PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Mitchell Christopher Sombra Evangelista

As Transformações Isométricas no GeoGebra com a Motivação Etnomatemática

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Mitchell Christopher Sombra Evangelista

As Transformações Isométricas no GeoGebra com a Motivação Etnomatemática

Trabalho Final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA*** sob a orientação da **Profª. Drª. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.**

SÃO PAULO

2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ___________________________________Local e Data: ______________

DEDICATÓRIA

À minha família pelo amor e compreensão nos momentos difíceis que passamos juntos, em especial a minha amada mãe Maria Ivanilda Sombra Evangelista que sempre nos mostrou que devemos lutar com perseverança para conseguir atingir nossos objetivos.

Agracimentos

Em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida e pela inspiração para poder conseguir atingir mais um objetivo.

A minha orientadora Professora Doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar por me orientar e a me conduzir com muita sabedoria e competência na elaboração deste trabalho.

Aos professores Doutores Saddo Ag Almouloud e Oscar João Abdnour pela contribuição que foi dada na qualificação com orientações precisas para aprimoramento deste trabalho.

Ao Estado de São Paulo, por meio da Secretaria Estadual da Educação, por ter concedido, pelo Programa Bolsa Mestrado, uma bolsa, sem a qual não teria conseguido dar continuidade à minha formação acadêmica.

Aos colegas de curso do mestrado profissional da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por compartilhar suas experiências profissionais durante esse período, fazendo com que pudéssemos entender um pouco as diversas realidades escolares.

Aos amigos e amigas que fiz durante o curso em especial, Vagner, Ricardo, Alexandre, Maria do Carmo, Luciane Mendonça e Antonia.

Aos meus alunos por participarem da pesquisa e contribuírem diretamente para a elaboração deste trabalho.

A minha esposa Soraia Silva Zielinski que com muita paciência me ajudou a superar desafios com apoio e compreensão.

Ao meu amigo Cláudio Roberto Sousa por dar sua grande contribuição na revisão e formatação da redação deste trabalho, sempre com a competência que lhe é peculiar.

EVANGELISTA, Mitchell Christopher Sombra. **As Transformações Isométricas no GeoGebra com a Motivação Etnomatemática**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo, 2011.

RESUMO

A pesquisa aqui descrita relata uma investigação de caráter qualitativo que teve como proposta possibilitar que alunos de Ensino Médio, de uma escola pública estadual da Região Metropolitana de São Paulo, aplicassem e desenvolvessem o conhecimento do objeto matemático Transformações Isométricas por meio da Rotação, Translação e Reflexão. Foram utilizados, nesta pesquisa, como elementos motivadores, a Etnomatemática com a Geometria Sona do grupo étnico africano chamado Cokwe e a Geometria Dinâmica com o uso do software GeoGebra. A metodologia utilizada, Design Experiment, possibilitou o aprimoramento de uma sequência de atividades e gerou o produto final da pesquisa. Os níveis de desenvolvimento psicogenéticos de Piaget e Garcia (1983), intrafigural, interfigural e transfigural possibilitaram verificar as relações que os alunos identificam entre as figuras geométricas, suas propriedades e estruturas. O desenvolvimento deste trabalho permitiu concluir, após as análises feitas dos protocolos das atividades propostas, que a Etnomatemática, com apoio do GeoGebra, favoreceu a aprendizagem das Transformações Isométricas.

Palavras-Chave: Isometrias, Etnomatemática, Design Experiment, GeoGebra.

EVANGELISTA, Mitchell Christopher Sombra. **As Transformações Isométricas no GeoGebra com a Motivação Etnomatemática**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo, 2011.

ABSTRACT

The research described here reports on a qualitative research had the purpose to enable high school students in a public school in the Metropolitan Region of São Paulo, implement and develop knowledge of mathematical object Isometric Transformations by Rotation, Translation and Reflection. Were used in this research, as motivating factors, the Ethnomatematics with Sona Geometry of African ethnic group called Cokwe and Dynamic Geometry using the software GeoGebra. The methodology, Design Experiment, enabled the improvement of a sequence of activities and created the final product of research. Levels of development psychogenetic Piaget and Garcia (1983), intrafigural, interfigural and transfigural possibility to observe the relationships between students identify geometric figures, their properties and structures. The development of this study revealed, made after the analysis of the protocols of the proposed activities, which supported the GeoGebra and Ethnomatematics favored the learning of Isometric Transformations.

Keywords: Isometric, Ethnomatematics, Design Experiment, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelagem possível em carteiras de mão trançadas - Siptasi. In SIPATSI Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane, de Paulo Gerdes & Gildo Bulafo, Imprensa Globo, Maputo, Moçambique, 1994 12

Figura 2: A aprendizagem do traçado das figuras de Kolam de mãe para filha 14

Figura 3: Padrões de figuras de Kolam 15

Figura 4: Extraída de Gerdes (2008) apud Fontinha (1983, p. 38) 17

Figura 5: Fontinha (1983) apud Gerdes (2008, p.41) 17

Figura 6 - O AKWA KUTA SONA, ou especialista, é o guardião da tradição de seu provo, os tshokwe. Fonte: Scientific American – Edição Especial nº 11, 2005, p. 68 – Etnomatemática 18

Figura 7 - O território (em marrom) dos Tshokwe, destacado no Mapa da África. 19

Figura 8: Fontinha (1983,p.237) 20

Figura 9: Pearson(1983,p.127) 20

Figura 10: Fontinha(1983,p.221) 21

Figura 11: Lusona representando pessoas a recolher cogumelos 22

Figura 12: Sona monolineares com um eixo de simetria 23

Figura 13: Sona polilinear com um eixo de simetria 24

Figura 14: Sona monolineares com dois eixos de simetria 25

Figura 15: Sona polilineares com dois eixos de simetria 26

Figura 16: Sona plolilineares com uma simetria rotacional de 90º 27

Figura 17: Sona com apenas uma simetria rotacional de 180º 27

Figura 18: Sona sem simetria 28

Figura 19: Adaptação e Construção nossa no Geogebra. Fonte: Barroso e Martel (2007) 34

Figura 20: Adaptação e Construção nossa no Geogebra. Fonte: Barroso e Martel (2007) 36

Figura 21: Adaptação e Construção nossa no Geogebra. Fonte: Barroso e Martel (2007) 37

Figura 22: Isometrias são transformações no plano 41

Figura 23: Segmentos AB e PQ equipolentes 42
Figura 24: Adaptada de Araújo (2002, p. 95) e reproduzida no Geogebra 43
Figura 25: Rotação de ângulo igual a π/2. 44
Figura 26: Adaptada de Lima (2007, p. 16) e reproduzida no GeoGebra 45
Figura 27: BARCO Construído pelo autor com o Paint e o Geogebra 45
Figura 28:Reta Δ é o eixo da reflexão Σ_{Δ} 46
Figura 29: F = Q = Q' 47
Figura 30: Q = Q' 47
Figura 31: P e Q não pertencem a Δ 48
Figura 32: Projeções ortogonais de Q e Q' 48
Figura 33: Adaptada de Lima (2007, p. 16) e reproduzida pelo autor no GeoGebra. .. 49
Figura 34: CATAVENTO, construída pelo autor com o Paint e o Geogebra 49
Figura 35: As características Complexas do Delineamento Experimental 62
Figura 36: Tela inicial do vídeo Simetrias 72
Figura 37: Tela inicial do GeoGebra 75
Figura 38: Barra de ferramentas de acesso rápido 75
Figura 39: Ícone de seleção e Ícone de ponto 76
Figura 40: Ícone de reta 76
Figura 41: Ícone para propriedades sobre retas 76
Figura 42: Ícone de curvas 77
Figura 43: Ícone de medidas 77
Figura 44: Ícone de simetrias 77
Figura 45: Ícone de ferramentas extras 78
Figura 46: Ícone de estilo 78
Figura 47: Construção de uma solução da primeira atividade. 80
Figura 48: Barco 80
Figura 49: Barco Rotacionado 80
Figura 50: Construção de uma solução possível sobre reflexão 82

Figura 51: Construção de uma solução da quarta atividade..83

Figura 52: Catavento 83

Figura 53: O Catavento espelhado 83

Figura 54: Construção de uma solução da sexta atividade no GeoGebra...................85

Figura 55: Bandeirinhas no GeoGebra...85

Figura 56: Translação de Bandeirinhas 86

Figura 57: Figura Inicial da Atividade 8 Figura 58: Figura Final da Atividade 8 87

Figura 59: Construção da solução da nona atividade..88

Figura 60: A resposta do aluno Jair: *Começou no centro e em seguida fez as pernas, as simetrias são de reflexão e de rotação.*..91

Figura 61: A resposta do aluno Tadeu*: Reflexão, rotação. O ponto inicial possivelmente foi do centro.* 91

Figura 62:Resposta da aluna Julia: ***Na figura podemos observar as simetrias de reflexão e rotação. O artista também parte do centro da figura porque ele faz segue uma simetria de rotação***...92

Figura 63: Resposta da aluna Karlene: *Começou pelo centro. Simetrias existentes rotação e reflexão.* 92

Figura 64: Barco 98

Figura 65: Barco Rotacionado 99

LISTA DE QUADROS

Quadro 1:Pesquisa-Projeto: experimento de ensino multicamadas. Barbosa, (2006, p.218) 64

Quadro 2: Cronograma do Módulo Único com as Atividades. 71

Quadro 3- Telas da Apresentação um Power Point 74

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS i

LISTA DE QUADROS iv

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 – O PROJETO DE PESQUISA 5

1.1-Problemática da Pesquisa 5

1.2 - Justificativa 5

1.3 - Objetivos 8

CAPÍTULO 2 – SOBRE A ETNOMATEMÁTICA 9

2.1- Perspectivas Etnomatemática 9

2.1 – Aspectos não-Ocidentais 11

2.2 – A Geometria Sona do Povo Tu Tshokwe Filii (Cokwe) 15

2.3 – Etnomatemática no contexto escolar 29

CAPÍTULO 3 - ESCOLHAS TEÓRICAS 31

3.1 – Estágios de Desenvolvimento Psicogenéticos 31

3.2-Transformações Isométricas 38

3.2.1 – ISOMETRIAS DO PLANO 39

3.2.2 - TRANSLAÇÃO 42

3.2.3 - ROTAÇÃO 43

3.2.4 – REFLEXÃO 46

3.3 – Usos da Tecnologia e do GeoGebra 50

CAPÍTULO 4 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 55

CAPÍTULO 5 – ESCOLHAS METODOLÓGICAS 61

5.1 – Metodologia Design Experiment 61

5.2 – Procedimentos Metodológicos 68

CAPÍTULO 6 – AS ATIVIDADES PROPOSTAS 71

6.1 – Contextualizando as Atividades Propostas 71

6.2 – AS ATIVIDADES 71

6.2.1 - VÍDEO “SIMETRIAS” – SÉRIE “ARTE E MATEMÁTICA” 72
6.2.2 - Apresentação da Geometria Sona e do Povo Cokwe 72
6.2.3 – Conhecendo o GeoGebra e suas Ferramentas. 74
6.2.4 - Introduzindo o Conceito de Transformações Isométricas 78
CAPÍTULO 7 – APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS 89
7.1. Primeiro Encontro 89
7.2. Segundo Encontro 93
7.3. Terceiro Encontro 103
7.4. Quarto Encontro 111
CONSIDERAÇÕES FINAIS 117
REFERÊNCIAS 121
ANEXO I 125

INTRODUÇÃO

Foi durante o curso, que ao pesquisar sobre Geometria no Ensino Básico em artigos, dissertações e teses, deparei com a expressão *"African Fractais"*, título do livro de Ron Eglash (2002), pesquisador americano que realizou descobertas de formações de fractais na África e que constatou estas formações por toda a sua cultura, arquitetura e arte.

Ao terminar minha pesquisa para apresentação do seminário de Currículo, fiquei motivado com a expressão supracitada e voltei a debruçar-me sobre a pesquisa e a cultura Africana, percebendo aí uma linha de pesquisa a ser explorada, visto que mesmo nos documentos oficiais e em livros didáticos pouco se orienta a cerca da geometria de outros povos, principalmente quando essa geometria está atrelada à utilização de softwares dinâmicos.

A Geometria, tanto no Ensino Fundamental como no Médio apesar de constar nos Documentos Oficiais através de menções teóricas para a sua utilização, isso não acontece na prática.

Segundo Pavanello (1993) apud Gouveia (2005)

> A maioria dos alunos do 1º grau [Ensino Fundamental] deixa de aprender Geometria, pois os professores das séries iniciais limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo de Geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no 2º grau [Ensino Médio], com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído, nos dois graus do ensino, pela Educação Artística. (GOUVEA 2005, p.6).

Percebendo este abandono em muitas escolas, resolvemos pesquisar e propor, por meio da motivação da etnomatemática e com um suporte tecnológico, a utilização da Geometria Sona (Desenhos do povo Africano Cokwe) para observação de regularidades que possam contribuir para o aprendizado das transformações geométricas.

Então neste trabalho foi assim dividido:

No primeiro capítulo apresentamos a problemática principal do trabalho, justificando o porquê desta inquietude, ou seja, os fatores que me levaram a escolher este tema, demonstrando qual é o objetivo principal.

Apresentamos as transformações isométricas que podem estar envolvidas numa Geometria Sona (Desenhos do povo Africano Cokwe) interagindo com o software *GeoGebra*[1] para a construção do conceito destas isometrias.

Assim, foi possível observar qual contribuição do *GeoGebra*, com o apoio da etnomatemática, permitiu identificar os estágios de desenvolvimentos psicogenéticos nas transformações isométricas numa sequência de atividades.

No segundo capítulo apresentamos aspectos relevantes sobre a etnomatemática, que utilizamos para levar os alunos a refletir sobre o histórico cultural de um povo africano chamado Cokwe, mostrando seus sona (desenhos) no singular e lusona (desenho no plural) que representam lendas, mitos e animais durante um período de caça.

Neste capítulo ainda demarcamos o território aonde se localizam os Cokwes no mapa do continente africano destacando onde estão concentrados os especialistas que realizam estes desenhos.

No terceiro capítulo mostramos as escolhas teóricas segundo os estágios psicogenéticos que são: intrafigural, interfigural e transfigural, bem como as definições dos mesmos, acompanhados de exemplos práticos adaptados de Barroso e Martel (2007) para melhor compreensão. Junto das escolhas teóricas apresentamos as definições das transformações isométricas segundo Lederberger-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1986), Araújo (2002) e Lima (2007) acompanhadas de exemplos.

Mostramos ainda neste capítulo o uso da tecnologia e do *GeoGebra*, fazendo um breve histórico do que entendemos como tecnologia e qual o seu papel na educação, já que consideramos a Geometria Dinâmica como um suporte para a Educação Matemática.

---

[1] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito com multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema, criado por Markus Hohenwarter disponível em http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

No quarto capítulo apresentamos uma revisão bibliográfica dos trabalhos que nortearam neste estudo como as transformações isométricas, etnomatemática e o sobre o uso da tecnologia na educação do ponto de vista de outros pesquisadores com alguns resultados obtidos.

No quinto capítulo nos ativemos à metodologia Design Experiment que foi apresentada como um sistema de engenharia de aprendizagem para estruturar a forma como foi realizada a pesquisa, fechando com os procedimentos metodológicos adotados.

No sexto capítulo trouxemos as atividades propostas que ficaram dispostas num único módulo dividido em quatro encontros.

No primeiro encontro mostramos as apresentações que foram feitas com o projetor de multimídia: um vídeo chamado *“Simetrias”*, acessado por meio do site Domínio Público, e produzido pela TV Cultura da série Arte & Matemática.

Neste mesmo encontro utilizamos telas sobre um histórico cultural do povo Cokwe e seus desenhos na areia, que foram explorados no *GeoGebra*.

Os demais encontros foram compostos por uma sequência de nove atividades sendo as duas últimas com apoio dos desenhos do povo Cokwe.

As atividades aplicadas para registro e análise posterior desta pesquisa, as quais englobaram as transformações isométricas: rotação, reflexão e translação, foram gravadas e filmadas, além dos registros realizados no próprio GeoGebra que nortearam a condução da análise dos resultados do trabalho.

No capítulo sete estão os registros feitos quando da realização das atividades e uma análise dos resultados obtidos, verificando se a nossa questão principal foi respondida com a utilização da metodologia e procedimentos adotados. A intenção deste capítulo era demonstrar se as hipóteses levantadas foram contempladas para poder solucionar a problemática levantada na pesquisa.

Verificamos segundo Piaget e Garcia (1983), em quais estágios de desenvolvimento psicogenéticos os alunos conseguiram atingir com a aplicação da sequência de atividades. Estes estágios investigados foram o intrafigural, o interfigural e o transfigural.

As atividades constavam de uma parte de elaboração do conceito sobre transformações isométricas e vinham sempre acompanhadas da outra parte que chamamos de aplicação, sendo que nestas últimas verificamos se os alunos conseguiram atingir os referidos estágios.

As atividades estavam gravadas em arquivos de mídia digital móveis para cada dupla, onde os alunos tiveram de abri-los e realizar as atividades com o suporte do software *GeoGebra*, que pode ser utilizado diretamente sem a necessidade de instalação nos computadores.

A cada encontro fizemos os registros de gravação em vídeo com uma máquina fotográfica, gravando as respostas e as intervenções que os alunos apresentavam durante a aplicação das atividades.

Por fim apresentamos as considerações finais com propostas de possíveis aprimoramentos atendendo à metodologia utilizada.

CAPÍTULO 1 – O PROJETO DE PESQUISA

1.1-Questão da Pesquisa

Partindo do princípio de que a maioria dos alunos possui dificuldades em compreender as relações Geométricas, quando aplicadas sem uma relação interdisciplinar com problemas do seu dia-a-dia, buscamos apoio na Geometria Sona do povo Cokwe do Continente Africano para relacionar os desenhos que imprimem na areia e representam lendas e mitos como exemplo de correlação cultural bem sucedida.

Utilizando-se das transformações isométricas sem o conhecimento acadêmico, este povo mostra um alto grau de perfeição nas suas construções.

Introduzimos o conceito das transformações isométricas por meio de uma sequência de atividades com a proposta de resolução de problemas de rotação, reflexão e translação construídas com o software *GeoGebra.*

Como de alguma forma a tecnologia, principalmente a computacional, deve estar presente nas escolas, propusemos uma sequência de atividades neste trabalho tendo como princípio a introdução do conhecimento das transformações isométricas com a motivação etnomatemática e utilizando o software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra.

Diante do exposto temos a seguinte questão:

A análise e uso da Geometria Sona do povo Cokwe e o software GeoGebra são agentes motivadores que podem contribuir para a aprendizagem das transformações isométricas?

Esta problemática está posta e todos os instrumentos foram orientados para responder esta questão de pesquisa, que acreditamos ser complexa, porém pôde trazer elementos formativos que nortearam este trabalho e também servirão para contribuir para pesquisas futuras.

1.2 - Justificativa

Desde o estudo ginasial (atualmente ensino fundamental) quando havia na grade curricular a disciplina Desenho Geométrico, e eram realizadas as construções com régua, compasso, esquadro e transferidor, esta disciplina foi fundamental para o meu interesse em Geometria.

Ao ingressar no magistério público em 1995 numa escola Estadual, na qual também realizei o colegial (atualmente Ensino Médio), foi possível perceber que já não havia mais na grade curricular a Disciplina Desenho Geométrico.

Verificamos que, em muitos casos, a geometria está locada para os capítulos finais dos livros didáticos, e quase sempre pelo extenso currículo da disciplina de matemática nunca se esgotam a tempo a álgebra e a aritmética, para dar espaço à geometria. Justificativa que disfarça a má formação atual do professor no que se refere ao aprendizado da geometria, não só por culpa do professor, mas principalmente das instituições de ensino superior que formam o futuro professor.

Ao participar de um curso de especialização em Educação Matemática promovido pela Secretaria de Educação e Cultura em parceria com a Pontifícia Universidade Católica PUC/SP no ano de 2006, foi possível verificar a importância de entrar em contato com alguns softwares de geometria dinâmica. Após ter iniciado o contato neste curso utilizando o Cabri-Geométrè, realizamos muitas atividades de construção de conceitos básicos da geometria. Entretanto o referido software não é livre e, foi necessário procurar na internet algumas opções para substituí-lo por outros softwares também interessantes, como GeoGebra, o Winplot e o Graphmatica.

Com o término da especialização em 2006 percebi que havia mais uma possibilidade de dar continuidade na minha formação, através de uma bolsa de estudos oferecida pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, por meio do projeto Bolsa Mestrado.

Foi então que no ano de 2008 pude ingressar no Mestrado Profissional do Ensino em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, após adquirir a tão sonhada bolsa, portanto tive a chance de seguir com a minha formação continuada.

No ano seguinte em 2009 ao integrar o grupo de pesquisa: TecMEM - Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática, e cursar a disciplina de Autoformação pelo uso das TICs, senti um maior interesse, que já era latente, de utilizar a Geometria com novas tecnologias para a aprendizagem em Educação Matemática, usando a etnomatemática como motivação de aprendizagem.

Neste curso de TICs trabalhamos com o software livre chamado GeoGebra, que além de proporcionar uma interface geométrica, também oferece uma janela com as informações algébricas que simultaneamente se interligam e registram as informações matemáticas quando da realização das atividades.

A Etnomatemática junto com a Geometria se apresentam como áreas da Matemática que geram possibilidades interdisciplinares para construção de conhecimento. No livro: "Geometria Sona - Matemática duma Tradição Africana" de Gerdes (2008) vislumbramos a oportunidade de unir ao estudo das transformações isométricas a motivação Etnomatemática com a utilização do GeoGebra. Esta escolha se deu por se tratar de um software livre e com ótimas opções de fácil manejo de suas ferramentas de simetria.

Contudo percebemos que ao observar as figuras no seu livro, Gerdes (2008) utilizou-se de um software o qual não podemos identificar, pois os desenhos só foram reproduzidos sem a preocupação de apresentar as transformações isométricas.

Uma riqueza histórica de desenhos é realizada apenas com os dedos pelo povo Cokwe, e serão melhores apresentados no capítulo seguinte. Este povo constrói temas com traçados monolineares realizando transformações isométricas, sem a percepção acadêmica, para representar lendas, mitos e fatos cotidianos.

O computador foi uma ferramenta importante para que ficassem registrados todos ou pelo menos a maioria dos desenhos Sona no livro de Fontinha (1983), importante fonte de pesquisa para o material exposto por Gerdes (2008).

Vimos que a reprodução dos desenhos por si só não conseguia reproduzir a cultura matemática intrínseca nos temas e lendas.

A utilização do computador não deve ser só para substituir atividades que são feitas manualmente, ou seja, apenas mudando a maneira de expor certo conteúdo, mas propondo uma nova visão e oferecendo também uma nova abordagem pedagógica para o estudo de objetos matemáticos, caso contrário, usa-se a tela do computador como se fosse uma lousa, apenas registrando conteúdos e pedindo para os alunos copiarem os resultados.

Poucas são as oportunidades disponibilizadas de inserir novas formas de aprendizagem para a educação matemática, pois a maioria dos professores não conhece ou não está preparada pra elaborar aulas diferenciadas, não só com ferramentas tecnológicas modernas, mas também com técnicas especializadas e de abordagens pedagógicas apropriadas aos conteúdos matemáticos. Não se pode culpá-los por isso, apenas registrar tal fato.

1.3 - Objetivos

O objetivo principal deste estudo é desenvolver por meio de uma sequência de atividades, com quatro alunos do terceiro ano do ensino médio, o conceito de transformações isométricas: rotação, reflexão e translação, com o apoio do software de geometria dinâmica, o GeoGebra.

A sequência de atividades privilegiou o aspecto histórico-cultural de um povo africano, os Cokwes, que realizam desenhos chamados de Sona com a geometria das transformações isométricas nos seus desenhos há muitas décadas e esta produção está se perdendo com o passar do tempo.

Fundamentado na Teoria da Etnomatemática D'Ambrósio (2001) e Gerdes (2008), e amparado nos estágios de desenvolvimentos psicogenéticos de Piaget e Garcia (1983) bem como utilizando a tecnologia, e o software GeoGebra, tivemos condições de propor aos alunos situações problemas para o aprendizado das transformações isométricas.

Foi desenvolvida uma sequência de atividades com intenção de fazer com que os alunos pudessem construir o conceito de transformações isométricas em um primeiro momento, e no segundo momento, verificar se os alunos perceberam que estas transformações estão presentes nos Sona.

Por fim averiguamos quais os estágios de desenvolvimento psicogenético os alunos conseguiram atingir ao realizar tanto as atividades de construção, como as atividades de aplicação que foram propostas.

CAPÍTULO 2 – SOBRE A ETNOMATEMÁTICA

2.1- Perspectivas Etnomatemática

> Indivíduos e povos têm, ao longo de sua existência e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos, de reflexão, observação, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo de ticas] para explicar, entender, e aprender para saber fazer [que chamo matema], como resposta à necessidade de sobrevivência e transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo etnos]. Daí chamar o exposto acima de Programa Etnomatemática. (D'AMBRÓSIO, 2001, p. 60).

É impossível pensar os seres humanos afastados de tudo sem notar que estão juntos nesta simbiose com o mundo e as suas relações, ou seja, dizer que são entes distintos e, portanto, que não possuem uma correlação, sendo totalmente independentes um do outro.

Seríamos ingênuos em pensar que o mundo na sua forma bruta se modificou sozinho sem a interferência humana e hoje sabemos que foi o contrário.

Partimos do pressuposto de que o homem, desde os primórdios, já buscava maneiras de melhorar a sua forma de viver e de se relacionar com o seu grupo, com a natureza e com seu habitat, sendo um ser que necessitava criar diferentes formas de sobrevivência.

As tecnologias desenvolvidas pelos primatas ficaram como uma constatação histórica de quando o homem precisou descobrir e aprender a dominar o fogo, a pedra, o ferro.

Mostrou uma evolução mediante a necessidade intrínseca de manter-se vivo num planeta até então selvagem (ontem e ainda hoje, diga-se de passagem), e ainda está relacionada com a necessidade de produzir coisas.

Podemos citar facas e machados feitos de pedra como utensílios domésticos, lanças e flechas como instrumentos de caça e pensarmos: será que não havia, apesar de "primitiva" a matemática de um grupo étnico para realizar necessidades no dia-a-dia? Isso já existiu e acreditamos ser inato no ser humano, mas hoje podemos chamá-la de Etnomatemática?

Acreditamos que apesar das várias formas com as quais os seres humanos conseguiam sobreviver e se desenvolver em lugares distintos podemos sem problemas chamar estas matemáticas de Etnomatemática.

Considerando que cada grupo étnico evoluía no mundo e em diferentes partes, podemos dizer que a aprendizagem e as tecnologias se faziam necessárias para a continuação da raça humana.

Inicialmente com instrumentos e posteriormente com a linguagem e a escrita, outras formas de tecnologia permitiram ao homem perpetuar o seu desenvolvimento até os dias de hoje, apesar dos conflitos de interesses que ainda existem.

Podemos perceber durante um período da história uma ruptura, como explica D'Ambrósio (2001, p. 63) no "Mundo Romano, do currículo que correspondia ao que hoje chamamos de Ensino Fundamental que era organizado como o "trivium", compreendendo as disciplinas Gramática, Retórica e Dialética".

Na Idade Média, com a expansão do Cristianismo, a organização curricular, segundo D'Ambrósio (2001, p. 64), era denominada "quadrivium" compreendendo as disciplinas de Aritmética, Música, Geometria e Astronomia.

Percebeu-se a divisão do que era natural ao ser humano que se desenvolvia, descobria e com a matemática própria, resolvia suas necessidades cotidianas durante séculos, e assim, as comunidades modernas tendem, como uma etiqueta, desvincular o que é natural, cultural e social numa estrutura dogmática.

Segundo D’ Ambrosio (2005)

> No final do século XV e durante todo o século XVI, as nações européias - sobretudo Espanha e Portugal, seguidos de Holanda, Inglaterra e França – estabeleceram colônias em quase todo o planeta. Na América do Sul, as técnicas de numeração dos incas e a aritmética maia não sobreviveram à conquista espanhola. Numerosas outras tradições matemáticas – como a dos sona, na África subsaariana – também sumiram no século XX ou estão a caminho de desaparecer. (D’ AMBROSIO: SCIENTIFIC AMERICAN, N° 11 EDIÇÃO ESPECIAL, 2005, p. 6).

As variantes inventadas da matemática são as etnomatemáticas, pois não podemos conceber como, por exemplo, a multiplicação russa usada isoladamente seja o mesmo algoritmo que utilizamos aqui nas Américas.

Outro exemplo são as calculadoras chamadas de "ábacos" que é uma unanimidade no Oriente. Assim temos de pensar que cada grupo desenvolve a sua matemática própria e caracterizada, então podemos dizer que desde a pré-história os humanos sempre construíam conhecimentos para responder as suas necessidades e desejos.

2.1 – Aspectos não-Ocidentais

As Cestarias ou Sipatsi

Um aspecto a ser analisado de culturas e etnias não-Ocidentais é relativo às relações geométricas obtidas, em particular na construção dos sona que são desenhos que eram feitos na areia representando lendas, histórias e contos que tomaremos como base para expor as transformações geométricas que estão implicitamente presentes nas representações dos desenhos.

Não podemos deixar de exprimir a nossa admiração pelo artesanato africano que através das cestarias também utiliza na sua forma de dobrar uma simetria, gerando um padrão geométrico definido no plano bidimensional e suas possibilidades de execução limitadas pela necessidade de trançar.

Figura 1 - Modelagem possível em carteiras de mão trançadas - Siptasi. In SIPATSI Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane, de Paulo Gerdes & Gildo Bulafo, Imprensa Globo, Maputo, Moçambique, 1994.

Para Gerdes e Bulafo (1994), o eixo de simetria indicado na figura anterior é perpendicular à direção da fita.

> Geralmente diz-se que um padrão-de-fita com eixo de simetria, perpendicular à direção da fita, apresenta uma simetria vertical. O padrão é invariante sob uma reflexão no eixo vertical. A palavra vertical é adequada se o livro em que se encontra a figura estiver numa posição vertical, por exemplo, colocado numa estante: quando estiver assim, é de fato vertical. (GERDES E BULAFO 1994, p.79)

Para fazermos uma relação entre os desenhos do povo Cokwe e de outras culturas não-Ocidentais acreditamos ser importante apresentar também as figuras de Kolam que têm a sua origem na Índia e geralmente são realizadas pelas mulheres mais velhas.

Assim como os Cokwes as Índianas também utilizam uma malha pontilhada para construir suas figuras.

A escolha destas figuras de Kolam[2] e os desenhos dos Cokwes são para mostrar que há duas formas de construção das figuras de Kolam e somente uma forma de representar os desenhos dos Cokwes, ou seja, apenas uma forma para os desenhos da Geometria Sona.

[2] "Kolam" refere-se à arte decorativa desenhada no chão na frente de divindades nas salas de puja (é uma forma de adoração no Hinduísmo), ou na frente das casas no sul da Índia. Na maioria das vezes feitas com pó de farinha de arroz moído e usado para fazer esses desenhos no chão molhado / úmido já borrifado com água (até mesmo as soluções diluídas de esterco de vaca que dá um fundo mais escuro para o chão de barro)

As figuras de Kolam podem ser realizadas tanto contornando a malha pontilhada como também passando por cima dos pontos da malha. Já os desenhos realizados na Geometria Sona são construídos contornando sem passar por cima da malha pontilhada.

Para ilustrar essas semelhanças e diferenças apresentamos uma pequena demonstração das figuras de Kolam e um breve histórico do povo Cokwe com os seus desenhos da Geometria Sona.

As figuras de KOLAM

Existe a construção de desenhos especiais realizados pelas mulheres na Índia, mais precisamente no sudeste da Índia, no estado de Tamil Nadu[3], onde as mulheres cobrem as soleiras da porta de suas casas e praticam um estranho ritual.

As mulheres despejam na soleira uma mistura de esterco de vaca e água e depois constroem figuras complexas utilizando pó-de-arroz. Segunda a tradição o esterco de vaca é para purificar e limpar, enquanto o pó-de-arroz funciona como oferenda, já que é bastante apreciado pelas formigas, simbolizando assim um ato de bondade logo no começo do dia.

> A tradição do Kolam em Tamil Nadu perdura há séculos e segue com uma prática corrente entre as mulheres, sejam elas da cidade ou do campo, universitárias ou analfabetas. Contudo, nesses últimos anos, elas passaram a substituir o arroz moído por pó-de-pedra, disponível no comércio, giz ou tinta, para criar os desenhos – que as formigas não apreciam nenhum um pouco. O traçado cotidiano das figuras é um componente importante da cultura local. As soleiras decoradas são uma fronteira entre os mundos interior e exterior, e as figuras, para a população podem, ao mesmo tempo, proteger os moradores, fazendo uma vigilância, e acolher os visitantes. As mulheres mais velhas da família ensinam às mais jovens todo um inventário de figuras e procedimentos para desenhá-las, além de instruí-las sobre quais são convenientes para os dias comuns e quais são reservadas para ocasiões especiais. A aprendizagem do kolam é uma parte importante da educação da menina. (MARCIA ASCHER: SCIENTIFIC AMERICAN, N° 11, EDIÇÃO ESPECIAL, 2005, p. 49).

---

[3] Tamil Nadu é um dos 28 estados indianos

Vejamos a imagem da figura abaixo, onde uma mãe ensina sua filha a arte de desenhar figuras que decoram a entrada das casas:

Figura 2: A aprendizagem do traçado das figuras de Kolam de mãe para filha
Fonte: American Scientific nº 11, 2005, p. 51

Observamos que na construção das figuras de Kolam, assim como veremos nos Sonas dos Cokwe, a sua iniciação é feita com uma malha pontilhada demarcando o espaço em que será realizada a figura e depois se constrói o desenho, ou seja, utiliza-se uma espécie de geoplano.

As figuras são construídas desenhando por cima ou contornando os pontos, conforme podemos observar na figura seguinte.

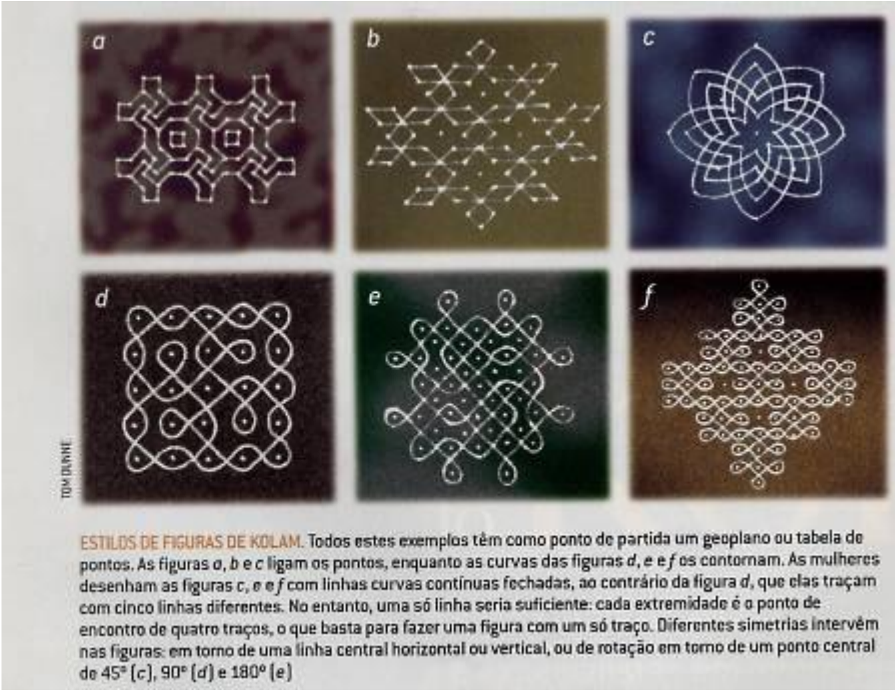


Figura 3: Padrões de figuras de Kolam
Fonte: American Scientific nº 11 – Edição Especial, 2005, p. 50.

