PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Ricardo Antonio de Souza

A modelagem matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Ricardo Antonio de Souza

A modelagem matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Professor Doutor Benedito Antonio da Silva***

São Paulo

2011

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
Desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:_____________________________________ Local e Data:______________

DEDICATÓRIA

"Dedico este trabalho aos meus pais, Francisco e Arlete, que mesmo com pouco estudo, me ensinaram a importância de nunca desistir dos meus objetivos de vida".

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos,

Aos meus pais, por sempre estarem ao meu lado, nos momentos felizes e tristes de minha vida.

À minha irmã querida Nei, que sempre acreditando em mim, incentivou-me a iniciar e concluir este curso.

Ao meu amigo e cunhado Prof. Ms. Willian Costa, que sempre me ajudou a crescer profissionalmente e academicamente.

À minha querida sobrinha Gabi, pela verificação do “Abstract”.

À toda minha família, que sempre esteve presente em minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, por todas as contribuições feitas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Às professoras, Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Dra. Maria Eli Puga Beltrão, por todas as contribuições realizadas no exame de qualificação.

À Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, pelo apoio financeiro, pois sem ele, este objetivo não teria sido alcançado.

À todos os professores que aceitaram participar deste trabalho.

Ao professor coordenador João Luiz Andrucioli, por ter concedido o espaço destinado ao HTPC, para que pudéssemos desenvolver nossa atividade.

À minha amiga Profa. Daisy Cristina, por toda a verificação ortográfica realizada neste trabalho.

À minha amiga Elizangela Frazão Tavares, por todos os momentos em que concedeu um espaço em seu lar, para que pudéssemos realizar diversos trabalhos, e por toda a formatação desta dissertação.

Ao meu amigo que em pouco tempo se tornou irmão, Prof. Ms. Vagner Tavares, por todos os trabalhos que realizamos juntos, pelos congressos que participamos, pelas inúmeras discussões sobre Modelagem Matemática, enfim, muito obrigado.

Aos meus amigos de curso, Profª. Ms. Tânia, Prof. Ms. Levi, Mitchell, Walquiria, Maria do Carmo e Luciane Mendonça, por todas as disciplinas que cursamos e por todos os trabalhos que realizamos juntos.

A Deus, por sempre estar em meu coração, me resgatando dos momentos difíceis da minha vida.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi verificar se os professores se apropriam da modelagem como processo de ensino e aprendizagem. Para isso, baseando-se no “segundo caso” de modelagem proposto por Barbosa, desenvolvemos uma atividade com professores da rede estadual de ensino, em hora de trabalho pedagógico coletivo (htpc), para buscar dados que possam dar pistas de como tais professores incorporam essa estratégia em suas práticas pedagógicas, para o ensino do conceito de função. A pesquisa foi composta por três fases: na primeira, desenvolvemos uma atividade de modelagem para a introdução do conceito de função. Essa fase foi desenvolvida em dois encontros de duas horas cada, cuja proposta foi apresentar condições para que os professores percebessem que por meio de um problema real, é possível construir o conhecimento desejado. Na segunda fase foram realizadas entrevistas individuais para verificar de que forma os professores participantes poderiam ter se apropriado da modelagem matemática em suas práticas docentes. Foi utilizado o trabalho de Silveira, que analisa dissertações e teses que tratam a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem tanto na formação inicial como na continuada de professores, para elaborar as questões apresentadas, bem como analisar as respostas dadas a elas. Na última fase, utilizando as mesmas questões da parte anterior, realizamos uma entrevista coletiva com os participantes, a fim de identificar possíveis divergências entre as respostas dadas na primeira e nesta, bem como encontrar algumas convergências e/ou divergências entre as análises realizada no trabalho de Silveira e as respostas dadas pelos nossos participantes. Apesar de encontramos algumas semelhanças, identificamos outros fatores que podem levar a aceitação ou não da modelagem matemática para a prática docente. No entanto, mesmo com uma aparente aceitação dessa metodologia pelos sujeitos de nossa pesquisa, não podemos assegurar que os mesmos realmente a utilizarão em suas práticas docentes; pois para isso, seria necessário após algum tempo verificar sua apropriação por observação dos professores em situação de aula. A escolha do horário de HTPC, revelou-se apropriada, para uma reflexão socializada por professores de uma mesma instituição, havendo mesmo manifestações sobre a conveniencia da utilização desse espaço.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Ensino e Aprendizagem, Modelagem Matemática e Função.

ABSTRACT

The aim of this study was to determine if teachers take ownership of the modeling as teaching and learning. To do so, relying on the "second case" modeling proposed by Barbosa, we developed an activity with teachers in state schools in time for collective pedagogical work (htpc) to fetch data which may give clues to how these teachers incorporate this strategy into their teaching, for teaching the concept of function. The survey consisted of three phases: first, we develop a modeling activity for introducing the concept of function. This phase was conducted in two meetings of two hours each one, in which we intended to present conditions for teachers to realize that through a real problem, it is possible to construct the desired knowledge. In the second stage individual interviews were conducted to determine how the participating teachers could have appropriated the mathematical modeling in their teaching practices. We used the work of Silveira, which examines theses and dissertations that deal with mathematical modeling as a strategy for teaching and learning both in initial and in-service teacher, to elaborate the issues presented, as well as analysis of the responses to them. In the last phase, using the same questions from the front, we held a press conference with participants in order to identify possible discrepancies between the answers given in the first and this and find some similarities between the analysis performed on the work of Silveira and responses by our participants. Despite some similarities, we identified other factors that may lead to acceptance or rejection of mathematical modeling for teaching practice. However, even with an apparent acceptance of this methodology by the subjects of our research, we can’t guarantee that they actually use in their teaching practices: for this, would be necessary after some time to verify its ownership. The choice of time HTPC, it proved appropriate to reflect socialized by teachers from the same institution, and there are statements about the desirability of using this space.

Key Words: Math Education, Teaching and Learning, Mathematical Modeling and Function.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

APRESENTAÇÃO

Ao longo da história, o homem sempre procurou compreender os fenômenos da natureza e suas leis. Em busca desse objetivo, encontrou uma poderosa ferramenta que o auxiliou nessa tarefa: a *Matemática*.

Os elementos dessa ferramenta foram sendo descobertos de acordo com as necessidades que ocorreram no desenrolar da história; entretanto esse desenvolvimento envolveu um número reduzido de pessoas, ou seja, profissionais que dispunham de facilidade em fazer matemática, cabendo à grande maioria utilizar as ferramentas então criadas.

A ciência matemática ainda é desenvolvida por pesquisadores em diferentes academias, e ministrada a alunos de todo o mundo como disciplina obrigatória em diversos níveis de escolarização. Ao longo do tempo, a matemática, como disciplina em cursos regulares, vem perdendo sua aplicabilidade pelo fato de a grande maioria dos professores não discutirem de onde e como surgiu o conteúdo abordado em seus currículos. No Brasil, os conteúdos matemáticos quase sempre são ensinados separados da realidade, ou seja, desvinculando a Matemática de suas aplicações, perdendo assim a essência de suas origens. Segundo Kaiser-Messmer (2001, apud Barbosa, 2001, p.03) os tópicos matemáticos ensinados na escola devem ser aqueles que são úteis para a sociedade.

D’Ambrosio (2002, apud Bassanezi, 2002, Prefácio), escreve que teorias e técnicas matemáticas são muitas vezes apresentadas e desenvolvidas sem um relacionamento com fatos reais e, mesmo quando são ilustradas com exemplos, apresentam-se de maneira artificial.

Uma possível causa para a desvinculação da matemática com a realidade no seu processo de ensino e aprendizagem é o fato de as instituições formadoras de professores não incluírem em suas grades curriculares uma disciplina que desenvolva matemática partindo de situações reais, resgatando assim as origens do gênese matemático.

Os livros de história da matemática nos mostram que muitos fenômenos do cotidiano foram construídos ou explicados por meio de fórmulas matemáticas, ou simplesmente, modelos matemáticos.

De acordo com Eves (2004):

> A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para a forma mais avançada de sociedade. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo de alguns rios, em regiões agricultáveis ricas. Assim, pode-se dizer que a matemática originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e a engenharia.
>
> (EVES, 2004, p.57)

O processo de desenvolvimento dessa matemática “primitiva”, pressupõe a modelagem matemática.

> Um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder as questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto, com uma atividade de Modelagem Matemática.
>
> (CHEVALLARD, 2001, p.50, apud FERRUZI, 2003, p.33)

Segundo o autor, todo o processo de busca da interpretação da realidade por meio da matemática com o objetivo de se construir um modelo que o represente, é chamado de modelagem matemática.

Neste trabalho, desenvolvemos um processo de modelagem com professores em “Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo” (HTPC).

O processo de modelagem utilizado em nossa pesquisa baseia-se no segundo, dos três casos proposto por Barbosa (2001), que o define da seguinte maneira:

- Caso 2. O professor traz para a sala de aula um problema de outra área do conhecimento, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.

Escolhemos o “segundo caso”, pelo fato de esta estratégia propiciar ao professor mediador uma melhor condução do debate entre os participantes, a fim de construir os conhecimentos referentes ao conteúdo matemático desejado, que é a função polinomial de primeiro grau.

Desenvolvemos o processo de modelagem com os professores participantes, pois segundo Bassanezi (2009), essa metodologia é mais significativa quando o professor-mediador também tenha sido modelador, segundo ele, “da mesma forma que só se aprende a jogar futebol, jogando, só se aprende modelagem, modelando”, ou seja, a melhor maneira de aprendê-la, é fazendo modelagem, e de preferência juntamente com alguém mais experiente.

Sendo assim, realizamos a modelagem matemática com professores a fim de incentivá-los a utilizarem tal estratégia de ensino e aprendizagem em suas práticas docentes, ou seja, trabalharem os conteúdos matemáticos por meio dessa metodologia.

Estruturamos o nosso trabalho em cinco capítulos, sendo que, no primeiro apresentamos a problemática; no segundo, a fundamentação teórico-metodológica; no terceiro, os procedimentos metodológicos; no quarto, o desenvolvimento e análise da atividade aplicada e o quinto, a descrição e análise de entrevistas realizadas com os professores participantes. Por último são apresentadas nossas considerações finais.

1. PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Ao longo da minha vida profissional, lecionando matemática em escolas públicas e privadas, sempre encontrei uma grande dificuldade em iniciar, de uma forma mais atrativa aos alunos, o conceito de funções matemáticas.

No caso das escolas públicas, onde até pouco tempo não havia um material norteador de conteúdos (caderno do aluno), existia uma grande diferença entre a grade curricular das mesmas séries em diversas escolas, pois a escolha e sequência dos conteúdos a serem ministrados, era feita quase sempre baseando-se em livros didáticos.

Hoje, todas as escolas públicas do Estado de São Paulo recebem bimestralmente um material didático denominado *caderno do aluno* juntamente com o *caderno do professor*, este contendo todas as respostas e orientações didáticas para o desenvolvimento dos conteúdos. Entretanto, segundo proposta pedagógica do governo do Estado de São Paulo, esse material tem caráter norteador para o desenvolvimento dos conteúdos a serem trabalhados ao longo do ano, cabendo aos professores, incluírem livros didáticos como suporte para sua prática pedagógica.

A forma de trabalhar os conteúdos contidos nos cadernos, não é considerada “fechada”, pois podem ser trabalhados de diversas maneiras, cabendo ao professor a escolha de uma delas, pois segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo:

> “[...] a proposta não pode ser compreendida como algo fechado e inflexível. A organização curricular, como será apresentada, tem o objetivo de estabelecer uma articulação de conteúdos, entre inúmeras formas possíveis”.
>
> (Proposta Curricular do Governo do Estado de São Paulo, 2008)

Mesmo com esse material, geralmente a forma com que é feita a introdução ao conteúdo de função, coloca os alunos como meros expectadores cabendo a eles apenas ouvirem, visualizarem, memorizarem e repetirem o conteúdo ministrado pelo professor, sem nenhuma aplicação prática em seu cotidiano.

Segundo Sierpinska (1992), um dos obstáculos epistemológicos da aprendizagem do conceito de função, refere-se ao fato de que este não se configura para os alunos com uma das possíveis ferramentas para resolver problemas do cotidiano e, assim, esse conceito é desprovido de qualquer sentido em situações fora da sala de aula.

Após ingressar no curso de mestrado profissional em ensino de matemática na PUC-SP, comecei a participar de alguns congressos sobre educação matemática, onde tive a oportunidade de tomar contato com a metodologia de ensino e aprendizagem conhecida por modelagem matemática, da qual trataremos mais adiante.

Interessado pelo tema, à partir de discussões com o grupo de pesquisa “O Elementar e o Superior em Matemática”, (formado por um grupo de alunos do curso de Mestrado e Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP), no qual faço parte, foi levantada a possibilidade de se aplicar o processo de modelagem matemática para professores de escolas públicas a fim de verificar se este método incentivará os mesmos a o utilizarem com seus alunos, principalmente para o estudo de função.

1.1 Objetivo

Com este trabalho, temos por objetivo verificar como os professores se apropriam da modelagem como processo de ensino e aprendizagem. Para isso, desenvolvemos uma atividade em “Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo” (HTPC), para buscar dados que auxiliem no diagnóstico, de como tais professores incorporam essa estratégia em suas práticas pedagógicas, não só em relação ao ensino de função, como também a outros conteúdos matemáticos.

1.2 Fundamentação Teórico-metodológica

Nessa seção, apresentamos notas sobre a história da função segundo alguns autores bem como a abordagem desse conceito, apresentada no caderno do aluno (fornecido pela secretaria de estado da educação de São Paulo).

A abordagem da parte histórica justifica-se pelo fato, de ser extremamente relevante na introdução de conteúdos matemáticos, apresentar narrativas sobre a origem histórica dos conteúdos, pois é contando histórias que os significados são construídos (proposta curricular do estado de São Paulo -2008).

Salientamos, que tanto o caderno do aluno como o do professor, fazem parte do projeto “São Paulo faz Escola”, da Secretaria de Estado da Educação do Governo do estado de São Paulo. Este material é distribuído exclusivamente nas unidades escolares oficiais do Estado.

Apresentamos também nesta seção, a definição de modelo, modelo matemático e modelagem matemática sob a óptica de alguns pesquisadores na área.

1.3 Notas sobre a história de função

Beltrão (2010, p. 121), apoiada em Klein, escreve que por volta de 1750, Euler em sua obra *Introductio* apresenta duas definições distintas para função:

- Define *y* como função de *x,* a toda expressão analítica em *x*, ou seja, a toda expressão composta de potências, logaritmos, funções trigonométricas, entre outras, da variável *x,* sem expressar claramente como podem ser feitas as combinações.

- Define uma função pela igualdade y = f(x) quando, referindo-a um sistema de eixos coordenados, (x; y), ela resulta no gráfico de uma curva qualquer, “*libero manus ductu*.”

Podemos notar que esta última definição, já é muito semelhante às encontradas nos livros didáticos atuais.

Ainda segundo Beltrão, apresentamos mais algumas notas sobre a evolução do conceito de função.

Joseph L. Lagrange (1736-1813) em sua *Théorie des fonctions analytiques,* publicada por volta de 1800, apresenta os conceitos de funções analíticas como sendo aquelas que podem ser definidas por uma séries de potências.

Dirichlet (1805-1859), embora já estivesse se referindo a funções contínuas ou com poucos pontos de descontínuidade. Para ele é assim definido o conceito geral de função:

"Se por qualquer meio, se faz corresponder a cada valor de x compreendido em um intervalo, um valor determinado de y, diz-se que y é uma função de x". (Klein, p .301,302 apud Beltrão,2010, p. 121).

A autora escreve ainda que, por volta de 1830, inicia-se o desenvolvimento da Teoria Especial de Funções de Variável Complexa, chegando pouco a pouco, ao domínio dos matemáticos, como Augustin L.Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866) e Karl Weierstrass (1815-1897).

Galileu (1564-1642), com seus experimentos para estudar corpos em movimento muito contribuiu para o surgimento da idéia de função, uma vez que a experimentação possibilita a explicitação de relações quantitativas entre grandezas.

Braga (2004) em sua dissertação, intitulada "O processo inicial de disciplinarização de função no ensino secundário brasileiro", também indica elementos sobre a origem histórica do conceito de função.

Segundo ele, um grande passo foi dado por Viète (1540-1603) para o estabelecimento da definição de função como hoje a conhecemos, ao representar algebricamente a relação entre grandezas. Ele sugeria o uso de vogais para representar uma quantidade supostamente desconhecida ou indeterminada e de consoantes para representar grandezas ou números supostamente conhecidos ou dados. Com relação à notação e à sintaxe a ela inerente, Braga destaca que este matemático, elas desencadearam progressos significativos no desenvolvimento da matemática.

O percurso de seu desenvolvimento algébrico, teve início vinculado a Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650), que tiveram à disposição novos simbolismos e processos algébricos. Munido desses recursos, Descartes apresenta uma abordagem significativamente próximo ao conceito atual de função, afirmando ser ela "uma equação em x e y um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo de uma delas correspondendo aos valores da outra".

Rossini (2006) apoiada em Youschkevitch, escreve que no final do século XVI, as funções ainda eram abordadas por meio de uma descrição verbal, por tabela ou por gráfico, no entanto, após a criação dos logaritmos, o método analítico começa a se destacar para a representação de funções por meio de fórmulas e equações, isso devido aos trabalhos de Pierre Fermat e Descartes.

Na sua obra "*Ad locos planos et sólidos isagoge*", publicada em 1679, Fermat escreveu: "logo que duas quantidades desconhecidas aparecem numa igualdade, existe um lugar, o ponto material de uma das duas quantidades descreve uma linha reta ou curva." (FERMAT, 1891, p.91 apud ROSSINI, 2006, p. 37).

Já Descartes, em sua obra "*La Géometrie*", de 1637, escreve que:

> Tomando-se sucessivamente infinitas grandezas diversas para a linha y, encontram-se dessa maneira infinitas grandezas diversas para a linha x; portanto, tem-se uma infinidade de pontos tais que aquele que é marcado C, por meio do qual se descreve a linha curva requerida. (DESCARTES, 1903, p.86 apud ROSSINI, 2006, p. 38)

Ainda segundo a autora, a palavra "função", é mencionada pela primeira vez por Leibniz em 1673 em seu trabalho denominado " Methodus tangentium inversa seu de fonctionibus". Escreve ainda que a primeira definição explícita de função como expressão analítica aparece em um artigo de Jean Bernoulli, denominado "*Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres*" (Considerações sobre o que se tem, até o presente momento, sobre soluções de problemas de isoperímetros), publicado em 1718, como segue: "Chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira ... desta grandeza variável e de constantes". (BERNOULLI, 1742, p. 241 apud ROSSINI, 2006, p.40).

Ainda apoiada em Youschkevitch, Rossine escreve que o desenvolvimento posterior essencial do conceito de função é devido a Leanhard Euler (1707-1783), que em sua obra intitulada "*Introductio in analysis infinitorum*", de 1748, faz um estudo do conceito de função tal como segue:

> 1. Uma quantidade constante é uma quantidade determinada que tem sempre o mesmo valor. Tais são os números de toda espécie. Utilizam-se as primeiras letras do alfabeto a, b, c etc para representar essas quantidades, utilizando caracteres.

> 2. Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados. Uma quantidade variável compreende todos os números, não importa a sua natureza. Utilizam-se as últimas letras do alfabeto z, y, x etc para representar quantidades variáveis.
>
> 3. Uma quantidade variável torna-se determinada, assim que se atribui um valor determinado qualquer. Uma quantidade variável compreende todos os números, tanto positivos quanto negativos, os números inteiros e fracionários, aqueles que são racionais, transcendentes, irracionais. Não se deve excluir o zero nem os números imaginários.
>
> 4. Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma maneira que seja, desta quantidade e de números ou de quantidades constantes. Assim, toda expressão analítica, que além da variável z contiver quantidades constantes, é uma função de z.
>
> 5. Uma função de variável é também uma quantidade variável, Com efeito, como se pode colocar no lugar da variável todos os valores determinados, a função receberá uma infinidade de valores, e, se for impossível conceber algum, do qual ela não seja suscetível, pois a variável compreende também os valores imaginários.
>
> (EULER *apud* ROSSINI, 2006, p. 42)

Segundo Braga, quase um século depois da publicação de Euler, sobre o conceito de função, Dirichlet (1837) apresenta a seguinte definição de função: “se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x”.

Sendo assim, podemos notar que a origem de função esteve ligado às necessidades de se resolver problemas e desafios da época.

Por este motivo iremos sugerir um problema real para se introduzir conceito de função, pois o mesmo faz parte integrante do processo de modelagem matemática, que iremos detalhar mais adiante.

Como mencionado anteriormente, mostraremos a seguir de que forma é abordado o conteúdo de função pelo caderno do aluno.

1.4 Abordagem de função pelo caderno do aluno

Antes de escrevermos sobre a abordagem de função expressa no caderno do aluno, julgamos necessário relatarmos alguns trechos da proposta curricular do estado de São Paulo para o ensino de funções, pois justificará a utilização de outros materiais e recursos que possam contribuir para sua complementação didática.

A proposta curricular do estado de São Paulo leva em consideração a diversidade dos contextos escolares e todas as dificuldades que a acompanham. No entanto entende que é possível apresentar uma recomendação para toda a rede, desde que algumas idéias básicas sejam inicialmente esclarecidas, por exemplo, que ela não deve ser compreendida como algo fechado e inflexível. A organização curricular tem o objetivo de estabelecer uma articulação de conteúdos, entre inúmeras formas possíveis, ou seja, podemos estudar geometria plana, como área de figuras, para introduzirmos o conceito de produtos notáveis.

Em relação ao ensino de funções para o nível médio, é proposta a ampliação de idéias associadas a pares de grandezas e a medidas, que são iniciadas no ensino fundamental, pois este conteúdo abre portas para um estudo sistematizado das funções.

A abordagem de grandezas direta e inversamente proporcionais, é inicialmente tratada na 8ª série ou 9º ano do ensino fundamental, no caderno 2 (referente ao 2º bimenstre), situação de aprendizagem 3, com o tema “Grandezas proporcionais: Estudo funcional, significados e contexto”.

O conteúdo é iniciado com o exercício: Paulo foi a feira e encontrou as seguintes ofertas para maçãs. “Leve 5 maçãs por R$1,00”. “Leve 10 maçãs por R$1,80”. Você acha que a oferta das 10 maçãs é vantajosa para Paulo? Justifique sua resposta.

Com esta questão, os autores esperam que os alunos, notem a proporcionalidade entre grandezas, ou seja, dividindo o preço pela quantidade de maçãs.

Na sequência, são apresentadas quatro tabelas que indicam como varia uma grandeza y em função de grandeza x, então é solicitado aos alunos que verifiquem se tais grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, e que encontrem a sentença algébrica que relaciona x e y.

