

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

PAULO AVELINO DOS SANTOS

**A MODELAGEM COMO PROPOSTA PARA A INTRODUÇÃO À
PROBABILIDADE POR MEIO DOS “PASSEIOS ALEATÓRIOS DA
MÔNICA”**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2010

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

PAULO AVELINO DOS SANTOS

**A MODELAGEM COMO PROPOSTA PARA A INTRODUÇÃO À
PROBABILIDADE POR MEIO DOS “PASSEIOS ALEATÓRIOS DA
MÔNICA”**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina**.

**São Paulo
2010**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Silvana e à nossa filha Paula, uma das razões de minha existência e, nossa maior riqueza.

AGRADECIMENTOS

Ao nosso Deus, por fartar-nos de saúde, paz, alegria e provações, confortando o nosso Espírito de bênçãos.

A minha esposa e filha, Silvana e Paula, pelos momentos de suas vidas que não pude estar presente.

A minha querida mãe Maria de Lourdes dos Santos (in memorian) e meu pai, Martins Avelino dos Santos (in memorian), que com certeza estão vibrando positivamente, com, e para o meu sucesso nesta existência.

Agradecimento Especial a minha orientadora, Professora Dra. Sandra M. P. Marina e a doutoranda Aida Carvalho Vita, pelas orientações, apoio, incentivo incondicional e confiança, que serviram como sustentação para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Muito mais do que orientadoras, amigas para todos os momentos e que de forma incontestável contribuíram para a realização desta dissertação.

Aos amigos Cido, Cláudio, Eurivalda, Rogério, Silvana, Vera Lúcia, Maria Adriana, Madeline, Ana Paula e o Grupo de pesquisa REPARE, que de uma forma ou de outra, contribuíram para a concretização de nossa pesquisa, dado o tempo que dispensaram para ajudar-me na confecção de parte das atividades, adaptações e orientações que serviu como base para a realização deste trabalho.

Aos meus professores Carlos Calabrez (Carlão) e Dona Olinda, pelo incentivo aos meus estudos, pelos conselhos e ajuda nos momentos de dificuldades que passei, partindo da formação básica, passando pelo ensino médio e, no incentivo a minha formação acadêmica, pessoal e profissional.

Agradecimentos sinceros a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho, trocando idéias, realizando sugestões, dando-nos apoio.

O autor

RESUMO

Neste trabalho propomos a análise das contribuições que uma sequência de ensino aplicada na sala de aula no sentido inverso da praxeologia usual traz para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade, ou seja, como a seqüência de ensino que aborda a introdução à probabilidade, por meio de uma proposta de simulação e modelagem envolvendo “Os passeios aleatórios da Mônica” - atividade para ensinar conceitos básicos de Probabilidades pode favorecer a aprendizagem. A realização deste estudo teve como sujeitos de pesquisa, 70 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da rede privada de ensino, na cidade de São Paulo. Realizamos nossa pesquisa considerando os estudos de Cazorla e Santana (2006), em conjunto com as pesquisas realizadas por Cazorla e Gusmão (2009) e o Grupo de Pesquisa “AVALE”, que utiliza a modelagem como recurso didático. Para analisar as realizações dos estudantes, consideramos os questionamentos mencionados anteriormente e, principalmente a questão: “Quais as contribuições que uma sequência de ensino, aplicada em sala de aula no sentido inverso da praxeologia usual traz para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade?”, está vinculada ao nosso referencial teórico, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e os estudos de Nagamine, Henriques e Cazorla (2010), pois estes entendem que o tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ) descrevem uma organização praxeológica completa $[T/\tau/\theta/\Theta]$, e ainda, pela sugestão da inversão da praxeologia usual ao realizar o estudo de introdução à Probabilidade. Idealizamos o nosso trabalho por meio da realização de uma intervenção de ensino com foco na pesquisa-ação, dada a interação entre o pesquisador e os estudantes, e considerando que o nosso propósito era o de verificar se o processo de simulação e modelagem pode, ou não, favorecer o ensino de probabilidade no Ensino Fundamental de forma experimental.

Palavras-Chave: Ensino de Probabilidade, Simulação e Modelagem Matemática em Probabilidade.

Abstract

In this work analyzes we consider it of the contributions that a sequência of education applied in the classroom in the inverse direction of the usual praxeologia brings for the introductory appropriation of the probability concept, that is, as the education sequence that approaches the introduction to the probability, by means of a proposal of simulation and modeling involving “the random strolls of the Mônica” - activity to teach basic concepts of Probabilities can favor the learning. The accomplishment of this study had as research citizens, 70 students of 8^o year of Basic Ensino of the private net of education, in the city of São Paulo. We carry through our research considering the studies of Cazorla and Santana (2006), in set with the research carried through for Cazorla and Gusmão (2009) and the Group of Research “AVALE”, that it uses the modeling as didactic resource. To analyze the accomplishments of the students, we consider mentioned questionings e previously, mainly the question: “Which the contributions that a sequência of education, applied in classroom in the inverse direction of the usual praxeologia bring for the introductory appropriation of the probability concept? ”, it is tied with our theoretical referencial, the Antropológica Theory of Didactic (TAD) and the studies of Nagamine, Henriques and Utsumi (2009), therefore these understand that the type of task (t), technique (τ), technology (θ) and theory (Θ) describe a complete praxeológica organization [t $\tau/\theta/\Theta$], and still, for the suggestion of the inversion of the usual praxeologia when carrying through the study of introduction to the Probability. We idealize our work focus on teaching experiment, based in a research-action, given to the interaction between the researcher and the students, and considering that our intention was to verify if the process of simulation and modeling it can, or not, to favor the education of probability in Basic Educacion of experimental form.

Word-Key: Education of Probability, Simulation and Mathematical Modeling in Probability.

Sumário

INTRODUÇÃO	17
DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	17
OBJETIVOS E QUESTÕES DE PESQUISA	20
BREVE APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS	21
CAPÍTULO I.....	23
FUNDAMENTOS DE PESQUISA	23
1.1 – ESTUDOS PRELIMINARES	23
1.2 – O ENSINO DA PROBABILIDADE DE FORMA RELEVANTE	23
1.3 – A MODELAGEM COMO RECURSO DIDÁTICO	24
1.4 – AS ATIVIDADES E O EMBASAMENTO TEÓRICO	25
CAPÍTULO II.....	27
FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	27
2.1 – A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (CHEVALLARD)	27
2.2 – A MODELAGEM ANTROPOLÓGICA DA MATEMÁTICA.....	29
2.3 – A ANTROPOLOGIA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA	30
2.4 – OBJETOS OSTENSIVOS E NÃO-OSTENSIVOS - PROBLEMA DA NATUREZA DOS OBJETOS	32
2.5 – ANALISANDO UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA.....	34
CAPÍTULO III.....	35
FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS	35
3.1 – O UNIVERSO DE ESTUDO	35
3.1.1 – CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA.....	35
3.1.2 – OS SUJEITOS DE NOSSA PESQUISA	37
3.2 – O DESENHO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO	37
3.2.1 – A DESCRIÇÃO GERAL DOS ENCONTROS.....	38
3.2.2 – DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ENSINO.....	40
3.2.2.1 – FICHA 1 – A ESTÓRIA (ETAPA I – O CONTEXTO).....	41

PODEMOS ESPERAR QUE OS ESTUDANTES INDIQUEM QUE O ESPAÇO AMOSTRAL DO LANÇAMENTO DE UMA MOEDA HONESTA SEJA: ;	44
3.2.2.2 – FICHA 2 – LANÇAMENTO DA MOEDA (ETAPA II: A EXPERIMENTAÇÃO)	47
3.2.2.3 – FICHA 3 – AS SEQUÊNCIAS OBTIDAS (ETAPA II – A EXPERIMENTAÇÃO).....	49
3.2.2.4 – FICHA 4 – AS SEQUÊNCIAS OBTIDAS (ETAPA II – A EXPERIMENTAÇÃO).....	52
3.2.2.5 – FICHA 5 – A MODELAGEM MATEMÁTICA (ETAPA III)	57
3.2.2.6 – FICHA 6 – A MODELAGEM MATEMÁTICA (ETAPA III, CONTINUAÇÃO).....	66
3.2.2.7 – FICHA 7– A CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES (ETAPA IV)	71
3.2.2.8 – FICHA 8 – A CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES (ETAPA IV)	76
3.2.2.9 – FICHA 9 – COMPARAÇÃO DAS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES (ETAPA V)..	77
3.2.2.10 – FICHA 10 – COMPARAÇÃO DAS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES (ETAPA V)	82
3.3 – O MATERIAL UTILIZADO	85
3.4 – A ATIVIDADE DE ENSINO A SER AVALIADA.....	87
3.4.1 – ETAPA I - A ESTÓRIA (CONTEXTUALIZAÇÃO) E A TAD.....	88
3.4.2 – ETAPA II - EXPERIMENTAÇÃO E A TAD	93
3.4.3 – ETAPA III - MODELAGEM MATEMÁTICA E A TAD.....	98
3.4.4 – ETAPA IV – CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES E A TAD	104
3.4.5 – ETAPA V - AS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES E A TAD	106
CAPÍTULO IV.....	110
A ANÁLISE DAS ATIVIDADES	110
4.1 – ANÁLISE GERAL DE DESEMPENHO DAS TURMAS	110
4.2 – ANÁLISES DE DESEMPENHO EM RELAÇÃO ÀS QUESTÕES.....	112
4.2.1 – ANÁLISE DA "CONTEXTUALIZAÇÃO"	114
4.2.2 – ANÁLISE DA "EXPERIMENTAÇÃO"	119
4.2.3 – ANÁLISE DA "MODELAGEM MATEMÁTICA"	139
4.2.4 – ANÁLISE DA "ÁRVORE DE POSSIBILIDADES"	157
4.2.5 – ANÁLISE DAS "FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES"	164
4.2.6 – RESPOSTAS ÀS QUESTÕES A1Q5, A2Q6 E Q10, A3Q8 E A4Q4.	173
4.2.7 – A OPINIÃO DOS ESTUDANTES E A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE	178
CAPÍTULO V.....	182
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	182
5.1 – REVISITANDO O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE "OS PASSEIOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA".....	182
5.1.1 – APRESENTAÇÃO GERAL.....	183
5.1.2 – RESPOSTA À QUESTÃO DE PESQUISA.....	184
5.2 – CONCLUSÕES	186
5.3 – SUGESTÕES PARA CONTRIBUIÇÕES FUTURAS	188
REFERÊNCIAS.....	190

ANEXOS	193
ANEXO 1 – AS ATIVIDADES E ETAPAS – “OS PASSEIOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA”	193
ANEXO 2 – A SOLICITAÇÃO PARA PROCEDIMENTO DE PESQUISA.....	200
ANEXO 3 – A AUTORIZAÇÃO PARA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	201

Lista de Figuras

FIGURA 1 – CARTAZ ORIGINAL DOS “PASSEIOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA”	42
FIGURA 2 – LEGENDA (ADAPTAÇÃO DO TEXTO DA ATIVIDADE APLICADA)	42
FIGURA 3 - SISTEMATIZAÇÃO DOS RESULTADOS DA EXPERIMENTAÇÃO	47
FIGURA 4 – EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO DO QUADRO 1	48
FIGURA 5 – TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS	53
FIGURA 6 – CONSTRUÇÃO DA TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA	54
FIGURA 7 – QUADRÍCULA DOS CAMINHOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA	58
FIGURA 8 – CROQUI (XXCC) E (XCXC) – ELABORAÇÃO NOSSA.	59
FIGURA 9 – CROQUI (XCCX) E (CXXC) – ELABORAÇÃO NOSSA.	59
FIGURA 10 – CROQUI (CXCX) E (CCXX) – ELABORAÇÃO NOSSA.	60
FIGURA 11 – CROQUI - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR À CASA DE MAGALI.	61
FIGURA 12 - CROQUI - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR À CASA DE CASCÃO.....	62
FIGURA 13 – CROQUI - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR A CASA DE CEBOLINHA.....	63
FIGURA 14 – CROQUI DE - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR À CASA DE BIDU.	64
FIGURA 15 – CROQUI - CAMINHO PARA MÔNICA CHEGAR A CASA DE HORÁCIO.....	65
FIGURA 16 – CROQUI DOS CAMINHOS QUE MÔNICA PODE REALIZAR.....	67
FIGURA 17 – A CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES.....	71
FIGURA 18 – O DIAGRAMA DA ÁRVORE – PRIMEIRO SORTEIO - CARA	73
FIGURA 19 – O DIAGRAMA DA ÁRVORE – PRIMEIRO SORTEIO - COROA.....	73
FIGURA 20 – TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES (TDP).....	74
FIGURA 21 – A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE LAPLACIANA.....	75
FIGURA 22 – A PROBABILIDADE FREQUENTISTA (TDF) E LAPLACIANA (TDP)	77
FIGURA 23 – EXEMPLIFICAÇÃO DE UMA POSSÍVEL SISTEMATIZAÇÃO DOS RESULTADOS	78
FIGURA 24 – O CÁLCULO DE PROBABILIDADES - (UMA DAS CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS)	79
FIGURA 25 – TABELA 3. QUADRO COMPARATIVO DO CÁLCULO DE PROBABILIDADES.....	79
FIGURA 26 – MATERIAL UTILIZADO NA REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES	86
FIGURA 27 – APOIO DIDÁTICO PARA SIMULAÇÃO DOS CAMINHOS ALEATÓRIOS	86
FIGURA 28 – APOIO DIDÁTICO, MOEDAS E DECALQUE MÓVEL	87
FIGURA 29 – PRAXEOLOGIA USUAL INVERTIDA (TAD).....	88
FIGURA 30 – ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS RESULTADOS POR ATIVIDADE	113
FIGURA 31 – PROTOCOLO DA ARGUMENTAÇÃO DA A1D28BQ1	115
FIGURA 32 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D48BQ1.....	115
FIGURA 33 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D28AQ2.....	116

FIGURA 34 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D18BQ2.....	116
FIGURA 35 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D188BQ3.....	117
FIGURA 36 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D88AQ4.....	117
FIGURA 37 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA D3 E 68AQ4; E DA D4 E D78B.....	119
FIGURA 38 – PROTOCOLO DA EXPERIMENTAÇÃO REALIZADA PELA D98B.....	121
FIGURA 39 – CAMINHOS ALEATÓRIOS POSSÍVEIS DE MÔNICA VISITAR MAGALI.....	122
FIGURA 40 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D148BQ2.....	123
FIGURA 41 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D98AQ2.....	123
FIGURA 42 - PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D128BQ3.....	124
FIGURA 43 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D68AQ3.....	125
FIGURA 44 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D98AQ3.....	125
FIGURA 45 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D108AQ3.....	125
FIGURA 46 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D118AQ3.....	126
FIGURA 47 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D16 E D208AQ4.....	127
FIGURA 48 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D148BQ4.....	128
FIGURA 49 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D68AQ5.....	128
FIGURA 50 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D108AQ5.....	129
FIGURA 51 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A2Q53.....	130
FIGURA 52 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D108AQ6.....	130
FIGURA 53 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D118AQ6.....	131
FIGURA 54 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D168AQ6.....	131
FIGURA 55 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D178AQ6.....	132
FIGURA 56 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D128AQ6.....	132
FIGURA 57 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D188B.....	133
FIGURA 58 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD38A.....	134
FIGURA 59 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD88A.....	134
FIGURA 60 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD178A.....	135
FIGURA 61 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D178AQ8.....	136
FIGURA 62 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D188AQ8.....	136
FIGURA 63 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD128BQ9.....	137
FIGURA 64 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D178AQ10.....	138
FIGURA 65 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D68AQ11.....	138
FIGURA 66 – QUADRICULA DAS ATIVIDADES DE PESQUISA.....	140
FIGURA 67 – APRESENTAÇÃO DO CROQUI (XXCC) E (XCXC).....	141
FIGURA 68 - PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D148A E D38BQ1.....	142
FIGURA 69 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D98BQ2.....	143
FIGURA 70 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D18AQ2.....	143
FIGURA 71 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D18BQ3.....	144

FIGURA 72 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D128AQ3.....	144
FIGURA 73 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A38BQ3.....	145
FIGURA 74 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A38A E 8BQ4.....	145
FIGURA 75 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D188BQ4.....	146
FIGURA 76 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3D18AQ5 E Q6.....	146
FIGURA 77 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3D8BQ5 E Q6.....	147
FIGURA 78 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3Q5 E Q6.....	148
FIGURA 79 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3Q7 – “EQUÍVOCOS”.....	150
FIGURA 80 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3Q7 – “EM BRANCO”.....	150
FIGURA 81 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D188BQ7.....	151
FIGURA 82 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D48BQ8.....	151
FIGURA 83 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D58BQ8.....	152
FIGURA 84 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D128BQ8.....	152
FIGURA 85 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D18AQ9.....	154
FIGURA 86 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D38AQ9.....	154
FIGURA 87 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D128AQ9.....	155
FIGURA 88 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D168AQ9.....	155
FIGURA 89 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D148BQ9.....	156
FIGURA 90 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D168BQ9.....	156
FIGURA 91 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D188BQ9.....	157
FIGURA 92 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D198AQ1.....	158
FIGURA 93 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D38AQ1.....	159
FIGURA 94 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D128AQ2.....	160
FIGURA 95 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D188AQ2.....	160
FIGURA 96 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D18AQ3.....	161
FIGURA 97 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D38AQ3.....	161
FIGURA 98 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D128AQ3.....	162
FIGURA 99 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D58AQ4.....	163
FIGURA 100 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D98AQ4.....	163
FIGURA 101 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D168AQ4.....	163
FIGURA 102 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D188BQ4.....	164
FIGURA 103 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA TDF 3 - A58A.....	165
FIGURA 104 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA TDF 3 - A58A.....	166
FIGURA 105 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A58AQ1.....	167
FIGURA 106 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A58AQ2.....	168
FIGURA 107 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A5Q2.....	169
FIGURA 108 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A5Q3.....	170
FIGURA 109 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A58AQ3.....	171

FIGURA 110 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A5Q4	172
FIGURA 111 – PROTOCOLO DE ELABORAÇÃO DA A5D28AQ5	172
FIGURA 112 – PROTOCOLO DE ELABORAÇÃO DA A5D88AQ5	173
FIGURA 113 – PROTOCOLO DE ELABORAÇÃO DA A5D188BQ5	173
FIGURA 114 – OPINIÃO DA D168A SOBRE A ATIVIDADE	178
FIGURA 115 – OPINIÃO CONJUNTA SOBRE A ATIVIDADE.....	179
FIGURA 116 – PREFERÊNCIA DOS ESTUDANTES E AS ATIVIDADES TRABALHADAS	180
FIGURA 117 – PREFERÊNCIA DOS ESTUDANTES E OS ASSUNTOS TRABALHADOS	181

Lista de Tabelas

TABELA 1 – MÉDIA DE DESEMPENHO GERAL DAS TURMAS.....	111
TABELA 2 – DESEMPENHO GERAL DOS ESTUDANTES NAS ATIVIDADES.....	112
TABELA 3 – SÍNTESE GERAL DE RESULTADOS.....	113
TABELA 4 – ANÁLISE GERAL COMPARATIVA ENTRE AS ATIVIDADES.....	114
TABELA 5 – DESEMPENHO NA ATIVIDADE 1.....	114
TABELA 6 – DESEMPENHO DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 2.....	120
TABELA 7 –DESEMPENHO DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 3.....	140
TABELA 8 – DESEMPENHO DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 4.....	159
TABELA 9 – DESEMPENHO, EM PERCENTUAIS, DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 5.....	165

Lista de Quadros

QUADRO 1 - SÍNTESE DAS ATIVIDADES DE ENSINO – A INTRODUÇÃO – “FICHA 1”.....	46
QUADRO 2 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A EXPERIMENTAÇÃO – “FICHA 2”.....	48
QUADRO 3 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A EXPERIMENTAÇÃO – “FICHA 3”.....	52
QUADRO 4 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A EXPERIMENTAÇÃO – “FICHA 4”.....	57
QUADRO 5 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A MODELAGEM MATEMÁTICA – “FICHA 5”.....	66
QUADRO 6 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A MODELAGEM MATEMÁTICA– “FICHA 6”.....	70
QUADRO 7 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – “FICHA 7”.....	75
QUADRO 8 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – “FICHA 8”.....	77
QUADRO 9 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – COMPARANDO AS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES – SORTEIOS ALEATÓRIOS E A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – FICHA 9.....	82
QUADRO 10 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – COMPARAÇÃO DAS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES – A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – FICHA 10.....	85
QUADRO 11 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A1Q5 E A2Q6.....	174
QUADRO 12 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A2Q6 E A2Q10.....	175
QUADRO 13 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A2Q10 E A3Q8.....	176
QUADRO 14 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A3Q8 E A4Q4.....	176

Introdução

Meu interesse pelo tema Probabilidade surgiu durante o Curso de Licenciatura em Matemática. Vale salientar que concomitante ao curso, eu já exercia a prática docente em escolas públicas, na qualidade de professor admitido em caráter temporário (ACT).

Tão logo me formei, ingressei em um Curso de Aperfeiçoamento em estatística e probabilidade pela Universidade de São Paulo (USP). Neste ínterim, surgiu a oportunidade de participar como bolsista da Secretaria de Estado da Educação (SEE) no Mestrado do Programa Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Assim, conclui o curso de aperfeiçoamento e iniciei o Mestrado.

Ingressei no Mestrado com um trabalho que investigava a concepção de professores sobre o ensino de probabilidade. No entanto, buscando conhecer estratégias e metodologias que pudessem enriquecer o meu trabalho pedagógico, passei a considerar a possibilidade de favorecer a aprendizagem discente nesta área de estudo. Assim, meu foco de interesse passou a ser o de atuar junto aos estudantes para superar suas dificuldades no trato deste assunto e, ainda, as minhas próprias dificuldades no ensino do conteúdo. Dessa forma senti-me motivado para desenvolver uma pesquisa não mais voltada para o professor, mas sim para alunos; quis realizar um estudo voltado para uma intervenção de ensino para introduzir alguns conceitos básicos da probabilidade com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Em nossas incursões teóricas, tomamos como ponto de partida os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Este documento oficial menciona ao tratar dos conteúdos procedimentais e conceituais, recomenda-se explorar a ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.