É notório que em todas as figuras de Kolam encontramos padrões de preocupação com a simetria. Aqui não podemos afirmar que o conhecimento por parte do povo indiano de Tamil Nadu pode ser acadêmico, mas há um interesse muito grande, especialmente nas famílias, ou grupos de desenhos, que demonstra particularmente ricas idéias matemáticas.

Esses agrupamentos têm chamado a atenção de muitos teóricos da informática, entre aqueles que trabalham com análise e descrição de imagens com o uso de linguagens gráficas.

2.2 – A Geometria Sona do Povo Tu Tshokwe Filii (Cokwe)

Segundo Gerdes (2008) até o final dos anos 50, os nativos africanos do povo Tshokwe, ainda hoje com aproximadamente um milhão de pessoas que vivem no nordeste da Angola, reuniam-se em volta da fogueira e, após realizarem a sua caça, escutavam um deles contar histórias segundo um ritual preciso.

Marcavam no solo arenoso com os dedos, formando uma malha pontilhada de formato, podendo ser quadrada ou triangular dependendo do desenho a ser executado, e executavam os seus desenhos (Sona).

Na sua maioria monolineares, e realizavam os desenhos sem retirar o dedo da areia até o término de toda figura.

Vários Sona eram designados como ritual de passagem dos jovens para a idade adulta.

Segundo Bastin apud Gerdes (2008), as atividades artísticas dos Cokwe começam muito cedo:

> Aprendendo, o jovem diverte-se ao fazer desenhos na areia com os dedos, estes desenhos chamados S*ona*, (nome que hoje se dá à escrita) aparecem nas paredes das casas pintadas por homens, mulheres e crianças. (GERDES 2008. p. 23)

Fontinha (1983), apud Gerdes (2008), descreve que, quando os Cokwe (abreviação de Tshokwe) se encontram no terreiro da aldeia ou no acampamento de caça, sentados à volta da fogueira ou à sombra de árvores, costumam passar o tempo em conversas ilustrando-as com desenhos (*lusona,* plural: *sona*) na areia.

Muitos destes desenhos pertencem a uma velha tradição. Referem-se a provérbios, fábulas, jogos, lendas, animais e desempenham um papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração para a seguinte (Fontinha, 1983 apud Gerdes 2008).

Apesar de muitos Sona representarem lendas, animais e fábulas o interessante já se percebe no início com a marcação de pontos constituindo uma malha ortogonal para facilitar posteriormente a construção, ou seja, até para preparar o terreno para realização do desenho já encontramos um traço do pensamento matemático, como ilustrado nas figuras seguintes.

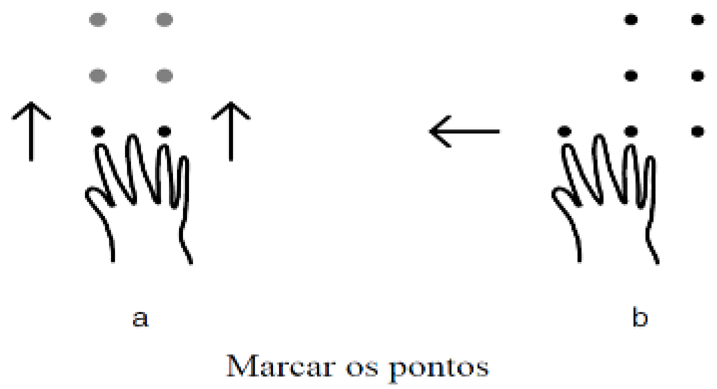


Figura 4: Extraída de Gerdes (2008) apud Fontinha (1983, p. 38)

Todo desenho que era realizado pelos Cokwe tinha um tema, por isso a malha a ser registrada no chão dependia do referido tema a ser construído pelos especialistas.

Vejamos um exemplo.

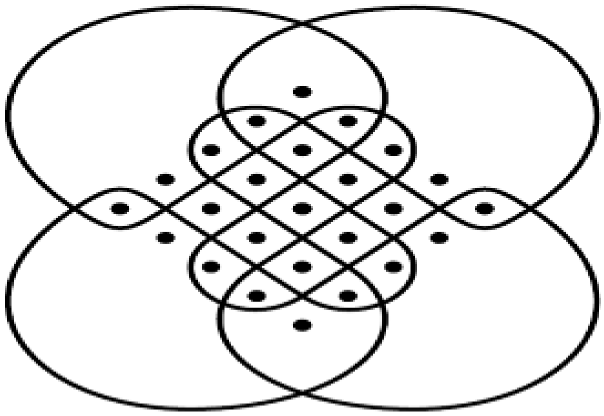


Figura 5: **Fontinha (1983) apud Gerdes (2008, p.41)**

Segundo Fontinha (1983) apud Gerdes (2008)

> A Figura mostra um motivo traçado pelo desenhador cokwe de nome Mwata Muamuchico. Chama-se *sako rya uyanga*, isto quer dizer que "simboliza um pequeno atado de cauda de animais com 'remédios', que o caçador cokwe usa como amuleto na sua arma, para ter sorte na caça e evitar maus encontros. (GERDES 2008, p. 41).

Cada jovem aprendia o significado e a execução dos desenhos mais simples durante a fase intensiva 'escolar' dos ritos de iniciação. Fontinha (1983) apud Gerdes (2008) afirma que:

> É curioso notar que povos vizinhos como: Balubas, Cacongos, Luluas, Bângalas, Sukos e outros, que

> habitam a Luanda, desconhecem completamente estes desenhos, naturalmente porque não viveram a fase intensa da mukanda e do mugonge, ritos de passagem que são tradição do grupo Lunda-Quioco e afins. (GERDES 2008, p. 24).

O significado e feitura dos desenhos mais difíceis são transmitidos por especialistas – *akwa kuta sona* (conhecedores de desenho) – a neófitos interessados nos S*ona*. Estes mestres de desenho faziam parte de uma elite, que procurava deixar o saber que havia recebido de seus antepassados aos seus descendentes diretos (GERDES apud FONTINHA, 1983, p. 44).

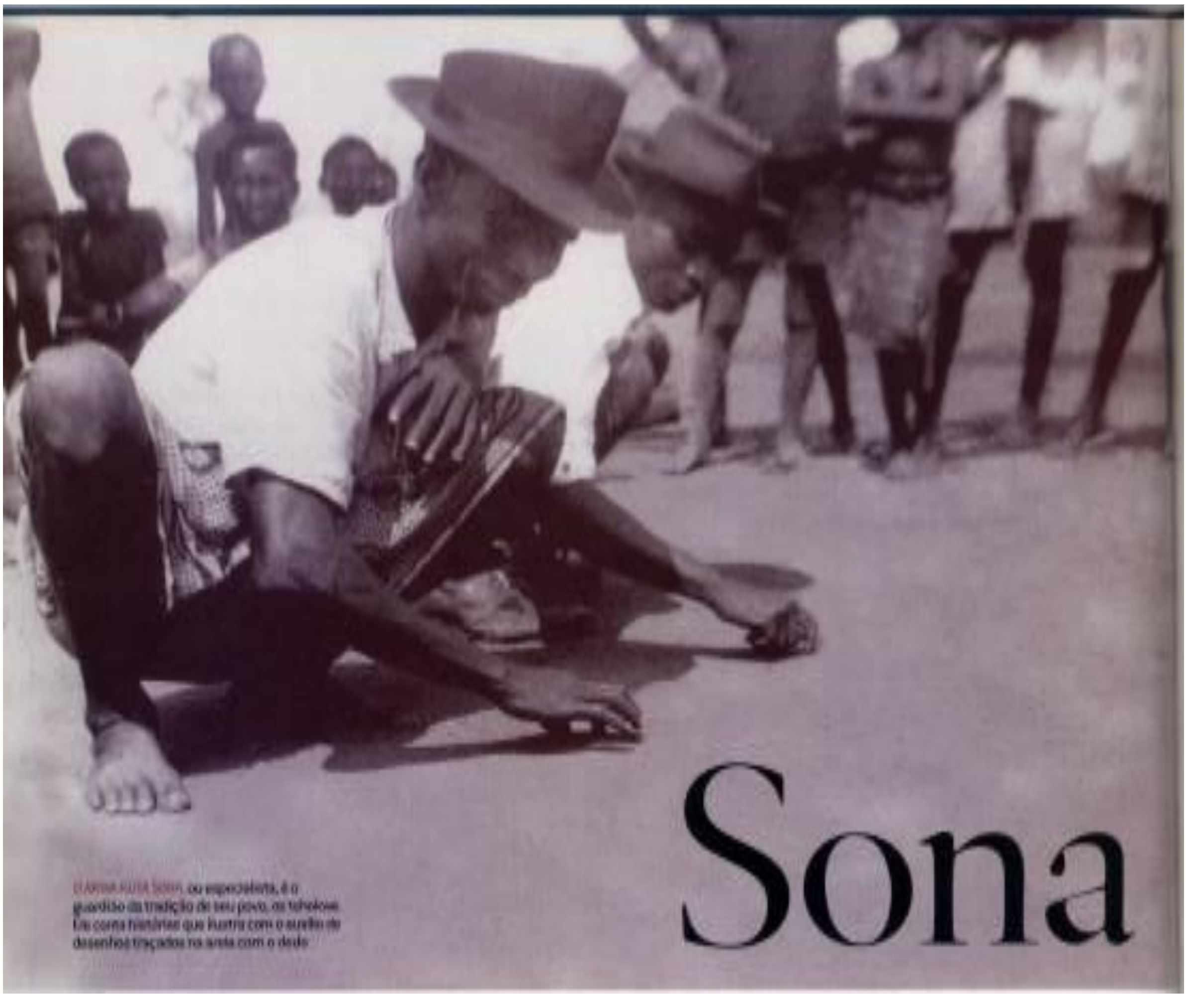


Figura 6 - O AKWA KUTA SONA, ou especialista, é o guardião da tradição de seu provo, os tshokwe. Fonte: Scientific American – Edição Especial nº 11, 2005, p. 68 – Etnomatemática

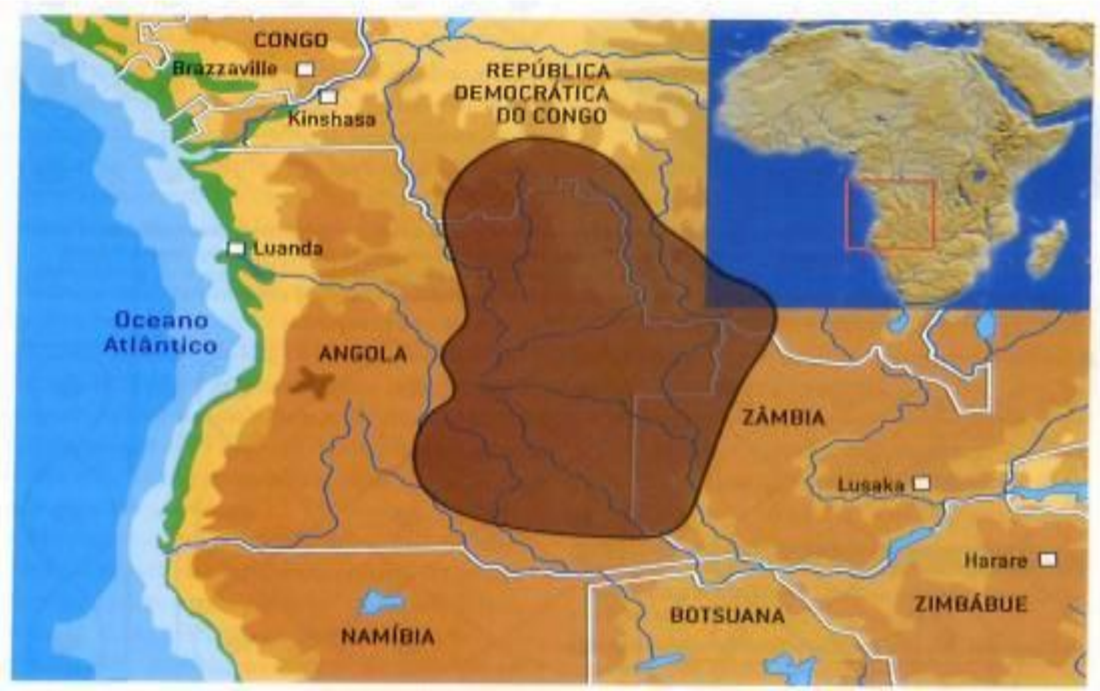


Figura 7 - O território (em marrom) dos Tshokwe, destacado no Mapa da África.
Fonte: Scientific American – Edição Especial nº 11, 2005, p. 68 – Etnomatemática

Segundo Fontinha (1983) apud Gerdes (2008)

> Com a penetração e ocupação coloniais a tradição de desenho entrou em decadência. Alguns missionários e etnógrafos recolheram *sona* e livraram-nos do esquecimento. A maior e a mais importante coleção de *sona* foram concluídas, em 1963, por Fontinha e publicada somente em 1983. Esse livro contém 287 desenhos diferentes recolhidos nos anos 1940 e no início dos anos 1950. Fontinha observa que em cada dia que passa e em cada velho que morre, vêem-se desaparecer testemunhos preciosos do seu passado coletivo. (GERDES 2008, pp.25-26)

Segundo Gerdes (2008) mais de 80% dos S*ona* da maior coleção, a de Fontinha (1983), são simétricos. Mais ou menos 75% dos S*ona* têm pelo menos um eixo de simetria.

Amiúde se encontram desenhos na areia com simetria dupla, ou seja, com dois eixos de simetria perpendiculares entre si. *Sona* com apenas uma simetria rotacional de 180º ou de 90º são menos vulgares.

A frequência de Sona com um ou mais eixos de simetria constitui uma expressão da importância da simetria (axial) como valor cultural.

Nas figuras abaixo apresentamos exemplos de Sona com seus eixos de simetria.

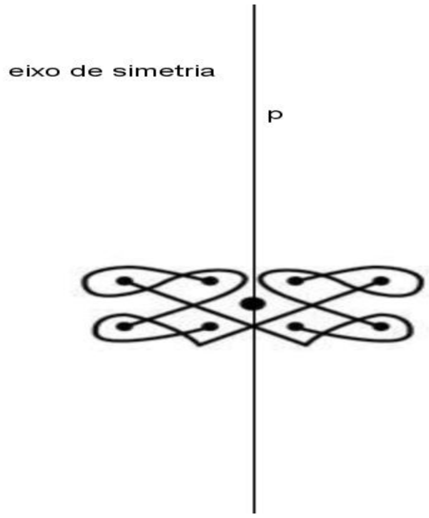


Figura 8: Fontinha (1983,p.237)
Fonte: Gerdes (2008, p. 31)

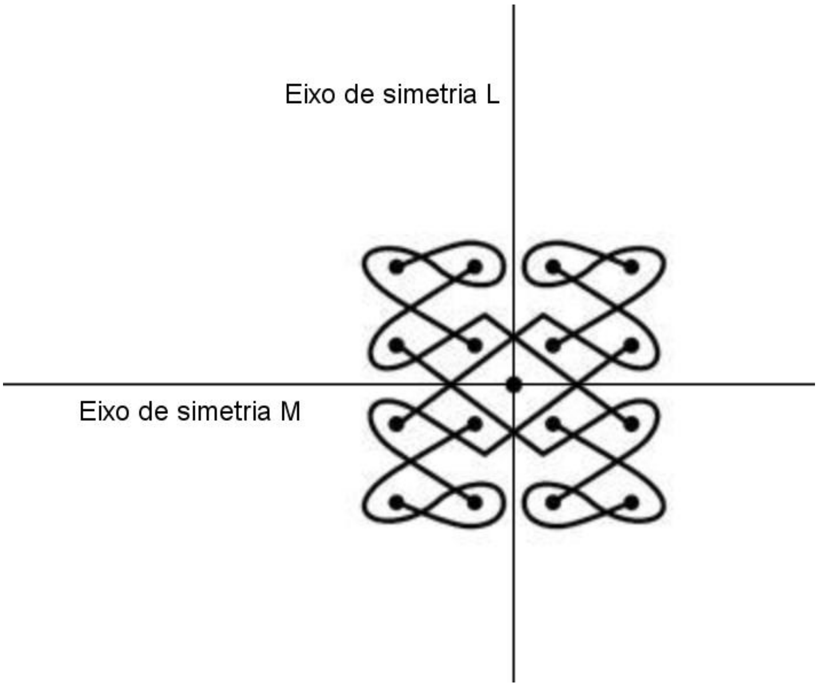


Figura 9: Pearson(1983,p.127)
Fonte: Gerdes (2008, p. 31)

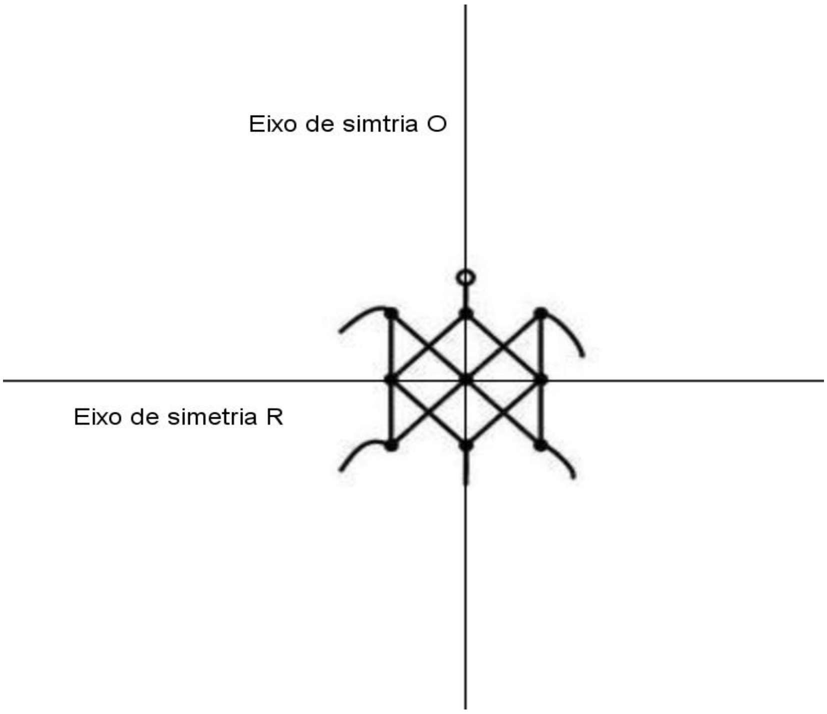


Figura 10: Fontinha(1983,p.221)
Fonte: Gerdes (2008, p. 31)

Colocamos retas nos desenhos para podermos visualizar os eixos principais de cada figura. Agora cada desenho era feito de uma maneira peculiar e desafiava os especialistas a realizarem sem tirar o dedo do chão até o final da figura completa.

Segundo Gerdes (2008)

> Muitos Sona são simétricos e são traçados com apenas uma linha. O livro analisará esta simetria e monolinearidade como valores culturais salientes. Geometria Sona estudará as particularidades de classes de sona e os algoritmos geométricos correspondentes para a sua construção. Revelar-se-á a construção sistemática de padrões de base monolineares, tal como as regras de encadeamento e de eliminação para a construção de sona monolineares. Supõe-se que os especialistas dos sona que inventaram estas regras provavelmente soubessem por que elas são válidas, quer dizer, eles sabiam provar, duma maneira ou doutra, a veracidade que as regras expressam. (GERDES, 2008, p. 15).

A simetria como valor cultural do povo Cokwe apresenta uma série de desenhos facilitando a percepção das transformações isométricas, vamos apresentar e analisar alguns exemplos:

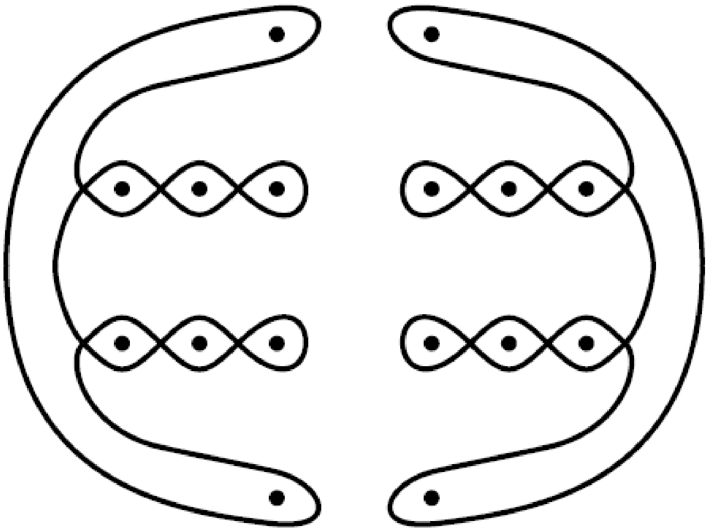


Figura 11: Lusona representando pessoas a recolher cogumelos
Fonte: (GERDES 2008, p. 32 apud FONTINHA 1983, p. 259)

A figura 11 acima apresenta uma construção dividida em duas facilmente percebemos que a parte situada à direita é idêntica à parte da esquerda, sugerindo assim a isometria de reflexão. Isto sem comentarmos a construção que é feita contornando os pontos que sugerem uma série de rotações até fechar a figura no seu todo.

Conforme Gerdes (2008) os Sona podem ser apresentados da seguinte forma:

(1º) Sona monolinear com um eixo se simetria (Ver figura 12);

2º) Sona polilinear com um eixo de simetria (Ver figura 13);

3º) Sona monolinear com dois eixos de simetria (Ver figura 14);

4º) Sona polilinear com dois eixos de simetria (Ver figura 15);

5º) Sona polilinear com uma simetria rotacional de 90º (Ver figura 16);

6º) Sona com apenas uma simetria rotacional de 180º (Ver figura 17);

7º) Sona sem simetria (Ver figura 18).

A seguir a relação das figuras que representam características de simetrias relacionadas nos itens acima com as suas denominações, explicando o que significa cada desenho, mostrando que há uma cultura do povo Cokwe por trás da prática de desenhos na areia.

Segundo Gerdes (2008) na figura 12 apresentam-se exemplos de *Sona* monolineares com uma simetria axial.

> São alusivos a (a) uma cabeça de mocho (mutwe wa tskikungulu); (b) um galo de mato e um chacal (kanga nyi mukuza); (c) um morcego (tshinguzo); (d) uma pele de hiena com as manchas características (tshimbungu); (e) uma ave grande (linguali); (f) o acampamento dos circuncidados (mukanda): a fila de pontos ao centro indica os circuncidados; os pontos ao alto representam as máscaras protetoras do ritual e os de baixo os guardas do acampamento Gerdes (2008, p. 34) apud (Fontinha, 1983, p. 262; cf. Hamelberger, 1952, p. 325). (GERDES, 2008, p. 35)

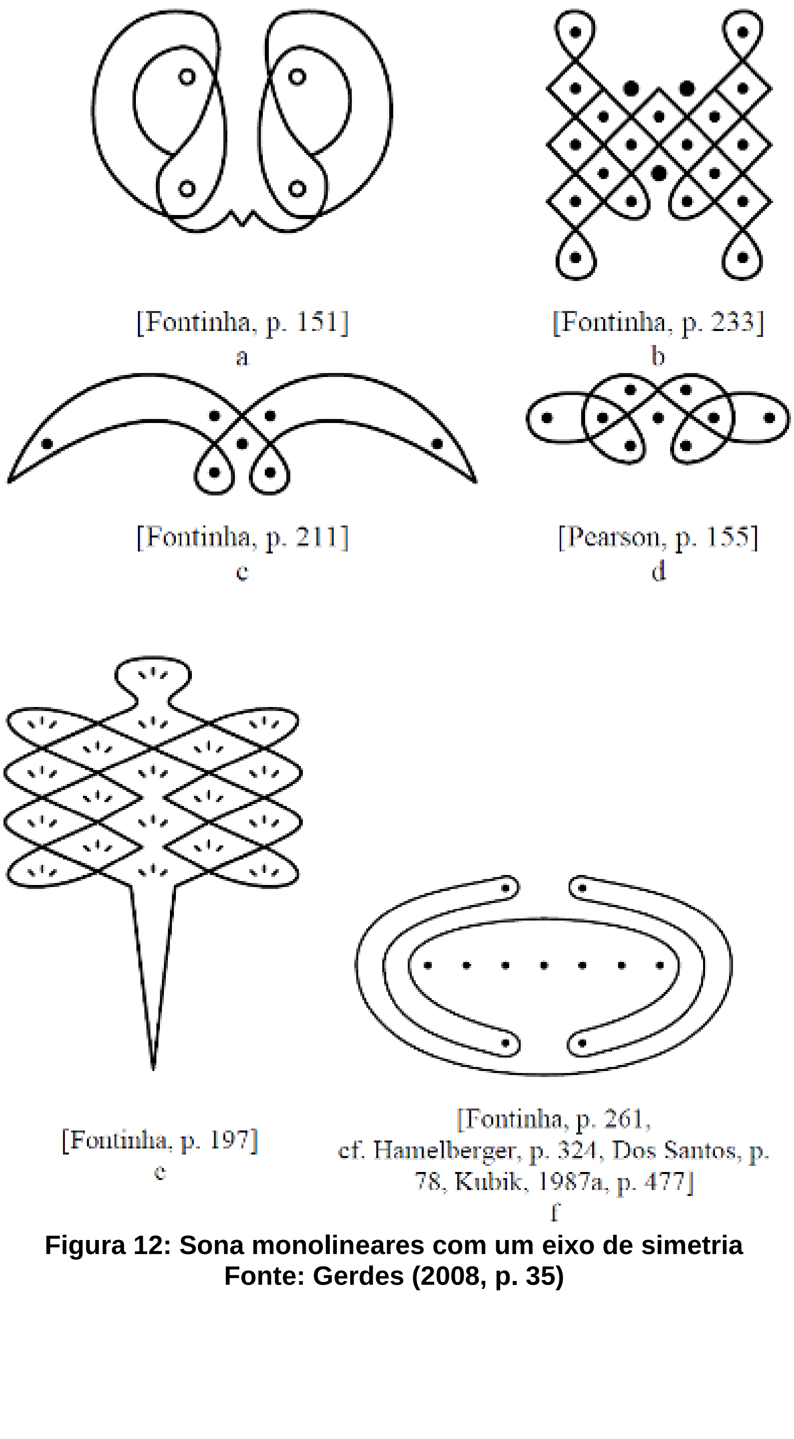


Figura 12: Sona monolineares com um eixo de simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 35)

Segundo Gerdes (2008) exemplos de Sona polilineares com uma simetria axial são dados na Figura 13

> Referem-se a (a) uma máscara de Tshihongo (mukishi wo Tshihongo); (b) um conselho ao fundidor de ferro que deve evitar relações amorosas enquanto durarem os preparativos e a laboração do forno, para não prejudicar o seu bom funcionamento (mukwa lutenga; Fontinha, 1983, p. 132) ou ao casal Sachituco e Nachituco; (c) casal Sachituco e Nachituco; (d) um espírito comendo salalé, formiga branca (mutalo maria tuswa); (e) mulheres e homens juntos (tuhinia na vakuendze); (f) o arco-iris (kongolo). (GERDES, 2008, p. 36)

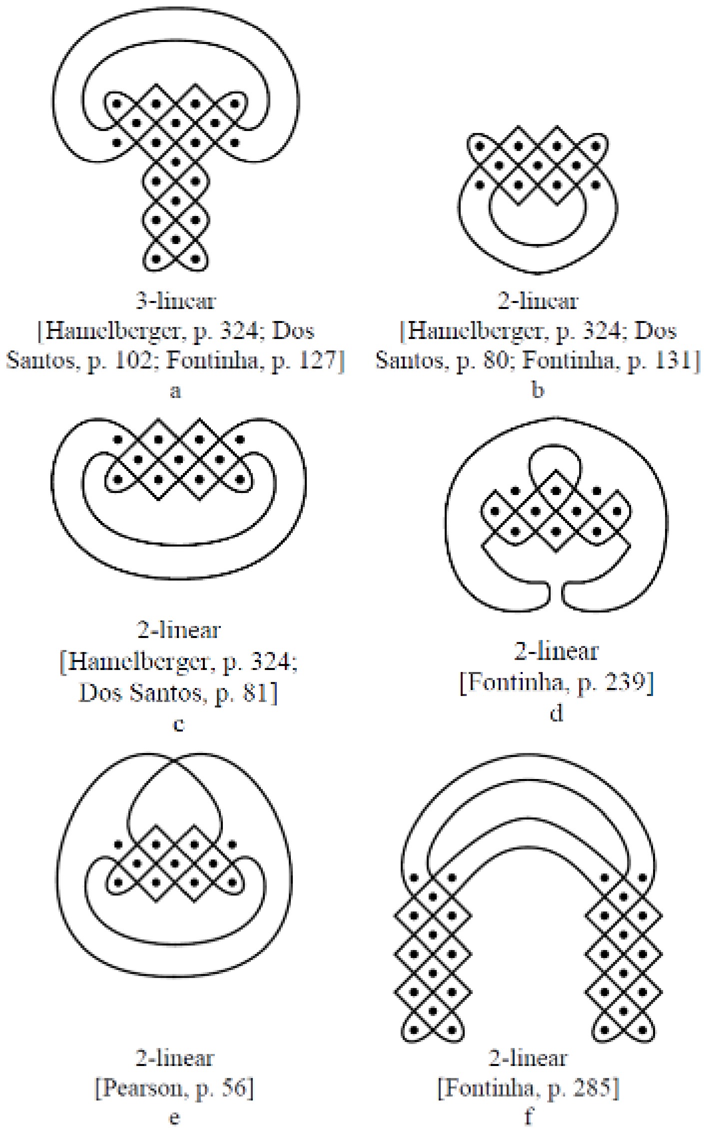


Figura 13: Sona polilinear com um eixo de simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 36

De acordo com Gerdes (2008) na Figura 14 ilustram-se exemplos de *sona* monolineares com simetria dupla. Representam (a) kafundeje, designação dada a uma rapariga após a primeira menstruação; (b) tshanda huri, uma aranha no meio da sua teia; (c) pormenor de parte da cara de uma figura humana.

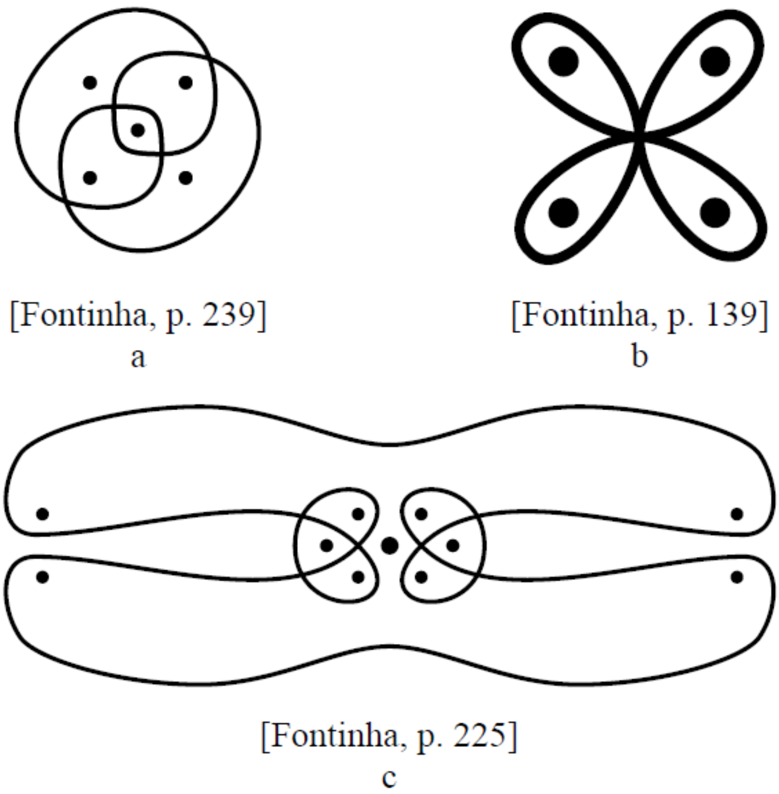


Figura 14: Sona monolineares com dois eixos de simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 37)

Segundo Gerdes (2008) exemplos de Sona polilineares com simetria dupla encontram-se na Figura 15, representando: (a) os pontos cardiais; (b) tshitwano tsha Mwatshisenge, um banco do estilo do grande chefe Mwatshisenge; (c) thua, um cão e uma cadela após o coito; (d) uma armadilha para apanhar ratos; (e) katwanfatshe, um animal lendário devorador de cabritos, que se esconde em buracos nas rochas.