Podemos notar que, para resolver o segundo exercício, os alunos já deverem saber o que são grandezas direta e inversamente proporcionais, ou seja, após o primeiro exercício, o professor deve apresentar essa definição à turma, para que se inicie a resolução do segundo.

Após esta fase, é solicitado aos alunos, para resolução em casa, de três exercícios sobre o mesmo conteúdo.

Na situação de aprendizagem 4, é iniciado a construção da representação gráfica de grandezas proporcionais, e de algumas não proporcionais.

Após esta abordagem, os alunos voltam a ter contato com este conteúdo no primeiro ano do ensino médio, no caderno 2, como introdução ao conceito de função.

Sendo assim, os autores do caderno, retomam o conteúdo de função apresentando aos alunos o seguinte texto de contracapa:

> Neste Caderno você irá estudar o conceito de função, que traduz uma relação de interdependência entre duas grandezas. Exploram-se, principalmente, as funções de 1º e de 2º grau, e suas aplicações em diferentes contextos.
> A idéia de função está presente na Matemática, mas, sobretudo em situações do dia a dia que envolvem grandezas e suas relações. Em qualquer movimento, seja o de uma pedra que cai, ou de um carro que participa de uma corrida, verificamos uma relação entre tempo e espaço; o perímetro de um quadrado é uma função de seu lado; o valor que se paga ao taxista é dado em função do número de quilômetros rodados.
> Enfim, as funções permitem analisar os fenômenos da natureza e as mais variadas atividades humanas, por isso, compreender esse conceito é fundamental para desenvolver a capacidade de argumentar e intervir nesse mundo em constante transformação. (CENP- Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – SP)

O conteúdo de funções é iniciado propondo aos alunos uma leitura e análise de texto sobre a definição de grandezas direta e inversamente proporcionais, bem como sua relação de interdependência, como segue:

> **Grandezas e funções**
> A altura de uma árvore que plantamos no quintal ao longo do tempo, o peso de uma pessoa ao longo da vida, o preço do barril de petróleo a cada dia, a produção de automóveis de um país ano após ano, a temperatura de um refrigerante colocado em uma geladeira, o preço a pagar por uma corrida de taxi são alguns exemplos de grandezas.
> Duas grandezas x e y podem variar de modo interdependente, de tal forma que assumam valores inter-relacionados. Quando, deixando variar livremente os valores de uma grandeza x, notamos que os valores de outra grandeza y também variam de tal forma que a cada valor de x corresponde um e somente um valor de y, então dizemos que y é uma função de x; dizemos ainda que x é variável independente e y é a variável dependente.
> Por exemplo:
> a) A área A de um quadrado é uma função de seu lado x; deixando os valores de x variarem livremente (naturalmente, x não pode assumir valores negativos), então os valores de A, variarão em função de x, e escrevemos A=f(x). No caso, temos: $A=f(x)=x^2$.
> b) A altura H de uma pessoa é uma função de sua idade t; podemos escrever H=f(t), sendo certo que cada valor de t corresponda a um único

> valor de H. No caso, não sabemos exprimir a relação de interdependência f(t) por meio de uma fórmula.
> Quando x e y são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultânea e proporcionalmente, ou seja, a razão $\frac{y}{x}$ é constante, e resulta que y=k.x (k é uma constante). Quando x e y são duas grandezas inversamente proporcionais, sempre que uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa, de modo que o produto das duas permanece constante: x.y=k, ou seja, $y = \frac{k}{x}$ onde k é uma constante não nula.
> Quando observamos os valores de duas grandezas interdependentes x e y, e notamos que um aumento no valor de x acarreta um aumento no valor de y, ou então, um aumento no valor de x provoca uma diminuição no valor de y, somos tentados a dizer que x e y variam de modo diretamente proporcional, no primeiro caso, ou inversamente proporcional, no segundo. Entretanto tais informações nem sempre são corretas, uma vez que, como visto anteriormente, a proporcionalidade direta exige mais do que um aumento simultâneo nos valores de x e y; pois é preciso que a razão $\frac{y}{x}$ seja constante e resulte em y=k.x (k é uma constante). Analogamente, a proporcionalidade é mais do que a diminuição nos valores de uma das grandezas, quando o outro aumenta; é necessário que o produto dos valores de x e y permaneça constante, ou seja, x.y=k (k é constante). (Caderno do aluno – Matemática 1ª série E.M. – vol. 2 p.3)

Com este texto, os autores esperam que os professores possam trabalhar com seus alunos, situações que contribuam para a compreensão de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, e da covariação de variáveis, explicitando a dependência funcional, além de conseguirem identificar a possibilidade de representar a dependência entre as grandezas por uma sentença matemática.

Ainda podemos notar, que os autores apresentam relações de grandezas direta e inversamente proporcionais, sem mencionar que fazem parte de uma família de funções.

No entanto, acreditamos que o exemplo "b", possa causar um certo desconforto para os alunos, pelo fato de os autores afirmarem que existe uma relação de dependência entre as variáveis, mas que não pode ser explicada por uma sentença matemática.

Na sequência, é proposta uma série de exercícios para verificar se há dependência ou não entre as variáveis. Posteriormente, os autores apresentam tabelas que relacionam as grandezas, a fim de que os alunos verifiquem se existe ou não proporcionalidade entre elas.

Com esses exercícios os autores objetivam que os alunos identifiquem o tipo de proporcionalidade, quando existir, entre as grandezas que são apresentadas.

Posteriormente, é proposta uma sequência de exercícios, para que os alunos preencham tabelas que expressam relação de interdependência entre as grandezas.

Destacamos o seguinte exemplo:

Um prêmio P da loteria deve ser dividido em partes iguais, cabendo um valor a cada um dos n ganhadores. Considerando um premio P de R$ 400.000,00, preencha a tabela a seguir e expresse a relação de interdependência entre x e n.

Tabela 1: Divisão de Prêmio da Loteria

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**8**	**10**	**20**
X								

Fonte: Caderno do Aluno

Esse tipo de exercício, pode fazer com que os alunos comecem a perceber a covariação entre as grandezas, ou seja, variando uma delas a outra também varia na mesma proporção, neste exemplo, um caso de grandezas diretamente proporcionais.

Supondo o conhecimento prévio de plano cartesiano e de par ordenado, os autores utilizam essas tabelas como fonte de dados para construção da representação gráfica da função correspondente.

Após alguns exercícios similares uns aos outros, de representação gráfica das “funções”, os autores apresentam o significado de função polinomial de 1º grau.

1.5 Funções de 1º grau: significado

Sempre que expressamos por meio de variáveis uma situação de interdependência envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais, chegamos a uma função de 1º grau. De modo geral, uma função de 1º grau é expressa por uma sentença matemática do tipo $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes, sendo $a \neq 0$. Convém ressaltar que uma função de 1º grau em $b = 0$ representa uma proporcionalidade direta entre $f(x)$ e x, pois $f(x) = ax$. Quando $b \neq 0$, a diferença $f(x) – b$ é diretamente proporcional a x, pois $f(x) – b = ax$.

Posteriormente, os autores propõem aos alunos que encontrem os valores das constantes a e b das funções de primeiro grau do tipo f(x) = ax + b representadas graficamente.

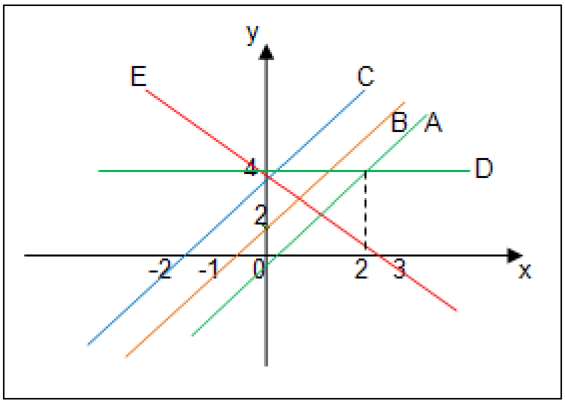


Figura 1: Representações gráficas
Fonte: Caderno do aluno – vol. 1

A metodologia proposta por este material não deixa claro como surgiu a expressão genérica de equações de 1º grau, além de tornar mecânica a resolução da questão proposta, que por sinal, não possui nenhuma relação com a realidade cotidiana.

Tal metodologia pode causar uma desmotivação aos alunos, e consecutivamente aos professores, que por vezes encontram dificuldades em elaborar uma forma mais clara e realista de como introduzir o conceito de função.

Segundo Sierpinska (1992, apud Ardenghi, 2008, p.64), tal dificuldade está associada a uma filosofia matemática que não diz respeito a problemas práticos, e sugere como solução, a identificação de mudanças observadas no mundo como um problema prático a ser resolvido, bem como a identificação de regularidades nas relações entre as variáveis, como maneira de lidar com elas.

Para Oliveira (1997, apud Ardenghi, p. 40), a função é, em geral, tratada como objeto de estudo, e não como instrumento para resolver problemas. Esse tipo de concepção pode causar nos alunos alguns obstáculos didáticos.

> A apresentação e organização da Matemática são baseadas nas definições e que, por essas estarem distantes da linguagem quotidiana, geram dificuldades de assimilação dos conceitos pelos alunos, pois não são compatíveis com a forma que os alunos adquirem os conceitos.
>
> (Vinner, 1994, apud Ardenghi, 2008, p.42),

Concordando com Oliveira, entendo que o conceito de função deve ser introduzido de forma mais clara, e relacionada com a realidade dos alunos, por este motivo, proponho neste trabalho a utilização de modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do conceito de função.

Descrevemos a seguir a idéia de modelo, modelo matemático e modelagem matemática.

1.6 Modelo

Pensar, questionar, investigar, analisar e criar, sempre foram características do homem, que aliadas aos conceitos matemáticos, contribuem fortemente para o estudo de problemas diversos de seu ambiente. Para compreender o mundo que o cerca, o homem se utiliza de representações que são capazes de explicar e interpretar os fenômenos naturais.

Toda representação que procura explicar e interpretar os fenômenos da realidade é chamado de modelo, que deve ser, na medida do possível, o mais fiel ao fato real, dependendo de sua complexidade.

Entretanto, podemos ter modelos que apenas se aproximam da realidade tratada, isso pelo grande número de fatores que a compõe, sendo assim, não sendo exatamente fiel ao fenômeno estudado. Como exemplo deste, podemos citar o caso estudado mais adiante neste trabalho, que visa encontrar um modelo matemático que expresse a relação entre o custo financeiro de um automóvel, com a quilometragem rodada por ele, onde desconsideramos alguns fatores envolvidos, como por exemplo, fluxo de automóveis na via, calibragem dos pneus, nível de aceleração, etc.

No entanto, diferentes autores conceituam modelo com enfoques diferenciados, como se pode verificar nos exemplos que seguem:

D´Ambrósio (1986), reconhece um modelo como uma estratégia que oferece ao homem capacidade de exercer seu poder de análise da realidade.

Granger (1969) considera um modelo como uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções.

Para Hilgard (1973) um modelo representa uma sequência de relações matemáticas, físicas ou conceituais, que se mostram adequadas à compreensão e interpretação de um conjunto de dados.

Para Bassanezi (1994) , quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de entender ou agir sobre ela, o processo usual é selecionar argumentos ou parâmetros essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial, ou seja, um modelo.

Henry (1997, p. 79, apud Coutinho, 2002, p.3), apresenta um modelo por uma analogia aos objetos da realidade que foram idealizados. Isto quer dizer que, em um vocabulário corrente, os objetos do modelo são dotados de propriedades características bem definidas.

Segundo os autores, modelo é toda forma de representação que busca imitar os fenômenos da realidade, sejam eles naturais ou artificiais.

Entretanto, alguns pesquisadores relatam algumas características dos modelos, como segue:

Davis (1995), considera que a característica mais importante de um modelo é sua capacidade para imitar e predizer fenômenos. Segundo este autor, a utilidade de um modelo é seu sucesso em imitar e predizer o comportamento do universo.

Na visão de Dolis (1989), os modelos podem ser considerados como aproximações da realidade, onde, através da supressão de detalhes dispensáveis, permitem a manifestação em forma generalizada dos aspectos fundamentais do mundo real.

Ferruzi (2003), escreve que ao elaborar representações, o homem está modelando o fenômeno em estudo para melhor compreendê-lo. No âmbito da Matemática, o termo modelo é utilizado com freqüência nos meios acadêmicos e é encontrado desde o início do desenvolvimento da Matemática, sendo empregado de diferentes formas.

Como a humanidade encontrou uma ferramenta que a auxiliasse na compreensão de fenômenos da realidade, no caso a matemática, começou então a busca de representações que simulassem a realidade vivida, surgindo então os tais modelos matemáticos.

Bassanezi (2000), um dos precursores da modelagem no Brasil, escreve que um conjunto de símbolos e relações matemáticas é definido por modelo matemático, que tem por objetivo representar de alguma forma o objeto estudado.

Entretanto, diversos autores apresentam também suas concepções e definições de modelo matemático:

Segundo McLone (1976), um modelo matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular.

Ferreira Jr (1993) define modelo matemático a partir de uma abordagem abstrata dos conceitos básicos de dimensão, unidade e medida. Ou seja, é uma representação abstrata de uma situação real.

Assim, um modelo pode ser entendido como uma réplica de um objeto real. É uma representação simplificada de uma situação concreta e é elaborado segundo algumas regras. Sua construção tem por objetivo a visualização e a compreensão da situação ou do objeto em estudo e a possibilidade de prever configurações futuras ou de situações semelhantes explícitas, baseadas nas hipóteses e nos objetivos admitidos para o estudo. Sua formulação não tem um fim em si mesmo, mas visa resolver algum problema.

Bassanezi (2002) escreve que tais modelos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificadas conforme o tipo de matemática utilizada: Linear ou não linear; Estático/Dinâmico e Educacional

Ainda segundo Bassanezi, o modelo linear ou não linear é formado, por equações lineares ou não. Já o estático é definido como sendo um modelo que representa a forma do objeto, por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; e o modelo dinâmico simula variações de estágio dos fenômenos, por exemplo, crescimento populacional de uma colméia. Por último, o autor expressa que modelo educacional é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. Este modelo geralmente não representa a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer previsões. Entretanto é um excelente meio para se adquirir experiências e idéias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada.

Para se construir tais modelos, é preciso todo um procedimento que parta de situações reais, em que os modeladores realizam a denominada “modelagem matemática”, que será apresentada a seguir.

1.7 Modelagem Matemática

Segundo Biembengut (2009), o primeiro debate sobre modelagem e aplicações na Educação Matemática no cenário internacional ocorre, em especial, na década de 1960, com um movimento chamado “utilitarista”, definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema.

Ainda segundo a autora, dentre os eventos que iniciaram o estudo de modelagem matemática, encontra-se o *Lausanne Symposium*, em 1968 na Suíça, que tinha por tema *como ensinar matemática de modo que seja útil*, com situações do cotidiano do estudante e não aplicações 'padronizadas', mas que favorecessem a habilidade para matematizar e modelar problemas e situações da realidade. Segundo ela, na Europa, um grupo liderado por Hans Freudenthall, denominado IOWO (Holanda), e um outro, coordenado por Bernhelm Booss e Mogens Niss (Dinamarca), atuavam neste sentido, tal que em 1978, em Roskilde, foi feito um congresso sobre o tema *Matemática e Realidade* que contribuiu para a consolidação, em 1983, do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA – filiado ao ICMI, que além de fazer parte dos grupos do *International Congress Mathematics Education* – ICME, tem realizado bi-anualmente o evento internacional conforme D’Ambrosio *apud* Biembengut, 2007b.

Entretanto, a Modelagem Matemática, considerada como uma alternativa para o ensino de Matemática para os níveis “Fundamental” e “Médio”, segundo Burak (2005), iniciou-se no Brasil no ano de 1985, na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP - Campus de Rio Claro, SP.

Ainda segundo Burak, a introdução da Modelagem Matemática no Brasil, deve-se a um grupo de professores, especialmente, aos Professores Ubiratan D´Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação – IMECC, da Universidade Estadual de Campinas que difundiram, sob forma de livros , cursos de especialização, artigos, palestras e orientações de trabalhos de conclusão de mestrado e doutorado, essa alternativa para o ensino de Matemática.

Todo o processo para obtenção do modelo matemático é definido por Bassanezi como modelagem matemática. Na mesma linha de raciocínio, apresentamos algumas concepções segundo alguns pesquisadores:

Borba, Meneghetti e Hermini (1999, apud Machado, p. 03) consideram que a Modelagem "[...] pode ser vista como um esforço de descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor". (p. 76). A escolha pelos alunos parece ser o diferencial nas propostas de uso da Modelagem Matemática no ensino.

Skovsmose (2000, p. 69) chama de "cenário para investigação" um ambiente que pode dar sustentação a um trabalho investigativo e apresenta diferentes ambientes de aprendizagem, em que há referências à Matemática pura, à semi-realidade (entendida como uma realidade construída para efeitos didáticos) e à realidade propriamente dita.

Para Barbosa (2001) Modelagem "[...] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade."(p.6).

Araújo (2002), por sua vez, entende ser a Modelagem "[...] uma abordagem por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho". (p.39).

Podemos notar, que a concepção sobre modelagem matemática, pelos autores citados, convergem para uma única opinião, ou seja, é o processo de obtenção do modelo matemático.

Sendo assim, Bassanezi (2000) propõe um esquema para desenvolver modelagem matemática que envolve em seu corpo: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação, Modificação e Aplicação. A seguir reproduzimos esse esquema, mostrando de que forma todo este processo é realizado, ou seja, todas as etapas que o constitue.

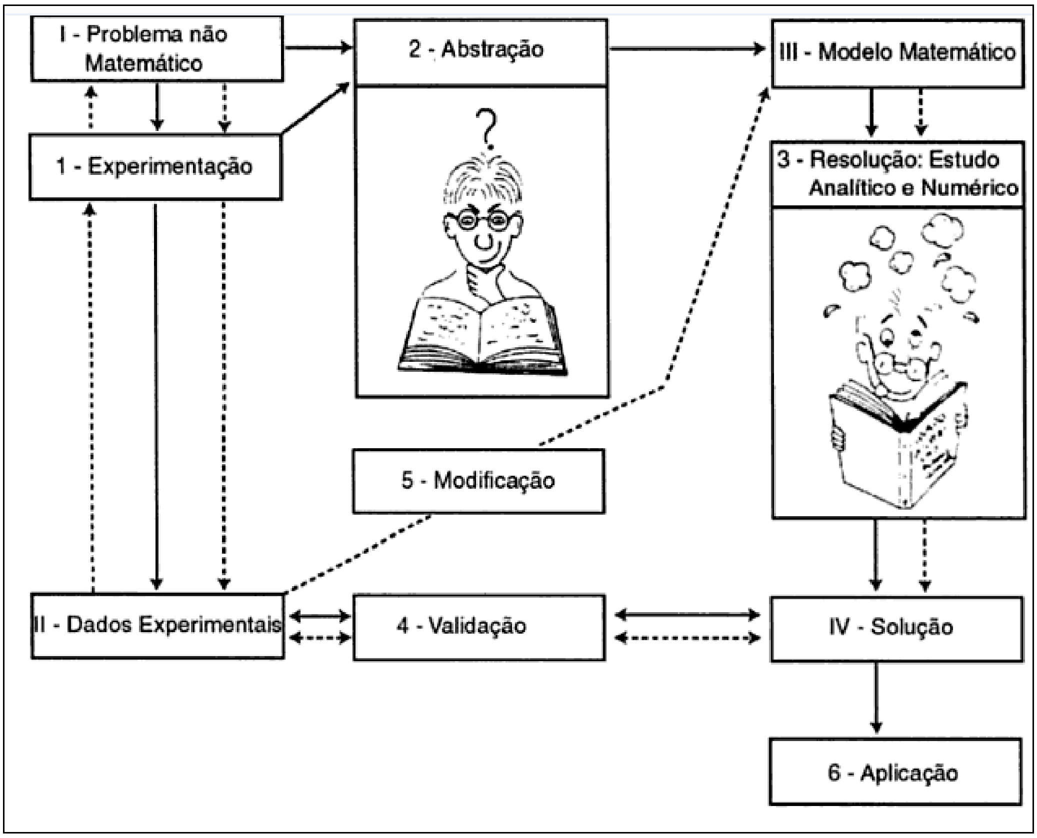


Figura 2- Etapas do processo de modelagem segundo Bassanezi (2002, p.27)

Com este esquema, Bassanezi retrata todo o processo de modelagem matemática, dividindo-o em seis etapas.

As setas contínuas representam a primeira aproximação e as setas pontilhadas indicam a busca por um modelo que melhor represente o problema estudado. As etapas constitutivas do processo são assim descritas:

- Experimentação: nesta fase, o modelador realiza o levantamento de dados referentes à situação real a ser estudada; esta fase também é conhecida como atividade laboratorial.
- Abstração: é o momento que nos deve levar à formulação dos modelos matemáticos e é nesta fase que se procura estabelecer a seleção das variáveis, a problematização, a formulação de hipóteses e a simplificação.
- Resolução: o modelo matemático é obtido, quando saímos da linguagem natural das hipóteses para uma linguagem matemática que seja coerente.
- Validação: neste ponto, se verifica se o modelo proposto é coerente com as hipóteses que foram apresentadas inicialmente, a fim de confrontar a solução com os dados levantados na experimentação. Se o modelo atingir o grau de satisfação esperado, então partimos para a aplicação. Caso o grau de aproximação não for alcançado, devemos realizar um processo chamado modificação.

> - Modificação: quando o modelo não atinge o grau de satisfação esperado, ou seja, não condiz com a realidade analisada, devem-se fazer modificações que podem ser em qualquer etapa do processo, seja até mesmo na experimentação.
>
> Aplicação: depende da situação tratada. (Bassanezi 2002, p.27 - 31)

Bassanezi, escreve ainda que, a aplicabilidade do modelo, depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido, ou seja, um modelo pode ser “bom” para o biólogo e não para o matemático e vice-versa.

A modelagem matemática é constituída por diversas fases como já mencionado, no entanto, este processo na visão de Bassanezi, ainda pode ser analisado por duas vertentes, a primeira como método científico e a segunda como estratégia de ensino-aprendizagem.

1.8 Modelagem Matemática: Método Científico e Estratégia de Ensino-Aprendizagem.

Bassanezi destaca alguns pontos relevantes a respeito de modelagem matemática como vertente, método científico, utilizada como instrumento de pesquisa:

> - Pode estimular novas idéias e técnicas experimentais;
> - Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previsto;
> - Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
> - Pode sugerir prioridades de aplicação de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
> - Pode preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;
> - Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
> - Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento; (Bassanezzi, 2002, p.33)

O autor escreve que este método está diretamente relacionado à matemática aplicada, em que pode ser considerada como a arte de ser aplicada às situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem, ou seja, solucionando problemas industriais e de engenharia.

