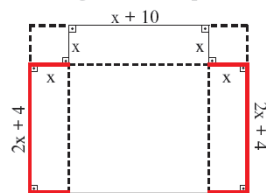
Figura 12 – Atividade 8
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 26

Aqui, a conversão tem caráter *não-congruente*, pois exige, inicialmente, um tratamento algébrico das variáveis “coordenadas cartesianas” no registro gráfico (registro de entrada). As variáveis no registro gráfico (inclinação, intersecção, coordenadas) não são espontaneamente mobilizadas com as variáveis da expressão algébrica da função $y = mx + n$ no registro terminal. Essa falta de transparência e a exigência do tratamento com o uso dos sistemas lineares, no registro terminal a partir do registro de saída é que caracteriza a conversão exigida na atividade como *não-congruente*.

Na última, a **Atividade 9**, Figura 13, temos uma conversão da representação figural para a algébrica, que relaciona o perímetro com a função afim. A conversão apresenta caráter *não-congruente*, pois exige inicialmente um tratamento algébrico das variáveis lados da figura registro figural (registro de entrada) com o registro algébrico (registro de saída) da inequação do 1º grau.

Atividade 9

A figura indica uma folha de latão que será usada na montagem de uma peça:



- a) Determine todos os valores possíveis de x (em metros) para que o perímetro da folha seja maior ou igual a 64 m.

Sendo o perímetro igual à soma dos comprimentos de todos os lados da folha, temos;
 $2(2x + 4) + 2x + 2x + 2(x + 10) + 2x \geq 64$

Daí segue que:

$$4x + 8 + 2x + 2x + 2x + 20 + 2x \geq 64,$$

ou seja, $12x \geq 64 - 28$, o que acarreta que $x \geq 3$.

Portanto, x deve ser maior ou igual a 3 metros.

- b) Determine todos os valores possíveis de x (em metros) para que a soma dos comprimentos representados em vermelho seja menor que a soma dos demais comprimentos que completam o perímetro da folha.

Analogamente, temos:

$$2(x + 2x + 4 + x) < 2x + 2(x + 10)$$

$$2x + 4x + 8 + 2x < 2x + 2x + 20$$

$$4x < 12, \text{ ou seja, } x < 3.$$

Portanto, x deve ser maior que 0 e menor que 3 metros.

Figura 13 – Atividade 9

Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009, p. 26-27

Cabe ressaltar que, a PCESP apresenta, em sua matriz curricular, o conteúdo inequações do 1º grau somente na 7ª série do 3º bimestre. Assim sendo, torna-se papel importante ao professor *administrar a progressão das aprendizagens* (PERRENOUD, 2000).

Nas **Considerações sobre a avaliação**, o documento finaliza o principal objetivo ao final desta Situação de Aprendizagem, que seria “o reconhecimento de relações de proporcionalidade direta em diferentes contextos e a representação das mesmas por meio de uma função do 1º grau é o objetivo primordial que deverá ter atingido.” (SÃO PAULO, 2009, p. 27).

As orientações gerais dos cadernos do professor, tanto de 2008 como 2009, buscam evidenciar os princípios norteadores do currículo ao qual se referem, destacando a contextualização dos conteúdos e as competências pessoais relacionadas com a leitura e escrita Matemática.

Nos cadernos, os conteúdos de funções, e da função afim em particular, estão organizados para o segundo bimestre e estruturados em unidades. Com uma visão panorâmica do conteúdo, as atividades estão organizadas em *Situações de Aprendizagem* exemplares, que pretendem ilustrar a forma de

abordagem sugerida. De acordo com as aulas disponíveis e a critério do professor cada assunto poderá ser explorado com mais ou menos aprofundamento.

São apresentadas algumas sugestões de materiais (textos, *softwares*, sites, vídeos, entre outros) que poderão ser utilizadas pelo professor para complementar as Situações de Aprendizagem. Os cadernos também apresentam algumas considerações sobre a avaliação a ser realizada, bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências esperadas no bimestre em questão.

Verificamos que o caderno do professor de 2009 apresenta a mesma abordagem do conceito de funções e função afim quando comparado com a versão anterior, de 2008. Apenas há uma melhor organização visual e textual e também a correção dos tempos previstos, de duas semanas para três.

Em relação à abordagem dos conceitos de função afim, entendemos que o caderno do professor de 2009 é insuficiente, pois o mesmo não aborda explicitamente todos os temas necessários para uma sólida aprendizagem. Entre as defasagens encontradas, podemos citar:

- Determinação do domínio e da imagem de uma função, conhecendo o seu gráfico;
- Verificação se um conjunto de pontos é gráfico de uma função;
- Relação da função afim com outros conteúdos dentro da Matemática, como por exemplo, sequências, e de outras áreas do conhecimento, como Química ou Biologia, por exemplo;
- Translações verticais a partir da função linear.

3.3 A organização dos cadernos de Matemática do aluno

O caderno do aluno de Matemática (SÃO PAULO, 2008c) é um documento oferecido pela SEE/SP a todos os alunos matriculados na rede pública do Estado de São Paulo. Nesse caderno, há uma série de atividades, com espaço para cálculos e registros, específicas para cada bimestre de aulas em sincronia com as orientações do caderno do professor. Com as explorações das atividades propostas, pressupõem a aprendizagem do aluno dos conteúdos/habilidades

determinados para o bimestre.

As atividades aos conceitos de função e função afim foram organizadas da mesma maneira que o caderno do professor:

- *Situação de Aprendizagem 1 – Funções como relações de interdependência:* múltiplos exemplos, revelando a intenção de trabalhar as seguintes competências e habilidades: compreender a ideia de proporcionalidade direta e inversa como relações de interdependência; expressar a interdependência entre grandezas por meio de funções; contextualizar a ideia de função e enfrentar situações-problema relativas ao tema.
- *Situação de Aprendizagem 2 – Funções de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento, taxas, significado dos coeficientes, crescimento, decrescimento, taxas,* com o objetivo de trabalhar as seguintes competências e habilidades: compreender a função afim como expressão de uma proporcionalidade direta entre grandezas; expressar essa proporcionalidade por meio de gráficos.

Em cada situação, as atividades são agrupadas em seções diferentes de ensino e aprendizagem, sendo utilizadas as atividades do caderno do professor (São Paulo, 2009). Em função disto, entendemos que não há necessidade de uma análise mais aprofundada, como a feita anteriormente.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, visando investigar as dificuldades ligadas à aprendizagem/construção do conceito de função afim, através da elaboração e aplicação de uma sequência de atividades, e posterior desenvolvimento de outra com o uso do *software* GeoGebra, apresentaremos nossa metodologia. Em seções separadas, descrevemos sobre o procedimento de pesquisa e referencial teórico-metodológico, descrição da escola, descrição e escolha dos sujeitos, o SARESP 2008 e os resultados obtidos pelos pesquisados.

4.1 Procedimentos metodológicos

A metodologia da pesquisa foi caracterizada como qualitativa exploratória, com o intuito de aplicar e interpretar uma sequência diagnóstica, fixando assim, nosso problema de pesquisa e planejando a sequência didática com o uso do *software* GeoGebra. Para Bogdan e Biklen (1994), existem muitas formas de interpretar as experiências que estão em nosso alcance por meio da interação com os outros, bastando compreender o pensamento subjetivo dos participantes da pesquisa.

Para estabelecer uma articulação entre as sequências didáticas, o trabalho foi estruturado em duas fases, assim denominadas:

- FASE 1: investigação das dificuldades de aprendizagem: uso reconstrutivo do erro.
- FASE 2: estratégia pedagógica, com o uso de TICs, contemplando a análise dos erros da fase anterior.

Na FASE 1, fizemos a coleta e análise dos dados. Aqui, utilizamos como metodologia de pesquisa os princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue. A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada por dois tipos diferente de experimentos: um esquema experimental em sala de aula com base na didática, “isto é, na construção, realização, observação e análise de seções de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo

registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*” (1988, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 171).

Ainda segundo o autor, em uma metodologia de pesquisa fundamentada nos pressupostos da Engenharia Didática, a organização deve considerar as seguintes fases em seu desenvolvimento: uma análise preliminar, análise *a priori* das situações propostas, a experimentação, análise *a posteriori* e validação.

Nesse sentido, em nossas **análises preliminares**, buscamos pesquisar elementos que pudessem nos informar concepções dos pesquisados em torno do conceito de função afim. Consideramos avaliações externas, identificamos as organizações curriculares oficiais de ensino e aprendizagem do objeto matemático em estudo, delineamos de modo fundamentado a questão e os fundamentos teóricos da pesquisa, com os seguintes estudos:

- Breve histórico da PCESP;
- Análise da atual PCESP para o EM e dos PCN, com ênfase em suas abordagens nas avaliações e no tratamento do erro;
- Pesquisadores na área de educação Matemática e TICs;
- Análise dos resultados da avaliação externa SARESP dos pesquisados;
- Análise do ensino de função afim oferecido aos alunos pesquisados, à partir dos cadernos do professor e aluno.

Para a segunda etapa da engenharia, **análise *a priori* das situações propostas**, iniciamos com uma descrição dos sujeitos e do ambiente: quem são, qual a trajetória, o entorno social. Para o pesquisador, essas variáveis permitem controlar os comportamentos e a realização das atividades dos alunos, pois,

O objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos admitir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. (ALMOULOU, 2007, p. 175).

Em seguida, elaboramos uma sequência de atividades explorando o conceito de função afim, cuja finalidade foi a de mobilizar os conhecimentos para possibilitar a obtenção de quais categorias de erros que os alunos cometeram.

A terceira etapa da engenharia, a **experimentação**, traz a aplicação da sequência didática diagnóstica em vinte (20) alunos da 1ª série do EM pelo

professor/pesquisador em uma escola pública situada na região leste da cidade de São José dos Campos, interior do Estado de São Paulo. Para a coleta e registro dos dados foram utilizados, além das observações do professor/pesquisador, protocolos (anotações em folhas) e gravação de áudio dos alunos.

Na a quarta etapa da engenharia, **análise a posteriori e validação**, após a aplicação, foi realizada uma análise estruturada confrontando os objetivos da segunda etapa, pois o objetivo da análise *a posteriori* “é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos identificados” (ALMOULOU, 2007, p. 177). Com o interesse de refinar as informações contidas na sequência, constantemente consultamos os referenciais teóricos, procurando identificar novamente os erros cometidos, quantidade de respostas corretas por questão, destacando as dificuldades, os desvios conceituais, os métodos usados pelos alunos para procurar as respostas. A **validação** foi identificada na conclusão da primeira fase, alicerçada pelos estudos preliminares, articulados com a análise *a priori* e com as constatações feitas na análise *a posteriori* dos erros cometidos pelos alunos.

Os resultados alcançados permitiram ao pesquisador inferir e propor uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra, na intenção de possibilitar um avanço de aprendizagem do conceito de função afim.

Na FASE 2 foram criadas atividades para o desenvolvimento do raciocínio matemático, que possibilita a construção do conhecimento e não apenas a memorização e reprodução de técnicas de resolução em torno do conceito da função afim. As novas tecnologias oferecem meios em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos.

Nesse sentido, segundo Borba e Penteado (2001, p.43), além desses fatores, o computador possibilita "o enfoque experimental, explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas." Na interatividade planejada nesta pesquisa, muito além daquela em que a reação do *software* é simplesmente informar sobre “acerto” ou “erro” frente à ação do aluno, a sequência didática quis oferecer suporte as concretizações e ações mentais do aluno; isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes objetos via sua representação.

4.2 Descrição da escola

O campo de estudo decorreu em uma Escola Estadual situada na cidade de São José dos Campos – SP. Esta escola foi fundada em 1988, funcionando com o ensino fundamental até 1990, quando iniciou o ensino médio inicialmente apenas no turno noturno. Após este período, o ensino fundamental deixou de ser oferecido nesta instituição, mantendo-se o ensino médio nos três períodos. Para o ano de 2010, a escola possuía cerca de 1650 alunos, distribuídos da seguinte maneira:

- Período matutino: 7 salas de 1º ano, 7 salas de 2º ano e 7 salas de 3º ano;
- Período vespertino: 7 salas de 1º ano;
- Período noturno: 2 salas de 1º ano, 3 salas de 1º ano (EJA), 5 salas de 2º ano, 5 salas de 2º ano (EJA), 5 salas de 3º ano e 3 salas de 3º ano (EJA).

Cabe ressaltar que, devido a esta característica de oferecer somente este nível de ensino, a escola recebe todos os anos “novos” alunos oriundos principalmente de escolas municipais, acarretando inicialmente muitas dificuldades de adaptação. As dificuldades mais comuns relatadas pelos professores e gestores são a metodologia de ensino, no EM, difere da progressão continuada no EF e o material da SEE/SP (caderno do aluno) não é utilizado no município, exigindo períodos de adaptação; o envolvimento com alunos de idade mais avançada cria expectativas de relacionamento que exige tempo para estabilizar; heterogeneidade do público com relação a conhecimentos prévios e de maneira geral, problemas estruturais familiares.

A escolha da escola foi intencional, uma vez que o pesquisador é professor neste estabelecimento e leciona Matemática para os alunos/sujeitos da turma da 1ª série do EM participantes dessa pesquisa.

4.3 Descrição e escolha dos sujeitos

Todos os vinte (20) participantes dessa pesquisa são adolescentes com uma média de 16 anos de idade que não trabalham e apenas estudam. A maioria

mora no bairro em que se situa a escola escolhida. São alunos oriundos de três escolas estaduais localizadas no mesmo município da pesquisa que, daqui em diante, chamaremos apenas por escolas G, M e J. Compreendem, desse total, dez (10) alunos pertencentes à escola G, quatro (4) da escola M e seis (6) da escola J. Estes dados foram fornecidos pela secretaria da escola descrita anteriormente.

A população alvo deste estudo, dentre as turmas de primeiro ano, foi a 1ª série K, por serem os alunos do professor/pesquisador como já referimos anteriormente. O fato de haver uma grande proximidade na relação entre o investigador e os participantes no estudo pode ser considerado como uma vantagem, no sentido de existir um maior e diversificado conhecimento mútuo dos intervenientes na investigação, além deste não ser considerado um elemento perturbador ou estranho no ambiente. Estamos, pois, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), quando afirmam que a investigação em educação pode tirar partido da relação de proximidade existente entre o investigador e o objeto de estudo.

Importante para aferir o grau de conhecimento matemático dos alunos, considerou-se os resultados que estes obtiveram na avaliação do SARESP (2008), conforme segue.

4.4 O SARESP 2008 e os resultados obtidos pelos pesquisados

A avaliação do SARESP (SÃO PAULO, 2009b) utiliza procedimentos metodológicos formais e científicos para coletar, sistematizar dados e produzir informações sobre o desempenho dos alunos do Ensino Fundamental e Médio da rede pública. Conforme a descrição do exame aqui mencionado (SÃO PAULO, 2009a), o desempenho dos alunos da educação básica do Brasil tem sido medido por meio da métrica do Saeb. O uso dessa escala de proficiência permite a comparação dos resultados dos alunos no SARESP com os do Saeb/Prova Brasil, justificando assim a opção da SEE/SP de usar a mesma escala. Assim, o SARESP 2008 passa a contar com uma base curricular comum a todos os alunos da educação básica de seu sistema de ensino como apoio às referências da avaliação, com base nos princípios estruturais da proposta curricular do estado de

São Paulo (SÃO PAULO, 2009b). Essa reestruturação se deu numa reflexão da evolução histórica/curricular pela SEE/SP nos anos de 1980 e início dos anos 1990.

Esse trabalho anterior e os referenciais nacionais para a educação básica constituíram o acervo de reflexão inicial das equipes que elaboraram as devidas atualizações teóricometodológicas e os ajustes necessários às exigências do contexto sociocultural da atualidade. Foram elaborados então os documentos básicos para cada área do conhecimento envolvida na proposta. (SÃO PAULO, 2009a, p. 9).

Definir uma matriz de avaliação em situações de aprendizagem e ensino é fundamental no campo da Educação, pois “nesse intermédio, pode-se avaliar, mesmo que de modo indireto e inferencial, a ocorrência de efetiva aprendizagem” (SÃO PAULO, 2009a, p. 9).

Sobre sua finalidade, o documento traz:

Uma matriz de referência de avaliação pode ter muitas finalidades. A mais importante delas é o seu poder de sinalização das estruturas básicas de conhecimentos a serem construídas por crianças e jovens por meio dos diferentes componentes curriculares em cada etapa da escolaridade básica. (SÃO PAULO, 2009a, p. 11).

Nesse sentido, a especificação das habilidades na matriz de avaliação contida no documento apresenta importantes mecanismos para que o pesquisador possa acompanhar e inferir uma reflexão do desenvolvimento adquirido dos alunos pesquisados em relação a sua proposta de pesquisa.

O triângulo, Figura 14, mostra as relações entre habilidades, conteúdos e competências avaliadas e expressas nos níveis de desempenho considerados fundamentais pelo SARESP (SÃO PAULO, 2009a).

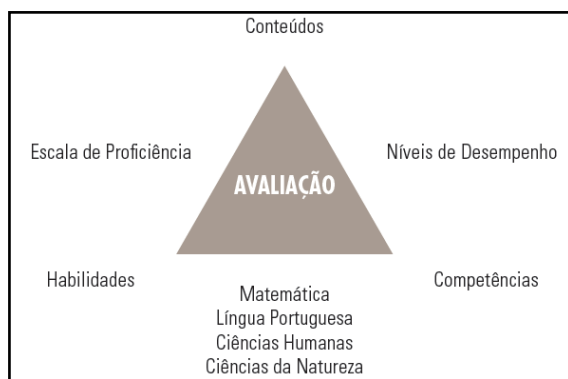


Figura 14 – Níveis de desempenho da Escala de Proficiência do SARESP
Fonte: SEE/SP, SÃO PAULO, 2009a, p. 12

Os vértices indicam os elementos valorizados na matriz; o centro, a função da avaliação e, nos segmentos, os objetivos e as modalidades de expressão de seus resultados.

Conforme exposto na Figura 14, o documento faz as seguintes relações:

- Nos vértices, a verificação dos conteúdos disciplinares é feito por intermédio da utilização das habilidades, graças às quais se poderá inferir o grau de proficiência das competências cognitivas¹¹ desenvolvidas pelos alunos em seu processo de escolarização;
- Pelo lado esquerdo, representando a Escala de Proficiência, que sintetiza o domínio dos conteúdos e habilidades alcançados, o que permite inferir o nível de domínio das competências avaliadas;
- Pelo lado direito, os Níveis de Desempenho, que relacionam conteúdos e competências para concretizar o objetivo do SARESP: verificar o ensino-aprendizagem. Nos professores, verificar se estão ensinando os conteúdos esperados para os anos escolares avaliados e, nos alunos, através dos níveis de proficiência, se estão aprendendo.
- Pelo lado inferior, relaciona habilidades e competências avaliadas em relação aos conteúdos disciplinares mencionados e no centro, encontra-se a avaliação, que tem a função de observar e promover o cumprimento do compromisso social da escola com a aprendizagem efetiva de seus alunos.

A avaliação de competências, por intermédio destes dois indicadores (habilidades associadas a conteúdos em uma situação de prova) justifica-se pelo compromisso assumido na proposta curricular: um currículo referido a competências supõe que se aceite o desafio de promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente as competências e habilidades do aluno. (SÃO PAULO, 2008, p. 13).

Desta forma, a escala de proficiência possibilitou a construção das provas por seus elaboradores e a obtenção da posição (segundo níveis de desempenho) dos alunos que as realizaram. Tal escala sintetiza o domínio dos conteúdos e

¹¹ Competências cognitivas são modalidades estruturais da inteligência. Modalidades, pois expressam o que é necessário para compreender ou resolver um problema. (SÃO PAULO, 2009b, p. 12).

habilidades alcançados, o que permite inferir o nível de domínio das competências avaliadas. Encontramos no caderno do gestor (São Paulo, 2009a) dados para interpretar a escala de proficiência dos alunos.

Por sua vez, os pontos da escala do SARESP foram agrupados em quatro níveis (Figura 15) de desempenho definidos a partir das expectativas de aprendizagem (conteúdos, competências e habilidades) estabelecidos para cada série e disciplina.

Níveis	4ª EF	6ª EF	8ª EF	3ª EM
Abaixo do Básico	< 150	<175	< 200	< 250
Básico	Entre 150 e 200	Entre 175 e 225	Entre 200 e 275	Entre 250 e 300
Adequado	Entre 200 e 250	Entre 225 e 275	Entre 275 e 325	Entre 300 e 375
Avançado	Acima de 250	Acima de 275	Acima de 325	Acima de 375

Figura 15 – Níveis de Proficiência de Matemática – SARESP 2008

Fonte: SÃO PAULO, 2009b, p. 25.

Os níveis de desempenho têm uma interpretação pedagógica:

- **Abaixo do Básico** – os alunos neste nível demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série escolar em que se encontram.
- **Básico** – os alunos neste nível demonstram desenvolvimento parcial dos conteúdos, competências e habilidades requeridas para a série em que se encontram.
- **Adequado** – os alunos neste nível demonstram domínio dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série escolar em que se encontram.
- **Avançado** – os alunos neste nível demonstram conhecimentos e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do requerido na série escolar em que se encontram. (SÃO PAULO, 2009b, p. 25).

Segundo o documento, o propósito é ter o maior número de alunos nos níveis Adequado e Avançado, o que “equivaleria a dizer que eles dominam os conhecimentos da série e estão prontos para continuar seus estudos com sucesso nas séries posteriores.” (SÃO PAULO, 2009b, p. 41).

Na Figura 16, são exibidos os grupos de competências cognitivas avaliadas nas provas do SARESP e as suas funções valorizadas. O documento faz as seguintes análises:

- Nos vértices do triângulo, indicam-se os grupos de competências

avaliadas e os esquemas cognitivos que lhes correspondem;

- Pelo lado inferior, apresenta-se a função *Observar*, relação entre os esquemas dos Grupos I e II. De acordo com o documento oficial (SÃO PAULO, 2009a, p. 16), nesses esquemas propostos por Jean Piaget, os alunos podem ler as informações do objeto, “em sua dupla condição: registrar perceptivamente o que está proposto nos textos, imagens, tabelas ou quadros e interpretar este registro como informação que torna possível assimilar a questão e decidir sobre a alternativa que julgam mais correta.”
- Pelo lado esquerdo, apresenta-se a função *Realizar*, proceder bem em face de um objetivo ou problema, que implica a relação entre os esquemas dos Grupos III e II.
- Pelo lado direito, apresenta-se a função *Compreender*, que implica a relação entre os esquemas dos Grupos III e I. Os esquemas operatórios são essenciais às competências cognitivas ou às operações mentais destacadas nos Grupos I e II. Esses esquemas “expressam-se de modo consciente e permitem compreensões próprias a este nível de elaboração cognitiva.” (*idem*, p. 18).

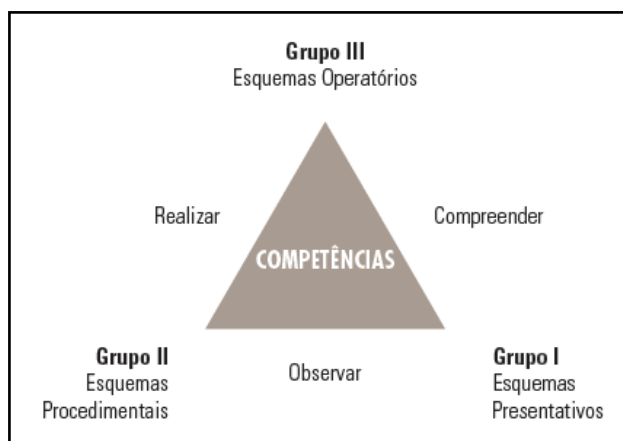


Figura 16 – Grupos de competências avaliadas nas provas do SARESP 2008
Fonte: (SEE/SP, SÃO PAULO, 2009a, p. 15)

No APÊNDICE A recortamos as principais habilidades exigidas no SARESP 2008 que estão diretamente ligadas ao objeto dessa pesquisa.

Em sequência apresentaremos os resultados dos níveis de proficiência do SARESP 2008 e Saeb/Prova Brasil 2007 das escolas pertencentes aos nossos pesquisados (Quadro 1).

Distribuição percentual dos alunos das escolas G, M e J nos níveis de proficiência do SARESP 2008 e Saeb/Prova Brasil 2007						
Níveis	SARESP 2008			Saeb e Prova BRASIL 2007		
	G	M	J	G	M	J
Abaixo do Básico (< 225)	28,2	54,6	28,2	28,2	54,5a	28,2
Básico (225 a < 300)	55,4	43,9	51,9	55,3	43,9	52
Adequado (300 a < 350)	10,7	1,5	17,9	10,8	1,5	17
Avançado (≥ 350)	5,6	0	1,9	5,6	0	1,9

Quadro 1 - Resultado dos níveis de proficiência dos alunos pesquisados
Fonte: Boletim fornecido pelas escolas

Os dados do quadro acima apontam que as médias de proficiências alcançadas pelos alunos pesquisados nas duas avaliações foram muito próximas. Contudo, o percentual dos alunos com desempenho SARESP “Abaixo do Básico” e “Básico”, juntos, para as escolas G, M e J são de 83,6%, 98,5% e 80,1%, respectivamente, percentuais que sinalizam que os alunos não atingiram níveis desejáveis, ou seja, não adquiriram as habilidades e competências mencionadas.