O PCN no bloco de conteúdo Tratamento da Informação recomenda que os docentes trabalhem o tema probabilidade promovendo a compreensão de acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, identificando os resultados possíveis de ocorrência.

Portanto, tomando como fonte de inspiração as recomendações do PCN, nosso trabalho busca apresentar conceitos básicos de probabilidades utilizando a experimentação aleatória. Neste contexto, as atividades são norteadas por conceitos de experimento determinístico e aleatório, eventos, espaço amostral, replicação de experimentos aleatórios.

Sobre este tema podemos ainda mencionar que muitos pesquisadores concordam com a sua relevância e necessidade de inserção no currículo desde os anos iniciais da escola básica, tais como, Lopes (1999), Cazorla e Santana (2006), Cazorla e Gusmão (2009), Nagamine, Henriques e Cazorla (2010), Nascimento (2007), Pereira (2010), Pagan (2010) e Pires (2009), dentre outros.

Dentre os vários estudos, vale citar o realizado por Lopes (2005) visto que suas reflexões corroboram com as sugestões dos PCN. A autora em sua pesquisa sobre o ensino da estocástica na educação básica voltada para a formação de professores destaca que este estudo é indispensável na formação dos estudantes, para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Lopes (ibid) fala da necessidade de desenvolvemos uma prática pedagógica pautada em propostas de situações em que os estudantes realizem atividades considerando seus contextos, suas observações, a construção dos eventos possíveis por meio de experimentação concreta, de coleta e de organização de dados.

A autora ressalta a necessidade de trabalharmos dentro do currículo de matemática com situações que envolvam a ideia de acaso (ou aleatório), para não reduzir o ensino desta ao verdadeiro e falso de suas proposições, e ainda, que o desenvolvimento do pensamento probabilístico pode efetivar as potencialidades matemáticas.

Nossa pesquisa partirá do pressuposto que a introdução ao ensino de probabilidade desenvolver-se-á segundo situações familiares aos estudantes, de forma contextualizada, investigada e analisada.

Acreditamos ainda, que a modelagem pode ser utilizada como um recurso didático (procedimento) de simulação de um experimento aleatório, visando à iniciação (introdução) à teoria da probabilidade. Assim, buscamos uma proposta que não dê ênfase apenas aos cálculos e fórmulas, mas também às estratégias de resolução de problemas e análise dos resultados obtidos.

Neste sentido, encontramos nos trabalhos envolvendo probabilidade experimental de Batanero (2001) subsídios que nos permitiram compreender que muitas atividades matemáticas poderão ser descritas por meio de um processo de modelização.

Amparados pelas ideias desses autores, buscamos explicação e embasamento na Teoria Antropológica do Didático (TAD), por entendermos que se trata de um referencial de análise importante, que permite interpretar as especificidades da sala de aula, no que diz respeito ao epistemológico do Saber Ensinado. Neste contexto, entendemos que a Matemática ajusta a sua estruturação ao pensamento científico, compondo os modelos probabilísticos, enquanto linguagem.

Acreditamos que o trabalho envolvendo conceitos de Probabilidade promoverá a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano. A partir dessa crença, procuramos trabalhar com situações nas quais os estudantes pudessem realizar a experimentação, fazer observações de eventos, construir procedimentos para coletar, organizar e interpretar dados, utilizar tabelas, gráficos e representações de processos determinísticos ou aleatórios.

Ressaltamos, ainda, que o trabalho envolvendo probabilidade experimental é uma dos grandes desafios do professor de matemática, visto que o livro didático adotado no Ensino Fundamental e Médio, nas Escolas de ensino Público, e/ou Privado na cidade de São Paulo, de um modo geral, não favorece o desenvolvimento de uma prática pedagógica pautada em contextos, observações e construção do conhecimento probabilístico extraídos de situações problemas.

Expostas estas reflexões iniciais apresentamos o objetivo e a questão de pesquisa que norteiam este estudo, bem como os objetivos e questões de pesquisas específicas.

OBJETIVOS E QUESTÕES DE PESQUISA

Nosso objetivo neste trabalho é investigar as contribuições que uma sequência de ensino, quando aplicada em sala de aula no sentido inverso da praxeologia usual, traz para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade¹. Estamos utilizando o termo praxeologia no sentido de Chevallard (1992) e com isto, nossas investigações buscaram compreender a influência da estrutura metodológica de condução na aprendizagem dos conceitos trabalhados.

Desdobramos este objetivo em outros mais específicos:

INVESTIGAR SE A EXPERIMENTAÇÃO DETERMINÍSTICA E ALEATÓRIA PODE SER ENTENDIDA E DIFERENCIADA POR ESTUDANTES A PARTIR DA SEQUÊNCIA DE ENSINO

VERIFICAR COMO OS ALUNOS REALIZAM A MODELAGEM MATEMÁTICA COM BASE NA EXPERIMENTAÇÃO E OBSERVAÇÃO DE EVENTOS, OU SEJA, A PARTIR DA EXPLORAÇÃO DA IDEIA DE PROBABILIDADE COM BASE NA SITUAÇÃO-PROBLEMA APRESENTADA, NA IDENTIFICAÇÃO E AVALIAÇÃO DAS POSSIBILIDADES DE COMBINAR OS ELEMENTOS DE CADA EVENTO, NA CONTAGEM, NAS ESTRATÉGIAS PESSOAIS E COLETIVAS.

OBSERVAR SE A PERSPECTIVA TEÓRICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA CONTRIBUI PARA AMPLIAR A APRENDIZAGEM DOS CONTEÚDOS ABORDADOS.

INVESTIGAR COMO OS ALUNOS JUSTIFICAM SEU RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO, SUA FORMA DE COLETA DOS DADOS, SUA ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE, ASSIM COMO, A FORMULAÇÃO DE ARGUMENTOS, INFERÊNCIAS CONVINCENTES E REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS REALIZADAS.

Considerando esses objetivos propomos como questão de pesquisa o que segue:

QUAIS AS CONTRIBUIÇÕES QUE UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO, UTILIZADA EM SALA DE AULA NO SENTIDO INVERSO DA PRAXEOLOGIA USUAL TRAZ PARA A APROPRIAÇÃO INTRODUTÓRIA DO CONCEITO DE PROBABILIDADE?

¹ Ao utilizarmos o termo “sentido inverso da praxeologia usual”, estamos nos referindo àquela praxeologia da sala de aula tradicional, na qual o professor apresenta o conteúdo a partir da teoria, iniciando por sua definição, para, na sequência partir para a resolução de problemas sobre esse conteúdo. No nosso caso iniciaremos nossa praxeologia pela experimentação, atividades, para só depois discutirmos esse conteúdo do ponto de vista teórico. A essa postura chamaremos doravante “*praxeologia invertida*”.

Tal como fizemos com o objetivo, esta questão de pesquisa também foi desdobrada em quatro outras questões, cujas respostas a elas nos subsidiarão para responder a questão geral de pesquisa. São elas:

COMO OS ESTUDANTES DIFERENCIAM A EXPERIMENTAÇÃO DETERMINÍSTICA DA ALEATÓRIA A PARTIR DA SEQUÊNCIA DE ENSINO?

COMO OS ALUNOS REALIZAM A MODELAGEM MATEMÁTICA COM BASE NA EXPERIMENTAÇÃO E OBSERVAÇÃO DE EVENTOS?

QUAIS CONTRIBUIÇÕES DA ATIVIDADE ENVOLVENDO A MODELAGEM MATEMÁTICA PARA AMPLIAR A APRENDIZAGEM DOS ALUNOS QUANTO AOS CONTEÚDOS ABORDADOS?

COMO OS ALUNOS JUSTIFICAM SEU RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO, SUA FORMA DE COLETA DOS DADOS, SUA ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE, ASSIM COMO, A FORMULAÇÃO DE ARGUMENTOS, INFERÊNCIAS CONVINCENTES E REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS REALIZADAS?

Apresentados os objetivos e a questão norteadora para atingir os propósitos a que se destina esta pesquisa a dividimos em quatro capítulos conforme breve apresentação a seguir.

Após termos delimitado o que desejamos pesquisar, tendo exposto explicitamente o problema do estudo, apresentamos a seguir o caminho que percorreremos para atender aos objetivos e responder às questões de pesquisa.

BREVE APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Início o trabalho pelas reflexões presentes nesta introdução, que visa esclarecer as nossas motivações pessoais, organizar e construir a nossa problemática, objetivos pretendidos e questão de pesquisa. Acrescentamos a esta introdução, quatro capítulos e, ainda, as considerações finais, as referências bibliográficas, anexos e apêndices que em conjunto constituem esta dissertação. A seguir apresentaremos, de maneira breve, um resumo de cada uma dessas partes que juntas constituirão nossa dissertação de mestrado.

No **Capítulo I** apresentaremos os fundamentos deste trabalho. Nele discutiremos as pesquisas voltadas ao ensino da probabilidade e, em particular, aqueles que tratam do ensino de conceitos introdutórios de Probabilidade.

O **Capítulo II** destina-se a apresentar o aporte teórico no qual nosso trabalho se apoiará. Trata-se da Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida Chevallard, estudioso francês do campo de ensino das matemáticas.

O Capítulo III é dedicado à apresentação da metodologia do estudo realizado, que consistiu de um estudo intervencionista, aplicado com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. No capítulo descrevemos o universo do estudo, caracterizando a escola, bem como os estudantes (sujeitos de pesquisa) que dele tomaram parte. Na sequência detalharemos o desenho do experimento.

No **Capítulo IV** procederemos com a análise das atividades referentes à nossa intervenção de ensino. Esta análise iniciar-se-á pela ótica quantitativa, quando os resultados dos alunos nas fichas de atividades serão considerados em termos de sucesso ou fracasso (certo ou errado) e, aplicado o teste estatístico de McNemar para observar se as diferenças entre os desempenhos são estatisticamente significativas. A segunda, e principal, parte da análise são feitas sob a ótica qualitativa dos dados.

De posse dos resultados analisados, adentramos na última parte da dissertação, qual seja, as considerações finais. Nela retomaremos o objetivo e, principalmente, as questões de pesquisa com a finalidade de respondê-las.

Concluiremos as considerações finais da dissertação apresentando sugestões para futuras pesquisas. Nossa expectativa é que o conjunto dos resultados de nossas reflexões bem como as respostas às nossas questões de pesquisa possa contribuir para repensar o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos visando à introdução ao ensino de probabilidade.

Capítulo I

Fundamentos de Pesquisa

Neste capítulo apresentamos nossas reflexões sobre o ensino de probabilidade e estudos realizados, a fim de organizar e construir a nossa problemática, questão de pesquisa e objetivo pretendido, este último já enunciado da apresentação desta dissertação.

1.1 – ESTUDOS PRELIMINARES

Sobre o tema probabilidade podemos mencionar que são vários os pesquisadores que falam da relevância e da necessidade de inserção no currículo do tema probabilidade, desde os anos iniciais da escola básica.

Citamos Lopes (2005) que realizou um estudo sobre o ensino da estocástica na educação básica relacionando-a a formação de professores, destacando que este estudo é indispensável para a formação dos estudantes, para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, considerando seus contextos, suas observações, a construção dos eventos possíveis por meio da experimentação concreta, de coleta e de organização de dados.

1.2 – O ENSINO DA PROBABILIDADE DE FORMA RELEVANTE

Lopes (ibid) fala da necessidade de desenvolvemos uma prática pedagógica pautada em propostas de situações em que os estudantes realizem atividades considerando seus contextos, suas observações, a construção dos eventos possíveis por meio de experimentação concreta, de coleta e de organização de dados.

Segundo Lopes (2005),

Não basta ao cidadão entender as porcentagens expostas em índices estatísticos, como o crescimento populacional, taxas de inflação, desemprego... É preciso analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade. Assim como não é suficiente ao estudante em qualquer nível de ensino (grifo nosso) desenvolver a capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões. (LOPES, 2005, p.2)

Em sua opinião, e também é nosso pensamento, o ensino da probabilidade contribuirá para a efetivação da frase “educar para a cidadania” quando os estudantes tiverem a possibilidade de se deparar com problemas variados do mundo real, de escolher suas próprias estratégias para solucioná-los, de valorizar seus próprios trabalhos, e para que isso ocorra é necessário favorecer o desenvolvimento de situações que envolva a interpretação, o estabelecimento de estratégias para a resolução.

Outro fato apontado por Lopes (2005) é que,

[...] não faz sentido trabalharmos atividades envolvendo conceitos estatísticos e probabilísticos que não estejam vinculados a uma problemática. Propor coleta de dados desvinculada de uma situação-problema não levará à possibilidade de uma análise real. Construir gráficos e tabelas, desvinculados de um contexto ou relacionados a situações muito distantes do aluno podem estimular a elaboração de um pensamento, mas não o desenvolvimento de sua criticidade. (LOPES, 2005, p.3)

A autora ressalta a necessidade de trabalharmos dentro do currículo de matemática com situações que envolvam as ideias de acaso e de aleatório, para não reduzir o ensino desta ao verdadeiro e falso de suas proposições, e ainda, que o desenvolvimento do pensamento probabilístico pode efetivar as potencialidades matemáticas.

1.3 – A MODELAGEM COMO RECURSO DIDÁTICO

Nossa pesquisa partirá do pressuposto, de que a modelagem pode ser descrita como um recurso didático (procedimento) de simulação de um experimento aleatório, visando à iniciação (introdução) à teoria da probabilidade. Não queremos dar ênfase apenas a cálculos e fórmulas, estratégias de resolução de problemas ou análise de resultados obtidos.

Segundo Batanero (2001), grande parte das atividades matemáticas pode ser descrita por meio de processo de modelagem. O trabalho envolvendo probabilidade experimental é uma preocupação nossa e de alguns pesquisadores nesta área, pois os livros didáticos que são utilizados (ou indicados para adoção) no Ensino Fundamental e Médio, do ensino público (municipal e estadual) e particular na cidade de São Paulo, não favorecem o desenvolvimento de uma prática pedagógica pautada na proposta de situações (atividades) considerando contextos, observações e construção do conhecimento probabilístico extraídos de problemáticas.

Considerando o trabalho de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), que trata de investigações matemáticas na sala de aula, entendemos que o foco desta está na descoberta de relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, assim como, na identificação das suas respectivas propriedades e, considerando a abordagem do tema Probabilidade, tendemos a acreditar que este trabalho poderá contribuir para que os estudantes entendam de forma lúdica, a introdução à probabilidade por meio da modelagem dos passeios aleatórios da Mônica.

Por entender que o trabalho envolvendo Probabilidade promove a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano, cabe a nós educadores, propor situações em que os estudantes possam realizar a experimentação, fazer observações de eventos, construir procedimentos para coletar, organizar e interpretar dados, utilizar tabelas, gráficos e representações de processos determinísticos ou aleatórios.

1.4 – AS ATIVIDADES E O EMBASAMENTO TEÓRICO

Iremos buscar explicação e embasamento teórico na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard, por entendermos que se trata de um referencial de análise importante, que permite interpretar as especificidades da sala de aula que está relacionado ao epistemológico do Saber Ensinado. Entendemos que a Matemática ajusta a sua estruturação ao pensamento científico, compondo os modelos probabilísticos, enquanto linguagem.

Queremos que esta linguagem se constitua num meio de dar forma às ideias que poderão, eventualmente, tornar o mundo compreensível e, que a modelagem possa relacionar-se com a necessidade da pesquisa sobre o modelo teórico (meramente racional) e o modelo empírico (baseado na experiência), sendo que as tarefas relacionadas com o estudo em questão serão realizadas pelos estudantes, na pretensão de que a modelagem seja um fator de motivação para a realização deste estudo.

Entendemos que, de forma geral, a linguagem empregada pelo homem, as palavras, são ideias. A gramática, ortografia, sintaxe e outras características da análise linguística são formas de se articular palavras para exprimir nosso pensamento. A matemática se constitui numa linguagem, dentre várias outras, a nossa disposição para estruturar o pensamento e o pensamento probabilístico.

Com essa visão, na seção a seguir apresentamos, de forma breve, e ainda superficial, a teoria que subsidiou o nosso estudo. Na oportunidade informamos que esta teoria será discutida a mede no Capítulo III.

Capítulo II

Fundamentos Teóricos

Estruturamos nossa fundamentação teórica na Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Chevallard (1992) e estudada por Almouloud (2007). A TAD proposta por seu autor no sentido de uma Organização Praxeológica ou simplesmente Praxeologia é descrita a partir de noções que permitem a modelagem das práticas sociais em geral e, das atividades matemáticas, em particular.

2.1 – A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (CHEVALLARD)

A Teoria Antropológica do Didático é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois é uma evolução do conceito de Transposição Didática inserida no campo da Antropologia, tendo como foco as organizações praxeológica-didática, voltadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas. Essa teoria estuda as condições de realização e funcionamento de sistemas didáticos entendidos como relações sujeito-instituição-saber.

Segundo Almouloud (2007), o estudo do homem perante o saber matemático, ou seja, perante situações matemáticas é denominada Teoria Antropológica do Didático, porque situam as atividades e estudos considerando a matemática, dentro de um conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Considerando a criação de um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o meio no qual se desenvolve a aprendizagem, a Teoria das Situações

Didáticas desenvolvidas por Guy Brousseau buscou modelar o processo de ensino aprendizagem dos conceitos matemáticos. Segundo esse autor,

[...] um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de estudantes, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos (BROUSSEAU, 1975, apud ALMOULOU, 2007, p. 31).

A Teoria das Situações Didáticas tem por objetivo caracterizar o processo de aprendizagem por um conjunto de situações reprodutíveis, que mudam o comportamento dos estudantes, caracterizando a aquisição de um determinado conhecimento. Tem como objetivo central o estudo das situações didáticas, localizadas nas interações estabelecidas entre o professor, o *estudante* e o saber, ou seja, teorizar os fenômenos ligados a essas interações na busca da especificidade do conhecimento ensinado.

Essa teoria se apoia no fato de que o estudante aprende adaptando-se as dificuldades, contradições, desequilíbrios e, por meio de novas respostas e adaptações adquire conhecimento diante de situações problemáticas. Considera que, sem intenção didática a aquisição de conhecimento se torna ou é inútil e o professor criará e organizará o processo para o desenvolvimento de situações que favoreça/provoque essas aprendizagens.

Por fim, considera-se que situações didáticas solidificam os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, além do fato de que, desconsiderando conhecimentos mal estabelecidos, superam os obstáculos e fortalecem o ato de conhecer.

Segundo Almouloud (2007), a teoria das situações didáticas (TSD) foi desenvolvida no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, provocando pelo menos três rupturas de natureza epistemológica no campo da educação matemática.

A primeira, ao considerar a matemática como essência dos fenômenos didáticos; a segunda, pautada pelo desejo de elaborar uma ciência educacional dos tais fenômenos, ou seja, de elaborar uma ciência dos fenômenos didáticos, levando-o a explicitarem os modelos utilizados e submetê-los às leis de uma “epistemologia experimental”; e a terceira, relacionada à visão clássica do saber

matemático com a suposição de que, os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos através das atividades que eles permitem realizar, ou então através dos problemas que permitem resolver:

[...] os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos e aprendidos por meio de atividades e problemas que podem ser resolvidos pela mobilização desses conhecimentos. A matemática é, antes de tudo, uma atividade que se desenvolve em situação que pode ser modelada por um jogo cujo oponente é um meio antagônico. (ALMOULOU, 2007, p. 112).

Além disso, trata-se de uma atividade estruturada, na qual se podem destacar diferentes fases: ação, formulação e validação, bem como a devolução e a institucionalização, sendo que o aluno é o ator principal e o professor, o responsável pela devolução e institucionalização do conhecimento.

2.2 – A MODELAGEM ANTROPOLÓGICA DA MATEMÁTICA

Ao desenvolver a noção de transposição didática para distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, Chevallard nos remete ao estudo do processo evolutivo pelo qual passa um objeto de ensino, ou seja, o estudo das transformações ocorridas em um saber desde o momento em que ele foi concebido, até o momento em que ele é ensinado, apontando para a existência da diferença entre a matemática do professor, do matemático e do estudante.

Almouloud (2007) menciona que uma classe de objetos a ensinar é o resultado de um tratamento didático que obedece a regras precisas e, que estes mecanismos permitem a passagem de um objeto de saber a um objeto de ensino. Em outras palavras, “um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre, então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino”.

Essas transformações que partem de um objeto de saber para um objeto a ensinar, é o que chamamos de Transposição Didática.

Nesse sentido, a noção de transposição didática, será interpretada como o desenvolvimento da dupla ruptura epistemológica provocada pela teoria das situações, por mostrar que o saber matemático (saber científico, ensinado ou a

ensinar) está no centro da problemática, didaticamente falando. Conseqüentemente, esse saber jamais pode ser considerado algo inquestionável e as pesquisas em Didática da Matemática são condicionadas pelo tipo de modelagem escolhida.

2.3 – A ANTROPOLOGIA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A “Antropologia Didática da Matemática” estuda o homem frente a situações matemáticas, ou seja, tem o objetivo de analisar o saber matemático sob a ótica epistemológica do saber do ponto de vista didático. Segundo Almouloud (2007), essa análise se enuncia essencialmente em termos de objetos de saber, os quais são divididos em objetos matemáticos, protomatemáticos e paramatemáticos.

A Didática da Matemática, sob o ponto de vista antropológico do conhecimento (antropologia cognitiva) considera que tudo é objeto, diferenciando os tipos de objetos particulares, tais quais, as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições e, nomeia os indivíduos como sujeitos das instituições.

Para este autor, o conhecimento e o saber são considerados como forma de organização de conhecimentos, entendendo que a existência de um objeto é verificada quando um sujeito ou uma instituição o reconhece, ou seja, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de ao menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Sob a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), as noções de (tipo de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria, permitem a modelagem das práticas sociais em geral e, particularmente, a atividade matemática encontra fundamento em três postulados:

“TODA PRÁTICA INSTITUCIONAL PODE SER ANALISADA, DE DIFERENTES PONTOS DE VISTA E DE DIFERENTES MANEIRAS, EM UM SISTEMA DE TAREFAS RELATIVAMENTE BEM DELINEADAS”.