Neste processo, o foco principal é a construção de um modelo que melhor represente a situação real para solucionar problemas das diversas ciências factuais.

Já como vertente "estratégia de ensino-aprendizagem", o autor escreve que este método tem como foco todo o procedimento de construção do modelo, ou seja, a modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, em que o mais importante não é chegar imediatamente no modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.

Bassanezi (2002) escreve ainda que, com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu meio ambiente.

Entretanto, citaremos outras concepções a respeito de todo o processo de modelagem, como as de Barbosa (2001), que escreve a respeito dos "três níveis de modelagem matemática".

Para esse autor, o ambiente de Modelagem está associado à problematização e à investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a situação proposta. Nela, pode-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

Analisando os estudos sobre o tema, nacional e internacional, Barbosa classifica os casos de Modelagem de três formas diferentes:

- Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
- Caso 2. O professor traz para a sala de aula um problema de outra área do conhecimento, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
- Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

Em todos os casos, o professor é concebido como "co-partícipe" na investigação dos alunos, dialogando com eles acerca de seus processos. Porém, em algumas situações, ele possui um papel mais presente na organização das atividades. No caso 1, por exemplo, a presença do professor, já que ele fica responsável pela formulação da situação problema, é mais forte do que no 3, em que isso é compartilhado com os alunos.

Burak (2009) escreve que a Modelagem pode ser, e está sendo pesquisada, difundida e trabalhada em sala de aula, sob pelo menos dois enfoques distintos:

a) Modelagem na Perspectiva da Matemática Aplicada

b) Modelagem Matemática na perspectiva do ensino e da aprendizagem

Em relação ao primeiro enfoque, Burak escreve que, há quatro definições para a Matemática Aplicada:

> - A Matemática Aplicada Clássica é formada pelos ramos da análise clássica, onde se incluem, dentre outras, o cálculo diferencial e integral, as equações diferenciais ordinárias e parciais e as teorias de funções.
> - A Matemática Aplicada, como toda matemática que tem aplicações práticas significativas, inclui todos os tópicos da Matemática Elementar, como funções, desigualdades, álgebra linear, probabilidade, a estatística, a computação e outras, que contém aplicações práticas de interesse;
> - A Matemática Aplicada, como sendo a matemática empregada em uma situação real em algum campo real, é a matemática empregada na construção de um modelo ou outra interpretação matemática, é trabalhar matematicamente com este modelo ou interpretação e aplicar os resultados à situação real;
> - A Matemática Aplicada como sendo a matemática aplicada pelas pessoas na sua vida diária. (Pollak, 1979, apud Burak, p.13)

Podemos notar que, as definições de modelagem matemática propostas por Burak vão ao encontro das definições propostas por Bassanezi.

Definida a concepção de modelagem matemática, vale aqui, ressaltarmos argumentos que justificam o seu uso em sala de aula, segundo alguns autores.

Para Gustieli, a utilização do processo de Modelagem Matemática no ensino de Matemática, é importante, pois:

> - É um processo de abertura onde se podem aprender, questionar e relembrar conceitos matemáticos;
> - É um processo de abertura para compreender situações reais, do cotidiano;
> - É um processo que funciona como uma motivação para surgir à aprendizagem, tanto da Matemática como também de outras áreas do conhecimento. (Gustineli, 1990, p.38)

Na mesma linha, Barbosa (2000) apoiado em Blum (1995), apresenta cinco argumentos para a utilização da modelagem como processo de ensino-aprendizagem.

> - Motivação: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
> - Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as idéias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
> - Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-dia e no mundo do trabalho;
> - Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
> - Compreensão do papel sócio-cultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais. (Blum, 1995, apud Barbosa, 2000, p. 12)

Como nosso objetivo é propor uma metodologia para auxiliar no desenvolvimento de funções, utilizaremos a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, sob óptica de Barbosa, que separa este método em três fases ou casos. Adotaremos o segundo, que trata da apresentação de um problema por parte do professor mediador, cabendo aos alunos a busca de informações sobre o mesmo, a fim de solucioná-lo.

Em relação a adequação da modelagem no currículo escolar, Barbosa apoiado em Skovsmose, escreve que:

> Há várias maneiras de implementar Modelagem no currículo. Tenho evitado uma abordagem compartimentada, onde Modelagem constitui-se uma 'ilha' dentre as outras atividades. Incorporá-la na escola deve significar também o movimento do currículo de matemática para um paradigma de investigação. (Skovsmose, 2000, apud Barbosa, 2002, p.24).

A escolha do segundo caso proposto Barbosa se deu pelo fato de a grande maioria das instituições de ensino, possuir um planejamento de conteúdos a ser desenvolvido ao longo do ano letivo, e este método propicia ao professor uma condução ao conteúdo desejado, pois o professor mediador pode escolher o problema a ser modelado.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo por objetivo a utilização do segundo caso de modelagem matemática proposto por Barbosa, que trata da escolha de um tema por parte do professor mediador e uma busca de dados por parte dos alunos a fim de solucionar por meio de um modelo matemático a situação desejada, decidimos analisar a relação existente entre potencias de motores automotivos quando funcionados a álcool combustível (etanol) e a gasolina com seus respectivos valores nos postos juntamente com a quilometragem rodada.

Para desenvolver a fase empírica, convidamos todos os professores de matemática de uma escola estadual da Grande São Paulo, entretanto oito participaram pelo fato do trabalho ter sido desenvolvido em horário destinado a discussões pedagógicas na escola, e o horário dos demais não coincidirem com o da maioria.

Toda a atividade foi desenvolvida no laboratório de informática da escola, onde os vinte computadores estavam conectados a internet.

Escolhemos este ambiente pelo fato de os professores participantes terem que realizar busca de informações a respeito do problema proposto pelo mediador, de acordo com o segundo caso proposto por Barbosa, e também por utilizarem o software Geogebra para representarem graficamente as fórmulas matemáticas que irão encontrar.

Escolhemos o software Geogebra, pois o mesmo encontra-se disponível gratuitamente na rede mundial de computadores (Internet), e também pelo motivo de os professores participantes já o conhecerem de outras atividades pedagógicas desenvolvidas anteriormente na escola.

Segundo Barbosa, para desenvolver o processo de modelagem é necessário que haja discussão entre grupos, pois assim, as idéias vão se formando e se complementando. Sendo assim, para nossa abordagem empírica, sugerimos aos participantes que formassem duplas, pois facilitaria a análise das representações gráficas que seria construídas por eles.

Para incentivar as discussões em cada dupla, entregaremos aos professores textos e perguntas impressas, material este, onde puderam registrar suas conclusões.

Após cada registro, cada dupla socializará verbalmente suas conclusões com os demais grupos, pois desta forma, enriquecerão o debate.

Apresentaremos detalhadamente a seguir as etapas da fase empírica do desenvolvimento da modelagem matemática.

Salientamos que, após o processo de modelagem, analisaremos todas as respostas e interações realizadas pelos participantes, a fim de compará-las com o objetivo individual de cada questão, apresentada a eles pelo professor mediador.

2.1 Etapas desenvolvidas no processo empírico do desenvolvimento da modelagem matemática com os professores participantes.

Desenvolvemos o trabalho com os participantes em dois encontros de duas horas cada.

Para familiarizar os professores com o tema a ser desenvolvido, iniciamos o primeiro encontro, apresentando um texto sobre a utilização do etanol como combustível ao longo dos anos, e o aumento de seu consumo à partir dos carros flexíveis construídos no Brasil.

As discussões foram alimentadas pela experiência pessoal de cada participante, considerando que, a maioria dos professores possuem carros flexíveis.

Na sequência, utilizando a internet, os participantes iniciaram a busca de dados sobre a quilometragem rodada por litro de combustível (etanol e gasolina), por diferentes tipos de motores (cilindradas). Com os dados encontrados, os participantes preencheram uma tabela impressa, que foi entregue a eles pelo professor mediador.

Após o preenchimento da tabela, foi entregue a eles, por escrito, uma questão, para que encontrassem uma fórmula para calcular o custo com combustível a cada quilômetro rodado.

Ainda por escrito, perguntamos aos participantes como ficaria a fórmula encontrada, se quiséssemos determinar o custo para uma quilometragem qualquer.

Com essa pergunta, os participantes aperfeiçoaram a fórmula encontrada.

Com a obtenção desse modelo, encerramos o primeiro encontro.

Iniciamos o segundo encontro, retomando o modelo encontrado, solicitando aos participantes que substituíssem valores para a variável, quilometragem rodada, a fim de encontrar o custo financeiro correspondente. Em seguida, que realizassem a operação contrária, ou seja, substituíssem valores para o custo financeiro, a fim de encontrar a quilometragem rodada. Essa operação foi solicitada para verificar a comparação empírica dos resultados.

Realizada a verificação por substituição de valores para as variáveis, solicitamos aos professores que iniciassem a sua validação perceptiva, para isso, com o auxílio do software geogébra, construíram sua representação gráfica.

Com o objetivo de aperfeiçoar o modelo encontrado, apresentamos ainda por escrito aos professores, um problema que tratava de acrescentar a situação, o valor de um pedágio.

Após o aperfeiçoamento, solicitamos aos professores que construíssem sua representação gráfica, para que realizassem também sua validação perceptiva.

Solicitamos também aos participantes, que construíssem no mesmo plano cartesiano, as representações gráficas dos dois modelos encontrados, para que pudessem compará-las.

Realizada a comparação, os participantes notaram que o primeiro modelo tratava-se de uma função linear, já a segunda de uma função afim.

Detalhamos a seguir, todas as etapas mencionadas, bem como o que esperávamos com cada uma delas, para posteriormente relatar toda a experiência realizada.

2.2 Primeiro encontro

Como desenvolvemos o processo de modelagem com professores de matemática da rede estadual de ensino em "*Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo" (HTPC)*, julgamos necessário deixar claro que temos por objetivo, a coleta de dados que serão utilizados para o desenvolvimento de uma dissertação, para obtenção do título de mestre em ensino de matemática, e que iremos propor uma abordagem de ensino complementar ao que é apresentado no caderno do aluno, para o trabalho com funções matemáticas.

Com o objetivo de iniciar o tema a ser desenvolvido, entregamos um texto contendo informações a respeito da utilização do álcool combustível (etanol) como mais uma alternativa de economia ou não para carros com motores flexíveis (motores a gasolina e álcool). Tal texto serviu como *"link"* para introduzirmos o objeto matemático a ser desenvolvido: função.

> Texto: Logo após a primeira grande crise mundial do petróleo, a partir de 1973, o governo brasileiro decidiu investir no desenvolvimento de um combustível alternativo que substituísse a gasolina e, portanto, a dependência do país em relação aos derivados de petróleo, que era quase total à época (só agora em 2006 é que o Brasil está alcançando sua auto-suficiência na produção de petróleo).
>
> Foi assim que nasceu, em 1975, o Proálcool (Programa Nacional do Álcool), que além de contar com recursos do governo para pesquisa e desenvolvimento do novo combustível, previa subsídios na venda de veículos e do próprio combustível, além de redução de impostos.
>
> O programa teve seu ápice em meados dos anos 80, quando 96% dos automóveis novos vendidos no país eram movidos a álcool. Naquela época, o Brasil passou por um sério problema de desabastecimento com a falta do combustível.
>
> Quando os preços internacionais do petróleo recuaram no início dos anos 90, os brasileiros voltaram a dar preferência por comprar carros a gasolina. Em 2003, apenas 10% dos carros novos vendidos pela indústria brasileira eram movidos a álcool.
>
> Em 2004, surge uma nova revolução: os carros com motores flexíveis, conhecidos como Flex, que são bicombustíveis - funcionando tanto com álcool como com gasolina ou a mistura em qualquer proporção de ambos. Como o preço do álcool estava baixo, o consumo do combustível cresceu. Isso se refletiu nas vendas de carros no país. Atualmente, mais de 73% dos automóveis vendidos no país são Flex.
>
> Devido ao crescimento da procura pelo combustível e do momento de entressafra da produção de cana-de-açúcar (matéria-prima para sua produção), sempre passamos por uma crise relacionada ao álcool. O principal reflexo, além do próprio aumento dos preços, é que o governo sempre procura reduzir a proporção de álcool acrescentada à gasolina que varia entre 25% e 20%. (Texto: História de uma alternativa à gasolina – universia.com.br)

Ao término da leitura, apresentamos por escrito aos professores participantes as seguintes questões:

1) **Que relação existe entre o consumo financeiro de seu automóvel e o preço do combustível?**
2) **Com qual combustível (etanol ou gasolina) há uma maior economia?**

Com a primeira questão, esperávamos que os participantes discutissem e percebessem a relação de dependência entre a quilometragem rodada com o consumo de combustíveis (gasolina e etanol), ou seja, quanto maior a quilometragem rodada, maior o consumo financeiro, além disso, esperávamos que os participantes percebessem que existem muitos outros fatores que podem influenciar na relação de dependência entre elas, como por exemplo, a forma com que o condutor dirige, a regulagem do motor, a composição do combustível, o transito e muito mais.

Já com a segunda, que se iniciasse um diálogo sobre o preço dos combustíveis e o consumo por diversos motores (cilindradas), ou seja, a economia depende da potência do motor e da diferença entre os valores do etanol e da gasolina.

Após essa fase, ainda por escrito, apresentamos a questão.

Como se determinar uma fórmula matemática que relacione a quilometragem rodada, consumo do veículo (álcool e gasolina) e o valor do combustível?

Escolhemos essa questão pelo motivo de a grande maioria dos professores participantes utilizarem automóveis flexíveis (álcool e gasolina), e pela possibilidade dos mesmos, eventualmente, terem dificuldades em saber com qual combustível abastecer, quando os preços por litro forem alterados, isto é, visando uma maior economia financeira.

Para melhor operacionalizar a resolução, solicitamos o preenchimento de uma tabela contendo informações sobre o consumo de etanol e gasolina por motores flexíveis de seguintes cilindradas: 1.0, 1.4, 1.6, 1.8 e 2.0

Tabela 2: Rendimento por potência dos motores

	Motor 1.0	Motor 1.4	Motor 1.6	Motor 1.8	Motor 2.0
Álcool Gasolina					

Fonte: Tabela elaborada pelo autor do trabalho

Escolhemos esses motores por conta do grande aumento de produção e comercialização de carros flexíveis de diversas potências no Brasil, pois segundo nota encontrada na *webmotor* (*site* automotivo), no ano de 2007, carros flexíveis em combustível – apelidados de "flex" – representam mais de 80% do total de veículos comercializados atualmente no Brasil.

Para preencher a tabela, cada dupla de professores participantes, utilizaram um computador conectado à internet. O ambiente utilizado para tal atividade, foi o laboratório de informática da escola, onde encontram-se vinte computadores. Para realizar a pesquisa, os participantes utilizarão *sites* de busca como por exemplo o *Google*. Para esta tarefa, planejamos um tempo de aproximadamente vinte minutos.

Preenchida a tabela, solicitamos aos participantes que anotassem o valor do etanol e gasolina dos postos onde costumam abastecer seus veículos. Caso algum dos integrantes relate que não costuma abastecer em um único posto, solicitaremos que o mesmo calcule o valor médio dos preços de onde abastece.

Após essa tarefa, entregamos aos professores a seguinte questão:

Utilizando as informações contidas na tabela, como podemos determinar o custo financeiro com combustível (etanol e gasolina), a cada quilômetro rodado pelo veículo?

Com esta questão, esperávamos promover uma discussão entre eles, a fim de que se encontre a seguinte relação matemática:

$$Custo\ por\ quil\hat{o}metro = \frac{Valor\ do\ combust\acute{i}vel}{Consumo\ do\ motor}$$

Essa relação faz parte do modelo matemático que representará o problema geral da atividade que iremos tratar mais adiante.

Encontrada essa relação matemática, solicitamos que substituíssem os valores contidos na tabela, a fim de comparar o custo por quilômetro rodado quando abastecido com etanol ou gasolina.

Após a comparação, fizemos a seguinte pergunta (oral): **Em quais situações o valor encontrado se tornará uma constante?**

Assim, mostramos que, quando o automóvel é sempre abastecido em um único lugar (mesma bamba de combustível), sem reajuste no preço, e considerando o consumo do motor sempre o mesmo, a razão encontrada se torna uma constante. Os professores participantes poderão notar, que essa constante é que define a vantagem financeira, em se abastecer o veículo com etanol ou gasolina.

Com isso, fomentamos debate para que os grupos iniciassem uma discussão sobre como determinar o custo financeiro com combustível ao utilizar o veículo, partindo da constante encontrada.

Nesta fase, esperávamos que os participantes notassem que para se obter a expressão matemática desejada, basta multiplicar a razão que representa o custo por quilometro pela quilometragem rodada, ou seja:

$$\textit{Custo total com combustível} = \frac{\textit{Valor do combustível}}{\textit{Consumo do veículo}} \times \textit{quilometragem percorrida}$$

Para padronizar a expressão matemática encontrada (aspecto), estabelecemos com os participantes as letras que representaram as grandezas tratadas.

Após elaboração do modelo, solicitamos aos professores que anotassem para o próximo encontro a quilometragem rodada por seus automóveis junto com seu consumo, ao longo de uma semana a fim de validar ou refutar o modelo encontrado.

2.3 Segundo encontro

Para iniciar o estudo da relação entre variáveis, solicitamos aos professores que substituíssem valores para a quilometragem rodada a fim de encontrarmos o consumo financeiro. Em seguida realizamos o processo inverso, atribuindo valores para o consumo financeiro para encontrarmos a quilometragem rodada.

Com este procedimento, os participantes encontraram alguns valores inter-relacionados pela relação, entretanto, somente por meio de uma representação gráfica, poderão visualizar com mais detalhes essa relação, pois essa relação entre as grandezas será expressa por uma reta no plano cartesiano.

Sendo assim, para construir a representação gráfica da fórmula encontrada, utilizamos o software Geogébra. Escolhemos este programa pelo fato deste software estar disponível on-line, e de uso gratuito.

Tal exploração será realizada atribuindo valores para a quilometragem rodada

Após esta fase, apresentamos aos professores as seguintes questões:

1) **O que aconteceria com o consumo financeiro se o valor do litro do combustível mudasse?**

Com esta pergunta esperávamos que os professores percebessem, após debate, que a razão encontrada (custo por quilômetro rodado) só se torna constante, se o preços do litro do etanol e gasolina permanecerem inalterados, ou seja, abastecimento em um único posto, e sem sofrer reajuste nos valores do combustível.

2) **Em quais situações o abastecimento do veículo com um determinado combustível se torna mais vantajoso do que quando abastecido com o outro?**

Já com esta questão, pretendíamos que os participantes notassem por meio de discussão, que o custo financeiro com o automóvel, depende do custo por quilometro rodado, ou seja, teremos vantagens com a troca de combustível quando o resultado da divisão do preço de um combustível pelo consumo do motor, diminuir.

Nesta fase da discussão, pretendíamos mostrar aos professores que o modelo encontrado trata-se de uma função matemática que contém três variáveis, o valor do combustível, o consumo do motor e a quilometragem rodada.

No entanto, não enfatizamos este fato pois o objetivo geral do nosso trabalho foi propor a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de função, para professores de matemática em “htpc”, deixaremos como proposta para futuras pesquisas a exploração de funções de três ou mais variáveis por modelagem matemática.

Com essa discussão, os professores notaram a dependência entre as grandezas, e em seguida iniciaram a discussão de como se determinar o domínio e a imagem da função encontrada.

Para determinar o domínio e imagem da função, propomos a análise de sua representação gráfica. Para construí-la, utilizamos o geogébra, pois este possibilita uma boa visualização dos pontos cartesianos que compõem a figura.

Como exemplo, se a função encontrada for $f(x) = \frac{2,4}{12}x \quad ou\ simplesmente \quad f(x) = 0{,}2x$ (sendo x a quilometragem rodada e f(x) o custo financeiro), teríamos a seguinte representação gráfica:

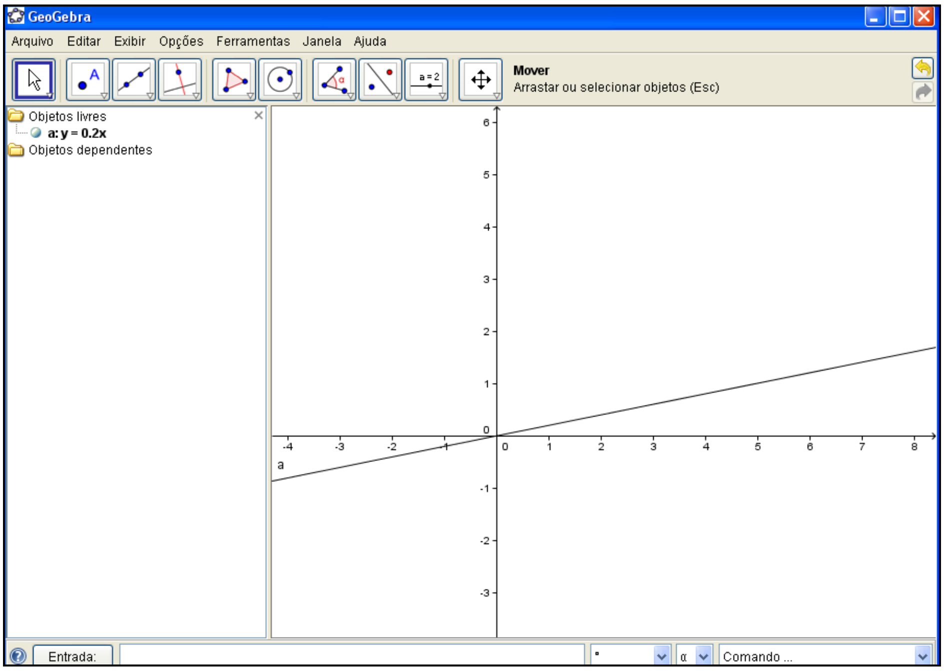


Figura 3: Representação gráfica do modelo.