Esses resultados em conjunto com as atividades propostas nos cadernos da SEE/SP nos apontam “caminhos” para a elaboração da sequência didática diagnóstica

5 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, descreveremos os procedimentos de coleta e análise dos dados referentes à *fase 1*, que importa em proceder à *investigação das dificuldades de aprendizagem com uso reconstrutivo do erro*. Este estudo caracteriza-se como uma etapa de análise didática, considerando os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1990, *apud* Almouloud, 2007), e com apoio na teoria dos registros de representação semiótica (1995, *apud* Almouloud, 2007). Em seções separadas, descreveremos a sequência didática diagnóstica, a aplicação e a confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*, bem como a validação.

5.1 A sequência didática diagnóstica

Foi aplicada uma sequência didática diagnóstica em 20 alunos da escola pública escolhida, utilizando-se de quatro módulos de atividades¹² em papel impresso. Essa sequência didática tinha como objetivo principal, por um lado, com o auxílio dos registros de representação semiótica relacionados ao conceito de função afim, identificar os erros cometidos pelos alunos para verificar os conhecimentos consolidados (ou não) sobre o tema. Por outro, á luz da teoria de Perrenoud (2000), verificar como a análise de tais erros pode auxiliar na construção do conhecimento do objeto matemático mencionado. Para tanto, consideramos inicialmente a aplicação e interpretação das atividades do *Caderno do Aluno* (SÃO PAULO, 2008b) fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Assim, as questões descritas a seguir, foram elaboradas conforme a abordagem das atividades propostas no referido documento. Apresentamos a seguir algumas reflexões sobre essa atividade e algumas conclusões que evidenciaram a pertinência de nossa pesquisa e, também, do referencial teórico escolhido.

¹² Encontram-se no APÊNDICE B todas as questões e o formato original.

A elaboração e seleção das atividades procuraram contemplar uma abordagem cognitiva, de forma a possibilitar a exploração de elementos importantes da Teoria dos Registros de Representação. Conforme Duval (2005, *apud* LOPES JUNIOR, 2006, p. 68), uma abordagem cognitiva de um problema “consiste em procurarmos inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.”

A intenção, além de verificar as articulações entre os registros semióticos, foi de identificar as dificuldades de aprendizagem, utilizando-se dos erros cometidos. O erro produzido pelo aluno pode ser considerado como um ponto importante de grande significância para a *avaliação formativa* quando concebido, não como falha, mas como elemento natural do processo de conhecer (PERRENOUD, 1999).

A sequência didática é composta de quatro blocos de atividades, denominadas de ATIVIDADE I, II, III e IV, contendo questões que buscam, basicamente, colocar em evidência algumas representações e transformações entre os registros em questão. As atividades foram propostas para serem resolvidas sem consulta, em grupos e individualmente, conforme está descrito mais adiante. A seguir, passamos a expor nossas análises.

5.2 Análises *a priori* sequência didática diagnóstica

Conforme Almouloud (2000, p. 175-176), “o objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos admitir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido.”

A análise *a priori* de cada atividade possibilitou um maior aprofundamento, a partir de previsões e descrições, de nossas expectativas quanto às possíveis soluções dos alunos avaliados.

Cabe ressaltar que essa sequência diagnóstica possui como objetivo maior o de levantar elementos, a partir dos registros de representação semiótica, que

contribuíssem com respostas à questão proposta, destacando as dificuldades, os desvios conceituais, os métodos usados pelos alunos para procurar as respostas.

Nesse sentido julgamos necessário inserir inicialmente uma questão referente à função, de maneira geral, parte importante para a evolução do conhecimento da função afim.

5.2.1 Resultados esperados para a ATIVIDADE I

Nosso objetivo no bloco de ATIVIDADE I, Figura 17, foi avaliar se o aluno entendeu o conceito de função, consolidando a ideia de interdependência entre duas grandezas.

BLOCO ATIVIDADE I				
1-) O preço da passagem de ônibus urbano comum na cidade de São José dos Campos é de R\$ 2,50. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir:				
Número de Passagens (x)	1	2	5	8
Valor a ser pago (P)				
Agora, responda as seguintes questões:				
a) É possível determinar quantas passagens foram pagas, se o valor total pago foi de R\$ 57,50? Qual é esse valor?				
b) O que é constante nesse problema?				
c) O que é variável nesse problema?				
d) Se representarmos por P o valor a ser pago e x o número de passagens pagas, estabeleça a relação Matemática que modele essa situação.				
e) Baseado no conceito de função ("Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função: $f: A \rightarrow B$ é uma relação que associa cada elemento de A a um único elemento de B"), poderemos afirmar que P é função de x ? Reescreva a relação Matemática (em termos de função)				
f) Construa o gráfico Valor a ser pago em função do Número de passagens.				

Figura 17 – Bloco de ATIVIDADE I, sequência didática diagnóstica
Fonte: Elaborado pelo autor

A seleção buscou localizar um problema que pudesse potencializar discussões, porém sem perder o foco principal: a construção do conceito de função afim e das ideias inerentes a ele. O principal critério de seleção foi o caráter significativo das situações. O fato de questões de cunho social estarem vinculadas à construção de conceitos matemáticos apresenta-se para os alunos como algo atrativo, o que torna ainda mais curiosa a procura por argumentações em torno da questão inicial. A curiosidade serve de estímulo para a incorporação do processo e para a motivação do aluno.

Esperava-se que a familiarização das grandezas permitisse aos alunos identificarem, primeiramente, os processos de generalização e, conseqüentemente, a realização de conversões para o registro algébrico. Em seguida, a conversão para o registro gráfico.

Apesar de ser uma questão que possibilita resultados tanto certos, para alguns números de passagens ou valor a ser pago, como errados para outros, o que deveria prevalecer eram os *tratamentos* e *conversões* que esperávamos encontrar nas resoluções para a descoberta da solução e também para a verificação dos alunos que teriam sucesso ou não na mesma. Inicialmente, solicitamos aos alunos que completassem a tabela envolvendo duas grandezas, **P** e **x**. Uma única solução correta possível para todos os números de passagens é a que segue.

Número de Passagens (x)	1	2	5	8
Valor a ser pago em R\$ (P)	2,50	5,00	12,50	20,00

Essa situação-problema introduz a questão a ser discutida através da ligação/correspondência entre elementos pertencentes à situação analisada. Nesse caso, os elementos supostamente associados, ou relacionados, são o número de passagens e o valor a ser pago em reais. A questão inicial é formulada a partir do fato de que o valor a ser pago é função (nossa variável didática) do número de passagens.

Alguns resultados, causas e soluções esperadas:

1º - Não completou a tabela. O aluno não entendeu a pergunta ou não conseguiu fazer a associação entre as duas grandezas.

2º - Preenchimento parcialmente correto. Alguns procedimentos possíveis para a resolução:

a) somar o valor unitário tantas vezes quantas parece ser solicitado.

$$\begin{aligned} 2,5 + 2,5 &= 5,00 \\ 5,00 + 2,5 &= 7,50 \\ 7,50 + 2,5 &= 10,00 \\ 10,00 + 2,5 &= 12,5 \\ &\vdots \\ 17,50 + 2,5 &= 20,00 \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} 2,5 \times 2 &= 5,00 \\ 2,5 \times 3 &= 7,50 \\ 2,5 \times 5 &= 12,50 \\ 2,5 \times 8 &= 20,00 \end{aligned}$$

Esses métodos denunciariam a dificuldade de generalização dos estudantes ao resolverem tudo manualmente, sem criar uma função.

3º - Preenchimento totalmente correto. Alguns procedimentos possíveis para a resolução:

- a) Uso correto de calculadora ou celular, para os procedimentos citados anteriormente, estendendo até resultar no valor final de R\$ 57,50;
- b) Uso correto das operações envolvidas no item anterior, manualmente. (acreditamos que será o mais utilizado) e;
- c) Uso correto da conversão do registro do enunciado, na linguagem natural, para o algébrico: **P** em função de **x**. E, com tratamentos, preenchê-la totalmente.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2,5x \\ P(1) &= 2,5.1 = 2,50 \\ P(2) &= 2,5.2 = 5,00 \\ P(3) &= 2,5.3 = 7,50 \\ P(5) &= 2,5.5 = 12,50 \\ P(8) &= 2,5.8 = 20,00 \end{aligned} \qquad 57,50 = 2,5x \Rightarrow x = 23$$

Para o item (a), o erro esperado, para o número de passagem cujo valor é R\$ 57,50, seria o não preenchimento por desistência ao utilizar dos métodos

extensos citados acima. Acreditamos, na elaboração da atividade, que o contrário, acertar o número de passagens para o valor de R\$ 57,50 e errar para os demais não ocorreria.

Para o item (b), a identificação da constante do problema, por parte do aluno, forneceria subsídios para a compreensão das ideias ligadas à relação funcional analisada. Nesse contexto, identificar e diferenciar os elementos constantes e variáveis é fundamental às relações funcionais, ou seja, para o trato com o conceito de função, e, conseqüentemente, com o conceito de função afim. Esperava-se que os alunos reconhecessem, como constante, o valor de R\$ 2,50 a ser pago por cada passagem.

Para o item (c), o propósito era aferir o significado do termo variável dependente, fortemente ligado e presente no conceito de função. A problematização desses termos, variável e função, aliás, devem ser encaminhadas de modo que o aluno consiga visualizar a equivalência existente entre eles, bem como as suas dimensões nessa ou em outras situações.

Almejamos também que, nessa questão, fosse exigida do aluno uma análise mais aprofundada na sua resolução ao compará-la com a resposta dada na anterior. Esperava-se que os alunos reconhecessem como variável dependente o valor a ser pago (**P**).

Para o item (d), a atividade é introduzida a partir da questão do item (a) que já abordou a relação de dependência e identificou constante e variável, itens b e c, exigindo a tomada de posições por parte dos alunos. A discussão em torno do significado desses conceitos deve ser estabelecida a partir do entendimento dos alunos, especialmente no primeiro contato em sala de aula, para que o significado destes não se torne algo imposto sem uma prévia discussão. Esperava-se que os alunos reconhecessem as relações de proporcionalidade entre as grandezas dadas e modelassem corretamente a relação Matemática $P = 2,50.x$.

Para o item (e), com a conceituação da função no registro algébrico no item anterior, esperava-se que o aluno fizesse uma associação com a expressão algébrica e, com seu conhecimento sobre função, reescrevesse como uma relação funcional. A associação é pautada pela premissa de que, em cada quantidade de passagens, o valor a ser pago é único. Ou seja, o número de passagens é função do valor a ser pago. Entretanto, havia a expectativa de que boa parte dos estudantes não conseguisse reescrever a equação algébrica

anterior para a função linear $P = f(x) = 2,50x$.

Algumas resoluções erradas também eram esperadas, considerando acertos em termos de P no item anterior:

- a) Troca de “letras”, como, por exemplo, $f = 2,50.P$
- b) Confundir com conceitos de proporcionalidades diretas, por exemplo, $f(x) = P/x$
- c) Confundir com os conceitos de proporcionalidades inversas, por exemplo, $f(x) = P.x$

Tal dificuldade no estabelecimento da representação da função caracterizaria a existência de uma dissociação entre a variável P e sua representação como função de x .

Para o item (f), esperava-se que, pela escolha da ordem das questões, os transitassem pelo registro de entrada (tabela), passando por um registro intermediário (simbólico) até o registro de saída (gráfico), proporcionando tratamentos nas respectivas representações.

No processo de construção do gráfico, observar-se-iam as escolhas das escalas, sua importância, o cuidado durante as escolhas, as adaptações, bem como os efeitos destas escolhas na estruturação do gráfico. Esperavam-se erros no registro gráfico, pois os estudantes, ao lidarem com as grandezas discretas pontos de semi-retas, poderiam transformá-las indevidamente em segmentos de semi-retas.

Seriam, assim, soluções esperadas:

- A partir do registro da tabela – o aluno identifica as variáveis P e x e, em seguida, constrói o gráfico;
- A partir do registro algébrico – o aluno faz um tratamento numérico da função e, em seguida, constrói o gráfico.

Para ambos os casos, citados acima, erros nas construções das escalas foram considerados como “Acertos parciais”. Em relação às conversões citadas, acreditávamos que a opção de escolha do registro de tabela pelos alunos para a construção do gráfico seria a mais utilizada. Isto se deve, provavelmente, ao fato de a maioria das abordagens do *Caderno do Aluno* (São Paulo, 2008b) utilizar este registro.

5.2.2 Resultados esperados para a ATIVIDADE II

Para o bloco de ATIVIDADE II, o objetivo principal era o de identificar se o aluno transita dos registros gráfico $\leftrightarrow$ algébrico da função afim (Figura 18).

BLOCO ATIVIDADE II

1) Dentre as leis abaixo, identifique as que são denominadas de função afim:

☐ $y = 2(x + 8)$
☐ $y = x^2 + 8$
☐ $y = \frac{2 + x}{8}$

☐ $y = 3^x$
☐ $y = \frac{8}{x} + \frac{1}{2}$
☐ $y = \frac{x - 8}{3}$

2) Identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b) de cada uma das seguintes funções afins:

a) $y = 2x - 5$

$\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

c) $y = \frac{-x + 1}{2}$

$\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

b) $y = 2x$

$\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

d) $y = \frac{-x}{8}$

$\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

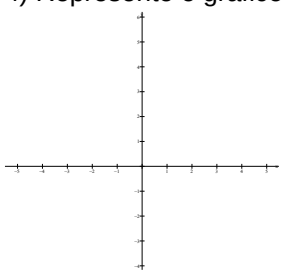
3) Associe as funções abaixo às suas respectivas classificações:

(a) $y = 3x + 2$
☐ constante

(b) $y = 1 - 2x$
☐ crescente

(c) $y = 2$
☐ decrescente

4) Represente o gráfico da função $f(x) = 2x - 4$.



5) Escreva a função $f(x) = ax + b$ cujo gráfico, num sistema cartesiano ortogonal, é dado por:

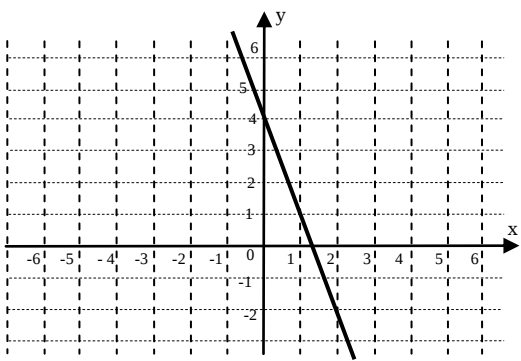


Figura 18 – Bloco de ATIVIDADE II, sequência didática diagnóstica
Fonte: Elaborado pelo autor

Para o item 1, algumas propostas podem ser classificadas como funções afins, como a que segue.

$$\triangleright y = 2(x + 8)$$

A identificação ($a = 2$ e $b = 16$) seria imediata caso o aluno saiba aplicar a propriedade distributiva, fazendo um tratamento.

$$y = 2 \cdot x + 2 \cdot 8 \Rightarrow y = 2x + 16$$

Consideramos, também, que tanto a escolha dessa alternativa como a comparação poderá ser mental, pois para esse nível escolar acreditamos que os alunos são capazes de abstrair.

$$\triangleright y = \frac{2+x}{8} e \frac{x-8}{3}$$

A identificação, mental ou com registros, pelo aluno passa por um tratamento para comparar a proposta anterior com o registro algébrico $f(x) = ax + b$. Para resolução, exige-se do aprendiz, no segundo membro da equação, conhecimento das operações fundamentais com frações. Assim, temos:

$$y = \frac{2+x}{8} \Rightarrow y = \frac{2}{8} + \frac{x}{8} \Rightarrow y = \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \text{ e } y = \frac{x-8}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

Utilizando o registro algébrico na comparação dos elementos, temos, respectivamente:

$$y = f(x); \frac{1}{8}x = ax \text{ e } \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = b$$

Para as demais alternativas, que não podem ser denominadas de funções afins, entendemos que a não escolha dessas equações pelo aluno seria imediata, por compará-las com o registro formal da função afim.

Dentre os erros esperados, podemos citar:

- Não entender a questão;
- Não lembrar e/ou não saber das propriedades necessárias para fazer o tratamento e compará-las com o registro algébrico formal $f(x) = ax + b$;
- Recordar apenas algumas das propriedades, o que levaria a acertos parciais nas alternativas.

Para o item (2), solicitamos que identificassem os coeficientes angular e linear das funções afins representadas no registro algébrico. Esta caracterização possuía o objetivo de verificar junto aos alunos possíveis dificuldades em distinguir o coeficiente da variável independente x . Nessa ordem de ideias, poderíamos comparar e construir conexões entre os conhecimentos abordados nesta e nas demais atividades, como a seguinte, que aborda o crescimento e decrescimento de uma função afim.

Para esta questão, elegemos os coeficientes angular (a) e linear (b) da função $f(x) = ax + b$ como as variáveis didáticas, potencializando a caracterização da variável independente envolvida na relação funcional.

Temos as seguintes soluções:

$$\mathbf{a) } y = 2x - 5 \quad \begin{cases} \mathbf{a} = 2 \\ \mathbf{b} = -5 \end{cases}$$

A identificação é direta, basta uma simples comparação com o registro simbólico da função afim.

Esperávamos que uma das causas para os possíveis erros cometidos pelos aprendizes, neste item e nos demais, estivesse relacionado com as dúvidas em distinguir o coeficiente a da variável independente x .

Consideramos também, outra causa: a inversão dos valores dos coeficientes por confusão de conceitos.

$$\mathbf{b) } y = 2x \quad \begin{cases} \mathbf{a} = 2 \\ \mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

A identificação aqui não é direta: necessita do conceito da função linear como caso particular para a comparação com o registro simbólico da função afim.

Análoga ao definido anteriormente, esta questão apenas adicionou um caso particular da função $f(x) = ax + b$, quando $b = 0$. A resposta, em branco, para o parâmetro b , era esperada.

$$\mathbf{c) } y = \frac{-x+1}{2} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \\ \mathbf{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Neste item, a identificação dos coeficientes exige um tratamento. Além

disso, o sinal negativo para o coeficiente angular poderia tornar esta questão mais difícil para maioria dos estudantes. Nesse sentido, esperávamos muitos resultados incorretos.

$$d) y = \frac{-x}{8} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 0 \end{cases}$$

Semelhante ao item (b), temos oculto o coeficiente linear e, ao acrescentar o valor do coeficiente angular na forma decimal, possíveis resultados errados poderiam ocorrer, dentre eles: $a = -1$, $a = 8$, $a = x$ ou $a = \frac{1}{8}$.

Para o item (3), o objetivo era o de verificar se o aluno conseguiria relacionar as funções, apresentadas no registro algébrico, com a inclinação das mesmas, expressa em linguagem corrente. Para a resolução, esperava-se que os alunos relacionassem o aspecto de crescimento ou decrescimento da função decrescente pelo sinal do coeficiente angular. A função constante, quando $a = 0$, foi inserida para diminuir o acerto pelo critério “chute” – ainda que este não seja um método infalível.

Nesse contexto, os erros podem ser caracterizados pela noção de função crescente e decrescente ainda não se encontrar bem formalizada. Assim, por exemplo, ao lembrar-se de seus respectivos gráficos, os alunos poderiam entrar em confronto com os seus conhecimentos a respeito das intersecções da reta com os eixos:

- a) Para $y = 3x + 2$, o aluno poderia dizer que é uma função decrescente, pois a intersecção da reta com o eixo horizontal x tinha como abscissa um número negativo, $x = -2/3$;
- b) Para $y = 1 - 2x$, o aluno poderia dizer que é uma função crescente, pois a intersecção da reta com o eixo horizontal tem como abscissa um número positivo, $x = 1/2$.

Para o item (4), esperamos constatar que todos os alunos conseguissem fazer uma conversão da representação enunciada nos registros de linguagem corrente e algébrica para o registro gráfico ao construir a reta. Para tal objetivo, consideramos como variável didática, a função afim $f(x) = 2x - 4$.

Para atingirmos esse objetivo, julgamos necessário oferecer uma função

evidenciando os coeficientes linear e angular, o que facilita o tratamento. Outra providência foi a de fornecer o plano cartesiano para auxiliar os estudantes no esboço.

Para o item (5), utilizamos o registro gráfico para representar a função afim. Considerada como variável didática o gráfico da função, o objetivo foi de verificar se o aluno realizaria a conversão para o registro algébrico.

Com a variável “visual” dada - intersecção com os eixos - esperava-se que a maioria dos alunos fizessem a conversão, pois bastaria uma “leitura” do coeficiente linear para, em seguida, substituir em uma das coordenadas cartesianas dos pontos pertencentes à reta, (0,4), (2,-2) ou (1,1) e o tratamento numérico da equação. Por exemplo:

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= ax + 4 \\ -2 &= a \cdot 2 + 4 \\ a &= -3 \\ \text{assim, } y &= -3x + 4 \end{aligned}$$

Esperava-se poucas resoluções utilizando uma leitura das coordenadas cartesianas dos pontos pertencentes à reta, (0,4), (2,-2) ou (1,1) e o tratamento numérico do sistema de equações pelo método da soma. Por exemplo:

$$\begin{cases} -2 = 2x + b \\ 1 = x + b \end{cases}$$

Consideramos como “acertos parciais” no caso de o aluno chegar até o registro do sistema de equação, cometendo erros no tratamento numérico, porém com substituição correta das coordenadas. Os erros esperados poderiam ser de uma leitura ou substituição invertida das coordenadas cartesianas, como por exemplo, (4,0) nas equações da forma $y=ax + b$.

5.2.3 Resultados esperados para a ATIVIDADE III

Para o bloco de ATIVIDADE III, tínhamos como objetivo principal o de

identificar se o aluno converteria do registro algébrico para o gráfico (Figura 19).

Essa atividade é uma representante, bastante típica, de uma situação na qual a ideia da proporcionalidade direta com o uso do valor do coeficiente linear é rompida, dando lugar à análise de comportamentos através da taxa de variação.

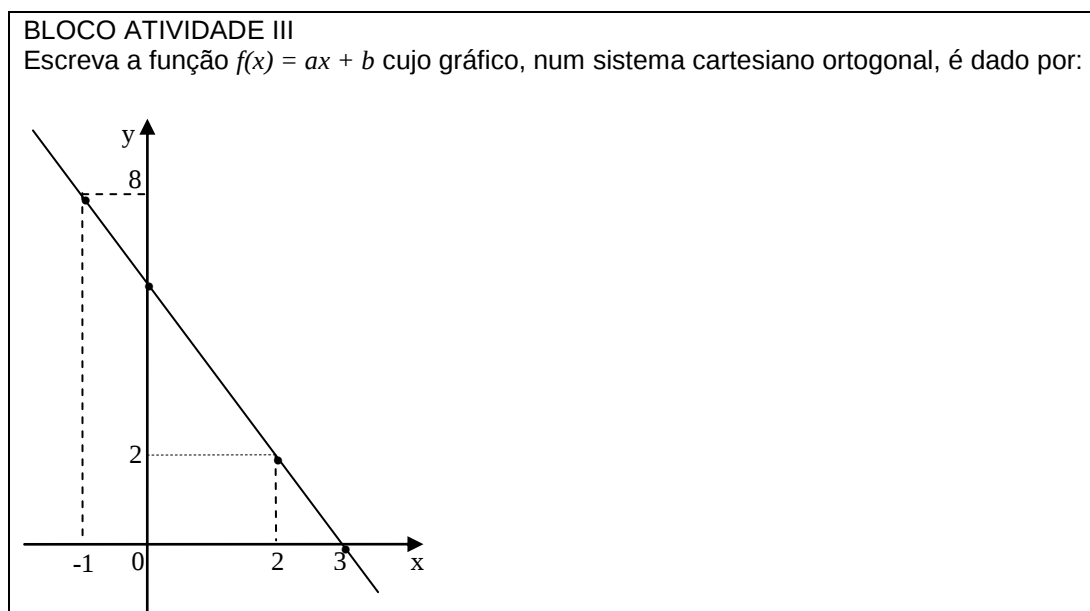


Figura 19 – Bloco de ATIVIDADE III, sequência didática diagnóstica
Fonte: Elaborado pelo autor

A primeira estratégia que o aluno lança mão para solucionar a questão é a proporcionalidade direta. Ou seja, para encaminhar as soluções referentes a esta atividade ele precisará buscar construções já realizadas nas atividades do *Caderno do Aluno* (SÃO PAULO, 2008b), já que este foi o primeiro contato que teve com uma situação, apresentada no registro gráfico, onde a proporcionalidade direta não se adequava. Assim, esperava-se que a maioria dos alunos fizesse a conversão.