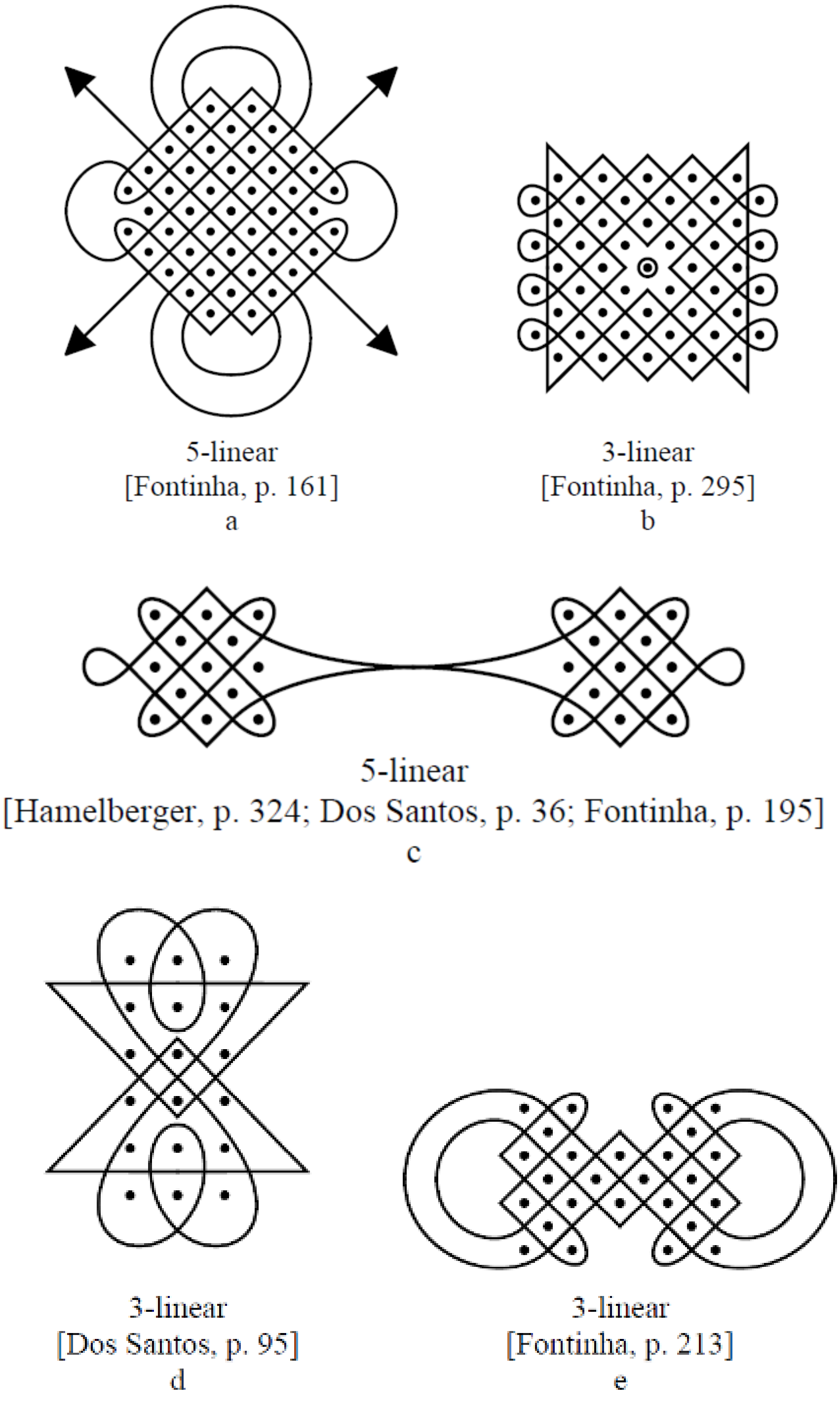


Figura 15: Sona polilineares com dois eixos de simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 38)

Conforme Gerdes (2008) exemplos de Sona com uma simetria rotacional de 90º são dados na Figura 16, ilustrando (a) uma espécie de adivinha; (b) usake wa kamba kanzanga, ou seja, um lugar na floresta onde abundam frutos e animais; (c) tshintu tsha kuma Mwata, lembrando que o Mwata deve tratar bem o seu povo, escravos e visitantes. Gerdes (2008, p.37) apud (Fontinha, 1983, p. 244).

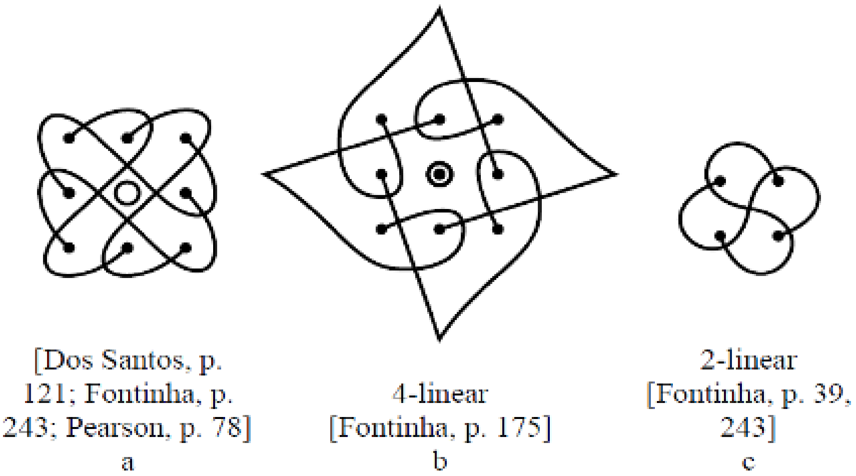


Figura 16: Sona plolilineares com uma simetria rotacional de 90º
Fonte: Gerdes (2008, p. 39)

De acordo com Gerdes (2008) exemplos de sona com apenas uma simetria rotacional de 180º são apresentados na Figura 17, referindo-se (a) aos fumadores de ‘marijuana’ (vakua-liamba); (b) ao jogo denominado tchela (é um jogo de tabuleiro do tipo ‘mancala’, em Angola é jogado frequentemente num tabuleiro retangular de quatro filas, cada uma com oito (ou nove) buracos); (c) a uma espécie de miriápode (tshongolu) e (d) a uma espécie de adivinha (ka-mu-etsha). (Gerdes 2008, p. 40) apud Fontinha (1983)

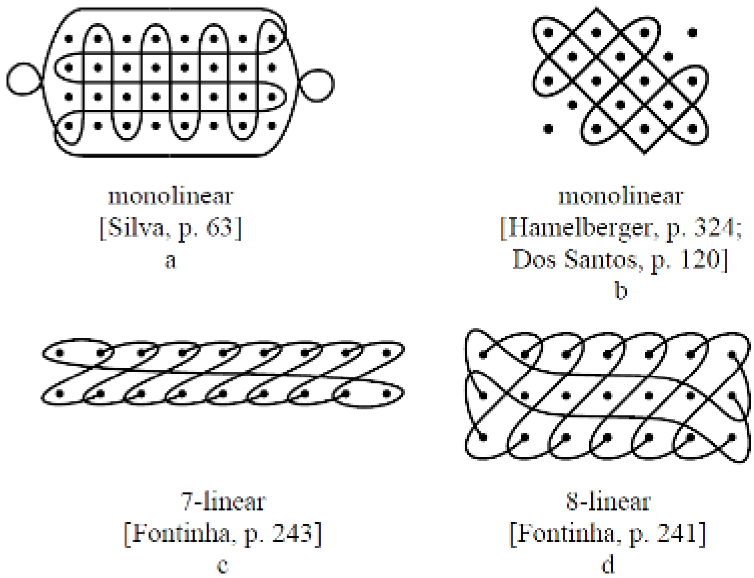
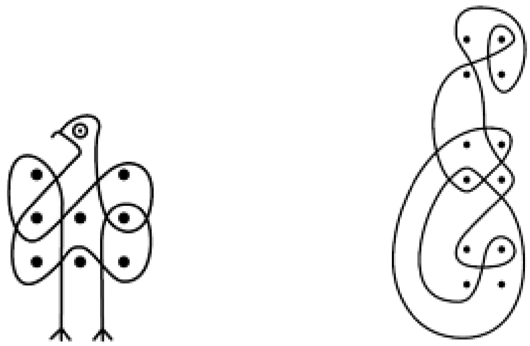


Figura 17: Sona com apenas uma simetria rotacional de 180º
Fonte: Gerdes (2008, p. 39)

Também segundo Gerdes (2008) na Figura 18 mostram-se dois Sona monolineares sem simetria. Não é por acaso que não são simétricos. Este fato relaciona-se com as ideias que pretendem transmitir: (a) representa kusu, um papagaio; (b) lusona alusivo a kuku ou kalamba, ou seja, o pensador, “símbolo de velhice prolongada que personifica o culto ancestral; tem grande importância familiar e representa o chefe do povo” (GERDES, 2008, p. 40).



[Fontinha, p. 153]
a

[Fontinha, p. 39, 85, 129]
b

Figura 18: Sona sem simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 40)

Podemos perceber que o povo Cokwe possui uma contribuição matemática intrínseca no que se refere às transformações geométricas, evidenciando um pouco desta afirmação destacamos nas figuras 8, 9 e 10 os eixos de simetria (a simetria axial) nas figuras Sona.

Acreditamos que na confecção dos Sona, estes foram elaborados através de uma técnica de construção meticulosa que na sua grande maioria são monolineares, ou seja, construídos com uma única linha sem retirar o dedo da areia até o término do desenho, alternando com simetrias de rotação, reflexão e translação.

No nosso trabalho utilizaremos duas atividades com a figura tshanda huri, uma aranha no meio da sua teia compondo transformações geométricas. Uma delas consistirá em selecionar parte da figura original e a partir dela a construção de toda a figura. A outra atividade será construir uma figura semelhante à original utilizando apenas as ferramentas de simetria do software GeoGebra.

2.3 – Etnomatemática no contexto escolar

Podemos dizer que a Etnomatemática foi estruturada por D’Ambrósio como um programa que privilegia o desenvolvimento dos alunos respeitando seus aspectos culturais e sociais.

Numa sociedade com tantas desigualdades sociais, a escola é um espaço privilegiado onde podemos propor um ensino mais humano, principalmente porque cada comunidade escolar possui as suas características próprias.

Verificamos hoje que as escolas tendem a proporcionar um ensino padronizado voltado a resultados de aprendizagem baseados em avaliações externas sem uma preocupação em motivar seus educandos para uma aprendizagem mais humanística, privilegiando um desenvolvimento autônomo e cidadão. Exemplo clássico são os vestibulares.

Baseando-se nos princípios da Etnomatemática propusemos, nesta pesquisa, uma sequência de atividades que privilegiasse a integração do educando na construção de seu conhecimento, onde o educando é parte integrante do seu “saber fazer” e “aprender a conhecer” e “aprender a aprender”.

> Entretanto, qual é a verdadeira função do programa etnomatemático enquanto interveniente nos sistemas formais de ensino? Quais são suas verdadeiras possibilidades? Como explorá-las e implementá-las? São questões que ainda merecem certo destaque. Pois, mesmo reconhecendo a etnomatemática como “um programa de pesquisas em história e filosofia da matemática, com óbvias implicações pedagógicas” (D’AMBROSIO, 2001, p. 27).

Consideramos a diversidade de opiniões como uma característica enriquecedora do processo educativo em transformação. Por isto estamos propondo uma sequência de atividades agrupando uma parte no apoio da Geometria Sona e outra na tecnologia computacional do GeoGebra para entendermos quais são as contribuições pedagógicas que podemos atingir, considerando os estágios de desenvolvimento de Piaget e Garcia (1983).

Diante de nossas ponderações e da necessidade do educando de perceber as diferenças culturais e sociais que estão ao seu redor, a nossa proposta, supracitada, objetiva fazer com que os alunos possam descobrir as maravilhas que a matemática pode propor quando apresentamos os sona do povo Cokwe (abreviação de Tshokwe) e a possibilidade de interação quando da manipulação de alguns sona através da Geometria Dinâmica especificamente no GeoGebra.

CAPÍTULO 3 - ESCOLHAS TEÓRICAS

Neste capítulo apresentamos as escolhas teóricas que balizaram este trabalho, começando pelos estágios de desenvolvimento psicogenéticos de Piaget e Garcia (1983) apresentando definições de rotação, translação e reflexão de Lerdergerber-Ruoff (1982) e Lima (2007) e mostrando alguns exemplos adaptados de Barroso e Martel (2007).

Ainda neste capítulo discorremos sobre tecnologias segundo Kenski (2008) e Moran (2005), procurando fazer uma breve apresentação de geometria dinâmica, a qual faz parte do nosso objeto de pesquisa.

3.1 – Estágios de Desenvolvimento Psicogenéticos

Para este trabalho utilizamos a análise dos estágios de desenvolvimento psicogenético em geometria: intrafigural (análises de objetos), interfigural (estudo das relações e transformações) e transfigural (construção das estruturas) apresentado por Piaget e Garcia.

Piaget e Garcia afirmam que a Geometria inicia-se em registros oficiais a partir da obra “Os Elementos” de Euclides, num período durante o qual o objeto de estudo estava centrado nas propriedades geométricas de figuras e sólidos, portanto se observa nesta obra a formulação de vários axiomas e teoremas. Nenhuma consideração era dada ao espaço, nem consequentemente às transformações dessas figuras num espaço. Vamos chamar essa fase de intrafigural - uma expressão já utilizada na psicologia do desenvolvimento para a construção de conceitos geométricos no aprendizado da criança.

Para podermos entender melhor estes estágios pensados por Piaget e Garcia (1983) fizemos uma contextualização histórica do desenvolvimento da Geometria na História da Ciência e da Matemática para localizar em que momento há uma evolução da psicogênese nos conceitos de cada estágio proposto.

Piaget e Garcia (1983) afirmam que:

> O ponto de partida da análise que apresentaremos aqui é o conjunto dos conceitos desenvolvidos pela escola de Genebra através das investigações em psicologia genética. A fecundidade deste aparelho conceptual, aplicado à história da ciência, mostra não apenas a convergência dos estudos histórico-críticos e psicogenéticos, sustentada desde há muitos anos por um dos autores da presente obra, mas também a possível interação efetiva no processo de elaboração de cada um dos temas. Neste processo, as noções surgidas da análise psicogenética serviram de guia para clarificar desenvolvimentos históricos, ou mesmo para fazer sobressair aspectos importantes que o texto histórico normal deixaria completamente ignorados. Expo-las-emos resumidamente aqui para poder chegar às conclusões que nos conduzem a uma explicação epistemológica da evolução da geometria. (PIAGET E GARCIA, 1983, p.110).

Para realizarmos uma análise com referência na história da ciência e da matemática, identificamos um lapso na história da geometria para conceituar a própria ideia de transformação geométrica sem passar pela análise e pela álgebra.

O desenvolvimento histórico da Geometria segundo Piaget e Garcia (1983) se divide em cinco etapas:

1ª) A era dos Gregos com “Os Elementos de Euclides”: Sem se aprofundarem nos pormenores dos seus Elementos, apresentam a contribuição de quatro dos seus maiores geômetras notáveis: Euclides, Arquimedes, Apolonius e Pappus.

2ª) A era da Geometria Analítica com mudanças significativas no tratamento que foi dado após os gregos, por Descartes com o “Discurso do Método” para bem comparar a sua razão e procurar a verdade nas ciências, que junto com Fermat, introduziu pares de números no lugar dos pontos no plano e as equações nas curvas. Passando por Newton e Leibniz, Bernoulli, finalizando com Euler e Lagrange que reduziram a geometria à análise.

Mas foi com Poncelet (1788-1867) e Chasles (1793-1880) que podemos afirmar claramente a superação da geometria analítica sobre a geometria antiga;

3ª) A Geometria Projectiva, onde Chasles e Poncelet introduzem uma nova concepção da geometria a partir dos métodos algébricos e dão um sentido puramente geométrico aos elementos imaginários;

4ª) Antecedentes da noção de transformação: A noção de transformação está na origem da nova geometria que se desenvolveu no século XIX.

5ª) A última etapa: algebrização foi com Lie e Klein, baseados na noção de grupo de transformações e as invariantes correspondentes, se tornou possível introduzir distinções precisas entre os diferentes tipos de geometria.

A Teoria dos Grupos pela qual Felix Klein se familiarizou através do livro de C. Jordan (1870), segundo Piaget e Garcia (1983), vai fornecer utensílios necessários para reformular os problemas em um nível mais elevado

> Os conceitos de Klein têm como ponto de partida a noção de grupo de transformações do espaço. Ora como Dieudonné indica, a grande originalidade de Klein é ter concebido a relação entre uma geometria e o seu grupo, destruindo os papéis destas duas entidades, sendo, portanto, o grupo o objecto primordial e os diversos espaços sobre os quais ele opera, evidenciando diversos aspectos da estrutura do grupo. (PIAGET E GARCIA, 1983, p.105)

Estágio de Desenvolvimento Intrafigural

Como o próprio nome sugere, este estágio está relacionado com as características internas da figura, ou seja, todas as propriedades: como ângulos, lados, alturas entre outras.

Podemos citar que ao pensarmos em soma de ângulos internos, a primeira ideia e observação que nos chegam são os ângulos internos de um triângulo, de um quadrado ou de um setor circular.

Se nos ativermos a um triângulo, podemos recortar os ângulos, após construir um triângulo qualquer, e colocá-los uns ao lado dos outros, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º e estas características serão constatadas ao verificarmos que este triângulo tem de possuir três lados e três ângulos internos quaisquer não importando o seu tamanho.

Se raciocinarmos de forma análoga com os quadriláteros, nos quais a soma é 360º. Observaremos apenas as relações internas da figura, facilmente demonstramos estas propriedades dos triláteros e quadriláteros.

Iremos partir da teoria para um exemplo prático a fim de mostrar como se apresentam estes estágios de desenvolvimento psicogenéticos na formação dos conceitos geométricos na criança, segundo Piaget e Garcia, conforme já pré-anunciamos:

Estratégia de solução para o estágio Intrafigural

Dado um paralelogramo ABCD, sejam P e Q os pontos médios de AB e BC. Seja o AC diagonal e DP e DQ segmentos que se cruzam em S e T com a diagonal. Prove que AS = ST = CT. Se resolvermos medir diretamente na figura os comprimentos dos segmentos indicados, temos:

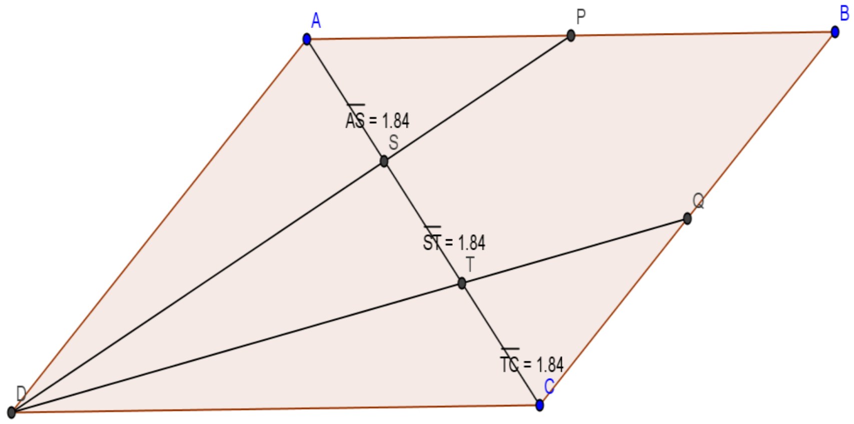


Figura 19: Adaptação e Construção nossa no Geogebra.
Fonte: Barroso e Martel[4] (2007)

Construindo, no GeoGebra, o quadrilátero ABCD e realizando as medidas, podemos comprovar que AS=ST=TC. Esta resolução apresenta conjecturas internas da figura, portanto se encontra no estágio intrafigural do desenvolvimento psicogenético em geometria.

Observamos que utilizando a diagonal AC e os pontos médios dos segmentos AB e BC verificamos dinamicamente com esta construção que os segmentos que ligam os pontos de intersecção S e T entre os segmentos DP e DQ com esta diagonal geram três segmentos nesta mesma diagonal de mesma medida. Sendo eles AS=1,84, ST=1,84 e TC=1,84

O estágio seguinte é caracterizado segundo Piaget e Garcia por esforços para encontrar as relações entre os números. Este se manifesta concretamente na busca de transformações relativas a valores de acordo com as várias formas de correspondência. Contudo, estas transformações ainda

[4] Figura construída no GeoGebra adaptada da atividade proposta por Ricardo Barroso e José Martel no artigo Caracterización geométrica del desarrollo de la tríade piagetiana. Disponível em:<http://personal.us.es/rbarroso/Pruebas/04Barroso.pdf>

não estão subordinadas aos conjuntos estruturados. Este é o período em que a geometria projetiva predomina. Vamos chamá-lo de interfigural.

Estágio de Desenvolvimento Interfigural

Novamente o nome já dá uma prévia da definição para interfigural, relação entre as figuras, ou seja, só as propriedades internas isoladas de uma figura já não são mais suficientes para uma análise geométrica, temos de nos apoiar em outros aspectos das novas figuras envolvidas.

Neste estágio deve haver uma correlação entre as figuras. Vamos supor que ao traçarmos uma diagonal num quadrilátero ABCD qualquer, ficará visível que este quadrilátero agora se tornou também do ponto de vista da análise geométrica em outros dois triângulos, não sendo possível entender somente as propriedades do quadrilátero, mas temos também que relacionar as propriedades dos dois triângulos que se formaram com a construção desta diagonal. Por exemplo: estes dois triângulos são congruentes? Como podemos mostrar que seus lados possuem a mesma medida se for um quadrilátero isóscele? E quanto aos ângulos? O que aconteceu com os ângulos do quadrilátero ao traçar esta diagonal? Quanto mede cada ângulo do triângulo? E assim por diante.

Após estas perguntas, podemos fazer uma relação entre as propriedades do quadrilátero com as dos triângulos formados pela sua diagonal. Já não satisfazem apenas as propriedades do quadrilátero, porque há outras figuras que se formaram após a construção da diagonal, as quais trazem propriedades diferentes, passíveis de análise.

Estratégia de solução para o estágio Interfigural

Ao desenhar a outra diagonal BD no paralelogramo, as diagonais se cruzam nos seus pontos médios. Isto significa que os segmentos AM e DM são médios, e S indica o Baricentro do triângulo ADB. Pelas propriedades 2SM = AS.

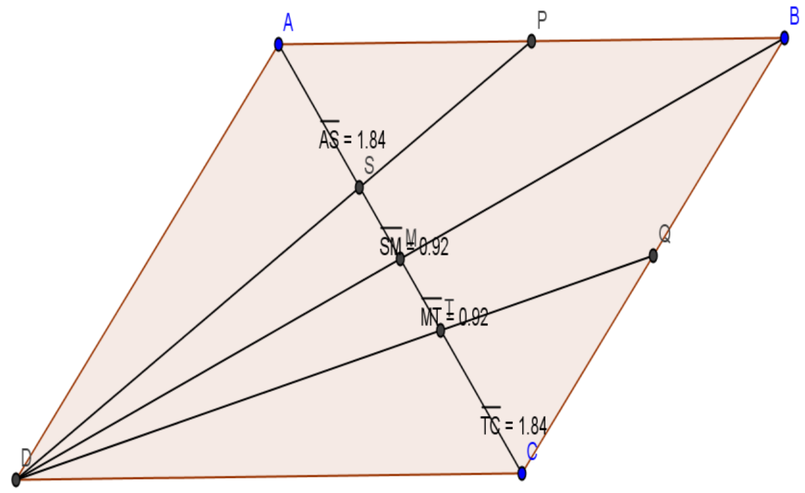


Figura 20: Adaptação e Construção nossa no Geogebra.
Fonte: Barroso e Martel (2007)

Da mesma forma, quando se considera o triângulo BCD, 2MT = TC. Como AM = MC, temos SM = MT e ST = AS = 2SM =TC. Nesta estratégia são apresentados elementos relacionados que não são internos ao valor inicial, mas estabelecem relações entre um novo elemento, a segunda diagonal BD e os triângulos da nova mediana, levando em conta as propriedades de Euclides para a resolução, ou seja, representa o estágio interfigural.

Estágio de Desenvolvimento Transfigural

No estágio transfigural, ocorre a construção de estruturas de nível mais avançado de abstração entre os três propostos por Piaget e Garcia.

Para este estágio tudo se apóia nas estruturas da figura e estas estruturas nem sempre podem ser as mesmas dependendo do ponto de vista do analista.

Podemos partir de um quadrilátero e analisar suas estruturas com base em outro quadrilátero maior, agregado a este gerando uma análise em uma figura matemática ampliada daquela como veremos no exemplo da letra “c” abaixo. Incluímos aquele quadrilátero inicial em uma estrutura de um maior, e nos servimos da homotetia para realizarmos a análise das suas estruturas.

Estratégia de solução para o estágio transfigural

Na rede de paralelogramos na figura, a transformação homotética de centro D e razão 3 permite as seguintes correspondências: AS→WV, ST→ VX, TC→XY

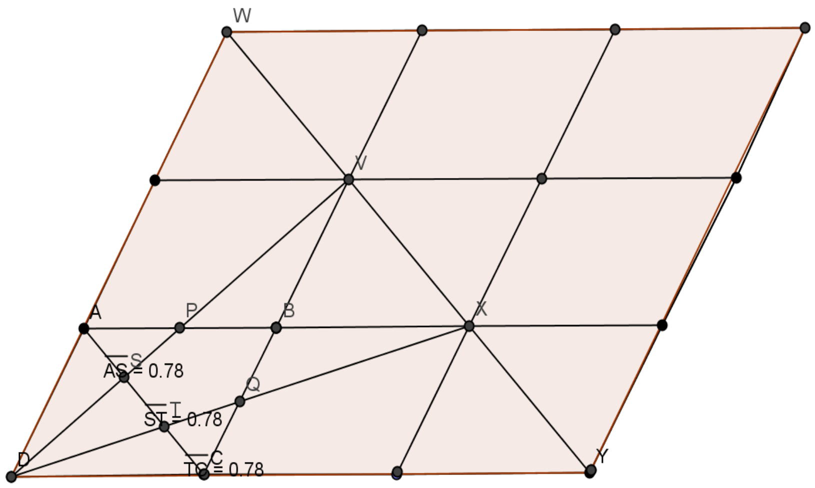


Figura 21: Adaptação e Construção nossa no Geogebra.
Fonte: Barroso e Martel (2007)

Uma vez que WV, VX e XY são diagonais de paralelogramos de mesmo tamanho, originando AS, ST e TC, devem manter-se com a mesma medida. Como podemos observar, desta vez a estratégia de solução é caracterizada pela preeminência da estrutura das transformações homotéticas.

Verificamos geometricamente que o problema é resolvido com uma estratégia do estágio transfigural.

Neste problema geométrico pode-se aplicar uma dupla perspectiva, caracterizada em três figuras geométricas, e fazendo uma generalização de outras duas figuras.

Partindo de uma visão educacional, acreditamos ser significativa uma visão ampla das propriedades das transformações geométricas para os alunos.

Acreditamos que se trata de objetos matemáticos que envolvem uma abstração mais complexa, mas possíveis de serem analisados e percebidos durante observação e registro dos protocolos dessa sequência de atividades.

Segundo Barroso e Martel (2007)

> Do ponto de vista geral, a sucessão de intra-inter-trans para descobrir em todos os domínios e níveis, é a expressão onde os termos das leis de assimilação e equilibração cognitiva impõem qualquer aquisição. Sempre que o assunto trata de um domínio novo, está em primeiro lugar com a obrigação de assimilar os dados em seus esquemas de ação ou conceito. Daí a natureza intra destes conhecimentos iniciais. Os novos esquemas não podem ficar isolados e o processo de assimilação vai levar a pedidos de um equilíbrio de formas mais ou menos estável de coordenação. Daqui advém o caráter inter desta fase. Com vários subsistemas irá ameaçar a unidade de todos, devendo ser compensado através da integração de tendências. A diferença entre o equilíbrio e a integração levanta as estruturas globais que caracterizam o nível trans.(BARROSO E MARTEL, 2007, p. 90, tradução nossa).

No nosso trabalho, estamos analisando estes estágios junto aos alunos do Ensino Médio através de uma sequência de atividades na construção das isometrias com o software livre GeoGebra.

3.2-Transformações Isométricas

Mostraremos, neste capítulo também, as definições e as propriedades das Transformações Geométricas, mas em particular nos ativemos as isometrias.

> O conceito de transformação geométrica surgiu primeiramente considerando os movimentos dos corpos rígidos. Uma das características mais importantes, sob o ponto-de-vista geométrico, é que nesses movimentos o corpo não muda nem de tamanho, nem de forma. Se compararmos a posição inicial e a posição final, podemos fazer uma correspondência entre os pontos do corpo antes e depois do movimento. Seja M um ponto do corpo, onde M ocupa o ponto P no espaço, antes do movimento e seja $\overline{P}$ ponto de correspondência a P, ocupado por M depois do movimento. Se P é levado a $\overline{P}$, e Q em $\overline{Q}$, nesse movimento os segmentos [PQ] e [$\overline{P}\,\overline{Q}$] são congruentes, porque cada um deles corresponde a um segmento fixo entre dois pontos do corpo. A Geometria ao contrário da Cinemática não se interessa pelo percurso e nem pela velocidade da passagem do ponto P até o ponto $\overline{P}$, mas unicamente pela correspondência entre os pontos antes e depois do movimento. Como vimos, tais aplicações conservam a distância entre pontos. Do ponto de vista geométrico, estas aplicações são as mais simples, pois elas mudam unicamente a posição de uma

figura, mas não a sua forma e nem o seu tamanho. (LEDERGERBER-RUOFF, 1982, p.58).

3.2.1 – ISOMETRIAS DO PLANO

Alves e Galvão (1996) definem a palavra transformação da seguinte maneira

> Consideremos uma aplicação F do conjunto de pontos do plano em si mesmo, isto é, uma correspondência que a cada ponto P do plano associa um único ponto desse plano que será indicado por F(P), Diremos que F é sobrejetora se para todo ponto Q do plano existir um ponto P de modo que F(P) = Q. A aplicação F é injetora se F(R) = F(S) implica R=S. Uma aplicação que é simultaneamente injetora e sobrejetora é dita bijetora. Consequentemente, se F é uma aplicação bijetora, podemos garantir que para todo ponto Q do plano existe um único ponto P tal que F(P) = Q.
> **Definição**. Uma transformação do plano é uma aplicação bijetora do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo. Sendo F uma dada transformação do plano, temos não somente que para todo ponto P do plano existe um único ponto Q tal que F(P)=Q, mas também vale a recíproca: para todo ponto Q do plano existe um único ponto P tal que F(P)=Q. Destas considerações segue a existência da aplicação F^{-1}, chamada **inversa** da transformação F, definida por $F^{-1}(Q)=P$ se e somente se F(P)=Q. Uma verificação simples mostra que F^{-1} é também uma transformação do plano e além disso, $(F^{-1})^{-1} = F$, (ALVES E GALVÃO, 1996, p. 17).

Lerdergerber-Ruoff (1982) define isometria

> **Isometria.** Uma aplicação de P_ϵ em P_ϵ, que conserva distâncias, chama-se isometria, isto é, se Ω é uma isometria, e P e Q dois pontos arbitrários, e se $\overline{P}$ =(P)Ω e $\overline{Q}$ =(Ω)Ω, então [PQ] = [$\overline{P}$ $\overline{Q}$] (LERDERGERBER-RUOFF, 1982, p. 58).

Lerdergerber-Ruoff (1982) apresenta os teoremas e as demonstrações que se seguem.

Teorema: Toda isometria Ω aplica três pontos colineares em três pontos colineares e três pontos não colineares em três pontos não colineares.

Demonstração: Sejam A, B e C três pontos e $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ suas imagens por Ω. Como Ω é uma isometria, valem [AB] = [$\overline{A}$ $\overline{B}$], [AC] = [$\overline{A}$ $\overline{C}$], [BC] = [$\overline{B}$ $\overline{C}$].

A, B, C serão alinhados se, e somente se, valerem uma das três igualdades:

[AB] + [BC] = [AC],

[AC] + [CB] = [AB],

[BA] + [AC] = [BC],

Isto é, se, e somente se, valerem uma das três igualdades:

$[\overline{A}\ \overline{B}] + [\overline{B}\ \overline{C}] = [\overline{A}\ \overline{C}]$,

$[\overline{A}\ \overline{C}] + [\overline{C}\ \overline{B}] = [\overline{A}\ \overline{B}]$,

$[\overline{B}\ \overline{A}] + [\overline{A}\ \overline{C}] = [\overline{B}\ \overline{C}]$,

Logo, se, e somente se, $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ forem alinhados.

Este teorema implica:

Teorema: Isometria são transformações de P_ϵ

Demonstração: Precisamos mostrar que toda isometria Ω é uma aplicação bijetora de P_ϵ em si, isto é, que Ω é injetora e sobrejetora.

a) Sejam P e Q dois pontos distintos de P_ϵ, $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ seus pontos imagens por Ω. De [PQ] = $[\overline{P}\ \overline{Q}] \neq 0$, segue que $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ são distintos. Logo, Ω é injetora.

b) Seja $\overline{P}$ um ponto arbitrário de P_ϵ. Vamos mostrar que existe um ponto P ϵ P_ϵ, tal que $\overline{P}$ =(P) Ω.

Sejam A, B e C três pontos não alinhados e $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ suas imagens por Ω. Pelo teorema anterior $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ também não são alinhados. Uma das retas $\overline{A}\ \overline{B}$, $\overline{B}\ \overline{C}$ ou $\overline{A}\ \overline{C}$ não contém o ponto $\overline{P}$. Vamos supor, por exemplo, que $\overline{P}$ não esteja na reta $\overline{A}\ \overline{B}$. Seja $\overline{P}$' o ponto simétrico de $\overline{P}$, pela reta $\overline{A}\ \overline{B}$.

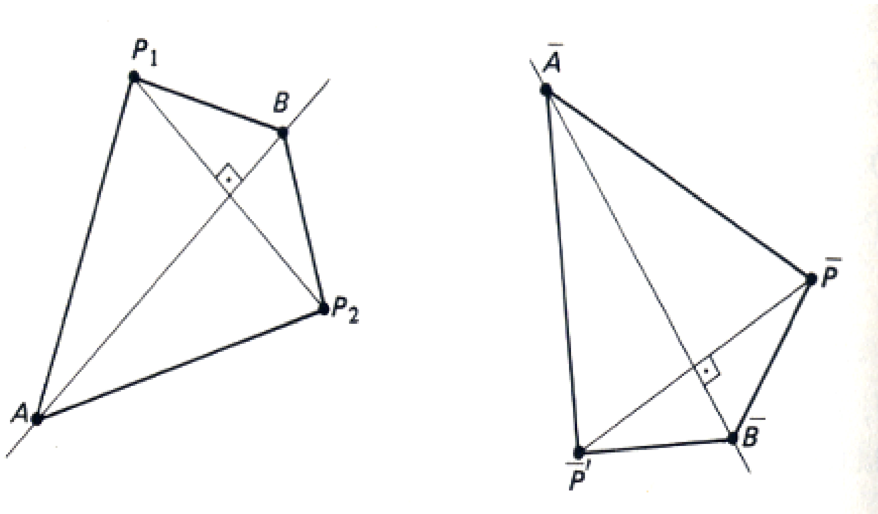


Figura 22: Isometrias são transformações no plano
Fonte: Lerdergerber-Ruoff, 1982, p.60.

Existem univocamente dois pontos P_1 e P_2 (simétricos em relação à reta AB), tais que os seguintes triângulos são congruentes:

$\Delta(ABP_1) \equiv \Delta(ABP_2) \equiv \Delta(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{P}) \equiv \Delta(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{P}')$

Seja $\overline{P}_1$ a imagem de P_1, por Ω. Logo,

$[AP_1] = [\overline{A}\ \overline{P}_1]$ e $[BP_1] = [\overline{B}\ \overline{P}_1]$.

Como $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ são os únicos pontos com essas distâncias de $\overline{A}$ e $\overline{B}$ segue

$\overline{P}_1 = \overline{P}$ ou $\overline{P}_1 = \overline{P}'$.

Analogamente segue para a imagem $\overline{P}_2$ de P_2, por Ω.

$\overline{P}_2 = \overline{P}$ ou $\overline{P}_2 = \overline{P}'$

Como P_1 e P_2 são distintos, as suas imagens são distintas (pois Ω é injetora); portanto, P_1 ou P_2 é aplicado em $\overline{P}$ por Ω, o que mostra que Ω é sobrejetora.

Logo, se Ω é injetora e Ω é sobrejetora, então, Ω é bijetora e Ω é uma transformação geométrica.

3.2.2 - TRANSLAÇÃO

Segundo Lima (2007)

> A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de vetor (do Latim "vehere" = transportar). Na realidade, podemos definir os vetores do plano a partir das translações. Diremos que dois segmentos orientados AB e CD, no plano π, são equipolentes quando $T_{AB} = T_{CD}$. Isto corresponde à definição tradicional pois $T_{AB} = T_{CD}$ se, e somente se, os segmentos AB e CD são paralelos, tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido(ou seja, se, e somente se, os pontos médios de AD e BC coincidem). Em seguida, diremos que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, de origem A e extremidade B, é o conjunto dos segmentos orientados equipolentes a AB. Então podemos escrever T_v em vez de T_{AB} e dizer que T_v é a translação de vetor v. (LIMA, 2007, p.20).