“O CUMPRIMENTO DE TODA TAREFA DECORRE DO DESENVOLVIMENTO DE UMA TÉCNICA”.

Quanto à palavra técnica, é usada no sentido de “maneira de realizar” certa tarefa, sem imaginar um procedimento estruturado e metódico, ou

algorítmico. A delimitação de tarefas em uma prática institucional sofre mudança de acordo com a instituição em que se desenvolve a prática, com a posição institucional, e depende do conjunto de tarefas que as pessoas, que ocupam essa posição, devam realizar ao usar determinadas técnicas.

“A ECOLOGIA DAS TAREFAS, QUER DIZER, AS CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES QUE PERMITEM SUA PRODUÇÃO E SUA UTILIZAÇÃO NAS INSTITUIÇÕES”.

Neste, encontramos a suposição de que, para existir em uma instituição, uma técnica precisa ser pelo menos compreensível, legível e justificada. Trata-se aqui de uma condição mínima para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas realizadas, que são geralmente tarefas supondo a colaboração de várias personagens.

Segundo Bosch e Chevallard (1999),

...a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada (...) essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que chamamos teoria da técnica e que constitui o fundamento último (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85-86, apud ALMOULOU, 2007, p. 116)

Conforme citamos, a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas caracteriza a tecnologia da técnica e, toda tecnologia precisa de uma justificação denominada teoria da técnica. Já a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa. O que foi caracterizado com os dois postulados anteriores é mencionado por Chevallard como um bloco prático-técnico, formado por um tipo de tarefa e por uma técnica a ser identificado em linguagem corrente (o saber fazer). Um conjunto de técnicas, de tecnologia e de teorias organizadas para um tipo de tarefa, forma uma organização “praxeológica²” (ou praxeologia) pontual.

² A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, práxis e logos, que significam, respectivamente, prática e razão, reportando-se ao fato de que uma prática humana está acompanhada de um discurso justificado pela prática, e que lhe dá razão.

Segundo Almouloud (2007), para Chevallard toda atividade em Matemática consiste em executar uma tarefa “t” de determinado tipo “T”, por meio de uma técnica “ τ ”, que é justificada por uma tecnologia “ θ ” e a qual, por sua vez, é justificada por uma teoria “ Θ ”. Esse autor considera o bloco [tarefa/técnica] o saber-fazer, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é o saber. Assim, em torno de um tipo de tarefa se encontra um trio formado por uma técnica, uma tecnologia e uma teoria, e isso constitui uma praxeologia pontual.

Entendemos que um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, permitindo funcionar como um mecanismo de produção do conhecimento, requerendo uma linguagem comum que permite descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da organização matemática local, integrando uma organização matemática regional.

Almouloud (2007) menciona que, a análise conjunta da dinâmica do processo de estudo e de sua estrutura permitem determinar seu grau de completude e depende do cumprimento das condições seguintes, para que o processo de construção (ou reconstrução) escolar ocorra:

- [...] Uma organização matemática local deve responder a questões que não podem ser respondidas por nenhuma organização matemática que constitui sua razão de ser;
- [...] O processo de reconstrução deve ter momentos exploratórios que permitam comparar variações de técnicas que aparecem ao abordar diferentes tarefas;
- [...] A exploração de uma organização matemática local deve incidir em um verdadeiro trabalho da técnica, provocando seu desenvolvimento progressivo;
- [...] Na reconstrução de organização matemática local devem aparecer novas questões matemáticas relativas às diferentes técnicas que irão surgindo (questionamento tecnológico);
- [...] É preciso avaliar a qualidade dos componentes da organização matemática local construída. Essa avaliação mostrará a necessidade de articulá-la com outras organizações matemáticas locais para construir uma organização matemática regional. (ALMOULOU, 2007, p. 117-119)

2.4 – OBJETOS OSTENSIVOS E NÃO-OSTENSIVOS - PROBLEMA DA NATUREZA DOS OBJETOS

Segundo Almouloud (2007), o problema da “natureza” dos objetos matemáticos e o de seu funcionamento na atividade matemática, estabeleceram

uma dicotomia diferenciando dois tipos de objetos: **os objetos ostensivos**, e **os objetos não-ostensivos**.

Enquanto os objetos ostensivos se referem a todo objeto de certa natureza sensível e materialidade, e que, desse fato, tem para o sujeito uma realidade perceptível, os objetos não-ostensivos são todos esses “objetos” que, como as ideias, as instituições ou os conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto, eles sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria.

Os objetos não ostensivos só podem ser interpretados ou auxiliados pelo domínio adequado de certos objetos ostensivos associados e, esses podem ser uma palavra, uma frase, um gráfico, uma escrita, um gesto, ou um discurso. Entendemos que o uso do termo genérico “manipulação” designa os diversos usos possíveis dos objetos ostensivos pelo sujeito e que, a diferença entre “objetos ostensivos” e “objetos não-ostensivos” reside no fato de que os objetos ostensivos podem ser manipulados.

Para o autor, na abordagem Antropológica o desenvolvimento de uma técnica se traduz pela manipulação de objetos ostensivos regulados pelos objetos não-ostensivos, sendo que os objetos ostensivos constituem a parte perceptível da atividade.

A percepção dos ostensivos é natural e explica, o que a teoria das situações evidenciou sob o nome de estratégias didáticas de ostensão. Além disso, a co-ativação de objetos não-ostensivos e de objetos ostensivos é sempre presente e aparece em todos os níveis de uma atividade, bem como em nível da técnica e de seu ambiente tecnológico-teórico.

Para Almouloud (2007), a técnica de escrever supõe uma manipulação de objetos ostensivos de forma escrita, oral, gestual, e essa manipulação é monitorada por objetos não-ostensivos. Geralmente, na análise da atividade matemática, a dialética ostensivo/não-ostensivo é idealizada em termos de signos e de significação: os objetos ostensivos são signos de objetos não-ostensivos que constituem o sentido ou a significação. Os diferentes objetos ostensivos são caracterizados pelo registro (oral, da escrita, gráfico, gestual, material).

2.5 – ANALISANDO UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

Almouloud (2007) menciona que a praxeologia associada a um saber é formada pelo saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) e, para Chevallard (1999, 2002) as praxeologias associadas a um saber matemático podem ser de cunho matemático, se fizer referência à realidade matemática construída para ser desenvolvida na sala de aula e, didáticas se a referência focar a maneira com que se executa essa construção.

A passagem da praxeologia de uma instituição para outra é chamada de Transposição Didática por Chevallard (2002) quando a instituição de destino é uma escola, classe, etc., e quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, observaremos o objeto, descrevendo-o, analisando-o e, finalmente, desenvolvendo atividades que objetivam o ensino e a aprendizagem do objeto de estudo (Organização matemática e didática).

Introduziu a noção de momento para descrever uma organização didática e remete, aparentemente, à estrutura temporal o processo de estudo, definindo seis momentos (encontro com a organização praxeológica por meio de tarefas; exploração das tarefas e o início da elaboração de uma técnica para resolver esse tipo de tarefas; construção do ambiente tecnológico/teórico que começa a se construir desde o primeiro encontro, buscando a precisão durante o estudo; trabalho com a técnica em diferentes tarefas; institucionalização, onde a organização matemática é definida; a avaliação das relações pessoais e da relação institucional).

Fundamentamos assim, o nosso trabalho, apresentando os estudos que consideramos relevantes.

Capítulo III

Fundamentos Metodológicos

Este capítulo é dedicado à apresentação da metodologia utilizada em nosso trabalho. Iniciaremos por descrever o universo do estudo, momento em que descreveremos a escola na qual desenvolvemos a pesquisa e, ainda, os sujeitos dela participantes. Na sequência apresentaremos o desenho do experimento, quando faremos a descrição dos encontros, relatando com detalhes a nossa sequência de ensino, a qual foi desenvolvida por meio de fichas de atividades. Por fim descreveremos os materiais utilizados ao longo da sequência, concluindo o capítulo com a apresentação da estrutura de análise das atividades que adotaremos no estudo.

3.1 – O UNIVERSO DE ESTUDO

Esta seção será sub-dividida em duas partes, sendo que na primeira apresentaremos a escola e na segunda os sujeitos envolvidos na pesquisa.

3.1.1 – CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O estudo foi realizado em uma instituição de ensino privado, situada na Zona Leste – Vila Talarico, na Capital de São Paulo. Esta escola foi escolhida por motivos pragmáticos, quais sejam, por ser o local onde o pesquisador realiza suas atividades docentes, e ainda, por apresentar condições necessárias para desenvolver as atividades, visto o acolhimento da direção, coordenação e alunos.

A Escola é de fácil acesso e apresenta seu corpo discente formado por filhos de civis e militares (principalmente por filhos de militares), de perfil socioeconômico heterogêneo. É uma das oito unidades de ensino mantidas por uma associação sem fins econômicos, de caráter beneficente, filantrópico e educativo, cujo Estatuto encontra-se registrado desde 08 de maio de 2006 sob nº. 85.765.

Esta unidade iniciou suas atividades em 31.01.2000, oferecendo formação nos níveis dos ensinos Fundamental e Médio, autorizada pela Portaria da Diretoria Regional de Ensino – Leste 4, publicada no D.O.E. de 29.01.00. Posteriormente passou também a oferecer o curso de Educação Infantil, autorizado pela portaria da Diretoria Regional – leste 4, publicada no D.O.E. 116 de 23.11.2006.

A unidade escolar é estruturada por setores e atividades, apresentando uma Diretora designada, três Coordenadoras Pedagógicas (Educação Infantil ao quarto ano do Ensino Fundamental, do quinto ao oitavo ano do Ensino Fundamental e, nono ano do Ensino Fundamental e, primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Médio), Seção de Orientação Psicológica e de Inclusão, Corpo Docente, Serviço de Apoio Técnico-Pedagógico, Serviço administrativo e de Apoio Escolar (Almoxarifado, Secretaria Escolar, Caixa, Nutrição, Administração Predial e Manutenção Geral, Portaria, Zeladoria e Atendimento ao Público).

Além disso, seu regimento apresenta, ainda, Grêmios Estudantil (vinculado à coordenação de Ensino e Psicologia) e um Conselho Representativo de Alunos – CRA, formado por dois alunos de cada sala de aula eleitos semestralmente pelos componentes (alunos) da turma.

Do ponto de vista de infraestrutura, a escola oferece 25 salas de aulas, Biblioteca, Laboratório de Ciências/Biologia/Física/Química, Laboratório de Informática, Enfermaria, 3 Quadras de Esportes, Piscina Semiolímpica, Cantina, além de Bazar e Armários e, do ponto de vista do alunado, no ano de 2009 a escola tem 1486 alunos matriculados, sendo 790 no período matutino e 696 no período vespertino.

3.1.2 – OS SUJEITOS DE NOSSA PESQUISA

Nossos sujeitos de pesquisa foram estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da escola descrita na seção anterior. As classes foram escolhidas ao acaso e realizado com todos os alunos de cada uma delas. Para termos maior controle na realização dos procedimentos que nortearam nossa pesquisa, escolhemos duas turmas das quais lecionávamos.

A escola tem 121 estudantes que cursam o 8º ano escolar, distribuídos em três turmas, sendo duas turmas no período da manhã, que juntas somam 82 estudantes, e uma turma à tarde, com 39 estudantes. Com o objetivo de minimizar o efeito da presença do pesquisador no desenvolvimento do estudo, optamos por realizar a sequência de ensino apenas nas turmas em que já atuávamos como professor de Matemática. Dessa forma, o pesquisador não seria alguém estranho aos estudantes. Por esse motivo optamos por trabalhar com as duas turmas (A e B) do período da manhã, o que significa dizer que iniciamos a pesquisa com 82 sujeitos.

Os alunos foram identificados por fichas e trabalharam em duplas. No “8º A” escolha dos elementos das duplas ficou a cargo dos próprios estudantes, enquanto que no “8º B”, a disposição das duplas obedeceu à ordem numérica, pois no primeiro encontro realizado na sala de ARTES, os estudantes já dispostos nesta condição acharam melhor permanecerem como já estavam organizados. Embora tenhamos trabalhado, ao longo da aplicação da sequência, com todos os estudantes que estivessem presentes em sala de aula, para efeito da pesquisa, foram computados apenas aqueles que estiveram presentes em todos os encontros. Por essa razão tivemos a perda de seis sujeitos, o que significa dizer que nosso estudo teve 70 sujeitos participantes.

3.2 – O DESENHO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Essa intervenção foi delineada a partir de uma adaptação da atividade “os passeios aleatórios da Mônica”, proposta por Cazorla e Santana (2006), visando o ensino de Probabilidade e Estatística, tanto para professores das séries iniciais do Ensino Fundamental (Licenciados em Pedagogia), quanto para professores das séries finais do Ensino Fundamental e, ainda, do Ensino Médio

(Licenciados em Matemática). Essas autoras, inspiradas no trabalho de Fernandez e Fernandez (1999) voltado para o ensino da distribuição Binomial a alunos do Ensino Superior, propõem que a atividade seja desenvolvida em cursos de formação de professores em serviço.

A atividade foi escolhida pelo fato de envolver probabilidade de forma lúdica e porque o conteúdo matemático nela trabalhado parece ser de grande dificuldade para a compreensão dos estudantes. Do nosso ponto de vista, tal atividade permite que o trabalho seja realizado de forma crescente, sem necessitar que os estudantes apresentem conhecimentos prévios sobre o assunto.

É necessário enfatizar que esta atividade foi aplicada inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999) com alunos do Ensino Superior. Já com algumas alterações e com um roteiro de tarefas, Cazorla e Santana (2006) o aplicaram posteriormente com pedagogos. Tal atividade voltou a sofrer adaptações nossa para que pudéssemos trabalhar com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. Essas adaptações serão apresentadas durante a descrição das atividades.

As atividades foram desenvolvidas em cinco etapas mantendo a proposta de Cazorla e Santana (ibid.), a saber: **Etapa I:** Apresentação da estória (contexto); **Etapa II:** Experimentação Aleatória; **Etapa III:** Modelagem matemática; **Etapa IV:** Construção da árvore de possibilidades; e **Etapa V:** Comparação das duas formas de atribuir probabilidades.

Essas etapas foram distribuídas em dez fichas de atividades (Anexo 1) a serem respondidas em dupla e a sua aplicação ocorreu em cinco encontros que, juntos, totalizaram seis horas/aulas. Na seção a seguir descreveremos, resumidamente do que tratou cada um dos encontros.

3.2.1 – A DESCRIÇÃO GERAL DOS ENCONTROS

1º Encontro – Esse encontro, com duração de uma hora/aula, foi direcionado para a realização da etapa I (contexto), a qual, por sua vez, estava voltada para a introdução das noções de: experimento determinístico e aleatório, a determinação do espaço amostral relacionado ao lançamento imaginário de

uma moeda, a atribuição intuitiva de probabilidade associada ao experimento “lançar uma moeda” e aos eventos “amigos a serem visitados”. Nesse encontro foi trabalhada a ficha 1. Os alunos deverão responder a seguinte questão: “Todos os amigos tem a mesma chance de serem visitados?”

2º Encontro – Votado para trabalhar a etapa II (experimentação) e utilizando duas aulas geminadas, o encontro foi dedicado à experimentação aleatória, cujas ações principiavam no lançamento de uma moeda por quatro vezes, seguido pelo registro da sequência observada e pela indicação do amigo a ser visitado pela Mônica. Nesta circunstância, os estudantes deviam repetir o experimento de “lançar a moeda consecutivamente quatro vezes por trinta vezes, anotar cada sequência sorteada e atribuir, a partir dos resultados obtidos, o amigo a ser visitado, registrando o nome desse amigo”. Nesse encontro foram trabalhadas as fichas 2, 3 e 4.

A partir daí, os alunos deviam organizar os resultados em uma Tabela de Distribuição de Frequência (TDF), calcular a frequência absoluta e relativa obtida na experimentação, após o que deviam observar seus experimentos, e retomar a análise da questão: “todos os amigos têm a mesma probabilidade de serem visitados?”, porém observando os resultados da TDF. Era pedido ainda que eles comparassem seus resultados com os de outras duplas, com a intenção de compreender a variabilidade das amostras sistematizadas.

3º encontro – Nesse encontro foi trabalhado a etapa III (Modelagem), por meio das fichas 5 e 6. Os alunos foram instigados a determinar todas as maneiras possíveis de a Mônica chegar à casa de Magali, Cascão, Cebolinha, Bidú e Horácio, caracterizando o espaço amostral do experimento aleatório, utilizando ilustrações confeccionadas para a realização da experimentação, verificando suas regularidades, apresentando suas justificativas. Novamente, nesta etapa, retomamos à indagação sobre os caminhos existentes e, se “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”. Finalizando esta etapa, após repensarem os caminhos, estabelece-se uma retomada sobre a atribuição de probabilidades.

4º encontro – Esse encontro trabalhou a etapa IV (construção da árvore de possibilidades), por meio das fichas 7 e 8. Foi pedido para que os alunos

completassem a árvore de possibilidades, a fim de organizar o espaço amostral, registrar a sequência sorteada, o número de caras em cada um dos arranjos, além de sistematizar regularidades relacionadas aos eventos e amigos visitados. Considerando esses resultados, os estudantes deviam construir uma nova TDF, com base nas probabilidades teóricas (laplaciana) calculadas a partir do diagrama da árvore, comparando com outras duplas, para perceberem que não há mudanças.

5º encontro – Por meio das fichas 9 e 10, trabalhamos a etapa V (comparação de duas formas de atribuir probabilidade). Finalizando os trabalhos, os estudantes foram orientados a comparar as probabilidades obtidas: probabilidade estimada a partir da frequência observada (experimentação realizada) e a frequência esperada (construção da árvore de possibilidades), além de opinar sobre as duas formas de calcular probabilidades, realizar análises, compartilhar e contrastar seus resultados com outras duplas. As duplas deviam ainda, emitir opinião quanto a aceitação ou não das atividades, da forma como foi desencadeando ou não o desenvolvimento de suas aprendizagem, no que diz respeito aos conceitos de probabilidade envolvidos no estudo.

As ações dos alunos (sempre realizadas em duplas) durante os encontros serão detalhados no Capítulo 4, o qual é destinado à apresentação dos resultados obtidos na pesquisa. A seguir descrevemos detalhadamente a sequência de atividades, especificando as adaptações, os objetivos e os conceitos probabilísticos envolvidos em cada uma delas.

3.2.2 – DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ENSINO

Com a intenção de facilitar a compreensão do leitor no que se refere aos procedimentos adotados, descreverei o trabalho desenvolvido nos encontros, ao longo da sequência de ensino, considerando as fichas de atividades.

Reiteramos que houve encontro em que apenas uma ficha foi trabalhada e, em outros, duas ou três fichas. Ao todo foram realizados cinco encontros e nestes, dez fichas contendo as atividades “Os Passeios Aleatórios da Mônica”: Atividade para ensinar conceitos básicos de probabilidade.

A nomenclatura utilizada para identificar as respostas dos estudantes nas fichas foi configurada da seguinte maneira: identificamos o número da ficha (se era ficha 1, ou 2 ou 3, etc.) , seguido pelo número da dupla (dupla 1 foi representada por “D1”, a 2 por “D2”, e assim por diante) e, por fim, a turma foi identificada por “8A” ou “8B”. Dessa forma, ao escrevermos “F1D18A,”, estamos nos referindo a Ficha 1 da dupla 1, que estuda no 8º ano A.

3.2.2.1 – FICHA 1 – A ESTÓRIA (ETAPA I – O CONTEXTO)

Essa ficha inicia as atividades “Os Passeios Aleatórios da Mônica”, por meio de uma estória onde as visitas são mencionadas de forma pré-estabelecida (evento determinista). Expomos na Figura 1 e 2, em conformidade com a Ficha 1 entregue aos estudantes, a estória e os procedimentos que principiaram as atividades em questão.

A proposta deste trabalho considera as atividades adaptadas por Cazorla e Santana (2006), e nós, readaptamos novamente, a fim de realizá-la com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. Consideramos a estória apresentada pelas autoras, conforme segue:

A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 1. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu.

Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que a sorte escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos. (CAZORLA e SANTANA, 2006, p. 44-45)³

³ O Grupo de pesquisa REPARE adaptou algumas palavras do texto original, adequando-o a realização da atividade.

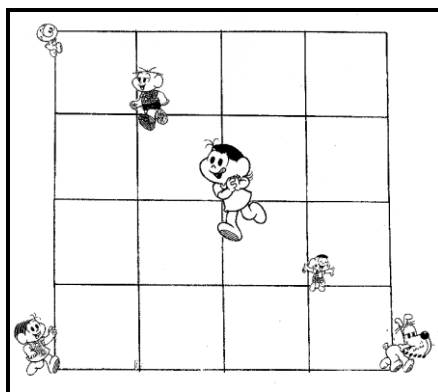


FIGURA 1 – CARTAZ ORIGINAL DOS “PASSEIOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA”
(FONTE: CAZORLA E SANTANA, 2009)

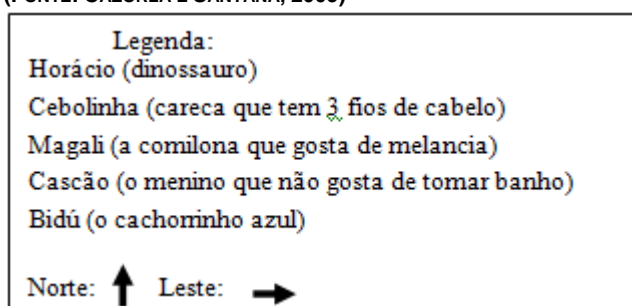


FIGURA 2 – LEGENDA (ADAPTAÇÃO DO TEXTO DA ATIVIDADE APLICADA)⁴

Juntamente com esta apresentação, utilizamos a Figura 2 para melhorar o entendimento dos estudantes, conforme o que se apresenta na legenda. No desenvolvimento da leitura, surge uma nova possibilidade de estabelecimento das visitas, mas caracterizando o evento aleatório.