Esta proposta difere da anterior no sentido de conversão, pois é proposta no registro algébrico para a conversão gráfica. Para Duval (1995 apud ALMOULOU, 2007), nos registros gráficos, a questão do tratamento se torna mais complexa na medida em os mesmos tratamentos não são algoritmizáveis.

Este é o tipo de conversão (Algébrica $\rightarrow$ Gráfica), de caráter não-congruente, enquadrando-se no tipo que Duval (1995 apud ALMOULOU, 2007) considera importante na sequência de atividades. As variáveis visuais pertinentes do registro gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) são difíceis de serem mobilizadas na coordenação desse registro de saída com os valores escalares da

expressão algébrica (coeficiente angular, linear e seus valores, respectivamente, negativo e positivo).

Para o autor, a falta de transparência do registro terminal (algébrico) dificulta a coordenação espontânea entre os dois registros, exigindo assim, um esforço cognitivo maior, que leva ao entendimento do conceito. Nesse sentido, esperávamos grandes dificuldades de resolução para a maioria dos alunos.

Conforme argumenta DUVAL (2005, *apud* LOPES JUNIOR, 2006, p. 17), “a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor que ou igual a 1)”.

Nesse sentido, esperávamos observar como tais variáveis didáticas relativas ao gráfico eram utilizadas pelos alunos durante a conversão algébrica.

Como possíveis resoluções, esperamos tratamentos numéricos para os sistemas lineares S_1 , S_2 e S_3 .

$$S_1 \begin{cases} 8 = -a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}, S_2 \begin{cases} 8 = -a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \text{ ou } S_3 \begin{cases} 2 = 2a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

Em relação à condição de variação de $f(x)$ para cada unidade a mais de x ser igual ao coeficiente angular, ou seja, **se $f(x) = ax + b$, então $f(x+1) - f(x) = a$** não eram esperadas argumentações.

5.2.4 Resultados esperados para a ATIVIDADE IV

Para a ATIVIDADE IV, tínhamos uma conversão, partindo de registros algébricos para gráficos, com auxílio de registro em linguagem natural, de caráter não-congruente (Figura 20). Os procedimentos esperados para essa atividade, ao coordenarem as variáveis escalares das equações (zero da função, coeficientes angular positivo e negativo) com as variáveis visuais pertinentes do registro gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) são:

- Para a 1ª afirmação – que o grupo reconhecesse o zero da função afim, $f(0) = 3$; a inclinação da reta e, a partir do tratamento do registro algébrico 3

$= -b/a$, com $a = 2$, determinasse o valor do coeficiente linear, para, desta forma, traçar a reta com interseção nos eixos cartesianos de par ordenado $(3, 0)$, no eixo das abscissas, e $(0, -6)$ para os eixos das ordenadas.

- Para a 2ª afirmação – que o grupo não reconhecesse a condição de função decrescente (para $x_2 > x_1$ temos $f(x_2) < f(x_1)$) imediatamente. Contudo, poderiam reconhecer a inclinação da reta, os valores dos coeficientes, com tratamento algébrico e numérico da inequação, de forma a traçar a reta com interseção nos eixos cartesianos de par ordenado $(-3, 0)$ para eixo das abscissas e $(0, -6)$ para os eixos das ordenadas.
- Para a 3ª afirmação – que o grupo não reconhecesse a condição de função linear imediatamente.

BLOCO ATIVIDADE IV

Leia atentamente as afirmações sobre variação de sinal da função afim e, a seguir, esboce sua representação gráfica.

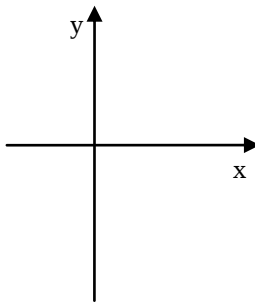
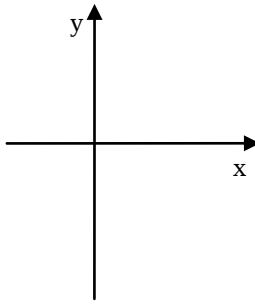
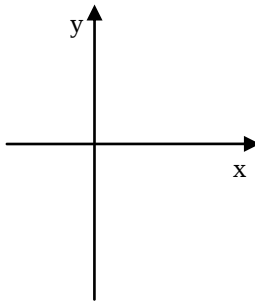
1ª afirmação A função se anula para $x = 3$; A função é negativa para todo x real, menores que 3 ($x < 3$); Essa função é do tipo $f(x) = ax + b$; Para valores de x maiores que a raiz $(-b/a)$ a função é positiva, ou seja, tem o mesmo sinal do coeficiente angular ($a = 2$).	
2ª afirmação Devemos ter $f(x_2) < f(x_1)$ com $x_2 > x_1$; Os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo ($f(x) < 0$) são as soluções da inequação $-2x - 6 < 0$.	
3ª afirmação Temos $f(0)=0$; A função é positiva para todo x real, maiores que 0 ($x > 0$); As coordenadas do ponto $A(2,4)$ pertencem ao gráfico da função.	

Figura 20 – Bloco de ATIVIDADE IV, sequência didática diagnóstica

Fonte: Elaborado pelo autor

Aqui, com relação aos resultados, esperava-se que todos os alunos esboçassem corretamente o gráfico da primeira afirmação. Para as demais afirmações, esperava-se que a minoria respondesse corretamente.

5.3 Aplicação da sequência didática diagnóstica

Nesse momento, descreveremos o processo de aplicação dos quatro módulos de atividades que compõem a sequência didática diagnóstica. Para cada módulo de atividade foi programado um encontro, em horário de aula, realizados no período da tarde da escola mencionada anteriormente, totalizando quatro encontros. Somente o 3º encontro foi individual, os demais ocorreram em duplas, numeradas de 01 a 10.

Inicialmente, explicamos aos participantes que as atividades faziam parte de uma pesquisa de Mestrado do professor/pesquisador, que as mesmas não teriam caráter avaliativo e que haveria sigilo na identificação dos participantes. E mais: em todos os encontros, os estudantes receberiam as atividades fotocopiadas em papel A4, de maneira que pudessem anotar observações ou registrar os cálculos, pois o raciocínio utilizado nas resoluções era muito importante para a pesquisa.

Salientamos que como o aplicador é o próprio professor da disciplina de Matemática, optamos em não inserir nas questões as exigências dos registros, mas de fazê-lo verbalmente durante as sessões de aplicação. Explicamos ainda que durante a realização das atividades, o professor faria uso de anotações em papel e gravações de áudio durante as entrevistas, aleatoriamente, com o objetivo de aproveitar os comentários dos alunos participantes.

As entrevistas foram administradas informalmente e sem pressões, procurando sempre deixar os alunos responderem à vontade e falarem livremente dos seus pontos de vista.

Por outro lado, em todas as entrevistas o pesquisador fez indagações que exigissem alguma exploração de ideias por parte de seus ouvintes, pois conforme Bogdan e Biklen:

[...] uma estratégia chave para o entrevistador qualitativo no campo de trabalho consiste em evitar, tanto quanto possível, perguntas que possam ser respondidas “sim” e “não”. Os pormenores e detalhes particulares são revelados a partir de perguntas que exigem exploração (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p.136).

Ao conhecer, analisar e interpretar os pontos de vista dos alunos, estes nos fornecem informações que alimentam a ação pedagógica com novos conhecimentos em relação às lógicas e estratégias utilizadas pelos alunos em seu processo de apropriação do saber escolar. A seguir vamos detalhar de maneira individualizada cada um desses encontros.

5.3.1 Descrição dos encontros

As atividades aplicadas no **primeiro encontro** referem-se ao bloco ATIVIDADE I. Aplicamos as atividades no dia 08/07/2009, com duração de 1h40min, o que corresponde a duas horas/aula. Compareceram todos os 20 alunos.

Inicialmente, reforçamos a importância das anotações, pedindo para que os alunos não apagassem o desenvolvimento das questões, utilizando o verso da folha como rascunho caso fosse necessário. Em seguida, solicitamos que os próprios alunos escolhessem as duplas e organizassem, em carteiras separadas, para o início da aplicação. Foi entregue junto às folhas da atividade uma régua graduada para a construção ou esboço do gráfico.

A atividade transcorreu satisfatoriamente, apesar de certa insistência dos alunos em tirar dúvidas com perguntas ao professor/aplicador que, prontamente, esclareceu não poder responder naquele momento. Também houve uma ansiedade, por parte de alguns integrantes das duplas, em querer ser entrevistado. Devido à curiosidade dos alunos fizemos, durante as aulas, uma reflexão desta atividade destacando a importância do registro algébrico nas resoluções.

As atividades aplicadas no **segundo encontro** referem-se ao BLOCO ATIVIDADE II. Aplicamos atividades no dia 10/07/2009, com duração de 1h40min que corresponde a duas horas/aula, com o mesmo número de alunos.

Novamente reforçamos a importância dos registros das anotações, para que não apagassem o desenvolvimento das questões. Em seguida solicitamos que os alunos mantivessem as mesmas duplas do primeiro encontro para o início do teste.

A atividade transcorreu satisfatoriamente e os alunos, mais adaptados que no primeiro encontro, não fizeram perguntas ao professor/aplicador. No decorrer do teste, houve a mediação do aplicador, com referência a primeira questão, pois várias duplas não entenderam a pergunta. Após breve explicação, relativa apenas ao enunciado, todas as dúvidas foram sanadas. Ao terminarem as atividades, o aplicador fez comentários a respeito da próxima atividade, que seria aplicada individualmente.

A atividade aplicada no **terceiro encontro** refere-se ao BLOCO ATIVIDADE III. Aplicamos a atividade no dia 24/07/2009, com duração de 50 minutos, o que corresponde a uma hora/aula. Nesta atividade, compareceram 17 alunos. Reforçamos as orientações sobre a importância dos registros dos cálculos, deixando espaço em branco suficiente após cada questão.

Esta sessão foi a que mais exigiu do aplicador, no sentido de conseguir individualidade nas resoluções. O hábito de consultar os demais colegas é muito comum, mesmo em atividades individuais nesta sala.

A atividade aplicada no **quarto encontro** refere-se ao BLOCO ATIVIDADE IV. A aplicação decorreu logo após a abordagem do tema estudo do sinal de uma função afim. Aplicamos as atividades em uma hora/aula no dia 19/08/2009, com o comparecimento dos 20 alunos. Ao terminarem as atividades, o aplicador observou que o tempo de resolução, cerca de 30 minutos, foi o menor de todos os encontros.

Cabe ressaltar que, após cada encontro, o professor/pesquisador fez reflexões com os alunos em sala de aula, de modo a potencializar o aprendizado que ia sendo construído. Assim, por exemplo, na primeira atividade, reflexões destacando as produções das duplas e a importância da expressão algébrica para tratar de regularidades das grandezas existentes na tabela foram feitas.

5.4 Análises *a posteriori* e validação

A análise *a posteriori* dos resultados é indicada aqui a partir de cada questão, destacando as dificuldades encontradas. Nas análises dos protocolos produzidos pelos alunos, elencamos em categorias de erros e acertos, que emergiram da pré-análise e da exploração dos resultados das atividades. Para a organização dos dados colhidos em nossa pesquisa, nos inspiramos no Método de Análise de Conteúdo de BARDIN (1998). Entendemos semelhante recurso como um conjunto de técnicas de análise que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens.

Para a organização das produções apresentadas nos encontros iremos considerar as seguintes categorias:

- Acertos parciais – preenchimento incompleto da tabela ou com alguns valores errados, erros nas escalas dos gráficos e erros nos tratamentos numéricos;
- Acertos totais – resolução acertada de todas as questões propostas em cada atividade, com registros (no papel ou pela entrevista);
- Em branco – não apresentar qualquer resolução em todas as questões em cada atividade (no papel ou na entrevista); e
- Erros – apresentar registros que não correspondem às soluções possíveis.

5.4.1 Análise da Atividade I

Os resultados apurados em cada questão foram organizados em quadros resumos, com suas respectivas categorias, como demonstrado no Quadro 2.

De acordo com o que a atividade solicitava, os alunos foram convidados a preencher a tabela, tendo implícita uma função linear. Em seguida, a responder as demais questões, que tratavam das variáveis do problema, do conceito de função e da conversão para o registro gráfico.

Total dos resultados apurados, por duplas, das categorias da ATIVIDADE I							
Categorias	Questão/itens						
	(1)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Acertos totais	10	05	04	02	0	0	08
Acertos parciais	0	0	05	08	0	01	02
Em branco	0	0	0	0	0	02	0
Erros	0	05	01	0	10	07	0

Quadro 2 - Distribuição do resultado das categorias apuradas na ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

Para o item (1) todos os participantes preencheram corretamente a tabela, conforme previsto em nossas análises *a priori*. Em relação aos registros, confirmaram o uso do procedimento de repetir a soma do valor unitário (2,50) para todos os valores da variável x (Número de Passagens). Como no enunciado não se exigia o preenchimento da tabela pelo tratamento da função linear, não foi possível constatar dificuldades de generalização.

5.4.1.1 Item a

Nesse item, dos dez alunos que não responderam adequadamente ao que foi solicitado, quatro simplesmente reproduziram a função no registro algébrico, o que foi solicitado no item (d), de forma que o desenvolvimento obtido não guardou qualquer relação com o questionamento feito (Figura 21).

$$\begin{array}{l}
 P = 1x + 3 \\
 P = 1.1^2 + 3 = 5 \\
 P = 1.2^2 + 3 = 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 P = 1.1 - 1 + 3 = -5 \\
 P = 1.1 - 2 + 3 = -7 \\
 P = 1.10^2 + 3 = 3
 \end{array}$$

Figura 21 - Protocolo de Erro do item "a", ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

Em termos didáticos, pode ser constatado que os alunos não souberam realizar a conversão do registro em forma de tabela (numérico) para o registro algébrico funcional, de forma que fosse possível, em um momento seguinte, substituir os valores das incógnitas pelos dados do problema – ou seja, não puderam utilizar o tratamento no contexto do registro algébrico, até porque não conseguiram obtê-lo.

Segundo Almouloud (2007), para Brousseau “o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso (...), mas o efeito de um conhecimento anterior que, por um tempo, era interessante e conduzia ao sucesso, mas agora se mostra falso, ou simplesmente inadaptável” (1983, *apud* ALMOULOU, 2007, p. 132).

De acordo com Pinto (2000) muitos alunos, ao resolverem problemas, buscam estabelecer conexões entre conceitos aprendidos ou estratégias utilizadas. Contudo, alguns deles acabam por estabelecer falsas generalizações ou criar regras que não são verdadeiras:

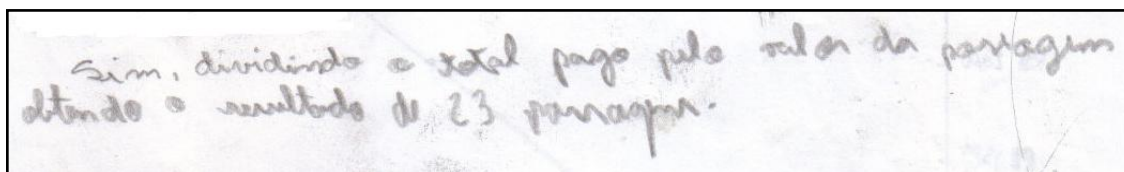
[...] Diante de situações conflitivas, elas [as crianças] “inventam” regras para completar as tarefas, regras estas que acabam incorporando a seus esquemas. De simples erros “construtivos”, essas regras transformam-se em “erros sistemáticos”, em razão das formas indevidas de apropriação de alguns conceitos básicos. (PINTO, 2000, p. 117).

Entre os que acertaram, também não houve a conversão e posterior tratamento do registro algébrico. Pelas entrevistas obtidas, percebeu-se que os estudantes utilizaram o método de “tentativa e erro”. É o caso da dupla de Nº 02:

Entrevistador: *Como vocês chegaram a esse resultado?*

Dupla 02: *Professor, a partir do valor de vinte reais nós fomos somando dois reais e cinquenta centavos, até dar o valor de R\$57,50. Aí é só contar quantas vezes fizemos a soma, que foi de 15 vezes. Aí é só somar com as 8 passagens, totalizando 23.*

Assim, nem mesmo os que acertaram produziram soluções que poderiam ser utilizadas na ocorrência de valores numéricos muito maiores, o que indica a dificuldade de realizar uma generalização algebricamente válida. Um dos estudantes, entretanto, conseguiu exprimir a resolução em termos da linguagem natural (Figura 22).



Sim, dividindo o total pago pela taxa da passagem obtendo o resultado de 23 passagens.

Figura 22 – Protocolo de Acerto do item “a”, ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.1.2 Item b

Neste item, verificamos na categoria “Acertos parciais” a ocorrência de respostas incompletas, ainda que denotassem uma percepção de compreensão da constante do problema por parte dos alunos. É o caso, por exemplo, de respostas como “– O valor” (Figura 23). Como há mais de um valor em jogo, semelhante afirmação deixa certa dúvida – há de se questionar: “– Qual valor?”.

Neste caso, o pesquisador resolveu entrevistar as duplas que realizaram registros escritos deste tipo e ficou claro que se referiam à resposta correta, ou seja, o valor da passagem (R\$ 2,50). O único erro real cometido ficou por conta da dupla de Nº 03 que indicou como constante o número de passagens no lugar do valor unitário, contrariando, apenas neste caso, nossa previsão em que os alunos reconheceriam como constante o valor de R\$ 2,50.

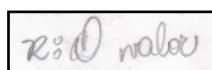


Figura 23 – Protocolo de Acerto parcial do item “b”, ATIVIDADE I

Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.1.3 Item c

Em relação ao item “c”, no contexto da questão proposta, somente quatro alunos contemplaram nossa análise *a priori*, que previa que alunos reconheceriam como variável dependente o valor a ser pago (P).

As demais soluções foram consideradas como “Acertos parciais”, pois as respostas ensejavam dupla interpretação. (Figura 24 e 25).

Considerando a variável “número de passagens”, a maioria das duplas respondeu como no exemplo abaixo:

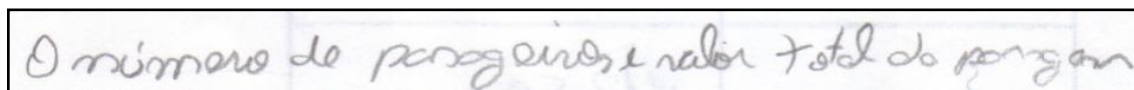


Figura 24 – Protocolo de Acerto parcial do item “c”, ATIVIDADE I

Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando a variável “valor pago”:

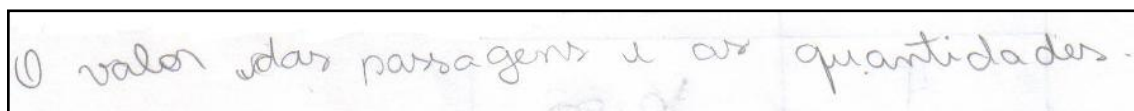


Figura 25 – Protocolo de Acerto parcial do item “c”, ATIVIDADE I

Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar que nos protocolos acima houve uma dissociação entre a variável como quantidade numérica e sua representação como função de x

5.4.1.4 Item d

Nesse item, todas as duplas erraram em relação ao que foi solicitado. Conforme análise *a priori*, os alunos modelariam corretamente a relação Matemática $P = 2,50.x$. Destas duplas, duas reproduziram uma relação Matemática no registro algébrico e, em seguida, recorreram à estratégia de testá-las para conseguir uma resposta numérica e assim confirmar se estão corretas. A dupla de Nº 04 obteve a relação “ $x.p = 5$ ” (ver Figura 25). A seguir, temos em entrevista as “regras de procedimento” adotadas pela dupla para a resolução:

Entrevistador (E): Como vocês chegaram a esse resultado de $x.p = 5$?

Dupla (D): se a gente pegar o número de passagens e multiplicar pelas passagens pagas dá o valor pago de cinco reais.

E: - Quando vocês falam do número de passagens, relacionaram com qual letra?

D: - Com o x .

E: - E com as passagens pagas, relacionaram com qual?

D: - Com o P , como pede aqui na pergunta.

E: - De onde vocês retiraram esse raciocínio?

D: - Da tabela professor.

E: - Como assim?

D: - Como ela se repete, pegamos os valores para cinco reais e relacionamos com duas passagens.

E: [apontando para o registro do meio da Figura 26] - Ah, então esse cálculo é para confirmar essa relação?

D: - Sim.

E: - Pode me explicar?

D: - Claro, como já disse duas passagens vezes o preço a pagar é igual a cinco reais, passando o dois para lá fica $P=2,50$ que é o preço para cada passagem, conforme a tabela.

E: - E a conta ao lado?

D: [Apontando para a relação $x.p = 5$] - Ué! É também para confirmar a fórmula!

E: - Tudo bem. Poderia explicar essa conta?

D: Posso. Olha só se $x.p = 5$ e p é igual a 2,50, então para cinco passagens, olha só $5x$ então temos que p é igual a 2,50 vezes 5, que dá o total de 12,50. De novo deu certo, conforme a tabela.

$$x.p = 5$$

$$2.p = 5,00$$

$$p = \frac{5,00}{2}$$

$$p = 2,50$$

$$p = 2,50 \cdot 5x$$

$$p = 12,50$$

Figura 26 – Protocolo de Erro da dupla de Nº 04, do item “d”, ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

Em termos didáticos, pode ser constatado que a dupla de Nº 04 não identificou adequadamente a variável dependente x com a variável dependente P , em consequência não associou a relação Matemática corretamente.

A dupla de Nº 03 obteve um registro algébrico associado ao conceito de proporcionalidade (Figura 27).

$$P = \frac{P}{X}$$

$$P = \frac{20,00}{8}$$

$$p = 2,50$$

Figura 27 – Protocolo de Erro da dupla de Nº 03, do item “d”, ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

Segue a entrevista com esta dupla:

E: - Como vocês chegaram a essa expressão?

D: - Nós lembramos das grandezas.

E: - O que mais?

D: - Que uma é proporcional a outra.

E: - Bem, então elas são grandezas inversamente proporcionais ou diretamente proporcionais?

D: - Diretamente.

E: - Pode me explicar por quê?

D: - Acho que sim, é porque quando aumenta uma aumenta a outra.

E: - Certo, agora pode me explicar o resto conta?

D: - É para testá-la, se está certa.

E: - Como assim?

D: - Bem, pela tabela 20 reais relaciona com 8 passagem, então fica 20 por 8 que dá 2,50. Fazendo isso para os outros também dá o mesmo valor de 2,50 que é a constante K do livro [referência ao caderno do aluno].

Em termos didáticos, pode ser constatado que a dupla de Nº 03 identificou a relação de interdependência entre duas grandezas diretamente proporcionais, em que a razão P/x é sempre constante. Porém não houve registro algébrico dessa constante K.

5.4.1.5 Item e

Em relação a esse item, a atividade solicitava que os alunos reescrevessem a relação Matemática solicitada no item “d”. Todos os alunos não registraram algebricamente de maneira correta, confirmando nossa análise *a priori*.

Isto foi causado provavelmente pela ausência de resultados satisfatórios do item anterior ou pela má formação do conceito matemático, ou ainda pelos dois. Assim, consideramos somente como “Acerto parcial” uma dupla que utilizou corretamente o registro natural (Figura 28).

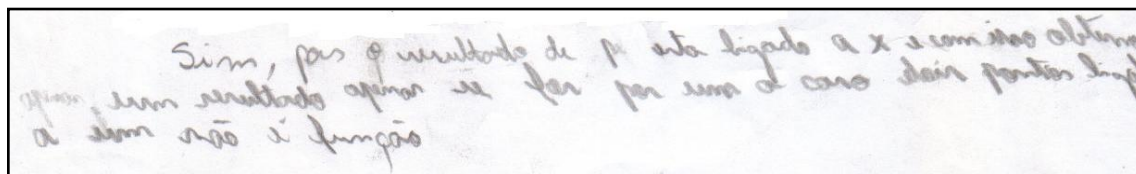


Figura 28 – Protocolo de Acerto parcial do item “e”, ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse contexto, uma argumentação bem sucedida de um registro discursivo poderá significar uma garantia de conversão para outros registros que, do ponto de vista cognitivo, é uma atividade fundamental para a compreensão do conceito de função afim.

De forma geral, em termos didáticos, como já era esperado, não foi possível encetar maiores discussões neste caso, dada a falta de resultados corretos.

5.4.1.6 Item f

De acordo com o que a atividade solicitava, os alunos foram convidados a construir o gráfico **P** em função de **x**. Dos 20 estudantes que realizaram esta questão, 16 registraram graficamente de maneira correta. Para os quatro alunos restantes, consideramos como “Acertos parciais” suas construções com erros na escala dos eixos, como previsto em nossa análise *a priori* (Figura 29).