Dado o segmento orientado AB e o ponto P no plano π, existe um único ponto Q em π tal que os segmentos orientados AB e PQ são equipolentes, isto é, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = v$. Q é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AP como lados. Escreve-se Q = P + v e diz-se que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ transportou o ponto P para a posição Q. Naturalmente, $Q = T_{AB}(P) = T_v(P)$.

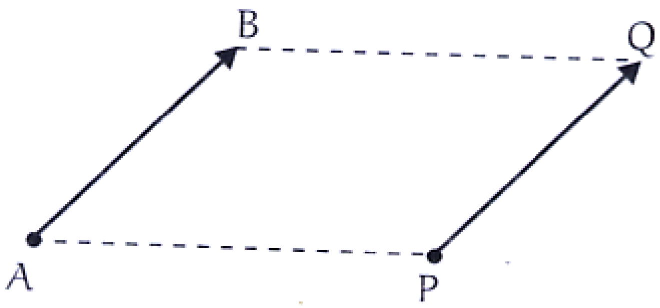


Figura 23: Segmentos AB e PQ equipolentes
Fonte: (Lima, 2007, p. 20).

Araújo (2002) afirma ainda que a transformação mais simples seja a translação porque está associada a um vetor AB, tal que ao efetuarmos uma translação de um ponto C por este vetor AB encontraremos um ponto D tal que CD=AB. Vamos ilustrar com um exemplo proposto por Araújo (2002) reconstruído no GeoGebra, em que podemos encontrar a imagem de figuras básicas. Exemplo: São dadas duas circunferências C_1 e C_2, uma reta L, e um número d > 0. Encontre uma reta paralela a L que intersecte C_1 e C_2 em pontos $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$ tais que $|P_1P_2| = d$.

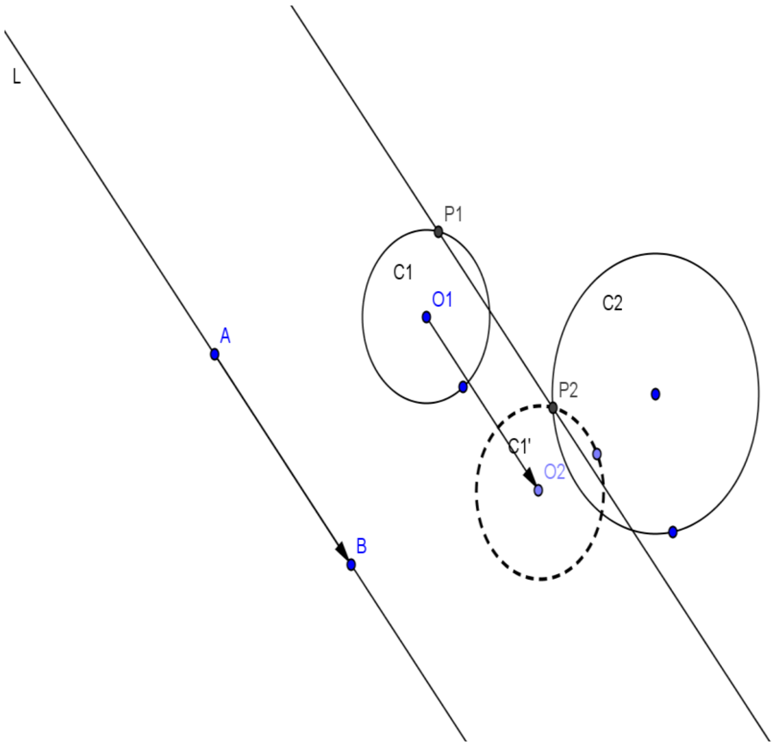


Figura 24: Adaptada de Araújo (2002, p. 95) e reproduzida no Geogebra

Marcamos, na reta L, dois pontos A e B à distância d um do outro. Podemos então ter dois casos. P_2 é a imagem de P_1 pela translação associada à AB, ou pela translação associada a BA. Tratamos só do primeiro caso: P_2, sendo imagem do ponto $P_1 \in C_1$, pertence à imagem C'_1 de C_1 pela translação associada à AB; logo P_2 é um dos pontos de intersecção de C'_1 com C_2 (caso haja outro ponto de intersecção, ele conduz a outra solução do problema).

3.2.3 - ROTAÇÃO

Segundo Alves e Galvão (1996) o estudo das rotações surge da necessidade de considerarmos uma orientação para os ângulos no plano.

Os ângulos serão positivos, portanto, orientados no sentido anti-horário e negativos, se orientados no sentido horário.

Alves e Galvão (1996) apresentam a seguinte definição para a rotação

> **Definição**. Dados um ponto O do plano e um número real α satisfazendo $-\pi < \alpha \leq \pi$, a rotação de centro O e o ângulo α é aplicação que fixa o ponto O e associa a cada ponto P do plano, P distinto de O, o ponto P' pertencente à circunferência de centro O e raio OP e tal que a medida do ângulo orientado ∟POP' é igual a α.
> A rotação de centro O e ângulo α será denotada por $R_{O,\alpha}$. Decorre imediatamente da definição que se $\alpha = 0$ então $R_{O,0} =$ Id, Id a transformação identidade do plano. (ALVES E GALVÃO, 1996, p. 61).

Segundo Alves e Galvão (1996) se $\alpha = \pi$ a rotação coincide com a reflexão em relação ao ponto O, isto é, $R_{O,\pi} = R_O$ e para este valor de α já temos várias informações sobre o comportamento da transformação.

Podemos estabelecer naturalmente a definição de rotação para ângulos orientados de medida arbitrária, estabelecendo que

$R_{O,\alpha+2k\pi} = R_{O,\alpha}$, $\alpha \in]-\pi, \pi]$, $k \in Z$.

Portanto, para estudarmos as propriedades das rotações, é suficiente analisá-las para os valores do ângulo α no intervalo $]-\pi, \pi]$.

A figura 25 mostra um efeito divertido da rotação de ângulo $\pi/2$.

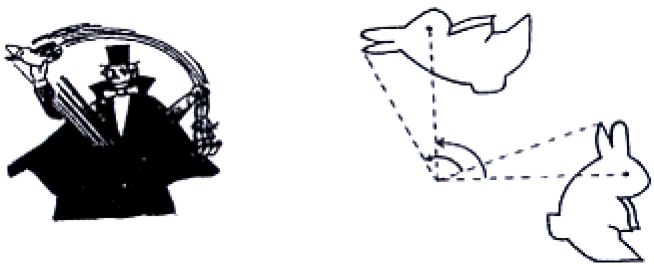


Figura 25: Rotação de ângulo igual a π/2.
Fonte: Alves e Galvão, 1996, p. 62

É imediato verificar que $R_{O,\alpha}$ é uma transformação do plano, isto é, que a aplicação anterior definida é injetora e sobrejetora.

Lima (2007) apresenta a simetria em torno de um ponto como:

> Tomemos um ponto A no plano π. A simetria em torno de A é uma função $S_A: \pi \rightarrow \pi$ assim definida: $S_A(A) = A$ e para, $B \neq A$, $S_A(B) = B'$ é o simétrico de B relativamente a A. Noutras palavras, A é o ponto médio do segmento de reta BB'. Para ver que S_A é uma isometria, basta ver que os dados B, C $\in \pi$, os triângulos ABC e AB'C' são congruentes, pois AB = AB', AC = AC' e os triângulos BAC, B'AC' são opostos pelo vértice, Logo BC = B'C'

Vejamos o que se segue:

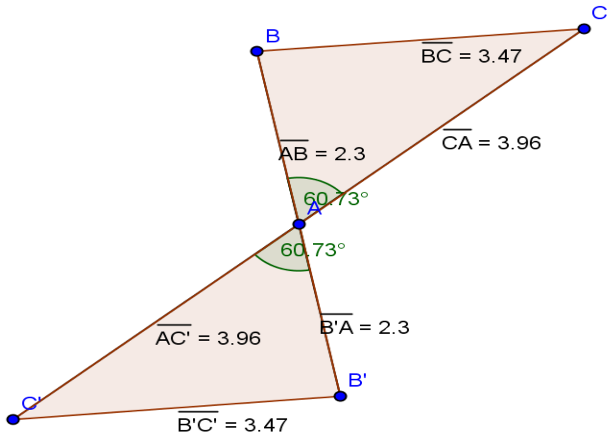


Figura 26: Adaptada de Lima (2007, p. 16) e reproduzida no GeoGebra

Utilizamos a rotação na situação de ensino para apresentá-la com relação a um ponto por um ângulo, onde os alunos foram provocados a realizarem uma atividade que tem o objetivo de construir o conceito de rotação recorrendo às ferramentas do software dinâmico GeoGebra.

Um exemplo desta aplicação pode ser verificado abaixo.

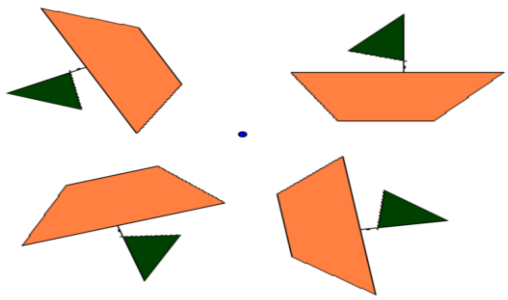


Figura 27: BARCO Construído pelo autor com o Paint e o Geogebra

Os alunos foram provocados a construir a figura anterior com Rotação da figura barco criada no Paintbrush e aplicada a rotação de 90° com o software GeoGebra com a ferramenta *Girar em Torno de um Ponto*, ou seja, designando um ponto fixo que não está contido na figura, e clicando na figura, e depois no ponto, abrirá uma caixa de ferramenta que solicitará a medida do ângulo ao qual será aplicada a rotação, no caso utilizamos 90°.

3.2.4 – REFLEXÃO

Conforme Lerdergerber-Ruoff (1982)

> Os exemplos mais importantes de isometrias são as reflexões em retas, pois, como veremos a seguir, toda isometria pode ser representada como um produto finito de reflexões em retas. (LERDERGERBER-RUOFF,1982, p. 63)

Lembremos da seguinte definição:

Reflexão numa reta. Seja Δ uma reta. A aplicação que leva cada ponto P ao ponto P', simétrico em relação à reta Δ, chama-se reflexão na reta Δ e indica-se por Σ_{Δ}. A reta Δ chama-se eixo da reflexão Σ_{Δ}.

Temos: $\overrightarrow{FP'} = -\overrightarrow{FP}$

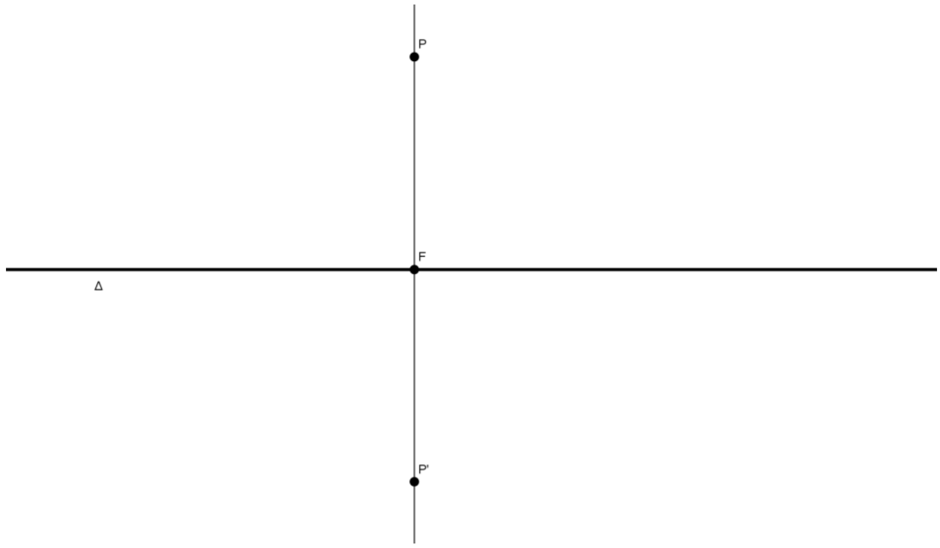


Figura 28:Reta Δ é o eixo da reflexão Σ_{Δ}

Teorema: A reflexão Σ_{Δ} é uma isometria.

Demonstração: Precisamos mostrar que quaisquer que sejam os pontos P e Q e suas imagens P' e Q' por Σ_{Δ} valem $|PQ| = |P'Q'|$.

Distinguimos os seguintes casos:

a) Se P e Q pertencem a Δ, então P = P' e Q = Q' e, portanto, vale a afirmação.

Temos então F = Q = Q’

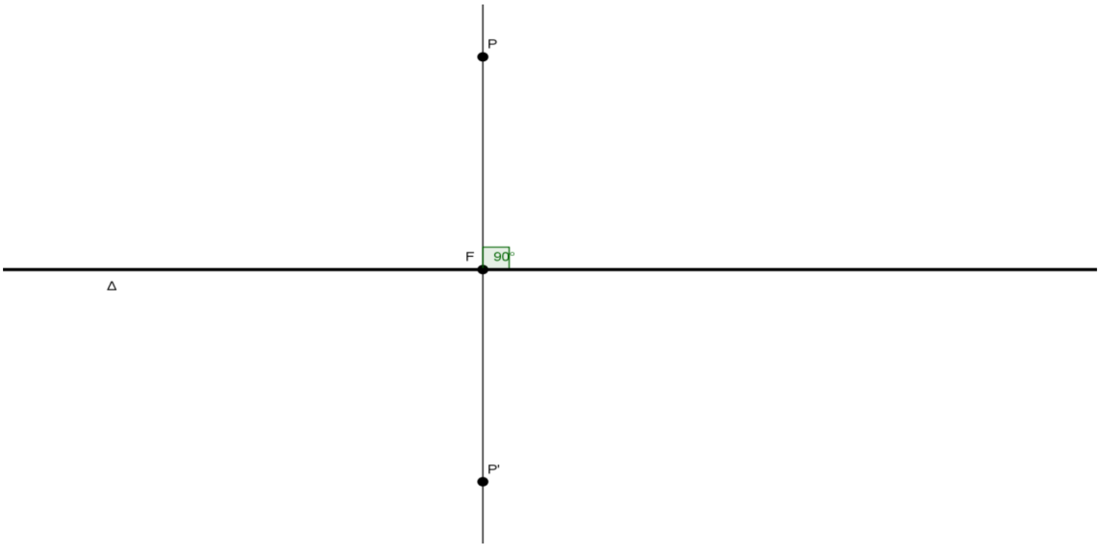


Figura 29: F = Q = Q’

b) Se P não pertence a Δ, e Q pertence a Δ, vale somente Q = Q’.

Seja F a posição ortogonal de P sobre a reta Δ. Se Q = F, temos imediatamente $|PQ| = |P'Q'|$.

Temos Q = Q’

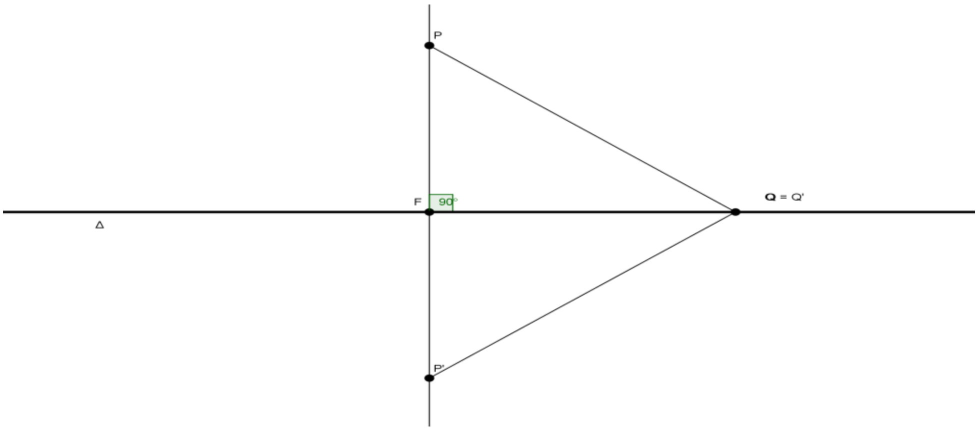


Figura 30: Q = Q’

Se Q ≠ F, os triângulos Δ(FPQ) e Δ(FP’Q’) = Δ(FP’Q) são congruentes, pois eles têm dois lados congruentes e um ângulo reto. Logo, $|PQ| = |P'Q'|$. Quando P pertence a Δ, e Q não pertence a Δ demonstra-se a afirmação de modo análogo.

c) Se nem P nem Q pertencem a Δ, consideremos F e G as projeções ortogonais de P e Q, respectivamente, sobre Δ.

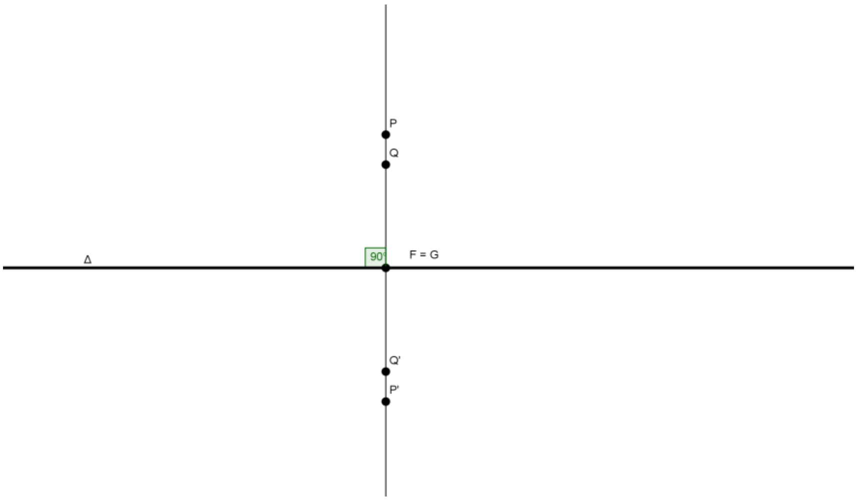


Figura 31: P e Q não pertencem a Δ

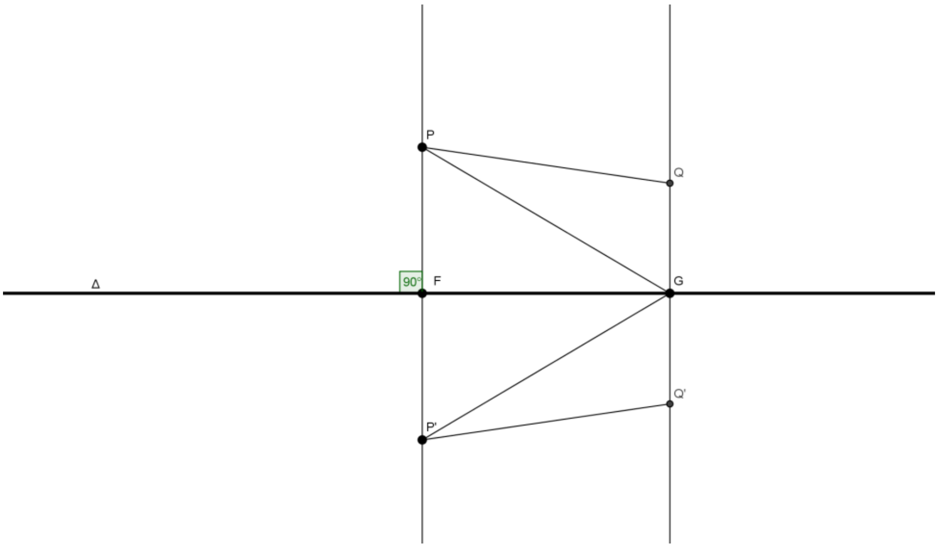


Figura 32: Projeções ortogonais de Q e Q'

Se F = G, segue, $|PQ| = |P'Q'|$.

Se F ≠ G, vemos, como no caso do item (b), que os triângulos Δ(PFG) e Δ(P'FG) são congruentes. Logo os triângulos Δ(PGQ) e Δ(P'GQ') também são congruentes. Portanto, $|PQ| = |P'Q'|$, também neste último caso.

Apresentamos exemplos de reflexão em torno de uma reta, que será novamente construída no GeoGebra com um exemplo adaptado de Lima (2007) e depois uma figura da sequência de atividades.

Seja r uma reta no plano π. A reflexão em torno da reta é a função Rr: $\pi \rightarrow \pi$ assim definida: R_r (B) = B para todo B ϵ r e, para B $\notin$ r, R_r (B) = B' é tal que a mediatriz do segmento BB' é a reta r. Noutras palavras, seja A o pé da perpendicular baixada de B sobre r. Então A é o ponto médio do segmento BB'.

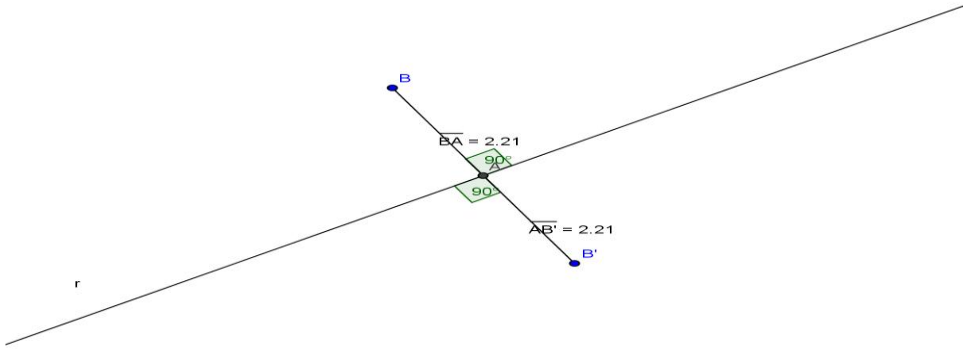


Figura 33: Adaptada de Lima (2007, p. 16) e reproduzida pelo autor no GeoGebra.

Na situação de ensino utilizamos a figura seguinte (catavento) como exemplo de reflexão, empregando o mesmo procedimento feito para a rotação. Agora, além de utilizarmos a figura também fizemos o uso de retas que serviram como apoio para refletir a imagem catavento em vários sentidos.

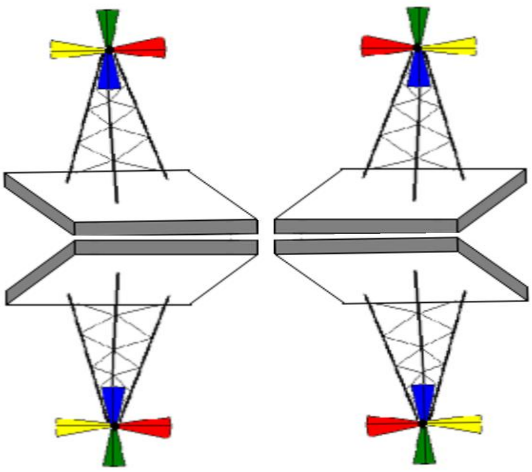


Figura 34: CATAVENTO, construída pelo autor com o Paint e o Geogebra

3.3 – Usos da Tecnologia e do GeoGebra

Quando falamos em tecnologia logo imaginamos os computadores, filmadoras, TVs, celulares e equipamentos eletroeletrônicos em geral. Estas são as modernas tecnologias que englobam as tecnologias de comunicação e informação.

Desde o início dos tempos o homem vem fazendo revoluções tecnológicas para que sejam mantidas suas conquistas através do domínio e aquisição de novos espaços territoriais, cultural e, nos últimos tempos, predominantemente se busca o financeiro.

A necessidade de sobrevivência do homem se configurou em várias épocas no desenvolvimento tecnológico e podemos citar a Idade da Pedra, quando os homens foram obrigados a criar ferramentas, utensílios, armas de caça e até de guerra.

As guerras foram grandes fomentadoras de tecnologia, pois a necessidade de defesa e de conquistas de territórios, que ainda hoje são evidentes, faz com que sejam desenvolvidas as tecnologias modernas tanto no campo de comunicação como na de informação, haja vista, a internet.

Grandes invenções tecnológicas há algum tempo são originárias da Guerra Fria entre Estados Unidos da América e a antiga União Soviética, em que o medo de uma guerra atômica acirrou a corrida para deter tecnologias, como se fosse uma corrida de fórmula 1, mas sem *pit stop* .

Alguns equipamentos que foram desenvolvidos para viagens ao espaço sideral possuem hoje em dia grande utilidade, seja na medicina, na indústria ou no comércio. Como exemplo, temos as fibras de carbono que servem para projetar próteses para indivíduos que não possuem uma ou até as duas pernas.

Porém a tecnologia não pode ser vista somente em processos de produção de equipamentos, mas também na educação como um todo.

Isto se a educação for concebida como um processo de ensino e de aprendizagem e que envolve, além de materiais e equipamentos, também a linguagem escrita e oral.

Segundo Kenski (2008)

> [...] existem outras tecnologias que não estão ligadas diretamente a equipamentos e que são muito utilizadas pela raça humana desde o início da civilização. A linguagem, por exemplo, é um tipo específico de tecnologia que não necessariamente se apresenta através de máquinas e equipamentos. A linguagem é uma construção criada pela inteligência humana para possibilitar a comunicação entre os membros de determinado grupo social. Estruturada pelo uso, por inúmeras gerações, e transformada pelas múltiplas interações entre grupos diferentes, a linguagem deu origem aos diferentes idiomas existentes e que são característicos da identidade de um determinado povo, de uma cultura. (KENSKI, 2008, p. 23).

A educação é um espaço em que o homem não vai deixar de exercer a sua dominação e não é por acaso que os países mais pobres são os que possuem os piores índices no que se refere à educação. Basta verificarmos os resultados do PISA [5] .

Hoje em dia as tecnologias avançam numa velocidade impressionante e sem dúvida, as tecnologias de comunicação e informação são as que mais se destacam.

As novas tendências das tecnologias surgiram inicialmente como sendo para uso de aparelhos separadamente, e aos poucos estão se integrando.

Há aproximadamente dez anos o telefone celular, quando começou a funcionar, servia apenas para realizar ligações telefônicas; as máquinas fotográficas para tirarem fotos; os aparelhos de mp3 para reproduzir músicas.

Podemos notar a integração de aparelhos celulares quando verificamos que os modelos atuais estão oferecendo, além de telefone, com câmera integrada, tocador de músicas, rádio FM e o acesso à internet.

Com o advento das novas tecnologias notamos que a educação se moderniza numa velocidade muito menor que a ciência, a indústria e os negócios.

Hoje a grande maioria das escolas possui acesso ao aparelho de vídeo cassete e DVD, os quais já não são suficientes porque os projetores de vídeo,

[5] PISA é um programa internacional de avaliação comparada, cuja principal finalidade é produzir indicadores sobre a efetividade dos sistemas educacionais, avaliando o desempenho de alunos na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.

como datashow, conectados a notebooks com acesso a internet já são uma realidade, mas apenas em algumas escolas.

Segundo Moran (2005)

> Uma sala de aula hoje precisa ter acesso fácil ao vídeo, DVD, projetor multimídia, no mínimo, um ponto de internet, para acesso a sites em tempo real pelo professor ou pelos alunos, quando necessário. Infelizmente, a maioria das escolas e universidades pensa que giz, quadro, mesa, cadeiras, um professor e muitos alunos são suficientes para garantir aprendizagem de qualidade. (MORAN 2005, REPORTAGEM: ATIVIDADES & EXPERIÊNCIAS, julho 2005, p. 12)

Na educação as mudanças acontecem lentamente, algumas lousas interativas nos mostram que estamos em uma nova era da tecnologia na educação, mas como dissemos, estas modernizações demoram até chegar para a maioria dos alunos, principalmente nas escolas públicas, visto que o investimento para o desenvolvimento das tecnologias sempre é feito pela iniciativa privada.

Vale destacar que hoje em dia as lousas verdes até umas décadas atrás eram chamadas de quadros-negros, fazendo uma análise fria nos lembramos do homem das cavernas escrevendo nas suas paredes.

Podemos dizer que a modernidade pode até chegar às escolas com certa demora, mas o que tem de mudar realmente, aí que a demora é mais lenta, é a postura pedagógica dos profissionais da educação.

Não adianta o professor possuir e dominar todos os aparelhos tecnológicos voltados para a educação, se não mudar a sua prática, que hoje em dia está centrada na *“educação bancária”*, ou a de *“balde cheio”*, onde o professor é apenas um transmissor de conhecimento.

Sabemos que esta prática não cabe mais nos dias de hoje, fazendo com que os alunos fiquem desestimulados a entrar numa sala de aula. A sala de aula não mudou e os professores não mudaram suas práticas

Os alunos têm de ser parte integrante na construção dos seus conhecimentos, ou seja, *“aprender a aprender”*, e não meros observadores passivos. Para isso temos a tecnologia como uma aliada e podemos proporcionar uma aprendizagem significativa e diferenciada, sem invenções tímidas e descabidas, como afirma Moran (2008)

> Todos que estamos envolvidos em educação precisamos conversar, planejar e executar ações pedagógicas inovadoras, com a devida cautela, aos poucos, mas firmes e sinalizando mudanças. Sempre haverá professores que não querem mudar, mas uma grande parte deles está esperando novos caminhos, o que vale a pena fazer. Se não os experimentamos, como vamos aprender? Não basta tentar remendos com as atuais tecnologias. Temos quer fazer muitas coisas diferentemente. É hora de mudar de verdade e vale a pena fazê-lo logo, chamando os que estão dispostos, incentivando-os de todas as formas – entre elas a financeira – dando tempo para que as experiências se consolidem e avaliando com equilíbrio o que está dando certo. Precisamos trocar experiências, propostas, resultados. (MORAN, 2008 in http://www.eca.usp.br/prof/moran/educatec.htm)

No texto dos PCNs do Ensino Fundamental percebemos que desde as décadas de 80 e 90 a preocupação em introduzir as tecnologias para uma abordagem pedagógica mais atraente já se fazia presente.

Segundo os PCNs, embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala e em curto prazo. Eles podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades:

- Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
- Como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- Como ferramenta para realizar determinadas atividades de uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.(PCN ENSINO FUNDAMENTAL, 5ª A 8ª séries, p. 44).

Os PCNs sugerem que a utilização de softwares deverá ser feita de maneira significativa e que os alunos façam parte do processo como construtores de seus conhecimentos.

As transformações isométricas se encontram explícitas nos PCNs no bloco de conteúdos Espaço e Forma, afirmando que:

> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.
> (PCN ENSINO FUNDAMENTAL, 5ª A 8ª séries p. 51).

As tecnologias na educação e principalmente na educação matemática, como a utilização de softwares, tem um forte potencial para se tornar uma atividade experimental significativa para facilitar o processo de metacognição de ensino e de aprendizagem, e, no nosso caso, a aprendizagem das transformações isométricas.

Em nosso trabalho exploramos, por meio de uma sequência de atividades, as isometrias no GeoGebra com a motivação Etnomatemática.

CAPÍTULO 4 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Um dos maiores desafios hoje da escola é fazer uma relação entre as tecnologias e a educação no sentido de promover uma aprendizagem significativa.

Gouvea (2005) afirma que se utilizá-las em sala de aula estaremos com um “novo” agente do processo de ensino e aprendizagem. Mesmo sabendo que nas escolas a informática ainda continua sendo um corpo estranho que provoca, sobretudo, um grande incômodo, não podemos desfazer, e sim procurar incorporar na nossa prática os novos modelos tecnológicos, aliados a uma prática pedagógica adequada, senão estaremos fazendo o velho só que de outra maneira.

Gouvea (2005) cita as tecnologias e em específico a informática como uma importante vertente, mas para fazermos uma reflexão sobre o que vem a ser uma tecnologia, nos fundamentamos nas considerações de Kenski (2008), que apresenta a diferença entre tecnologia e técnica e ainda conceitua e apresenta o que é tecnologia e faz um paralelo entre tecnologia e educação.

D’Ambrósio (1997, apud GOUVEA, 2005) diz que:

> Alguns dirão: Quem manda é quem tem o hardware e o software. Não posso concordar. O hardware e o software são, e continuarão sendo, estúpidos, incapazes de iniciativas. [...] Assim como o hardware o software só é operacional se houver um operador, e este é um indivíduo. Não há como remover dos seres humanos a capacidade de resistência, tornando operacional o sistema, como aconteceu no período colonial. (GOUVEA 2005, p. 18).

Na escola esta inclusão digital não acontece nem com os professores, e muito menos com os alunos, havendo a necessidade de mudança de paradigma na gestão da aprendizagem.

A nova linguagem da informática, que também é matemática, pode facilitar a aprendizagem e o ensino, principalmente com a geometria dinâmica, através dos softwares, que se tornaram ferramentas importantes e valiosas neste sentido.

Na sua pesquisa Gouvea (2005) usou o Cabri-Géomètre II e o iGeom apresentando as suas potencialidades, sendo o primeiro software pago, e o segundo um software livre.

Gouvea utilizou como fundamento a teoria sócio-cultural de Vygotsky (1991), atrelando a este os fractais de bases caleidoscópicas, sendo a base do seu estudo intitulado: *"Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópio e Softwares de Geometria Dinâmica"*, dissertação para obtenção do título de mestre em Educação Matemática no ano de 2005.

Com os softwares supracitados, aplicou uma oficina que objetivou a técnica de pavimentação de polígonos como bases geradoras e, com o recurso de simetria, construiu novas configurações e interações.

Gouvea (2005) baseou-se na resolução de problemas nos laboratórios de ensino e de informática, como procedimento metodológico. Utilizou o curso denominado *"Fractais Geométricos através de softwares de Geometria Dinâmica"* com alunos do 1° ano do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP no Campus de Rio Claro.

Na construção e na representação de imagens da natureza em processos de resolução de problemas, foi possível conseguir, além dos resultados matemáticos, uma mudança no pensamento dos alunos, quando inseridos neste ambiente que se mostra como um meio poderoso e eficiente para explorar e compreender conceitos de Geometria Euclidiana e Fractal.

Historicamente podemos afirmar que a geometria não é um objeto matemático explorado cotidianamente nas escolas do nosso país e podemos afirmar que estamos empenhados em mudar esta prática de deixarmos para o final do ano, no último bimestre.

Pavanello (1989) afirma:

> As explicações dos matemáticos sobre os motivos que teriam levado à desenfatização do ensino de geometria - basicamente a euclidiana - nos diferentes graus de ensino concentram-se em torno de questões geralmente relacionadas com o rigor, à visualização e o que se poderia chamar de subordinação da geometria à álgebra. (PAVANELLO 1989, p. 11).

Muitos fatores contribuíram, segundo Pavanello (1989), para a álgebra e o cálculo tomarem a frente da geometria.

No passado podemos citar Descartes que no século XVII propôs a um ponto no plano um par de coordenadas, e também outro fator importante é o próprio tratamento não rigoroso dado à geometria euclidiana.

A substituição do Desenho Geométrico pela Educação Artística, hoje chamada de Artes segundo Pavanello (1989), torna ainda maior a dificuldade dos alunos em trabalhar com as figuras geométricas e sua representação. Pavanello conclui então que isso ocorre a partir de 1975 com a promulgação das Diretrizes e Bases para 1° e 2° graus, com a Lei 5692/1971 – Guia Curriculares de Matemática.