A seguir, apresentamos uma análise da atividade, considerando o que futuramente designaremos por situação-problema ou tarefa de eventos familiares ou conhecidos pelos alunos. Os estudantes realizarão “Os passeios aleatórios da Mônica” em visita aos amigos, para permitir a relação entre a prática (realidade do aluno) e a teoria (conhecimento científico).

Questão 1: Qual é a diferença entre a forma antiga de a Mônica visitar seus amigos e a nova forma?

A questão compara a forma sistemática que a Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida, em que todos tinham a mesma chance de serem visitados.

Um argumento forte para esta afirmação está na forma determinista de cada evento ocorrer (evento é definido como todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento).

⁴ Contribuição do Grupo REPARE

Ao considerar a situação de tornar mais emocionantes os encontros, os estudantes observarão se o acaso faz parte da segunda organização de visitas aos amigos, ou seja, considerarão que o sorteio da moeda e o resultado obtido indiquem o caminho/direção (estrada ou rua) a ser seguida é característica de experimentos aleatórios. A forma sugerida do experimento aleatório depende do sorteio resultar em cara (C) ou coroa (X) e, assim sendo, não podemos prever qual dos amigos será visitado. Nessa situação, Cazorla e Santana (2006) mencionam que experimentos aleatórios são aqueles que, repetidos nas mesmas condições, não produzem o mesmo resultado.

Objetivamos ainda com essa atividade, entender se os estudantes compreendem a conversão dos resultados obtidos nos símbolos sugeridos, se a resolução do problema apresentado de forma lúdica favorece a compreensão e o entendimento de que saindo de sua casa (lado esquerdo baixo do quadro apresentado na atividade), ao lançar a moeda Mônica andarás um quarteirão para o Norte se sair cara (C) e, andarás um quarteirão para o Leste, se sair coroa (X). O estudante precisa entender que cada jogada representa um quarteirão de percurso e, ainda, que a Mônica (cada dupla participante) jogará a moeda quatro vezes para chegar à casa de um dos amigos.

Queremos explorar a ideia intuitiva do estudante entre evento determinístico e aleatório, principiar a utilização de uma determinada linguagem verbal e, futuramente, simbólica, explorando proposições, procedimentos e argumentos na realização da atividade.

A seguir, apresentamos uma análise da atividade, considerando o que futuramente designaremos por situação-problema ou tarefa de eventos familiares ou conhecidos pelos alunos. Os estudantes realizarão “Os passeios aleatórios da Mônica” em visita aos amigos, para permitir a relação entre a prática (realidade do aluno) e a teoria (conhecimento científico).

A resposta esperada: A forma sistemática que a Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida, a chance de os amigos serem visitados é a mesma. Um argumento forte para esta afirmação está na forma determinista de cada evento ocorrer (evento é definido como todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento).

Isto é, sabemos a priori, que amigo será visitado, em um dia predeterminado. Por exemplo, se for quinta-feira, o amigo visitado será Cascão. Um experimento determinístico é aquele que podemos prever com exatidão e antecedência o resultado do experimento.

Como são cinco dias para a realização da visita sistemática aos amigos, teremos que é certo que Mônica visitará um de seus amigos na semana. As visitas ocorrem da seguinte maneira: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu, e é isto que designa as visitas realizadas pela Mônica a cada um de seus amigos no dia da semana pré-determinado. Nesse caso, como foi indicada à priori a visita que Mônica realizaria, não trata de evento aleatório e sim, determinístico. Portanto, não faz sentido falar em probabilidade para um fenômeno determinístico.

Questão 2: Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda?

Entendemos que os estudantes indiquem corretamente a resposta, mencionando que são possíveis dois, e somente dois resultados, dado que a moeda é honesta.

A resposta esperada: Os resultados possíveis são: cara (C) ou coroa (X), dois e somente dois resultados.

Podemos esperar que os estudantes indiquem que o espaço amostral do lançamento de uma moeda honesta seja: $\Omega = \{C; X\}$; que os eventos possíveis são: C = obter cara no lançamento de uma moeda e X = obter coroa no lançamento de uma moeda.

Questão 3: Qual é a chance de sair cara $P(C)$: $_$ e de sair coroa? $P(X)$: $_$. Por que vocês acham isso?

É nossa intenção verificar se os estudantes acenam para o conhecimento da pré-probabilidade, indicando que a chance de se obter cara ou coroa no lançamento da moeda é a mesma. Lembramos aqui, que a moeda lançada é honesta.

A resposta esperada: Considerando o que foi exposto na **Questão 2**, a chance de sair cara é a mesma de sair coroa, ou seja $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$ e os resultados são estes pois a moeda tem duas faces. Considerando os

conhecimentos intuitivos dos estudantes, entenderão teoricamente falando que para determinar a probabilidade de um evento qualquer é necessário considerar o evento, propriamente dito, e o número de eventos possíveis que configuram os elementos do espaço amostral. Como, os alunos são fortemente marcados pela “equiprobabilidade”, então esperamos que: $n(\Omega)=2$, $n(C)=1$, $n(X)=1$ e, que $P(C)=P(X)=\frac{1}{2}$. Assim, formalmente e intuitivamente, esperamos que os

estudantes apontem para o fato de que $P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}$ e $P(X)=\frac{n(X)}{n(\Omega)}$.

Questão 4: Qual é a chance de Magali ser visitada: _ Por que vocês acham isso?

Pretendemos verificar com esta indagação se os estudantes indicam corretamente a chance da Magali ser visitada pela Mônica e de forma intuitiva, considerando as duas situações: o dia pré-estabelecido da visita e outra, de acordo com o acaso (sorte), indicado segundo o lançamento da moeda, pois não apontamos até então, nenhum procedimento que pudesse favorecer suas escolhas e opiniões.

A resposta esperada: Esperamos que, intuitivamente, os estudantes indiquem que não será uma questão de chance, mas sim de certeza, já que nas quartas-feiras Mônica determinou que visitaria Magali. No caso da escolha aleatória, pode-se esperar que os estudantes utilizem três tipos de justificativas: eles podem indicar que é um quinto porque são cinco amigos, eles podem indicar que a Magali tem mais chance por ser menina e amiga da Mônica, eles podem, ainda, dizer que Magali será a mais visitada por estar no centro do croqui.

Questão 5: Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados? Por que vocês acham isso?

A resposta esperada: Esperamos que os estudantes justifiquem suas respostas com base na segunda forma de Mônica visitar seus amigos. Assim sendo, é de nosso entendimento que os sujeitos de nossa pesquisa nesse momento da experiência responderão sim, uma vez que são cinco amigos e a moeda só tem duas possibilidades e iguais. É muito raro que um aluno neste nível de escolaridade perceba que as chances são diferentes

Entendemos que os estudantes podem sentir-se necessitados de evidenciar o número total de caminhos que a Mônica pode percorrer.

Questão 6: Imagine que você jogou 4 vezes a moeda. Como você anotaria seu resultado imaginário?

Os estudantes podem indicar qualquer um dos dezesseis resultados possíveis no lançamento da moeda quatro vezes consecutivas, como por exemplo: CCXC ou CCXX, etc.

A resposta esperada: Esperamos que os estudantes apontem uma das dezesseis configurações possíveis, pois usando a imaginação, a intuição, podem obter experimentalmente uma das sequências que constituem o espaço amostral {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, ..., XXXX}.

QUADRO 1 - SÍNTESE DAS ATIVIDADES DE ENSINO – A INTRODUÇÃO – “FICHA 1”

	Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 1	"1"	1	Explorar a ideia intuitiva do estudante entre evento determinístico e aleatório. Utilizar uma determinada linguagem verbal e simbólica, além de proposições, procedimentos e argumentos para realização da atividade
		2	Explorar a ideia que o educando tem sobre os resultados possíveis, ao observar o lançamento de uma moeda e a face voltada para cima – caracterizar o espaço amostral.
		3	Explorar a ideia intuitiva que o educando apresenta sobre o conceito de chance ou probabilidade de ocorrência de um evento, sobre a equiprobabilidade e sua representação. Verificar se existe conflito quanto ao termo usado – “chance”. Verificar se os estudantes apresentam conhecimentos intuitivos relacionados a probabilidade.
		4	Explorar se os educandos responderiam com base na situação determinista, ou considerando a situação aleatória, além de justificar por meio de um breve protocolo, sua decisão – justificar a determinação da probabilidade indicada.
		5	Explorar se os educandos responderiam com base na situação determinista, ou considerando a situação aleatória, o questionamento, e justificar por meio de um breve protocolo a sua indicação.

Como mencionamos no início desse capítulo, o segundo encontro foi desenvolvido em duas aulas, e tratou da experiência aleatória promovida pelo lançamento da moeda quatro vezes, e a retomada da experimentação, considerando a formação de uma amostra com trinta repetições.

3.2.2.2 – FICHA 2 – LANÇAMENTO DA MOEDA (ETAPA II: A EXPERIMENTAÇÃO)

Na atividade contida na Ficha “2”, entendemos que os estudantes podem realizar a experimentação do lançamento de uma moeda honesta e, em seguida, anotar os resultados obtidos na coluna denominada sequência, conforme apresentamos na Figura 3, além de ser possível perceber, por meio do experimento aleatório, qual será o amigo visitado ao lançar a moeda quatro vezes.

Quadro 1. Resultados da experimentação.

Repetição	Sequência	Amigo visitado	Repetição	Sequência	Amigo visitado
1.			16.		
2.			17.		
3.			18.		
4.			19.		
5.			20.		
6.			21.		
7.			22.		
8.			23.		
9.			24.		
10.			25.		
11.			26.		
12.			27.		
13.			28.		
14.			29.		
15.			30.		

FIGURA 3 - SISTEMATIZAÇÃO DOS RESULTADOS DA EXPERIMENTAÇÃO
Fonte: Cazorla e Gusmão (2009)

A regra é a mesma citada na estória da “Ficha 1”: Se sair cara (C), Mônica andar um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Os resultados obtidos serão anotados no Quadro 1, as duplas realizarão os quatros sorteios seguidos, trinta vezes e, conforme a exemplificação dada na Figura 1: se sair a sequência cara, cara, coroa, cara, a sugestão dada resultará na anotação CCXC na coluna sequência e, Cebolinha na coluna do amigo visitado.

Como foi sugerido, apresentamos o Quadro 1 abaixo, com os resultados obtidos pelos lançamentos realizados quando nos preparávamos para a realização da atividade com nossos sujeitos de pesquisa.

Uma possível formação esperada: Conforme a sugestão dada, apresentamos na Figura 5 uma configuração obtida em uma exemplificação considerando os resultados obtidos pelos lançamentos, quando nos preparávamos para a realização da atividade com nossos sujeitos de pesquisa. Com esta realização, pretende-se verificar se os estudantes associam o sorteio aleatório dos lançamentos da moeda, com a noção dos caminhos aleatórios obtidos, o que caracterizam de forma esquemática um dos passeios aleatórios realizados.

Quadro 1. Resultados da experimentação, realizada como exemplo

Repetição	Seqüência	Amigo visitado	Repetição	Seqüência	Amigo visitado
1.	CCCX	MAGALI	16.	CCCX	CEBOLINHA
2.	XXCC	MAGALI	17.	CXCX	MAGALI
3.	XXCC	MAGALI	18.	CCCX	CEBOLINHA
4.	XXCC	MAGALI	19.	XCCC	CEBOLINHA
5.	XXCC	MAGALI	20.	CXCC	CEBOLINHA
6.	CXXX	CASCÃO	21.	CCCC	HORACIO
7.	CCXC	CEBOLINHA	22.	XCCX	MAGALI
8.	CCXX	MAGALI	23.	CCXX	MAGALI
9.	XCXC	MAGALI	24.	XXXX	BIDU
10.	XXCC	MAGALI	25.	XCXC	MAGALI
11.	CCXX	MAGALI	26.	XCXX	CASCÃO
12.	CXCC	CEBOLINHA	27.	XCXC	MAGALI
13.	XXXC	CASCÃO	28.	CXCC	CEBOLINHA
14.	CXCX	MAGALI	29.	XCXC	MAGALI
15.	XXXX	BIDU	30.	XCXC	MAGALI

FIGURA 4 – EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO DO QUADRO 1

QUADRO 2 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A EXPERIMENTAÇÃO – “FICHA 2”

	Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 2	2	1	Evidenciar o experimento dos sorteios aleatórios e a descrição do caminho aleatório (seqüência obtida no sorteio), além de caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios

Os estudantes responderão o questionamento contido na Ficha “3”, considerando os resultados obtidos na Ficha “2” e, analisarão os resultados obtidos em busca de argumentos que possam justificar seus sorteios aleatórios.

3.2.2.3 – FICHA 3 – AS SEQUÊNCIAS OBTIDAS (ETAPA II – A EXPERIMENTAÇÃO)

Questão 1: Seleccionem o resultado de uma repetição qualquer e desenhe o percurso percorrido pela Mônica no papel transparente.

Os estudantes precisam associar o sorteio aleatório no lançamento da moeda, com a noção dos caminhos aleatórios obtidos, caracterizando esquematicamente um (ou alguns) dos caminhos aleatórios observados (realizados). Escreverão na folha de transparência seus nomes, e a sequência escolhida.

A resposta esperada: Os estudantes podem encontrar dificuldades para enumerar todos os possíveis caminhos, e que noções intuitivas de evento determinístico e aleatório façam com que uma determinada linguagem verbal e simbólica, proposições, procedimentos e argumentos para realização da atividade, possam surgir.

O uso de transparências e canetas especiais possibilitará aos estudantes a realização de um mapa indicando o(s) possível (is) caminho (s) a ser (em) realizado (s) pela Mônica na visita a um de seus amigos. Consideramos que os estudantes podem usar a intuição e relacionar, por exemplo, os dezesseis resultados: {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX,..., XXXX}.

Os estudantes realizarão seus sorteios, considerando a configuração do Quadro 1, associando o sorteio aleatório dos lançamentos da moeda, com a noção dos caminhos aleatórios obtidos, o que favorecerá a caracterização de forma esquemática um dos passeios aleatórios realizados.

Escrever no papel transparente a sequência que escolheram também é uma tarefa que os sujeitos de nossa pesquisa realizarão cujas configurações compartilharão em momento oportuno suas escolhas com outras duplas. Entendemos que os estudantes apontarão para qualquer um dos resultados possíveis da experimentação realizada e registrada na Ficha 2, podendo encontrar dificuldades para enumerar todos os possíveis caminhos.

Questão 2: Quem tem mais chance de ser visitado(a) Magali ou Horácio? Por quê?

Considerando suas experimentações, esperamos que os estudantes admitam que entre Magali e Horácio, a primeira tem maior chance de ser visitada, por existir seis caminhos distintos que levam a sua casa, enquanto que para visitar o Horácio só há um caminho possível de Mônica realizá-la.

Porventura, pode ocorrer que outras argumentações possam ser estabelecidas, se os estudantes considerarem apenas os seus experimentos, pois considerando o acaso, pode ser que em sua experimentação, a dupla deixe de registrar alguma configuração e, assim sendo, haja algum dos amigos que não seja visitado.

A resposta esperada: A Magali tem mais chance de ser visitada do que Horácio, pois existe um único caminho para Mônica chegar à casa de Horácio, enquanto que visitar Magali, existem seis caminhos possíveis.

Questão 3: Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? Por quê?

Segundo suas experimentações, acreditamos que os estudantes possam mencionar que entre Horácio ou Bidu, tanto um como outro, possuem chance próximas de serem visitados, pois só há um caminho para visitar cada um deles (CCCC para visitar Bidu e XXXX para o Horácio).

A resposta esperada: Os dois têm a mesma chance de serem visitados, pois enquanto Horácio seria visitado com a configuração CCCC, Bidu receberia a visita de Mônica se a configuração XXXX ocorresse. Ambos necessitam de quatro resultados (faces) iguais cara ou coroa para ser visitado.

Questão 4: De todos, quem tem menos chance de ser visitado? Por quê?

Com base nos resultados obtidos nos trinta lançamentos anotados na Ficha 2, acreditamos que os estudantes apontem para Horácio ou Bidu, pois tanto um como outro, possuem chance próximas de ser visitados, por apresentam na experimentação o menor número de configurações e, portanto, a menor chance de serem visitados. É possível, porém que eles justifiquem suas respostas erroneamente, ao considerar que no lançamento da moeda quatro vezes, há uma tendência de ser mais difícil obter os quatro resultados iguais, uma vez que para visitar o Horácio, a sequência CCCC (quatro resultados iguais, CCCC ou XXXX) apresenta a maior dificuldade de ocorrer.

A resposta esperada: Esperamos que os estudantes indiquem os resultados obtidos naqueles trinta lançamentos anotados na Ficha “2”. Indicar Horácio ou Bidu poderá ser a escolha dos estudantes, salvo se na experimentação aleatória ocorrer configuração em que a(s) sequência(s) de Horácio ou Bidu apareça grande número de vezes.

Questão 5: Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo?

() Não () Sim. Por quê?

Em se tratando de experimentação aleatória, entendemos que todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, porém quando consideramos a forma da experimentação e diante dos resultados, deseja-se que os estudantes mencionem que a equiprobabilidade dos eventos não pode ser sustentada.

A resposta esperada: Esperamos que os sujeitos de nossa pesquisa responda que sim, existe a chance de a Mônica não visitar algum amigo, pois nos lançamentos obtidos por meio da experimentação, o acaso, a sorte e que delimita a ocorrência ou não de determinada sequência.

Questão 6: Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?” () NÃO mudaríamos porque () SIM mudaríamos por que ...

Neste questionamento retomamos a indagação, quanto “a chance de todos os amigos serem visitados” e a opinião das duplas, comparadas com aquela anotadas na Ficha 1 considerando o caráter determinista e aleatório. A compreensão das possíveis variabilidades dos resultados obtidos por outras duplas, também se incorporam nos objetivos propostos nesse item. Os estudantes perceberão por intuição e pela experimentação (uso da situação lúdica), que os personagens situados nos extremos da quadrícula têm menor probabilidade de ser visitados pela Mônica e investigar sobre qual a razão de tal constatação.

Em se tratando de experimentação aleatória, entendemos que todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, porém quando consideramos uma experimentação com poucos lançamentos (no nosso caso apenas 4 lançamentos 30 vezes), os estudantes podem encontrar resultados em que a equiprobabilidade dos eventos não seja tão visível e/ou sustentada.

A resposta esperada: Esperamos que os estudantes indiquem que não mudaria, caso na resposta da Questão 5, da Ficha 1 tenham respondido que todos os amigos não tem a mesma chance de serem visitados. Caso tenham respondido que sim, que mudariam de opinião justificará sua resposta mencionando que compreenderam e perceberam a diferença entre os caminhos possíveis para se chegar à casa de cada amigo.

QUADRO 3 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A EXPERIMENTAÇÃO – “FICHA 3”

	Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 2	3	1	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Realizar um experimento aleatório por meio do processo de amostragem – amostra aleatória – simulação.
		2	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.
		3	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.
		4	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.
		5	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.
		6	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios. Verificar se os estudantes emitem suas respostas considerando a aleatória, justificando por meio de um breve protocolo, sua decisão.

3.2.2.4 – FICHA 4 – AS SEQUÊNCIAS OBTIDAS (ETAPA II – A EXPERIMENTAÇÃO)

A Ficha “4” busca evidenciar a descrição do caminho aleatório (sequência obtida no sorteio), caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.

Questão 7: Sistematize os resultados do Quadro 1 na Tabela 1, chamada de Tabela de Distribuição de Frequência – TDF.

Com esta atividade os estudantes são colocados frente ao entendimento de que a experimentação aleatória é uma maneira de sistematização dos possíveis resultados numa tabela de dupla entrada, possibilitando o desenvolvimento da linguagem formal e o entendimento de que esta é uma

etapa a ser cumprida. Nosso objetivo é o de promover o nível de conhecimento e a relação dos estudantes com o conjunto de dados, permitindo generalizações para futuras aplicações a situações concretas.

Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (f_i)	Frequência relativa (h_i)	Porcentagem $100 \cdot h_i$
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidu			
Total	30	1,00	100,00

Onde $h_i = f_i/30$ representa uma estimativa da probabilidade

FIGURA 5 – TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS
Fonte: Cazorla e Santana, 2009.

Assim, nossa expectativa é que eles percebam que ao listar possibilidades estamos trabalhando conceitos matemáticos. Ao avaliarmos essas possibilidades através de experimentos, estamos atribuindo um valor probabilístico a essas atividades, uma vez que a construção das possibilidades surge motivada por uma necessidade de avaliação de chance (sorte, sorteio aleatório, acaso, etc.). A organização dos dados na tabela apresentada na Figura 5 trata-se de uma representação gráfica fácil, de configuração simples, requerendo poucos conhecimentos anteriores. Esse tipo de representação permitirá a ordenação de um conjunto de dados com maior facilidade, assim como, a introdução de eventos elementares (termo mais adequado para referir-se a cada uma das possibilidades), ou mesmo de evento, quando se referir a qualquer subconjunto do espaço amostral.

Entendemos que o uso de estimativa e porcentagem pode possibilitar a aquisição de concepções, por ser um valor calculado a partir de uma amostra e, posteriormente, permitir a observância da variação dos resultados na experimentação (obtenção das diversas amostras).

A resposta esperada: Consideramos as configurações obtidas em nossa experimentação aleatória, que em forma de sequências contendo “C” ou “X” sejam indicadas pelos estudantes, sistematizados e indicados por linguagem formal. Promover e permitir a evolução do nível de conhecimento e a relação

dos estudantes com o conjunto de dados e, instituir generalizações para futuras aplicações a situações concretas.

Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica
Conforme nossa Experimentação, indicada como exemplo

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Freqüência relativa (hi)	Porcentagem %
Horácio	1	0,03	3,0
Cebolinha	7	0,23	23,0
Magali	17	0,57	57,0
Cascão	3	0,10	10
Bidu	2	0,07	7
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$ representa uma estimativa da probabilidade

FIGURA 6 – CONSTRUÇÃO DA TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

A listagem das possibilidades por meio de códigos⁵ possibilita trabalhar com conceitos matemáticos ao avaliar a experimentação realizada e, ao atribuir valor probabilístico a essas atividades.