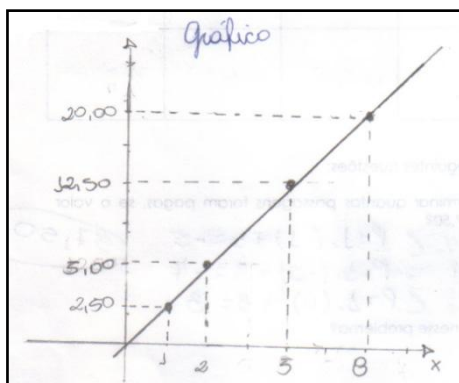


Figura 29 – Protocolo de Acerto parcial do item “f”, ATIVIDADE I
Fonte: Elaborado pelo autor

Em termos didáticos, a principal conclusão observada nas construções apresentadas pelos alunos nesse problema está ligada à facilidade dos alunos em fazerem conversão por uma via dupla: a que parte da tabela para a construção do gráfico e do registro gráfico para o registro numérico (tabela). Essa constatação se deu nas entrevistas, quando o pesquisador, ao direcionar perguntas atreladas às construções dos gráficos prontos e a sua correspondência com a tabela, recolheu dos alunos depoimentos que indicavam não existirem quaisquer dificuldades em preencher uma tabela a partir do gráfico ao indicarem as coordenadas cartesianas nos mesmos.

Em análise geral, de acordo com a base teórica de Duval (1995 *apud* Almouloud, 2007), com relação aos resultados obtidos nesta primeira atividade, na categoria avaliação de conhecimentos sobre o tema “função afim”, pudemos

apurar “Acertos parciais” de 55% no item “b” e 80% no item “c”, além de 100% de “Erros” no item “d” e de 75% de “Erros” no item “e”, o que nos permite concluir que os alunos têm dificuldade de conversão para o registro algébrico, partindo de qualquer dos outros disponíveis.

5.4.2 Análise da Atividade II

Os resultados apurados em cada questão foram organizados em quadros resumos, com suas respectivas categorias. De acordo com o que a atividade solicitava, os alunos foram convidados a identificar um registro algébrico de função afim, seus coeficientes e respectiva declividade no gráfico. A parte principal são as conversões de registro algébrico $\leftrightarrow$ gráfico.

5.4.2.1 1ª Questão

Nesta 1ª questão, os alunos foram convidados a identificar os registros algébricos da função afim, a partir de outros quaisquer. A distribuição das respostas foi feita conforme Quadro 3.

Nessa questão, nenhuma dupla identificou corretamente as funções 1, 3 e 6, que são funções afins, já que não fizeram uso de tratamentos em suas escolhas. Em entrevista com as duplas que mais acertaram (03, 04 e 06), as mesmas relataram conhecerem o “formato” da função afim, localizando-a na 4ª questão, analisada mais adiante, porém, ainda assim, mostraram dúvidas, pois nem todas as funções se “parecem” exatamente com esse formato.

Total dos resultados apurados, por dupla, das categorias da 1ª Questão										
Funções	Duplas de alunos									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1) $y = 2(x + 8)$	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C
2) $y = 3^x$	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C
3) $y = \frac{2+x}{8}$	E	E	C	C	C	C	C	C	C	E
4) $y = x^2 + 8$	C	C	E	C	E	E	E	E	E	E
5) $y = \frac{8}{x} + \frac{1}{2}$	E	E	C	E	E	C	E	E	E	E
6) $y = \frac{x-8}{3}$	E	E	C	C	C	C	C	E	E	E

Quadro 3 - Distribuição dos resultados apurados na 1ª Questão, ATIVIDADE II

Legenda: C = “Acertos totais”; E = “Erros”

Fonte: Elaborado pelo autor

Em termos didáticos, pode ser constatado que os alunos não souberam realizar o tratamento nos registros algébricos das funções (1, 3, 5 e 6), de forma que fosse possível, em um momento seguinte, compará-las com o registro algébrico de uma função afim $f(x)=ax+b$.

5.4.2.2 2ª questão

Nesta 2ª questão, os alunos foram convidados a identificar os coeficientes angular (**a**) e linear (**b**) dos registros algébricos da função afim. A distribuição das respostas foi categorizada conforme Quadro 4.

Nesta questão, nenhuma dupla identificou corretamente todos os coeficientes solicitados. Considerou-se, também, “Acertos parciais” a ocorrência de respostas incompletas conforme análise *a priori*. Neste caso analisamos, a seguir, individualmente, os erros cometidos pelas duplas conforme as funções/coeficientes.

Total dos resultados apurados, por dupla, das categorias da 2ª Questão											
Funções/Coefficientes		Duplas de alunos									
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
a) $y = 2x - 5$	(a)	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E
	(b)	C	C	C	E	E	C	C	C	E	C
b) $y = 2x$	(a)	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E
	(b)	E	E	E	E	E	C	C	E	E	E
c) $y = \frac{-x+1}{2}$	(a)	C	C	E	E	E	C	E	E	E	E
	(b)	C	C	C	E	E	C	E	E	E	E
d) $y = \frac{-x}{8}$	(a)	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E
	(b)	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E

Quadro 4 - Distribuição dos resultados apurados na 2ª Questão, ATIVIDADE II

Legenda: C = "Acertos totais"; E = "Erros"

Fonte: Elaborado pelo autor

A identificação $a = 2$ e $b = 16$ para a função $y = 2(x + 8)$ será imediata se o aluno souber aplicar a propriedade distributiva, fazendo um tratamento, e compará-lo com o registro algébrico.

Para a função $y = 2x - 5$ todas as quatro duplas que erraram na identificação do valor de **a** tiveram o mesmo tipo de engano, ou seja, os alunos associam juntos os valores do coeficiente com a incógnita **x** (Figura 29).

Para os erros referentes aos valores de **b**, três duplas fizeram da mesma maneira, qual seja omitir o sinal negativo (Figura 30).

Handwritten student work for item "a" showing two errors. The first error shows the function $y = 2x - 5$ with $a = 2x$ and $b = -5$. The second error shows the same function with $a = 2$ and $b = 5$.

Figura 30 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item "a", ATIVIDADE II

Fonte: Elaborado pelo autor

Para a função $y = 2x$, quatro duplas cometeram o mesmo erro do item anterior, na identificação do valor de **a**. Para os erros referentes aos valores de **b**, oito duplas cometeram o mesmo erro ao atribuírem o valor $b = 1$ (Figura 31).

Handwritten student work for item "b" showing the function $y = 2x$ with $a = 2$ and $b = 1$.

Figura 31 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item "b", ATIVIDADE II

Fonte: Elaborado pelo autor

Em entrevista com as duplas, observamos a necessidade dos alunos atribuírem valores numéricos não nulos às perguntas. Relataram que, pela ausência do valor de **b**, “deram” tal valor, pois comparando com a forma algébrica da 4ª questão, argumentaram que o mesmo não poderia ser zero.

Para a função $y = \frac{-x+1}{2}$, devido à forma do registro algébrico apresentado, obtivemos erros de identificação nos dois coeficientes. Com referência ao coeficiente **a**, temos, além dos erros citados no primeiro item (protocolo a), outros, devido à necessidade de um tratamento (protocolos b e c) no registro (Figura 32).

Figure 32 shows three student protocols for the function $y = \frac{-x+1}{2}$. Each protocol consists of the function followed by a system of coefficients $\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \end{cases}$.
 (a) $y = \frac{-x+1}{2}$ $\begin{cases} a = -x \\ b = 3.5 \end{cases}$
 (b) $y = \frac{-x+1}{2}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0.5 \end{cases}$
 (c) $y = \frac{-x+1}{2}$ $\begin{cases} a = -x+1 \\ b = 2 \end{cases}$

Figura 32 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item “c”, ATIVIDADE II
Fonte: Elaborado pelo autor

Para a função $y = \frac{-x}{8}$, provavelmente devido à forma do registro algébrico apresentado, obtivemos a maior quantidade de erros, no conjunto de identificação nos dois coeficientes apresentados. Com referência ao coeficiente **a**, temos além dos erros citados anteriormente (protocolo a), outros devido à incapacidade de efetuar corretamente um tratamento (protocolo b, c e d) e reconhecimento de uma função linear no registro algébrico. (Figura 33).

Figure 33 shows four student protocols for the function $y = \frac{-x}{8}$. Each protocol consists of the function followed by a system of coefficients $\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \end{cases}$.
 (a) $y = \frac{-x}{8}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \end{cases}$
 (b) $y = \frac{-x}{8}$ $\begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$
 (c) $y = \frac{-x}{8}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \end{cases}$
 (d) $y = \frac{-x}{8}$ $\begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$

Figura 33 – Protocolo de Erro da 2ª Questão do item “d”, ATIVIDADE II
Fonte: Elaborado pelo autor

Cabe ressaltar a grande quantidade de erros nos itens “b” e “d” pelo fato de apresentarmos funções lineares.

Com os resultados obtidos nessa questão, constatamos, mais uma vez, o obstáculo já identificado na anteriormente, a ausência de algum tipo de procedimento de validação, provavelmente em função da grande dificuldade dos alunos em aplicar conhecimentos básicos das propriedades de frações, bem

como reconhecer o coeficiente linear uma função do tipo $f(x) = ax$. Também, sinaliza para uma conclusão bastante importante, a de que o entendimento do conceito de função afim, por vezes, pode estar sendo comprometido devido a essa dificuldade.

5.4.2.3 3ª questão

A distribuição das respostas da 3ª questão foi organizada segundo o Quadro 5, abaixo:

Total dos resultados apurados, por dupla, das categorias da 3ª Questão										
Funções	Duplas de alunos									
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
(a) $y = 3x + 2$	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
(b) $y = 1 - 2x$	C	C	E	C	C	C	E	C	E	C
(c) $y = 2$	C	C	E	C	C	C	E	C	E	C

Quadro 5 - Distribuição dos resultados apurados na 3ª Questão, ATIVIDADE II

Legenda: C = “Acertos totais”; E = “Erros”

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta questão, os alunos foram convidados a relacionar os registros algébricos da função afim com suas respectivas inclinações, porém nenhuma dupla associou corretamente todas as funções com suas respectivas denominações de inclinação.

Considerou-se, também, “Acertos parciais” a ocorrência de respostas incompletas. Neste caso iremos analisar, a seguir, os erros cometidos pelas duplas conforme as funções dos itens (b) e (c) do quadro acima.

Para a função $y = 1 - 2x$, os erros se devem ao fato da apresentação em ordem invertida, primeiro o valor de $b > 0$ seguida do valor de $a < 0$, constatadas ao entrevistar as duplas. Relataram que não identificaram o sinal negativo do coeficiente angular, fazendo uso do “chute” como tínhamos previsto na análise *a priori*. Para a função $y = 2$ as duplas relataram que não entenderam o conceito

de função constante e, conseqüentemente, assinalaram por ser a única restante.

Cabe ressaltar que após a realização desta atividade, o pesquisador entrevistou, em outro momento, na sala de aula, todas as demais duplas no que se refere ao registro da função constante apresentada. Em seus relatos, os estudantes indicaram não entender o conceito.

Em termos didáticos, pode ser constatado que os alunos sabem associar, a partir de seu registro algébrico, as denominações da inclinação da função afim. Porém, não reconhecem uma função constante no mesmo registro.

5.4.2.4 4ª e 5ª questões

Na 4ª questão, os alunos foram convidados a fazer a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, ao construírem a reta. Em relação à 5ª questão, a conversão deveria ocorrer no sentido contrário.

Na 4ª questão, o nosso objetivo foi de apresentar a função afim de modo que o aluno pudesse fazer a conversão do registro algébrico para o gráfico. Assim, verificamos que a maioria dos alunos fez tal conversão. E todos eles utilizaram de um tratamento numérico da função, atribuindo dois valores para a variável independente x para determinar a variável dependente y .

O Quadro 6 mostra a distribuição do resultado das categorias apuradas nas respectivas questões.

Total dos resultados apurados, por dupla, das categorias da ATIVIDADE II		
Categorias	Questões	
	4	5
Acertos totais	07	01
Acertos parciais	01	01
Em branco	0	0
Erros	02	08

Quadro 6 – Distribuição dos resultados da 4ª e 5ª Questões, ATIVIDADE II

Fonte: Elaborado pelo autor

Consideramos dois “Acertos parciais”, o primeiro da dupla de Nº 09. Conforme análises das questões anteriores, constatamos que essa dupla não reconhece os valores dos coeficientes, confirmados na 2ª questão, e nem associa o sinal do coeficiente angular com a inclinação da reta que representa a função, na 3ª questão. Assim, um desenvolvimento de maneira correta no tratamento numérico, que não ocorreu, resultaria num sucesso na representação gráfica, sem necessariamente ter esses conhecimentos. Podemos configurar erros no procedimento de validação (Figura 34).

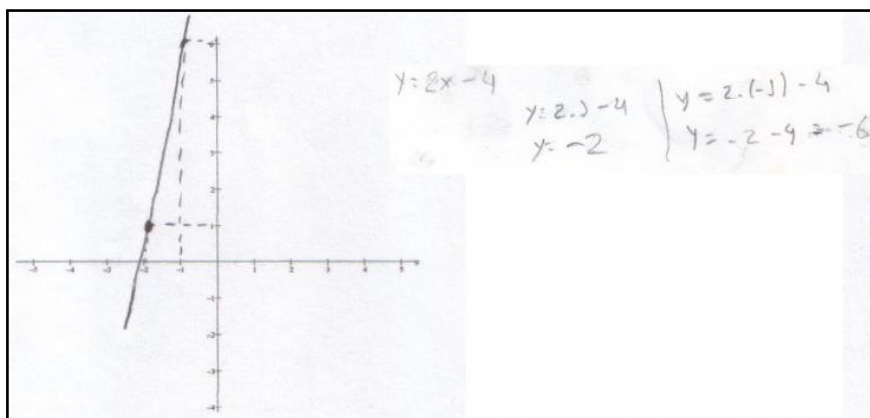


Figura 34 – Protocolo de Acerto parcial da dupla de Nº 09, 4ª questão, ATIVIDADE II
Fonte: Elaborado pelo autor

O segundo “Acertos parciais” foi atribuído a dupla de Nº 10 que, apesar de apresentar problemas de aprendizagem na identificação dos coeficientes, conforme análise da 2ª questão, reconhece a inclinação da reta pelo sinal do coeficiente.

Em entrevista, disseram: “- Acho que tem alguma errada na conta, no sinal, mas eu sei e eu também (interpelando o outro integrante) que a reta é crescente por causa do 2 na função”; assim tem essa inclinação (referindo-se ao gráfico) e não a que a conta mostra. O entrevistador continua: “- Então como vocês vão fazer para construir o gráfico?” Em resposta: “- Vamos inverter o sinal de um resultado e colocar até dar a inclinação” (Figura 35).

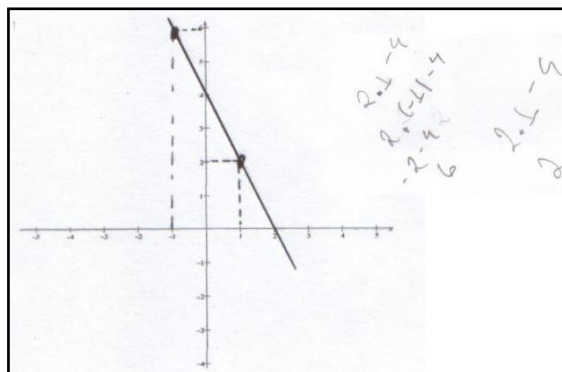


Figura 35 – Protocolo de Acerto parcial da dupla de Nº 10, 4ª questão, ATIVIDADE II
Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar na figura acima, mais uma vez, problemas no procedimento do tratamento numérico da função para a validação da atividade.

Para a dupla que errou, observamos terem apresentado os mesmos problemas de aprendizagem: associar o valor do coeficiente angular como um ponto pertencente ao eixo Ox (Figura 36). No caso, o coeficiente angular é igual a abscissa do ponto para $f(0)$. Isto já tinha sido previsto em nossa análise *a priori*. Confirmamos em entrevista tal procedimento.

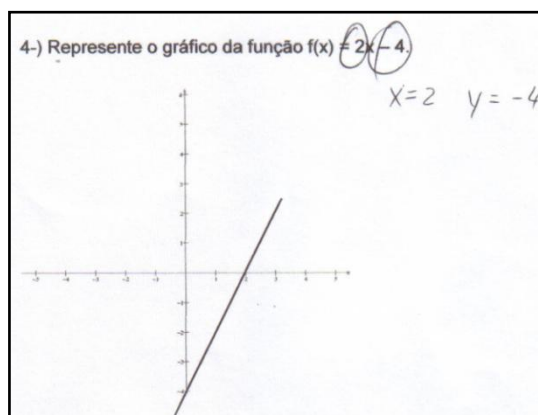


Figura 36 – Protocolo de Erro da 4ª questão, ATIVIDADE II
Fonte: Elaborado pelo autor

Em termos didáticos, pode ser constatado que os alunos sabem, a partir de um registro na forma algébrica e executando tratamentos numéricos na função, chegar à conversão no registro gráfico. Porém, como previsto em nossas análises, nenhuma dupla partiu do conceito do coeficiente linear passando por um tratamento numérico, até determinar um segundo ponto para traçar a reta.

Para a 5ª questão, o nosso objetivo foi o de apresentar a função afim na representação gráfica para que o aluno pudesse fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico. Das oito duplas que erraram, quatro também erraram a questão anterior. De maneira análoga, associaram o valor coeficiente angular com

o ponto pertencente ao eixo das abscissas (Figura 37).

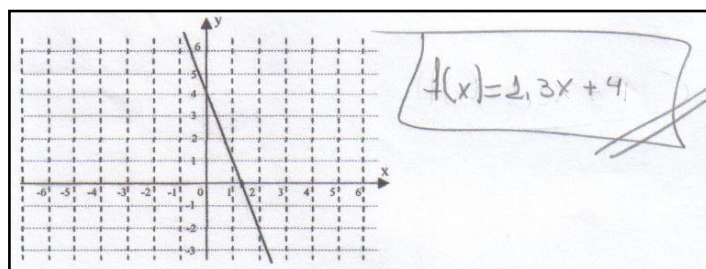


Figura 37 – Protocolo do exemplo de Erro da 5ª questão, ATIVIDADE II

Fonte: Elaborado pelo autor

Apesar da noção de sistema cartesiano ser bastante elementar, as informações importantes dos gráficos ainda não são significativas. Segundo Duval (2005, *apud* LOPES JUNIOR, 2006, p. 109), as variáveis visuais de um gráfico se apresentam como entraves no entendimento da representação gráfica, pois “a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a etc.)”

Em termos didáticos pode ser constatado que a maioria dos alunos não sabe, a partir de um registro na forma gráfica, executando tratamentos numéricos, chegar à conversão no registro de forma algébrica, contrariando nossa análise *a priori*.

Em análise aos resultados obtidos na segunda atividade, denominaremos esta categoria de Coeficientes angulares e lineares. Temos 100% dos alunos que não responderam corretamente todos os itens das questões 1, 2 e 3, e 80% de erros na quinta questão. Assim, consideramos que os alunos têm dificuldades de reconhecer os coeficientes angular e linear, a partir de registros algébricos, e também de fazer a conversão do registro gráfico, com o coeficiente linear, para o registro algébrico.

5.4.3 Análise da Atividade III

De acordo com o que a atividade solicitava, os alunos foram convidados a fazerem a conversão do registro gráfico para o algébrico. Com um diferencial,

ocultamos o valor do coeficiente linear na representação gráfica.

Lembramos que a atividade foi aplicada individualmente depois de novas abordagens de conversão utilizadas no *Caderno do Aluno* (2008b). Dos 17 alunos participantes nesta atividade, nenhum resolveu de maneira correta, contrariando totalmente nossa análise *a priori*. Dez alunos entregaram em branco. Para os demais consideramos como “Acertos parciais” os que tiveram dificuldades semelhantes ao exemplo da Figura 38 no tratamento numérico de sistemas de equações com duas incógnitas.

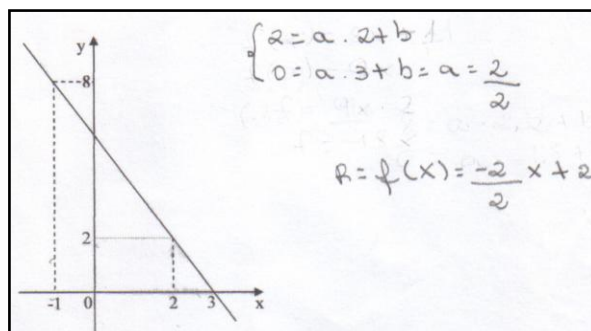


Figura 38 – Protocolo do exemplo de Erro, ATIVIDADE III
Fonte: Elaborado pelo autor

Consideramos que a limitação se fez presente não apenas no que concerne à interpretação e “leitura” dos dados, mas também a dificuldade de superar algumas formas de tratamentos numéricos, como a resolução de sistemas de equações com duas incógnitas. Essa dificuldade reforça a ideia de que os alunos ficam restritos a algumas formas de tratamentos intermediários, evidenciando o que para Duval (2005, *apud* LOPES JUNIOR, 2006, p. 115), “seria uma espécie de um “enclausuramento” dentro de um determinado registro.”

Em análise aos resultados obtidos na terceira atividade, denominaremos de categoria Conversão pela constatação das respostas dada pelos alunos. Com 100% de erros, os alunos têm dificuldade de fazer a conversão do registro gráfico, sem o coeficiente linear, para o registro algébrico.

5.4.4 Análise da Atividade IV

Nessa questão, apresentamos três afirmações diferentes utilizando os

registros na linguagem natural e simbólica com objetivo de promover conversão para o registro gráfico em cada uma. Verificamos que nenhuma dupla conseguiu de maneira satisfatória tal conversão. Acreditamos que a forma como foi apresentada as afirmações foi inusitada para os alunos, aumentando os erros na resolução.

Para a **1ª afirmação**, são apresentadas na Figura 39 as resoluções das duplas, exceto a de Nº 01, que entregou em branco. Podemos observar:

- Os grupos 02 e 03 não articularam que a função se anula para $x = 3$ com a variável intersecção com o eixo Ox ; e que a função negativa para todo x real menor que 3 ($x < 3$) com a variável inclinação ascendente;
- Todos os grupos não coordenaram que, quando x maior que a raiz ($-b/a$), a função é positiva e coeficiente angular ($a = 2$) com as variáveis inclinação da reta e valor do coeficiente linear.

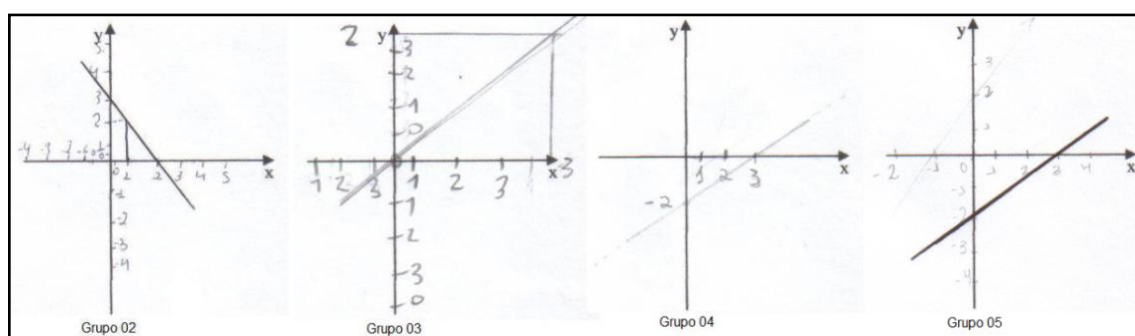


Figura 39 – Protocolo de respostas da **1ª afirmação**, ATIVIDADE IV

Fonte: Elaborado pelo autor

Para a **2ª afirmação**, são apresentadas as resoluções das duplas, exceto a de Nº 01 que entregou em branco (Figura 40).

Podemos observar:

- O grupo 01 não articulou que $f(x_2) < f(x_1)$ com $x_2 > x_1$ com a variável condição para que f seja decrescente;
- Todos os grupos não coordenaram que são soluções da inequação $-2x - 6 < 0$ com as variáveis: inclinação descendente (exceto os grupos 01 e 05), zero da função (exceto o grupo 02), coeficiente linear (exceto o grupo 05) e coeficiente angular.