Segundo Pavanello (1989):

> O ensino de certas disciplinas, reconhecidamente importantes para a formação dos indivíduos, foi negligenciado, e não por acaso. Este trabalho mostra como este fato se deu com relação ao ensino da geometria. (PAVANELLO, 1989, p. 184).

Cerqueira, (2005) no seu trabalho *"Isometrias: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o Ensino Médio"*, procura verificar a inserção das isometrias no currículo principalmente nos Parâmetros Curriculares Nacionais, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio e também no Programa Nacional do Livro no ano de 2005.

Cerqueira (2005) pôde perceber que no Ensino Fundamental encontrava uma inserção explícita das isometrias no PCN-EF, o que não ocorreu em sua análise no Ensino Médio. Mesmo encontrando as isometrias nos PCN-EF, identificou nos livros didáticos, em duas coleções, certa discrepância. Enquanto numa coleção encontrou as isometrias presentes em todas as séries, na outra isso ocorreu compartilhadamente, ou seja, a primeira favorece um estudo em espiral, a segunda um estudo isolado.

Cerqueira (2005) utilizou na análise de seu trabalho quatro níveis de complexidades do Campo Conceitual da Simetria de acordo com Vergnaud (1997) e obteve bons resultados com os alunos do Ensino Médio. Foram submetidos a uma sequência de atividades, conseguiram apropriar-se da idéia de simetria, mesmo sem ter estudado este objeto matemático.

Bilac (2008), no seu trabalho: "*Possibilidades da Aprendizagem das Transformações Geométricas com o Uso do Cabri-Géomètre"*, procura identificar em que medida o uso das ferramentas do software Cabri-Géomètre favorece a aprendizagem das transformações geométricas, em especial a geometria axial e a geometria de rotação.

Bilac (2008) usou como metodologia o *Design Experiment* para modelar a sequência de atividades para alunos do 8º ano de uma escola privada. Com o apoio teórico em Piaget e Garcia (1983), investigou o que se refere aos estágios de desenvolvimento psicogenético da geometria, como já vimos antes, intrafigural, interfigural e transfigural.

Bilac (2008) aponta nos seus resultados que os alunos conseguiram apropriar-se das transformações geométricas utilizando o software Cabri-Géomètre, passando pelos estágios intra, inter e até atingindo o estágio transfigural, usando da tecnologia e, em especial as ferramentas do citado software, contribuí para a aprendizagem significativa deste objeto matemático.

Bagé (2008), no seu trabalho: *"Proposta para a Prática do Professor do Ensino Fundamental I de Noções Básicas de Geometria com o Uso de Tecnologias",* procurou verificar quais as possíveis contribuições, que um curso de formação continuada, com a utilização da tecnologia, trazem para a prática do professor no ensino de Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental I.

Bagé (2008), assim como Bilac (2008), utilizou o *Design Experiment* como metodologia para o seu trabalho, mas focando o professor da 4ª série do Fundamental I, e utilizando os softwares *Building Perspective* e *Cabri-Géomètre* também aproveitou o pensamento geométrico de Van Hiele para a elaboração das atividades por meio de uma oficina.

Bagé (2008) concluiu que os professores perceberam a importância de se trabalhar com Geometria nas séries iniciais e as possibilidades de uso dos softwares na prática de ensino. Ainda salientou a necessidade de reformular a oficina aplicada inicialmente com sugestões dos professores participantes.

Para auxiliar nosso trabalho, no que se refere à análise da sequência de atividades, buscamos o artigo de Souza *et al* (2006) que usa a exploração das transformações geométricas para resolver problemas com régua e compasso, apresentando as definições de rotação e reflexão.

Souza sugere que os alunos resolvam as atividades e que também emitam respostas que possam nos direcionar ou identificar em quais estágios de desenvolvimento psicogenéticos se encontram.

Para a compreensão na prática do que vem a ser estes estágios de desenvolvimento psicogenético, buscamos em Barroso e Martel (2007) exemplos matemáticos e geométricos e os reconstruímos com o GeoGebra, facilitando a visualização de alguns modelos.

Para se juntar a esses exemplos, apresentamos as definições de transformações geométricas, mas em particular nos ativemos às isometrias rotação, reflexão e translação. Segundo Araújo (2002) e Lima (2007):

Araújo (2002)

> Transformações geométricas é uma função que faz corresponder a cada ponto є um novo ponto є; normalmente exigimos que a função seja bijectiva (cada ponto є é a imagem de um só ponto є), e que preserve as figuras geométricas básicas (no sentido de que, por exemplo, a imagem de um triângulo seja ainda um triângulo, e a de uma reta outra reta). (ARAÚJO 2002, p.95).

Lima (2007)

> Uma isometria entre planos π e π' é uma função T: π → π', que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos X, Y є π, X' = T(X) e Y' = T(Y), tem-se d(X', Y') = d(X,Y). Toda simetria T:π→ π' é uma função injetiva pois X ≠ Y → d (X,Y) > 0 → d (X', Y') = d (X,Y) > 0 →X' ≠ Y'. Uma isometria é também sobrejetiva. (LIMA, 2007, p. 13).

Houve uma motivação inicial ao descobrirmos o livro de Eglash (2002), cujo título é *"African Fractals"* por causa dos fractais e suas transformações, onde vislumbramos ainda com Gerdes (2008) a possibilidade de atrelar Etnomatemática com tecnologia, mas com um enfoque sempre voltado para educação.

Apesar de a escolha inicial ter sido pelos fractais, percebemos em Gerdes (2008) que a Geometria Sona, nos desenhos dos Cokwe, poderia dar suporte a uma pesquisa para as transformações isométricas de rotação, reflexão e translação embasadas em uma motivação Etnomatemática. Então realizamos a mudança de escolha de objeto de estudo matemático para as transformações isométricas, mas mantivemos a motivação etnomatemática.

No seu livro, *“Etnomatemática: Elo entre as Tradições e a Modernidade”*, D’Ambrosio (2001) apud Gerdes (2008) articula conceitos com a sociedade da seguinte forma:

> Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. Além desse caráter antropológico, a etnomatemática tem um indiscutível foco político. A etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano. (GERDES 2008, p. 9).

A proposta final ficou então em pesquisar quais seriam as contribuições que o uso do GeoGebra poderiam trazer com a motivação etnomatemática para a aprendizagem das transformações isométricas ao ensino da matemática.

Todos os referenciais teóricos foram importantes, pois cada um apresenta um resultado voltado para a prática do ensino de Matemática, mas sempre com uma visão crítica que possibilita uma análise mais rica quando se fala em educação com tecnologia.

A escolha do GeoGebra foi por proporcionar uma maior flexibilidade, pois o software é livre, possui uma interface algébrica correlacionada com a interface geométrica e ainda é funcional do ponto de vista geométrico.

Utilizamos a versão que pode ser obtida diretamente de um arquivo de mídia digital e funciona sem a necessidade de instalação na máquina por ser gratuito, livre, de fácil aplicação e ainda registra as ações dos alunos em protocolos de construção, facilitando a análise do pesquisador.

A metodologia escolhida foi *Design Experiment* segundo Brown (1992), Collins *et al* (2004), Cobb *et al* (2003) e Steffe e Thompson (2000), que nos oferece um modelo de engenharia de aprendizagem que pode ser aprimorado segundo a modificação das variáveis dependentes e independentes.

Assim apresentamos este trabalho e a bibliografia que o norteou pois pode ser útil aos futuros pesquisadores em Educação Matemática.

CAPÍTULO 5 – ESCOLHAS METODOLÓGICAS

5.1 – Metodologia *Design Experiment*

Na década de 1990 houve um movimento para desenvolver uma nova metodologia a fim de realizar estudos de intervenções educativas, e esta metodologia recebeu o nome de *Design Experiment.*

Brown (1992) foi pioneira no desenvolvimento desta metodologia utilizando como se fosse uma engenharia de aprendizagem para investigar e analisar as comunidades escolares como comunidades de aprendizagem.

Colins *et al* (2004) dizem que o seu projeto de pesquisa foi desenvolvido para resolver várias questões centrais para o estudo da aprendizagem, incluindo:

> a) A necessidade de abordar questões teóricas sobre a natureza da aprendizagem num contexto;
> b) A necessidade de abordagens para o estudo dos fenômenos de aprendizagem no mundo real, no lugar do laboratório;
> c) A necessidade de ir mais além das estreitas aprendizagens;
> d) A necessidade de obter resultados da pesquisa da avaliação formativa. (COLLINS *ET AL*, 2004, p. 3, tradução nossa).

Segundo Collins embora a pesquisa através do *Design Experiment* se apresente como uma ferramenta poderosa para lidar com necessidades educacionais, este tipo de trabalho traz consigo sérios desafios, incluindo:

> a) Dificuldades decorrentes da complexidade das situações do mundo real e a sua resistência ao controle experimental;
> b) Grandes quantidades de dados resultantes de uma necessidade de combinar análises quantitativas e etnográficas;
> c) Comparação entre projetos; (COLLINS *ET AL*, 2004, p. 3 e 4, tradução nossa)

Segundo Borba (2006):

> Na verdade, investigar o ensino como se ele estivesse desconectado desta complexidade provavelmente levaria a investigação a uma posição de pouca (se é que levaria alguma) relevância na prática. O desafio com que nos defrontamos enquanto investigadores é desenhar pesquisas que levem em conta a multiplicidade de fatores que interagem influenciando as práticas pedagógicas e que, ao mesmo tempo, apóiem mudanças nessas práticas e contribuam para o desenvolvimento de um repertório comum de conhecimento profissional para o ensino de Matemática (BORBA, 2006, p. 114).

Os participantes que se envolverão neste que podemos chamar de “projeto de experiências no ensino”, para o termo D*esign Experiment*, deverão ser o pesquisador, o professor e o aluno na sala de aula.

Observamos que no *Design Experiment* o professor também é o pesquisador. Na figura abaixo, ilustramos os aspectos críticos da pesquisa feita por Brown (1992) numa sala de aula da época.

A sua pesquisa confirma que a sala de aula deve funcionar perfeitamente como um ambiente de aprendizagem, antes de podermos estudar outros fatores ou temas.

Brown (1992) destaca que os aspectos que são muitas vezes tratados de forma independente, tais como formação de professores, seleção de currículo, testes, e assim por diante, realmente fazem parte de todo o sistema.

Assim como é impossível mudar de aspecto no sistema sem criar transtornos em outros, também é difícil estudar qualquer aspecto, independente do sistema operacional inteiro. Abaixo apresentamos o sistema proposto por Brown (1992):

Figura 35: As características Complexas do Delineamento Experimental
FONTE: BROWN, 1992, p.142 – (Tradução nossa)

Segundo Steffe e Thompson (2000) a finalidade principal da experiência ao utilizar esta metodologia de ensino é fazer com que o investigador realize uma experiência, diretamente com alunos aprendendo matemática e desenvolvendo raciocínio.

Sem as experiências oferecidas pelo ensino, não haveria nenhuma base para chegar a entender a matemática, a construção de conceitos feitos pelos alunos e operações ou mesmo para suspeitar que tais conceitos e operações possam ser muito diferentes dos conceitos dos investigadores.

Estes mesmos autores fazem alusão a uma matemática e nomeiam como sendo a "matemática dos alunos", ou seja, verificam que as intervenções que fazemos durante o processo de ensino aprendizagem podem gerar um eco nesta construção de conceitos, que por sua vez podem retornar como nossas próprias experiências, acrescidas de variantes dos próprios alunos.

Segundo Steffe e Thompson (2000)

> [...] Matemática dos alunos é indicada pelo que dizem e fazem e o que querem participar na atividade matemática, e um dos objetivos fundamentais dos pesquisadores num experimento de ensino é a construção de modelos de matemática dos alunos. A matemática dos alunos refere-se a esses modelos, e inclui os alunos para fazer modificações [...]. [(STEFFE E THOMPSON, 2000, p. 268, tradução nossa)].

Design Experiment, ou como chamam Cobb *et al* (2003) de Experimentos de Projeto, constitui um meio de lidar com a complexidade de uma indicação de contextos educativos.

Os elementos de uma *"Ecologia da Aprendizagem"* tipicamente incluem as tarefas ou problemas que os alunos são convidados a resolver, os tipos de discurso que são incentivados a produzirem.

Na resolução das questões matemáticas, acrescentamos normas de participação que estão estabelecidas na aplicação e na resolução dos problemas, as ferramentas e material relacionado com os meios fornecidos pelo professor-pesquisador em sala de aula, e os meios práticos de que os professores em sala de aula podem orquestrar e as relações entre estes elementos.

Cobb *et al* (2003) usam a metáfora de uma ecologia para salientar que contextos projetados são conceituados como sistemas de interação e não tanto como um conjunto de atividades ou uma lista para separar fatores que influenciam a aprendizagem. Além de apenas criar projetos que são eficazes e que às vezes venham ser feitos ajustes para perfeição, uma teoria do projeto explica que eles podem ser adaptados às novas circunstâncias. Portanto, como outras metodologias, as experiências de projeto são pequenas partes para a geração e teste da teoria a ser utilizada.

Cobb *et al* (2003) afirmam que:

> Embora, como uma questão prática, uma experiência de projeto é realizada num número limitado de configurações, é evidente a partir da preocupação com a teoria de que a intenção não é apenas para investigar o processo de apoio às novas formas de aprendizagem nesses contextos específicos. Em vez disso, os quadros da equipe de pesquisa que selecionam os aspectos previstos na aprendizagem e os meios de apoiá-los como paradigma, casos de uma ampla classe de fenômenos. No caso de uma experiência de projeto, por exemplo, o objetivo mais amplo teórico poderia ser a de desenvolver um modelo psicológico do processo pelo que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda das idéias matemáticas, juntamente com os tipos de tarefas e práticas de professores que podem apoiar a aprendizagem, (COBB *ET AL*, 2003, p. 33, tradução nossa).

Doerr e Wood (2006 apud LESH e KELLY, 2000; In: BORBA, 2006, p. 118.) descrevem os níveis de interação, interpretação e análise com um quadro resumo:

Nível 3 Pesquisadores	Com a ajuda de estudantes e professores, os pesquisadores desenvolvem modelos que dão sentido a aprendizagem de alunos e professores, e reinterpretam e estendem suas teorias
Nível 2 Professores	Os professores trabalham com colegas e pesquisadores para descrever, explicar e dar sentido à aprendizagem do aluno.
Nível 1 Estudantes	Equipes de estudantes resolvem, com a ajuda de professores, atividades matemáticas por meio das quais eles constroem, revisam e refinam a sua interpretação de uma situação-problema.

Quadro 1:Pesquisa-Projeto: experimento de ensino multicamadas. Barbosa, (2006, p.218)

Os experimentos de design feitos em sala de aula, em sua maioria, são conceituados como casos de processos de apoio a grupos de aprendizagem dos alunos em um determinado domínio de conteúdo, no nosso caso, o domínio matemático.

A intenção teórica, portanto, foi identificar e explicar os padrões sucessivos que os alunos usaram para pensar, relacionando esses padrões com os meios pelos quais o seu desenvolvimento foi apoiado e organizado. No entanto, nas salas de aula variadas experiências de projeto puderam definir seu foco por diferentes questões.

Por exemplo, pôde-se focalizar a relação entre normas da sala de aula ou normas para a argumentação matemática ou científica, e na aprendizagem dos alunos, o professor funcionou também como mediador das questões nas aulas.

Podemos afirmar que o professor assumiu duas funções: professor e pesquisador ao intervir diretamente no ambiente dos alunos e proporcionar, segundo o sistema proposto por Brown (1992), uma engenharia no ambiente de aprendizagem.

Também este estudo privilegiou as maneiras pelas quais as diversidades de experiências dos alunos puderam ser aproveitadas como um recurso para garantir que todos tivessem acesso a importantes ideias matemáticas.

Já nossa pesquisa foi um estudo voltado para uma comunidade de aprendizagem de alunos, sendo elaborada uma sequência de atividades para construir o conceito das isometrias de rotação, translação e reflexão atrelando a Etnomatemática como motivadora para o estudo desta sequência, mais especificamente a Geometria Sona, por meio de desenhos realizados na areia que contam lendas e mitos do povo Cokwe, com o suporte tecnológico do GeoGebra.

Além da motivação Etnomatemática, procuramos mostrar que a tecnologia utilizada antigamente, apresentava uma técnica manual praticada na areia. Trazendo para a escola de hoje, onde temos acesso ao computador e com a utilização do software GeoGebra, propusemos esta ligação, em que os alunos reconstruíram uma figura Sona similar apenas com o uso das ferramentas deste software.

Procuramos realizar este estudo verificando se esta sequência de atividades pôde estimulá-los através da Etnomatemática, com o uso da Geometria Dinâmica, a aprender as transformações isométricas.

Nesta mesma sequência de atividades também averiguamos qual o ambiente ecologicamente pedagógico proposto aos alunos, colocando-os numa zona de desconforto, como participantes da pesquisa, quando puderam reformular algumas ideias iniciais ao longo do processo de aplicação das atividades.

Na aplicação da sequência de atividades estão relacionadas às diferentes variáveis internas e externas.

Para avaliar as diferentes variáveis, é necessário o uso de uma variedade de técnicas de avaliação, incluindo pré-testes e pós-testes padronizados, vistoria e técnicas de entrevista, bem como uma sistemática de pontuação das observações da sala de aula.

Segundo Collins *et al* (2004) as avaliações são partes essenciais do projeto de ensino na metodologia de pesquisa. Pelo menos três tipos de variáveis dependentes são importantes para avaliar:

> (1) As variáveis climáticas, como diálogo, cooperação, assunção de riscos, controle de estudante;
> (2) As variáveis de aprendizagem, tais como conteúdo, conhecimentos, competências, disposições, estratégias metacognitivas, estratégias de aprendizagem, e
> (3) As variáveis sistêmicas, tais como sustentabilidade, propagação, escalabilidade, facilidade de adoção e os custos. (COLLINS *ET AL*, 2004, p. 34 – tradução nossa).

Na avaliação de qualquer projeto, há um grande número de variáveis independentes que podem comprometer o sucesso do trabalho.

É uma questão artística determinar quais são os aspectos da situação de ensino que podem afetar o sucesso do projeto.

Nosso objetivo aqui é dizer que aspectos gerais da situação os pesquisadores precisam considerar a fim de decidir o que está interferindo no andamento do trabalho.

Collins *et al* (2004) afirmam que as variáveis independentes contextuais que podem determinar o sucesso de uma inovação incluem:

(1) Definição. A configuração do ambiente de aprendizagem é uma variável crítica na forma de tarefas de projeto.
A definição pode variar desde as suas casas, locais de trabalho, museus, escolas ou colégios; escolas elementares, de ensino médio ou superior, escolas públicas ou privadas, as escolas urbanas, suburbanas ou rurais; elite ou faculdades comunitárias, etc. Como amplamente aplicável uma inovação só pode ser determinada experimentando-a em muitas configurações diferentes.
(2) Natureza dos alunos. Variáveis críticas sobre os alunos incluem coisas como sua idade, nível socioeconômico, taxa de rotatividade, a taxa de atendimento, etc. Por exemplo, algumas inovações podem contemplar o trabalho com os alunos que apresentam dificuldades na aprendizagem ou com alunos superdotados. Portanto, é importante determinar, para que tipo de aluno o projeto é eficaz, e de que maneira.
(3) Recursos necessários e apoio na implementação. A fim de realizar alguns tipos, incluindo materiais, técnicas de suporte, apoio administrativo e apoio dos pais. Se um projeto exige que os professores reúnam materiais, o tempo para preparação de outras atividades, mobilizando os administradores ou os pais para fazer o projeto ser bem sucedido, em seguida, esses requisitos devem ser identificados.
(4) Desenvolvimento profissional. Muitas vezes, para que um projeto seja bem sucedido, os professores (e talvez outros) devam ser preparados com o desenvolvimento profissional de vários tipos. Estes podem englobar oficinas, encontros, cursos, vídeos de práticas exemplares de projeto, prática guiada com profissionais especializados, encontros reflexivos com os colegas, etc. Identificação: o que os professores precisam para implementar o projeto com sucesso é um aspecto importante para inovação do projeto.
(5) Requisitos Financeiros. Qualquer intervenção acrescenta custos que precisam ser controlados, incluindo custos de equipamento, custos de serviços, apoio profissional, os custos de desenvolvimento e os custos de substituição. Muito frequentemente custos substanciais, como o apoio técnico e custos de substituição, são ignorados no valor de uma inovação tecnológica.
(6) Implementação: caminho. Este termo abrange as variáveis envolvidas na implementação de um projeto, tal como a forma como a inovação é introduzida, o tempo dedicado a ele, a duração da sua utilidade, etc. Há uma estrutura para a introdução e evolução de um projeto que precisa ser caracterizada na análise de qualquer aplicação. Existe uma teia de relações entre as variáveis independentes e dependentes. A divisão entre os dois depende dos resultados de quem está interessado. Mas as mudanças em qualquer variável podem ter efeitos sobre outras variáveis, trazendo assim um retorno complexo. (COLLINS *ET AL*, 2004, p. 36 e 37- Tradução nossa).

Assim, a mudança de uma variável dependente pode ocasionar uma mudança numa variável independente, pois estas podem estar inter-relacionadas. A linguagem das variáveis dependentes e independentes serve apenas para distinguir o que devemos considerar e as variáveis, que por ventura, podem interferir no resultado final da sequência de atividades que contempla o experimento de ensino.

Estas variáveis nos levam a perceber que *Design Experiment* é uma metodologia voltada mais para uma análise qualitativa, que pretende refinar resultados prévios do ajuste para um resultado final mais qualificado, do que para uma análise quantitativa que apenas verifica os dados do experimento. Não que os resultados quantitativos não tenham interferência na análise qualitativa, e não que apenas um tipo de análise foi feita nesse trabalho, apenas somente com que uma complementasse a outra, dando um enfoque mais formativo ao trabalho.

Mayring (2002 apud GÜNTHER 2006) apresenta seis delineamentos da pesquisa qualitativa: estudo de caso, análise de documentos, pesquisa-ação, pesquisa de campo, experimento qualitativo e avaliação qualitativa. O *Design Experiment* tem por base alguns dos pressupostos do experimento qualitativo.

Para o contexto da pesquisa qualitativa, as três maneiras de coleta de dados apontadas por Kish (1987 apud GÜNTHER 2006) – observação, experimento e survey (vistoria) – podem ser reagrupadas como coleta de dados visuais e verbais.

Conforme Borba (2004):

> [...] Experimentos de ensino visam, prioritariamente, a permitir que compreendamos a forma como um estudante, ou pares de estudantes, lidam com tecnologias da informação e da comunicação (TIC). Dentro da perspectiva teórica dominante deste grupo, tentamos ver como que coletivos de seres-humanos-com-mídias (BORBA, 2001) lidam com a Matemática [...] (BORBA, 2004. p. 7)

5.2 – Procedimentos Metodológicos

Nossa pesquisa foi realizada numa escola pública estadual de Ensino Fundamental e Médio, compartilhada com a Prefeitura Municipal da Região

Metropolitana do Estado de São Paulo, onde estudam aproximadamente 900 alunos, muitos oriundos de chácaras e sítios que ainda existem numa Zona de Proteção Ambiental.

O experimento de ensino foi desenvolvido com quatro alunos do terceiro ano do Ensino Médio: Jair, Tadeu, Karlene e Julia, nomes fictícios.Estes estudantes foram voluntários após realizarmos o comentário com as turmas sobre a necessidade de o Professor-Pesquisador conseguir alunos para aplicar a sequência de atividades.

Os alunos foram divididos em duas duplas através de sorteio para não haver preferências entre pares. Estas duplas realizaram um trabalho colaborativo para resolver e opinar sobre as atividades, bem como para construir o conceito Transformações Isométricas, objetivo principal deste trabalho.

Os registros para análise dos instrumentos da pesquisa foram feitos com gravação de voz, filmagem e a revisão dos protocolos de construção do próprio software, o GeoGebra.

A ação das duplas durante a realização das atividades foram gravadas e filmadas separadamente para verificação de comportamentos, postura e observações gerais na resolução das atividades geométricas relacionadas às Transformações Isométricas.

Todas as atividades, arquivos, vídeo, apresentação e o próprio software GeoGebra foram gravados em um pen-drive, para cada dupla, que foram entregues pelo professor pesquisador. Deste modo, na eventualidade de alguma dificuldade de uso do GeoGebra no laboratório, o software permite esta exploração e esta poderá ser utilizada com acesso ao próprio pen-drive. Os arquivos solicitados aos alunos foram salvos no próprio pen-drive entregue para cada dupla.

Inicialmente fizemos a projeção de um vídeo que se chama *“Simetrias”* da série “*Arte e Matemática”* que foi produzida pela TV Cultura, em que apresenta as várias simetrias existentes na natureza, na música, nas operações com números, nas frases, enfim na vida.

O objetivo foi fazer com que os alunos refletissem sobre o mundo que nos cerca, então fizemos referência de como essa simetria se apresenta na cultura do povo Cokwe.

Em seguida apresentamos, em formato de slides, um breve histórico sobre a cultura do povo africano Cokwe especificamente sobre a Geometria Sona, ou seja, desenhos que são realizados no chão.

A intenção foi fazer com que os alunos pudessem se apropriar um pouco da cultura e percebessem que os desenhos são feitos através de uma técnica própria e de extrema complexidade, onde vários giros são feitos.

A motivação Etnomatemática começa a se desenhar a partir do momento que os alunos conseguiram fazer a relação entre a sociedade e como esse povo Cokwe se manifestava quando realizava os desenhos que chamamos Sona (no plural) e Lusona (no singular), que sempre significavam um tema, um mito ou animais.

Durante a apresentação dos slides, pausas foram realizadas para inferir com a seguinte pergunta:

Para realizar este último desenho aranha no meio da sua teia, qual (ais) transformação (ões) isométrica(s) você percebe que os Cokwes utilizaram para construir esta figura: rotação, translação e reflexão?

Salientamos que durante o questionamento filmamos e gravamos as respostas e percepções dos alunos, mas sempre solicitando que além de responderem as questões também justificassem suas respostas.

No capítulo 7 apresentamos os resultados da motivação etnomatemática que foi proposta no primeiro encontro, englobando a apresentação supracitada.

CAPÍTULO 6 – AS ATIVIDADES PROPOSTAS

6.1 – Contextualizando as Atividades Propostas

As transformações isométricas, durante a construção do desenho, são feitas sem o conhecimento acadêmico por parte dos especialistas do povo Cokwe.

Exploramos algumas atividades, nas quais foi possível introduzir os conceitos das transformações, com a mediação do professor, e os alunos puderam construir rotação, reflexão e translação por meio da utilização do software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, e posteriormente, com essas isometrias aplicamos os três conceitos para compor uma figura sona dos Cokwe (também chamados de Quiocos).

6.2 – AS ATIVIDADES

A sequência de atividades está composta de um módulo único, distribuído em quatro encontros conforme quadro abaixo:

			ENCONTRO	DATA
MÓDULO ÚNICO	6.2.1	VIDEO DE SIMETRIAS	1°	13/8/2010
	6.2.2	CONTEXTUALIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA SONA DO POVO COKWE: UM BREVE HISTÓRICO APRESENTADO COM SLIDES AOS ALUNOS.	1°	13/8/2010
	6.2.3	CONHECENDO O GEOGEBRA E SUAS FERRAMENTAS	2°	13/8/2010
	6.2.4	INTRODUZINDO OS CONCEITOS DE ISOMETRIAS ATRAVÉS DE CONSTRUÇÕES:		
	6.2.4.1	ROTAÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM PONTO PRIMEIRA ATIVIDADE SEGUNDA ATIVIDADE	2°	20/8/2010
	6.2.4.2	REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM PONTO TERCEIRA ATIVIDADE	3°	26/8/2010
	6.2.4.3	REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA RETA QUARTA ATIVIDADE QUINTA ATIVIDADE	3°	26/8/2010
	6.2.4.4	TRANSLAÇÃO EM RELAÇÃO A UM VETOR SEXTA ATIVIDADE SÉTIMA ATIVIDADE	3°	26/8/2010
	6.2.5	RECONSTRUÇÃO COM UMA PARTE DA FIGURA SONA COM O GEOGEBRA OITAVA ATIVIDADE	4°	27/8/2010
	6.2.6	RECONSTRUÇÃO DA FIGURA SONA SOMENTE COM O GEOGEBRA NONA ATIVIDADE	4°	27/8/2010

Quadro 2: Cronograma do Módulo Único com as Atividades.

6.2.1 - VÍDEO “SIMETRIAS” – SÉRIE “ARTE E MATEMÁTICA”

Antes de mostrarmos a Geometria Sona do povo Cokwe, apresentamos um vídeo da coleção *“Arte e Matemática”* intitulada *“Simetrias”*, com duração de 26 minutos e 12 segundos, o qual exibe várias simetrias existentes desde os desenhos egípcios feitos nas paredes das pirâmides e sarcófagos, passando pelas artes plásticas, até demonstrar também a sua existência nos mais variados estilos musicais, com o intuito de estimular os alunos para que possam refletir sobre as simetrias que existem em diversas áreas do saber e que possam descobrir, por si só, em qualquer outra representação.

O vídeo apresenta simetrias combinadas com música, objetos e números.

Figura 36: Tela inicial do vídeo Simetrias.

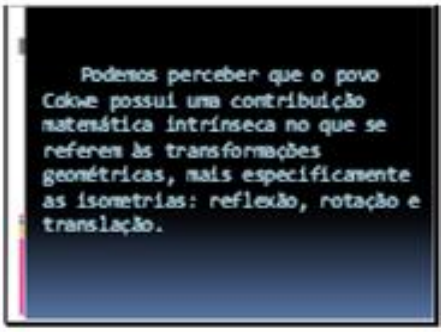
6.2.2 - Apresentação da Geometria Sona e do Povo Cokwe

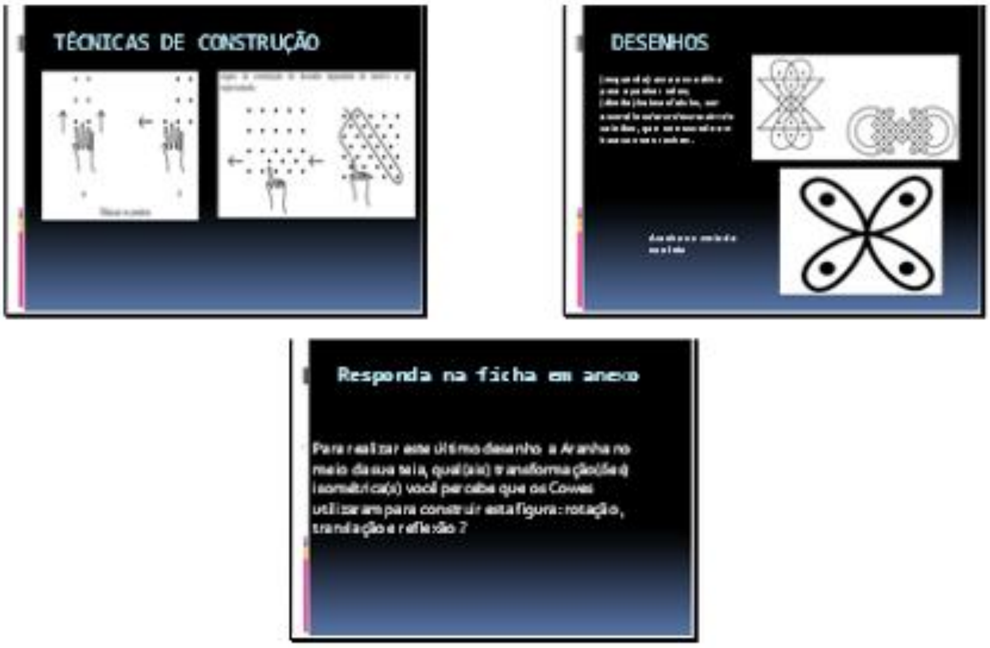
Utilizamos uma apresentação em *Power Point* onde contamos uma breve história do surgimento da Geometria Sona para os alunos, utilizando o computador e o projetor multimídia com finalidade de estimularmos a sua perspectiva do que venha a ser uma visão histórica e cultural de um povo, bem como suas tradições e costumes.

A localização no continente africano é importante, pois mostra que faz parte de uma cultura não só dos angolanos, mas também de outros países da África.

Mostramos que há várias formas geométricas com técnicas próprias, onde esse povo registra, durante suas caçadas, lendas, mitos e animais, ao realizar desenhos na areia que envolvem rotações, reflexões e translações sem se aperceberem destes conceitos.

E no final da apresentação mostramos uma figura Sona chamada *"aranha no centro da sua teia".* Perguntamos aos alunos qual transformação isométrica foi utilizada para construir esta figura. A intenção foi comparar a resposta dada com a penúltima atividade em que foram desafiados a reconstruir a figura a partir de uma única parte da mesma (oitava atividade). O registro desta atividade foi feito, individualmente, em uma folha que consta no material do primeiro encontro.





Quadro 3- Telas da Apresentação um Power Point

A ficha em anexo encontra-se no arquivo de mídia digital com os demais arquivos para ser respondida no próprio *software*.

6.2.3 – Conhecendo o GeoGebra e suas Ferramentas.

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de Geometria Dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais da geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

O GeoGebra é um software de acesso livre, (é permitido utilizar, copiar e distribuir o aplicativo para fins não comerciais) e por isso mesmo poder vir a ser um importante aliado dos professores como recurso pedagógico. Permite a abordagem de diversos conteúdos trabalhados na Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio), especialmente em Geometria, Álgebra e Funções.

Por meio da construção interativa de figuras e objetos, podemos melhorar a compreensão dos alunos através da visualização, percepção dinâmica de propriedade, estímulo heurístico à descoberta e obtenção de conclusões que podem ser validadas na experimentação.

O *software* de Geometria Dinâmica (GD) foi apresentado aos alunos para um primeiro contato com as ferramentas no próprio arquivo móvel de mídia digital (prevê), visto que o mesmo funciona diretamente sem a necessidade de instalação. Os alunos conheceram a sua interface, como segue abaixo:

Ao acessar o programa temos uma janela como a seguinte.

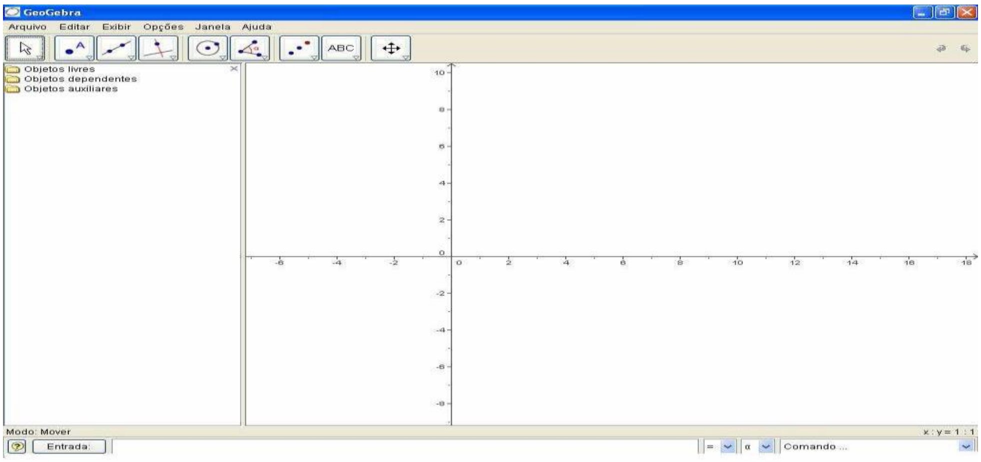


Figura 37: Tela inicial do GeoGebra
Fonte: Manual do Geogebra disponível no Site: www.geogebra.org/

A janela inicial está dividida em duas outras janelas: à esquerda a parte algébrica e à direita a parte geométrica. Se for necessário podemos desativar a parte algébrica e ainda com a ferramenta exibir, esconder os eixos.