A organização dos dados por meio de uma representação gráfica fácil, de configuração simples, requer menos conhecimentos anteriores. Acreditamos que esse tipo de representação permita a ordenação de um conjunto de dados com maior facilidade, assim como, introduzir conceitos de eventos elementares (termo mais adequado para referir-se a cada uma das possibilidades), ou mesmo de evento, quando nos referirmos a qualquer subconjunto do espaço amostral.

Por exemplo, ao perguntar “como se mede a chance de um acontecimento ocorrer?”, na linguagem probabilística, a melhor formulação seria, “como obter a probabilidade de um evento ocorrer?”. O uso de formas alternativas de expressar probabilidades será novamente ressaltado aqui, assim como a aproximação de seus resultados quando esta configurar uma dízima periódica (até no máximo duas casas decimais), conforme apresentado na Figura 6.

⁵ Veja a Figura 4, da seção 3.2.2.2 que apresenta a exemplificação realizado pelo autor de uma possível listagem de resultados obtidos numa experimentação.

Questão 8: Olhando a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF), qual é a probabilidade de Mônica visitar: a) Magali? b) Horácio? c) Bidu?

A porcentagem merece destaque neste questionamento, por ser uma ferramenta matemática necessária à construção do conceito de probabilidade e às experiências probabilísticas. É importante que os estudantes de nossa pesquisa observem o trabalho com porcentagem, vinculado ao raciocínio probabilístico, realizar a proposta de “lançar a moeda quatro vezes” e, ocorrer “Cara” uma vez; e, “Coroa” três vezes, transformando seus resultados em porcentagem.

Conviver com a variabilidade é outro objetivo desse questionamento, pois entendemos que a sistematização dos resultados pelos estudantes (TDF), se aproximarem dos verdadeiros valores, se os estudantes considerarem a estabilização das frequências dos resultados, para um número suficientemente grande de amostras.

A resposta esperada: Esperamos que com base em suas experimentações, os estudantes possam indicar intuitivamente a probabilidade. Considerando o que apresentamos na Figura 6, a probabilidade de visitar Magali, Horácio e Bidu são, respectivamente, 57%, 3% e 7%.

Questão 9: Quanto por cento das visitas foram para Cascão?

A sistematização dos resultados (TDF) promoverá a indicação da probabilidade do evento, e conforme os resultados de nossa exemplificação, se considerar a estabilização dos resultados para um grande número de amostras, comparadas com todas as atividades desenvolvidas pelos estudantes, os valores obtidos e sistematizados tenderão a ser muito próximos, da verdadeira probabilidade que cada um dos personagens receberem a visita de Mônica.

A resposta esperada: No desenvolvimento de nossa experiência, indicada na tabela apresentada na sistematização dos resultados (TDF), indica-se com relação ao questionamento de que a probabilidade de Mônica visitar Cascão é de, aproximadamente, dez por cento.

A estabilização dos resultados para um grande número de amostras será considerada para este e, todos os outros amigos a serem visitados. Se forem comparadas todas as atividades desenvolvidas pelas duplas, esses tenderão a

ser muito próximos, da verdadeira probabilidade que cada um dos personagens tem de receber a visita de Mônica.

Em nosso caso e considerando a nossa experimentação apresentada na Figura 6, reafirmamos que os resultados foram indicados como exemplificação.

Questão 10: Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”

Entendemos que os estudantes podem assinalar sim, se anteriormente tiverem assinalado não; confirmarão a mudança, se por acaso tiverem assinalado anteriormente, sim. Veja que os estudantes podem perceber que mediante a experimentação aleatória, existe uma variabilidade de resultados, que os resultados isolados são equívocos e, que podem cometer equívocos.

A resposta esperada: Esperamos que os estudantes respondam que não mudaria, caso na resposta da Questão 5, da Ficha 1 e Questão 6 tenham respondido que todos os amigos não tem a mesma chance de serem visitados. Caso tenham respondido que sim, que mudariam de opinião, justificará mencionando que compreendem e perceberam a diferença entre os caminhos possíveis para se chegar à casa de cada amigo.

Questão 11: Comparem seus resultados sistematizados na Tabela 1 com os resultados da dupla ao lado. Esses são iguais? () Sim () Não. Se forem iguais como vocês explicam essa igualdade nos resultados? Se forem diferentes como vocês explicam essa diferença nos resultados?

No caso de igualdade, acreditamos que os estudantes entenderão que é obra do acaso, pois as duplas indicaram seus resultados isoladamente e, posteriormente realizam a comparação de suas amostras. Considerarão que os resultados são provenientes de uma simulação. Acreditamos que, pelo fato da aleatoriedade e da experimentação, dificilmente encontrarão nos resultados obtidos duas amostras que sejam idênticas.

No caso de as amostras serem diferentes, os estudantes atribuirão o fato também ao acaso. Considerarão que os resultados são provenientes de uma simulação e, que necessariamente os resultados obtidos na amostra não serão todos iguais.

A resposta esperada: Sim, os nossos resultados são iguais, e a explicação para tal ocorrência encontra lastro no acaso, na sorte, pois de forma

isolada obtiveram seus resultados e, por serem provenientes de simulação, pelo fato da aleatoriedade e da experimentação, dificilmente encontrarão resultados idênticos em suas amostras.

Considerando que os resultados obtidos nas amostras sejam diferentes, o acaso também será base de suas justificativas, pois como no caso afirmativo, os resultados são provenientes de uma simulação e, necessariamente, os resultados obtidos nas amostras não serão todos iguais.

QUADRO 4 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A EXPERIMENTAÇÃO – “FICHA 4”

Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 2	1	Quantificar todos os resultados referentes ao experimento aleatórios, caracterizando a introdução de conceitos da Teoria da Probabilidade, por meio de situações reais e observação dos eventos. Atribuir notações simbólicas para representar o número de observações, relacionados aos caminhos existentes na realização do experimento. Caracterizar quantitativamente os resultados possíveis de cada evento na realização do experimento aleatório na forma de frequência relativa e em porcentagem. Explorar a idéia intuitiva de probabilidade por meio da frequência relativa (estimativa da probabilidade – probabilidade frequentista). Construir uma tabela de distribuição de frequência e sistematizar os resultados da experimentação
	2	Explorar a idéia intuitiva probabilidade por meio da frequência relativa (estimativa da probabilidade – probabilidade frequentista). Verificar se existe conflito quanto ao uso do termo chance ou probabilidade.
	3	Explorar a idéia intuitiva probabilidade por meio da porcentagem (estimativa da probabilidade – probabilidade frequentista). Verificar se existe conflito quanto ao uso do termo chance ou probabilidade.
	4	Explorar se os educandos emitem suas respostas considerando a situação determinista ou aleatória, além de justificar por meio de um breve protocolo, sua decisão – justificar a determinação da probabilidade indicada. Evidenciar a não equiprobabilidade dos eventos.
	5	Sociabilizar entre os componentes das duplas as considerações emitidas, justificando por meio de um breve protocolo, sua decisão – justificar sua decisão após a realização da experimentação. Verificar se os estudantes compreendem que os eventos são aleatórios e independentes, ou seja, a ocorrência de um não interfere na de outro, além da não equiprobabilidade dos mesmos na realização dos sorteios aleatórios.

3.2.2.5 – FICHA 5 – A MODELAGEM MATEMÁTICA (ETAPA III)

Iniciamos esta etapa com o objetivo de construir de forma organizada todos os caminhos possíveis de a Mônica visitar Magali, de provocar os estudantes na determinação de todos os resultados possíveis para a definição do Espaço Amostral utilizando a quadrícula que segue, utilizando para isto, lápis de cor ou canetas coloridas (hidrocolor).

Ressaltamos novamente, que os estudantes considerarão os resultados provenientes de sua simulação e, pelo fato da aleatoriedade e da experimentação, as configurações possíveis confirmarão que os desenhos criados podem ser considerados como forma de descrever todos os resultados do experimento.

Questão 1: Desenhem no croqui, o percurso de todas as maneiras possíveis que a Mônica pode chegar à casa de Magali. Utilize linhas diferentes ou lápis de cor.

Os estudantes utilizarão suas experiências anteriores e configurarão os possíveis caminhos que Mônica percorrerá para visitar os personagens de nossa estória, utilizando a quadrícula apresentada na Figura 7.

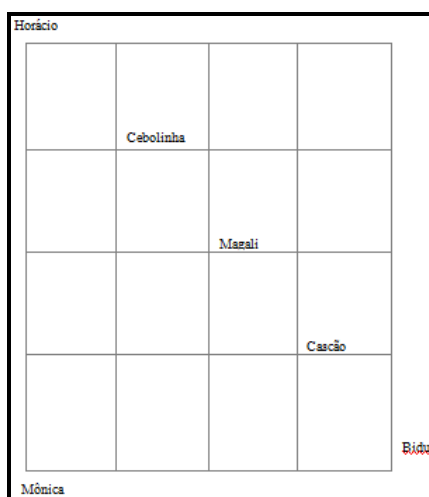


FIGURA 7 – QUADRÍCULA DOS CAMINHOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA
Fonte: Cazorla e Santana, 2009.

Além disso, ao iniciar seus estudos por meio de situações contextualizadas, os estudantes podem construir hipóteses sobre o significado de cada um dos resultados, reelaborar seus conhecimentos sobre linguagens simbólicas e códigos matemáticos, de forma semelhante ao que fazem em relação à língua escrita. Pretende-se então, que por meio desse estímulo o desenvolvimento da modelagem probabilística, de forma que os estudantes assumam nova postura diante de sua produção.

A resposta esperada: A seguir, apresentamos as configurações possíveis de ser desenhadas na tela quadriculada fornecida a cada dupla. Como regularidade os estudantes indicarão que cada caminho configurado apresentará exatamente dois resultados iguais a cara e dois iguais a coroa, dado que realizaram quatro lançamentos.

A Figura 8 mostra as configurações em que o sorteio aleatório corresponde aos resultados coroa, coroa, cara, cara e, coroa, cara, coroa, cara.

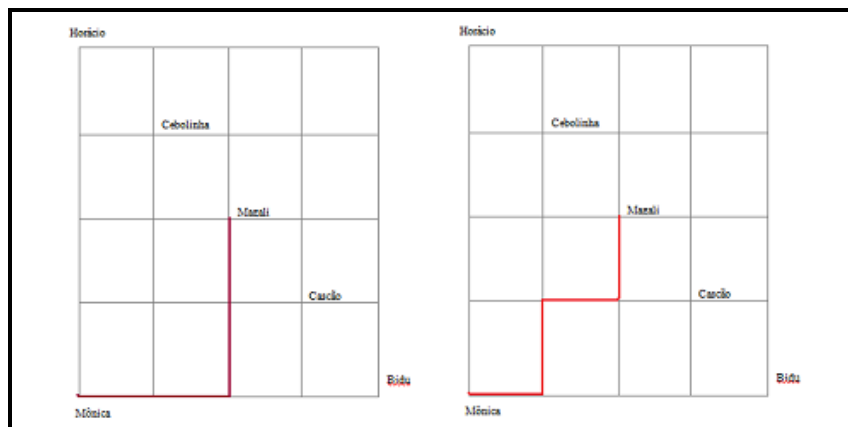


FIGURA 8 – CROQUI (XXCC) E (XCXC) – ELABORAÇÃO NOSSA.

Já a Figura 9, apresenta as configurações dos lançamentos da moeda em que os resultados obtidos são: coroa, cara, cara, coroa e coroa, cara, coroa, cara.

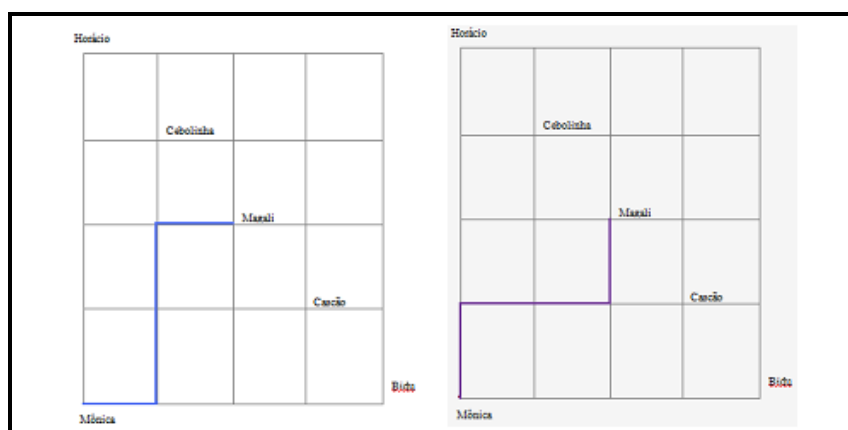


FIGURA 9 – CROQUI (XCCX) E (CXXC) – ELABORAÇÃO NOSSA.

Finalmente, a Figura 10 apresenta as configurações dos lançamentos da moeda em que os resultados obtidos são: cara, coroa, cara, coroa e cara, cara, coroa, coroa.

É de nosso entendimento que, partindo de situações contextualizadas os estudantes possam construir hipóteses sobre o significado de cada um dos resultados, reelaborando seus conhecimentos sobre linguagens simbólicas e códigos matemáticos, de forma semelhante ao que fazem em relação à língua escrita. Essa etapa é importante, pois estimula os estudantes a desenvolverem a modelagem probabilística, condicionando-os a assumir uma nova postura diante de sua produção.

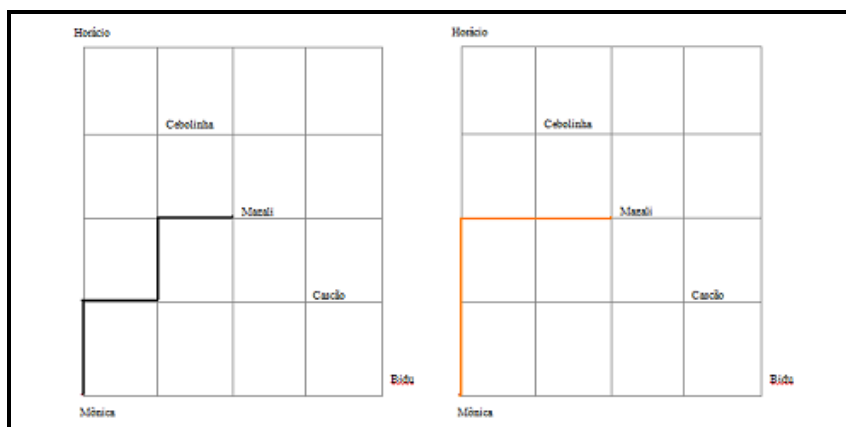


FIGURA 10 – CROQUI (CXCX) E (CCXX) – ELABORAÇÃO NOSSA.

Os assuntos referentes à Introdução a Probabilidade serão trabalhados de modo a estimular os estudantes a realizarem indagações, a estabelecer relações, a construir justificativa e a desenvolver o espírito de investigação. A finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e a interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos probabilísticos.

Questão 2: Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Magali? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?

Esse questionamento busca evidenciar o experimento dos sorteios aleatórios e a descrição dos caminhos (sequência obtida no sorteio) possíveis da Mônica chegar à casa de Magali, além de caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Atribuir notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios, indicar regularidades, por meio da configuração dos eventos e, a caracterização e listagem de todos os resultados possíveis de um evento são esperadas.

A resposta esperada: Existem seis caminhos possíveis para que a Mônica visite Magali. Entendemos que os estudantes apresentam aptidão para atribuir notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios, inclusive na indicação das regularidades, pois perceberão que as sequências são caracterizadas pela presença em suas configurações, exatamente duas caras e duas coroas.

Depois de considerar suas regularidades, os possíveis caminhos desenhados anteriormente, a caracterização e a listagem de todos os resultados possíveis do evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à

casa de Magali?” estará institucionalizado. A Figura 11 apresenta o que os estudantes possivelmente listarão: {CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC}.

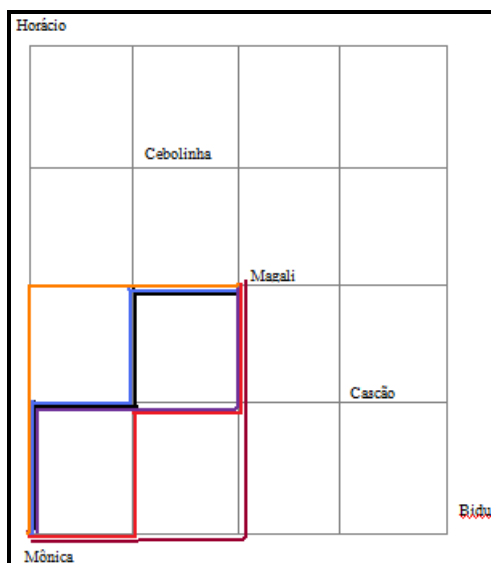


FIGURA 11 – CROQUI - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR À CASA DE MAGALI.

Questão 3: Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?

Tornar evidente a descrição dos caminhos possíveis da Mônica chegar à casa de Cascão, além de caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos é característica desse questionamento, da mesma forma que atribuir notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios, indicar regularidades, por meio da configuração dos eventos, e indicar o rol de todos os resultados possíveis desse evento.

A resposta esperada: Retomamos os comentários da questão anterior e os mesmos objetivos são retomados nessa questão, pois a representação em notações simbólicas, indicação das regularidades, características das configurações serão evidenciadas com exatamente uma cara e três coroas.

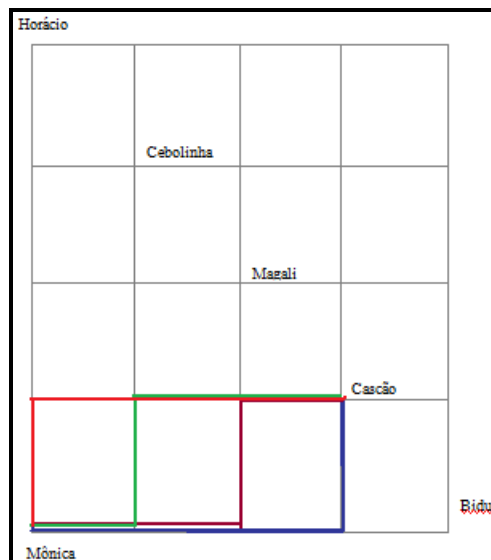


FIGURA 12 - CROQUI - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR À CASA DE CASCÃO.

Depois de considerar suas regularidades, os estudantes poderão indicar a listagem dos caminhos possíveis em relação ao evento: “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Cascão?”, conforme o observado na Figura 12 e como segue: {XXXC, XCXX, XXCX, CXXX}.

Questão 4: Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?

Esse questionamento busca caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais, a observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios. Caracterizar o evento, indicar sua representação em notações simbólicas, verificar a existência de regularidades são objetivos desse questionamento. Trata-se de uma retomada do questionamento anterior, no que diz respeito ao evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Cebolinha?”.

A resposta esperada: Queremos em todos estes questionamentos, caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.

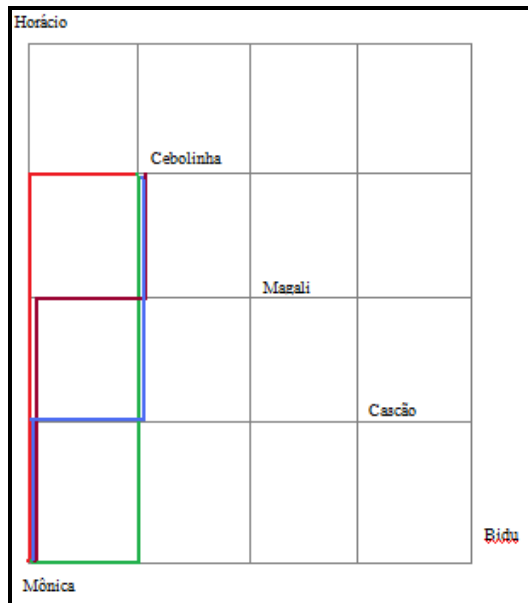


FIGURA 13 – CROQUI - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR A CASA DE CEBOLINHA.

Explorar se os educandos caracterizam o evento, indicando a sua representação e, verificar a existência de regularidades. A representação em notações simbólicas, indicação das regularidades, características das configurações serão evidenciadas com exatamente três caras e uma coroa. Retomamos os comentários da questão anterior e os mesmos objetivos são retomados nessa questão, pois a representação em notações simbólicas, indicação das regularidades, características das configurações serão evidenciadas com exatamente uma cara e três coroas.

Depois de considerar suas regularidades, os possíveis caminhos a listagem de todos os resultados possíveis do evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Casão?” será listado como segue: {CCCX, CCXC, CXCC, XCCC}. Os estudantes, nessa circunstância já terão percebido a evidência da caracterização e listagem dos resultados possíveis do evento aleatório aqui citado, esta será sua justificativa.

Questão 5: Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bidu? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?

Esse questionamento busca o entendimento, por parte dos estudantes, da introdução de experiência aleatória por meio de situações reais, observação dos eventos, uso de notações simbólicas, caracterização e representação dos sorteios aleatórios. Essa situação também pede a observância da existência de

regularidades quanto ao evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Bidu”.

A resposta esperada: Esse questionamento busca o entendimento, por parte dos estudantes, da introdução de experiência aleatória por meio de situações reais, observação dos eventos, uso de notações simbólicas, caracterizar e representar sorteios aleatórios. Essa situação também pede a observância da existência de regularidades.