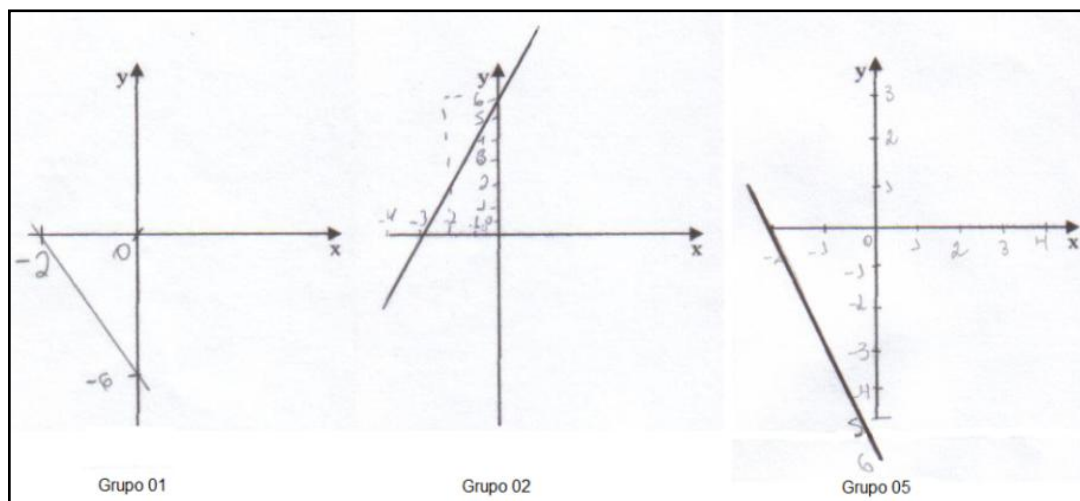


Figura 40– Protocolo de respostas da 2ª afirmação, ATIVIDADE IV
Fonte: Elaborado pelo autor

Para a **3ª afirmação**, são apresentadas, na Figura 41, as resoluções das duplas, exceto as de N^{os} 02 e 03, que entregaram em branco. Podemos observar:

- Todos os grupos não articularam espontaneamente que $f(0) = 0$ com as variáveis intersecção com os eixos e coeficiente linear;
- Todos os grupos (exceto o grupo 01) coordenaram as variáveis coordenadas do ponto A(2,4) com as variáveis abscissas e ordenadas do plano cartesiano.

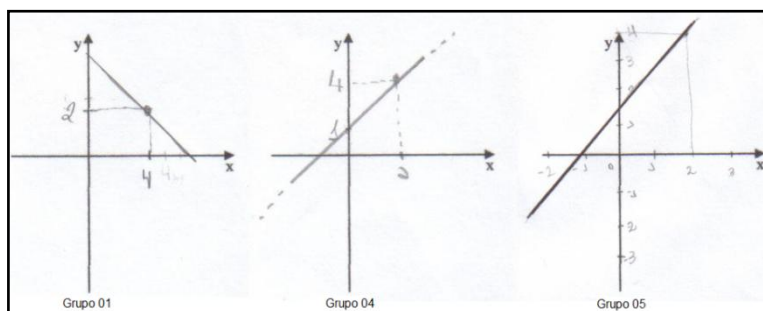


Figura 41 – Protocolo de respostas da 3ª afirmação, ATIVIDADE IV
Fonte: Elaborado pelo autor

Em análise dos resultados obtidos na quarta atividade, denominaremos de categoria Sinal da função a constatação das respostas dadas pelos alunos. Com 100% de erros, os alunos têm dificuldade de fazer a conversão para o registro gráfico a partir dos registros simbólicos e algébricos.

De posse dessas categorias de erros passaremos para a 2ª Fase dessa pesquisa.

6 INSTRUMENTO COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Neste capítulo, descreveremos os procedimentos para a elaboração do instrumento proposto referente à **FASE 2: estratégia pedagógica, com o uso de TICs, contemplando a análise dos erros da fase anterior**. Este instrumento denominado “sequência didática com o uso do *software* GeoGebra” foi elaborado a partir dos resultados das categorias de erros analisados na **FASE 1** desta pesquisa. Iniciamos com uma seção de introdução, para uma reflexão em relação à proposta curricular do Estado de São Paulo e, em seguida, passamos às atividades da sequência, com os respectivos roteiros de apresentação e layout das telas do GeoGebra para o desenvolvimento das mesmas.

6.1 Introdução

Historicamente, as elaborações de currículos oficiais tiveram como característica uma metodologia verticalizada, na qual as fases da elaboração foram norteadas por instâncias administrativas como órgãos governamentais e Instituições de Ensino Superior, entre outras. Discutir e aprofundar o entendimento sobre os saberes da disciplina escolar da Matemática e as práticas pedagógicas, no caso do uso da tecnologia, remete-nos ao estudo dos processos histórico e político de construção, e definição do que se deve e como ensinar as disciplinas escolares. Assim sendo, cabe agora uma pequena reflexão do exposto em nosso capítulo 3 ao realizamos uma síntese da evolução do Currículo no Estado de São Paulo.

A identidade do Ensino Médio nos documentos oficiais em nosso Estado esteve, ao longo de sua história, retratada por dois focos: um que privilegia a formação do aluno para o mercado de trabalho e outro voltado para a continuidade dos estudos. O problema da controversa relação educação-trabalho passa por um modelo de currículo, humanista por um lado e, para nós nos dias de hoje, a necessidade do uso da tecnologia.

Assim, considerar o uso da tecnologia de maneira mais clara como

ferramenta educativa remete à necessidade de repensar as fragilidades teóricas e conceituais em nossos documentos oficiais. Por um lado, as OCEM só mencionam os *softwares*¹³: a preocupação de utilizá-los cabe ao professor:

É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e idéias (*sic*) Matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. Nessa situação, o professor deve estar preparado para interessantes surpresas [...] (BRASIL, 2006, p.90-91).

Por outro, na PCESP, ao mencionar as razões em optar por apresentar a Matemática como área específica, mostra, de maneira sucinta, o uso da tecnologia:

E, ainda, que os computadores sejam hoje instrumentos absolutamente imprescindíveis para jornalistas e escritores em geral, e no terreno da Matemática que se abrem as mais naturais e promissoras possibilidades de assimilação dos inúmeros recursos que as tecnologias informáticas podem oferecer no terreno da Educação. (SÃO PAULO, 2008, p. 39).

Assim nessas condições, faz-se necessário refletir sobre a evolução do currículo em favor de uma formação humanista e tecnológica. Alia-se e reforça-se aqui a ideia de um currículo, na área de Matemática, que se dê mais ênfase no uso das TICs considerando a complexidade dos sujeitos envolvidos professor-aluno e as diferentes mídias.

Acreditamos como atestam os trabalhos de Borba e Penteado (2001), Valente (1997; 1999; 2002; 2003), entre outros, que o uso de *softwares* educativos no estudo de funções proporciona um ambiente de aprendizagem, que viabiliza o surgimento de certos significados para o conceito de função que seriam pouco prováveis de virem à tona no ambiente tradicional de sala de aula.

Em seu artigo *Diferentes usos do Computador na Educação*, Valente (1999, p. 13) argumenta que, quando o computador é usado como ferramenta educacional, este não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, “mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador.”

¹³ O documento menciona consultar uma coletânea desses programas no site Educação Matemática e tecnologia informática, em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>.

Como estamos interessados em reconstruir, a partir dos erros detectados na primeira fase desta investigação, os diferentes significados e conhecimentos atinentes à função afim, e como nos valem de interfaces computacionais para esta proposta, a afirmação do parágrafo anterior surge como uma característica importante para a segunda fase de nossa pesquisa.

Nesse contexto, baseamos nossa estratégia de construção na fundamentação teórica dos registros de representação semiótica, elaborando, assim, a sequência didática constante neste capítulo. Os exercícios que compõem a sequência didática com o uso do *software* GeoGebra sugerem a mobilização de pelo menos dois registros de representação e trazem a problemática das questões não congruentes, que foram poucas vezes abordadas no material didático do Estado, presente em nossas argumentações anteriores.

Cabe ressaltar que, devido a diversidade dos pesquisados, consideramos as características de uma situação-problema e as dificuldades de aprendizagem à luz da teoria de Perrenoud (1999) que nos alerta sobre nossas ações docentes, lembrando que nem todos os alunos estão predispostos a aprender, sendo nossa intervenção fundamental para envolvê-los no processo de ensino e aprendizagem através da avaliação formativa.

6.2 Sequência didática com o uso do GeoGebra

A sequência didática é composta de cinco (5) blocos de atividades¹⁴, denominadas de Atividades 1, 2, 3, 4 e 5, contendo um roteiro de questões em papel impresso que buscam, basicamente, colocar em evidência algumas representações e transformações entre as mesmas.

6.2.1 Atividade 1

Para os erros obtidos na categoria Avaliação de função, apresentada aos

¹⁴ Encontram-se no APÊNDICE C todas as questões e o formato original.

alunos na ATIVIDADE I, a proposta é de uma atividade contendo uma tabela dinâmica, que possibilita inserir vários registros numéricos, evidenciando o coeficiente de proporcionalidade da função linear e, conseqüentemente, o registro algébrico e gráfico. Numa etapa final, pode-se associar, na tela do computador, a representação gráfica da função com as variações numéricas da tabela, possibilitando a constatação de sua linearidade característica, bem como explorar a mesma como um caso da função afim. O objetivo é que o aluno, ao relacionar a tabela com a constante de proporcionalidade, consiga obter uma ideia do conceito de função e a relação (gráfica e algébrica) das funções linear e afim com a constante de proporcionalidade. A **Atividade 1** possibilita diferentes conversões e representações relacionadas a função afim (Figura 42).

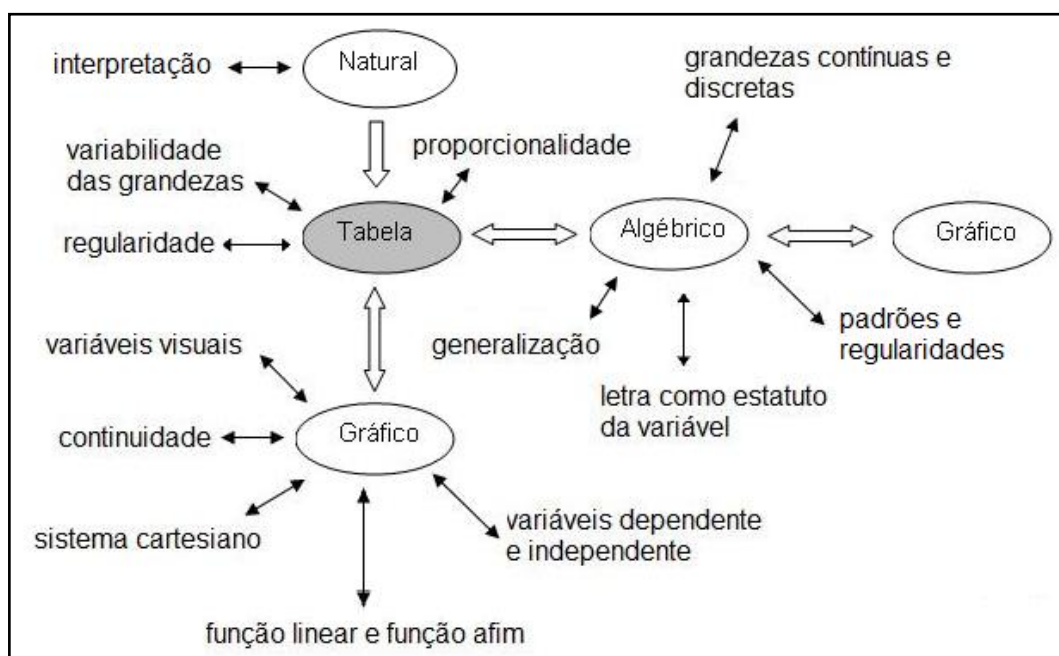


Figura 42 – Conversões e representações da **Atividade 1**

Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador para que o aluno execute as tarefas pedidas.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_1.ggb. O layout na tela, ao acionar os interruptores TABELA - 1 e TABELA - 2, APÊNDICE D, deve ter as seguintes características:

- a) Acionando o interruptor ☒ TABELA - 1 temos a apresentação na tela, de forma fixa, dos textos: TABELA – 1 (junto com a tabela), GRÁFICO e ÁLGEBRA $y = f(x) = kx$. O ponto (●) é móvel e representa todos os

pontos (x,y) da tabela. Desabilitando o interruptor, desaparecem os textos, a tabela e o ponto móvel;

b) Acionando o interruptor  **Coordenadas (x;y)** temos a apresentação das dos pontos (x,y) no plano cartesiano. Desabilitando o interruptor desaparecem os os pontos (x,y);

c) Acionando o interruptor  **Gráfico f(x)** tem-se a apresentação da reta.

2) Acionando o interruptor  **f(x) = ax + b** tem-se a apresentação dos textos: **ÁLGEBRA**, **Seletores** (coeficientes **a** e **b**) e **GRÁFICO** com a representação gráfica de uma função afim $f(x) = ax + b$ e um ponto móvel (Figura 43).

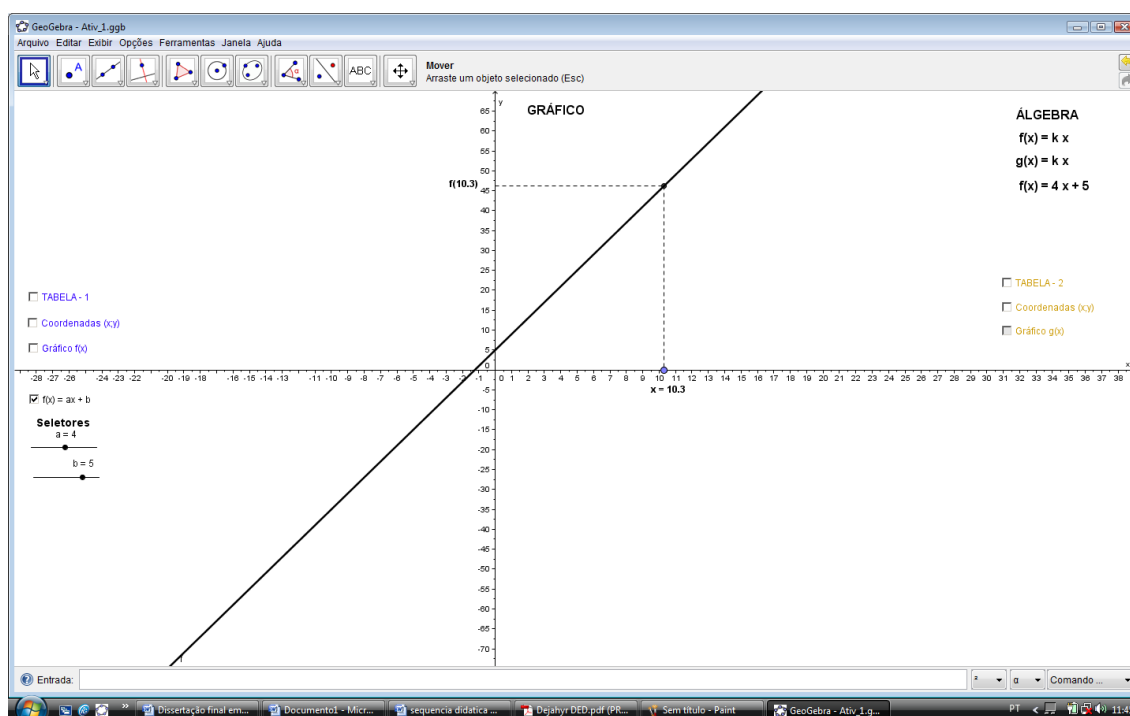


Figura 43 – Layout GeoGebra do interruptor $f(x) = ax + b$, **Atividade 1**
Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.2 Atividade 2

Os erros obtidos na categoria Coeficientes angulares e lineares,

apresentados pelos alunos na ATIVIDADE II, podem ser superados em uma atividade dinâmica que possibilita, no início, fazer várias vezes um registro algébrico, destacando os coeficientes. Em uma etapa seguinte, o estudante pode fornecer representações gráficas que evidenciam translações e rotações na tela, possibilitando a relação dos coeficientes da função afim e conversão do registro gráfico para o algébrico. Assim a **Atividade 2** foi dividida em duas partes: Atividade 2.1 e Atividade 2.2

Na **Atividade 2.1** pode-se identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear da função afim a partir de sua expressão algébrica. O objetivo é convencer o aluno de que um tratamento algébrico pode ser necessário para reconhecer os coeficientes, testando-os após tratamento.

Para a **Atividade 2.2** o objetivo é fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico da função afim, com o coeficiente linear.

As **Atividades 2.1** e **2.2** possibilitam diferentes conversões e representações relacionadas à função afim (Figura 44).

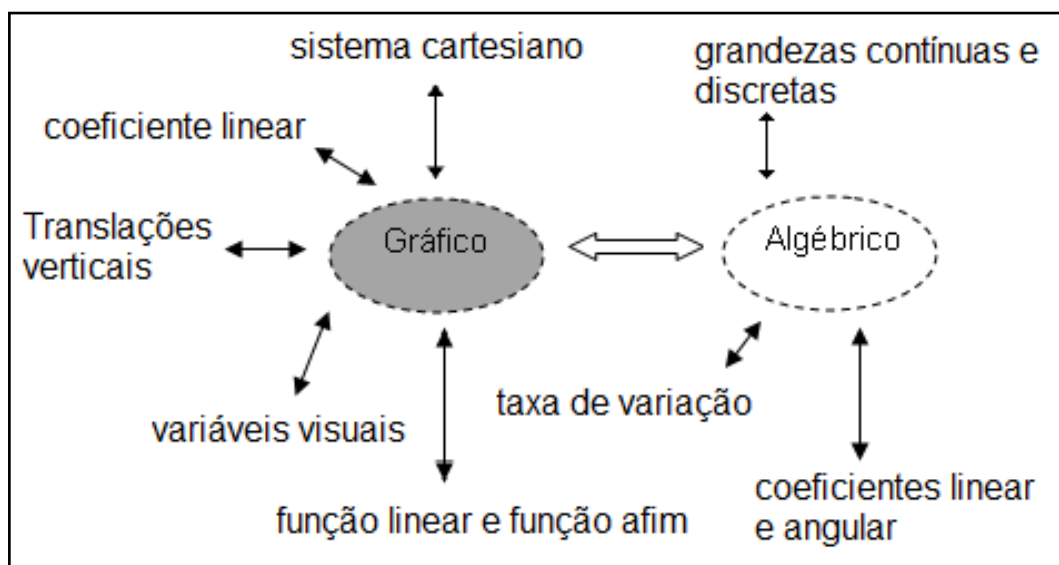


Figura 44 – Conversões e representações da **Atividade 2**.
Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador para que o aluno execute as tarefas pedidas na atividade 2.

- 1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_2.ggb. O layout na tela ao acionar os interruptores BLOCO - 1 e BLOCO- 2 pode ser visto no APÊNDICE E.
- 2) A Atividade 2.1 deve ter as seguintes características:
 - a) Com os interruptores desabilitados, escreva os títulos;

- b) Acionando o interruptor ☒ BLOCO - 1 temos a apresentação na tela da função algébrica (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a forma algébrica;
- c) Acionando o interruptor ☒ BLOCO - 2 temos a apresentação da função algébrica com tratamento (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem também a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a forma algébrica
- 3) Para a Atividade 2.2 temos o seguinte roteiro de layout e apresentação:
- a) No mesmo arquivo (Ativ_2.ggb), há o layout na tela ao acionar os interruptores f(x), Gráfico 1, Gráfico 2, Gráfico 3, Gráfico 4 e Gráfico 5, (Figura 45).

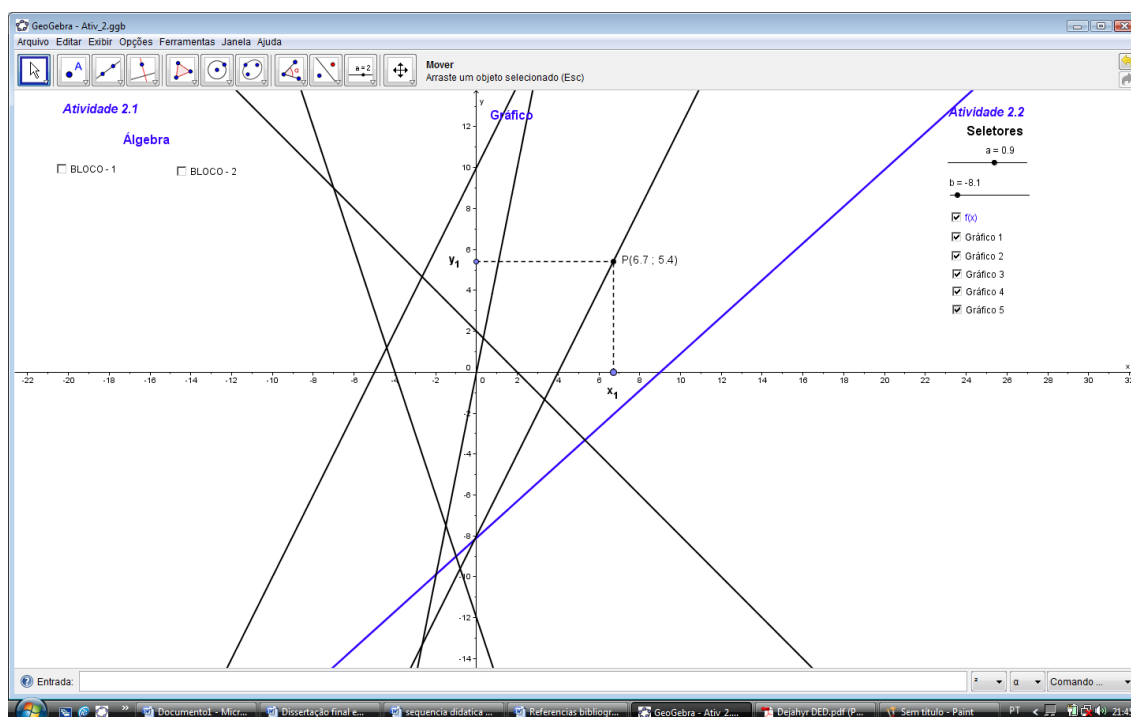


Figura 45 – Layout GeoGebra dos interruptores, **Atividade 2.2**
Fonte: Elaborado pelo autor

- b) Acionando o interruptor ☒ f(x), temos a apresentação na tela do gráfico de desta função (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;
- c) Acionando o interruptor ☒ Gráfico 1 temos a apresentação na tela do

gráfico da função $f(x) = 2x - 8$, com as coordenadas do ponto P móvel. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

- d) Acionando o interruptor ☒ Gráfico 2 temos a apresentação na tela o gráfico da função $f(x) = 2x + 10$. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;
- e) Acionando o interruptor ☒ Gráfico 3 temos a apresentação na tela o gráfico da função $f(x) = -3x + 10$. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;
- f) Acionando o interruptor ☐ Gráfico 4 temos a apresentação na tela o gráfico da função $f(x) = -x + 2$. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;
- g) Acionando o interruptor ☒ Gráfico 5 temos a apresentação na tela o gráfico da função $f(x) = 5x$. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

6.2.3 Atividade 3

Nos erros obtidos na categoria Conversão da ATIVIDADE III, o *software* GeoGebra apresenta interface dinâmica e interativa para a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, possibilitando ao aluno agir sobre o objeto matemático num contexto abstrato, mas tendo como suporte a representação gráfica na tela do computador.

Assim as dificuldades dos alunos em fazer a conversão, sem o coeficiente linear, podem ser trabalhadas em uma atividade dinâmica que contempla a taxa de variação da função afim. Com o recurso de trabalhar com as coordenadas cartesianas, pode-se corresponder visualmente o “triângulo dinâmico”, com os correspondentes catetos em diversas situações (Figura 46).

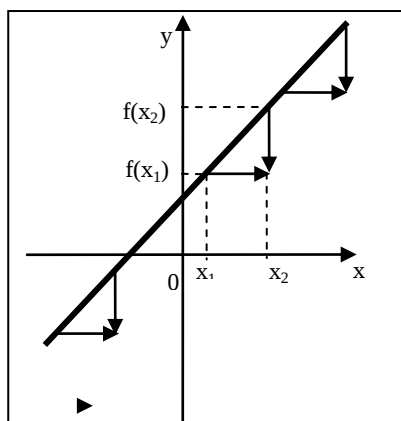


Figura 46 – Visualização do ‘triângulo dinâmico’ de proporcionalidade constante
Fonte: Elaborado pelo autor

Esta proposta tem por finalidade favorecer a concretização do conceito matemático de que, na função afim, a proporcionalidade $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ é sempre constante e igual ao coeficiente angular (a), restando somente um tratamento numérico simples para determinar o valor do coeficiente linear (b).

Do mesmo modo, podemos validar dinamicamente, na atividade anterior, a proporcionalidade $a = \frac{f(x) - b}{x}$, trabalhando visualmente com o coeficiente linear, de modo a converter para o registro algébrico.

Assim, na **Atividade 3**, o objetivo é o de escrever a expressão algébrica da função afim a partir do seu gráfico, o que pode possibilitar diferentes conversões e representações relacionadas a função afim (Figura 47).