Na tela inicial ainda temos a barra de ferramentas de acesso rápido:

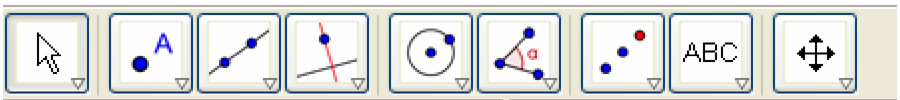


Figura 38: Barra de ferramentas de acesso rápido
Fonte: Manual do Geogebra disponível no Site: www.geogebra.org/

Cada ícone do menu da figura 38 pode acessar uma categoria de ações pré- definidas para executar tarefas. Observamos que no lado direito e abaixo de cada ícone encontramos uma pequena seta indicada para baixo, ou seja, ao clicar em cada uma delas poderemos acessar ferramentas a correlacionadas ao ícone inicial. Vamos aqui apresentar visualmente algumas ferramentas que os alunos tiveram acesso ao executar o GeoGebra.

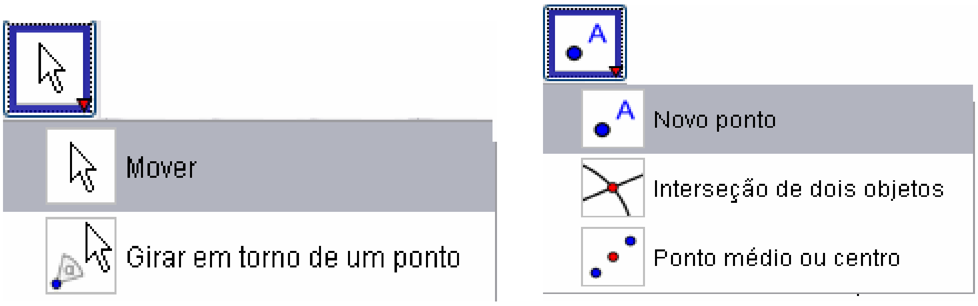


Figura 39: Ícone de seleção e Ícone de ponto

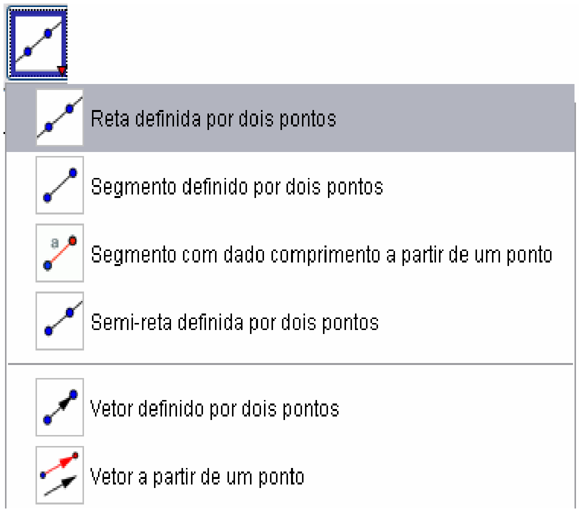


Figura 40: Ícone de reta

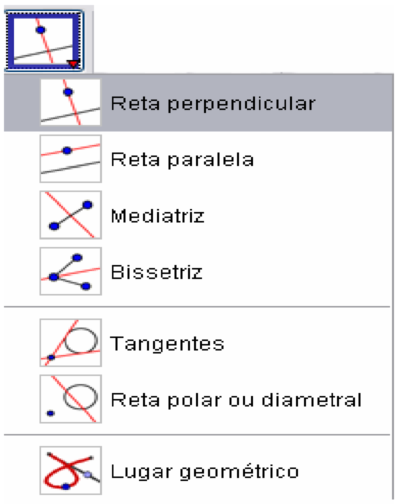


Figura 41: Ícone para propriedades sobre retas

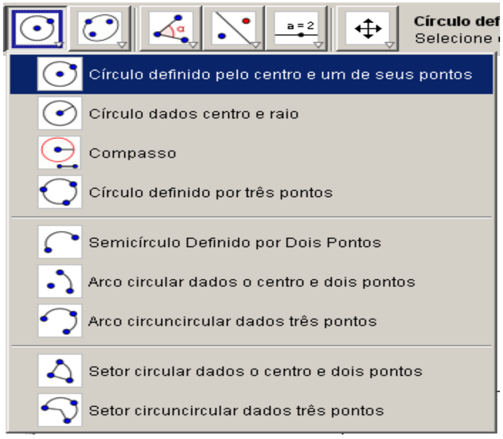


Figura 42: Ícone de curvas

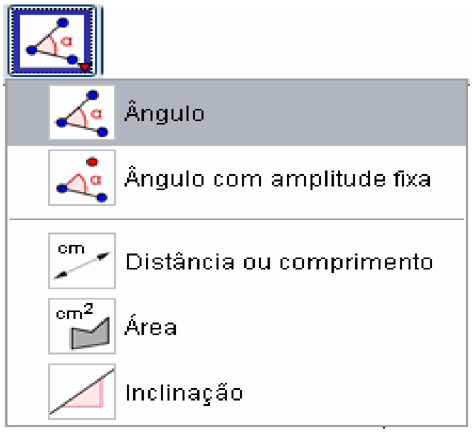


Figura 43: Ícone de medidas

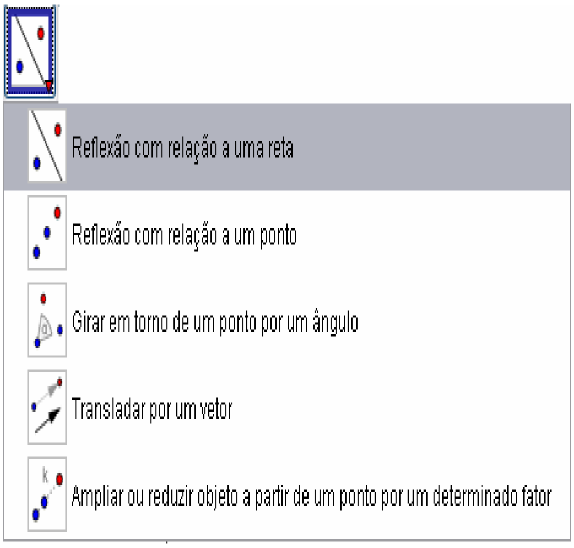


Figura 44: Ícone de simetrias

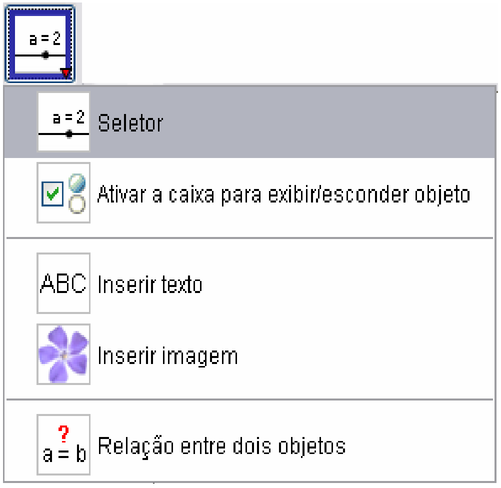


Figura 45: Ícone de ferramentas extras

Figura 46: Ícone de estilo

6.2.4 - Introduzindo o Conceito de Transformações Isométricas

Inicialmente construímos as transformações isométricas explorando a sequência de atividades. Utilizamos o software GeoGebra para mostrar dinamicamente como funcionam as rotações, reflexões e translações.

6.2.4.1 - ROTAÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM OUTRO PONTO

PRIMEIRA ATIVIDADE: Nesta atividade a intenção foi solicitar que os alunos construíssem um ponto A e em seguida um ponto B, o qual foi utilizado para que realizassem oito rotações em torno dele com a medida de 45°, para isto usamos a ferramenta do GeoGebra *“Girar em Torno de um Ponto por Ângulo”*.

A percepção inicial que os alunos poderiam ter era a de que existe um ponto central que naturalmente é o ponto B.

Após realizar esta rotação por oito vezes e fazer com que os alunos verificassem que o ponto B é um ponto central, solicitamos que fossem construídos segmentos sendo todos ligados pelo ponto B do centro até os demais, gerando assim sete segmentos. O importante após a construção foi medi-los para que os alunos pudessem verificar se as suas medidas eram congruentes.

Além de construir os segmentos e medi-los, pedimos aos alunos que construíssem uma circunferência com a ferramenta "Círculo definido pelo centro e um de seus pontos" com o centro em B até o ponto A. Para tornar robusta a construção foi necessário fazer esta circunferência. Para que esta não perdesse suas propriedades ao movimentá-la, solicitamos que determinassem pontos de intersecção entre pontos dos segmentos e a circunferência. Os alunos mediram os ângulos internos e perceberam que cada um mede 45°.

No final com a ferramenta *"Mover"*, movimentaram o ponto A em várias direções, para que respondessem o que acontecia com a medida dos segmentos e dos ângulos internos.

O objetivo foi fazer que os alunos descobrissem que cada segmento é um raio da circunferência e que os ângulos internos de 45° são múltiplos de 360°, por isto o círculo está dividido em 8 partes iguais e, principalmente que na rotação de um ponto em relação a outro ponto também temos uma isometria entre o ponto B central e os demais pontos originados de rotações.

Abaixo uma figura construída com aplicação possível desta atividade proposta.

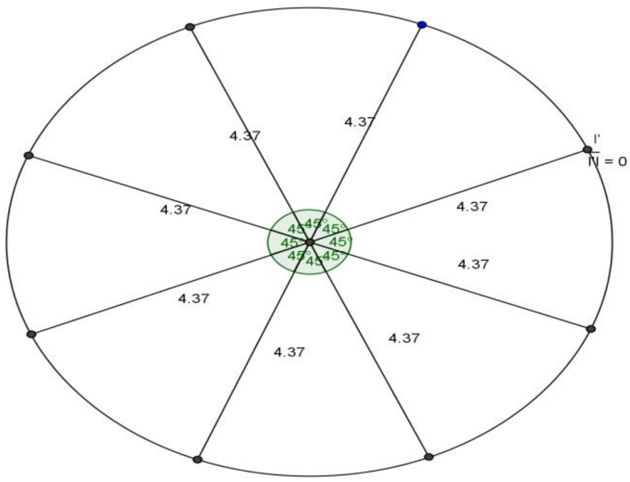


Figura 47: Construção de uma solução da primeira atividade.

SEGUNDA ATIVIDADE: Solicitamos aos alunos que realizassem outro experimento onde receberam um arquivo chamado de Barco.ggb no *pen-drive* contendo a figura 47 BARCO. A atividade consistia em solicitar aos alunos que construíssem a figura 48 do Barco rotacionado, recorrendo as ferramentas de simetrias do GeoGebra, e que registrassem seus passos desta construção na própria área de trabalho do software com a ferramenta *"Inserir Texto"*.

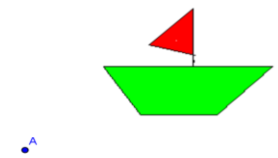


Figura 48: Barco

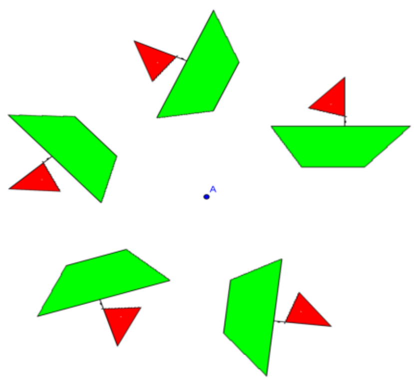


Figura 49: Barco Rotacionado

Acreditamos que os alunos conseguiriam, inicialmente, identificar o estágio intrafigural, ou seja, identificariam que as características da figura original não se alteraram com os polígonos que formam o barco, bem como a reta que forma o mastro e a vela.

Em segundo lugar verificamos se os alunos conseguiram estabelecer um padrão das rotações escolhendo o ângulo entre a figura e o ponto a ser transformado, para que atingissem o estágio interfigural, e construíssem uma figura com as mesmas propriedades da que foi apresentada.

Uma observação final foi verificar se os alunos identificavam, ao realizar uma volta inteira de barquinhos com o GeoGebra, se haveria a composição de um conjunto de reflexões dentre as rotações já realizadas, a este estágio de percepção chamamos de transfigural.

Os alunos foram solicitados a identificar estruturas geométricas relacionando-as com a construção inicial de outras transformações isométricas, além daquelas exigidas nos estágios anteriores, isto é, além das rotações.

Nesse sentido apenas um aluno conseguiu identificar que havia, não só rotações, mas também um conjunto de reflexões na figura construída.

6.2.4.2 - REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM PONTO

TERCEIRA ATIVIDADE: Na primeira etapa desta atividade foi solicitado aos alunos que construíssem pontos simétricos, utilizando as ferramentas de simetrias do GeoGebra, que objetivaram introduzir o conceito de reflexão de um ponto em relação a outro ponto.

Os alunos construíram um ponto A, em seguida o ponto B e, com a ferramenta *“Reflexão de um ponto em relação a um ponto”* do GeoGebra, fizeram o simétrico de B, o B’. Além de pontos simétricos, solicitamos aos alunos que construíssem segmentos para determinar a medida de AB e AB’, verificando se as distâncias, entre os pontos AB e AB’ em relação ao ponto A, são iguais.

Para confirmar se a construção está de acordo com o conceito de simetria, solicitamos que movimentassem o ponto A com a ferramenta *“Mover”*. Os alunos puderam constatar que ao movimentar o ponto B, o seu simétrico, que é o B’, em relação ao ponto A, não houve alteração na distância entre os pontos simétricos, confirmando assim a propriedade de isometria.

Apresentamos uma aplicação desta atividade com a figura abaixo:

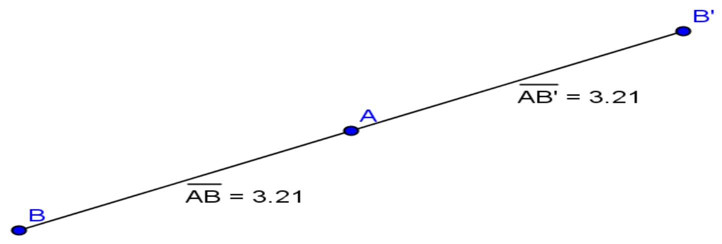


Figura 50: Construção de uma solução possível sobre reflexão

6.2.4.3 - REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA RETA

QUARTA ATIVIDADE: Após solicitarmos aos alunos que construíssem a reflexão de um ponto em relação a outro ponto, pedimos também que realizassem uma reflexão de um ponto em relação a uma reta.

Para ajudar os alunos a elaborarem este conceito, solicitamos que construíssem um ponto A em seguida uma reta r e com a ferramenta *“Reflexão em Relação a uma Reta”* elaborassem o simétrico A’ de A em relação à reta r.

Em seguida os alunos construíram os segmentos AB até reta r e A’B até a reta r, medindo-os.

Com a ferramenta *“Mover”*, arrastaram o ponto A em diversas direções e responderam o que acontece com as medidas dos segmentos construídos, registrando suas dificuldades na própria área de trabalho do GeoGebra.

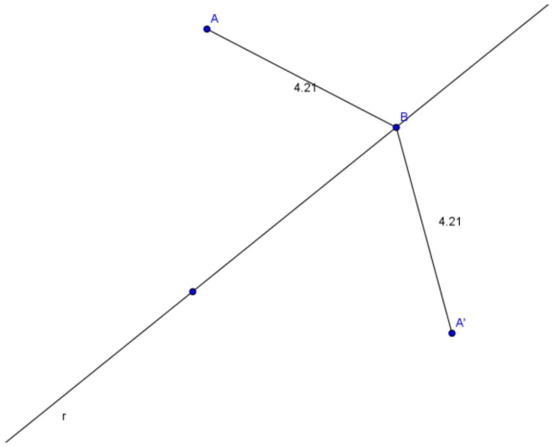


Figura 51: Construção de uma solução da quarta atividade

QUINTA ATIVIDADE: Assim que os alunos conseguiram realizar esta atividade inicial e compreenderam o conceito de reflexão, eles deveriam abrir no *pen-drive* um arquivo constando a figura 51, Catavento. Então foram desafiados a reproduzir a figura 52, Catavento espelhado, utilizando as ferramentas do GeoGebra já aprendidas.

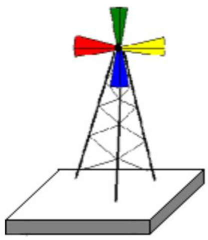


Figura 52: Catavento

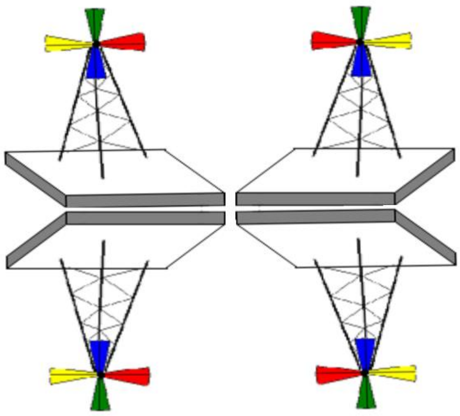


Figura 53: O Catavento espelhado

Em primeiro lugar verificamos se os alunos foram capazes de identificar, ao realizar as reflexões, se as propriedades da figura original não se alteraram, como os ângulos, formas e tamanhos, seriam capazes de identificar com as respostas o estágio intrafigural de desenvolvimento psicogenético.

Em segundo lugar verificamos se os alunos conseguiram relacionar a figura inicial e as retas construídas para fazer as reflexões, ou seja, perceber que não se tratava apenas da figura inicial, mas também do apoio das retas que foram usadas para concretizar as reflexões e atingir assim o estágio interfigural. Havendo a possibilidade de uma inter-relação entre a figura e as retas.

Procuramos, nesta atividade, verificar também o estágio transfigural, percebendo se os alunos conseguiriam visualizar, além das reflexões, uma translação invertida com deslizamento nos pares de reflexões acima. Novamente não só deveríamos notar a construção do conceito das isometrias de reflexões, como também verificar se os alunos conseguiram identificar outras com a translação citada.

6.2.4.4 – TRANSLAÇÃO EM RELAÇÃO A UM VETOR

Os planetas se movimentam segundo um vetor, mas não perdem suas características principais, mantendo-se sempre equidistantes uns dos outros e sempre na mesma direção, mas podendo aparecer em lugares diferentes segundo uma direção pré-estabelecida.

SEXTA ATIVIDADE: Nesta atividade pedimos aos alunos que utilizassem a ferramenta *“Polígono”* para construir um triângulo ABC qualquer. Em seguida, que determinassem um vetor com a ferramenta *“Vetor Definido por Dois Pontos”*, sendo estes pontos D e E, e que realizassem translações do polígono ABC em relação ao Vetor. Verificamos se os alunos perceberam que os triângulos gerados pela translação, A’B’C’ e A”B”C”, permaneceram paralelos e possuíam o mesmo sentido do vetor.

Finalizando, solicitamos que construíssem segmentos que interligassem os pontos A ao A’ e A’ao A”, B ao B’ e B ao B” e o C ao C’ e o C’ ao C”, realizando a medição dos segmentos apontados.

Para tornar a construção robusta com a ferramenta *“Intersecção ente Dois Objetos”*, após a construção dos segmentos, orientamos que marcassem a intersecção entre os pontos dos vértices dos triângulos e os pontos dos segmentos.

Finalmente com a ferramenta *“Mover”*, solicitamos aos alunos que movimentassem o ponto E do vetor e observassem o que acontecia entre as medidas dos segmentos e os triângulos construídos. Então fizemos com que os alunos identificassem mais uma isometria na translação.

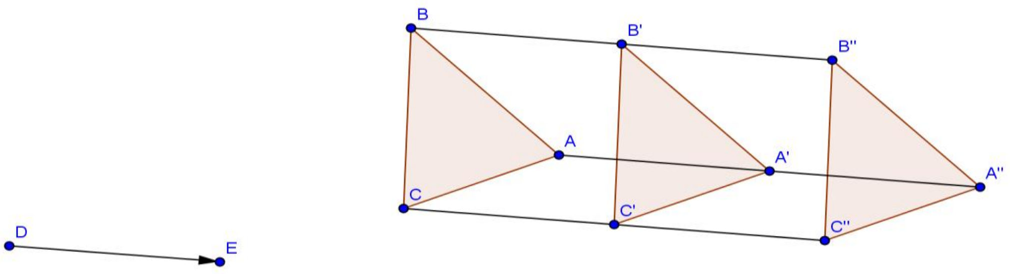


Figura 54: Construção de uma solução da sexta atividade no GeoGebra.

SÉTIMA ATIVIDADE: O experimento consistia, assim como nas demais atividades, em aplicar o conceito de translação já aprendido. Os alunos deveriam abrir no *pen-drive* um arquivo constando a figura 54, abaixo, BANDEIRINHAS e que, utilizando o software GeoGebra, construíssem a figura 55, Translação de BANDEIRINHAS, onde identificáramos, analisando os seus registros, se houve uma compreensão do conceito e quais foram as dificuldades encontradas para realizar a atividade proposta.

Figura 55: Bandeirinhas no GeoGebra

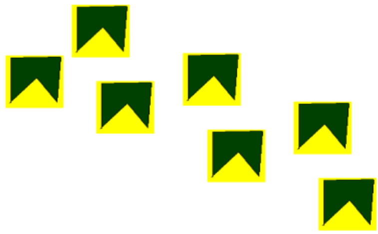


Figura 56: Translação de Bandeirinhas

Com esta sétima atividade verificaríamos se os alunos conseguiram identificar que a translação está relacionada com um vetor aplicado num sentido.

Além da percepção do vetor num sentido pré-definido para deslocar a figura, notaríamos se os alunos identificaram que não houve alteração nas propriedades das figuras que foram transladadas a partir da figura inicial, deslocando-se apenas sobre a orientação de um vetor, destacando o estágio intrafigural da atividade.

Em seguida notamos que os alunos são capazes de identificar a relação entre a figura inicial e o vetor, ou seja, que este é quem dá um sentido a translação do início ao fim da construção, para infinitas transformações isométricas de translação.

E por último, assim como nas anteriores, analisamos se além das translações realizadas para compor a figura, os alunos percebiam que há reflexões invertidas como deslizamento, ou seja, percepção do estágio transfigural, observando na figura suas transformações e suas composições estruturais.

6.2.4.5 - APLICANDO TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

Após a utilização do software GeoGebra para introduzir os conceitos de transformações isométricas no plano, e os alunos terem aprendido este três conceitos com a realizarção das sete atividades anteriores, exploramos uma figura do povo Cokwe nas atividades seguintes.

OITAVA ATIVIDADE: Nesta atividade propomos aos alunos que realizassem transformações isométricas como rotação, reflexão e translação, para saber se eram capazes de construir, a partir de uma única parte da figura (desenho sona), por inteiro, como foi feito nas atividades anteriores. Entretanto, os passos realizados para a construção desta figura contendo essas transformações foram relatados no processo de construção na tela do GeoGebra para que realizassem a institucionalização do aprendizado.

Figura 57: Figura Inicial da Atividade 8

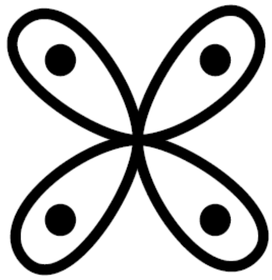


Figura 58: Figura Final da Atividade 8

Cada dupla de alunos recebeu um arquivo no *pen-drive* contendo a figura 57 e a partir dela construíram a 58.

Além de realizarem a construção utilizando as transformações isométricas, os alunos deveriam registrar no próprio arquivo do GeoGebra, com a ferramenta *“Inserir Texto”*, como fizeram esta construção e quais transformações utilizaram.

Esta atividade foi proposta aos alunos para confirmar se as propriedades das transformações, mexendo na própria figura construída, permaneciam inalteradas após a sua construção.

Movimentaram a figura e registraram quais as transformações que podiam ser observadas, anotando todas as suas observações possíveis.

Foram observados os estágios de desenvolvimento psicogenéticos elaborados por Piaget e Garcia (1983), da seguinte forma: se os alunos perceberam que ao movimentar a figura as propriedades iniciais como medidas e ângulos não se alteraram, tal percepção nos indicaria que estavam no estágio intrafigural.

Num segundo momento verificamos se os alunos conseguiram perceber a relação entre a figura inicial e a final, observando que possuíam uma simetria central do ponto que propiciou a rotação ou a reflexão para composição da figura final, então estariam agora no estágio interfigural de desenvolvimento psicogenético.

Por fim notamos se os alunos perceberam outras transformações isométricas ao movimentar a figura final, como translações invertidas e reflexões deslizantes que estavam intrínsecas, em caso positivo estariam no estágio transfigural.

Estas percepções lógicas foram retiradas das respostas registradas nos protocolos dos próprios alunos que, ao terminarem as atividades, salvaram suas respostas no próprio *pen-drive*, cedido pelo professor pesquisador.

NONA ATIVIDADE: Nesta atividade solicitamos que os alunos construíssem a figura 58, figura final da atividade 8, mas utilizando somente as ferramentas do GeoGebra, ou seja, usando apenas o *software*.

Para esta atividade foi pedido aos alunos que utilizassem a ferramenta *"Arco Circuncircular"* com a seguinte orientação inicial: Construir um arco nos pontos (0,0), (3,1) e (6,0). A partir deste arco os alunos tiveram que aplicar as transformações isométricas que julgaram necessárias para construir a figura. Vejamos um exemplo de solução abaixo:

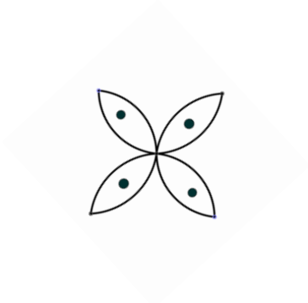


Figura 59: Construção da solução da nona atividade.

Observamos que nesta nona atividade os alunos tiveram um pouco de dificuldade, visto que o Sona *"aranha no meio da sua teia"* foi construído pelos Cokwes com a técnica de contornar a malha pontilhada, como vimos anteriormente. Para construir este Sona no software GeoGebra, indicamos a técnica de construção das figuras de Kolam, ou seja, marcando um arco por cima dos pontos e depois aplicando as transformações isométricas.

CAPÍTULO 7 – APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Foram necessários quatro encontros para realizar esta pesquisa, vale registrar que planejamos inicialmente três encontros, mas foi preciso remodelar após o primeiro encontro quando se fez necessário alterar o local e o equipamento, mudando assim o ambiente de aprendizagem.

7.1. Primeiro Encontro

Para o primeiro encontro foi programada a apresentação do vídeo "Simetrias", havia telas mostrando um esboço da história do povo Cokwe e também a realização de duas atividades: uma de construção e outra de aplicação utilizando o GeoGebra.

A metodologia "*Design Experiment"* privilegia a reformulação para um aprimoramento da pesquisa e deste modo fizemos um ajuste na sequência de atividades.

Foi possível aplicar uma parte da sequência de atividades no primeiro encontro, mas não foi possível realizar as duas atividades de introdução do GeoGebra, que deixamos então para o próximo encontro.

Segundo o modelo de Brown (1992) tem-se a sala de aula, o professor-pesquisador, o estudante e a tecnologia, tudo isto integra o ambiente de aprendizagem, tornando-se um fator importante para uma ecologia de aprendizagem.

Precisamos realizar uma mudança de local, onde foi aplicada a sequência de atividades, pois o espaço inicial que era o laboratório de informática da escola foi transferido para a sala dos professores devido ao fato de não podermos utilizar o laboratório, pois o monitor responsável pelo laboratório, mesmo tendo sido agendado, não estava presente.

Por sugestão do Vice-Diretor da escola e dos alunos fizemos a alteração de local e dos computadores que também não puderam ser usados para o encontro.

Estes computadores fazem parte do programa do Estado Acessa São Paulo funcionam apenas como máquinas para o acesso à internet para pesquisas, não podendo ser utilizados para realização de atividades com softwares. Deste modo utilizamos três notebooks, dois do professor pesquisador e um da escola.

Fizemos uso de *pen-drives* com os arquivos do GeoGebra instalados, para que não houvesse a necessidade de instalação nos *notebooks.*

Iniciamos com apresentação da pesquisa dizendo quantos encontros e a forma como seria apresentada cada etapa dos encontros e entregamos o material para os alunos.

Os alunos participantes da pesquisa eram alunos do 3º ano do Ensino Médio os quais se propuseram a participar como voluntários.

Os encontros ocorreram fora do horário normal de aula. Os alunos chegavam mais cedo, em horários pré-determinados, já que estudavam no período noturno.

Antes de projetar o vídeo *"Simetrias"*, perguntamos aos alunos se os mesmos já haviam tido contato com o objeto matemático simetria. Dois alunos não haviam aprendido e nem tinham conhecimento algum sobre simetria, e os outros dois disseram que tiveram contato no cursinho pré-vestibular que freqüentavam, mas num enfoque físico, como rotação e translação da terra, mas nenhum deles possuía um conhecimento geométrico destas simetrias, rotação, reflexão e translação.

Durante a exibição do vídeo "Simetrias" os alunos pediram para voltar a uma parte que mostrava um diamante. Queriam saber a estrutura geométrica de um átomo de carbono, então fizemos uma breve explanação sobre a sua composição, pois segundo o vídeo um diamante possui estruturas básicas de quatro átomos de carbono, que tem forma geométrica de um tetraedro.

Num segundo momento realizamos a apresentação de telas no computador com um projetor multimídia. Ali assistimos a um breve histórico do povo Cokwe e da Geometria Sona.

As técnicas de construção dos desenhos Sona foram as que mais chamaram a atenção dos alunos, e um comentou que apesar dos Cokwes marcarem uma malha pontilhada antes da realização dos desenhos, eles não constroem estes desenhos passando o dedo por cima dos pontos, mas sim em volta dos pontos, sem tocá-los.

Após a apresentação entregamos uma folha com um desenho Sona para que os alunos registrassem se conseguiram reconhecer alguma simetria, identificando na figura as possíveis simetrias.

Seguem os registros dos alunos nas respectivas folhas.


FICHA PARA RESPOSTA: FIGURA ARANHA NO MEIO DA SUA TEIA

Observe a figura abaixo a qual servirá para responder, após o vídeo e a apresentação das telas que assistiram, a dupla acredita que existe uma figura inicial que originou esta que se apresenta. Qual a simetria que pode ser percebida pela dupla, ou seja, identifiquem na figura todas as simetrias existentes, ou as possíveis.

Figura 02: Extraída de Gerdes (2008)

RESPOSTA:

Figura 60: A resposta do aluno Jair: ***Começou no centro e em seguida fez as pernas, as simetrias são de reflexão e de rotação.***

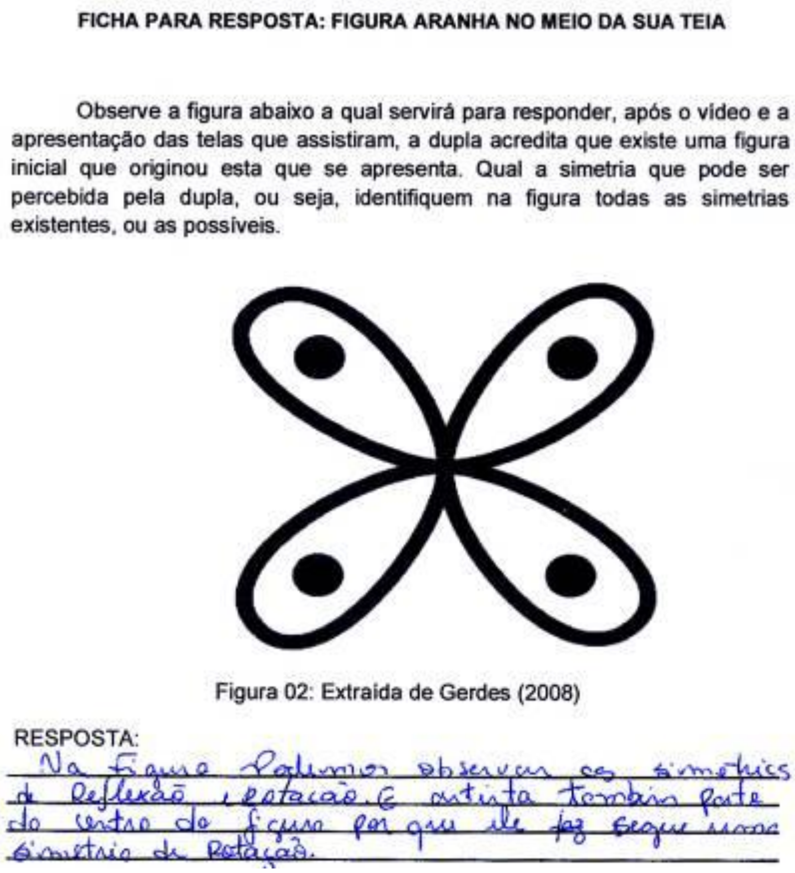

FICHA PARA RESPOSTA: FIGURA ARANHA NO MEIO DA SUA TEIA

Observe a figura abaixo a qual servirá para responder, após o vídeo e a apresentação das telas que assistiram, a dupla acredita que existe uma figura inicial que originou esta que se apresenta. Qual a simetria que pode ser percebida pela dupla, ou seja, identifiquem na figura todas as simetrias existentes, ou as possíveis.

Figura 02: Extraída de Gerdes (2008)

RESPOSTA:

Figura 61: A resposta do aluno Tadeu***: Reflexão, rotação. O ponto inicial possivelmente foi do centro.***



FICHA PARA RESPOSTA: FIGURA ARANHA NO MEIO DA SUA TEIA

Observe a figura abaixo a qual servirá para responder, após o vídeo e a apresentação das telas que assistiram, a dupla acredita que existe uma figura inicial que originou esta que se apresenta. Qual a simetria que pode ser percebida pela dupla, ou seja, identifiquem na figura todas as simetrias existentes, ou as possíveis.

Figura 02: Extraída de Gerdes (2008)

RESPOSTA: Na figura podemos observar as simetrias de Reflexão e rotação. O artista também parte do centro da figura por que ele faz segue uma simetria de Rotação.

Figura 62:Resposta da aluna Julia: ***Na figura podemos observar as simetrias de reflexão e rotação. O artista também parte do centro da figura porque ele faz segue uma simetria de rotação***

FICHA PARA RESPOSTA: FIGURA ARANHA NO MEIO DA SUA TEIA

Observe a figura abaixo a qual servirá para responder, após o vídeo e a apresentação das telas que assistiram, a dupla acredita que existe uma figura inicial que originou esta que se apresenta. Qual a simetria que pode ser percebida pela dupla, ou seja, identifiquem na figura todas as simetrias existentes, ou as possíveis.

Figura 02: Extraída de Gerdes (2008)

RESPOSTA: Começou pelo centro Simetria. existentes rotação e reflexão.