Ao analisar a representação gráfica, esperávamos que os participantes percebessem que não podiam atribuir valores negativos para x, que neste caso representa a quilometragem rodada pelo veículo, desconsiderando então, os valores menores que zero para os eixos x e y, como segue:

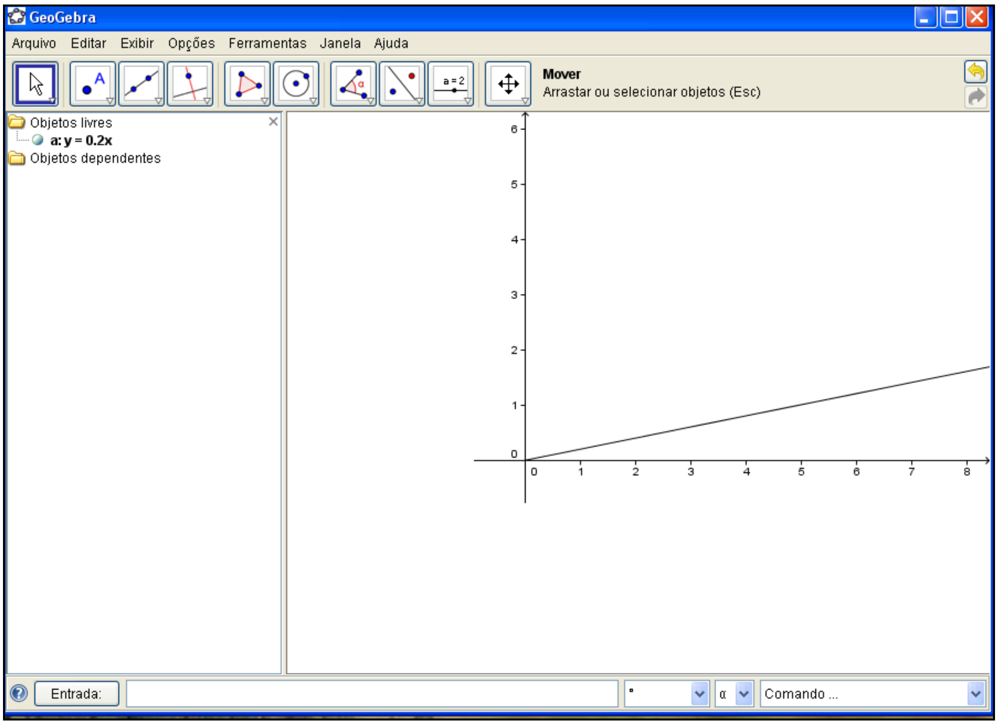


Figura 4: Representação gráfica do modelo.

Para construir a imagem anterior (sem a representação negativa da função), utilizamos a ferramenta “função” do geogébra, para isso digitamos na caixa de entrada o comando “função[0.2x, 0, 1000]”, ou seja, a representação gráfica ficou limitada entre 0 e 1000. Tal modificação, serviu para facilitar a visualização, da representação da função considerada como exemplo.

Após esta etapa, propomos uma situação problema, como segue:

Como ficaria o modelo encontrado se realizássemos uma viagem para o litoral, sabendo que além do combustível, teríamos que pagar um pedágio de R$ 17,80?

Antes de iniciarem a discussão, solicitamos aos professores que desconsiderassem a alteração do consumo dos motores, pois sabemos que quando os automóveis rodam em uma estrada, em alta velocidade, o rendimento aumenta.

O modelo a ser encontrado foi:

$$\text{Custo total com combustível} = \frac{\text{Valor do combustível}}{\text{Consumo do veículo}} \times \text{quilometragem percorrida} + 17{,}80$$

Após encontrado este modelo, solicitamos aos professores que o representassem graficamente com o auxílio do software geogébra.

Tomando como exemplo o modelo:

$f(x) = \frac{2,4}{12}x + 17,80$ ou simplesmente $f(x) = 0,2x + 17,80$ sua representação é:

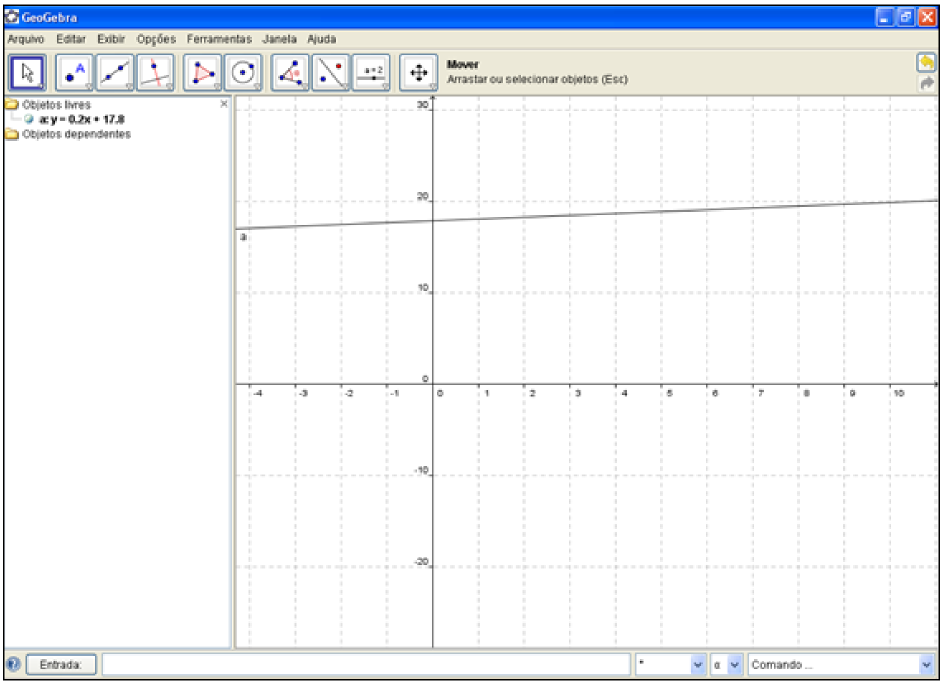


Figura 5: Representação gráfica do modelo.

Desconsiderando os valores negativos para a variável x, e utilizando o *paint* para alterar a figura, temos a seguinte representação:

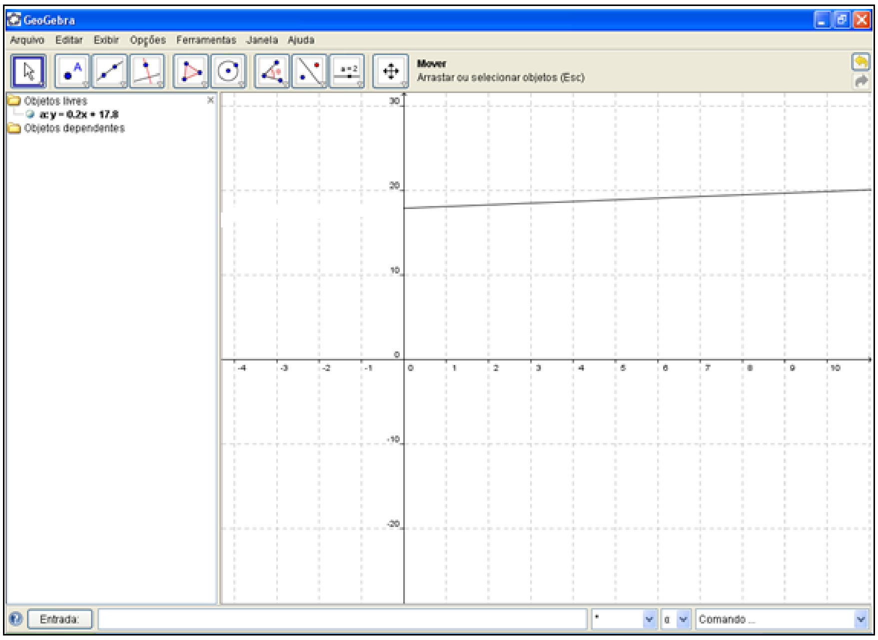


Figura 6: Representação gráfica do segundo modelo.

Solicitamos aos participantes, que comparassem as duas representações, que neste momento estavam representadas em um único plano.

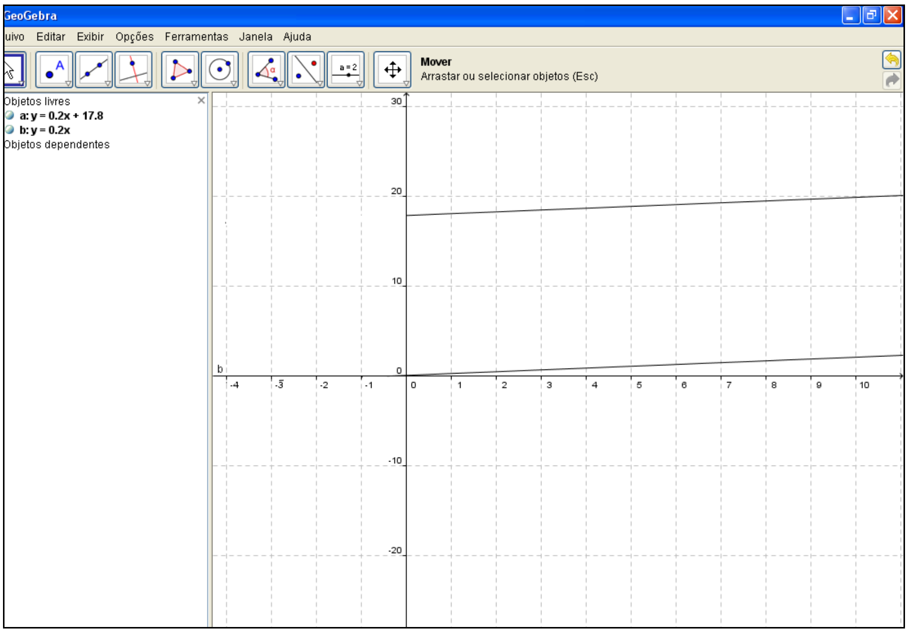


Figura 7: Representação gráfica dos dois modelos.

Como os participantes são professores de matemática, esperávamos que os mesmos notassem que as representações gráficas, são de funções de primeiro grau, sendo a primeira, de uma função linear e a segunda, uma função afim.

A definição dessas funções, segundo Flemming e Gonçalves (1992), em seu livro é:

Função de 1º grau é toda função que associa a cada número real x, o número real $ax + b$, $a \neq 0$. Os números reais *a* e *b* são chamados respectivamente, de coeficiente angular e linear.

Quando a>0 a função f(x) = ax + b é crescente, isto é, à medida que x cresce, f(x) também cresce.

Quando a<0 a função f(x) = ax +b é decrescente, isto é, à medida que x cresce, f(x) decresce.

O gráfico da função f(x) = ax + b é uma reta não paralela aos eixos não coordenados.

Quando o coeficiente linear b é igual a zero, a função é definida como linear, ou seja, sua representação gráfica passa pela origem do sistemas de eixos.

Quando o coeficiente linear b é diferente de zero, a função é definida como afim, ou seja, sua representação gráfica corta o eixo y no valor de b.

Entretanto, ressaltamos aqui que todos os participantes são professores de matemática, ou seja, já conheciam a definição apresentada anteriormente.

Sendo assim, estaremos mostrando ao professores que podemos utilizar situações do cotidiano para mostrar a diferença entre uma função linear e uma função afim.

Ainda por meio de discussão, definimos cada conjunto de valores que podemos atribuir para a quilometragem rodada e consumo financeiro. Em conjunto definimos qual variável representará o domínio, visando o objetivo do nosso problema, que é de encontrar uma relação matemática entre consumo financeiro e distância percorrida pelo veículo (km) com carros flexíveis.

O modelo encontrado, representa uma função, que por sinal é o objetivo principal da atividade.

Para validar o modelo encontrado, propomos a comparação dos resultados encontrados pela representação matemática com os dados observados ao longo de uma semana.

Com esta atividade, procuramos mostrar aos professore que podemos introduzir conceitos matemáticos de uma forma totalmente relacionada à realidade tornando-a mais eficaz e motivadora para os alunos.

3. APLICAÇÃO E RESULTADOS DA ATIVIDADE

A atividade foi desenvolvida em dois encontros, e utilizamos o horário de reunião pedagógica de uma escola estadual da Grande São Paulo.

No primeiro encontro participaram oito professores de matemática, no qual separamos em quatro duplas, denominadas A, B, C e D.

3.1 Primeiro encontro com os participantes

O trabalho foi realizado por quatro duplas de professores, que nomeamos aqui por A, B, C e D.

Iniciamos a atividade expondo aos professores, que o processo a ser desenvolvido fazia parte de uma dissertação para a obtenção do título de mestrado.

Tal informação, acrescentou ao grupo um certo grau de interesse, pelo fato de quatro dos oito participantes já serem mestres, sendo três de educação matemática e um de matemática pura.

Em seguida entregamos aos participantes o texto sobre a produção de etanol e carros flexíveis no Brasil (em anexo).

Ao término da leitura, iniciamos uma discussão sobre as vantagens da utilização do derivado da cana-de-açúcar (álcool combustível ou etanol), para posteriormente apresentarmos a nossa primeira questão.

Durante este processo, a dupla B questionou se haveria uma forma de verificar com qual combustível (gasolina ou álcool), seria mais vantajoso financeiramente no abastecimento de seus carros.

Tal indagação serviu de "*link*" para apresentarmos a nossa primeira questão:

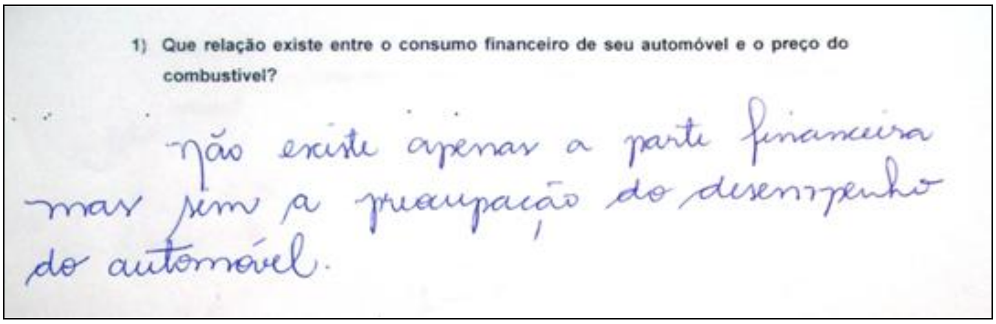
"Que relação existe entre o custo financeiro de seu automóvel e o preço do combustível?"

Figura 8: Professores participantes realizando a atividade.

Para responder a essa questão, as duplas iniciaram suas discussões, que por vezes nos envolviam e outras vezes ocorriam entre as demais. Estes debates foram gravados e posteriormente transcritos para análise. As discussões de cada dupla, não foram captadas pela gravação, pois os mesmos discutiam em tom baixo, no entanto a socialização entre os resultados foram gravados. Relatamos aqui os pontos principais da discussão.

A dupla A, ao responder a primeira questão relatou que:

"Não existe apenas a parte financeira, mas sim a preocupação do desempenho do automóvel".



1) Que relação existe entre o consumo financeiro de seu automóvel e o preço do combustível?

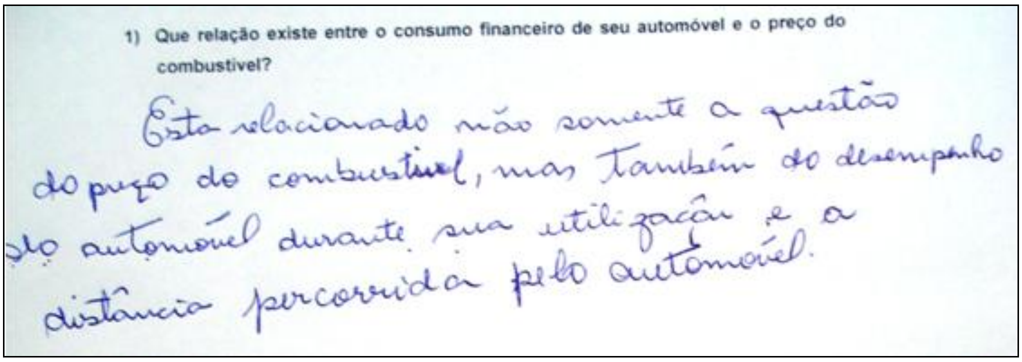
não existe apenas a parte financeira mas sim a preocupação do desempenho do automóvel.

Figura 9: Resposta 1ª questão – dupla A

Podemos notar com essa resposta que, esta dupla ao relatar sobre o desempenho do automóvel, já está relacionando a interferência da potência dos motores no consumo financeiro dos mesmos.

Já a dupla B, respondeu o seguinte:

“Está relacionado não somente a questão do preço do combustível, mas também do desempenho do automóvel durante sua utilização e a distância percorrida pelo automóvel”.


1) Que relação existe entre o consumo financeiro de seu automóvel e o preço do combustivel?

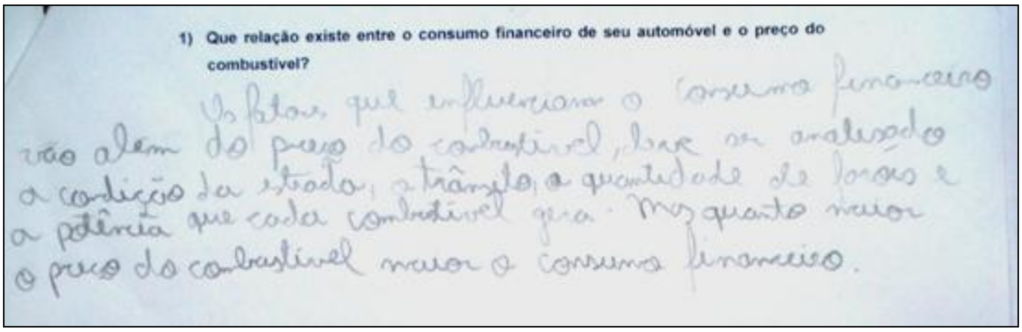
Esta relacionado não somente a questão do preço do combustível, mas também do desempenho do automóvel durante sua utilização e a distância percorrida pelo automóvel.

Figura 10: Resposta 1ª questão – dupla B

A dupla B percebeu que existem outros fatores que interferem no consumo financeiro do automóvel, ou seja, além de comentarem sobre o desempenho do veículo acrescentaram a distância percorrida.

A dupla C, relatou que:

“Os fatores que influenciam o consumo financeiro vão além do preço do combustível, deve ser analisado a condição da estrada, o trânsito, a quantidade de faróis e potência que cada combustível gera. Mas quanto maior o preço do combustível maior o consumo financeiro”.


1) Que relação existe entre o consumo financeiro de seu automóvel e o preço do combustivel?

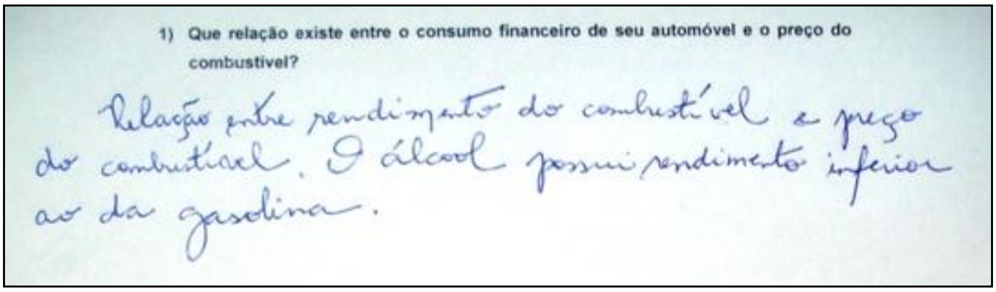
Os fatores que influenciam o consumo financeiro vão alem do preço do combustível, deve ser analisado a condição da estrada, o trânsito, a quantidade de farois e a potência que cada combustível gera. Mas quanto maior o preço do combustível maior o consumo financeiro.

Figura 11: Resposta 1ª questão – dupla C

A dupla C acrescentou outras variáveis que podem interferir diretamente no consumo financeiro, tais como, as condições da estrada, o número de paradas por semáforo fechado e o valor do combustível na bomba.

Por último, o grupo D respondeu:

“Relação entre rendimento do combustível e preço do combustível. O álcool possui rendimento inferior ao da gasolina”.


1) Que relação existe entre o consumo financeiro de seu automóvel e o preço do combustível?

Relação entre rendimento do combustível e preço do combustível. O álcool possui rendimento inferior ao da gasolina.

Figura 12: Resposta 1ª questão – dupla D

Já essa dupla não se preocupou com outros fatores que possam interferir nos gastos financeiros do automóvel, entretanto mencionaram a diferença de rendimento por motores quando abastecidos com o etanol (álcool combustível) e a gasolina.

Com essa primeira questão, percebemos por meio de discussão entre as duplas que, para se determinar a relação existente entre o consumo financeiro do automóvel e o valor do combustível nas bombas, é necessário acrescentar a discussão outras variáveis que podem interferir diretamente na resposta.

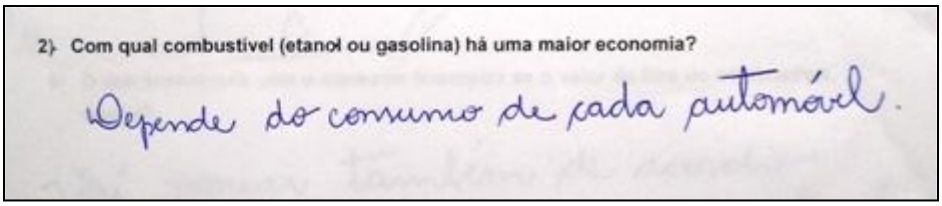
Sendo assim, notamos que o nosso objetivo foi alcançado, pois pretendíamos com esta questão, que os participantes notassem a relação de dependência entre a quilometragem rodada com o consumo de combustíveis.

Após esse debate, apresentamos a nossa segunda questão, como segue:

“Com qual combustível (etanol ou gasolina) há uma maior economia?”.

Ainda por meio de debates e registros, o grupo A respondeu:

“Depende do consumo de cada automóvel”.


2) Com qual combustível (etanol ou gasolina) há uma maior economia?

Depende do consumo de cada automóvel.

Figura 13: Resposta 2ª questão – dupla A

Com essa segunda questão, a dupla A relaciona a economia com o consumo do automóvel, não levando em consideração o preço do combustível, que é fator determinante para esse caso.

Já o dupla B respondeu a segunda questão da seguinte forma:

“Depende das condições que o carro se encontra, existem várias variáveis”.

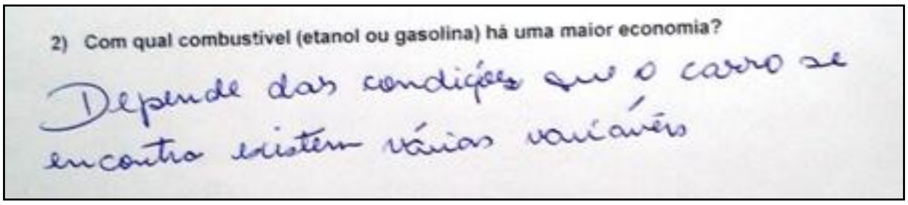

2) Com qual combustivel (etanol ou gasolina) há uma maior economia?
Depende das condições que o carro se encontra existem várias variáveis

Figura 14: Resposta 2ª questão – dupla B

Esta dupla percebe que existem muitas variáveis, entretanto não relata por escrito nenhuma delas.

A dupla C escreve que:

“Depende de algumas variáveis, a potência do motor, o quanto roda e onde roda, etc”.