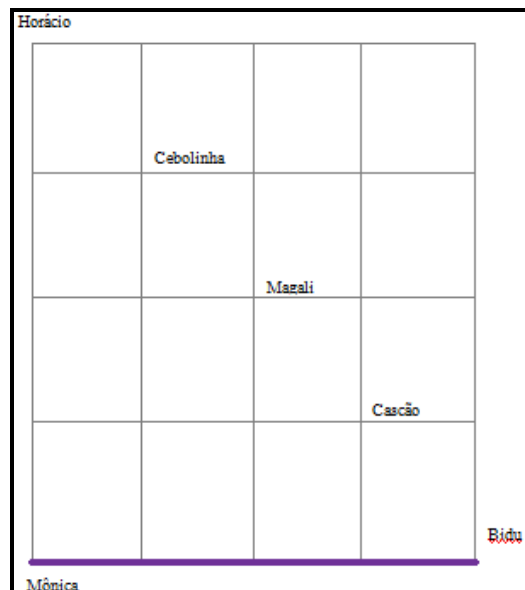


FIGURA 14 – CROQUI DE - CAMINHOS PARA MÔNICA CHEGAR À CASA DE BIDU.

A representação em notações simbólicas é dada por {XXXX} e a regularidade é evidenciada por constituir-se em quatro resultados iguais e todos eles, coroa. Retomamos os comentários da questão anterior e os mesmos objetivos são revistos nessa. O evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Bidu?” pode ser justificado com essa argumentação e a configuração dos caminhos é apresentada na Figura 14.

Questão 6: Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Horácio? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?

Evidenciar que esse, e o questionamento anterior são aqueles que apresentam a menor possibilidade de ocorrer, pela dificuldade que os quatro lançamentos têm de serem todos iguais é um dos objetivos dessa questão, assim como, aqueles já citados nas questões anteriores. Os estudantes analisarão e indicarão argumento próprio no que se refere ao evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Horácio?”.

A resposta esperada: Considerando esse, queremos verificar se os estudantes evidenciam que os dois últimos eventos são aqueles que apresentam a menor possibilidade de ocorrer, pela dificuldade que os quatro lançamentos têm de serem todos iguais.

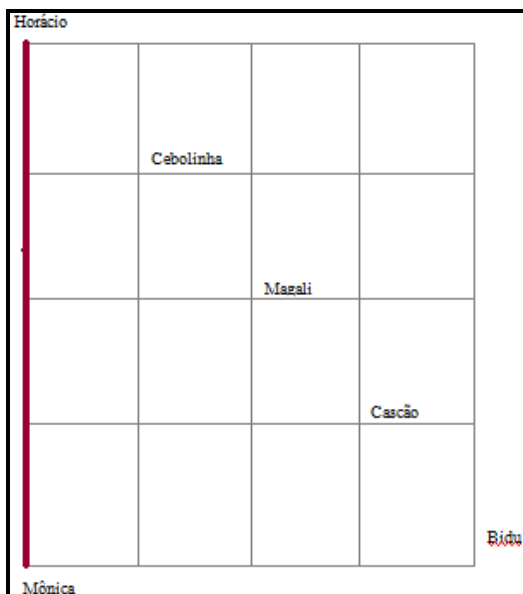


FIGURA 15 – CROQUI - CAMINHO PARA MÔNICA CHEGAR A CASA DE HORÁCIO.

Considerando os dois resultados possíveis de ser obtidos, no lançamento de uma moeda honesta (cara ou coroa), a configuração que se refere ao evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Horácio?” será indicado por {CCCC}. A regularidade reside no fato de que os quatro resultados são todos iguais a cara e o caminho configura o que se apresenta na Figura 15.

QUADRO 5 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A MODELAGEM MATEMÁTICA – “FICHA 5”

Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 3 5”	1	Evidenciar o experimento dos sorteios aleatórios e a descrição do caminho (sequência obtida no sorteio), além de caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos. Atribuir notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios considerando suas regularidades e os possíveis caminhos a serem realizados. Caracterizar e listar todos os resultados possíveis do experimento aleatório.
	2	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios. Explorar se os educandos caracterizam o evento, indicando a sua representação e, verificar e existência de regularidades. Caracterizar e listar todos os resultados possíveis do evento aleatório, além de justificar por meio de um breve protocolo, sua decisão.
	3	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios. Explorar se os educandos caracterizam o evento, indicando a sua representação e, verificar e existência de regularidades. Caracterizar e listar todos os resultados possíveis do evento aleatório, além de justificar por meio de um breve protocolo, sua decisão.
	4	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios. Explorar se os educandos caracterizam o evento, indicando a sua representação e, verificar e existência de regularidades. Caracterizar e listar todos os resultados possíveis do evento aleatório, além de justificar por meio de um breve protocolo, sua decisão.
	5	Caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios. Explorar se os educandos caracterizam o evento, indicando a sua representação e, verificar e existência de regularidades. Caracterizar e listar todos os resultados possíveis do evento aleatório, além de justificar por meio de um breve protocolo, sua decisão.

3.2.2.6 – FICHA 6 – A MODELAGEM MATEMÁTICA (ETAPA III, CONTINUAÇÃO)

Questão 7: Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo?

Os sujeitos de nossa pesquisa evidenciarão os resultados possíveis e, indicará o espaço amostral da experimentação, sua configuração e sistematizarão as possíveis regularidades.

A resposta esperada: Considerando esse questionamento, espera-se que os estudantes evidenciem a existência de dezesseis resultados possíveis e, que caracterizem o espaço amostral da experimentação, as configurações e regularidades. Espera-se que entendam a modelagem da situação quantificando os eventos possíveis, conceituando matematicamente a probabilidade, viabilizando a introdução de conceitos por meio de situações reais e observação

dos eventos, atribuindo notações simbólicas caracterizando as observações e enumeração dos caminhos existentes na realização do experimento. Considerar-se-á o espaço amostral representado por: {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC, XXXX}. A modelagem da situação quantifica os eventos possíveis e, usando os conceitos matemáticos envolvendo a probabilidade, teríamos que a indicação da probabilidade de a Mônica visitar cada um de seus amigos poderia ser dada, por exemplo, por:

Chamando de H, o evento “a Mônica visita o Horácio”, de Ω , o espaço amostral, a probabilidade do evento H ocorrer seria indicada por $P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)}$,

onde $n(H)$ designa o número de caminhos existentes para que a Mônica visite o Horácio e, $n(\Omega)$ designa o número de caminhos existentes para que a Mônica visite um dos seus amigos, considerando o experimento aleatório de lançamento da moeda honesta.

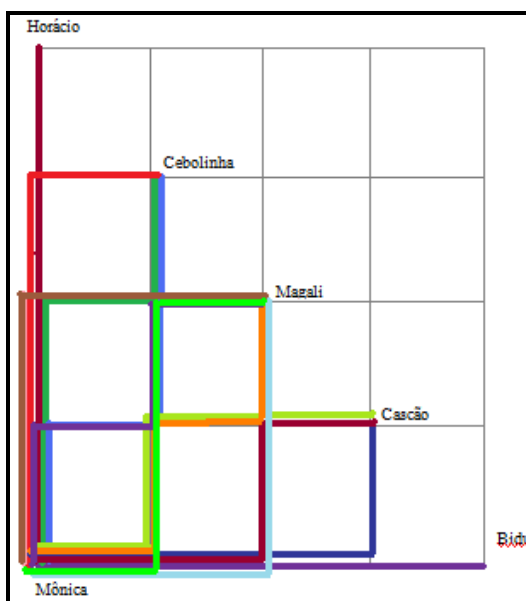


FIGURA 16 – CROQUI DOS CAMINHOS QUE MÔNICA PODE REALIZAR.

A indicação do número de caminhos existentes ao todo, teria de considerar, por exemplo, que, $n(H) = 1$, $n(C) = 4$, $n(M) = 6$, $n(S) = 4^6$, $n(B) = 1$ e, assim sendo, $n(\Omega) = n(H) + n(C) + n(M) + n(S) + n(B)$, o que implica que $n(\Omega) = 16$.

⁶ Usamos o símbolo “S” para representar o número de caminhos existentes para que “a Mônica visite Cascão”, diferenciando de $n(C)$ que representa o número de caminhos existentes para que “a Mônica visite Cebolinha”.

Trata-se de quantificar todos os resultados referentes ao experimento aleatório, caracterizando a introdução de conceitos da Teoria da Probabilidade, por meio de situações reais e observação dos eventos. Além disso, os estudantes podem atribuir notações simbólicas para representar o número de observações, relacionadas aos caminhos existentes na realização do experimento, ou apresentar uma configuração em forma de esquema como apresentamos na Figura 16. Seria essa uma ilustração de todos os resultados possíveis na realização da experimentação.

Questão 8: Depois que vocês analisaram quantos caminhos existem ao todo e quantos desses levam a Mônica para a casa da Magali, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?” () NÃO mudaríamos porque () SIM mudaríamos por que

Os estudantes analisarão as representações e esquemas, desenhos e códigos criados, e após a enumeração, caracterizarão a chance de ocorrência de cada evento, remeterão seus raciocínios ao entendimento de que os sorteios aleatórios indicam que os amigos de Mônica não têm a mesma chance de serem visitados. Emitir opiniões, quanto a não equiprobabilidade dos eventos é outro objetivo da situação.

A resposta esperada: Por meio das representações e esquemas, desenhos, códigos e da enumeração que caracterizaram a chance de ocorrência de cada evento, os estudantes indicarão que os amigos de Mônica não têm a mesma chance de ser visitados. É nossa hipótese que os estudantes emitam suas opiniões com base na não equiprobabilidade dos eventos, para em seguida calcular a probabilidade de Mônica visitar Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu.

Questão 9: Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar: Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu.

Os estudantes indicarão a probabilidade de a Mônica visitar cada um de seus amigos, para posteriormente (na Ficha 7), assimilar novos conhecimentos, caracterizar notações simbólicas para representar a frequência relativa, a porcentagem e a probabilidade de ocorrência dos eventos. Considerarão regularidades e os possíveis caminhos observados e configurados, a fim de

entender as noções de acaso e de incerteza associados ao experimento, intuitivamente.

Caracterizar a indicação do evento, sua representação de forma esquemática por meio de códigos, quantificando-os, também é um dos objetivos dessa questão.

A resposta esperada: Esse questionamento solicitou aos estudantes a indicação da probabilidade, após a indicação dos elementos de cada evento aleatório, criando então, condições de configurar o espaço amostral de forma precisa e, buscar nos conhecimentos intuitivos a caracterização das notações simbólicas para representar a frequência relativa, a porcentagem e a probabilidade de ocorrência dos eventos.

Consideradas as regularidades, os possíveis caminhos que foram observados e configurados, os sujeitos de nossa pesquisa entenderão e compreenderão que as noções de acaso e de incerteza, se manifestam de forma intuitiva dada as situações nas quais as duplas realizaram seus experimentos e observaram seus eventos (em espaços equiprováveis).

A observação da frequência de ocorrência dos acontecimentos, do número razoável de experimentos, desenvolvendo noções probabilísticas básicas. Caracterizarão e indicarão os eventos, suas representações em forma esquemática (por meio de códigos), quantificando-os.

O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Horácio é dado por $P(H)$ e $P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)}$, onde $n(H)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Horácio e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos. Como $n(H)=1$ e $n(\Omega)=16$, então $P(H) = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$.

O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Cebolinha é dado por $P(C)$ e $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)}$, onde $n(C)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Cebolinha e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos. Como $n(C)=4$ e $n(\Omega)=16$, então $P(C) = \frac{4}{16} = 0,25 = 25\%$.

O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Magali é dado por $P(M)$ e $P(H) = \frac{n(M)}{n(\Omega)}$, onde $n(M)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Magali e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos. Como $n(M) = 6$ e $n(\Omega) = 16$, então $P(M) = \frac{6}{16} = 0,375 = 37,5\%$.

O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Cascão é dado por $P(S)$ e $P(H) = \frac{n(S)}{n(\Omega)}$, onde $n(S)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Cascão e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos. Como $n(S) = 1$ e $n(\Omega) = 16$, então $P(S) = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$.

O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Bidu é dado por $P(B)$ e $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$, onde $n(B)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Bidu e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos. Como $n(B) = 1$ e $n(\Omega) = 16$, então $P(B) = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$.

Assim sendo, essa é a análise que entendemos que os estudantes estabeleçam em suas resoluções.

QUADRO 6 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A MODELAGEM MATEMÁTICA– “FICHA 6”

	Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 3	"6"	7	Quantificar todos os resultados referentes ao experimento aleatórios, caracterizando a introdução de conceitos da Teoria da Probabilidade, por meio de situações reais e observação dos eventos. Atribuir notações simbólicas para representar o número de observações, relacionados aos caminhos existentes na realização do experimento. Caracterizar quantitativamente os resultados possíveis de cada evento na realização do experimento aleatório.
		8	Analisar as representações e esquemas, desenhos, códigos, que após a enumeração caracterizam a chance de ocorrência de cada evento. Atribuir notações simbólicas para representar a frequência relativa, a porcentagem e a probabilidade dos eventos, considerando suas regularidades e os possíveis caminhos que foram observados. Emitir opiniões quanto a equiprobabilidade ou não dos eventos.
		9	Atribuir notações simbólicas para representar a frequência relativa, a porcentagem e a probabilidade de ocorrência dos eventos, considerando suas regularidades e os possíveis caminhos que foram observados. Caracterizar a indicação do evento, sua representação e forma esquemática por meio de códigos, enumerando-o. Atribuir notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios considerando suas regularidades e os possíveis caminhos a serem realizados.

Os sujeitos de nossa pesquisa completarão o quadro com a realização do terceiro e quarto sorteios, indicando a sequência sorteada, o número de caras em cada evento e qual o amigo que Mônica visitará.

A resposta esperada: O início da atividade apresenta a experimentação como sugestão para que os estudantes preencham e completem o diagrama da árvore. Apresentamos na Figura 19 e 20, a configuração da árvore de possibilidades de configuração dos caminhos aleatórios.

Com os resultados do diagrama da árvore os estudantes perceberão a configuração do espaço amostral vinculado ao experimento, que os caminhos existentes são equiprováveis e que, apesar disso, a visita associada aos amigos não são equiprováveis, por existirem quantidades de caminhos diferentes para que a Mônica os visite.

Queremos apresentar em nossa análise, o diagrama de árvore que representa o lançamento das moedas condicionado ao fato de que o primeiro sorteio ocorreu “cara”, ou seja, completar a atividade com a apresentação da árvore de possibilidades indicada em duas situações.

Espera-se que os estudantes realizem por meio da sistematização dos resultados do diagrama, a regra de formação para que cada amigo possa ser visitado, a formação da sequência sorteada, o número de caras associado aos quatro lançamentos das moedas, a existência de regularidades e a indicação do amigo a ser visitado.

1ª Situação: Considerando que o primeiro sorteio tenha sido “cara”, sem mencionar os conceitos de probabilidade conjunta, condicional ou, de independência dos eventos.

Ponto de partida	Primeiro sorteio	Segundo sorteio	Terceiro sorteio	Quarto sorteio	Sequência sorteada	Número de caras	Amigo visitado
				C	CCCC	4	HORÁCIO
			C				
				X	CCCX	3	CEBOLINHA
		C					
			C		CCXC	3	CEBOLINHA
			X				
				X	CCXX	2	MAGALI
Mônica	C						
				C	CXCC	3	CEBOLINHA
			C				
				X	CXCX	2	MAGALI
		C					
			C		CXXC	2	MAGALI
			X				
				X	CXXX	1	CASCÃO

FIGURA 18 – O DIAGRAMA DA ÁRVORE – PRIMEIRO SORTEIO - CARA

Sistematizamos a 1ª e 2ª situação conforme mostram as Figuras 18 e 19, por entendermos que os estudantes podem apresentar dificuldades na compreensão da não equiprobabilidade apresentada na experimentação, na percepção do espaço amostral associado ao experimento, assim como, o número de caminhos possíveis para que cada personagem fosse visitado pela Mônica.

Ponto de partida	Primeiro sorteio	Segundo sorteio	Terceiro sorteio	Quarto sorteio	Sequência sorteada	Número de caras	Amigo visitado
				C	XCCC	3	CEBOLINHA
			C				
				X	XCCX	2	MAGALI
		C					
			C		XCXC	2	MAGALI
			X				
				X	XCXX	1	CASCÃO
Mônica	X						
				C	XXCC	2	MAGALI
			C				
				X	XXCX	3	CASCÃO
		C					
			C		XXXC	1	CASCÃO
			X				
				X	XXXX	0	BIDU

FIGURA 19 – O DIAGRAMA DA ÁRVORE – PRIMEIRO SORTEIO - COROA

Outro fato importante se situa na percepção da diferença existente entre esta e a experimentação aleatória, como forma de estimar a probabilidade de ocorrência de certo evento (visita a personagem).

Questão 2: Quantos caminhos existem ao todo?

Pretende-se que os estudantes observem seus resultados, realizem a contagem dos mesmos e indiquem o total de caminhos, caracterizando o espaço amostral e sistematizando conhecimentos para produzir argumentos sobre a equiprobabilidade dos caminhos, sobre a regra de formação para que cada amigo possa ser visitado.

A resposta esperada: Nesse questionamento, os estudantes indicarão por meio de contagem, a existência de dezesseis caminhos possíveis, considerando que tenham confeccionado o diagrama da árvore de forma correta.

Questão 3: Analisando e sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencha a Tabela 2:

Os sujeitos de nossa pesquisa preencherão a Tabela 2, conforme Figura 20, indicando as informações relacionadas aos resultados obtidos, confrontando a probabilidade laplaciana com a frequentista.

Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Mônica a seus amigos			
Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade p_i
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidú			
Total			

FIGURA 20 – TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES (TDP)
Fonte: Cazorla e Santana, 2009.

Os estudantes relacionarão os dados considerando a frequência relativa e porcentual, explorando a probabilidade Laplaciana e Frequentista. Entendemos que estas noções façam parte do repertório de conhecimentos dos estudantes, considerando o rol de disciplinas já cursadas nesta, e nas séries anteriores.

A resposta esperada: Apresentamos na Figura 21 os resultados de nossa experimentação, conforme mencionamos anteriormente, a fim de contrastar com aquela que os estudantes possam estabelecer.

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade p_i
Horácio	1	1/16	0,0625
Cebolinha	4	4/16	0,2500
Magali	6	6/16	0,3750
Cascão	4	4/16	0,2500
Bidú	1	1/16	0,0625
Total	16	16/16	1,000

FIGURA 21 – A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE LAPLACIANA

A determinação dos valores mencionados na tabela é conhecida como “forma laplaciana” de probabilidade, pois considera um modelo como forma de determinação dos elementos de seu espaço amostral.

QUADRO 7 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – “FICHA 7”

Ficha	Questão	Objetivo da questão	
Encontro 4	"7"	1	Os estudantes perceberão os possíveis caminhos de realização do experimento aleatório por meio de um esquema denominado diagrama da árvore, atribuindo notações simbólicas para representar a sequência sorteada, sua frequência absoluta, considerando todos os resultados possíveis. Caracterizar a indicação do evento, sua representação e forma esquemática por meio de códigos e, atribuir notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios considerando suas regularidades e os possíveis caminhos a serem realizados. Indicar o número de caras na realização de cada evento sistematizado na árvore de possibilidades.
		2	Realizar a contagem de todos os resultados possíveis, caracterizando o número total de observações – espaço amostral. Verificar e sistematizar possíveis regularidades por meio da codificação (configuração) dos resultados obtidos na construção da árvore de possibilidades.
		3	Sistematizar a quantificação de todos os resultados referentes ao experimento aleatórios, utilizando conceitos da Teoria da Probabilidade, por meio de situações reais e observação dos eventos, numa tabela de distribuição de frequência de dupla entrada. Caracterizar quantitativamente os resultados possíveis de cada evento na realização do experimento aleatório na forma de frequência relativa e em porcentagem. Indicar a probabilidade usando a forma laplaciana e, confrontar com a forma frequentista.

3.2.2.8 – FICHA 8 – A CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES (ETAPA IV)

Questão 4: Depois que vocês analisaram e sistematizaram os resultados na Tabela 2⁷, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?” () NÃO mudaríamos por que ... (); SIM, mudaríamos por que ...

Os estudantes analisarão seus resultados sistematizando e quantificando aqueles referentes ao experimento aleatórios, com base nos seus conhecimentos básicos de probabilidade. Avaliar a situação real, observar os eventos, e depois institucionalizar suas informações numa tabela de distribuição de frequência (tabela de dupla entrada), também é objetivo da questão. Acreditamos que a transformação dos valores obtidos na realização de cada evento, favoreça a indicação da probabilidade na forma de frequência relativa e em porcentagem, entender a dinâmica da forma laplaciana em contraste com a forma frequentista de probabilidade.

Perceber a diferença entre os lançamentos aleatórios da moeda e os caminhos possíveis para cada amigo da Mônica, configurará uma dinâmica que possa favorecer a percepção dos estudantes, quanto ao fato de os caminhos não serem equiprováveis.

A resposta esperada: Acreditamos que os estudantes possam entender que ao retomar este questionamento, queremos verificar se eles perceberam que existe diferença entre a forma de realizar as visitas (predeterminado e aleatório), e para aqueles que já perceberam anteriormente, uma confirmação de suas realizações. Trata-se de explorar o conceito de probabilidade e amostragem, pois os resultados até aqui evidenciados são frutos de simulação e modelagem.

⁷ Veja a configuração da Figura 21 da seção 3.2.2.7.

QUADRO 8 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – “FICHA 8”

	Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 4	8ª	4	Verificar o entendimento dos estudantes quanto à descrição do sorteio aleatório realizado nos quatro lançamentos da moeda. Analisar se os educandos apresentam dificuldades para expressar e associar o uso de notações simbólicas para representar o sorteio aleatório. Verificar se os estudantes compreendem que os eventos são aleatórios e independentes, ou seja, a ocorrência de um não interfere na de outro, além da não equiprobabilidade dos caminhos na realização dos sorteios aleatórios.

Os estudantes compararão os resultados das tabelas concebidas no segundo e quarto encontros perceberão a diferença entre elas, argumentando na direção que favoreça seu entendimento quanto à forma frequentista e laplaciana de atribuir probabilidades.

3.2.2.9 – FICHA 9 – COMPARAÇÃO DAS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES (ETAPA V)

O início da atividade apresenta a solicitação de preenchimento de um quadro comparativo do cálculo de probabilidades nas formas frequentista (TDF) e Laplaciana (TDP) e a atividade solicita que os estudantes preencham a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2.