Figura 63: Resposta da aluna Karlene: ***Começou pelo centro. Simetrias existentes rotação e reflexão.***

A maioria dos alunos registrou que as simetrias existentes são rotação e reflexão e escreveu que o centro é o lugar onde os especialistas começaram a construir a figura, mas não respondeu se há uma figura inicial que originou todo o desenho.

O aluno Tadeu chegou até a destacar um quarto da figura, mas não respondeu se havia uma figura inicial, apenas apontou que o centro é onde se começou a fazer a figura.

A aluna Karlene destacou os eixos de simetria existentes na figura, mesmo sem saber que estas divisões levam este nome, pois quando foram questionados, todos sem exceção nunca haviam estudado simetrias do ponto de vista geométrico. Assim, acreditamos que a aluna construiu estes eixos intuitivamente.

Mesmo sendo uma atividade inicial, percebemos, nos registros, que os alunos, apesar de não terem estudado o objeto matemático simetrias, conseguiram identificar as características principais internas da figura, isto nos indica que estão no estágio intrafigural.

Neste encontro não foi esperado que os alunos se enquadrassem nos estágios interfigural e transfigural devido ao fato de permitir somente a observação sem manipulação, pois ainda não havia sido construído o conceito de rotação, reflexão e translação. Estas atividades de construção e aplicação ficaram planejadas para os encontros seguintes.

7.2. Segundo Encontro

No segundo encontro exploramos com o GeoGebra a primeira e a segunda atividade.

Inicialmente apresentamos as funcionalidades dos ícones, apresentando as suas ferramentas para que os alunos se familiarizassem com o *software*. Por exemplo, no ícone *“Ponto”*, mostramos que há ferramentas de *“Novo Ponto”*, *“Ponto de Intersecção”* e *“Ponto Médio”*, e assim por diante.

Foi necessário introduzir o uso do mouse para realizar as atividades dos próximos encontros devido ao fato de percebermos que os alunos perderam muito tempo na realização das atividades anteriores, pois estavam usando os *notebooks* pela primeira vez.

Resolvido o problema da limitação no manuseio do equipamento, fizemos segundo Brown (1992) o refinamento da qualidade do ambiente para aplicação da sequência de atividades.

Partimos então para a utilização das ferramentas do software a fim de realizar a construção da primeira atividade, a qual chamamos de atividade de construção, onde os alunos seguiram passo a passo um roteiro para construir uma figura que se assemelha a uma roda de bicicleta com raios.

Inicialmente os alunos construíram um ponto A, em seguida um ponto B e realizaram rotações de A em torno do ponto B gerando um ponto A'.

Continuaram após este início, realizando uma nova rotação de A' em torno de B gerando o ponto A", e assim por diante até completar oito rotações.

Foi solicitado que, após as rotações, construíssem os segmentos dos pontos gerados pela rotação até o ponto central, que era o ponto B e medissem todos os segmentos. Para tornar a figura robusta solicitamos que utilizassem a ferramenta ponto de intersecção para unir os pontos e a circunferência.

Foram feitas as seguintes questões:

1) Existe algum ponto que possa ser o ponto central? Qual?

____

2) Ao realizar as rotações em qual sentido elas estão acontecendo?

____

3) Qual a medida do ângulo encontrado entre os pontos e o ponto central? São todos iguais? Quanto mede?

____

4) No final com a ferramenta *"Mover"*, movimente o ponto A em vários sentidos e verifique o que acontece com as medidas dos segmentos e dos ângulo?

____

5) Como chamamos as medidas dos segmentos partindo do centro até a circunferência construída?

---

6) Qual relação pode ser feita entre o experimento realizado e a definição de rotação?

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também na própria janela geométrica do GeoGebra, com a ferramenta “Inserir Texto”.

Abaixo seguem as respostas dos alunos:

1) Existe algum ponto que podemos dizer que é o ponto central? Qual?

Sim. O Ponto B

2) Ao realizar as rotações em qual sentido estas estão acontecendo?

Sentido ~~Antihorario~~ anti-horario.

3) Qual a medida do ângulo encontrado entre os pontos e o ponto central? São Todos iguais? Quanto mede?

45°. Sim.

4) No final com a ferramenta "Mover", movimente o ponto A em vários sentidos e verifiquem o que acontece com as medidas dos segmentos e dos ângulos?

As medidas dos segmentos mudam, mas as medidas dos Angulos permanecem a mesma, 45°.

5) Como chamamos as medidas dos segmentos partindo do centro até a circunferência construída?

Angulo.

6) Qual a relação que pode ser feita entre o experimento realizado com a definição de rotação?

O sentido de Rotação gira em torno de um eixo e

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

mantém as mesmas propriedades. No experimento ~~feito como~~ realizado podemos observar o mesmo.

1) Existe algum ponto que podemos dizer que é o ponto central? Qual?

Sim, Ponto B

2) Ao realizar as rotações em qual sentido estas estão acontecendo?

Sentido - anti - horário

3) Qual a medida do ângulo encontrado entre os pontos e o ponto central? São Todos iguais? Quanto mede?

São 8 pontos de 45º ~~[illegible]~~ cada um. Sim

4) No final com a ferramenta "Mover", movimente o ponto A em vários sentidos e verifiquem o que acontece com as medidas dos segmentos e dos ângulos?

As medidas dos segmento mudam, mas a medida dos ângulos permanecem a mesma 45º

5) Como chamamos as medidas dos segmentos partindo do centro até a circunferência construída?

Ângulo

6) Qual a relação que pode ser feita entre o experimento realizado com a definição de rotação?

O sentido de rotação gira em torno de um

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

eixo e mantém as mesmas propriedades e no experimento realizado podemos observar o mesmo.

1) Existe algum ponto que podemos dizer que é o ponto central? Qual?

Sim. O Ponto B

2) Ao realizar as rotações em qual sentido estas estão acontecendo?

Estão acontecendo no sentido horário.

3) Qual a medida do ângulo encontrado entre os pontos e o ponto central? São Todos iguais? Quanto mede?

mede 45º Sim

4) No final com a ferramenta "Mover", movimente o ponto A em vários sentidos e verifiquem o que acontece com as medidas dos segmentos e dos ângulos?

Os segmentos aumentam ou diminuem na mesma proporção mas os ângulos continuam com a mesma medida.

5) Como chamamos as medidas dos segmentos partindo do centro até a circunferência construida?

Raio

6) Qual a relação que pode ser feita entre o experimento realizado com a definição de rotação?

Tanto na rotação como no nosso experimento não importa

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

que posição que esteja a medida será a mesma.

1) Existe algum ponto que podemos dizer que é o ponto central? Qual?

SIM O PONTO EM QUE INICIAMOS A ROTACAO

2) Ao realizar as rotações em qual sentido estas estão acontecendo?

ANTI-HORARIO

3) Qual a medida do ângulo encontrado entre os pontos e o ponto central? São Todos iguais? Quanto mede?

45, 5Ao todos IGUAIS

4) No final com a ferramenta "Mover", movimente o ponto A em vários sentidos e verifiquem o que acontece com as medidas dos segmentos e dos ângulos?

AUMENTÃO COM A MESMA PROPORÇÃO E OS ANGULOS CONTINUAM COM A MESMA MEDIDA

5) Como chamamos as medidas dos segmentos partindo do centro até a circunferência construida?

RAIO

6) Qual a relação que pode ser feita entre o experimento realizado com a definição de rotação?

O SEGMENTO E O ANGULO MESMO QUE TROQUE A POSICAO A MEDIDA SERÁ A MESMA

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

Verificamos que os alunos conseguiram identificar que o ponto B é o ponto central, portanto há uma simetria de rotação, ou seja, todas as rotações aplicadas giraram em torno deste ponto gerando os demais.

Notamos também que os alunos se encontravam no estágio intrafigural ao realizar esta atividade, pois identificaram a não alteração das propriedades internas da figura, ao movimentar o ponto A, e entenderam que os raios aumentavam igualmente, mas os ângulos permaneciam inalterados mantendo a isometria.

Quanto à pergunta: Em que sentido as rotações eram feitas, apenas a aluna Karlene respondeu incorretamente, pois disse que eram construídas no sentido horário, entretanto todas foram realizadas no sentido anti-horário.

Os alunos identificaram sem problemas a medida dos ângulos centrais que eram de 45° porém nesse caso nenhum deles percebeu que se uma circunferência tem uma volta de 360°, ao dividi-la em oito partes iguais, naturalmente obteríamos 45° graus.

Concluímos então que os alunos continuaram apenas no estágio intrafigural, pois perceberam somente as relações internas da figura.

Eles fizeram somente uma relação entre os pontos e os segmentos (raios) que dividem a figura circunferência em oito partes iguais. Poderiam ainda relacionar a circunferência e os segmentos construídos anteriormente, que se tornaram seus raios, caso o fizessem teriam passado ao estágio interfigural, ou seja, inter-relacionando as figuras.

Por isso observamos que, dos quatro alunos, dois deles não conseguiram perceber que os segmentos, após a construção da circunferência, se tornaram raios desta circunferência.

Na segunda atividade, qual chamamos de atividade de aplicação, os alunos abriram a figura 64 chamada de Barco e foram desafiados a construir a partir desta, a figura 65, como segue abaixo:

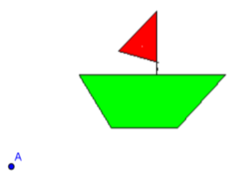


Figura 64: Barco

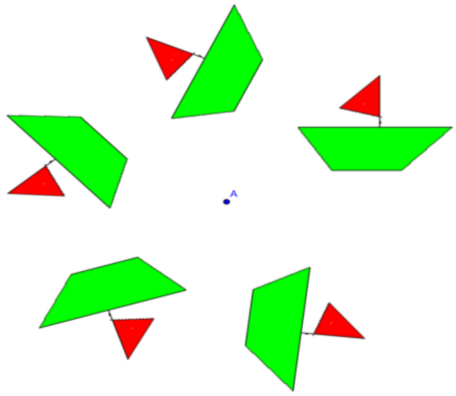


Figura 65: Barco Rotacionado

1) Qual a medida dos ângulos de rotação que foi utilizada para construir a figura 65? Como você chegou a esta medida?

   ____

2) As características do polígono que formam o barco e a bandeira, quando aplicamos a rotação, se alteram se construímos a figura 65? Por quê?

   ____

3) Existe outro tipo de isometria que podemos perceber ao terminar de construir a figura 65?

   ____

4) Após a construção da figura 65, com a ferramenta *"Mover",* clique e segure o mouse no primeiro barco e movimente a figura construída. As distâncias deste em relação ao ponto A e dos demais se alteram?

   ____

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também na própria janela geométrica do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

Abaixo seguem as respostas dos alunos:

1) Qual a medida dos ângulos de rotação que foram utilizados para construir a figura 02? Como você chegou nesta medida?

72°. Dividindo 5 por 360°

2) As características do polígono que forma o barco e a bandeira quando aplicamos a rotação se alteram quando construímos a figura 02? Por quê?

Não. Porque na simetria de Rotação a imagem mantém as suas propriedades.

3) Existe outro tipo de isometria que podemos perceber ao terminar de construir a figura 02?

Não.

4) Após realização da construção da figura 02, com a ferramenta "mover" clique e segure o mouse (rato) no primeiro barco e movimente a figura construída, as distâncias deste em relação ao ponto A e dos demais se alteram?

A distancia entre o ponto A e as figuras se alteram mas os ângulos não.

1) Qual a medida dos ângulos de rotação que foram utilizados para construir a figura 02? Como você chegou nesta medida?

72° Dividimos 5 por 360

2) As características do polígono que forma o barco e a bandeira quando aplicamos a rotação se alteram quando construímos a figura 02? Por quê?

Não. Porque na simetria de rotação a imagem mantém as suas propriedades.

3) Existe outro tipo de isometria que podemos perceber ao terminar de construir a figura 02?

Não.

4) Após realização da construção da figura 02, com a ferramenta "mover" clique e segure o mouse (rato) no primeiro barco e movimente a figura construída, as distâncias deste em relação ao ponto A e dos demais se alteram?

A distancias entre o ponto A e as figuras se alteram mas os angulos não.

... formulário e também no próprio

1) Qual a medida dos ângulos de rotação que foram utilizados para construir a figura 02? Como você chegou nesta medida?

Começamos com 45° depois 90, 60 e 120

2) As características do polígono que forma o barco e a bandeira quando aplicamos a rotação se alteram quando construímos a figura 02? Por quê?

não a figura continua a mesma

3) Existe outro tipo de isometria que podemos perceber ao terminar de construir a figura 02?

(~~Sim~~) não existe nenhum outro tipo de rotação,

4) Após realização da construção da figura 02, com a ferramenta "mover" clique e segure o mouse (rato) no primeiro barco e movimente a figura construída, as distâncias deste em relação ao ponto A e dos demais se alteram?

não se alteram

1) Qual a medida dos ângulos de rotação que foram utilizados para construir a figura 02? Como você chegou nesta medida?

COMEÇAMOS COM 45. 90/60/120

2) As características do polígono que forma o barco e a bandeira quando aplicamos a rotação se alteram quando construímos a figura 02? Por quê?

NÃO, CONTINUAM COM MESMA FORMA GEOMETRICA

3) Existe outro tipo de isometria que podemos perceber ao terminar de construir a figura 02?

NÃO APENAS ROTAÇÃO

4) Após realização da construção da figura 02, com a ferramenta "mover" clique e segure o mouse (rato) no primeiro barco e movimente a figura construída, as distâncias deste em relação ao ponto A e dos demais se alteram?

SE APENAS GIRAR AS MEDIDAS NÃO SE ALTERAM

Nesta atividade tínhamos dois objetivos, verificar se os alunos conseguiam construir a figura 64 e identificar o estágio interfigural, pois notamos que além das rotações após a construção da figura 64, era razoável identificar também as reflexões invertidas, porém isto não aconteceu ao analisarmos as respostas.

Todos conseguiram identificar os ângulos utilizados para construir a figura 64 a partir da figura 63, mas o interessante foi a dupla Jair e Karlene que registrou a construção nesta ordem: a rotação dos ângulos 45°, 60º, 90° e 120°. Já a dupla Julia e Tadeu percebeu que ao dividir 360° por cinco, porque é o número de barcos que contém na figura 64, obtinham 72° então aplicou a rotação por este ângulo para compor a figura 64.

Mesmo ao realizar as rotações de 45°, 60°, 90° e 120°, a dupla Jair e Karlene, assim como Julia e Tadeu, identificou os valores que compunham as rotações do barco da figura 64, mas ficaram no estágio intrafigural.

Podemos afirmar que houve erro por parte simplista da primeira dupla em dividir 360º por 5, construíram a figura com o mesmo número de barcos porém em posições diferentes da figura solicitada, não se atentaram para a posição.

7.3. Terceiro Encontro

Começamos este encontro sem a presença do aluno Jair por ter de trabalhar como ajudante de pedreiro. Portanto, continuamos com os outros três que compõem a pesquisa. Eles ficaram divididos em Julia e Karlene numa dupla e o aluno Tadeu sozinho em outro computador.

As atividades deste encontro estão relacionadas à reflexão em relação a um ponto, uma reta e também com as translações por um vetor.

O objetivo foi alcançado quando os alunos conseguiram perceber que as propriedades das figuras originais não se alteram.

Então podemos dizer que os alunos se encontravam, nesta fase do trabalho no estágio de desenvolvimento psicogenético chamado de intrafigural.

Nas reflexões e translações registradas nos protocolos, tanto escritos como nos salvos no GeoGebra, os alunos responderam que as medidas de distância entre os triângulos e bandeirinhas não se alteraram, portanto relacionaram os objetos aos segmentos que mantêm a mesma distância.

Ao movimentarem a figura original, perceberam que a distância permanecia inalterada e isso nos remeteu a identificar que os alunos estão no estágio interfigural.

Perguntamos aos alunos se conseguiam identificar outra simetria além das pedidas nas atividades. Tadeu identificou a translação invertida e Karlene e Julia identificaram a rotação, mesmo que timidamente nas suas justificativas. Porém pudemos identificar o raciocínio desenvolvido como transfigural, ou seja, os alunos atingiram um nível avançado em relação aos demais.

Repostas do aluno Tadeu:

TERCEIRA ATIVIDADE

Além de construir pontos simétricos, construam segmentos para determinar a medida dos segmentos AB e AB', verificando que a distância entre os pontos AB e AB' em relação a um ponto A, são simétricos.

Para confirmar que a construção está de acordo com o conceito de simetria, basta mover o ponto A em várias direções com a ferramenta "mover" do GeoGebra e os alunos poderão constatar que ao movimentar o ponto B, o seu simétrico que é o B' em relação ao ponto A, o que acontece com a distância entre os pontos simétricos?

Elos aumentam e diminuem.

QUARTA ATIVIDADE

Construa um ponto A em seguida uma reta r e com a ferramenta "Reflexão em relação a uma Reta" construir o simétrico A' de A em relação à reta r. Em seguida construir os segmentos AB até reta r e A'B até a reta r, medindo-os.

Com a ferramenta "mover" arrastar o ponto A em diversas direções e responda o que acontece com as medidas dos segmentos construídos?

R. Eles variam de medida, e o ponto B continua fixo na Reta r.

QUINTA ATIVIDADE

Vamos responder algumas questões referentes às reflexões:

1) Quando realizaram as reflexões o que perceberam em relação às propriedades originais da figura 01 elas se mantiveram ou alteraram quando construíram a figura 02?

Mantiveram os mesmo Propriedades

2) Podemos perceber outro tipo de isometria que compõe a figura além a reflexão?

Sim, a isometria de translação invertida

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

SEXTA ATIVIDADE

Nesta atividade utilizem a ferramenta "Polígono" para construir um triângulo ABC qualquer em seguida determine um vetor com a ferramenta "Vetor Definido por Dois Pontos", sendo os pontos D e E.

1) Realizando as translações do polígono ABC em relação ao Vetor, o que podemos verificar com os novos triângulos gerados pela translação, A'B'C' e o A"B"C"? Possuem um mesmo sentido? Qual?

O sentido indicado pelo vetor D,E.

2) Em seguida construa segmentos que interliguem os pontos A ao A' e A' o A", B ao B' e B ao B" e o C ao C' e o C' ao C", realizando a medição dos segmentos apontados. O que podemos perceber após medir os segmentos?

Que todos segmentos tem a mesma medida

3) Finalmente com a ferramenta "mover", movimentem o ponto E do vetor e verifiquem o que acontece entre as medidas dos segmentos e dos triângulos construídos.

A medida dos segmentos variam ~~ou para ten~~

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

SÉTIMA ATIVIDADE

1) Nesta podemos relacionar a construção das BANDEIRINHAS com um vetor, este vetor tem um sentido?

Sim.

2) Há alguma alteração nas propriedades da figura 01 após a construção da figura 02?

Não. Ela mantêm as mesmas Propriedades

3) Podemos perceber além das translações realizadas alguma outra transformação isométrica na figura 02 quando terminamos a sua construção?

Não.

Repostas da aluna Julia:

TERCEIRA ATIVIDADE

Para confirmar que a construção está de acordo com o conceito de simetria, basta mover o ponto A em várias direções com a ferramenta "mover" do GeoGebra e os alunos poderão constatar que ao movimentar o ponto B, o seu simétrico que é o B' em relação ao ponto A, o que acontece com a distância entre os pontos simétricos?

A distância não se altera em relação aos pontos.

QUARTA ATIVIDADE

Nesta atividade faremos a construção de uma reflexão de um ponto a uma reta.

Construa um ponto A em seguida uma reta r e com a ferramenta "Reflexão em relação a uma Reta" construir o simétrico A' de A em relação à reta r. Em seguida construir os segmentos AB até reta r e A'B até a reta r, medindo-os.

Com a ferramenta "mover" arrastar o ponto A em diversas direções e responda o que acontece com as medidas dos segmentos construídos?

Notamos que mesmo ao movimentar os segmentos eles mantêm a mesma distância de A,B para B,A'

Obs.: Registre as respostas e outras considerações no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

QUINTA ATIVIDADE

Vamos responder algumas questões referentes às reflexões:

1) Quando realizaram as reflexões o que perceberam em relação às propriedades originais da figura 01 elas se mantiveram ou alteraram quando construíram a figura 02?

Elas se mantiveram apenas foram refletidas

2) Podemos perceber outro tipo de isometria que compõe a figura além a reflexão?

Rotação

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

SEXTA ATIVIDADE

SEXTA ATIVIDADE

Nesta atividade utilizem a ferramenta "Polígono" para construir um triângulo ABC qualquer em seguida determine um vetor com a ferramenta "Vetor Definido por Dois Pontos", sendo os pontos D e E.

1) Realizando as translações do polígono ABC em relação ao Vetor, o que podemos verificar com os novos triângulos gerados pela translação, A'B'C' e o A"B"C"? Possuem um mesmo sentido? Qual?

Sim. Os polígonos transladaram mantendo assim a mesma sequência

2) Em seguida construa segmentos que interliguem os pontos A ao A' e A' o A", B ao B' e B ao B" e o C ao C' e o C' ao C", realizando a medição dos segmentos apontados. O que podemos perceber após medir os segmentos? exatamente a

Eles possuem a mesma distancia de um segmento para o outro.

Para tornar a construção robusta com a ferramenta "Intersecção ente Dois Objetos", após a construção dos segmentos, será solicitado que os alunos marquem a intersecção entre os pontos dos vértices dos triângulos e os pontos dos segmentos.

3) Finalmente com a ferramenta "mover", movimentem o ponto E do vetor e verifiquem o que acontece entre as medidas dos segmentos e dos triângulos construídos.

O segmento ~~(...)~~ mantém a mesma medida e proporção ~~que~~ mesmo que o espaço altere.

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

SÉTIMA ATIVIDADE

1) Nesta podemos relacionar a construção das BANDEIRINHAS com um vetor, este vetor tem um sentido?

Sim.

2) Há alguma alteração nas propriedades da figura 01 após a construção da figura 02?

Não.

3) Podemos perceber além das translações realizadas alguma outra transformação isométrica na figura 02 quando terminamos a sua construção?

~~...~~ Não notamos nenhuma transformação

Respostas da aluna Karlene:

TERCEIRA ATIVIDADE

Para confirmar que a construção está de acordo com o conceito de simetria, basta mover o ponto A em várias direções com a ferramenta "mover" do GeoGebra e os alunos poderão constatar que ao movimentar o ponto B, o seu simétrico que é o B' em relação ao ponto A, o que acontece com a distância entre os pontos simétricos?

A distancia não se altera em relação aos pontos

QUARTA ATIVIDADE

Nesta atividade faremos a construção de uma reflexão de um ponto a uma reta.

Construa um ponto A em seguida uma reta r e com a ferramenta "Reflexão em relação a uma Reta" construir o simétrico A' de A em relação à reta r. Em seguida construir os segmentos AB até reta r e A'B até a reta r, medindo-os.

Com a ferramenta "mover" arrastar o ponto A em diversas direções e responda o que acontece com as medidas dos segmentos construídos?

Notamos que mesmo que movimentemos os segmentos AB e A'B continuaram com as mesmas medidas.

Obs.: Registre as respostas e outras considerações no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

QUINTA ATIVIDADE

Vamos responder algumas questões referentes às reflexões:

1) Quando realizaram as reflexões o que perceberam em relação às propriedades originais da figura 01 elas se mantiveram ou alteraram quando construíram a figura 02?

Elas se manteram apenas foram refletidas

2) Podemos perceber outro tipo de isometria que compõe a figura além a reflexão?

a Rotação

SEXTA ATIVIDADE

SEXTA ATIVIDADE

Nesta atividade utilizem a ferramenta "Polígono" para construir um triângulo ABC qualquer em seguida determine um vetor com a ferramenta "Vetor Definido por Dois Pontos", sendo os pontos D e E.

1) Realizando as translações do polígono ABC em relação ao Vetor, o que podemos verificar com os novos triângulos gerados pela translação, A'B'C' e o A"B"C"? Possuem um mesmo sentido? Qual?

Sim. Os polígonos transladaram mantendo assim a mesma posição.

2) Em seguida construa segmentos que interliguem os pontos A ao A' e A' o A", B ao B' e B ao B" e o C ao C' e o C' ao C", realizando a medição dos segmentos apontados. O que podemos perceber após medir os segmentos?

Que todos os segmentos tem a mesma medida

Para tornar a construção robusta com a ferramenta "Intersecção ente Dois Objetos", após a construção dos segmentos, será solicitado que os alunos marquem a intersecção entre os pontos dos vértices dos triângulos e os pontos dos segmentos.

3) Finalmente com a ferramenta "mover", movimentem o ponto E do vetor e verifiquem o que acontece entre as medidas dos segmentos e dos triângulos construídos.

Os segmentos mantém a mesma medida mesmo que o espaço se altere.

SÉTIMA ATIVIDADE

1) **Nesta podemos relacionar a construção das BANDEIRINHAS com um vetor, este vetor tem um sentido?**

Sim.

2) **Há alguma alteração nas propriedades da figura 01 após a construção da figura 02?**

Não

3) **Podemos perceber além das translações realizadas alguma outra transformação isométrica na figura 02 quando terminamos a sua construção?**

não notamos nenhuma outra isometria.

As propriedades das isometrias de reflexão e rotação foram assimiladas pelos alunos quando responderam corretamente sobre o que acontece ao verificar a relação entre os pontos, os triângulos e as bandeirinhas com relação a outro objeto qualquer, seja uma reta, um ponto ou um vértice.

Constatamos que os alunos conseguiram identificar as simetrias propostas de forma dinâmica.

7.4. Quarto Encontro

Neste quarto encontro as atividades foram voltadas à aplicação das transformações isométricas já apreendidas, e para isso utilizamos a figura Sona chamada *“aranha no meio da sua teia”*, onde os alunos na atividade abriram o arquivo do GeoGebra do *pen-drive* e com apenas uma parte a figura 01 reconstruíram a figura 02.

Após realizar a reconstrução solicitamos que identificassem quais isometrias foram necessárias para fazer a atividade e quais outras podem ser identificadas, além das transformações já utilizadas para responder as atividades.

Apesar de serem apenas duas atividades, os alunos não possuíam um roteiro para construção e análise, outrossim gostaríamos que os alunos elaborassem a suas próprias estratégias para resolver o problema e respondessem as perguntas relacionadas a cada atividade.

Os alunos resolveram esta atividade com a utilização da ferramenta “Reflexão em Relação a uma Reta” do GeoGebra, utilizando apenas a reflexão para compor a figura desejada.

Quando perguntados se percebiam outra transformação isométrica, todos responderam que, além da reflexão, podiam perceber a rotação.

Nesta atividade verificamos que mesmo movimentando a figura, os alunos se encontram nos estágios intra e interfigural, pois além de realizarem a construção sem dificuldades, conseguiram identificar outra isometria: a rotação.

Observamos também que os alunos não conseguiram identificar outra isometria que seria a translação invertida. Também não conseguiram sair do paradigma das rotações e reflexões, por isto não atingiram assim o estágio transfigural.

Neste encontro havia mais uma atividade, a nove, a qual consistia em produzir com a construção de um arco a figura *“aranha no meio da sua teia”* já reconstituída na atividade oito. Porém lembramos aos alunos que deveriam construir a figura 02 só com ferramentas do GeoGebra.

Para nossa surpresa, ao analisar os protocolos de construção que foram salvos, percebemos que uma dupla realizou duas tentativas. Tadeu e Julia construíram pela primeira vez utilizando reflexão e rotação e na segunda tentativa fizeram somente com rotação.

A dupla Jair e Karlene fez a sua construção somente com rotação e reflexão. Aqui devemos registrar que tiveram um pouco de dificuldade quando estavam utilizando o GeoGebra, pois ao fazer a rotação apagavam, o indicador do ângulo (º) e, portanto, conseguiam digitar os ângulos corretamente, mas não faziam a rotação desejada Poe este motivo. Então foi necessária a intervenção do professor-pesquisador para corrigir este erro de aplicação.

Em relação aos estágios de desenvolvimento psicogenéticos, podemos notar que os alunos se encontravam nos estágios intrafigural e interfigural, mas não conseguimos identificar o estágio transfigural.

As atividades precisaram ser deslocadas no decorrer da aplicação devido ao ambiente e aos novos equipamentos que foram introduzidos, porque foi possível utilizar os equipamentos do laboratório de informática.

Nesse quarto encontro pudemos verificar que a nossa questão de pesquisa foi respondida a contento, porque percebemos que a motivação etnomatemática com a utilização do GeoGebra atingiu as contribuições necessárias, pois todas as questões foram respondidas corretamente, os alunos perceberam as simetrias existentes nas atividades e conseguiram trabalhar com o *software* sem problemas, exceto por falta do mouse no primeiro encontro, dificuldade que foi sanada.

Entretanto, concluímos que os alunos não atingiram na sua maioria o estágio transfigural, exceto com algumas deduções bem próximas, como as de Tadeu que na quinta atividade conseguiu identificar a translação invertida. Tadeu foi o único que conseguiu transpor os estágios intra e interfigural, neste caso atingindo o estágio transfigural.

Respostas do aluno Jair:

OITAVA ATIVIDADE

Nesta sétima atividade realizem as transformações isométricas como rotação, reflexão e translação para construir partir de uma única parte da figura (desenho sona) figura 01 chamada ARANHA que se encontra no pen drive e construir a figura 02 conforme abaixo, assim como nas atividades anteriores.

FIGURA 01

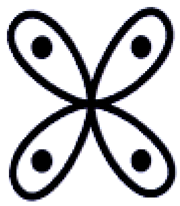


FIGURA 02

Após conseguirem construir a figura 02 respondam:

a) Qual (ais) transformação (ões) foi utilizada para conseguir compor a figura 02?

Reflexão

b) Movimente a parte inicial da figura 02 que utilizou para compor as demais da figura 02. Podemos notar algumas transformações isométricas, quais são?

Reflexão Rotação

NONA ATIVIDADE

Na nona atividade construiremos a figura 02 da atividade anterior, mas utilizando somente as ferramentas do GeoGebra. Para esta atividade utilizem a ferramenta “Arco circuncircular dados três pontos” e construir um arco partindo do ponto (0,0), passando por (3,1) e chegando até o (6,0). Após esta primeira etapa o desafio será construir figura 02 supracitada utilizando as transformações isométricas, com a construção deste arco podem se divertir com as transformações isométricas para conseguirem obter a figura 02.

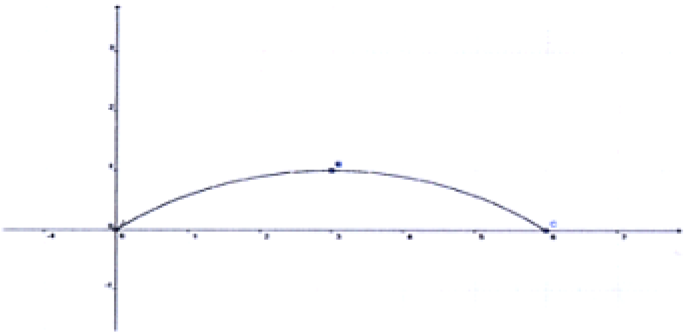


Figura 01: 1º Arco

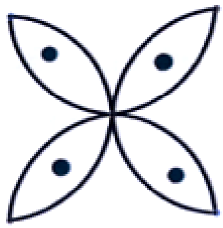


Figura 02: Uma das construções da solução da nona atividade.

Quais as transformações isométricas que foram utilizadas para compor a figura 02?

ROTAÇÃO REFLEXÃO

Repostas da aluna Julia:

Após conseguirem construir a figura 02 respondam:

a) Qual (ais) transformação (ões) foi utilizada para conseguir compor a figura 02?

Retas definidas por dois pontos, reflexão com reflexão a uma r

b) Movimente a parte inicial da figura 02 que utilizou para compor as demais da figura 02. Podemos notar algumas transformações isométricas, quais são?

(~~[illegible]~~) Sim, podemos notar isometrias de rotação e reflexão

NONA ATIVIDADE

Quais as transformações isométricas que foram utilizadas para compor a figura 02?

(Usamos a reflexão e a rotação) na segunda tentativa usamos apenas a rotação.

Respostas da aluna Karlene:

OITAVA ATIVIDADE

Após conseguirem construir a figura 02 respondam:

a) Qual (ais) transformação (ões) foi utilizada para conseguir compor a figura 02?

A reflexão

b) Movimente a parte inicial da figura 02 que utilizou para compor as demais da figura 02. Podemos notar algumas transformações isométricas, quais são?

Reflexão e rotação

NONA ATIVIDADE

Quais as transformações isométricas que foram utilizadas para compor a figura 02?

Reflexão e Rotação

Respostas do aluno Tadeu:

OITAVA ATIVIDADE

Após conseguirem construir a figura 02 respondam:

a) Qual (ais) transformação (ões) foi utilizada para conseguir compor a figura 02?

Retas definidas por dois pontos, reflexão com relação a uma reta

b) Movimente a parte inicial da figura 02 que utilizou para compor as demais da figura 02. Podemos notar algumas transformações isométricas, quais são?

Sim, podemos notar isometrias de rotação e reflexão

Obs.: Registre as respostas e outras considerações no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

NONA ATIVIDADE

Figura 02: Uma das construções da solução da nona atividade.

Quais as transformações isométricas que foram utilizadas para compor a figura 02?

Rotação

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho o objetivo principal foi de elaborar uma sequência de atividades que gerasse um produto de pesquisa sobre as transformações isométricas com a utilização do software GeoGebra com a motivação da Etnomatemática da Geometria Sona.

Para o desenvolvimento e a elaboração da pesquisa foi utilizada a metodologia *Design Experiment* proposta por Brown (1992) com nove atividades aplicadas em quatro encontros.

Nos encontros foram entregues para cada dupla um *pen-drive* contendo arquivos no formato ggb (extensão dos arquivos do software GeoGebra) e um roteiro para a realização das atividades.

Estas atividades foram divididas em dois grupos: o primeiro é das *"atividades de construção"* e o segundo das *"atividades de aplicação"*.

Registramos que não deixamos isso claro para os alunos e, colocamos as atividades em ordem numérica sem dividi-las em blocos. Dividimos por transformação: atividades de rotação, reflexão e translação.

Por exemplo: Para introduzirmos o conceito de rotação utilizamos na primeira atividade comandos do roteiro onde os alunos construíram na prática a uma roda com aros. Queríamos saber se os alunos identificavam os raios, os ângulos internos da circunferência.

Na segunda fizemos com que os alunos aplicassem o conceito que construíram num na primeira quando receberam o arquivo do GeoGebra e aplicaram a rotação para reconstruir a figura apresentada.

A cada encontro fomos refinando e alterando as atividades junto com os quatro alunos.

Notamos que os alunos apesar de nunca terem utilizado o software GeoGebra conseguiram realizar todas as tarefas.

Analisamos as atividades encontro por encontro relacionando as respostas com os estágios psicogenéticos de Piaget e Garcia (1983) para determinar em quais estágios se encontravam os alunos.

Para este trabalho foram analisadas várias dissertações que tratavam do assunto Transformações Geométricas, e notamos que algumas utilizaram o recurso computacional para desenvolver suas atividades. Destas poucas utilizaram software livre, e constatamos uma predominância de aproximadamente 84% do uso do Cabri. Este foi um dos motivos pelo qual escolhemos o software GeoGebra, outro foi a possibilidade de analisar os registros através dos protocolos, que o próprio software disponibiliza, mostrando passo a passo como os alunos realizaram suas atividades.