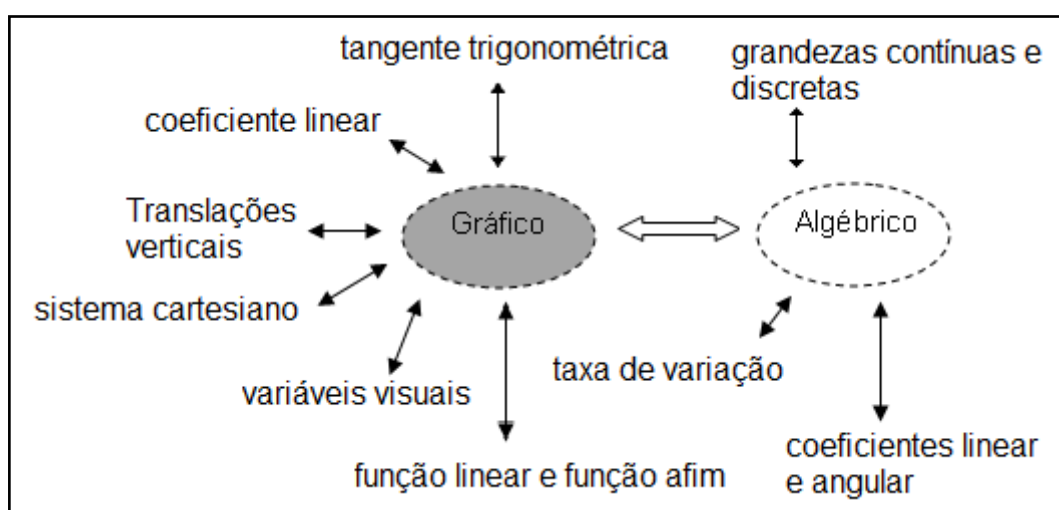


Figura 47 – Conversões e representações da **Atividade 3**
Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do

computador.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_3.ggb, com um layout na tela para acionar o interruptor da função $f(x)$ (APÊNDICE F). Deve ter as seguintes características:

- a) Acionando o interruptor  Gráfico $f(x)$ temos a apresentação na tela do gráfico da função algébrica (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a reta.
- b) Os comprimentos dos catetos são móveis pelos pontos x_1 e x_2 ;

2) Para o acionamento dos demais interruptores, temos as seguintes características:

- a) Acionando o interruptor  Gráfico 1 temos a apresentação na tela da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-4; 2)$ e $(-2; 6)$ ambos móveis pelas abscissas;
- b) Acionando o interruptor  Gráfico 2 temos a apresentação na tela da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(1; 8)$ e $(2; 6)$ fixos;
- c) Acionando o interruptor  Gráfico 3 temos a apresentação na tela da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-1; -5)$ e $(2; 7)$ fixos;

6.2.4 Atividade 4

Esta atividade, de característica dinâmica, tem o objetivo de intervir nos resultados da categoria Sinal da função e pode apresentar vantagens: a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. É a primazia da ação favorecendo o processo de investigação e abstração, com a consequente construção de conceitos e relações.

No caso da categoria em questão, podemos utilizar o dinamismo do

software para a representação e explorar, separadamente, os conceitos de zero da função, domínio e imagem e sinal da função, além de constatar visualmente quando a função é positiva ou negativa, através das representações gráficas.

Na **Atividade 4** o objetivo é o Estudo do sinal da função afim pela análise do gráfico e da expressão algébrica, possibilitando diferentes conversões e representações relacionadas a esse conceito (Figura 48).

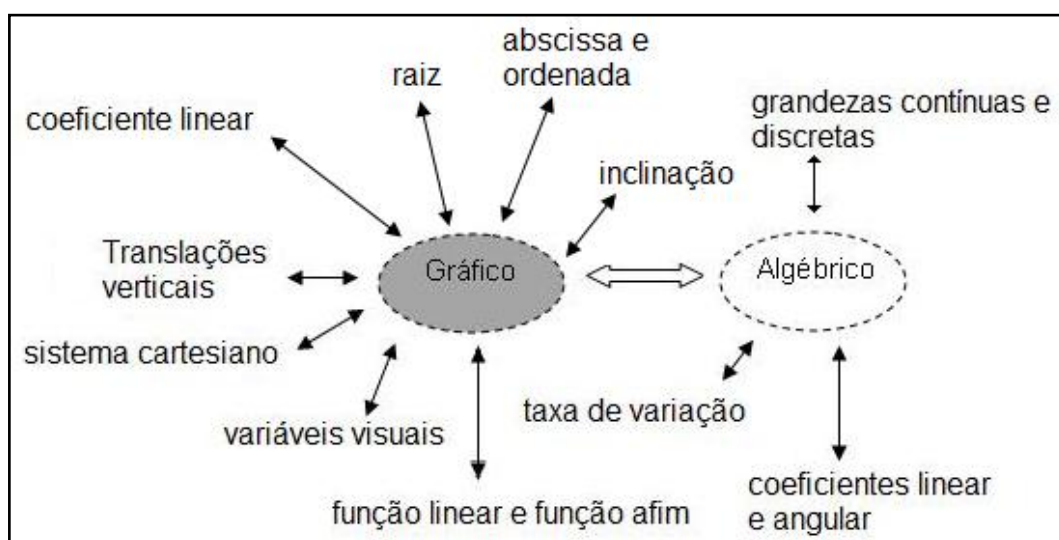


Figura 48 – Conversões e representações da **Atividade 4**
Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_4.ggb. O layout na tela terá os registros algébrico (com os **Seletores** dos respectivos coeficientes), gráfico representativo e o dispositivo prático (Figura 49).

2) Deve ter as seguintes características:

- a) Acionando o seletor “a” o dispositivo prático e a reta fazem as mesmas rotações. Aqui é interessante mudar de cor a ordenada quando a função passa de crescente para decrescente;
- b) Acionando o seletor “b” a raiz r sobre o eixo x desloca horizontalmente;
- c) O ponto sobre o eixo x é móvel e indica os valores das coordenadas.

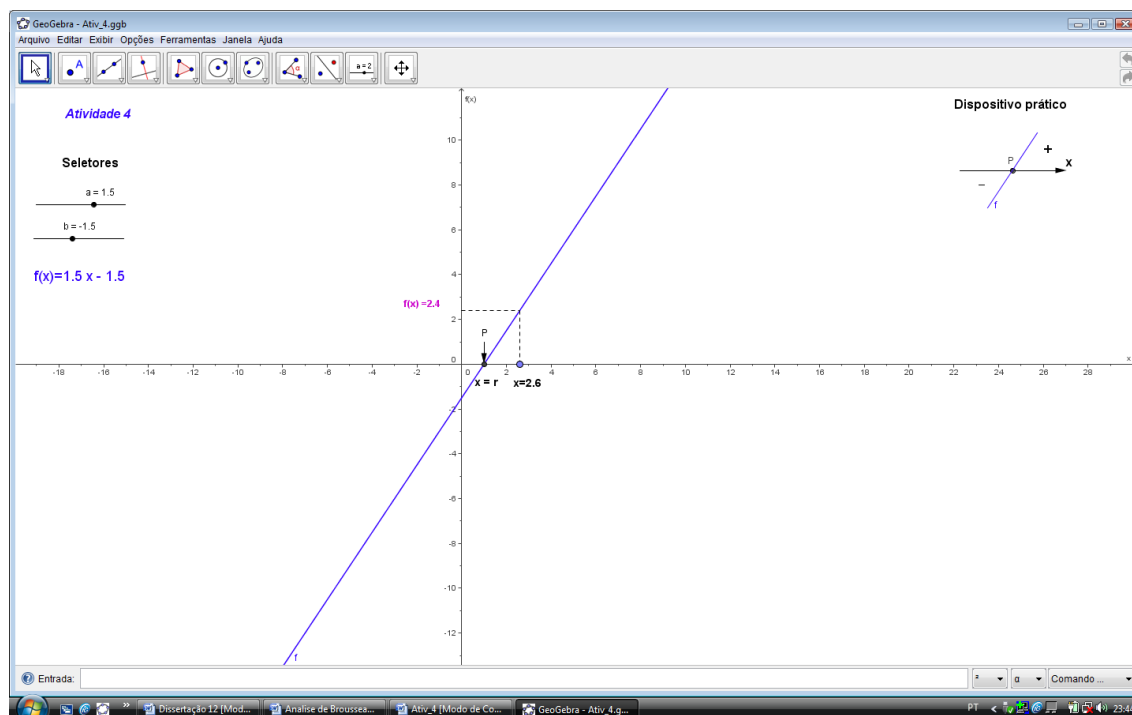


Figura 49 – Layout GeoGebra da **Atividade 4**
Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.5 Atividade 5

O objetivo da **Atividade 5** é a de relacionar área e o perímetro de um retângulo com a forma algébrica da função afim e, no caso da área, com a função linear de caráter não-congruente.

Com a conversão dos registros **Figural** ↔ **Algébrico** pode-se explorar representações relacionadas a esse conceito (Figura 50).

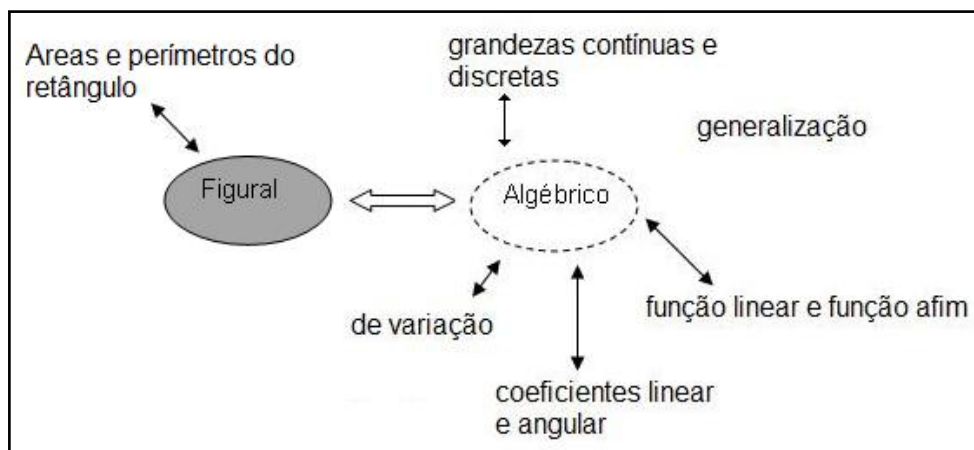


Figura 50 – Conversões e representações da **Atividade 5**
Fonte: Elaborado pelo autor

No GeoGebra, a **Atividade 5** é apresentada como arquivo Ativ_5.ggb. Possui seletores para apresentar e organizar cada item das atividades. Para o desenvolvimento das questões temos, conforme Figura 51, o seguinte layout:

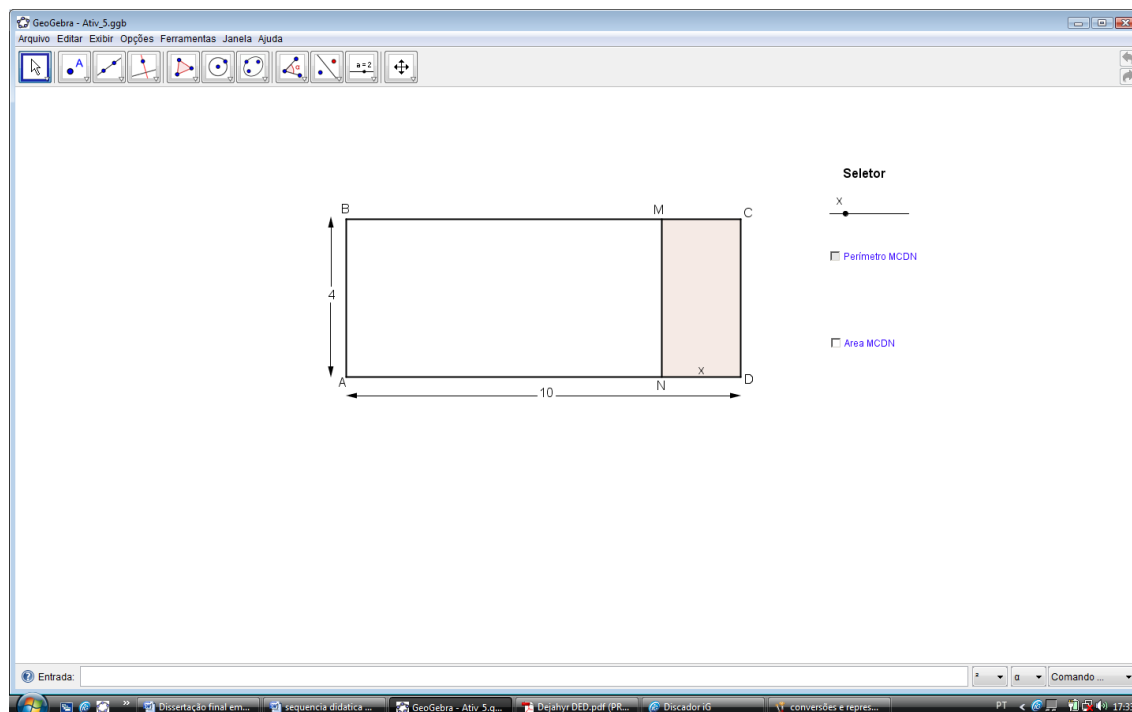


Figura 51 – Layout GeoGebra da **Atividade 5**
Fonte: Elaborado pelo autor

Deve ter as seguintes características:

- a) variando o seletor “x”, o comprimento do segmento ND varia de 0 até AD;
- b) acionando os seletores **Perímetro MCDN** e **Área MCDN**, são apresentados os valores do Perímetro e da área do retângulo MCDN.

Com a proposta dessas atividades espera-se uma superação dos erros cometidos pelos alunos, pois, segundo Oliveira (2009) essas mudanças nas tarefas “podem ocorrer, por consequência (*sic*), mudanças na maneira de pensar e resolver problemas, com as interfaces assumindo o papel de suportes do pensamento.”

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Definido nosso percurso, na introdução, trouxemos afirmações que apontavam o ensino do conceito de função afim nas escolas públicas como historicamente estático, podendo dificultar a construção do conhecimento. Com o uso das TICs, com orientação do professor, o processo pode passar a ter um caráter dinâmico, o que pode causar avanços nos processos cognitivos.

Dessa forma, o referencial teórico do psicólogo Raymond Duval adotado nesta pesquisa se mostrou pertinente na medida em que pudemos compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem. Inevitavelmente, as dificuldades relativas à aprendizagem do nosso objeto matemático levam o aluno a cometer erros quando da realização de atividades. Nesse sentido, consideramos os erros cometidos pelos alunos pesquisados para buscar responder nossa questão de pesquisa: “como o uso reconstrutivo do erro pode auxiliar na elaboração de uma sequência de ensino sobre funções de primeiro grau entre estudantes do Ensino Médio, a partir de uma estratégia pedagógica com uso do *software* GeoGebra?”. O mapeamento dos erros efetuado neste trabalho representa um quadro do qual poderá utilizar-se o professor do Ensino Médio para criticar sua prática, de modo a alinhar estratégias que o ajudem a desempenhar melhor suas funções enquanto orientador em processos de ensino-aprendizagem em Matemática.

No capítulo 1, apresentamos nossa proposta de pesquisa e os estudos iniciais que realizamos para escolha do nosso objeto matemático e definição do objetivo. Resumidamente, verificamos que as orientações didáticas, nos documentos oficiais, relativas ao ensino da função afim no EM devem ressaltar a questão da dependência de duas grandezas, sempre que possível de modo interdisciplinar. Também mencionam a importância de considerar os erros nas avaliações.

Para que a análise do erro se torne uma alternativa didática, fizemos uma breve explanação de estudo de pesquisas correlatas, que reforçam o uso dos erros cometidos como mecanismo de investigação. Assim definimos o objetivo da pesquisa, aplicar uma sequência didática diagnóstica para registrar e analisar os erros cometidos pelos alunos da 1ª série do EM no conceito de função afim e, em seguida, propor uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra.

Os estudos dos pesquisadores como Almouloud (2007), que utilizou Brousseau, Pinto (2000) e Perrenoud (2000) atestam a contribuição do erro como elemento desencadeador de questionamentos de ensino e aprendizagem. Do mesmo modo, apresentamos um breve estudo de alguns pesquisadores na área da Educação e/ou Educação Matemática que consideram a tecnologia como parte importante tanto no processo de ensino e aprendizagem como uma fermenta adicional para superação e detecção dos erros cometidos pelos alunos. Assim, com os estudos de Kenski (2003) entendemos o que é tecnologia e suas potencialidades; com Valente (1993, 1997) e Borba e Penteado (2001), esclarecemos as questões de interação entre o professor e o uso do computador como ferramenta de aprendizagem.

Para atender a segunda parte do objetivo da pesquisa que é a de propor uma sequência de atividades com o uso de um *software* educacional, fizemos um estudo das pesquisas PUC/SP que utilizaram tecnologias no aprimoramento da aprendizagem do conceito de função, com um recorte para estudos da função afim. Encerramos esse capítulo com a escolha do *software* educacional, considerando o contexto e do modo como será utilizado. A possibilidade de acesso gratuito e da interatividade em trabalhar os diferentes registros de representação semióticos aliado às possibilidades no preparo de um modelo pronto, adaptando-se as condições cognitivas dos alunos, justificam a escolha do *software* GeoGebra.

No capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica que norteou nossas análises dos registros descritos pelos alunos participantes. Neste sentido, procuramos apoio em Almouloud (2007) e Machado (2003) para a compreensão dos fenômenos complexos, reveladores e observáveis nas produções dos alunos à luz dos fundamentos da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995). Na intenção de não possibilitar o aparecimento de barreiras no desenvolvimento e execução das sequências, citamos a noção de obstáculos de Guy Brousseau.

No capítulo 3, empenhamos mais nossas análises na atual Proposta Curricular, pela “nova” orientação e organização do trabalho pedagógico escolar pretendido, com vistas aos materiais fornecidos aos alunos e professores. Assim, analisamos as abordagens dos cadernos do aluno e do professor, referentes ao tema função e função afim, para estruturação dos processos de elaboração e

aplicação das sequências descritas nesse trabalho.

No capítulo 4, caracterizamos os procedimentos metodológicos adotados e estruturamos nossa pesquisa em duas fases para estabelecer uma articulação entre as sequências. Na tentativa de obter maiores informações em torno dos alunos pesquisados, descrevemos o ambiente escolar e a escolha dos aprendizes. Também consideramos os resultados de avaliações externas do SARESP e Saeb/Prova Brasil.

Esses resultados que foram negativos para as habilidades e competências e, em conjunto com as atividades propostas nos cadernos da SEE/SP, nos apontaram “caminhos” para a elaboração das sequências.

No capítulo 5, descrevemos as atividades da sequência didática diagnóstica e os procedimentos metodológicos de coleta e análise dos dados referentes a primeira fase. Para o processo experimental e análise dos resultados coletados e obtidos, utilizamos como metodologia de pesquisa os princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1990). Assim “transitamos” pelos resultados esperados nas análises *a priori*, os encontros que ocorreram na aplicação das atividades até a confrontação nas análises *a posteriori*. De posse dos resultados obtidos, organizamos em categorias de erros que nos orientaram na elaboração e das atividades com o uso do GeoGebra, instrumento proposto na segunda fase.

No capítulo 6, temos a segunda fase da pesquisa na qual descrevemos os procedimentos de elaboração e utilização das atividades da sequência didática diagnóstica com o uso do software GeoGebra. Na introdução ao considerarmos o uso da tecnologia de maneira mais clara como ferramenta educativa, nos remete a responder nossa questão de pesquisa: temos que considerar o erro como um processo fundamental na avaliação e quando o computador é usado como ferramenta na reconstrução desses erros este não pode ser o instrumento que ensina o aprendiz, mas somente com mediador do aprendizado.

Para concretizarmos tal afirmação é que as atividades foram desenvolvidas, a partir das categorias de erros, com formatos na tela do computador que exigem o menor número possível de utilização das ferramentas do *software*. Ao executar as tarefas propostas nas atividades, o aluno terá poucos comandos para conseguir o sucesso na resolução.

Nesse sentido, encerramos esse capítulo com a apresentação das

atividades e dos roteiros de apresentação e construção dos formatos (layout) em tela do computador.

Para futuras pesquisas na área do ensino e aprendizagem da Matemática, sugerimos a aplicação da sequência didática com o uso do *software* GeoGebra para verificar possíveis avanços na aprendizagem da função afim. Consideramos que os erros cometidos pelos alunos nesta pesquisa não são locais, assim através de correções ou adaptações nas atividades podem ser utilizadas tanto no diagnóstico como iniciação dos conceitos abordados em turmas mais avançadas.

Como produto desse trabalho, destacamos as atividades descritas no capítulo 6, que poderão servir de base à intervenção didática dos professores de matemática de escola pública, e/ou para outras pesquisas que busquem validar as sequencias elaboradas com alunos e professores de matemática.

Diante do exposto, espera-se contribuir para reflexões e estudos em Educação Matemática, especificamente quanto à aprendizagem do conceito de função afim, considerando os erros cometidos pelos alunos ao utilizar o *software* educacional GeoGebra. E também na abordagem dos conteúdos nos *Cadernos* da SEE/SP pode sofrer modificações ao considerarem a diversidade de *representações semióticas*, em atividades que contemplem os fenômenos cognitivos, com a coordenação de pelo menos dois registros.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Editora UFPR, 2007.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino e aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil**. 2008. 182p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

AUGUSTO, Claudio R. **Aprendizagem de função afim: uma investigação de ensino com auxílio do software Graphmatica**. 2008. 127 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

BALACHEFF, Nicolas. Didactique et intelligence artificie. In: **Recherches en didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 14/1.2, p.9-42, 1994.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1998.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de Alvarez, Maria João; Santos, Sara Bahia dos; Baptista, Telmo Mourinho. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p. Título original: Qualitative Research for Education.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte, MG: Editora Autêntica, 2001.

BRASIL. **Decreto-lei** nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm. Acesso em: 10/01/2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC; SEB, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12591:publicacoes&catid=195:seb-educacao-basica>. Acesso em: 10 jan. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12591:publicacoes&catid=195:seb-educacao-basica>. Acesso em: 10 jan. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12591:publicacoes&catid=195:seb-educacao-basica>. Acesso em: 10 jan. 2009.

BRASIL: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: Ensino de Quinta a Oitava Séries**. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CEB Nº 15/98**. 1998b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13449&Itemid=935. Acesso em: 20 jul. 2009.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodes de la didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, n.7.2, p.33-115, 1987.

COSTA, Ricardo Carvalho. **A formação de Professores de Matemática para o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação: uma abordagem baseada no ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus**. 2010. 119 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 1991.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2005.

FLORES, Cláudia R.; MORETTI, Mércles T. título do artigo. **Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática – REREMAT**. Caxambu, 2006. UFSC, p. 26-38. Disponível em: <http://www.redemat.mtm.ufsc.br/reremat/republic_07_artigo.PDF>.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. In: CONGRESSO RIBIE, IV, 1998, Brasília. Anais. Brasília: Editora da UFRGS, 2008. p. 9. Disponível em: http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/tecmat/artigos/a1.doc. Acesso em 10 jul. 2009.

LOPES JUNIOR, Dejahyr. **Função do 1º grau: Um estudo sobre seus registros de representação semiótica por alunos da 1ª Série do ensino Médio**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2006. Disponível em: http://www.cbc.ufms.br/tedesimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=62. Acesso em: 10 jan. 2010.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias: o novo ritmo da informação**. 1. ed. Campinas: Papirus, 2003.

LOPES, Janice Pereira. **Fragmentações e aproximações entre Matemática e física no contexto escolar: problematizando o conceito de função afim**. 206 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004. Disponível em: <http://www.ppgect.ufsc.br/dis/02/Dissert.pdf>. Acesso em 10 jul. 2009.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. 1. ed. 160 p.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de. **Avaliação em cursos on-line colaborativos: uma abordagem multidimensional**. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/...15062007.../TeseGersonPastre.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2009.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de; **Transposição didática: aportes teóricos e novas práticas**. In: WITTER, Geraldina P. FUJIWARA, Ricardo (Orgs). Ensino de Ciências e Matemática: análise de problemas (no prelo), 2009. Acesso em: <http://www.abed.org.br/congresso2009/CD/trabalhos/552009103535.pdf>

OLIVEIRA, Elizabeth M. **Metodologia para o uso da Informática na Educação**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. SBEM. Ano 13. nº.23. dez. 2007.

OLIVEIRA, Ramon. de. Introdução: o resgate da tecnologia educacional. In: **Informática Educativa**. 7.ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

PERRENOUD, Philippe. **Avaliação: da Excelência à Regulação das Aprendizagens entre Duas Lógicas**. Tradução Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed Editora, 1999. 183 p. Título original: L'évaluation des élèves: de la fabrication de l'excellence à la régulation des apprentissages entre deux logiques

PERRENOUD, Philippe. **Dez novas competências para ensinar**. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000. 192 p. Título original: Dix nouvelles compétences pour enseigner.

PINTO, Neusa Bertoni. **O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da Matemática elementar**. Campinas: Papirus, 2000.

PINTO, Glaucia. **Tecnologias no ensino e aprendizagem da Álgebra: Análise das dissertações produzidas no programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP de 1994 até 2007**. 2009. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

PIRES, Célia Maria Caroline. **Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede**. São Paulo: FTD, 2000.