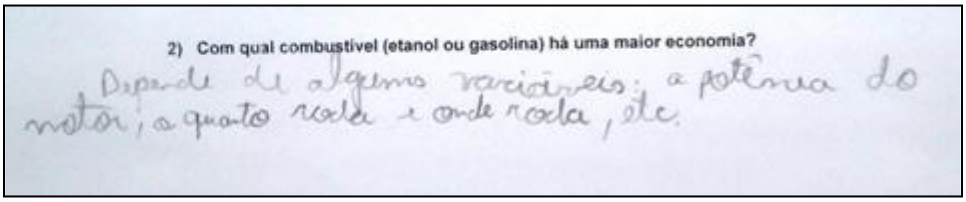
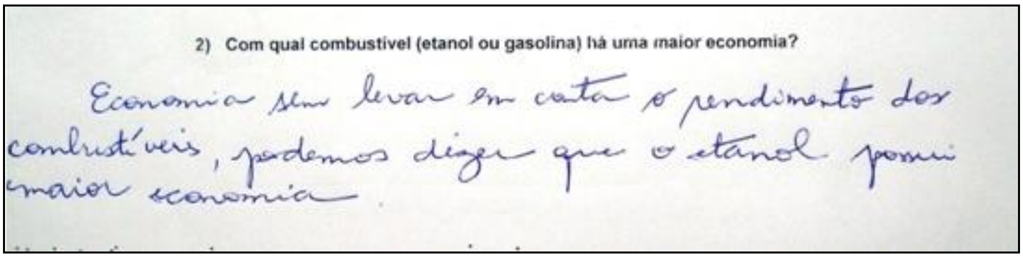

2) Com qual combustivel (etanol ou gasolina) há uma maior economia?
Depende de algumas variáveis: a potência do motor, o quanto roda e onde roda, etc.

Figura 15: Resposta 2ª questão – dupla C

Este grupo relaciona a economia com algumas variáveis, tais como potência do motor, a quilometragem rodada e o local de tráfego.

Já a dupla D, relata:

“Economia sem levar em conta o rendimento dos combustíveis, podemos dizer que o etanol possui maior economia”.


2) Com qual combustível (etanol ou gasolina) há uma maior economia?

Economia sem levar em conta o rendimento dos combustíveis, podemos dizer que o etanol possui maior economia

Figura 16: Resposta 2ª questão – dupla D

Com esta resposta, podemos notar que esta dupla não levou em consideração muitos fatores que interferem diretamente na economia, considerando apenas o preço do combustível, que na data em que foi realizado o trabalho, o etanol era inferior ao da gasolina.

Com esta segunda questão, após discussão entre os grupos sobre as variáveis que interferem no consumo financeiro de um automóvel, o professor mediador apresentou aos participantes a situação problema, baseado no segundo caso proposto por Barbosa.

“Como podemos determinar uma fórmula matemática que relacione a quilometragem rodada, consumo do veículo (etanol e gasolina) e o valor do combustível”.

Para melhor operacionar a solução, sugerimos a construção de uma tabela contendo o consumo financeiro de diversos motores (potências diferentes). Para isso, os participantes utilizaram o site de busca “Google”, encontrando os valores contidos na tabela 1.

Quando a primeira dupla encontrou os valores, socializaram com os demais. A tabela formada ficou da seguinte forma:

Tabela 3: rendimento por potência dos motores

	Motor 1.0	Motor 1.4	Motor 1.6	Motor 1.8	Motor 2.0
Álcool	7,5 km/l	7,4 km/l	6,8 km/l	6,4 km/l	5,7 km/l
Gasolina	10,4 km/l	10,2 km/l	8,6 km/l	7,8 km/l	6,8 km/l

Fonte: Dados obtidos pelos participantes da pesquisa.

Após a construção da tabela, apresentamos aos participantes a seguinte questão:

“Utilizando as informações contidas na tabela, como podemos determinar o custo financeiro com combustível (etanol e gasolina), a cada quilômetro rodado pelo veículo?”.

Para solucionar este problema, questionamos os professores sobre o valor do etanol e gasolina nos postos de combustíveis, e os mesmos responderam que dependia do local, entretanto em comum acordo estabeleceram um valor para cada um deles, custando o álcool R$ 1,40 e a gasolina R$ 2,40.

Em seguida, cada dupla iniciou uma discussão a fim de solucionar o problema. A dupla A sugeriu a escolha de um único tipo de motor para todas as duplas, para que pudessem comparar os resultados obtidos. As demais duplas aceitaram, e escolheram então o motor de potência 1.6.

Depois de alguns minutos a dupla D, se pronunciou, dizendo:

“No caso do álcool, basta dividir 6,8 por R$ 1,40”.

Ouvindo a dupla D, o grupo A acrescentou:

“Nós resolvemos por regra de três, e a razão encontrada foi de R$ 1,40 por 6,8”.

Automaticamente a dupla D, concordou e alterou seu resultado escrevendo “1,40/6,8 = 0,20”.

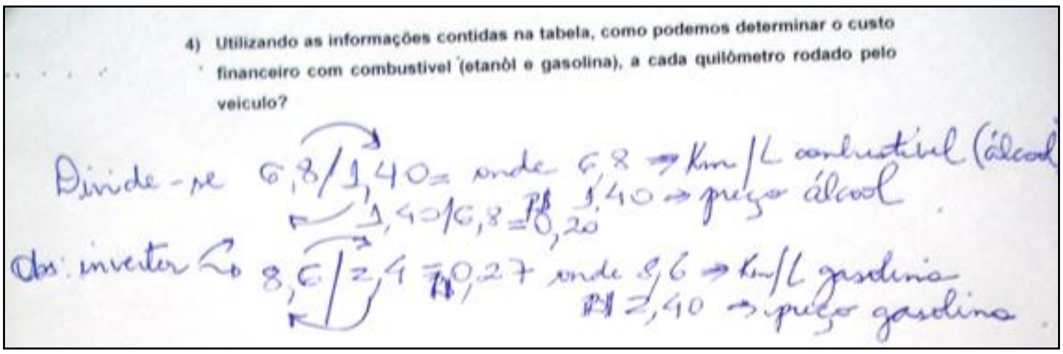


Figura 17: Resposta 4ª questão – dupla D

As demais duplas, concordaram com a discussão, e também resolveram da mesma forma.

Para o consumo com gasolina, os participantes somente alteraram os valores, encontrado a seguinte razão:

2,40/8,6 = 0,27

Sendo assim, os professores concluíram que o custo por cada quilômetro pode ser escrito da seguinte forma:

$$\textit{Custo por quilômetro} = \frac{\textit{Valor do combustível}}{\textit{Consumo do motor}}$$

Após essa discussão e suas conclusões, apresentamos mais uma questão aos participantes.

“O que aconteceria com o custo financeiro se o valor do litro do combustível mudasse?”.

Com esta questão todas as duplas responderam a mesma coisa, ou seja, relataram que se o valor do combustível mudar, o custo também mudará proporcionalmente.

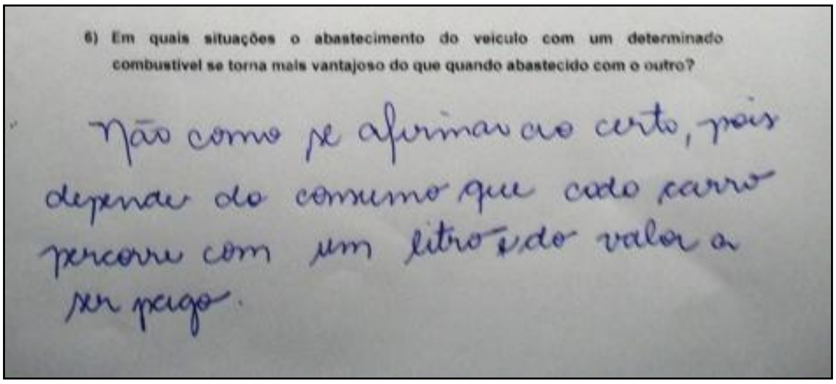
Entretanto, não discutiram sobre a mudança de vantagem de se utilizar um combustível ou outro, devido a mudança dos preços.

Sendo assim, apresentamos outra questão aos grupos, como segue:

“Em quais situações o abastecimento do veículo com um determinado combustível se torna mais vantajoso do que quando abastecido com outro?”.

A dupla A, após conversa, escreveu:

“Não como se afirmar ao certo, pois depende do consumo que cada carro percorre com um litro e do valor a ser pago”.


6) Em quais situações o abastecimento do veiculo com um determinado combustivel se torna mais vantajoso do que quando abastecido com o outro?

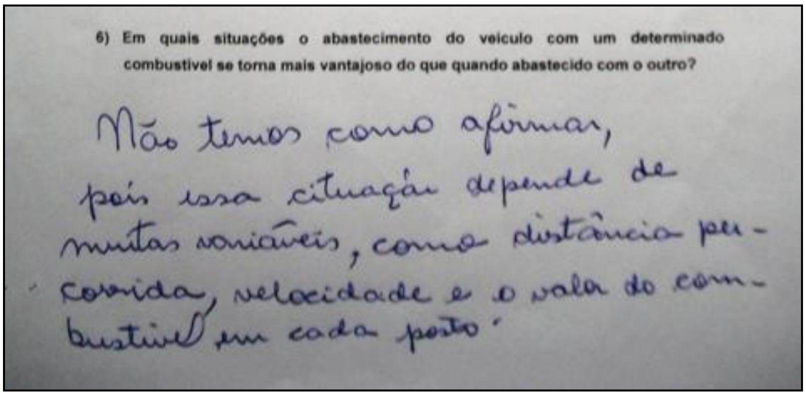
Não como se afirmar ao certo, pois depende do consumo que cada carro percorre com um litro e do valor a ser pago.

Figura 18: Resposta 6ª questão – dupla A

Inicialmente esse grupo não percebeu, que por meio da razão encontrada anteriormente (custo por quilômetro rodado), podemos verificar a vantagem financeira, mas após ouvirem o grupo D, mudaram sua opinião.

Já a dupla B, incluiu em sua resposta algumas variáveis.

“Não temos como afirmar, pois essa situação depende de muitas variáveis, como distância percorrida, velocidade e o valor do combustível em cada posto”.

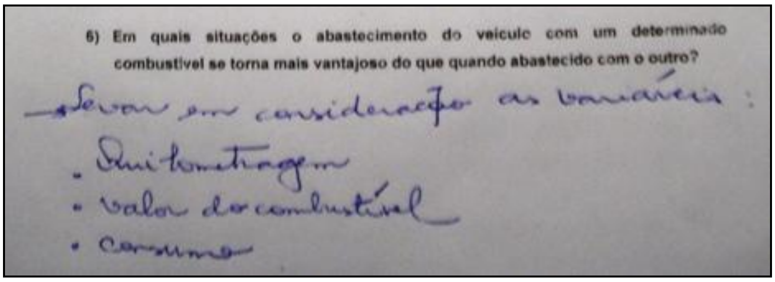

6) Em quais situações o abastecimento do veiculo com um determinado combustivel se torna mais vantajoso do que quando abastecido com o outro?

Não temos como afirmar, pois essa cituação depende de muitas variáveis, como distância percorrida, velocidade e o valor do combustível em cada posto.

Figura 19: Resposta 6ª questão – dupla B

O grupo D, relatou que a resposta a essa questão depende de alguns fatores tais como:

“Quilometragem rodada, valor do combustível e o consumo do veículo”.


6) Em quais situações o abastecimento do veiculo com um determinado combustivel se torna mais vantajoso do que quando abastecido com o outro?

Levar em consideração as variáveis:

- Quilometragem
- valor do combustível
- consumo

Figura 20: Resposta 6ª questão – dupla D

Após esse debate, apresentamos uma última questão para o primeiro encontro.

“Como determinar o custo financeiro com combustível ao utilizar o veículo, partindo da razão encontrada?”.

Ao receberem esta questão, todos os grupos disseram que bastava multiplicar a razão encontrada pela quilometragem rodada.

Com essa questão, os professores participantes construíram a fórmula matemática que relaciona a quilometragem rodada, consumo do veículo (etanol e gasolina) e o valor do combustível.

$$\textit{Custo total com combustível} = \frac{\textit{Valor do combustível}}{\textit{Consumo do veículo}} \times \textit{quilometragem percorrida}$$

Para facilitar a identificação das variáveis que constituem a fórmula encontrada, solicitamos aos participantes que escolhessem letras do nosso alfabeto para representá-las, com isso, uniformizamos o modelo encontrado.

Lembrando que escrevemos, fórmulas e modelos matemáticos como sendo sinônimos.

As letras escolhidas foram:

c – Custo total com combustível

v – Valor do combustível

s – Consumo do veículo

k – Quilometragem rodada

Sendo assim, a fórmula passou a ser:

$$C = \frac{V}{S} \cdot K$$

Com a padronização do modelo encontrado, encerramos o primeiro encontro, que durou duas horas e doze minutos.

3.2 Segundo encontro com os participantes

Iniciamos o segundo encontro retomando a fórmula encontrada, que relaciona o custo total com combustível com o preço do litro de combustível (etanol e gasolina), o consumo do veículo e a quilometragem rodada.

Para verificar a relação entre as variáveis, solicitamos aos participantes que considerassem o valor do litro do combustível e o consumo do carro constante, e substituíssem valores para a quilometragem rodada, a fim de encontrar o custo total com combustível.

Neste momento um integrante da dupla C, questionou que tipo de motor e combustível seria utilizado para os cálculos.

Em comum acordo entre os participantes, foi escolhido o motor 1.6 abastecido com etanol. Essa escolha deu-se pelo fato de ser a primeira fórmula encontrada por eles.

$$C = 0{,}20 \cdot K$$

Para padronizar os cálculos, o professor mediador solicitou que os integrantes substituíssem na fórmula as seguintes quilometragens: 50km e 150km.

Os participantes encontraram como respostas para o custo os respectivos valores: R$10,00 e R$30,00.

Após os cálculos, ainda considerando a razão constante (0,20) pedimos aos participantes que realizassem a operação inversa, ou seja, atribuíssem os valores, R$50,00 e R$70,00 para o custo de modo a encontrar a quilometragem rodada. Os valores encontrados foram, 250km e 350km respectivamente.

Em seguida, verbalmente, perguntamos aos professores o que eles poderiam concluir, com a substituição de valores para a variável custo.

Um integrante da dupla D se pronunciou dizendo:

“O valor encontrado depende do objetivo do problema”.

Os demais integrantes concordaram com a intervenção do colega, afirmando que a dependência entre as variáveis está relacionada com o objetivo do problema.

Como afirmou o integrante da dupla A.

“Se quisermos encontrar o custo, o valor encontrado depende da quilometragem, se for o inverso, a quilometragem depende do custo”.

Sendo assim, podemos concluir que os professores perceberam a covariação entre as variáveis, ou seja, a dependência entre elas é mútua.

Após essa discussão, solicitamos aos participantes que representassem graficamente a fórmula C = 0,20 k no software geogébra. Para isso, cada dupla utilizou um computador do laboratório de informática da escola. Local este onde toda a atividade está sendo desenvolvida.

A representação gráfica encontrada:

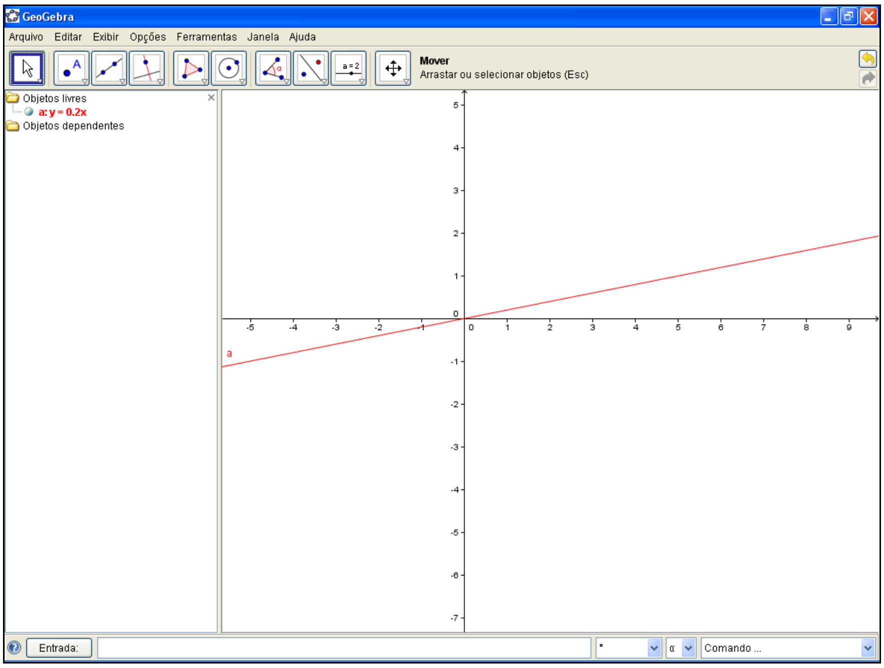


Figura 21: Representação gráfica do primeiro modelo encontrado.

Após a construção, realizamos a pergunta:

“Considerando a nossa situação problema, podemos considerar toda a representação gráfica obtida como resposta?”.

Após alguns minutos, a dupla D se pronunciou dizendo:

“Não podemos assumir valores negativos”.

Perguntamos a eles:

“Em quais situações não podemos assumir tais valores?”.

Um integrante da dupla D respondeu:

“Se estamos andando com o carro, não podemos ter custo negativo, deverá ser sempre positivo”.

Notamos com esta resposta, que ouve uma preocupação somente com a variável custo, entretanto não questionaram sobre os valores negativos para quilometragem. Entendemos que essa percepção seja pelo fato de que o objetivo do problema é relacionar o custo do combustível com as outras variáveis, e não o contrário.

Com essa discussão, todas as duplas concluíram que deveriam desconsiderar a parte da representação gráfica que passa pelo terceiro quadrante do sistema de eixos.

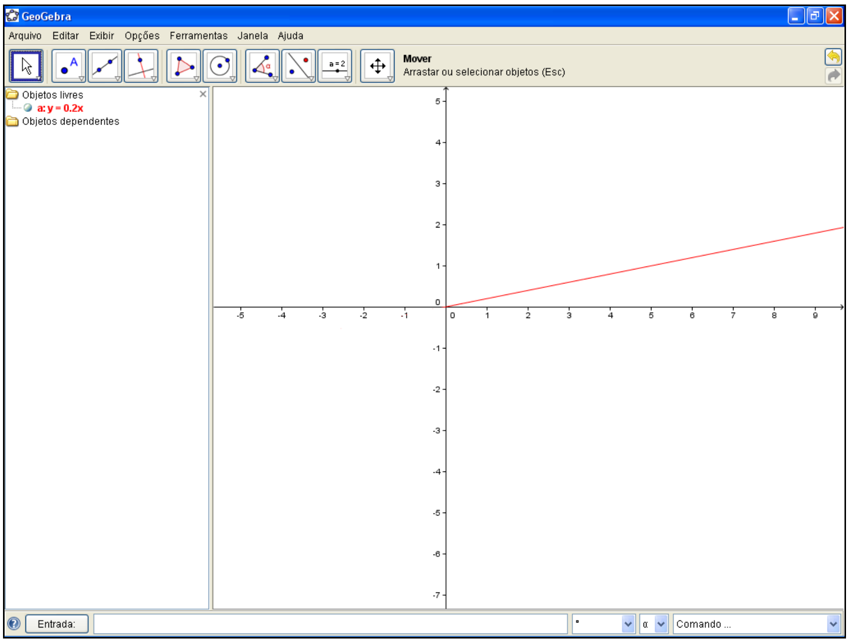


Figura 22: Representação gráfica do primeiro modelo encontrado.

Partindo dessa observação, podemos iniciar a construção da concepção de domínio e imagem do modelo funcional encontrado.

Mostramos aos professores que a escolha do domínio e imagem depende do objetivo do problema proposto. No nosso caso, os valores da quilometragem rodada formam o domínio, e o custo com combustível a imagem.

Em discussão, os professores concluíram que a fórmula encontrada trata-se de uma função linear, onde sua representação gráfica corta a origem do sistema de eixos, e possui a forma: f(x) = ax.

Em seguida apresentamos aos professores por escrito a questão:

“Como ficaria o modelo encontrado se realizássemos uma viagem para o litoral, sabendo que além do combustível, teríamos que pagar um pedágio de R$17,80?”.

Após alguns instantes as duplas responderam:

Dupla A.

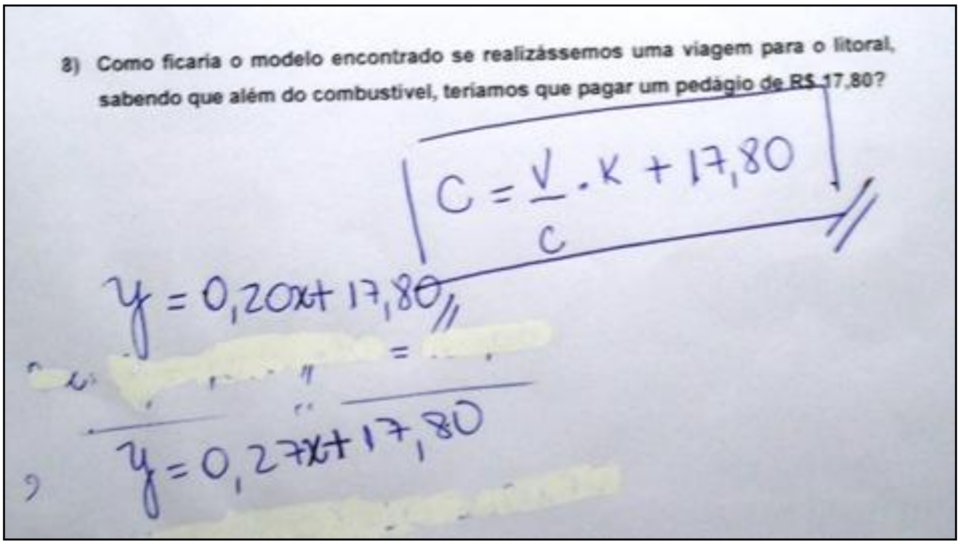


Figura 23: Resposta 8ª questão – dupla A

Dupla B.