Neste trabalho procuramos responder a seguinte questão de pesquisa: **A Geometria Sona do povo Cokwe e o software GeoGebra são agentes motivadores que podem contribuir para a aprendizagem das transformações isométricas?**

Após análises das atividades nos encontros, no decorrer do trabalho, concluímos que o software GeoGebra junto com a Geometria Sona contribuíram como agentes motivadores para produzir uma aprendizagem significativa e contextualizada das transformações isométricas.

Identificamos também que os alunos se encontravam na sua maioria os estágios intrafigural e o interfigural, percebendo as propriedades internas das figuras e relacionando algumas propriedades de mais de uma figura.

Registramos que apenas um aluno participante da pesquisa se encontrava no estágio transfigural de desenvolvimento psicogenético em geometria numa única atividade.

Concluímos com esta pesquisa que a sequência de atividades formulada pôde trazer uma experiência de aprendizagem que além de motivar, através dos desenhos dos especialistas Cokwes com a utilização do software GeoGebra, permitiu gerar um produto para as novas pesquisas sobre transformações isométricas.

Além de apontar nossas conclusões também levantamos algumas questões:

a) A escola pública está preparada para a aprendizagem da matemática com apoio da tecnologia?
b) Os professores estão preparados para utilizar a tecnologia na aprendizagem da matemática em sala de aula?
c) Como incluir digitalmente todos os alunos da escola pública para facilitar a aprendizagem da matemática?

d) Computadores nos laboratórios das escolas garantem a aprendizagem da matemática aos alunos da rede pública?

Muitas outras questões poderiam ser feitas, como não é nosso objeto de pesquisa e sim trazer uma experiência prática que possa contribuir para a aprendizagem da matemática com apoio do recurso computacional, deixamos a disposição este material para pesquisa e aplicação aos alunos.

REFERÊNCIAS

Alves, Sergio e Galvão, Maria Elisa Esteves Lopes. Um estudo geométrico das transformações elementares. IME/USP – São Paulo, 1996.

Araújo, Paulo Ventura. Curso de Geometria. 3ª Edição. Portugal: Editora Gradiva, 2002.

Bagé, Idalise Bernardo. Proposta para a Prática do Professor do Ensino Fundamental I de Noções Básicas de Geometria com o Uso de Tecnologias. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo, 2008.

Barroso, Ricardo e Martel, José. Caracterización geométrica del desarrollo de la tríade piagetiana, 2007.
Disponível em <http://personal.us.es/rbarroso/Pruebas/04Barroso.pdf.>
Acesso: 18/06/2010.

Bilac, Cristina Ulian. Possibilidades da Aprendizagem de Transformações Geométricas com o uso do Cabri-Geométrè. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2008.

Borba, Marcelo C. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov., 2004.

Brasil, MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Matemática. Brasília, 1998

Brown, Ann. *Design Experiment*s: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings - THE JOURNAL OF THE LEARNING SCIENCES, 2(2), 141-178, 1992.

Cerqueira, Ana Paula Ferreira. Isometrias: Análise de Documentos Curriculares e uma proposta de Situações de Aprendizagem para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2005.

Cobb et al. Design Experiments in Educational Research. Educational Researcher, Vol. 32, No. 1, pp. 9–13. January/February, 2003.

Collins et al. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. Journal of the Learning Sciences. Evanston, p. 13-42, 2004.

D'Ambrosio, Ubiratan. Da realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo – Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D’Ambrosio, Ubiratan. Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte. Autêntica, 2001.

Eglash, Ron. African Fractals: modern computing and indigenious design. United State of America. Rutgers University Press - 2ª edição, 2002.

Etnomatemática - Edição Especial n° 11. Scientif American Brasil. ISSN 1678-5229, 2005.

Gerdes, Paulo & Bulafo, Gildo. Modelagem possível em carteiras de mão trançadas - Siptasi. In SIPATSI Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane. Imprensa Globo, Maputo, Moçambique, 1994.

Gerdes, Paulo. Geometria Sona de Angola: Matemática duma Tradição Africana. Projecto de Investigação Etnomatemática, Universidade Pedagógica, Maputo, 2008.

Gouvea, Flavio Roberto. Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópios e Softwares de Geometria Dinâmica. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro-SP, 2005.

Günther, Hartmut. Pesquisa qualitativa versus pesquisa quantitativa: esta é a questão? Psic.: Teor. e Pesq. vol.22 nº 2. Brasília Maio/Agosto, 2006. Disponível em: http://www.fortium.com.br/faculdadefortium.com.br/silvino_morais/material/4862.pdf. Acesso : 18/06/2010.

Kenski, Vani Moreira. Educação e Tecnologias: O Novo Ritmo da Informação. Campinas, SP, Papirus, 2007.

Ledergerger-Ruoff, Erika Brigitta. Isometrias e ornamentos do plano euclidiano. São Paulo: Atual, 1982.

Lima, Elon Lages. Isometrias. Coleção do Professor de Matemática. 2ª Edição Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

Moran, José Manuel, Masetto, Marcos e Behrens, Marilda. Novas tecnologias e mediação pedagógica. 7ª ed. São Paulo: Papirus, 2003.

________________. Educação e Tecnologias: Mudar para valer! , 2008. Disponível em: http://www.eca.usp.br/prof/moran/educatec.htm Acesso: 28/05/2010

________________.Os novos espaços de atuação do educador com as tecnologias. Texto publicado nos anais do 12º Endipe – Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, in ROMANOWSKI, Joana Paulin et al (Orgs). ***Conhecimento local e conhecimento universal: Diversidade, mídias e tecnologias na educação***. vol 2, Curitiba, Champagnat, 2004, páginas 245-253 Disponível em: http://www.eca.usp.br/prof/moran/ Acesso: 28/05/2010

_________________.As múltiplas formas de aprender. Entrevista:ATIVIDADES & EXPERIÊNCIAS, Julho 2005.
Disponível em: http://www.eca.usp.br/prof/moran/positivo.pdf. Acesso: 19/06/2010

__________________. Como utilizar as tecnologias na escola. Disponível em: http://www.eca.usp.br/prof/moran/ Acesso: 28/05/2010

Pavanello, Regina Maria. O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica. Dissertação de Mestrado. UNICAMP, Campinas-SP, 1989.

Piaget, Jean, Garcia, Roland. Psicogénese e História da Ciência- Coleção Ciência Nova, No. 6, Flammarion, Lisboa, Portugal, 1983.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W.. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000.

ANEXO I

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

AS TRANFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NO GEOGEBRA COM MOTIVAÇÃO ETNOMATEMÁTICA

1° ENCONTRO

LOCAL: ESCOLA PÚBLICA DA REGIÃO METROPOLITANA DE SÃO PAULO

PROFESSOR-PESQUISADOR: MITCHELL CHRISTOPHER SOMBRA EVANGELISTA

2010

ITAPEVI – SP

APRESENTAÇÃO DO VIDEO SIMETRIAS

Inicialmente vamos apresentar o vídeo “Simetrias” da coleção Arte & Matemática produzido pela TV Cultura, mostrando as várias facetas das simetrias que são encontradas nas artes, músicas e números. Boa diversão!

Figura 01: Extraída do vídeo Simetrias
Fonte: site www.domíniopúblico.gov.br
Duração do Vídeo: 26 minutos e 12 segundos

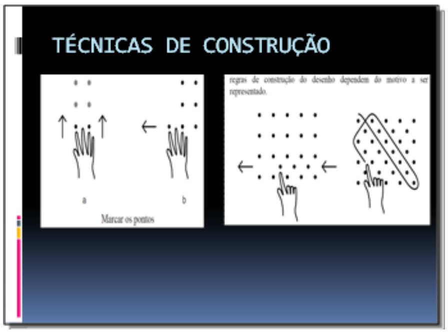
APRESENTAÇÃO EM SLIDES

Faremos uma apresentação em slides contando um pouco da história do povo Tshucokwe (abreviado Cokwe) mostrando a representação dos Sonas, desenhos com temas, lendas e animais. Sua localização no continente africano é importante, pois mostra que faz parte de uma cultura não só dos angolanos mais também de outros países da África.

Apresentação

Slide 1

Slide 4

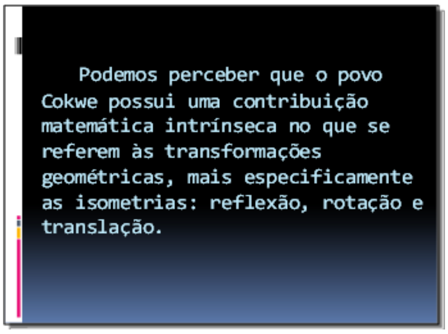


Slide 2

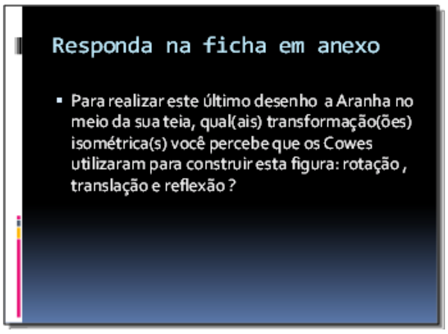
Slide 5

Slide 3

Slide 6



Slide 7



FICHA PARA RESPOSTA: FIGURA ARANHA NO MEI DA SUA TEIA

Observe a figura abaixo a qual servirá para responder, após o vídeo e a apresentação das telas que assistiram, a dupla acredita que existe uma figura inicial que originou este que se apresenta. Qual a simetria que pode ser percebida pela dupla, ou seja, identifiquem na figura todas as simetrias existentes, ou as possíveis.

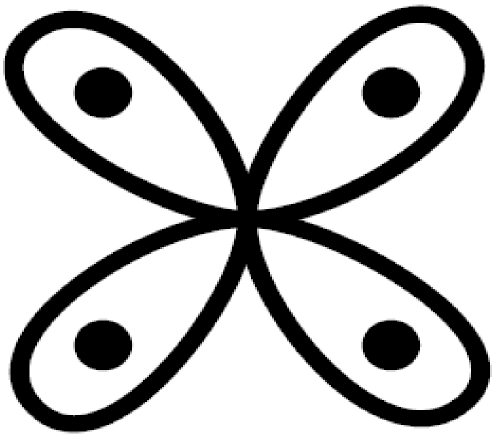


Figura 02: Extraída de Gerdes (2008)

RESPOSTA:

____

____

____

____

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

AS TRANFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NO GEOGEBRA COM MOTIVAÇÃO ETNOMATEMÁTICA

2° ENCONTRO

LOCAL: ESCOLA PÚBLICA DA REGIÃO METROPOLITANA DE SÃO PAULO

PROFESSOR-PESQUISADOR: MITCHELL CHRISTOPHER SOMBRA EVANGELISTA

2010

ITAPEVI – SP

INTRODUZINDO O CONCEITO DE TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

Apresentando o software de Geometria Dinâmica (GD) o Geogebra para primeiro contato com as ferramentas. Conhecendo a sua interface.

A intenção é que vocês abram o arquivo que contém a pasta GeoGebra no CD que lhes foi entregue e comecem a manipular o software para se familiarizarem com as suas ferramentas.

A intenção não é de fazer um manual e nem apresentar um tutorial a ser seguido cegamente, mas sim que vocês possam manipular estas ferramentas e perceber as suas potencialidades diretamente com as atividades do módulo II, tomando neste momento um contato inicial com as ferramentas.

Ao acessar o programa temos uma janela como a seguinte.

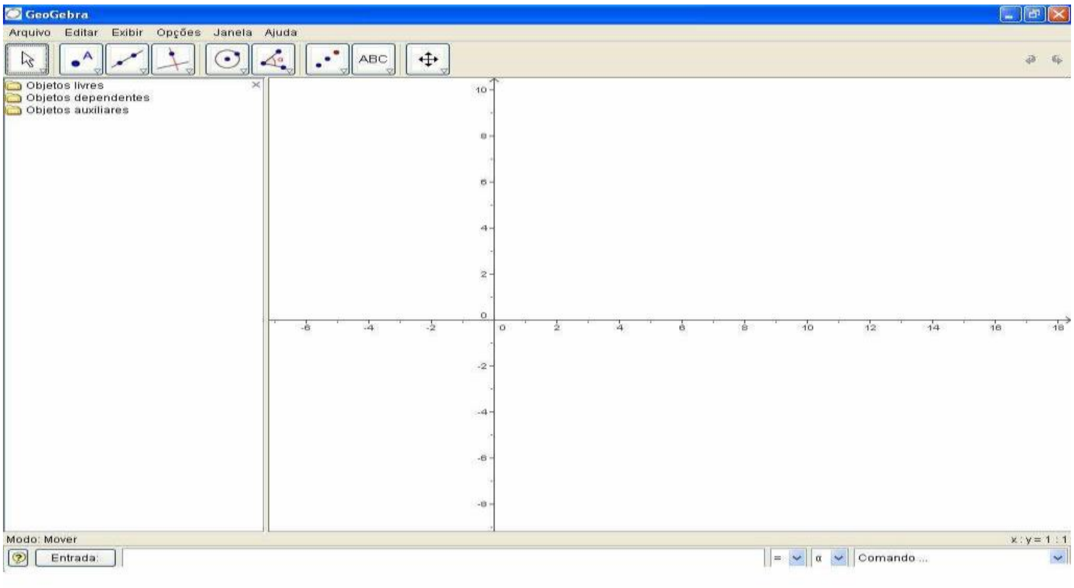


Ilustração 2 - Tela inicial do GeoGebra
Extraído do Manual do Geogebra disponível no
Site: *www.geogebra.org/*

A janela inicial está dividida em duas outras janelas: à esquerda a parte algébrica e à direita a parte geométrica. Se for necessário podemos desativar a parte algébrica e ainda com a ferramenta exibir, esconder os eixos.

Na tela inicial ainda temos a barra de ferramentas de acesso rápido:

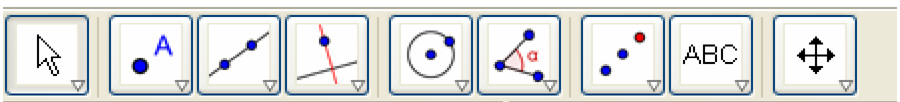


Ilustração 3 - Barra de ferramentas de acesso rápido

Extraído do Manual do Geogebra disponível no
Site: www.geogebra.org/

Cada ícone da barra de ferramentas pode acessar uma categoria de ações pré-definidas para executar tarefas. Observamos que no lado direito e abaixo de cada ícone encontramos uma pequena seta vermelha indicada para baixo, ou seja, ao clicar em cada uma delas poderemos acessar ferramentas correlacionadas ao ícone inicial.

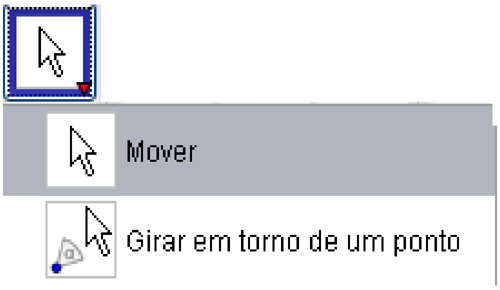


Ilustração 4 - Ícone *"seleção"*

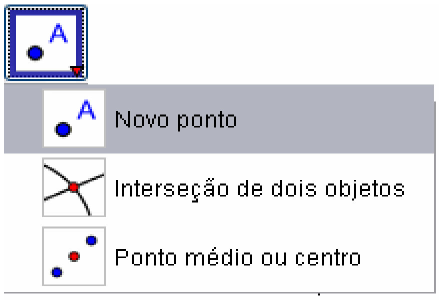


Ilustração 5 - Ícone *"ponto"*

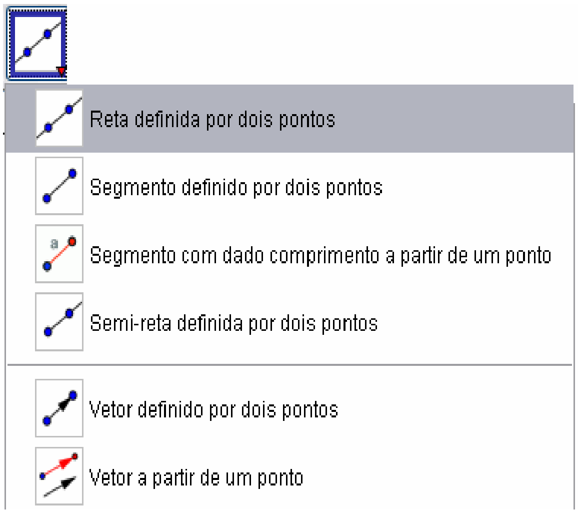


Ilustração 6 – Ícone *"reta"*

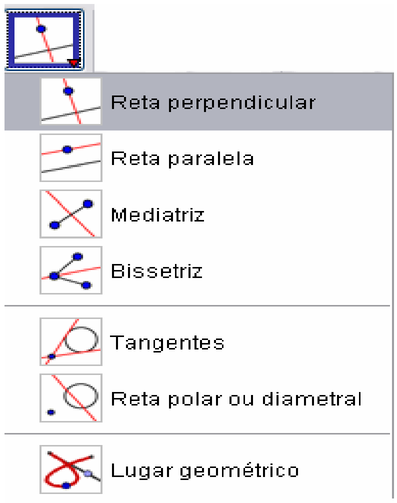


Ilustração 7 - Ícone *"propriedades"*

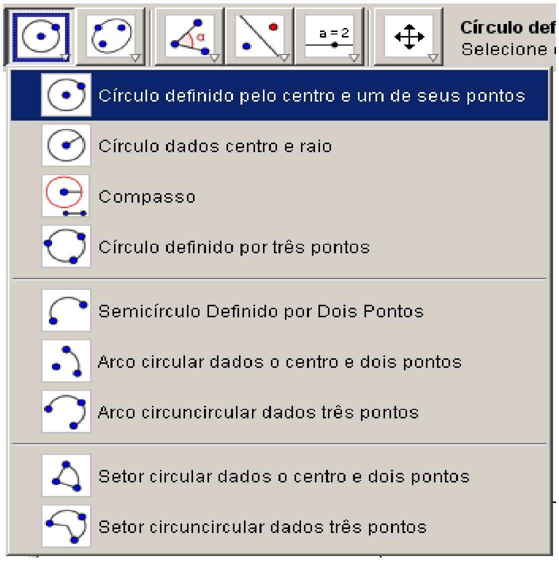


Ilustração 9 - Ícone *"curvas"*

Ilustração 10 - Ícone *"medidas"*

Queremos chamar atenção às ferramentas a seguir que tratarão especificamente de simetrias, as quais serão utilizadas com maior freqüência para a realização das atividades propostas no módulo II desta sequência de ensino.

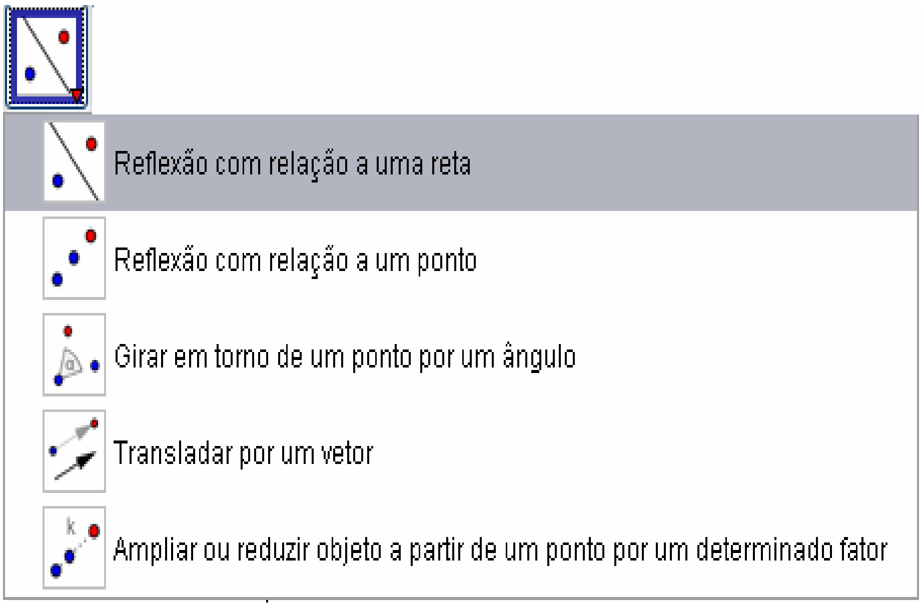


Ilustração 11 - Ícone *"simetrias"*

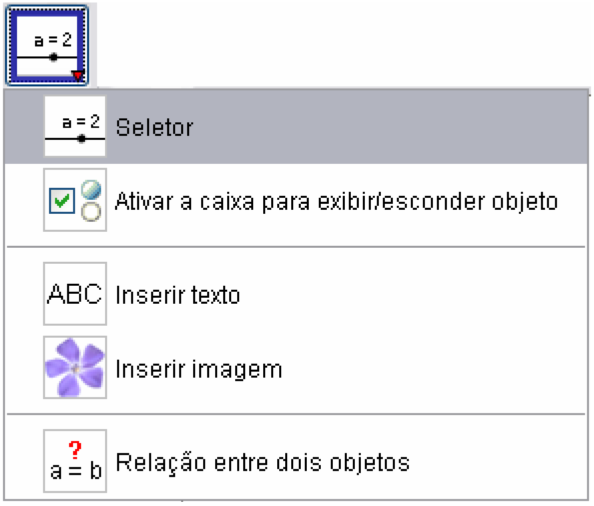


Ilustração 12 - Ícone *“ferramentas extras”*

Ilustração 13 – Ícone *”estilo”*

ATIVIDADES DO 2° ENCONTRO

ROTAÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM PONTO

PRIMEIRA ATIVIDADE

Nesta atividade vamos começar a explorar a rotação que é uma ferramenta que faz parte do GeoGebra, software que está carregado no seu pen drive , e também contendo todos os arquivos necessários para sua utilização.

Vamos realizar alguns comandos para entendermos como acontece a rotação. Inicialmente construam um ponto A e em seguida um ponto B, o qual será utilizado para as oito rotações em torno dele com a medida de 45°, utilizando assim a ferramenta do GeoGebra “Girar em Torno de um Ponto por Ângulo”.

7) Existe algum ponto que podemos dizer que é o ponto central? Qual?

8) Ao realizar as rotações em qual sentido estas estão acontecendo?

Construir segmentos sendo todos ligados pelo ponto no centro até os demais pontos, gerando assim oito segmentos. O importante após a construção será medi-los, utilizando a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”.

Além de construir os segmentos e medi-los construam uma circunferência com a ferramenta “Círculo definido pelo centro e um de seus pontos“ com o ponto do centro até o ponto A.

Para que possamos fazer com que a construção fique robusta, determinem pontos de intersecção entre pontos dos segmentos e a circunferência com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”.

Após construir a circunferência e o ponto de interseção meçam os ângulos internos com a ferramenta “Ângulo”, para isso basta clicar num dos pontos, no ponto central e noutro ponto que esteja subseqüente, assim para todos.

9) Qual a medida do ângulo encontrado entre os pontos e o ponto central? São Todos iguais? Quanto mede?

___

10) No final com a ferramenta “Mover”, movimente o ponto A em vários sentidos e verifiquem o que acontece com as medidas dos segmentos e dos ângulos?

___

11) Como chamamos as medidas dos segmentos partindo do centro até a circunferência construída?

___

12) Qual a relação que pode ser feita entre o experimento realizado com a definição de rotação?

___

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.

Após responder na caixa de texto todas as atividades deverão ser salvas com arquivo com o nome da dupla e o nome da atividade no GeoGebra da seguinte maneira:

a) Clique no menu arquivo e em Gravar Como;
b) Escolha o dispositivo do pen drive;
c) Digite o nome da dupla e da atividade;
d) Clique em OK, pronto.

SEGUNDA ATIVIDADE

Nesta atividade faremos a experimentação de rotação de um objeto em relação a um ponto. Abram o arquivo BARCO que se encontra no pen drive. Após isso verificarão que temos um barco e um ponto A. A atividade consiste em construir a figura 02 abaixo, utilizando as ferramentas de simetrias já conhecidas.

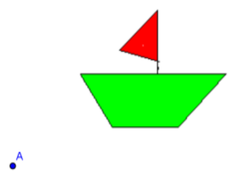


Ilustração 14: Figura 01 – Barco

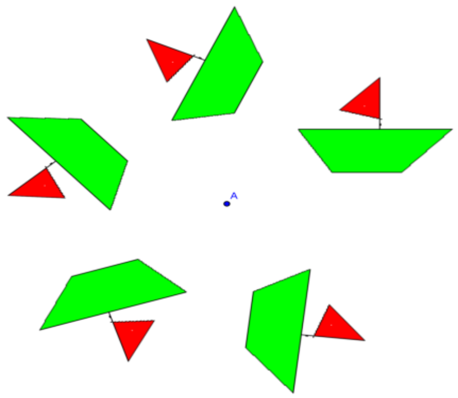


Ilustração 15: Figura 02 Barco Rotacionado

5) Qual a medida dos ângulos de rotação que foram utilizados para construir a figura 02? Como você chegou nesta medida?

____

6) As características do polígono que forma o barco e a bandeira quando aplicamos a rotação se alteram quando construímos a figura 02? Por quê?

____

7) Existe outro tipo de isometria que podemos perceber ao terminar de construir a figura 02?

____

8) Após realização da construção da figura 02, com a ferramenta “mover” clique e segure o mouse no primeiro barco e movimente a figura construída, as distâncias deste em relação ao ponto A e dos demais se alteram?

____

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

AS TRANFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NO GEOGEBRA COM MOTIVAÇÃO ETNOMATEMÁTICA

3° ENCONTRO

LOCAL: ESCOLA PÚBLICA DA REGIÃO METROPOLITANA DE SÃO PAULO

PROFESSOR-PESQUISADOR: MITCHELL CHRISTOPHER SOMBRA EVANGELISTA

2010

ITAPEVI - SP

REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UM PONTO

TERCEIRA ATIVIDADE

Nesta atividade construam um ponto A em seguida o ponto B e com a ferramenta “Reflexão de um ponto em relação a um Ponto de o GeoGebra construir o simétrico de B, o B’.

Além de construir pontos simétricos, construam segmentos para determinar a medida dos segmentos AB e AB’, verificando que a distância entre os pontos AB e AB’ em relação a um ponto A, são simétricos.

Para confirmar que a construção está de acordo com o conceito de simetria, basta mover o ponto A em várias direções com a ferramenta “mover” do GeoGebra e poderão constatar que ao movimentar o ponto B, o seu simétrico que é o B’ em relação ao ponto A, o que acontece com a distância entre os pontos simétricos?

____

____

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.

REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA RETA

QUARTA ATIVIDADE

Nesta atividade faremos a construção de uma reflexão de um ponto a uma reta.

Construa um ponto A em seguida uma reta r e com a ferramenta “Reflexão em relação a uma Reta” construir o simétrico A’ de A em relação à reta r. Em seguida construir os segmentos AB até reta r e A’B até a reta r, medindo-os.

Com a ferramenta “mover” arrastar o ponto A em diversas direções e responda o que acontece com as medidas dos segmentos construídos?

____

____

Obs.: Registre as respostas e outras considerações no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.

QUINTA ATIVIDADE

Abra o arquivo CATAVENTO do CD onde encontrará a figura 01 e deverá construir a figura 02 abaixo, utilizando as ferramentas do GeoGebra, já conhecidas.

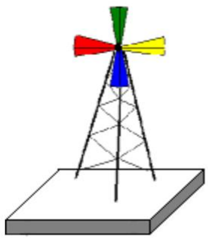


Ilustração: Figura 01- Catavento

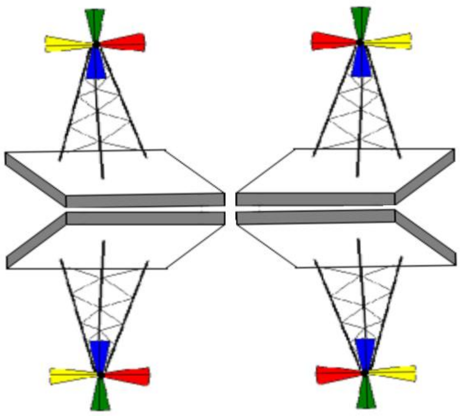


Ilustração: Figura 02 - O Catavento espelhado

Vamos responder algumas questões referentes às reflexões:

1) Quando realizaram as reflexões o que perceberam em relação às propriedades originais da figura 01. Elas se mantiveram ou alteraram quando construíram a figura 02?

   ____

2) Podemos perceber outro tipo de isometria que compõe a figura além a reflexão?

   ____

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.

TRANSLAÇÃO EM RELAÇÃO A UM VETOR

Os planetas se movimentam segundo um vetor, mas não perdem suas características principais, mantendo sempre eqüidistantes uns dos outros e sempre na mesma direção, mas podendo aparecer em lugares diferentes segundo uma direção pré-estabelecida.

Verificamos assim, como a rotação girando em torno de um ângulo, a translação é o movimento que a terra realiza em torno sol nos proporcionando belas imagens durante o ano com as suas quatro estações.

Na matemática podemos realizar translações com o uso o apoio do GeoGebra.

SEXTA ATIVIDADE

Nesta atividade utilizem a ferramenta “Polígono” para construir um triângulo ABC qualquer em seguida determine um vetor com a ferramenta “Vetor Definido por Dois Pontos”, sendo os pontos D e E.

1) Realizando as translações do polígono ABC em relação ao Vetor, o que podemos verificar com os novos triângulos gerados pela translação, A’B’C’ e o A”B”C”? Possuem um mesmo sentido? Qual?

____

2) Em seguida construa segmentos que interliguem os pontos: A ao A' e A' o A", B ao B' e B ao B" e o C ao C' e o C' ao C", realizando a medição dos segmentos apontados. O que podemos perceber após medir os segmentos?

____

Para tornar a construção robusta com a ferramenta "Intersecção ente Dois Objetos", após a construção dos segmentos, será solicitado que os alunos marquem a intersecção entre os pontos dos vértices dos triângulos e os pontos dos segmentos.

3) Finalmente com a ferramenta "mover", movimentem o ponto E do vetor e verifiquem o que acontece entre as medidas dos segmentos e dos triângulos construídos.

____

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

SÉTIMA ATIVIDADE

O experimento consiste, assim como nas demais, aplicar o conceito de translação já apreendidos para construir a FIGURA 02 abaixo. Basta abrir o arquivo BANDEIRINHAS do pen drive que é a figura 01, utilizando o software GeoGebra reproduzir a figura 02.

Ilustração 16: Figura 01 – Bandeirinhas

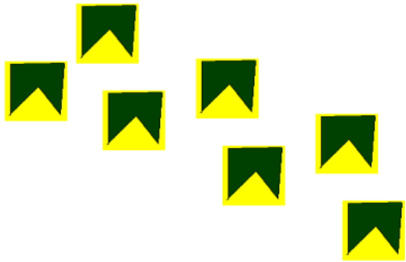


Ilustração 17: FIGURA 02 – Bandeirinhas

Nesta podemos relacionar a construção das BANDEIRINHAS com um vetor, este vetor tem um sentido?

____

1) Há alguma alteração nas propriedades da figura 01 após a construção da figura 02?

____

2) Podemos perceber além das translações realizadas alguma outra transformação isométrica na figura 02 quando terminamos a sua construção?

____

Obs.: Registre as respostas neste formulário e também no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

AS TRANFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NO GEOGEBRA COM MOTIVAÇÃO ETNOMATEMÁTICA

4° ENCONTRO

LOCAL: ESCOLA PÚBLICA DA REGIÃO METROPOLITANA DE SÃO PAULO

PROFESSOR-PESQUISADOR: MITCHELL CHRISTOPHER SOMBRA EVANGELISTA

2010

ITAPEVI – SP

APLICANDO AS TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

Após a utilização do software GeoGebra para introduzir os conceitos de transformações isométricas, realizando as sete atividades anteriores e já terem se acostumados com os ícones da barra de ferramenta inicial, e terem apreendidos os conceitos de rotação, reflexão e translação, o que faremos agora é explorar duas atividades que estão relacionadas com um desenho Sona chamado *tshanda huri*, uma aranha no meio da sua teia.

OITAVA ATIVIDADE

Nesta sétima atividade realizem as transformações isométricas como rotação, reflexão e translação para construir partir de uma única parte da figura (desenho sona) figura 01 chamada ARANHA que se encontra no pen-drive e construir a figura 02 conforme abaixo, assim como nas atividades anteriores.

FIGURA 01

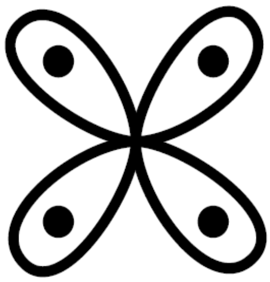


FIGURA 02

Após conseguirem construir a figura 02 respondam:

a) Qual (ais) transformação (ões) foi utilizada para conseguir compor a figura 02?

____

b) Movimente a parte inicial da figura 02 que utilizou para compor as demais da figura 02. Podemos notar algumas transformações isométricas, quais são?

____

Obs.: Registre as respostas e outras considerações no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta "Inserir Texto".

NONA ATIVIDADE

Na nona atividade construiremos a figura 02 da atividade anterior, mas utilizando somente as ferramentas do GeoGebra. Para esta atividade utilizem a ferramenta “Arco circuncircular dados três pontos” e construir um arco partindo do ponto (0,0), passando por (3,1) e chegando até o (6,0). Após esta primeira etapa o desafio será construir figura 02 supracitada utilizando as transformações isométricas, com a construção deste arco podem se divertir com as transformações isométricas para conseguirem obter a figura 02.

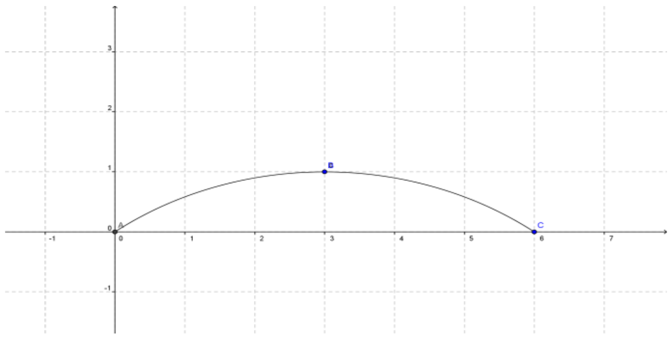


Figura 01: 1º Arco

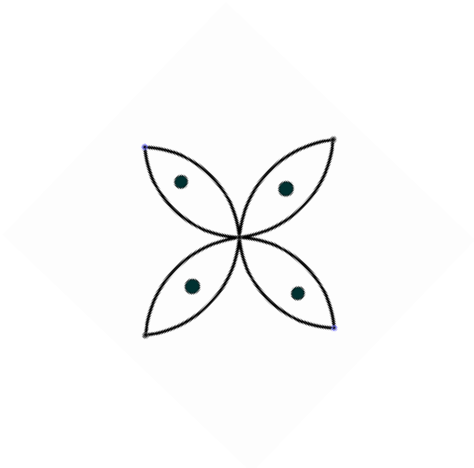


Figura 02: Uma das construções da solução da nona atividade.

Quais as transformações isométricas que foram utilizadas para compor a figura 02?

Obs.: Registre as respostas e outras considerações no próprio plano do GeoGebra com a ferramenta “Inserir Texto”.