ROMBERG, Thomas A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and**

learning. New York: Macmillan, 1992. p. 49-64.

SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **SARESP 2008**: Relatório Pedagógico: Língua Portuguesa, Matemática e Ciências. São Paulo, SEE, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Matrizes de referência para a avaliação Saresp**: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2009a.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do gestor: gestão do currículo na escola**: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2009b.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Professor**: Matemática, Ensino Médio, 1ª série. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2008b.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Aluno**: Matemática, Ensino Médio, 1ª série. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2008c.

SCANNO, Fabio C. **Função Afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra**. 2009. 150 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SEMA – Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP – **Brousseau e a idéia de Situação Didática** – 2º Semestre 2008. Coordenação: Profº Drº Nilson José Machado.

SILVA, Marcílio Coelho Lisboa da; NARCISA, Helena Pessoa Lanna de Melo, SOUZA; Elerson Tarcísio. **Manual para elaboração e normalização de trabalhos acadêmicos conforme normas da ABNT**. 2. ed. Belo Horizonte: Unibh, 2007.

VALENTE, Jose Armando (Org). **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: UNICAMP, 1993. 418 p.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. Verificar Valente 1997, 2002, 1993.

VALENTE, José Armando. O uso inteligente do computador na educação. **Pátio - revista pedagógica**, Porto Alegre, v.1, n.1, p. 19-21, maio/jun. 1997.

VALENTE, Jose Armando; PRADO, Maria Elisabette Brisola Brito; ALMEIDA, Maria Elisabeth Bianconcini de (Org). **Educação a distância via internet**. São Paulo: Avercamp, 2003. 204 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Matriz de Referência para Avaliação do SARESP 2008

Competências/Temas	Habilidades/ Grupos de competências
Área 1: Desenvolver o raciocínio quantitativo e o pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações e a variedade de suas representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas. Aplicar expressões analíticas para modelar e resolver problemas. Tema: Números, operações, funções racionais / potenciação, número reais, expressões algébricas, equações, gráficos cartesianos, equações do 2º grau, funções).	H5. Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões). (GI) H6. Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema. (GI) H7. Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau. (GI) H12. Realizar operações simples com polinômios. (GII) H18. Resolver sistemas lineares (métodos da adição e da substituição). (GIII) H20. Resolver problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções do primeiro grau. (GIII)
Área 2: Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas. Tema: Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas.	H28. Usar o plano cartesiano para representação de pares ordenados; coordenadas cartesianas e equações lineares. (GI)
Área 3: Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros, áreas, volumes e relações entre as diferentes unidades de medida. Tema: Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros, áreas, volumes e relações entre as diferentes unidades de medida.	H42. Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos. (GIII) H43. Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa. (GII)

Quadro 7 - Adaptação da Matriz de Referência do Saresp 2008, 8ª série

Fonte: SEE/SP, São Paulo, 2009b, p. 80-82

APÊNDICE B – Sequência didática diagnóstica**BLOCO ATIVIDADE I**

1-) O preço da passagem de ônibus urbano comum na cidade de São José dos Campos é de R\$ 2,50. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir:

Número de Passagens (x)	1	2	5	8
Valor a ser pago (P)				

Agora, responda as seguintes questões:

a) É possível determinar quantas passagens foram pagas, se o valor total pago foi de R\$ 57,50? Qual é esse valor?

b) O que é constante nesse problema?

c) O que é variável nesse problema?

d) Se representarmos por **P** o valor a ser pago e **x** o número de passagens pagas, estabeleça a relação Matemática que modele essa situação.

e) Baseado no conceito de função (“Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função: $f: A \rightarrow B$ é uma relação que associa cada elemento de A a um único elemento de B”), poderemos afirmar que **P** é função de **x**? Reescreva a relação Matemática (em termos de função)

f) Construa o gráfico Valor a ser pago em função do Número de passagens.

BLOCO ATIVIDADE II

1) Dentre as leis abaixo, identifique as que são denominadas de função afim:

$$() y = 2(x+8) \quad () y = x^2 + 8 \quad () y = \frac{2+x}{8}$$

$$() y = 3^x \quad () y = \frac{8}{x} + \frac{1}{2} \quad () y = \frac{x-8}{3}$$

2) Identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b) de cada uma das seguintes funções afins:

$$\text{a) } y = 2x - 5 \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases} \quad \text{c) } y = \frac{-x+1}{2} \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

$$\text{b) } y = 2x \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases} \quad \text{d) } y = \frac{-x}{8} \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

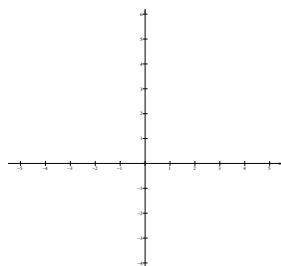
3) Associe as funções abaixo às suas respectivas classificações:

$$(a) y = 3x + 2 \quad () \text{ constante}$$

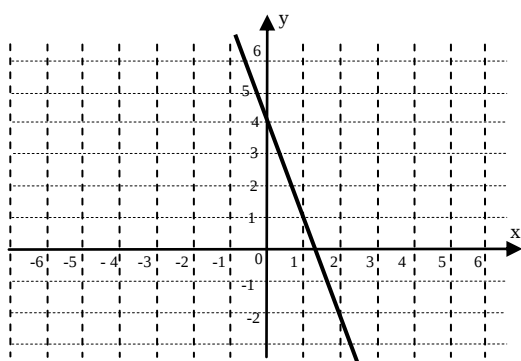
$$(b) y = 1 - 2x \quad () \text{ crescente}$$

$$(c) y = 2 \quad () \text{ decrescente}$$

4-) Represente o gráfico da função $f(x) = 2x - 4$.

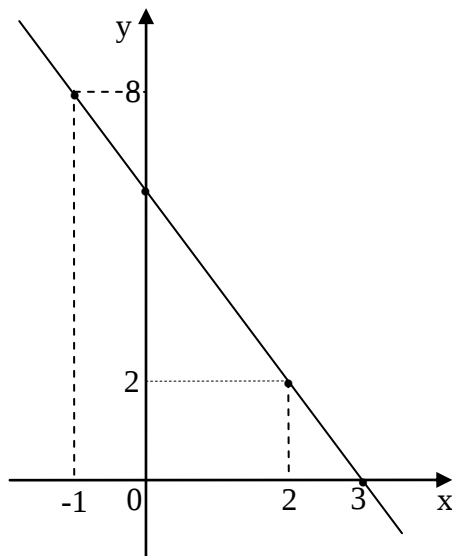


5-) Escreva a função $f(x) = ax + b$ cujo gráfico, num sistema cartesiano ortogonal, é dado por:



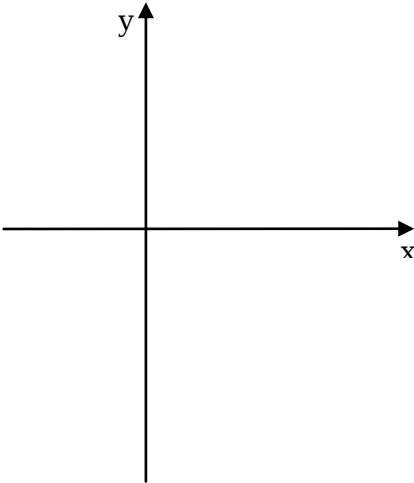
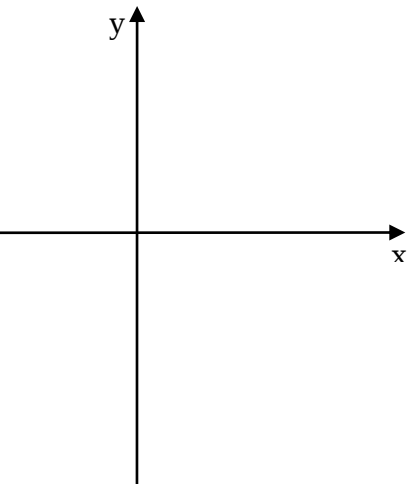
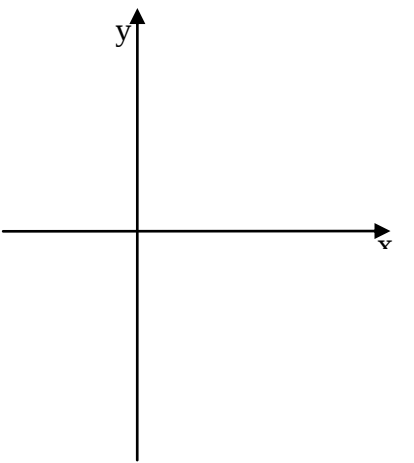
BLOCO ATIVIDADE III

Escreva a função $f(x) = ax + b$ cujo gráfico, num sistema cartesiano ortogonal, é dado por:



BLOCO ATIVIDADE IV

Leia atentamente as afirmações sobre variação de sinal da função afim e, a seguir, esboce sua representação gráfica.

1ª afirmação A função se anula para $x = 3$; A função é negativa para todo x real, menores que 3 ($x < 3$); Essa função é do tipo $f(x) = ax + b$; Para valores de x maiores que a raiz $(-b/a)$ a função é positiva, ou seja, tem o mesmo sinal do coeficiente angular ($a = 2$).	
2ª afirmação devemos ter $f(x_2) < f(x_1)$ com $x_2 > x_1$; Os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo ($f(x) < 0$) são as soluções da inequação $-2x - 6 < 0$.	
3ª afirmação Temos $f(0)=0$; A função é positiva para todo x real, maiores que 0 ($x > 0$); As coordenadas do ponto $A(2,4)$ pertencem ao gráfico da função.	

APÊNDICE C – Sequência didática com o uso do GeoGebra

Atividade 1

Objetivo: Ideia de função e a relação das funções linear e afim com a constante de proporcionalidade.

Lembretes:

- Quando x (variável independente) e y (variável dependente) são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultaneamente, e na mesma proporção, ou seja, a razão $\frac{y}{x} = k$, com $k \neq 0$.
- Função linear é uma função do tipo $y = f(x) = kx$ ($k \neq 0$). Esta função é um caso particular da função afim, assim temos: $f(x) = Kx \Rightarrow f(x) = ax$.

Registro tabular e algébrico

1) Suponha que pudéssemos programar (através de uma **função** Matemática) uma calculadora em que ao entrar um número x , ela fornecesse no visor um número de saída y proporcional ao da entrada e um gráfico representativo.

Um aluno programou essa calculadora e a TABELA - 1, abaixo, mostra alguns valores:

TABELA - 1

Nº de entrada (x)	- 5	- 3	- 1	0	10	
Nº de saída (y)	-15	-9	-3	0	30	

Vamos descobrir qual é a **função** Matemática.

- a) Digite se possível e divida os números da 2ª linha pelos correspondentes números da 1ª linha.

_____ = _____ = _____ = _____ =

b) Complete:

- Conforme os resultados, para um valor x e o valor de y , correspondente, temos $\frac{y}{x} =$

- Concluindo: Se temos $\frac{y}{x} =$ então, $y =$. Essa é a **função** Matemática procurada.

c) Complete a TABELA - 1, para isso invente um valor qualquer para o N^o de entrada e use a **função** para determinar o N^o de saída.

Cálculos

2) Vamos verificar se os números estão corretos. No GeoGebra, abra o arquivo Ativ_1. Clique somente no interruptor ☒ TABELA - 1.

- a) Clique no ponto ● (sobre o Eixo x) e com as teclas seta ($\rightarrow$) ou ($\leftarrow$), movimente até coincidir com o valor do N^o de entrada que você inventou. O N^o de saída também coincidiu?

() Sim

() Não

- b) Se você respondeu Não, refaça o exercício anterior para identificar o erro.

Cálculos

$\frac{y}{x} =$ então, $y =$

3) Dizemos que o N^o de entrada é diretamente proporcional ao N^o de saída. Por quê?

4) O que representa a constante de proporcionalidade no contexto deste problema?

5) Observe o conceito de função:

*“Dados dois conjuntos A e B não vazios, dizemos que uma relação de A em B é **função de A em B** se, e somente se, a todo elemento x de A estiver associado um, e somente um, elemento y de B ”.*

a) Podemos afirmar que N° de entrada é função do N° de saída? Por quê?

b) Conforme definição, função linear é uma função do tipo $y = f(x) = kx$.
Então ao programar a calculadora o aluno usou a função linear:

$y = f(x) =$

Registro gráfico

6) Vamos verificar agora a representação gráfica dessa **função** Matemática. No GeoGebra, abra o arquivo Ativ_1. Em seguida:

- Clique no interruptor ☒ **Coordenadas (x;y)** e verifique se as coordenadas (x;y) da TABELA - 1 estão corretas.
- Clique no interruptor ☒ **Gráfico f(x)**. Movimente livremente o ponto ● (sobre o Eixo x). Observe e complete:
 - a) Todos os pontos do gráfico estão situados sobre uma _____ e podemos observar que ela intercepta os eixos cartesianos na coordenada (;).
 - b) Para cada valor x do N° de entrada corresponde (um único ou vários) _____ valor(es) y de N° de saída.

7) A TABELA - 2, abaixo, mostra alguns valores do N^o de entrada e N^o de saída de uma nova programação.

TABELA - 2

Nº de entrada (x)	2	3		- 5	...	
Nº de saída (y)	- 4		20		...	- 50

a) Descubra a nova **função** Matemática.

Cálculos

$g(x) =$

b) Complete a TABELA - 2 usando a nova **função** Matemática.

Cálculos

8) Vamos verificar se os números calculados estão corretos. No GeoGebra, abra o arquivo Ativ_1. Clique nos interruptores da **TABELA - 1** para escondê-los. Em seguida clique no interruptor ☒ **TABELA - 2**.

a) Para completar a TABELA - 2 digitem no campo de Entrada o comando abaixo seguido do valor, e depois dê outro clique:

Comando N3= (para inserir o N^o de saída para $x = 3$)

b) Para os demais valores, segue:

Comando N20= (para inserir o N^o de entrada para $y = 20$)

Comando N5= (para inserir o N^o de saída para $x = -5$)

Comando N50= (para inserir o N^o de entrada para $y = -50$)

9) Clique nos interruptores ☒ **Coordenadas (x;y)** e ☒ **Gráfico g(x)**. Movimente livremente o ponto ● (sobre o Eixo x). Observe e complete:

- a) Todos os pontos do gráfico estão situados sobre uma _____ e podemos observar que ela intercepta os eixos cartesianos na coordenada (;).
- b) Para cada valor x do N^o de entrada corresponde (um único ou vários) _____ valor(es) y de N^o de saída.

10) No GeoGebra deixe somente os interruptores ☒ Gráfico $f(x)$ e ☒ $f(x) = ax + b$ acionados, desabilite os demais. Você verá na tela os respectivos gráficos $f(x)$ da função linear e afim.

- a) Clique nos **Seletores** para ajustar a reta f da função afim até coincidir com a reta da função linear. Observe a forma algébrica da função afim. Para quais valores de a e b as retas coincidiram?

$a =$
 $b =$

- b) Então podemos concluir que uma função linear $f(x) = kx$ é um caso particular da função afim $f(x) = ax + b$, com:

$k =$
 $b =$

Atividade 2.1

Objetivo: Identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear da função afim a partir de sua expressão algébrica.

Lembretes:

- **Função afim** : é uma função do tipo $f(x) = y = ax + b$, com $a \neq 0$.
- O parâmetro **a** é chamado de *coeficiente angular* ou *taxa de variação*.
- O parâmetro **b** é chamado de *coeficiente linear*.

1) Após a leitura do texto acima, identifique e registre os valores de **a** e **b** das funções afins abaixo, BLOCO - 1:

a) $y = 3x + 1$ $a =$; $b =$

b) $y = 3x - 1$ $a =$; $b =$

c) $y = -3x - 1$ $a =$; $b =$

d) $y = -8 - 3x$ $a =$; $b =$

e) $y = 3x + 0$ $a =$; $b =$

f) $y = -3x$ $a =$; $b =$

g) $y = \frac{4x}{2}$ $a =$; $b =$

h) $y = \frac{-5x}{2} + 3$ $a =$; $b =$

i) $y = -2x + \frac{7}{2}$ $a =$; $b =$

j) $y = x$ $a =$; $b =$

2) Agora vamos verificar se vocês acertaram. No GeoGebra abra o arquivo Ativ_2 e clique no ☒ BLOCO - 1 para aparecer a função algébrica. Movimente os **Seletores** “a” e “b” para inserir os valores de suas respostas e compare com a função algébrica que será apresentada na tela.

(OBS.: Lembre-se o número será apresentado na forma decimal ou inteiro).

a) Assinale aqui os itens que vocês acertaram:

a) () b) () c) () d) () e) ()

f) () g) () h) () i) () j) ()

b) Se errar algum item, mova os **Seletores** “a” e “b” até coincidir com a função.

3) Identifique e registre os valores de **a** e **b** das funções abaixo, BLOCO - 2:

$$\text{a) } y = \frac{10x - 4}{2}$$

$$a = \quad ; b =$$

$$\text{b) } y = \frac{-6 + 9x}{3}$$

$$a = \quad ; b =$$

$$\text{c) } y = \frac{7 - 2x}{2}$$

$$a = \quad ; b =$$

$$\text{d) } y = \frac{-12x - 8}{4}$$

$$a = \quad ; b =$$

4) Novamente vamos verificar se vocês acertaram. No GeoGebra clique no interruptor do BLOCO - 1 para desabilitá-lo e em seguida clique no ☒ BLOCO - 2. Você verá uma função algébrica. Com os **Seletores** “a” e “b” insira seus valores do BLOCO - 2. Compare com a função algébrica que será apresentada na tela.

a) Registre aqui os itens que vocês acertaram:

a) ()

b) ()

c) ()

d) ()

b) Se errar algum item, mova os **Seletores** “a” e “b” até coincidir com a função.

Atividade 2.2

Objetivo: Escrever a expressão algébrica da função afim a partir do seu gráfico.

Lembrete:

- Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $f(x) = y = ax + b$ é a equação da reta;
- O parâmetro ***b*** (coeficiente linear) é a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo vertical Oy (**eixo das ordenadas**).
- O parâmetro ***a*** (coeficiente angular ou inclinação, $a = \operatorname{tg} \alpha$) da reta em relação ao eixo horizontal Ox (**eixo das abscissas**).

1) No GeoGebra, abra o arquivo Ativ_2, desabilite os seletores dos BLOCOS 1 e 2. Em seguida clique no interruptor ***f(x)***. Use os **Seletores** “*a*” e “*b*” e faça variações (valores positivos, negativos e zero). Observe o comportamento do gráfico e da sua forma algébrica e depois responda:

a) Explique de que forma ***a*** influencia o gráfico:

b) Explique de que forma ***b*** influencia o gráfico:

c) Use os **Seletores** “*a*” e “*b*” para inserir as funções algébricas abaixo. Cada gráfico dessas funções intersectam o **eixo das ordenadas** num único ponto, registre as suas coordenadas:

1. $f(x) = 3x + 5$	(;)	6. $f(x) = -3x - 4$	(;)
2. $f(x) = 3x + 4$	(;)	7. $f(x) = -3x - 3$	(;)
3. $f(x) = 3x + 2$	(;)	8. $f(x) = -3x - 2$	(;)
4. $f(x) = 3x - 1$	(;)	9. $f(x) = -3x + 1$	(;)
5. $f(x) = 3x$	(;)	10. $f(x) = -3x$	(;)

d) Complete:

- Conforme visto, temos que a intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas de $f(x) = ax + b$ é sempre no ponto (;). O valor de **b** é chamado de _____.
- As funções algébricas 5. e 10. são chamadas de funções _____.
- Para identificar o valor numérico de **b**, a partir do gráfico que representa a função afim $f(x)$, basta _____.

2) Clique no interruptor **f(x)** para desabilitá-lo. Identifique o valor de **b** nos gráficos das funções afins abaixo e complete a forma algébrica. **OBS.:** Para aparecer o gráfico clique no interruptor uma vez e, clique novamente para escondê-lo.

Gráficos	valor	forma algébrica
1	b =	$y = \mathbf{a}x$
2	b =	$y = \mathbf{a}x$
3	b =	$y = \mathbf{a}x$
4	b =	$y = \mathbf{a}x$
5	b =	$y = \mathbf{a}x$

3) Agora, à partir das representações algébricas do item anterior, determinaremos os valores de **a**. No GeoGebra use os interruptores e esconda todos os gráficos.

- a) Vamos calcular o valor de **a** do Gráfico 1. Clique no interruptor do **Gráfico 1** e localize um ponto P qualquer pertencente a reta (para isso movimente o ponto x_1 e faça sua escolha). Registre abaixo as *coordenadas cartesianas* deste ponto.

P(;)

- b) Se o ponto P pertence a reta, logo também pertence a função algébrica. Então faça a substituição na forma algébrica e determine o valor de **a**. Por fim escreva ao lado a forma algébrica do **Gráfico 1**.

Gráfico 1

$$y = \mathbf{a}x$$

$$y =$$

- c) No GeoGebra clique em **Exibir** → **Malha**. Repita os itens (a) e (b), acima, para os demais gráficos.

Gráfico 2

$$y = \mathbf{a}x$$

$$P(\quad; \quad)$$
$$y =$$

Gráfico 4

$$y = \mathbf{a}x$$

$$P(\quad; \quad)$$
$$y =$$

Gráfico 3

$$y = \mathbf{a}x$$

P(;)

y =

Gráfico 5

$$y = \mathbf{a}x$$

P(;)

y =

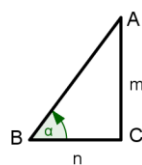
Atividade 3

Objetivo: Escrever a expressão algébrica da função afim a partir do seu gráfico.

Lembrete:

- Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $y = ax + b$ é a equação da reta r ;
- Se a reta r é a representação gráfica da função afim $f(x)$, o parâmetro a é chamado de **taxa de variação** ou **inclinação** ou **coeficiente angular** da reta r , pois ele é a tangente trigonométrica (tg) do ângulo α que a reta r faz com o eixo Ox.

- No triângulo ABC, temos $\operatorname{tag} \alpha = a = \frac{m}{n}$



1) No GeoGebra abra o arquivo Ativ_3. Clique no interruptor ☒ para aparecer somente o **Gráfico $f(x)$** . Responda:

A respeito do valor de **b** no gráfico o que se pode afirmar? _____

2) Vamos escrever a equação algébrica do **Gráfico $f(x)$** . No GeoGebra movimente livremente os pontos de abscissa x_1 e x_2 e observe os respectivos valores de **$f(x_1)$** e **$f(x_2)$** . Complete:

- Para cada valor de x_1 corresponde _____ valor de $f(x_1)$.
- Para cada valor de x_2 corresponde _____ valor de $f(x_2)$.

a) Mantenha $x_1 < x_2$, registre abaixo os valores da tela:

Registros

Cálculos

$x_1 =$

$x_2 - x_1 =$

$x_2 =$

$f(x_1) =$

$f(x_2) - f(x_1) =$

$f(x_2) =$

b) Conforme **Lembrete** o parâmetro **a** é a tag α , então calcule seu valor:

$$\mathbf{a} = \text{————} =$$

c) Faça modificações nos valores de " x_1 " ou " x_2 " e refaça os cálculos dos itens (a) e (b) acima:

Registros

Cálculos

$$x_1 =$$

$$x_2 - x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$\mathbf{a} = \text{————} =$$

$$f(x_1) =$$

$$f(x_2) - f(x_1) =$$

$$f(x_2) =$$

Registros

Cálculos

$$x_1 =$$

$$x_2 - x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$\mathbf{a} = \text{————} =$$

$$f(x_1) =$$

$$f(x_2) - f(x_1) =$$

$$f(x_2) =$$

Responda:

- A respeito dos valores de **a** o que se pode afirmar? _____
_____.

d) Sabemos que $\mathbf{a} = \text{tg}(\alpha)$. Agora use x_1 , x_2 , $f(x_1)$, $f(x_2)$ e reescreva a razão dos lados m e n na igualdade:

$$\mathbf{a} = \text{————} =$$

3) Para a forma algébrica do **Gráfico $f(x)$** temos o valor de **a** , agora vamos determinar o valor de **b** .

- a) Registre as coordenadas de um ponto pertencente à reta, por exemplo, pode ser $B(x_1, f(x_1))$, faça as substituições e calcule o valor de **b** .

<i>Registros Gráfico $f(x)$</i>	<i>Cálculos</i>
$B(\quad ; \quad)$	$f(x_1) = ax_1 + b$
$b =$	

- b) Por fim escreva ao lado a forma algébrica do gráfico $f(x)$ com os valores de **a** e de **b** calculados.

$f(x) =$

4) Agora escreva a forma algébrica dos demais gráficos. Clique nos interruptores para mostrar um gráfico de cada vez.