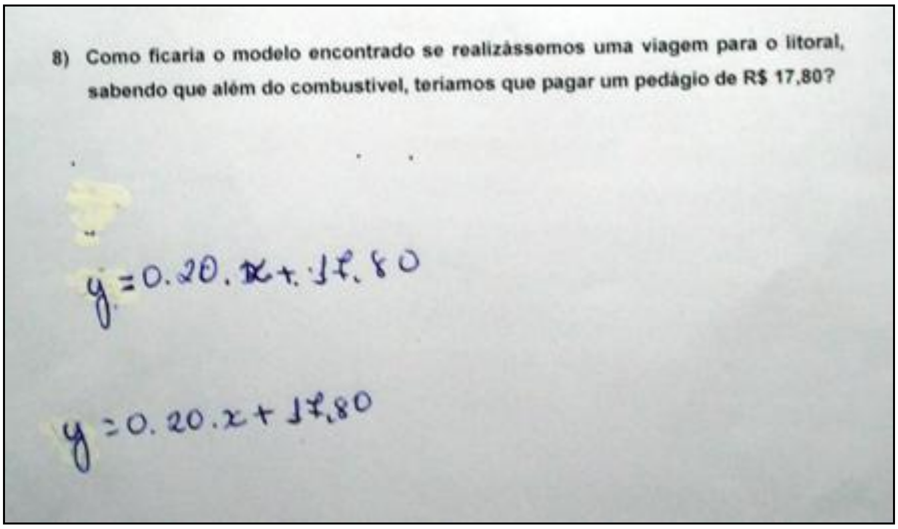


Figura 24: Resposta 8ª questão – dupla B

A dupla C apenas concordou com os demais, não escrevendo sua resposta.

Dupla D.

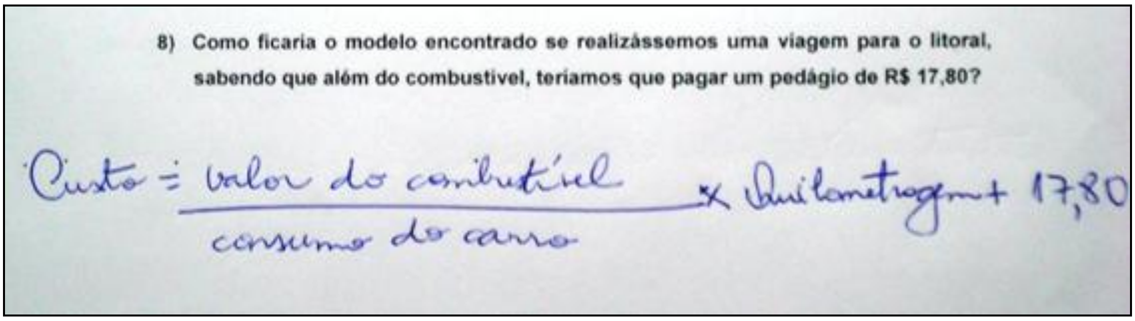


Figura 25: Resposta 8ª questão – dupla D.

Podemos notar que, todas as duplas perceberam que bastava adicionar o valor da quilometragem ao modelo encontrado.

Na sequência, solicitamos aos participantes que construíssem a representação gráfica do novo modelo encontrado no mesmo sistema de eixos da construção anterior, para que realizassem a comparação entre elas.

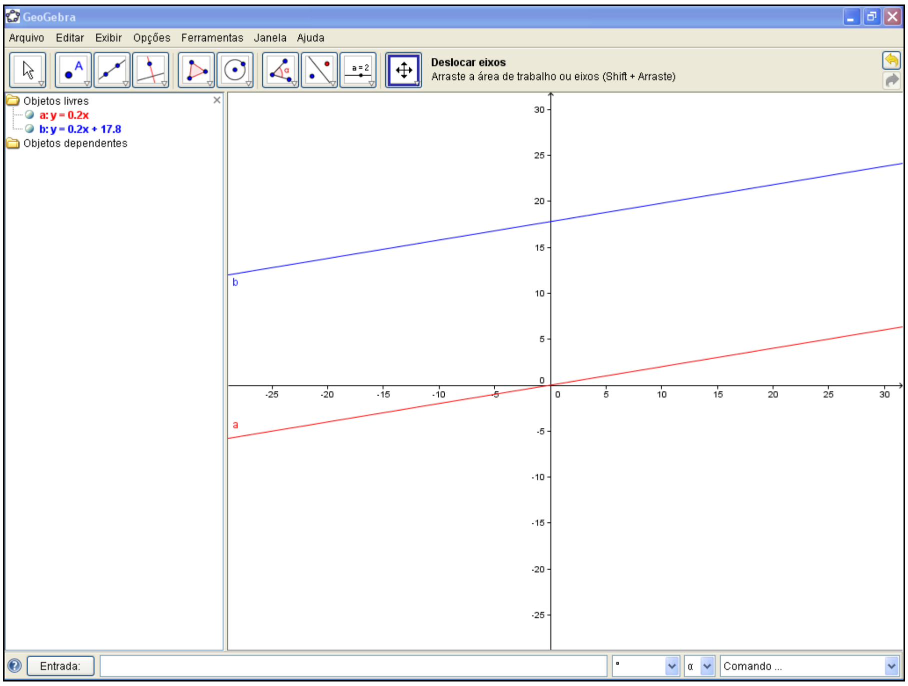


Figura 26: Representação gráfica do segundo modelo encontrado.

Desconsiderando os valores negativos para o custo e quilometragem, a representação passou a ser:

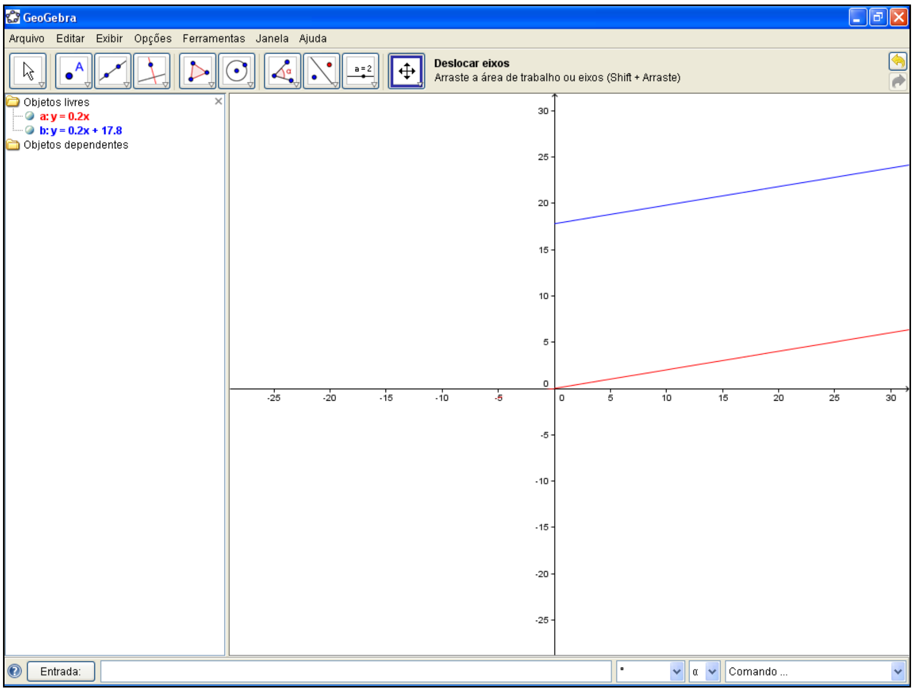


Figura 27: Representação gráfica dos modelos encontrados.

Ao comparar as representações, os professores logo perceberam que o novo modelo encontrado é um exemplo de função afim, não linear, pelo fato de seu gráfico não passar pela origem do sistema de eixos e também por sua representação algébrica ser do tipo f(x) = ax +b.

No próximo capítulo, apresentaremos as entrevistas realizadas com todos os participantes, a fim de verificar de que forma eles se apropriaram da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE ENTREVISTAS REALIZADAS COM OS PROFESSORES PARTICIPANTES.

Para verificar se os professores se apropriaram da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, realizamos entrevistas com os professores participantes. Para a estruturação do instrumento e à análise dos dados obtidos utilizamos a pesquisa desenvolvida por Silveira (2006) intitulada "Modelagem Matemática em educação no Brasil: Entendendo o universo de teses e dissertações", pesquisa esta que sintetiza 65 trabalhos sobre modelagem matemática no Brasil (54 dissertações e 11 teses), a fim de realizar uma análise sobre elas.

Os trabalhos analizados por este autor, tratam a modelagem sobre diversas abordagens, entre elas: a Modelagem Matemática e o currículo; a Modelagem Matemática e a Educação Ambiental; a Modelagem Matemática no Ensino Fundamental, Médio ou Superior; a Modelagem Matemática e a Educação Matemática Crítica; a Modelagem Matemática e as tecnologias; a Modelagem Matemática e os processos de ensino e aprendizagem.

No entanto, entre os 65, selecionou 16 trabalhos que tratam a Modelagem Matemática e a formação de professores, isso por acreditar na importância de discutir as contribuições que essa tendência metodológica da Educação Matemática tem oferecido no sentido de auxiliar os atuais e os futuros professores para a sua prática profissional, e como estes têm recebido essa formação.

Escolhemos o trabalho de Silveira, pois suas conclusões contribuíram para a realização de entrevistas com os professores participantes de nosso estudo. As pesquisas analisadas pelo autor apontam que tanto aquelas que se referem à formação inicial quanto às referentes à formação continuada, indicam ao mesmo tempo entusiasmo e certa insegurança frente ao uso da modelagem na prática dos docentes. As questões apresentadas aos sujeitos de nossa pesquisa nos possibilitaram também identificar pontos positivos e negativos quando à adoção do processo de modelagem matemática, como ferramenta de ensino e aprendizagem; no entanto, foi possível formular uma última pergunta com a qual pudemos constatar a disposição dos professores em utilizarem tal estratégia em suas práticas docentes.

Para ressaltar a contribuição de Silveira para nossas entrevistas, apresentamos uma síntese de cada um dos trabalhos analisados por ele.

Tabela 4: Trabalhos analisados por Silveira.

Autor (ano)	Título	Status
Dias (2005)	Uma experiência com modelagem matemática na formação continuada de professores.	Dissertação
Fidelis (2005)	Contribuições da modelagem matemática para o pensamento reflexivo: um estudo.	Dissertação
Jacobini (2004)	A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula.	Tese
Costa (2003)	As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental.	Dissertação
Luz (2003)	Educação a distância e educação matemática: contribuições mútuas no contexto teóricometodológico.	Tese
Stahl (2003)	O ambiente e a modelagem matemática no ensino de cálculo numérico.	Tese
Roma (2002)	O curso de especialização em educação matemática da PUC-Campinas: reflexos na prática pedagógica dos egressos.	Dissetação
Barbosa (2001)	Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores.	Tese
Caldeira (1998)	Educação matemática e ambiental: um contexto de mudança.	Tese
Floriani (1997)	A educação matemática no processo de formação do professor das séries iniciais.	Dissertação
Gavanski (1995)	Uma experiência de estágio supervisionado norteado pela modelagem matemática: indícios para uma ação inovadora.	Dissertação
Martinello (1994)	Modelação matemática, uma alternativa para o ensino da matemática no primeiro grau.	Dissertação

Burak (1992)	Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem.	Tese
Anastácio (1989)	Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática.	Dissertação
Gazzeta (1989)	A modelagem como estratégia de aprendizagem da matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores.	Dissertação
Burak (1987)	Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série.	Dissertação

Fonte: (SILVEIRA, 2007, p.81)

Segundo o autor, a divisão quanto ao tipo de formação discutida em cada pesquisa constou de 16 trabalhos, distribuídos da seguinte maneira:

- Formação inicial: 6 trabalhos, sendo 4 teses e 2 dissertações. Todos os trabalhos foram desenvolvidos com alunos de licenciatura em Matemática.

- Formação continuada: 7 trabalhos, sendo 2 teses e 5 dissertações. Os cursos foram desenvolvidos basicamente com professores de 1° e 2º grau.

Ainda segundo ele, os outros 3 não se assemelham aos demais, pois não relataram atividades ou cursos de formação de professores, e serão descritos na integra conforme Silveira relata em seu trabalho:

> "O primeiro, Costa (2003), analisou e estudou os instrumentos disponíveis para o professor ensinar combinatória no Ensino Fundamental por processo de modelagem, bem como seus conhecimentos e concepções sobre o objeto matemático citado. Com os dados obtidos em sua pesquisa, ele constatou dificuldades por parte dos professores em estabelecer um procedimento sistemático, justificar as respostas, usar diferentes formas de representações e também dificuldades para reconhecer, na formação dos agrupamentos, se a ordem é relevante ou não. Por fim, o autor que acredita que sua dissertação deve contribuir para que se perceba o atual despreparo dos professores de Ensino Fundamental e Médio para ensinar matemática, e a sugere como base para elaboração de cursos de aperfeiçoamento ou formação continuada centrada nos conteúdos do Ensino Fundamental e

> Médio, como probabilidade, trigonometria, matrizes, geometria analítica ou funções.
> Ele ainda ressalta a necessidade de uma política de formação continuada, e de maior adequação dos cursos de formação inicial (licenciaturas) às novas propostas metodológicas para a aprendizagem de um conceito: o uso da modelagem, especialmente do domínio pseudo-concreto18, para introduzir o conceito, já que esta proposta de ensino vem alcançando resultados positivos, segundo alguns pesquisadores relacionados por ele, referindo-se ao ensino de probabilidades e ao pensamento combinatório." (SILVEIRA, 2007, p.83)

Em relação ao segundo trabalho que não se enquadra na formação inicial de professores e nem na formação continuada, o autor o sintetiza da seguinte maneira:

> No segundo trabalho, Floriani (2003) chega a relatar sobre formação inicial e continuada de professores formados e/ou provenientes de um curso de pedagogia. Porém, na parte da dissertação que descreve sobre a Modelação Matemática como método da Educação Matemática, ele não relata nenhum tipo de curso de formação, mas apresenta um manual pedagógico, elaborado por ele em conjunto com outra pesquisadora, dedicado a esta formação. Floriani (2003, p.112) afirma que pretende atingir, por meio desse material, também os professores que, por um ou outro motivo, não são capacitados de outras formas que não por intermédio desses manuais. Sugere ainda que o professor crie e recrie as propostas dadas, buscando a extrapolação do material (Ibidem, p. 117). Não há, portanto, relato sobre contato com grupos de professores com vista à sua formação, seja ela inicial ou continuada, no âmbito da Modelagem ou da Modelação Matemática.
> (SILVEIRA, 2007, p.84)

Referindo-se ao terceiro trabalho, o autor escreve:

> No último dos três trabalhos, Roma (2003) relata sua busca, por meio de questionários enviados aos ex-alunos do Curso de Especialização em Educação Matemática da PUC-Campinas, intitulado "A Etno/Modelagem Matemática Aplicada ao Ensino Fundamental e Médio", por indicadores que demonstrem a utilização ou não da estratégia metodológica da Modelagem. Ele ainda procura analisar as implicações de tal prática pedagógica, nos casos em que os professores relatam que estão ou a estiveram utilizando, em termos de: motivação dos alunos, envolvimento com o projeto, dificuldades encontradas manifestação/reação da escola e dos pais. Esta dissertação, embora não relate o desenvolvimento de um curso oferecido pelo pesquisador, relata um curso que teve um forte envolvimento com a Modelagem Matemática.
> (SILVEIRA, 2007, p.85)

Os três trabalhos mencionados não discutem as possibilidades das atividades desenvolvidas influenciarem na prática profissional dos docentes, por este motivo os diferencia dos outros 13 trabalhos analisados.

O autor inicialmente descreve os trabalhos que tratam da formação inicial de professores, sintetizando e analisando cada um deles. Nesta linha, ele escreve que Barbosa (2001, apud SILVEIRA, 2007, p.88), em sua pesquisa, desenvolveu, com alunos da Licenciatura em Matemática da UNESP – Rio Claro e uma professora já formada, o curso “Modelagem e Educação Matemática”, na condição de curso de extensão e apoiando-se em dois pilares:

1. Indagar/investigar situações com referência na realidade através da Modelagem;
2. Reflexão deste ambiente do ponto de vista da prática de sala de aula (p. 102).

Ainda segundo Silveira, ele programou seis atividades para este curso. São elas:

1. Estudo de situações-problema;
2. Natureza e método de Modelagem;
3. Modelagem “empírica”;
4. Casos de Modelagem;
5. Casos de sala de aula;
6. Projeto de Modelagem e Ensino (Ibidem, p. 106).

Em relação a este trabalho, Silveira escreve que Barbosa referindo-se aos dados coletados nos cursos desenvolvidos com os futuros professores, diz que as futuras professoras, sujeitos da sua pesquisa, demonstram simpatia à utilização da Modelagem no currículo escolar, deixando transparecer sua aceitação quanto a presença desse ambiente de aprendizagem nas aulas de matemática. “Entretanto, as futuras professoras manifestaram reticência, cautela e/ou insegurança em relação à Modelagem em suas futuras práticas de ensino” (p.98).

Com este trabalho Barbosa, teve como objetivo proporcionar aos participantes “conhecimentos a respeito desse ambiente de aprendizagem”.

Ainda sobre modelagem na formação inicial, Silveira descreve o curso oferecido por Luz (2003) que foi realizado em ambiente virtual, onde foi discutido os seguintes temas:

- Tendências em Educação Matemática: Educação Matemática Crítica, Etnomatemática, uso de computadores, escrita na matemática e Modelagem Matemática.

- Textos de fundamentação teórica.

O autor escreve que após, esta fase, ainda por ambiente virtual, os participantes desenvolveram algumas atividades práticas de Modelagem Matemática.

Silveira relata que Luz em seu trabalho, descreve algumas dificuldades dos licenciandos em relação ao seu curso. Ela observou “uma grande insegurança por parte dos alunos e um temor de estarem publicando algo ‘errado’ que ficaria exposto ao professor e a todos os colegas de curso” (p. 102).

Com esta pesquisa, Luz objetivou “apresentar a modelagem matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem da matemática em sala de aula”.

Ainda na formação inicial, Silveira escreve que Fidelis (2005), em sua pesquisa de mestrado, acompanha as aulas de “Introdução à Modelagem Matemática” ministradas pela prof.ª Lourdes M. W. de Almeida, sua orientadora na UEL. Segundo Silveira, ele coletou dados referentes a três alunos do curso, seus sujeitos de pesquisa, chegando a algumas conclusões:

Os três mostraram alguma disposição em desenvolver atividades de Modelagem Matemática em suas classes, inclusive um deles revela que já é professor e já utilizou tal estratégia de ensino, e parece estar bastante interessado em continuar esse trabalho.

As demais fazem algumas observações. Uma delas demonstra, segundo o autor, preocupação com tais trabalhos, por acreditar que levam um tempo maior do que as aulas normais, mostrando sinais de preocupação com o cumprimento do conteúdo pré-estabelecido.

A outra se preocupa com as dificuldades dos alunos quanto aos detalhes envolvidos no processo de Modelagem. Esta ainda não demonstra uma posição definida quanto à utilização da Modelagem Matemática nas suas futuras aulas.

Gavanski (1995) propôs que os seus alunos de estágio supervisionado oferecessem um minicurso de Modelagem Matemática aos alunos de uma 7ª série de uma escola pública. Os licenciandos foram se revezando, em duplas, de modo a orientar as atividades dos alunos. A pesquisadora relata que, da metade do curso em diante, os licenciandos, embora participassem dos encontros, não demonstravam mais a mesma motivação ou disposição do início. Porém, a autora acredita que outras ações semelhantes a esta poderão ser desencadeadas a partir do momento que os alunos se tornarem professores.

Ainda tratando de formação inicial, Silveira escreve que Jacobini (2004) desenvolveu um projeto com licenciandos em Matemática em uma disciplina específica; porém, o projeto não ocorreu no âmbito da disciplina, contando com a participação de apenas quatro alunos. O projeto desenvolvido foi “Pesquisa de Intenção de Votos dos Estudantes da PUC-Campinas”, no qual os alunos desenvolveram conteúdos relacionados à Estatística. A intenção do pesquisador foi analisar as possibilidades de crescimento político dos estudantes, quando a modelagem matemática é adotada como estratégia de ensino aprendizagem.

Por último, Stahl (2003), relata a experiência do desenvolvimento de um curso de Cálculo Numérico com atividades de modelagem em uma turma de Licenciatura em Matemática. Segundo ele, “a cada novo conteúdo a classe é provocada pelo professor de modo a gerar um tema/problema de origem ambiental” (p. 87). Ele ainda utiliza softwares matemáticos para plotar gráficos.

Já em relação aos trabalhos referentes a formação continuada, Silveira escreve que Burak (1987) e Anastácio (1990) desenvolveram cursos com professores de 5ª série.

Ainda segundo ele, Burak (1987) trabalhou, principalmente, a construção da maquete de uma casa e Anastácio (1990) fez primeiramente uma discussão teórica com os professores cursistas, na qual abordaram a necessidade de procurar alternativas para o ensino de Matemática. Depois disso, discutiram quatro modelos apresentados em um texto, partindo das seguintes questões: o que você poderia aprender de Modelagem Matemática no texto estudado? Que características apresenta o trabalho com Modelagem Matemática?

A partir daí os grupos escolheram temas, coletaram dados e desenvolveram modelos.

Dias (2005) desenvolveu um curso em colaboração com a sua orientadora, Prof.ª Lourdes M. W. de Almeida. A pesquisadora enumera três condições que devem ser atendidas por um programa de formação que pretende envolver o professor com a Modelagem Matemática. São eles:

- “aprender” sobre a Modelagem Matemática;
- “aprender” por meio da Modelagem Matemática;
- “ensinar” usando Modelagem Matemática (p. 90).

Com o curso de 35 horas que ofereceu, procurou analisar como os professores concebem a Modelagem Matemática enquanto alternativa pedagógica, procurando envolvê-los em atividades de Modelagem e incentivando-os a envolverem também os seus alunos nestes ambientes.

Ela afirma ainda que tinha o interesse de teorizar sobre a Modelagem Matemática objetivando uma "compreensão acerca dessa alternativa de ensino, além de proporcionar a eles uma reflexão sobre a atividade de Modelagem do ponto de vista prático da sala de aula". Foi desenvolvido um conjunto de atividades de Modelagem Matemática. A pesquisadora ainda abriu espaço para que os professores relatassem experiências acerca das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em suas classes.

Silveira escreve que Martinello (1995) relata alguns cursos oferecidos em conjunto com a Prof.ª Maria Salett Biembengut para professores de 5ª a 8ª séries. Os professores começam o curso já com uma visita a uma fábrica de palitos de picolé, onde coletam dados e tentam formalizar situações-problema, até que a Prof.ª Maria Salett Biembengut, depois de debater com eles, sugere e encontra modelos matemáticos em cada situação pesquisada. Silveira escreve ainda que Martinello expõe que na segunda etapa, a concepção teórica de Modelação Matemática continua a ser utilizada, porém não comenta sobre quando essa concepção começou a ser trabalhada. Nessa etapa ainda são elaboradas situações-problema reais, e soluções matemáticas são buscadas. A pesquisadora ainda relata uma terceira etapa e um curso de aperfeiçoamento (p.91).