Amigo	Frequência relativa (h_i)	Árvore de possibilidades (p_i)
Horácio		
Cebolinha		
Magali		
Cascão		
Bidu		
TOTAL		

FIGURA 22 – A PROBABILIDADE FREQUENTISTA (TDF) E LAPLACIANA (TDP)
Fonte: Cazorla e Santana, 2009.

Busca-se, no entanto, o entendimento dos estudantes quanto à diferença na forma de atribuir probabilidades. Depois de preenchida a Tabela 3 conforme

a Figura 22, os estudantes voltarão sua atenção para a resposta aos questionamentos relativos à comparação entre as formas frequentista e laplaciana de atribuir probabilidades, indicando por meio da linguagem escrita suas realizações.

Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica			
Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem %
Horácio	1	$\frac{1}{30} \cong 0,03$	3%
Cebolinha	7	$\frac{7}{30} \cong 0,23$	23%
Magali	17	$\frac{17}{30} \cong 0,57$	57%
Cascão	3	$\frac{3}{30} \cong 0,10$	10%
Bidú	2	$\frac{2}{30} \cong 0,07$	7%
Total	30	1,00	100,00

FIGURA 23 – EXEMPLIFICAÇÃO DE UMA POSSÍVEL SISTEMATIZAÇÃO DOS RESULTADOS

A resposta esperada: Inicialmente apresentamos na Figura 23 a Tabela 1, configurada conforme nossa indicação na análise da Ficha 4, pois os estudantes realizarão a comparação entre os resultados obtidos na experimentação e a construção da árvore de possibilidades.

Na Figura 24, apresentamos os possíveis resultados que os estudantes podem mencionar na formação de sua distribuição de probabilidades, formas alternativas de expressar probabilidades, Tabela 2. Há de se notar que criamos uma coluna em que aparece a probabilidade em notação decimal, visto que esta é uma forma provável que os estudantes participantes de nossa pesquisa possam usar (trata-se de uma forma de alternativa de expressar probabilidades).

Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Mônica a seus amigos				
Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Notação decimal	Porcentagem %
Horácio	1	1/16	0,0625	6,25
Cebolinha	4	4/16	0,2500	25,0
Magali	6	6/16	0,3750	37,5
Cascão	4	4/16	0,2500	25,0
Bidú	1	1/16	0,0625	6,25
Total	16	16/16	1,0000	100,00

FIGURA 24 – O CÁLCULO DE PROBABILIDADES - (UMA DAS CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS)

Entendemos que os estudantes analisarão a situação frequentista e laplaciana de atribuir probabilidades, assim como, verificar se aceitam ou não, a metodologia utilizada envolvendo a simulação e modelagem probabilística, conforme Figura 25.

Na Figura 25, a Tabela 3 se apresenta com informações para confrontar a probabilidade dos resultados da experimentação (probabilidade frequentista) e aquela calculada a partir do diagrama da árvore (probabilidade laplaciana), a fim de tornar explícita a atribuição de probabilidades por meio da experimentação aleatória e outra, pela modelagem teórica.

Entendemos que este é o momento, em que os estudantes entenderão o conceito de amostra aleatória e o modelo. Salientamos ainda que, os valores mencionados na linha que indica o total, podem figurar na forma de fração ou número decimal, inclusive aproximações, pois consideramos que os estudantes não têm conhecimentos prévios sobre a regra de arredondamento.

Tabela 3. Quadro Comparativo do cálculo de probabilidades		
Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de Possibilidades (pi)
Horácio	$\frac{1}{30} \cong 0,0333... \cong 0,0\bar{3}$	0,0625
Cebolinha	$\frac{7}{30} \cong 0,2333... \cong 0,2\bar{3}$	0,2500
Magali	$\frac{17}{30} \cong 0,5666... \cong 0,5\bar{7}$	0,3750
Cascão	$\frac{3}{30} \cong 0,10$	0,2500
Bidu	$\frac{2}{30} \cong 0,0666...0,06\bar{7} \cong 0,07$	0,0625
Total	1,00	1,000

FIGURA 25 – TABELA 3. QUADRO COMPARATIVO DO CÁLCULO DE PROBABILIDADES (Suposição da resposta que os estudantes podem indicar)

Então, os estudantes poderão compreender que a simulação por eles realizada ao lançar a moeda e a visita da Mônica depende dos sorteios aleatórios realizados, ou seja, dependerá dos trinta lançamentos realizados.

Questão 1: Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?

Após a elaboração da tabela, comparando a forma frequentista de realizar os sorteios, ao utilizar o lançamento de moedas um grande número de vezes e, aquela determinada pela utilização do esquema (diagrama de árvore), os estudantes são levados a comparar os resultados obtidos nas duas formas de determinação da probabilidade e utilizarão conhecimentos que estejam relacionados à frequência relativa e a probabilidade laplaciana.

A resposta esperada: Entendemos que os estudantes compreenderão a simulação por eles realizada ao lançarem a moeda, relação existente entre a frequência dos resultados nos quatro lançamentos simultâneos, que a visita da Mônica aos amigos depende dos sorteios aleatórios, ou seja, vai depender da amostra (no nosso caso, trinta vezes os quatro lançamentos aleatórios). Por outro lado, ao considerarem o modelo descrito pela árvore de possibilidades (diagrama da árvore), é nossa crença que compreendam que todos os caminhos possíveis são determinados quando da sua construção, confirmando a possibilidade de cada amigo ser visitado pela Mônica é diferenciada pelo número de caminhos. A determinação da probabilidade aqui descrita evidenciará a modelagem teórica.

Questão 2: Analisando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta?

Os sujeitos de nossa pesquisa analisarão os resultados que obtiveram, quando elaboraram a Tabela 3, emitirão opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha. Verificarão semelhanças e aproximações entre elas e emitirão pareceres.

A resposta esperada: Após a elaboração da tabela, comparando a forma frequentista de realizar os sorteios, ao utilizar o lançamento de moedas um grande número de vezes e, aquela determinada pela utilização do esquema (diagrama de árvore), os estudantes são levados a comparar os resultados obtidos nas duas formas de determinação da probabilidade utilizando conhecimentos relacionados à frequência relativa e a probabilidade.

Questão 3: Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir?

Os sujeitos de nossa pesquisa compararão e analisarão os resultados que obtiveram com outras duplas, quando elaboraram a Tabela 3, emitirão opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha. Sociabilizarão os resultados obtidos com outras experimentações realizadas nas mesmas condições, verificando semelhanças, proximidades ou não entre os valores de suas composições.

A resposta esperada: Os sujeitos de nossa pesquisa analisarão os resultados que obtiveram, quando elaboraram a Tabela 3, emitindo sua opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha. Verificarão as semelhanças e aproximações entre elas e emitirão pareceres.

Ao trocar informações entre si (elementos formadores da dupla) e, sociabilizar os resultados obtidos, considerarão as realizações de suas atividades nas mesmas condições, associar os valores obtidos, verificar as semelhanças dos resultados obtidos por meio do diagrama de árvores, analisar proximidades, ou não, dos valores contidos na coluna da frequência relativa, e por fim, estabelecer comparações.

Questão 4: Vocês acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos? () Sim, por que... () Não, por que...

Os sujeitos de nossa pesquisa analisarão os resultados que obtiveram, quando elaboraram a Tabela 3, emitir opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha e verificar as semelhanças e aproximações entre elas, emitindo pareceres.

Nesse questionamento os estudantes opinarão quanto à forma correta, ou por eles considerada mais justa, no que diz respeito à distribuição de probabilidade associada às visitas da Mônica entre os amigos. Queremos ainda, verificar se os estudantes percebem que o número de resultados observados no sorteio aleatório se aproxima do número de resultados esperados, e este por sua vez, aproxima o modelo real do modelo matemático.

A resposta esperada: Os sujeitos de nossa pesquisa compararão e analisarão os resultados que obtiveram com outras duplas, quando elaboraram a Tabela 3, emitindo opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha. Sociabilizarão os resultados obtidos com outras experimentações realizadas nas mesmas condições, verificando semelhanças, proximidades ou não entre os valores de suas composições.

QUADRO 9 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – COMPARANDO AS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES – SORTEIOS ALEATÓRIOS E A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – FICHA 9

Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro "9"	T3	Construir um quadro que permita comparar a forma frequentista de realizar os sorteios utilizando o lançamento de moedas um grande número de vezes e, aquela determinada pela utilização do esquema (diagrama de árvore). Comparar os resultados obtidos nas duas formas de determinação dos eventos, utilizando a frequência relativa e a probabilidade laplaciana.
	1	Verificar a proximidade dos valores obtidos, indicando a diferença existente entre as duas formas de atribuir probabilidades.
	2	Indicar qual das duas maneiras de calcular probabilidade é a mais correta, justificando sua escolha.
	3	Sociabilizar os resultados obtidos com outras realizadas nas mesmas condições, verificando semelhanças, proximidades ou não de valores, ou seja, estabelecendo comparações.
	4	Emitir opinião quanto às formas de distribuição de probabilidade. Perceber que o número de resultados observados no sorteio aleatório se aproxima do número de resultados esperados e, aproximando o modelo real do modelo matemático.

3.2.2.10 – FICHA 10 – COMPARAÇÃO DAS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES (ETAPA V)

Outra preocupação nos questionamentos dessa última ficha busca verificar se a modelagem de situações reais favorece a aprendizagem de introdução à teoria das probabilidades, se a forma lúdica é uma boa estratégia para o entendimento do tema em questão.

Finalizando, pretendemos saber a opinião dos estudantes quanto à aplicação da atividade “Os passeios aleatórios da Mônica”, sobre a viabilidade ou não e, se de forma geral os estudantes assimilaram o conteúdo abordado, se estabeleceram a aprendizagem, se é possível emitir pareceres a respeito.

Questão 5: Caso vocês achem injusta essa distribuição, vocês poderiam indicar outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica?

Os sujeitos de nossa pesquisa emitirão opinião sobre qual a forma mais apropriada de realizar as visitas, darão suas sugestões e preferências, considerando as que apresentamos e, outras de sua escolha.

Queremos que os estudantes emitam opinião quanto à forma mais justa de realização da visita de Mônica aos seus amigos, se indicariam outras formas que considerem justas para a realização das mesmas, se a forma determinista seria a mais adequada, ou se considerariam a nova forma razoável.

A resposta esperada: Os sujeitos de nossa pesquisa compararão e analisarão os resultados que obtiveram com outras duplas, quando elaboraram a Tabela 3, emitirão sua opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha. Sociabilizarão os resultados obtidos com outras experimentações realizadas nas mesmas condições, verificando semelhanças, proximidades ou não entre os valores de suas composições.

Questão 6: Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? Se SIM, o que elas tiveram de interessantes? Se NÃO, o que ela tinha de chata?

Os sujeitos de nossa pesquisa compararão e analisarão a realização da atividade, as estratégias utilizadas na experimentação, simulação e modelagem. Evidenciarão se houve ou não evolução no processo de ensino e aprendizagem de assuntos relacionados à probabilidade, assim como, analisará se foram interessantes ou não tais atividades.

Emitirão suas opiniões quanto à forma realização das atividades de introdução à probabilidade, que objetivou o entendimento da forma determinista e aleatória, com base na experimentação e modelagem. Queremos, enfim, que os estudantes emitam opinião sobre a aceitação ou não, das atividades apresentadas na realização da experimentação e modelagem.

A resposta esperada: Os sujeitos de nossa pesquisa compararão e analisarão a realização da atividade, as estratégias utilizadas na

experimentação, simulação e modelagem. Evidenciarão se houve ou não evolução no processo de ensino e aprendizagem de assuntos relacionados à probabilidade, assim como, analisará se foram interessantes ou não tais atividades

Acreditamos que os estudantes possam elencar entre as atividades desenvolvidas, qual foi a mais interessante, qual despertou maior interesse ou, que tenha colaborado para o desenvolvimento de novos conhecimentos no processo de ensino e aprendizagem.

Questão 7: Dentre todas as atividades que vocês realizaram, qual foi (ou quais foram) a atividade que vocês acharam mais legal?

É nossa intenção que os estudantes indiquem dentre as atividades realizadas, qual, ou quais, em sua opinião foi determinante, considerando os momentos de interação pessoal e social, as situações de ensino e aprendizagem, o ambiente e a forma realização.

A resposta esperada: Espera-se que ao finalizar todas as atividades, os estudantes indiquem uma ou mais atividade, dentre aquelas que estão relacionadas aos “Passeios aleatórios da Mônica” (Contextualização, Experimentação, Modelagem, Diagrama de Árvores ou Comparando as duas formas de atribuir probabilidades).

Esperamos que as atividades que envolvem a situação lúdica, ou a manipulação de objetos mereça destaque entre aquelas que podem ser indicadas.

Questão 8: O que vocês aprenderam (quais assuntos) com as atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica?

Os estudantes elencarão os assuntos que consideram importantes, dentre os que estão relacionados com a atividade desenvolvida. Acreditamos que depois de realizada tais atividades, os estudantes possam analisar a partir da técnica aplicada, o que foi mais importante e que tenha permitido compreender, potencializar e promover a aprendizagem de forma contextualizada, os conceitos básicos de probabilidades elencados para o Ensino Fundamental.

Queremos verificar se, a experimentação, simulação e modelagem de situações reais favorecem ao ensino e aprendizagem de conceitos básicos de probabilidade, se a forma lúdica é uma boa estratégia para o entendimento do tema em questão, em especial, aqueles relacionados com “Os passeios aleatórios da Mônica”: atividade para ensinar conceitos básicos de probabilidade.

A resposta esperada: Podemos ressaltar ainda, que os caminhos possíveis, o diagrama da árvore, o cálculo de probabilidade de eventos simples (cara e coroa) e dos eventos compostos (caminhos), a probabilidade das visitas aos amigos por meio da frequência relativa ou segundo Laplace, a elaboração das Tabelas de distribuição de frequências (absoluta, relativas) e outras formas de atribuição de probabilidades, são os principais assuntos trabalhados com o desenvolvimento das atividades.

Acreditamos que os estudantes podem ressaltar um ou mais assuntos deste que listamos: experimentos determinísticos e aleatórios, espaço amostral, eventos simples e compostos, probabilidade de eventos, eventos equiprováveis, a montagem de um rol de caminhos aleatórios, a distribuição de frequência, propriedades probabilísticas, construção do diagrama de árvores, dentre outros.

QUADRO 10 – SÍNTESE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO – COMPARAÇÃO DAS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES – A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES – FICHA 10

Ficha	Questão	Objetivo da questão
Encontro 5 10"	5	Emitir a opinião quanto à forma mais justa de realização do experimento “Os Passeios Aleatórios da Mônica”.
	6	Emitir opinião sobre a aceitação ou não, das atividades apresentadas na realização da experimentação.
	7	Emitir opinião sobre qual(is) da(s) atividade(s) realizada(s) foi (ram) mais interessante(s)
	8	Emitir opinião sobre qual(is) assunto(s) os estudantes aprenderam com as atividades que foram realizadas.

3.3 – O MATERIAL UTILIZADO

Para a realização desse estudo utilizamos de materiais diversificados, tais como: O instrumento diagnóstico intitulado “Os passeios aleatórios da Mônica” (composto por dez fichas), lápis, borrachas, lápis de cor, caneta hidrocolor,

canetas especiais para transparência, canetas esferográficas para anotações dos estudantes e do pesquisador, moedas (todas de vinte e cinco centavos), folhas de sulfite e calculadoras⁸ para desenvolvimento de contas e rascunho de desenhos.

Confeccionamos como material de suporte didático, conforme mostra a Figura 26, vinte e cinco mini cartazes coloridos utilizando “E.V.A.” com as seguintes especificações: 23 cm X 23 cm X 2 mm, e a ilustração contendo a quadrícula para a simulação dos caminhos que a personagem Mônica poderia realizar para chegar à casa de um de seus cinco amigos (Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão, Bidu).



FIGURA 26 – MATERIAL UTILIZADO NA REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Criamos um botão móvel para a simulação do passeio aleatório com o decalque da Mônica, também de “E.V.A.”, com as seguintes dimensões: 3,2 cm X 3,6 cm e a Figura da Mônica com 2 cm X 3 cm, conforme o que apresentamos na Figura 27.



FIGURA 27 – APOIO DIDÁTICO PARA SIMULAÇÃO DOS CAMINHOS ALEATÓRIOS

Utilizamos ainda, vinte e cinco moedas de R\$ 0,25 (vinte e cinco centavos de Real), todas com as mesmas características, conforme Figura 28.

⁸ Ao desenvolver as atividades, na terceira e quarta etapa, utilizamos o ambiente informatizado a fim de disponibilizar o uso da calculadora, pois alguns alunos assim solicitaram.



FIGURA 28 – APOIO DIDÁTICO, MOEDAS E DECALQUE MÓVEL

Queremos destacar os ambientes para a realização dos trabalhos de confecção das atividades, pois a direção escolar reservou a sala de Artes e o Laboratório de Informática. A sala de Arte porque apresentava mobília que favorecia o trabalho em dupla, e maior área de circulação.

O Laboratório de Informática além de possuir uma área suficiente para a troca de informações entre os estudantes, também poderia favorecer a realização de cálculos, que os mesmos pudessem apresenta dificuldades, tais como algoritmos envolvendo operações simples e arredondamentos.

3.4 – A ATIVIDADE DE ENSINO A SER AVALIADA

Considerando o estudo proposto, inicialmente explanaremos as nossas expectativas, levando em conta a nossa análise pessoal de cada questão da atividade “Os passeios aleatórios da Mônica” e, as respostas esperadas considerando cada ficha que será respondida pelos sujeitos de nossa pesquisa. Em seguida, analisaremos qualitativamente as respostas dos estudantes, classificando-as, primeiramente em certo ou errado e, posteriormente, considerando o nosso aporte teórico.

Em nossa fundamentação teórica, mencionamos que a TAD proposta por Chevallard (1992), permitirá a organização Praxeológica ou simplesmente a Praxeologia desta, e conseqüentemente, permitirá a análise da modelização proposta em nossa atividade.

Consideramos ser possível trabalhar as atividades planejadas na sequência de ensino tendo a TAD como base teórica. Isto porque essas atividades foram pensadas de modo a apresentar conceitos básicos de probabilidade de forma contextualizada e como objeto de estudo, numa

proposta de inversão da praxeologia usual e a Figura 29 a seguir ilustra o que mencionamos.

Queremos que o leitor entenda que a nossa análise buscará encontrar elementos nos procedimentos dos estudantes, que nos permita compreender quais as contribuições da praxeologia proposta.

Neste sentido, utilizaremos quatro noções que nos permitem investigar sobre a praxeologia descrita por Chevallard e discutida no Capítulo II, a saber:



FIGURA 29 – PRAXEOLOGIA USUAL INVERTIDA (TAD)

Dessa forma, analisaremos as particularidades nos protocolos elaborados pelos estudantes, com relação às atividades “Os passeios aleatórios da Mônica”, detalhando-a sob a luz da organização praxeológica, iniciando nossa análise pela situação-problema ou tarefa identificada por (T), que por sua vez é composta de sub-tarefas designadas por (t). Em seguida, vem a Tecnologia (θ) que buscará argumentar a justificativa para a utilização da técnica (t), amparada pela Teoria (Θ), que, por sua vez, servirá para justificar e tornar compreensível a tecnologia (θ).

3.4.1 – ETAPA I - A ESTÓRIA (CONTEXTUALIZAÇÃO) E A TAD.

T →: Ler e analisar o texto, realizar a interpretação; Responder aos questionamentos relacionados à leitura; Explorar a ideia intuitiva entre evento determinístico e aleatório; Utilizar determinada linguagem verbal e simbólica; Argumentar a realização da experimentação determinística e aleatória, Imaginar o lançamento da moeda e determinar os resultados possíveis.

Quanto à tarefa (T) relacionada à Atividade I, esta se apresenta subdividida em sub-tarefas que representaremos da seguinte forma: $(t_{1AI}; t_{2AI}; \dots; t_{11AI})$.

Considerando a técnica (τ) aplicada, e esta se apresenta subdividida em partes que representaremos assim: ($\tau_{1AI}; \tau_{2AI}; \dots; \tau_{11AI}$). Considerando a tecnologia (θ) aplicada, e esta figura subdividida da seguinte forma: ($\theta_{1AI}; \theta_{2AI}; \dots; \theta_{8AI}$).

Finalmente, apresentamos a teoria (Θ) aplicada e esta, figura subdividida da seguinte forma: ($\Theta_{1AI}; \Theta_{2AI}; \dots; \Theta_{8AI}$).

$t_{1AI} \rightarrow$ Compreender e diferenciar a forma sistemática e aleatória de Mônica visitar seus amigos.

$t_{2AI} \rightarrow$ Compreender de forma intuitiva os eventos probabilísticos relacionados à leitura e interpretação da estória (sistemática e experimental).

$t_{3AI} \rightarrow$ Perceber que as visitas durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida, todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados.

$t_{4AI} \rightarrow$ Aplicar o conceito de probabilidade subjetiva. Entendemos por probabilidade subjetiva, aquela em que a probabilidade resulta de uma intuição, experiência ou estimativa, palpite fundamentado de forma consciente.

$t_{5AI} \rightarrow$ Determinar a chance de Mônica visitar Magali.

$t_{6AI} \rightarrow$ Explorar a ideia intuitiva do estudante entre evento determinístico e aleatório. Utilizar uma determinada linguagem verbal e simbólica, além de proposições, procedimentos e argumentos para realização da atividade.

$t_{7AI} \rightarrow$ Imaginar o lançamento de uma moeda e intuir os supostos resultados da face voltada para cima.

$t_{8AI} \rightarrow$ Determinar a chance de sair cara e de sair coroa.

$t_{9AI} \rightarrow$ Determinar a chance de Magali ser visitada.

$t_{9AI} \rightarrow$ Justificar por meio de registro escrito o porquê do valor indicado, no que diz respeito à chance de Magali ser visitada.

$t_{10AI} \rightarrow$ Responder ao questionamento: “Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”.