<i>Registros Gráfico 1</i>	<i>Cálculos</i>
$x_1 =$	$x_2 - x_1 =$
$x_2 =$	$a =$ $=$
$f(x_1) =$	$f(x_2) - f(x_1) =$
$f(x_2) =$	
$B(\quad ; \quad)$	$f(x_1) = ax_1 + b$
$f(x) =$	

*Registros Gráfico 2**Cálculos*

$x_1 =$

$x_2 - x_1 =$

$x_2 =$

$a = \text{————} =$

$f(x_1) =$

$f(x_2) - f(x_1) =$

$f(x_2) =$

$B(\quad ; \quad)$

$f(x_1) = ax_1 + b$

$f(x) =$

*Registros Gráfico 3**Cálculos*

$x_1 =$

$x_2 - x_1 =$

$x_2 =$

$a = \text{————} =$

$f(x_1) =$

$f(x_2) - f(x_1) =$

$f(x_2) =$

$B(\quad ; \quad)$

$f(x_1) = ax_1 + b$

$f(x) =$

5) No GeoGebra Clique nos interruptores e mostre apenas o [Gráfico f\(x\)](#). No “Campo de entrada para comandos”, insira o seguinte comando $a=2$ seguido da tecla “Enter” e depois $b=3$ seguido da tecla “Enter”. Será apresentado o gráfico da função afim $f(x) = 2x + 3$.

a) Vamos variar a $f(x)$ para cada unidade a mais de x , ou seja, $f(x+1)$. Comece, por exemplo, com o ponto $x_1=1$ para $f(1)$ e $x_2=2$ para $f(2)$. Depois

$x_1=2$ para $f(2)$ e $x_2=3$ para $f(3)$ e assim por diante. Para cada variação abaixo observe os valores apresentados no gráfico e faça os cálculos:

Registros	Cálculos
$f(1) =$	$f(2) - f(1) =$
$f(2) =$	$f(3) - f(2) =$
$f(3) =$	$f(4) - f(3) =$
$f(4) =$	$f(5) - f(4) =$
$f(5) =$	
$f(10) =$	$f(11) - f(10) =$
$f(11) =$	

b) Compare os resultados acima com a função $f(x) = 2x + 3$. O que se pode afirmar? _____

c) Complete:

Podemos notar que se $f(x) = ax + b$, então $f(x+1) - f(x) =$ _____.

6) Aplique a afirmação anterior no Gráfico 2 do GeoGebra. Compare com o resultado da forma algébrica encontrada no item 4 e complete.

Registros	Cálculos
$f(1) =$	$f(2) - f(1) =$
$f(2) =$	

Em toda função afim $f(x) = ax + b$, o parâmetro **a** representa a _____ da reta. Se o gráfico apresentar uma ordenada $f(\quad)$ e a outra $f(\quad)$ podemos determinar o valor de **a**, basta calcular _____.

Atividade 4

Objetivo: Estudo do sinal da função afim pela análise do gráfico e expressão algébrica.

Lembrete:

- Geometricamente, o zero (ou raiz) da função afim $f(x) = ax + b$ é a **abscissa** do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo Ox;
- Estudar o sinal de uma função afim significa determinar para quais valores de x a função é:

$$\text{Positiva} \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Nula} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Negativa} \Rightarrow f(x) < 0$$

Interpretação geométrica da raiz

1) No GeoGebra abra o arquivo Ativ_4. Clique no interruptor ☒ para aparecer somente o **Gráfico $f(x)$** . Complete:

a) Movimente os seletores “a” e “b”. O gráfico de $f(x)$ sempre intersecta o eixo Ox no ponto _____. A **abscissa** desse ponto está representada pela letra _____. Registre as coordenadas cartesianas desse ponto: ____ (____, ____).

b) Conforme definição, essa **abscissa** é chamada de _____ ou _____ da função afim $f(x)$, para quaisquer valores de **a** e **b**.

Interpretação algébrica da raiz

2) Movimente livremente o ponto ● (sobre o Eixo x), observe e complete:

Denomina-se *zero* ou *raiz* da função da afim $f(x) = ax + b$, o valor de x para o qual $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3) Vamos determinar a equação geral da raiz de uma função afim $f(x)$. Se x é raiz, então substitua o valor de $f(x)$, item anterior, na expressão abaixo e determine o valor de x :

Cálculos

$$ax + b = f(x)$$

$x =$

4) Agora vamos testar a equação geral da raiz

a) Utilize a equação geral e determine a raiz das seguintes funções:

Cálculos

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $f(x) = -2x + 6$

c) $f(x) = x - 4$

b) No GeoGebra, use os **seletores** “a” e “b” para inserir as funções acima. Verifique se os cálculos estão corretos, caso contrário encontre o erro e refaça os cálculos.

Estudo do sinal da função afim

Como a função afim é estritamente crescente ou estritamente decrescente, conhecendo a raiz da função e o coeficiente angular, já somos capazes de estudar o sinal.

5) No GeoGebra use o **seletor** “a” e mantenha $a > 0$. Faça movimentos no ponto ● (abscissas maiores, iguais e menores que a abscissa r do ponto P) e observe, respectivamente, os valores da $f(x)$. Responda:

a) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x é maior que r ?

_____.

b) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x é igual r ?

_____.

c) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x é menor que r ?

_____.

d) Mude o valor do coeficiente angular, mantenha $a > 0$ (basta movimentar o **seletor** “a”). Você mudaria as respostas dos itens (a), (b) e (c)?

() sim () não.

e) Use os símbolos ($=$, $>$ e $<$) e complete o estudo do sinal da função quando $a > 0$:

$$x > r \Rightarrow f(x) \quad 0$$

$$x = r \Rightarrow f(x) \quad 0$$

$$x < r \Rightarrow f(x) \quad 0$$

6) No GeoGebra use o **seletor** “a” e mantenha $a < 0$. Faça movimentos no ponto ● (abscissas maiores, iguais e menores que a abscissa r do ponto P) e observe, respectivamente, os valores da $f(x)$. Responda:

a) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x é maior que r ?

_____.

b) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x é igual r ?

_____.

c) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x é menor que r ?

_____.

d) Mude o valor do coeficiente angular, mantenha $a < 0$ (basta movimentar o **seletor** “a”). Você mudaria as respostas dos itens (a), (b) e (c)?

() sim () não.

e) Use os símbolos ($=$, $>$ e $<$) e complete o estudo da variação do sinal da função quando $a < 0$:

$$x > r \Rightarrow f(x) \quad 0$$

$$x = r \Rightarrow f(x) \quad 0$$

$$x < r \Rightarrow f(x) \quad 0$$

7) Qual o significado do sinal + e do sinal – no **Dispositivo prático**?

_____.

8) Estudar a variação do sinal das funções, item 4, com o auxílio do dispositivo prático.

Cálculos

a) $f(x) = 2x + 4$



$$\begin{array}{lll} x > & \Rightarrow f(x) & 0 \\ x = & \Rightarrow f(x) & 0 \\ x < & \Rightarrow f(x) & 0 \end{array}$$

Cálculos

a) $f(x) = -2x + 6$



$$\begin{array}{lll} x > & \Rightarrow f(x) & 0 \\ x = & \Rightarrow f(x) & 0 \\ x < & \Rightarrow f(x) & 0 \end{array}$$

Cálculos

a) $f(x) = x - 4$

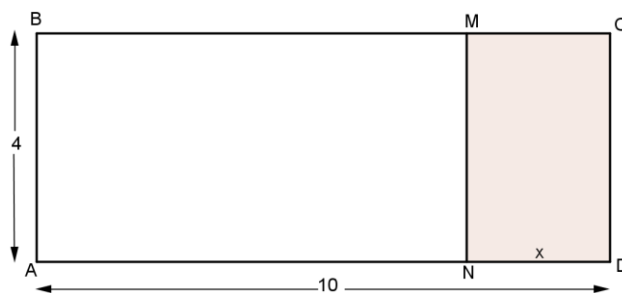


$$\begin{array}{lll} x > & \Rightarrow f(x) & 0 \\ x = & \Rightarrow f(x) & 0 \\ x < & \Rightarrow f(x) & 0 \end{array}$$

Atividade 5

Objetivo: Relacionar a forma algébrica da função afim com a área e o perímetro de um retângulo.

A figura mostra um retângulo ABCD, de lados 4 cm e 10 cm. Sobre $\overline{AD}$ marcou-se um ponto N, a x cm de D. Por N traçou-se $\overline{NM} \parallel \overline{DC}$ formando dois retângulos.



1) No GeoGebra abra o arquivo Ativ_5. Movimente livremente o lado DN do retângulo MCDN, representado por x . Para variar Clique no **seletor** X e em seguida aperte a seta ($\rightarrow$) para aumentar ou na seta ($\leftarrow$) para diminuir o valor.

a) Determine expressão algébrica do perímetro y do retângulo MCDN em função de x .

$y =$

b) Calcule o valor do perímetro y para os casos abaixo:

Cálculos

Para $x = 1$ cm, temos $y =$

Para $x = 3$ cm, temos $y =$

Para $x = 6$ cm, temos $y =$

Para $x = 0$ cm, temos $y =$

Para $x = 10$ cm, temos $y =$

2) Agora vamos verificar se os valores estão certos. No GeoGebra ative o interruptor ☒ **Perímetro MCDN**.

a) Insira os valores de x (um de cada vez) e compare os resultados apresentados na tela. Para isso no “Campo de entrada”, digite o seguinte comando:

$X=1$ seguido da tecla “Enter”, será atribuído $x = 1$ no lado DN.

$X=3$ seguido da tecla “Enter”, será atribuído $x = 3$ e assim por diante.

Os resultados apresentados na tela são os mesmos que você calculou?

() *sim* () *não*

b) Caso você respondeu *não* verifique a função e refaça os cálculos.

3) A área Z do retângulo MCDN destacado é função de x . Determine:

a) A expressão algébrica da área Z do retângulo MCDN em função de x .

$Z =$

b) Calcule o valor da área Z para os casos abaixo:

Para $x = 1$ cm, temos $Z =$

Para $x = 3$ cm, temos $Z =$

Para $x = 7$ cm, temos $Z =$

Para $x = 0$ cm, temos $Z =$

Para $x = 10$ cm, temos $Z =$

c) Vamos verificar se os valores estão certos. No GeoGebra ative o interruptor ☒ **Área MCDN** e insira os valores de x (um de cada vez). Compare os resultados apresentados na tela com os calculados. Os resultados apresentados na tela são os mesmos que você calculou?

() *sim* () *não*

Caso você respondeu *não* verifique a função e refaça os cálculos.

4) Complete:

As funções do perímetro y e da área Z do retângulo MCDN são chamadas de funções _____. No caso da função Z é também chamada de função _____.

APÊNDICE D – Layout GeoGebra dos interruptores acionados da TABELA - 1 e TABELA - 2, Atividade 1

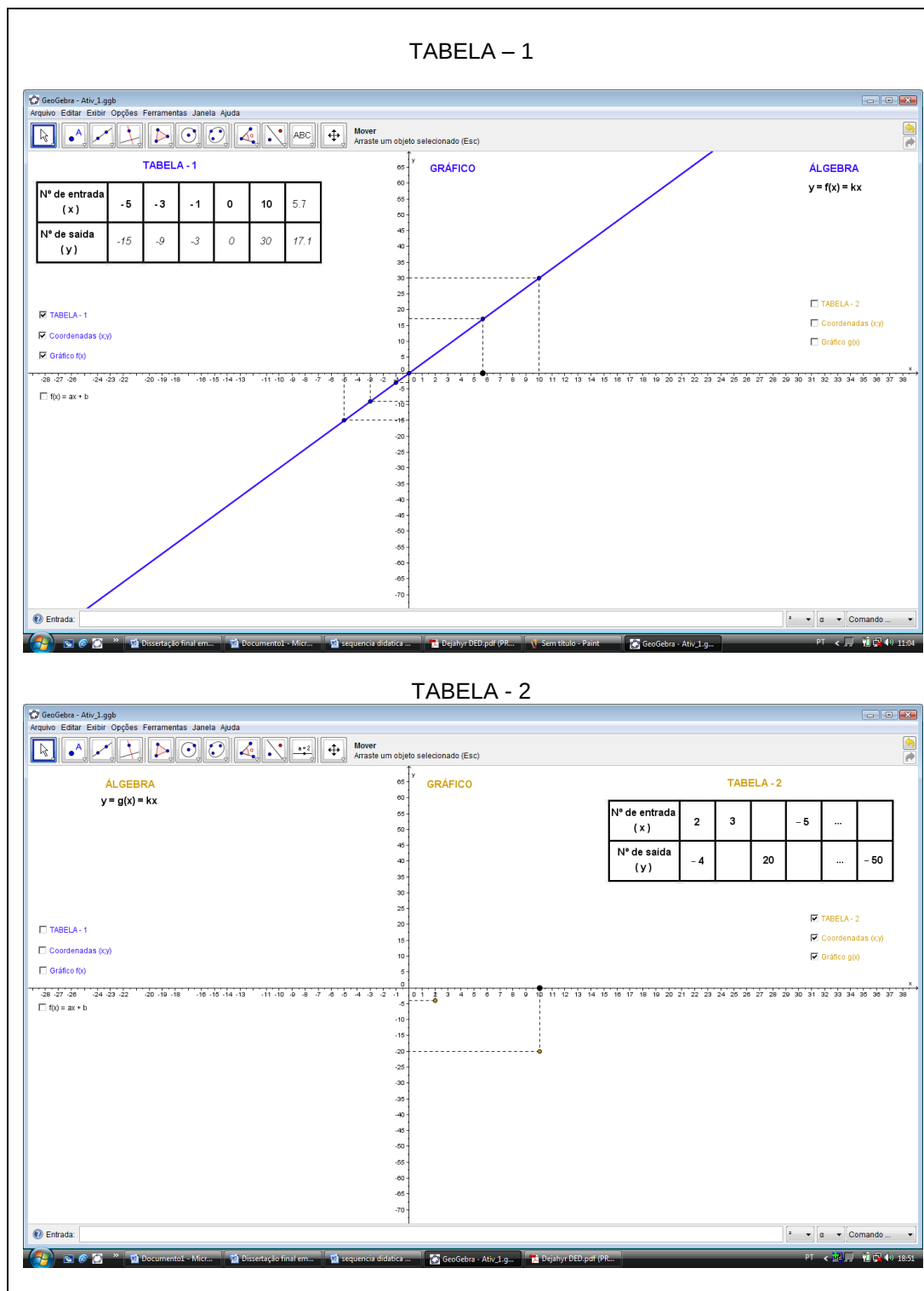
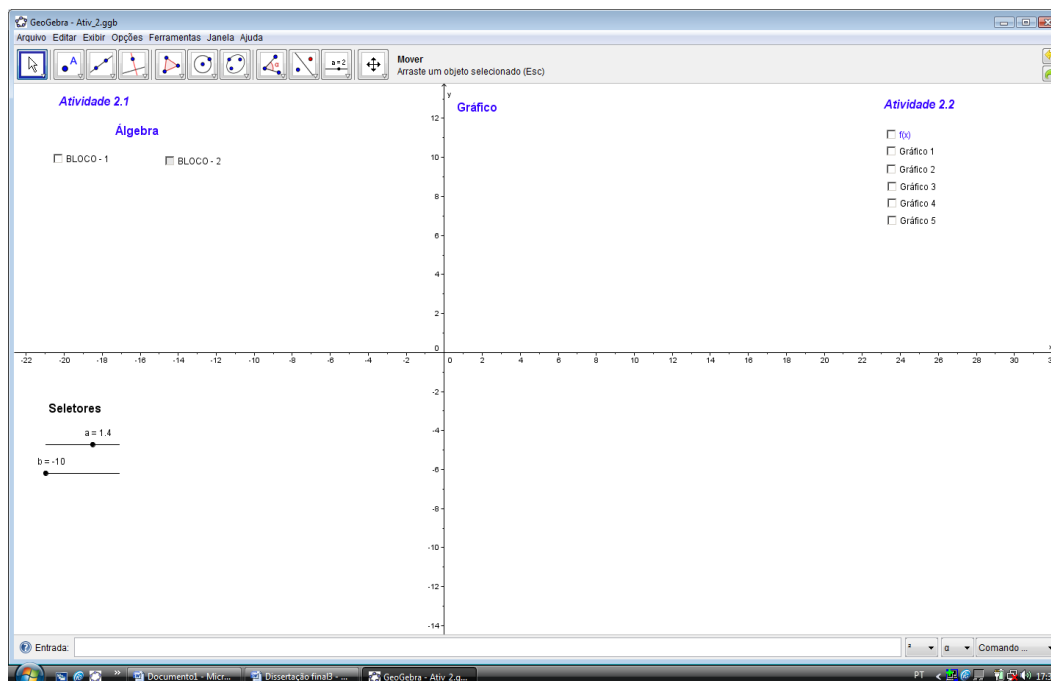


Figura 52 – Layout GeoGebra, Atividade 1
Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE E – Layout GeoGebra dos interruptores acionados do BLOCO - 1 e BLOCO - 2, Atividade 2

BLOCO – 1



BLOCO - 2

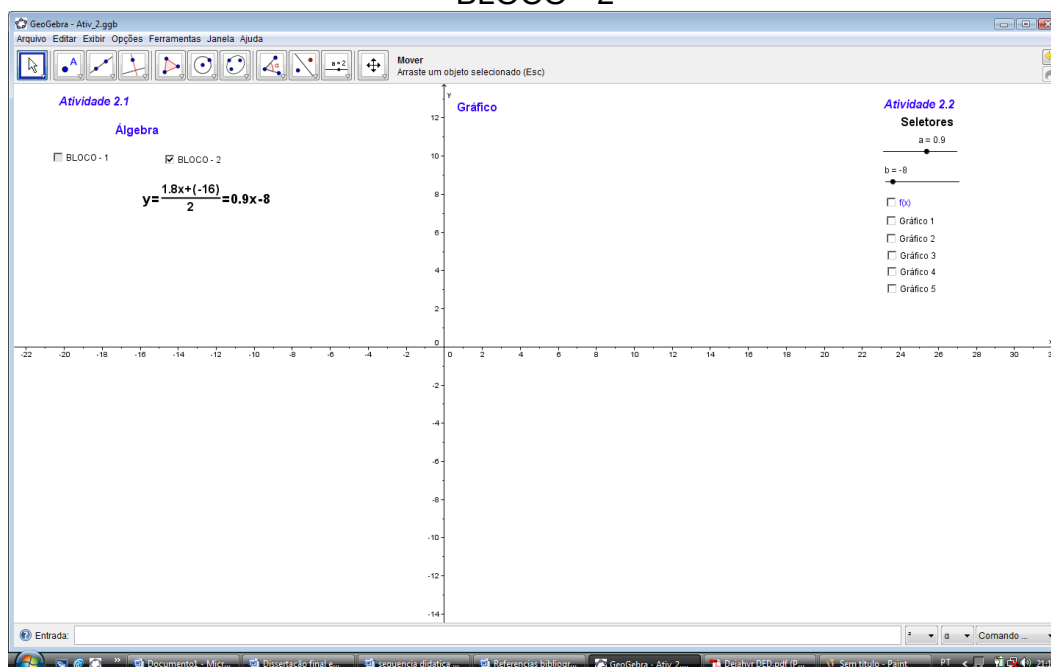


Figura 53 – Layout GeoGebra, Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE F – Layout GeoGebra dos interruptores acionados do $f(x)$ e Gráficos 1, 2 e 3 da Atividade 3

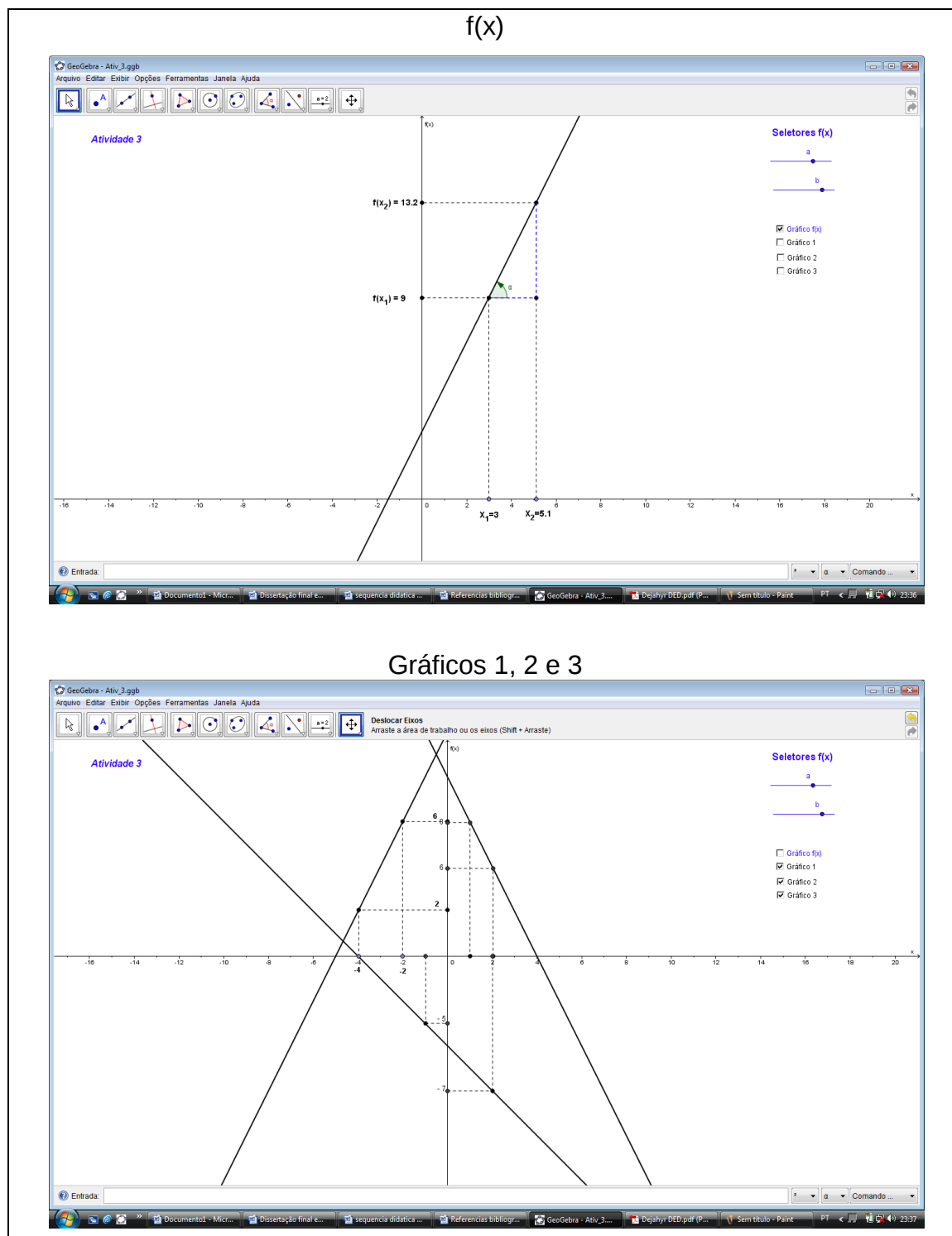


Figura 54 – Layout GeoGebra, Atividade 3
 Fonte: Elaborado pelo autor

ANEXOS

ANEXO A – Quadro de conteúdos do 2º bimestre para as três séries do Ensino Médio.

Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio			
	1ª Série	2ª Série	3ª Série
2º Bimestre	Funções • Relação entre duas grandezas. • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. • Função de 1º grau. • Função de 2º grau.	Matrizes, determinantes e sistemas lineares • Matrizes: significado como tabelas, características e operações. • A noção de determinante de uma matriz quadrada. • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	Equações algébricas e números complexos • Equações polinomiais. • Números complexos: operações e representação geométrica. • Propriedades das raízes de uma equação polinomial. • Relações de Girard.

Quadro 8 - Quadro de conteúdos de Matemática do 2º bimestre do EM
Fonte: SEE/SP, São Paulo, 2008, p. 57

ANEXO B – Plano Político Educacional do Governo do Estado de São Paulo.

As dez metas do novo Plano Político Educacional do Governo do Estado de São Paulo	
1.	Todos os alunos de 8 anos plenamente alfabetizados.
2.	Redução de 50% das taxas de reprovação da 8ª série. *
3.	Redução de 50% das taxas de reprovação do Ensino Médio. *
4.	Implantação de programas de recuperação de aprendizagem nas séries finais de todos os ciclos de aprendizagem (2ª, 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio). *
5.	Aumento de 10% nos índices de desempenho do Ensino Fundamental e Médio nas avaliações nacionais e estaduais. *
6.	Atendimento de 100% da demanda de jovens e adultos de Ensino Médio com currículo profissionalizante diversificado.
7.	Implantação do Ensino Fundamental de 9 anos, com prioridade à municipalização das séries iniciais (1ª a 4ª séries).
8.	Programas de formação continuada e capacitação da equipe.
9.	Descentralização e/ou municipalização do programa de alimentação escolar nos 30 municípios ainda centralizados.
10.	Programa de obras e melhorias de infra-estrutura das escolas.
* As metas em destaque devem estar presentes em seu plano de ação.	

Quadro 9 - As dez metas do novo Plano Político Educacional
Fonte: SEE/SP, São Paulo, 2009a, p.30