Silveira relata que o curso oferecido pela autora, teve os seguintes objetivos:

- Capacitar os professores para mudanças profundas na concepção da prática educativa;
- Incentivar e capacitar os professores para uma ação transformadora e criativa;
- Libertar os professores de alguns mitos, com respeito à aprendizagem da Matemática, tais como: excessivo rigor, encadeamento de assuntos, métodos de ensino, avaliação;

Por último, em relação ao trabalho de Gazzetta (1989), Silveira escreve que a autora relata o desenvolvimento de "cursos de reciclagem", que tiveram a duração de 30 a 40 horas. Segundo ela tais cursos tiveram o objetivo de “simplesmente conscientizar os professores para a necessidade de buscar outras alternativas para a aprendizagem da matemática”.

Silveira escreve que os principais pontos negativos explicitados pelos professores participantes, para justificar a não adoção da Modelagem Matemática nas suas práticas de sala de aula, ou suas dúvidas sobre a mesma, descritos em vários trabalhos pelos pesquisadores, foram:

- Insegurança pela possibilidade de não ter domínio sobre o que pode acontecer (ANASTÁCIO, 1990; BARBOSA, 2001; BURAK, 1987).
- Preocupação em cumprir o conteúdo (ANASTÁCIO, 1990; BURAK, 1987; BURAK, 1992; DIAS, 2005; FIDELIS, 2005; LUZ, 2003; MARTINELLO, 1994).
- Ausência de colaboração da parte administrativa da escola ou dos pais (ANASTÁCIO, 1990; BARBOSA, 2001; ROMA, 2003; MARTINELLO, 1994; BURAK, 1992).
- Visão da realidade sob a ótica da matemática (ANASTÁCIO, 1990).
- Preocupação com a reação dos pais (BARBOSA, 2001; BURAK, 1992).
- Grande quantidade de alunos por turma (ANASTÁCIO, 1990; BARBOSA, 2001).
- Falta de tempo ou preocupação com gasto excessivo deste (BARBOSA, 2001; DIAS, 2005; FIDELIS, 2005; ROMA, 2003).
- Insegurança diante do novo (BURAK, 1987; BURAK, 1992; CALDEIRA, 1998; DIAS, 2005; GAVANSKI, 1995; GAZZETTA, 1987).
- Reação dos alunos (BARBOSA, 2001).
- Estrutura da escola (BARBOSA, 2001).
- O não acompanhamento de um profissional que tenha maior experiência domínio sobre a Modelagem Matemática (BURAK, 1992).
- Exige mais do professor na preparação e no momento da aula (DIAS, 2005; JACOBINI, 2004; ROMA, 2003).
- Objetivos diferentes dos da instituição (FIDELIS, 2005; ROMA, 2003).
- Preocupação acerca do processo de construção do conhecimento (LUZ, 2003; ANASTÁCIO, 1990).
- Os alunos do turno noturno chegam cansados e não têm disposição para desenvolver as atividades (ROMA, 2003).
- Os alunos não gostam desse novo método (ROMA, 2003).
- Preocupação com a sequência dos conteúdos diferente da “sequência lógica” (MARTINELLO, 1994).

(SILVEIRA, 2007, p. 101)

Após quarenta dias da realização da atividade de modelagem, entrevistamos individualmente cada um dos participantes, e posteriormente realizarmos novamente uma entrevista (com as mesmas questões), mas agora em grupo, a fim de fomentar um debate sobre as respostas dadas individualmente e também para identificar se ocorreram mudanças de opinião quanto à modelagem, frente a argumentações de participantes. Decidimos utilizar esses dois tipos de entrevistas, pelo fato de acreditarmos que apenas com a discussão em grupo, poderíamos ter perdido alguma opinião de algum participante que poderia ser influenciado pelo debate.

Salientamos que após entrevista individual, solicitamos a cada participante que registrasse por escrito suas respostas, para isso entregamos impresso as questões realizadas.

As questões apresentadas por nós foram as seguintes:

1. **O que você entende por Modelagem Matemática?**
2. **O que diferencia a Modelagem Matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da Modelagem Matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

Com a primeira questão, tivemos por objetivo verificar se os participantes identificariam a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino e aprendizagem, e possivelmente citar algumas das etapas que compuseram a atividade desenvolvida por eles.

Com a segunda, esperávamos que os mesmos descrevessem suas estratégias de trabalho, comparando-as com o processo de modelagem.

Como a atividade desenvolvida tratou de um problema que foi modelado por uma função polinomial do primeiro grau, com a terceira questão pretendíamos verificar se os sujeitos indicariam situações reais que pudessem ser descritas por função do segundo grau; para em seguida apresentá-las na forma de problemas a serem resolvidos por seus alunos.

Com a quarta questão, objetivamos a identificação de dificuldades, bem como algumas vantagens referentes ao emprego do processo de Modelagem Matemática.

Por fim, com a quinta questão, objetivamos verificar se os professores participantes se apropriaram ou não dessa metodologia. Esta pergunta foi motivada pelos resultados apresentados no trabalho de Silveira.

A seguir apresentamos a análise dos resultados das entrevistas individuais.

4.1 As entrevistas individuais.

Analisamos as entrevistas baseando-se na dissertação de Silveira (2007), que descreve os resultados de dissertações e teses que tratam da Modelagem Matemática na formação inicial e continuada de professores.

Com esta entrevista identificamos algumas opiniões coincidentes e algumas divergentes em relação às conclusões identificadas pelos sujeitos da pesquisa daquele autor.

A seguir elencamos as respostas de seis dos oito participantes de nossa pesquisa, referente a cada questão, salientamos que os outros dois professores não participaram desta fase por estarem em licença prêmio. Para identificar cada indivíduo, utilizamos letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Referente à primeira questão: **O que você entende por Modelagem Matemática,** os professores responderam:

“É a abordagem e utilização de conteúdos matemáticos, à partir de experimentos matemáticos que possibilitam a vivência integrada das várias áreas do conhecimento, a fim de buscar uma solução comum.” (Profº A)

“Trazer problemas da sociedade para a resolução de diferentes áreas de conhecimento”. (Profº B)

“É todo um processo que o professor ou educador utiliza, no decorrer da resolução de uma situação problema”.(ProfºC)

“O desenvolvimento de fórmulas matemáticas para a solução de situações-problema”. (Profº D)

“A Modelagem Matemática surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção. Ao utilizarmos essa estratégia dois pontos são fundamentais: avaliar o tema a ser escolhido com a realidade de nossos alunos e aproveitar as experiências extra-classe dos alunos aliadas à experiência do professor em sala de aula.” (Profº E)

“É algo a ser explorado, ela surgiu da necessidade do ser humano compreender os fenômenos que o cercam.” (Profº F)

Com a resposta do professor A, percebemos que este identificou uma característica de Modelagem Matemática, poi destacou a possibilidade de inter-relação entre diversas áreas do conhecimento e a matemática, no entanto, assim como o professor B, não menciona a necessidade de todo o processo de resolução de um problema real que terá como resposta um modelo que o represente.

Ao escrever sua resposta, o professor C demonstra que para ele a Modelagem Matemática é todo o processo de obtenção do modelo que melhor represente a situação tratada.

Escrevendo que modelagem é o desenvolvimento de fórmulas matemáticas para resolução de problemas, o professor D não cita etapas envolvidas nesse processo.

Os professores E e F, escrevem que modelagem é o processo de busca de interpretação de fenômenos que estão ligados à realidade do aluno e do professor.

Com as respostas dadas à primeira questão, percebemos que os participantes identificaram algumas características do processo de Modelagem Matemática, entretanto não descreveram as possíveis etapas do processo. Sendo assim, não a descreveram como uma estratégia de ensino e aprendizagem.

Identificamos ainda que os professores participantes, entendem que Modelagem Matemática, é um processo que busca identicar e solucionar problemas reias, por meio de conhecimentos pré-existentes e por busca de informações a respeito da situação tratada. Entretanto, nenhum dos participantes mencionou a possibilidade de o aluno trazer para sala de aula um problema de sua realidade. Acreditamos que esta observação não foi feita por eles, pelo fato de em nossa atividade, termos utilizado somente o “segundo caso” proposto por Barbosa.

Já com a segunda questão: **“O que diferencia a Modelagem Matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?”,** os professores responderam:

“Que na maioria das vezes, a abordagem de um tema é realizada com a apresentação de situação problema, abrangendo quase na sua totalidade, a área de matemática, ficando a exceção para a área de códigos e linguagens.” (Profº A)

“A modelagem utiliza exemplos do dia-a-dia, porém a aprendizagem utilizada não é facilmente integrada com as outras áreas do conhecimento”. (Profº B)

“Na modelagem o professor tem a oportunidade de estar discutindo junto ao aluno certas dificuldades que o mesmo venha ter na resolução do problema. Enquanto que a outra estratégia essa discussão não seja tão eficáz”. (Profº C)

“Na Modelagem Matemática é o aluno que vai em busca do desenvolvimento de uma fórmula para solucionar o problema e não apenas aplicar as fórmulas já existentes.” (Profº D)

“A modelagem matemática é uma metodologia alternativa para o ensino da matemática. É evidente que a modelagem matemática não deve ser usada como uma única metodologia de ensino, o professor no exercício de suas atividades deve sempre procurar a melhor estratégia de ensino da matemática como por exemplo: jogos, brincadeiras, a história da matemática, resolução de problemas, enfim, usar usar todos os seus recursos para obter o melhor resultado possível no ensino da matemática. Uma forma de avaliar se a modelagem matemática é eficiente no processo de ensino e aprendizagem é estabelecer um paralelo entre o ensino tradicional e o ensino através da modelagem matemática.” (Profº E)

“Não tem diferença, pois o professor que trabalha com a modelagem matemática deve ser criativo, motivador e acima de tudo deve assumir a postura de um mediador entre o saber comum e o saber matemático, fazendo com que o aluno passe a ser um agente ativo no processo de construção do saber, e isso eu trabalho e faço com os meus alunos.” (Profº F)

Percebemos com a resposta do professor A, que ele não comparou sua estratégia de ensino com o processo de modelagem. No entanto notamos algumas semelhanças entre elas, uma delas é que em sua prática, utiliza-se de situações problemas para desenvolver conteúdos matemáticos, mas o participante destaca, que todo o processo de resolução se restringe apenas ao campo da matemática, não propiciando que os alunos procurem informações a respeito da situação tratada, solicitando apenas que substituam valores em alguma fórmula dada.

Com sua resposta, o participante B ressalta a importância de se relacionar o conteúdo tratado com outras áreas do conhecimento, entretanto a busca de informações a respeito do problema proposto, poderiam ser realizadas por diferentes meios, seja em campo, internet, livros, etc. Com isso um caminho para colocar os alunos em contato com outras áreas além da Matemática.

Percebemos pela resposta do professor C, que este identifica a importância do debate entre mediador e alunos no processo de modelagem, pois por meio dele, as dificuldades podem ser vencidas.

Já o professor D, escreve que no método tradicional, os alunos não sabem de onde surgiu o modelo, cabendo a eles apenas o utilizarem. Entretanto percebeu que pela modelagem, os estudantes desenvolvem e aplicam os modelos matemáticos encontrados.

Os professores E e F, escrevem que a modelagem é uma proposta eficaz, mas não única. Enfatizam a necessidade de se utilizar outros recursos para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Com essa questão, percebemos que os professores identificaram algumas diferenças entre a Modelagem Matemática e o método tradicional, entre elas, o fato de que neste último, o aluno se torma um mero expectador, cabendo a ele apenas ouvir memorizar e repetir os conteúdos ministrados pelo professor, já na modelagem, o aluno se torna agente principal no processo de desenvolvimento do conteúdo tratado, ou seja, da mesma forma que a matemática se desenvolveu historicamente, a esse respeito Bassanezi escreve:

> O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, e também do processo histórico da construção da matemática. Assim é que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: “enunciado – demonstração – aplicação”, quando de fato o que deveria ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação

> (externa ou não à matemática), a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado. (BASSANEZI, 2002, p. 36)

Referente a terceira questão **"Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?"**, os professores, responderam:

"Com uma situação de análise de faturamento de uma empresa, dado o gráfico. Calculando produção associado ao lucro, prejuízos e lucro máximo". (Profº A)

"O faturamento de uma empresa, onde poderá ser expresso lucro, prejuízo desta". (Profº B)

"Poderia ser aplicado no cálculo de áreas de terrenos quadrangulares". (Profº D)

"Considero uma boa atividade envolvendo função do 2º grau, utilizando-se de modelagem matemática é: à partir de embalagens retangulares, encontrar uma lei de formação que expresse suas áreas.

- **Material: folha de papel, uma régua por aluno, caixas retangulares (diversas);**
- **Procedimento: trabalhar em grupo, anotar em uma tabela os valores dos lados das caixas retangulares e os valores das áreas das mesmas;**
- **Organização e análise dos resultados: enconre uma possível equação que realacione todas as áreas de uma caixa retângular." (Profº E)**

"Monte uma tabela com alguns valores x e y para a função $y = x^2 - 2x$ e represente os pares (x;y) no plano cartesiano. Esse seria um dos problemas que eu representaria." (Profº F)

Com essa resposta, o professor A identifica uma situação que envolve função do segundo grau; no entanto não descreve os possíveis caminhos para obtenção do modelo. Podemos ainda notar que o mesmo sugere que se inicie o problema com uma representação gráfica, fato este, adequado quando se pretende modelar com o auxílio de um *software* matemático, como por exemplo o Excel, o Winplot, etc.

Ao responder essa questão, o professor B, também não detalhou os possíveis caminhos para obtenção do modelo. Notamos ainda que o exemplo dado é muito semelhante ao do professor A, acreditamos que tal coincidência, deva ser pelo fato de o caderno do aluno utilizar uma situação de relação de dependência entre o custo e a produção de uma certa empresa, para iniciar a aplicabilidade de função do segundo grau. Tal caderno é utilizado por eles em suas práticas docentes.

Referindo-se a terceira questão, o professor C não a respondeu adequadamente, limitando-se a expressar uma situação que provavelmente não possa ser trabalhada por meio de uma função de segundo grau.

Os professoesr D e F, apenas citaram possíveis aplicações de função do segundo grau, mas não apresentaram situações problemas.

Já o professor E, além de propor um problema, detalhou algumas etapas do processo, embora não ficou definitivamente claro se a modelação desse problema resultaria em uma função do segundo grau.

Com as respostas da terceira questão, identificamos a dificuldade por parte dos professores em elaborar um problema que tenha por solução uma função do segundo grau, esta dificuldade também foi encontrada por nós na elaboração da atividade.

Os professores apenas escolheram um tema para a elaboração do problema, e somente o professor E, descreveu com mais detalhes as fases que poderiam compor o processo de resolução da situação apresentada por ele.

Sendo assim, identificamos um possível motivo pelo qual os professores que já tiveram experiência com modelagem, não se apropriarem dessa metodologia: a dificuldade em elaborar problemas reais para se trabalhar determinados conteúdos.

Referente a questão **“Quais as vantagens e desvantagens da Modelagem Matemática?”,** os professores responderam:

“Vantagens:

- **Aplicabilidade da matemática;**
- **Facilitação no entendimento das idéis matemáticas;**
- **Integração dos conhecimentos das diversas áreas;**
- **Desenvolvimento de várias habilidades e competências;**
- **Compreensão da importância da matemática na sociedade;**

Desvantagens:

- **A princípio, com pouca experiência com a modelagem, a demanda de mais tempo hábil para elaboração, execussão e finalização das etapas do processo;**
- **Quando não muito bem trabalhado, o resultado pode favorecer a uns e a outros menos;” (Prof. A)**

“A vantagem através de alguns exemplos práticos fica mais atraente uma compreensão. Porém precisa-se de um tempo adequado para que isso possa ocorrer de um modo favorável”. (Prof. B)

“As vantagens da modelagem matemática é que nessa oportunidade estaríamos levando em conta tudo e qualquer conhecimento adquirido pelo aluno em busca do objetivo. As desvantagens encontradas são o fator tempo e as dificuldades encontradas no domínio de certos conteúdos provenientes de séries anteriores”. (Prof. C)

“Vantagens: Aplicabilidade da matemática em situaçõe reais; o trabalho em grupo e a discussão entre os alunos para se chegar ao resultado faz com que exponham suas idéias.

Desvantagens: o processo de desenvolvimento de modelagem matemática, requer um tempo maior ao utilizado no método convencional; o trabalho realizado em grupo, dificulta a avaliação do desenvolvimento individual, pois o debate pode influenciar no raciocínio individual”. (Prof. D)

“Podemos enumerar os seguintes benefícios:

1. **Motivação do aluno e do próprio professor;**
2. **Facilitação da aprendizagem, o conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto;**
3. **Desenvolvimento do raciocínio, lógico e dedutivo em geral;**
4. **Interatividade do conteúdo matemático com outras disciplinas, etc.**

Varios motivos são colocados como obstáculos na utilização da modelagem matemática, como por exemplo: falta de tempo, falta de condições físicas e financeiras". (Prof. E)

"Não vejo desvantagens e sim vantagens, pois a modelagem matemática é eficiente no processo de ensino e aprendizagem e estabelece um paralelo entre o ensino tradicional e o ensino através da modelagem matemática, abordando aspéctos como a pedagogia adotada, a criatividade, o interesse pelo estudo de matemática, a motivação e o entusiasmo por parte dos alunos, e a avaliação do que eles realmente aprenderam com a odelagem matemática, levando o professor a refletir sobre sua metodologia de ensino da matemática." (Prof. F)

O professor B destacou que o fato de todo o processo de modelagem girar em torno de uma situação real, poderá ser mais atraente aos alunos. Este também ressaltou as possíveis dificuldades por defasagem de conteúdos anteriores.

Observamos que os professores, destacaram a falta de tempo para se desenvolver o processo de modelagem, a preocupação de não conseguir envolver todos os alunos nesse sistema de ensino e aprendizagem, e a ausência de conhecimentos prévios para resolverem o modelo. Notamos ainda que os participantes se preocuparam com o cumprimento do planejamento de conteúdos, e apresentaram dúvidas quanto a forma de avaliação individual dos alunos.

No entanto identicaram e elogiaram as vantagem que este método pode oferecer aos alunos no processo de construção do conhecimento.

Por último, as respostas da questão "**Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?"**, foram:

"Acredito que as revistas (caderno do aluno) trabalhadas com os alunos das escolas estaduais em São Paulo, sejam em ensaio para essa prática." (Prof. A)

"Sim, pois é uma maneira muito interessantee de fácil compreensão, pois trabalha com situações reais". (Prof. B)

"Sim, porque o aprendizado não é linear". (Prof. C)

"Considerando as vantagens e desvantagens citadas, essa estartégia poderia ser aplicada, mas não para todos os assuntos tratados durante o curso." (Prof. D)

"Para trabalhar com modelagem matemática o professor deve ser criativo, motivador e acima de tudo deve assumir a postura de mediador entre o saber comum e o saber matemático, fazendo com que o aluno passe a ser um agente ativo no processo de construção do saber." (Prof. E)

"Sim, com certeza." (Prof. F)

Na opinião do professor A, o caderno do aluno, possui indícios de Modelagem Matemática, sendo assim, já faz parte de sua prática docente. Então entendemos que este participante adotaria essa metodologia.

Mesmo destacando algumas dificuldades, o professor B afirma que utilizaria a Modelagem Matemática em sua prática docente.

Mesmo não conseguindo encontrar uma situação problema para introduzir o conceito de função do segundo grau, o professor C escreve que se apropriaria desse método.

Com esta questão notamos uma grande possibilidade de apropriação da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, por parte dos sujeitos de nossa pesquisa.

Com esta primeira entrevista, notamos que alguns pontos negativos citados pelos pesquisadores que compõe o trabalho de Silveira, coincidem com os citados pelos sujeitos de nosso trabalho. O principal foi o fator tempo, mas identificamos outros, tais como a preocupação de não conseguir cumprir todo o conteúdo programático; e a preocupação de talvez não ter domínio do andamento que tal processo possa tomar, desconhecendo o que pode vir à acontecer no percurso.

Identificamos também alguns pontos negativos que não foram citados nas pesquisas analisadas por aquele autor, como exemplo, a dificuldade de avaliar individualmente cada aluno durante o processo de modelagem; a falta de experiência com esse método pelos docentes; a falta de infra-estrutura da instituição de ensino bem como a falta de recursos financeiros.

No entanto, todos os professores indicaram pontos positivos, que coincidem com as identificadas no trabalho de Silveira, entre elas, podemos destacar a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos, bem como a interação entre os alunos no decorrer do desenvolvimento da modelagem.

Com as respostas dadas à última questão, acreditamos que a Modelagem Matemática como processo de ensino e aprendizagem, poderá fazer parte da prática docente dos sujeitos participantes de nossa pesquisa.

Apresentamos a seguir a descrição e análise da entrevista coletiva realizada com os professores participantes da nossa pesquisa.

4.2 A entrevista coletiva

Descrevemos a seguir trechos da antrevista coletiva realizada com os professores participantes, bem como a análise realizada por nós. Além de identificar nesse debate convergências e divergências referentes às respostas dadas individualmente, realizamos comparação entre as opiniões defendidas e as conclusões contidas nos trabalhos analisados por Silveira, a fim de verificar se houve ou não apropriação por parte dos nossos sujeitos do processo de Modelagem Matemática em suas práticas docentes.

Após apresentarmos oralmente a questão, **“O que você entende por Modelagem Matemática?”**, o professor E iniciou o debate dizendo: “Modelagem é todo o processo de busca da interpretação da realidade por meio de um problema”.

Nesse instante o professor F concordou dizendo: “Foi assim que a matemática evoluiu, de acordo com a necessidade de resolver problemas do cotidiano”.

Novamente o professor E se pronunciou: “A dificuldade é escolher um problema que tenha como solução o conteúdo a ser dado”.

Embora não tendo mencionado na primeira entrevista, o professor D, concordou com as observações realizadas pelo professor E.

Neste momento, iniciou-se uma discussão a respeito da preocupação de se cumprir ou não todo o planejamemto bimestral de cada série. Assim, lembramos aos participantes que segundo Bassanezi (2002):

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. (BASSANEZI, 2002, p.38)

Com a segunda questão: **“O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?”**, os participantes iniciaram um debate sobre o que eles entendem sobre modelagem matemática, deixando até mesmo de compará-la com a estartégia de ensino utilizada por eles.

Para fomentar a discussão, perguntamos a eles se haveria ou não indícios de modelegem matemática no caderno do aluno. O professor A, imediatamente disse que sim, pois segundo ele, alguns conteúdos do caderno são abordados de uma maneira gradativa, em que solicita aos alunos preenchimentos de tabelas e partindo delas, construam alguns modelos matemáticos.

Mesmo não tendo citado esse fato na primeira entrevista, todos os demais professores concordaram.

A terceira questão perguntava: **“Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?”.**

Iniciou-se um debate no qual não identificamos divergências quanto às respostas dadas nas entrevistas individuais. No entanto solicitamos a cada um deles que detalhassem a estratégia que poderia ser utilizada em cada escolha.

Somente o professor E, que na entrevista individual havia sugerido um problema real e descrevera algumas possíveis etapas da sua estratégia, os demais disseram que encontravam dificuldades em responder a essa questão. Essa dificuldade também foi indicada nos trabalhos analisados por Silveira.

No entanto, esclarecemos a eles que o processo de modelagem utilizado por nós no desenvolvimento da atividade, esteve baseado no segundo caso proposto por Barbosa, método este que possibilita ao professor mediador, a escolha de um problema real, que tenha como solução um modelo matemático conveniente para o conteúdo que desejamos trabalhar.

O professor C, disse: “mas para conseguir chegar no modelo esperado, o professor mediador deverá saber todas as etapas de construção do conteúdo tratado”.

Com essa observação, identificamos mais um ponto de convergência entre observações contidas no trabalho de Silveira, ou seja, a insegurança pela possibilidade de não ter domínio sobre o que pode acontecer.

Com a quarta questão: **“Quais as vantagens e desvantagens da Modelagem Matemática?”**, os professores socializaram suas respostas, ocasionando, muitas vezes, a concordância por parte dos demais participantes, com o seu ponto de vista.

Os pontos negativos mais citados foram, a falta de tempo para se realizar todo o processo de modelagem e a preocupação com o cumprimento do planejamento escolar, coincidindo mais uma vez com os resultados apontados por Silveira.

Por último, com a quinta questão: **“Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?”,** os professores demonstraram interesse em utilizar essa metodologia, entretanto não para todos os conteúdos do planejamento, pois segundo eles, seria muito difícil encontrar situações reais que os abordassem.

Silveira em seu trabalho, escreve que não se sabe ao certo o motivo pelo qual a maioria dos professores que passam pela experiência de Modelagem Matemática, não a adotam em suas práticas docente. No entanto destaca algumas possíveis causas:

> O fator que pode estar contribuindo para a efetivação do problema de não adotar esse método, é o pequeno tempo de formação que os professores normalmente tiveram, na maioria dos casos, em assuntos relacionados à Modelagem Matemática. Vimos que o fator “insegurança” está presente em muitos momentos na fala dos pesquisadores e dos professores cursistas.
> (SILVEIRA, 2007, p.103)

Esperamos que este trabalho tenha contribuido de alguma forma para o início de reflexões e possíveis apropriações da Modelagem Matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem, por parte dos professores participantes da nossa pesquisa, para isso utilizando o espaço disponibilizado pela estrutura proposta pela Secretaria de Estado da Educação, denominado “Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo - HTPC”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar nosso trabalho, nos propusemos a responder a seguinte questão: “De que maneira os professores se apropriam da modelagem como processo de ensino e aprendizagem”. Para isso, utilizamos a estratégia definida por Barbosa (2001) como “segundo caso”, para elaborar uma atividade com oito professores de matemática de uma escola estadual da Grande São Paulo, no Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC), que tratou de um problema real que pode ser modelado por meio de uma função afim.

Ao utilizar esse espaço para realizar a atividade, procuramos mostrar aos participantes que esse horário poderia ser destinado para discussões sobre as suas práticas docentes, bem como para sua formação continuada, por meio de troca de experiências e mini cursos.

O processo de Modelagem Matemática, na visão de Bassanezi (2002), pode ser utilizado como método científico ou como estratégia de ensino e aprendizagem. No primeiro, o objetivo principal é a obtenção de um modelo matemático que melhor satisfaça uma situação real, e é muito utilizado nas Engenharias, Química Teórica, Física Teórica, etc. Já no segundo, o objetivo principal não é o modelo final, mas todo o processo de obtenção da fórmula matemática.

Nesta abordagem, os alunos trazem para sala de aula um problema real, e vão em busca de informações sobre ele, para em seguida, utilizando conhecimentos prévios, construir o modelo que melhor represente a situação tratada. No entanto, este método pode levar a um conteúdo matemático não pevisto no planejamento da disciplina. Por este motivo utilizamos o “segundo caso” proposto por Barbosa (2001), que nos possibilitou a escolha de um problema real, que teve como solução o conteúdo planejado por nós, ou seja, uma função afim.

A nossa pesquisa foi realizada em três fases: na primeira, desenvolvemos uma atividade de modelagem para a introdução ao conceito de função. Esta fase foi composta por dois encontros de duas horas cada, onde nôs propusemos mostrar aos professores que através de um problema real, pudemos construir o conhecimento desejado. Com esses dois encontros, pudemos notar interesse dos professores em participar da nossa atividade, pois geralmente o HTPC é destinado apenas para discussões burocráticas.

Esta fase foi extremamente importante para nós, pois oferecemos uma oportunidade aos professores participantes de verificar, por meio de discussões entre eles, que o conhecimento vai sendo construído e socializado.

Na segunda parte, realizamos entrevistas individuais para verificar de que forma os participantes poderiam ter se apropriado da Modelagem Matemática em suas práticas docentes.

Utilizamos o trabalho de Silveira (2007), que analisa dissertações e teses que tratam a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem tanto na formação inicial como na continuada de professores, para elaborar as questões apresentadas, bem como analisar as respostas dadas a elas.

Com as respostas dadas às questões apresentadas, pudemos observar alguns pontos positivos e negativos identificados pelos participantes, sobre a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. Alguns desses pontos também coincidem com os levantados por Bassanezi, já descritos neste trabalho, quando relata que esta metodologia pode auxiliar na forma como os conteúdos matemáticos podem ser tratados, bem como algumas desvantagens descritas por ele.

No entanto ressaltamos que os participantes expressaram que nesta metodologia, os pontos positivos superam os negativos, principalmente pelo fato de propiciar aos alunos um debate a respeito do problema tratado, fazendo da Matemática uma ferramenta necessária para compreensão e tratamento de situações reais.

Na última fase, utilizando as mesmas questões da anterior, realizamos uma entrevista coletiva com os participantes, a fim de identificar se ocorriam divergências entre as respostas dadas anteriormente e seu posicionamento atual, bem como procurar algumas semelhanças e diferenças entre as análises realizadas nas dissertações e teses estudadas por Silveira e as respostas dadas pelos nossos participantes.

Apesar de não encontramos nenhuma contradição nas respostas dadas por nossos sujeitos, identificamos algumas observações não mencionadas nos trabalhos analisados por aquele autor, como por exemplo, "aceitar usar a modelagem em suas práticas docentes, mas não para todos os conteúdos matemáticos".

Percebemos ainda por meio da coletiva, que os participantes expressaram suas opiniões sem preocupação com as dos demais, fato identificado por nós quando o professor E relatou possíveis dificuldades por parte dos docentes em conseguir mediar o processo de modelagem por falta de domínio matemático. Acreditamos que esse debate sem receios deu-se pelo fato de todos os professores serem titulares de cargo na mesma escola há pelo menos cinco anos.

Um fato que merece ser salientado é que o referido professor E, ao apresentar um problema pudesse ser modelado por uma equação do segundo grau, parece ter seguido passo a passo o procedimento de nossa atividade, a saber, buscou um problema real, sugeriu a utilização de tabelas, para em seguida procurar uma fórmula matemática que melhor representasse seus dados.

A escolha de se realizar, primeiro entrevistas individuais e depois uma coletiva, mostrou-se eficaz para que os participantes, embora já tivessem refletido anteriormente sobre as questõs, pudessem verificar que em todas elas ainda havia aspéctos a serem socializados.

Ao término da entrevista, todos os participantes disseram que utilizariam a Modelagem Matemática em suas práticas, pois segundo eles é uma metodologia que mostra aos alunos a praticidade da Matemática.

Apesar disso, não podemos ter certeza de que esses sujeitos realmente vão se apropriar dessa estratégia, pois para isso, deveríamos dar sequência a pesquisa para futuramente retornar a escola para realizar a verificação.

Acreditamos que a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, poderá diminuir as dificuldades encontradas por professores e alunos no que se refere ao tratamento prático da Matemática, no entanto, percebemos que ainda há uma grande insegurança por parte dos professores quanto a essa metodologia, pois tudo que é novo, geralmente causa desconforto, mas é passageiro.

Com este trabalho, percebemos que muitos professores de matemática, se mostram propícios a trabalharem com outras metodologias, mas por diversos motivos, continuam utilizando o antigo "método tradicional" em suas práticas.

Ressaltamos também que nossa opção por trabalhar com os professores no Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC), revelou-se um momento oportuno para que os participantes pudessem refletir, juntamente com seus colegas sobre um assunto de caráter pedagógico, contrinuindo assim, para a sua própria formação continuada. Isto ficou explicitado por meio de comentários que ocorreram no final da primeira fase da atividade, em que professores manifestaram-se favoráveis a utilização deste horário para discussão de temas pertinentes a cada área do conhecimento.

Concordando com Beltrão (2009), reafirmamos a necessidade de se ampliar as pesquisas voltadas para a formação inicial ou continuada de professores, pois com elas podemos expor as inúmeras formas de se abordar os conteúdos matemáticos, mostrando assim sua aplicabilidade.

Finalizando, esperamos que este trabalho possa de alguma forma contribuir para a formação inicial ou continuada de professores de matemática, assim como nos ajudou a ampliar a nossa visão sobre a importância de adotar em nossas práticas docentes, uma metodologia que retira o aluno da posição de um mero espectador, onde o mesmo apenas ouve, memoriza e repete os conteúdos ministrados pelo professor, e o coloca como um agente principal do desenvolvimento de conteúdos matemáticos, entendendo assim sua utilidade na resolução de problemas reais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, D. S., ALMEIDA, L. M. W. (2005) - *O conceito de função em situações de modelagem matemática* - ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23

ARDENGHI (2008) - *Ensino e Aprendizagem no Conceito de Função: Pesquisas realizadas no período de 1979 a 2005 no Brasil* – PUC/SP.

BARBOSA, J. C.(2000) - *Uma perspectiva para a Modelagem Matemática*. In: Anais do IV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro: UNESP.

BARBOSA, J. C. (2001) - *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. , Caxambu.

BARBOSA, J. C. (2009) - *Modelagem Matemática: Integração Curricular, Gestão Pedagógica e a participação dos alunos* – VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática – Londrina - Paraná

BASSANEZI, R. C. (2002) - *Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

BELTRÃO, M. E. P. (2009) - Tese: *Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações - Teoria e Prática* – PUC-SP.

BIEMBENGUT, M. S. (2009) - *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais - ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32.*

BURAK, D. (2009) – *Da Educação Matemática à Modelagem Matemática: Um olhar para práticas em sala de aula* - VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática – Londrina – Paraná.

CHEVALLARD, Y. (2001) - *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem***.** Trad. Daysy Vaz de Niraes. Porto Alegre: Artmed Editora.

COUTINHO, C. Q. S.,(2002) - *Probabilidade Geométrica: Um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri II. In: 25a Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002, Caxambu. Anais da 25a Reunião Anual da Anped.*

D'AMBRÓSIO, U.(1986) - *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Unicamp.

DAVIS, P.J.; HERSH, R.. (1995) - *A experiência matemática***.** Ciência Aberta. Gradiva Publicações. Primeira ed.

DOLIS, M. (1989) - *Ensino de Cálculo e o processo de modelagem***.** Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro.

FERREIRA, Jr..W.C. (1993) - *Modelos matemáticos para dinâmica de população distribuídos em espaços de aspecto com interações não locais: paradigmas de complexidade* – (Doutorado), IMECC-UNICAMP, Campinas.

FERRUZZI, Elaine C.(2003) - Dissertação: *A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia* - Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.

GRANGER, G.G. (1969) - *A Razão.* Difusão Européia do Livro. São Paulo. 2ª ed.

GUSTINELI, O. A. P. (1990) - *Modelagem Matemática e resolução de problemas: uma visão global em Educação Matemática.* 126 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

HILGARD, R. E. (1973) - *Dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função*. Dissertação (Mestrado) – PUC/SP

McLONE, R. R. (1976) - *Mathematical Modeling – The art of applying mathematics, in Math* – Modeling (Andrews - McLone), Butter words, London.

SILVEIRA, E. (2007) - *Modelagem Matemática em Educação Matemática no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná.

ZUFFI, E. M. et al, (2002) - *O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências* - Ciência & Educação, v.8, nº1, p.1-12

ANEXOS

Anexo I – Texto sobre Produção do Etanol e Carros Flexíveis no Brasil

Texto: Logo após a primeira grande crise mundial do petróleo, a partir de 1973, o governo brasileiro decidiu investir no desenvolvimento de um combustível alternativo que substituísse a gasolina e, portanto, a dependência do país em relação aos derivados de petróleo, que era quase total à época (só agora em 2006 é que o Brasil está alcançando sua auto-suficiência na produção de petróleo).

Foi assim que nasceu, em 1975, o Proálcool (Programa Nacional do Álcool), que além de contar com recursos do governo para pesquisa e desenvolvimento do novo combustível, previa subsídios na venda de veículos e do próprio combustível, além de redução de impostos.

O programa teve seu ápice em meados dos anos 80, quando 96% dos automóveis novos vendidos no país eram movidos a álcool. Naquela época, o Brasil passou por um sério problema de desabastecimento com a falta do combustível.

Quando os preços internacionais do petróleo recuaram no início dos anos 90, os brasileiros voltaram a dar preferência por comprar carros a gasolina. Em 2003, apenas 10% do carros novos vendidos pela indústria brasileira eram movidos a álcool.

Em 2004, surge uma nova revolução: os carros com motores flexíveis, conhecidos como Flex, que são bicombustíveis - funcionando tanto com álcool como com gasolina ou a mistura em qualquer proporção de ambos. Como o preço do álcool estava baixo, o consumo do combustível cresceu. Isso se refletiu nas vendas de carros no país. Atualmente, mais de 73% dos automóveis vendidos no país são Flex.

Devido ao crescimento da procura pelo combustível e do momento de entressafra da produção de cana-de-açúcar (matéria-prima para sua produção), sempre passamos por uma crise relacionada ao álcool. O principal reflexo, além do próprio aumento dos preços, é que o governo sempre procura reduzir a proporção de álcool acrescentada à gasolina que varia entre 25% e 20%.

(Texto: História de uma alternativa à gasolina – universia.com.br)

Anexo II – Respostas da Primeira Entrevista

PROFESSOR A

Questões:

1. **O que você entende por modelagem matemática?**
2. **O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da modelagem matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

(1) É a abordagem e utilização de conteúdos matemáticos, a partir de experimentos matemáticos que possibilitem a vivência integrada, das várias áreas do conhecimento, afim de buscar uma solução comum.

(2) Que na maioria das vezes, a abordagem de um tema é realizada com a apresentação de situações problema abrangendo quase que na sua totalidade, a área de matemática, ficando a exceção para a área de códigos e linguagens.

(3) Com uma situação de análise de faturamento de uma empresa, dado o gráfico. Calculando produções associadas a lucros, prejuízos e lucro máximo

(4) Vantagens: - aplicabilidade da matemática;
- facilitação no entendimento das idéias matemáticas;
- integração dos conhecimentos das diversas áreas;
- desenvolvimento de várias habilidades e competências;
- compreensão da importância da matemática na sociedade.

Desvantagens: - A princípio, com pouca experiência com a modelagem matemática, a demanda de mais tempo hábil para elaboração, execução e finalização das etapas do processo.
- Quando, não muito bem trabalhado o resultado pode favorecer a uns mais e a outros menos.

(5) Acredito que as revistas trabalhadas com os alunos das escolas estaduais em São Paulo, seja um ensaio para essa prática.

PROFESSOR D

Questões:

1. **O que você entende por modelagem matemática?**
2. **O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da modelagem matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

---

① Trazer problemas da sociedade para a resolução de diferentes áreas de conhecimento.

② A modelagem utiliza exemplos do dia-a-dia, porém a aprendizagem utilizada não é facilmente intregrada com as outras áreas de conhecimento.

③ O faturamento de uma empresa, onde poderá ser expresso lucro, prejuízo desta.

④ A vantagem através de alguns exemplos práticos fica mais atrante uma compreensão. Porém precisa-se de um tempo adequado para que isso posso ocorrer de um modo favorável.

⑤ Sim, pois umo maneira muito interessante e de fácil compreendimento, trabalhando com vivências reais.

PROFESSOR L

Questões:

1. **O que você entende por modelagem matemática?**
2. **O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da modelagem matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

(1) É TODO UM PROCESSO QUE O PROFESSOR OU EDUCADOR UTILIZA, NO DECORRER NA RESOLUÇÃO DE UMA SITUAÇÃO - PROBLEMA PARA CHEGAR A SOLUÇÃO

(2) NA MODELAGEM O PROFESSOR TEM A OPORTUNIDADE DE ESTAR RESGATANDO JUNTO AO APRENDIZADO CERTAS DIFICULDADES QUE O MESMO VENHA TER NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA; ENQUANTO QUE NA ESTRATÉGIA NÃO SÃO UTILIZADOS MEIOS TÃO EFICAZ, PARA OS MESMOS OBJETIVOS.

(3) PODERIA ESTAR TRABALHANDO COM OS ALUNOS SITUAÇÕES COMO O PROGRESSO DOS MESMOS EM SALA DE AULA. VERIFICANDO ASSIM SE FOI CRESCENTE OU DECRESCENTE

(4) AS VANTAGEM DA MODELAGEM DA MATEMÁTICA É QUE NESSA OPORTUNIDADE ESTARIAMOS LEVANDO EM CONTA TODO E QUALQUER CONHECIMENTO ADQUIRIDO PELO ALUNO PARA ATINGIRMOS OS OBJETIVOS. A PRINCIPIO NÃO VEJO NENHUMA DESVANTAGEM, A NÃO SER O FATOR TEMPO E DIFICULDADES ENCONTRADAS NO DOMINIO DE CERTOS CONTEÚDOS PROVENIENTES DE SERIES ANTERIORES

(5) SIM, PORQUE O APRENDIZADO NÃO É LINEAR

Questões:

1. **O que você entende por modelagem matemática?**
2. **O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da modelagem matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

. O desenvolvimento de fórmulas matemáticas para soluções de situações-problema.

. Na modelagem matemática é o aluno que vai em busca do desenvolvimento de uma fórmula para solucionar o problema e não apenas aplicar as fórmulas já existentes.

. Poderia ser aplicado no cálculo de áreas de terrenos quadrangulares, entre outros.

4. Vantagens: Aplicabilidade da matemática em situações reais; O trabalho em grupo e a discussão entre os alunos para se chegar ao resultado faz com que exponham suas idéias.
. Desvantagens: O processo de desenvolvimento de modelagem matemática, requer um tempo maior ao utilizado no método convencional; O trabalho realizado em grupo, dificulta a avaliação do desenvolvimento individual, pois o debate pode influenciar no raciocíni individual.

5. Considerando as vantagens e desvantagens acima citadas, essa estratégia poderia ser aplicada, mas não para todos os assuntos tratados durante o curso.

Questões:

1. **O que você entende por modelagem matemática?**
2. **O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da modelagem matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

1-) A modelagem Matemática surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção.
Ao utilizarmos dessa estratégia dois pontos são fundamentais: avaliar o tema, a ser escolhido com a realidade de nossos alunos e aproveitar as experiências extra-classe dos alunos aliadas à experiência do professor em sala de aula.

2-) A modelagem Matemática é uma metodologia alternativa para o ensino da Matemática. É evidente que, a Modelagem Matemática não deve ser usada como uma única metodologia de ensino, o professor no exercício de suas atividades, deve sempre procurar a melhor estratégia de ensino da matemática, como por exemplo: jogos, brincadeiras, a história da matemática, resolução de problemas, enfim usar todos os seus recursos para obter o melhor resultado possível no ensino da matemática.
Uma forma de avaliar se a modelagem Matemática é eficiente no processo de ensino-aprendizagem é estabelecer um paralelo entre o ensino tradicional e o ensino através da modelagem Matemática.

3-) Considero uma boa atividade envolvendo função 2º grau, utilizando-se de modelagem Matemática é: "A partir de embalagens retangulares, encontrar uma lei de formação que expresse suas áreas.

• Material: folha de papel, uma régua por aluno, caixas retangulares (diversas);

• Procedimento: trabalhar em grupo, anotar em uma tabela os valores dos lados das caixas retangulares e os valores das áreas das mesmas.

Organização e Análise dos Resultados: encontre uma possível equação que relacione todas as áreas de uma caixa retangular.

4-) Podemos enumerar os seguintes benefícios:

1-) Motivação do alunos e do próprio professor;

2-) Facilitação da aprendizagem – o conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto.

3-) Desenvolvimento do raciocínio, lógico e dedutivo em geral;

4-) Interatividade do conteúdo matemático com outras disciplinas, etc.

Vários motivos são colocados como obstáculos na utilização da modelagem matemática, como por exemplo: falta de tempo, falta de condições físicas e financeiras.

5-) Para trabalhar com modelagem matemática o professor deve ser criativo, motivador e acima de tudo deve assumir a postura de mediador entre o saber comum e o saber matemático, fazendo com que o aluno passa a ser um agente ativo no processo de construção do saber.

Questões:

1. **O que você entende por modelagem matemática?**
2. **O que diferencia a modelagem matemática da estratégia de ensino e aprendizagem utilizada por você?**
3. **Que tipo de problema você apresentaria aos alunos para trabalhar com funções do 2º grau?**
4. **Quais as vantagens e desvantagens da modelagem matemática?**
5. **Você utilizaria essa estratégia em sua prática docente?**

1 - É algo a ser explorado, ela surgiu da necessidade do ser humano em compreender os fenômenos que o cercam.

2 - Não tem diferença, pois o profº que trabalha com a modelagem matematica deve ser criativo, motivador e acima de tudo deve assumir a postura de um mediador entre o saber comum e o saber matemático, fazendo com que o aluno passe a ser um agente ativo no processo de construção do saber, e isso eu trabalho e faço com os meus alunos.

3 - Monte uma tabela com alguns valores x e y para a função $y = x^2 - 2x$ e represente os pares $(x; y)$ no plano cartesiano. Esse seria um dos problemas que eu apresentaria.

4 - Não vejo desvantagens e sim vantagens, pois a modelagem Matemática é eficiente no processo de ensino - aprendizagem e estabelece um paralelo entre o ensino tradicional e o ensino através da modelagem matemática, abordando aspectos como a pedagogia adotada, a criatividade, o interesse pelo estudo de matemática, a motivação e entusiasmo por parte dos alunos, e a avaliação do que eles realmente aprenderam

com a modelagem matematica, levando o professor a refletir sobre sua metodologia de ensino da matemática.

5 - Sim, com certeza.