$t_{11AI} \rightarrow$ Imaginar o lançamento da moeda 4 vezes, anotando cada resultado imaginário.

Considerando a técnica (τ) aplicada, esta se apresenta subdividida em partes que representaremos assim: (τ_{1AI} ; τ_{2AI} ;...; τ_{11AI}).

τ_{1AI} → Com base no acaso, analisar a segunda organização de visitas aos amigos, ou seja, lançar a moeda e anotar o resultado na tabela, e é esta ação que indica o caminho/direção (estrada ou rua) a ser seguido.

τ_{2AI} → Ao lançar a moeda, usar a intuição de que se moverá um quarteirão para o Norte se sair cara (C) e, um quarteirão para o Leste, se sair coroa (X); cada jogada representará um quarteirão de percurso e, jogando a moeda quatro vezes consecutivas, anotar a sequência obtida.

τ_{3AI} → Indicar com base na pré-probabilidade a chance de se obter cara ou coroa no lançamento da moeda e, ter como entendimento (conforme observação mencionada na estória), de que a moeda lançada é honesta.

τ_{4AI} → Intuitivamente, a indicação da chance de Magali ser visitada pela Mônica é de “um para cinco”, considerando a forma determinista e, em usando notação matemática, pode ser indicada por 1, uma vez que se trata de um evento determinístico.

τ_{5AI} → Experimentalmente, a chance de Magali ser visitada pela Mônica depende do sorteio da moeda e, usando a notação matemática e o conhecimento empírico (estatístico) de probabilidade, pode ser indicada por:
 $P(M) = P(CCXX) + P(CXCX) + P(CXXC) + P(XXCC) + P(XCCX) + P(XCXC)$ ou

$$P(M) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \text{ e, } P(M) = \left(\frac{6}{16}\right), \text{ ou ainda, que } P(M) = 37,5\% .$$

τ_{6AI} → Considerando a experimentação aleatória indicada na estória (Mônica visitar a Magali realizando o lançamento da moeda), a indicação poderá ser justificada de forma intuitiva ou por esquema.

τ_{7AI} → Esquematizar a resposta por meio de desenhos.

τ_{8AI} → Construir os caminhos $\{(CCCX), (CCXC), (CXCC), (XCCC)\}$. Talvez evidenciar o número total de caminhos que a Mônica pode percorrer para visitar seus amigos.

τ_{9AI} → Ao responder sim, a dupla considerará que a probabilidade de obter cara no lançamento de uma moeda é a mesma que a de obter coroa, e isso ocorrendo, caracterizará que os estudantes não evidenciarão a diferença entre a forma determinista e experimental.

τ_{10AI} → Apontar qualquer um dos dezesseis resultados possíveis nos quatro lançamentos imaginário da moeda, ou mais de um resultado, considerando que supostamente podem usar a imaginação intuitiva e relacionar, por exemplo, {(CCCC), (CCCX), (CCXC), (CCXX),..., (XXXX)}.

τ_{11AI} → escrever de forma clara e sintetizada o entendimento sobre a diferença entre a forma sistemática e aleatória dos experimentos evidenciados na atividade.

Considerando a tecnologia (θ) aplicada, e esta figura subdividida da seguinte forma: (θ_{1AI} ; θ_{2AI} ;...; θ_{8AI}).

θ_{1AI} → O número possível de visitas na forma sistemática (determinista) é igual a 5. O número possível de visitas na forma experimental, considerando os caminhos para Mônica chegar à casa de seus amigos totalizam 16 formas diferentes.

θ_{2AI} → Apresentar o total de visitas, que estão relacionadas aos cinco dias da semana, de forma simbólica, como por exemplo, $n(V) = 5$, $n(H) = 1$, onde $n(V)$ indica o número de elementos do espaço amostral da experiência determinista e $n(H)$, o número de dias em que a Mônica visita Horácio.

θ_{2AI} → A probabilidade de Mônica visitar seus amigos na forma determinista remetem os estudantes à afirmação de que $P(H) = P(C) = P(M) = P(S) = P(B)$ e H, C, M, S, B designa cada evento que representa as visitas realizadas pela Mônica a cada um de seus amigos em dias da semana pré-determinados.

θ_{3AI} → A indicação da probabilidade dos eventos na forma clássica é indicada por um quociente: $P(H) = P(B) = \frac{1}{16}$. Esta indicação da probabilidade dos eventos pode ser mencionada na forma decimal por: $P(H) = P(B) = 0,0625$, ou

ainda, a probabilidade dos eventos pode ser indicada na forma percentual por:
 $P(H) = P(B) = 6,25\%$.

$\theta_{4AI} \rightarrow$ Converter os resultados obtidos no lançamento da moeda em símbolos.

$\theta_{5AI} \rightarrow$ Indicar a resposta, dizendo que são possíveis dois, e somente dois resultados, dado que a moeda é honesta.

$\theta_{6AI} \rightarrow$ Determinar os valores de $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$ e $P(X) = \frac{1}{2}$.

$\theta_{7AI} \rightarrow$ A resposta intuitiva pode ser indicada considerando duas as duas situações: o dia pré-estabelecido da visita e a visita indicada segundo a imaginação do lançamento da moeda.

$\theta_{8AI} \rightarrow$ Desenhar os caminhos escolhidos. Fixar, por exemplo, a Mônica e o Cebolinha e escrever os caminhos possíveis de realização da visita, percebendo a ocorrência de quatro variações.

Finalmente, apresentamos a teoria (Θ) aplicada e esta, figura subdividida da seguinte forma: (Θ_{1AI} ; Θ_{2AI} ;...; Θ_{8AI}).

$\Theta_{AI} \rightarrow$ Experimento probabilístico, Espaço amostral de um experimento probabilístico, probabilidade Clássica (ou teórica), Probabilidade empírica (ou estatística), Probabilidade Subjetiva. Porcentagem, frações, números decimais e percentuais, Lei dos Grandes Números.

$\Theta_{1AI} \rightarrow$ Experimentos aleatórios são aqueles que, repetidos nas mesmas condições, não produzem o mesmo resultado.

$\Theta_{2AI} \rightarrow$ Probabilidade empírica (ou estatística) é aquela que se baseia em observações obtidas de experimentos probabilísticos. A probabilidade empírica de um evento é a frequência relativa desse evento. Chamando de H, o evento “a Mônica visita o Horácio na segunda-feira”, de V, o espaço amostral (visitar segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu) e, de $P(H)$, a probabilidade do evento H ocorrer, sua indicação seria dada por: $P(H) = \frac{n(H)}{n(V)}$, onde $n(H)$ designa o número de vezes da

semana que a Mônica visita o Horácio e, $n(V)$ designa o número de dias que a Mônica estabelece para realizar a visita aos seus amigos na semana.

$\Theta_{3AI} \rightarrow$ A probabilidade clássica (teórica) é aquela onde o número de resultados no espaço amostral é conhecido e cada resultado tem a mesma probabilidade de ocorrer.

$\Theta_{4AI} \rightarrow$ O evento determinista “visitar Horácio em um dos dias da semana, por exemplo, é dada por: “. A representação $P(H)$ indica a probabilidade de Mônica visitar Horácio.

$\Theta_{5AI} \rightarrow$ A probabilidade clássica (teórica) do evento determinista “visitar Horácio em um dos dias da semana, por exemplo, é dada por: “. A representação $P(H)$ indica a probabilidade de Mônica visitar Horácio.

$\Theta_{6AI} \rightarrow$ Usar o conceito de fração (números racionais), e porcentagem (proporção), assim como, sua representação na forma relativa e porcentual ($P(H) = 20\%$).

$\Theta_{7AI} \rightarrow$ Experimentos determinísticos são aqueles que, ao serem repetidos nas mesmas condições, conduzem ao mesmo resultado.

$\Theta_{AI} \rightarrow$ Experimento probabilístico, Espaço amostral de um experimento probabilístico, probabilidade Clássica (ou teórica), Probabilidade estimada (pela frequência). Porcentagem, frações, números decimais e percentuais.

3.4.2 – ETAPA II - EXPERIMENTAÇÃO E A TAD

T \rightarrow : Realizar a experimentação do lançamento de uma moeda honesta e, em seguida, anotar os resultados obtidos na coluna denominada sequência. Perceber por meio do experimento aleatório, qual será o amigo visitado ao lançar a moeda quatro vezes consecutiva. Responder os questionamentos com base na experimentação, construir a Tabela de Distribuição de Frequência, Elaborar a distribuição de frequência absoluta, relativa e porcentual. Associar os resultados da experimentação com a chance de visita que cada personagem poderá ter.

Quanto à tarefa (T) relacionada à Atividade II, esta se apresenta subdividida em sub-tarefas que representaremos da seguinte forma: ($t_{1AII}; t_{2AII}; \dots; t_{11AII}$). Considerando a técnica (τ) aplicada, e esta se apresenta subdividida em partes que representaremos assim: ($\tau_{1AII}; \tau_{2AII}; \dots; \tau_{15AII}$). Considerando a tecnologia (θ) aplicada, e esta figura subdividida da seguinte forma: ($\theta_{1AII}; \theta_{2AII}; \dots; \theta_{9AII}$).

Finalmente, apresentamos a teoria (Θ) aplicada e esta, figura subdividida da seguinte forma: ($\Theta_{1AII}; \Theta_{2AII}; \dots; \Theta_{8AII}$).

Quanto à tarefa (T), e esta se apresenta subdividida em sub-tarefas que representaremos da seguinte forma: ($t_{1AII}; t_{2AII}; \dots; t_{11AII}$).

$t_{1AII} \rightarrow$ Anotando os resultados obtidos nos lançamentos consecutivos no “Quadro 1” e, mediante a observação, dos caminhos, indicar o amigo a ser visitado pela Mônica. $t_{2AII} \rightarrow$ Explorar a ideia intuitiva entre evento determinístico e aleatório, utilizar uma determinada linguagem verbal e simbólica, proposições, procedimentos e argumentação.

$t_{3AII} \rightarrow$ Comparar as experimentações e a chance de Horácio e Bidu de serem visitados por Mônica, justificando sua resposta.

$t_{4AII} \rightarrow$ Comparar e justificar, com base nos resultados obtidos nos trinta lançamentos o (s) personagem (ns) com a menor chance de ser (em) visitado(s).

$t_{5AII} \rightarrow$ Opinar se “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados” considerando o caráter determinista e a experimentação aleatória.

$t_{6AII} \rightarrow$ Organizar os dados por meio de uma representação gráfica, de configuração simples, por meio de conhecimentos anteriores.

$t_{7AII} \rightarrow$ Ordenar o conjunto de dados, introduzir a noção de eventos elementares associados ao subconjunto do espaço amostral.

$t_{8AII} \rightarrow$ Sistematizar os possíveis resultados, desenvolvendo uma linguagem formal, promover o nível de conhecimento e a relação com o conjunto de dados, formalizando generalizações.

$t_{9AII} \rightarrow$ Responder qual a porcentagem de visitas cascão receberia, considerando a experimentação realizada.

t_{10AII} → Retomar o questionamento, segundo a experimentação, e responder se haveria ou não, a mudança de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”

t_{11AII} → Comparar os resultados, confrontá-los e sociabilizá-los.

τ_{1AII} → Considerar a regra citada na estória da “Atividade I - Contextualização” e, se sair cara (C), Mônica andar um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), se locomoverá um quarteirão para o Leste.

τ_{2AII} → Selecionar o resultado de uma repetição qualquer e desenhar o percurso percorrido pela Mônica no papel transparente.

τ_{3AII} → Associar o sorteio aleatório dos lançamentos da moeda, com a noção dos caminhos aleatórios obtidos, caracterizando esquematicamente um dos passeios aleatórios.

τ_{4AII} → Usar as configurações e compartilhar intra-duplas suas escolhas apontando para qualquer um dos resultados possíveis da experimentação realizada e registrada na Ficha 2.

τ_{5AII} → Utilizar as transparências e canetas especiais possibilitando a construção de um croqui indicando as configurações ao realizar cada visita aos personagens envolvidos na realização da atividade.

τ_{6AII} → Notar que ambos, apresentam na experimentação a menor chance de serem visitados, e a justificativa considerará que no lançamento da moeda por quatro vezes consecutivas, há uma tendência que é mais difícil obter os quatro resultados iguais - para visitar o Horácio, a sequência CCCC (quatro resultados iguais, CCCC ou XXXX) apresenta a maior dificuldade de ocorrer.

τ_{7AII} → Horácio e Bidu apresentam na experimentação o menor número de configurações e, portanto, a menor chance de serem visitados.

τ_{8AII} → Justificar que considerando o lançamento da moeda quatro vezes consecutiva, há uma tendência de que é mais difícil obter a configuração com todas as faces iguais. Para visitar o Horácio é necessário obter a sequência onde todas as faces são iguais a cara (CCCC), enquanto que para visitar o Bidu, a configuração da sequência apresenta todas as faces iguais à coroa (XXXX).

τ_{9AII} → Evidenciar se existe a chance de algum amigo não ser visitado, considerando a realização da experimentação, justificando sua resposta.

τ_{10AII} → Compreender as possíveis variabilidades dos resultados obtidos por outras duplas.

τ_{11AII} → Perceber que os personagens situados nos extremos têm menor probabilidade de ser visitados pela Mônica e investigar sobre qual a razão de tal constatação.

τ_{12AII} → Comparar as TDF, analisar os resultados obtidos e anotados na Tabela 1, possibilitando a aquisição de concepções por ser o valor calculado a partir de uma amostra e permitir, possíveis variações na experimentação realizada e que originou as amostras.

τ_{13AII} → A experimentação aleatória e a observação dos resultados permite perceber a variabilidade dos resultados e, os resultados isolados são equiprováveis.

τ_{14AII} → Se ao comparar seus resultados, estes forem iguais, entender que tal situação é obra do acaso, pois a indicação dos eventos são obtidos de forma isolada e casual, para posteriormente realizar-se a comparação das amostras entre duplas.

τ_{15AII} → Se ao compararem seus resultados, estes forem diferentes atribuir esta ocorrência também ao acaso, pois os resultados são provenientes de uma simulação e, necessariamente, tais resultados obtidos na amostra contendo trinta lançamentos não serão todos iguais.

θ_{1AII} → Realizar o lançamento da moeda quatro vezes consecutivas, anotar na coluna denominada “Sequência” e, com o auxílio da quadricula confeccionada como material de apoio, do texto da contextualização, da moeda e do decalque confeccionado, realizar trinta repetições. Como exemplo, citamos: se sair a sequência cara, cara, coroa, cara, a anotação CCXC na coluna sequência e, mencionar na coluna do “amigo visitado” o nome Cebolinha.

θ_{2AII} → Usar a imaginação intuitiva e relacionar, por exemplo, os dezesseis resultados {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, ..., XXXX}.

θ_{3AII} → Indicar, considerando suas experimentações, que entre Magali e Horácio, a primeira tem maior chance de ser visitada, e que ao considerar o lançamento da moeda, existe uma tendência situada na dificuldade de obter os quatro resultados iguais, que para visitar o Horácio é necessário que o resultado tenha configuração CCCC (quatro resultados iguais – (CCCC), (XXXX)). Tratando-se de uma experimentação ao acaso, pode haver algum dos amigos que não seja visitado.

θ_{4AII} → Ao recorrer à sua experimentação, entender que todos os amigos têm a mesma chance de ocorrer, mas ao considerar a experimentação e diante dos resultados, perceber que a equiprobabilidade dos eventos não pode ser sustentada.

θ_{5AII} → Listar as possibilidades utilizando conceitos matemáticos, realizar a experimentação e atribuir valor probabilístico, construir possibilidades motivadas pela necessidade de avaliação de chance (sorte, sorteio aleatório, acaso, etc.).

θ_{6AII} → Para construir a TDF, utilizar os resultados obtidos no Quadro 1, por meio de contagem, indicando na coluna “Número de vezes que foi visitado (fi)”. Em seguida, dividir as frequências respectivas por 30, pois foram realizados trinta lançamentos aleatórios, cada qual com 4 lançamentos isolados (Consideramos que os resultados listados podem ser: {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC, XXXX}).

θ_{7AII} → As combinações obtidas na experimentação, que apresentam todas as faces iguais a cara indicam que o amigo a ser visitado é o HORÁCIO, as que apresentam três faces iguais a cara e uma coroa, configuram a visita ao amigo CEBOLINHA, aquelas que apresentam duas faces iguais a cara e, duas outras iguais a coroa, indicarão a visita a MAGALI. Outras combinações apresentando três faces iguais a coroa e uma cara indicarão que o amigo visitado é o CASCÃO. Finalmente, as combinações configurando a visita ao amigo BIDU, apresentando todos os resultados iguais a coroa.

θ_{8AII} → Usar a porcentagem em forma de ferramenta matemática, necessária para a construção do conceito de probabilidade e às experiências

probabilísticas, ou seja, observar o trabalho com porcentagem vinculado ao raciocínio probabilístico.

θ_{9AII} → Considerar que os resultados são provenientes de uma simulação. Acreditamos que, pelo fato da aleatoriedade e da experimentação, dificilmente encontraremos nos resultados obtidos duas amostras que sejam idênticas.

Θ_{AII} → Experimento aleatório, evento probabilístico, Espaço amostral de um experimento probabilístico, probabilidade Clássica (ou teórica), Probabilidade empírica (ou estatística), Probabilidade Subjetiva, Porcentagem, frações, números inteiros, decimais e percentuais, experimentos equiprováveis.

3.4.3 – ETAPA III - MODELAGEM MATEMÁTICA E A TAD

T →: Desenhar no croqui, o percurso de todas as maneiras possíveis que a Mônica pode chegar à casa de Magali, utilizando linhas diferentes ou lápis de cor.

t_{1AIII} → indicar de forma organizada todos os caminhos possíveis de a Mônica visitar Magali, Cascão, Cebolinha, Bidu e Horácio.

t_{2AIII} → Desenvolver a modelagem matemática, condicionada à Introdução e aprendizagem da Probabilidade, compatível com o nível de ensino.

t_{4AIII} → Estimular a realização de indagações, o estabelecimento de relações, a construção de justificativas e o desenvolvimento do espírito de investigação.

t_{5AIII} → Ler e interpretar representações gráficas, além de descrever e interpretar sua realidade com base em conhecimentos probabilísticos.

t_{6AIII} → Determinar quantos caminhos existe ao todo, usando a linguagem escrita, para a Mônica chegar à casa de Magali, Cascão, Cebolinha, Bidu e Horácio, descrevendo-os e mencionando o que é comum entre eles.

t_{7AIII} → Apresentar aptidão e habilidade para atribuir notações simbólicas que represente sorteios aleatórios, indicar regularidades, caracterizar configurações, institucionalizar e listar os resultados possíveis do evento

“quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Magali, Cascão, Cebolinha, Bidu e Horácio”.

t_{8AIII} → Considerando os questionamentos, caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação dos eventos, associando uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.

t_{9AIII} → Opinar, depois de analisar a quantidade de caminhos existentes, e quantos conduzem Mônica à casa da Magali, se a opinião dada anteriormente mudaria, no que diz respeito ao questionamento: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”.

t_{10AIII} → Analisar as representações e esquemas, desenhos, códigos, que caracterizam a chance de ocorrência de cada evento.

t_{11AIII} → Responder, considerando os resultados apontados, a probabilidade de Mônica visitar Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu.

t_{12AIII} → Observar a frequência de ocorrência de um dado acontecimento, o número de experiências e, desenvolver noções de probabilidade, caracterizadas pela indicação dos elementos do evento, sua representação na forma esquemática, codificada e quantificada.

τ_{1AIII} → Determinar todos os resultados possíveis para Mônica visitar cada personagem, configurando o Espaço Amostral, apontando estes com auxílio da quadrícula, lápis de cor e/ou canetas coloridas.

τ_{2AIII} → Considerar os resultados provenientes da simulação, com base na aleatoriedade e na experimentação, cujas configurações possíveis confirmam e descrevem todos os resultados do experimento.

τ_{3AIII} → Partir da situação contextualizada e construir hipóteses sobre o significado de cada um dos resultados, reelaborando seus conhecimentos sobre linguagem simbólica e códigos matemáticos.

τ_{4AIII} → Indicar a existência de seis caminhos ao todo, para a Mônica chegar à casa de Magali, segundo a malha quadriculada, apontar que esses caminhos têm em comum, configuração apresentando duas caras e duas coroas.

$\tau_{5AIII} \rightarrow$ Ao indicar a existência de quatro caminhos para a Mônica chegar à casa de Cascão, segundo a malha quadriculada, apontar que esses caminhos têm em comum, configuração apresentando uma cara e três coroas.

$\tau_{6AIII} \rightarrow$ Ao indicar a existência de quatro caminhos para a Mônica chegar à casa de Cebolinha, segundo a malha quadriculada, apontar que esses caminhos têm em comum, configuração apresentando três caras e uma coroa.

$\tau_{7AIII} \rightarrow$ Ao indicar a existência de um caminho para a Mônica chegar à casa de Bidu, segundo a malha quadriculada, apontar que esse caminho tem em comum, configuração apresentando os quatro sorteios aleatórios iguais a coroa.

$\tau_{8AIII} \rightarrow$ Ao indicar a existência de um caminho para a Mônica chegar à casa de Horácio, segundo a malha quadriculada, apontar que esse caminho tem em comum, configuração apresentando os quatro sorteios aleatórios iguais a coroa.

$\tau_{9AIII} \rightarrow$ Indicar que os amigos de Mônica não têm a mesma chance de ser visitados, se considerarem a os caminhos aleatórios, diferenciando daquele que apresentava características determinista.

$\tau_{10AIII} \rightarrow$ Opinar quanto a equiprobabilidade ou não da realização dos eventos.

$\tau_{11AIII} \rightarrow$ Indicar a probabilidade, depois de indicar os elementos de cada evento aleatório, configurados na elaboração do espaço amostral, com precisão e com base nos conhecimentos intuitivos, caracterizando com notações simbólicas ou não, a representação em forma de frequência relativa, porcentagem e probabilidade de ocorrência dos eventos.

$\tau_{12AIII} \rightarrow$ Entender e compreender, considerando as regularidades e os possíveis caminhos observados e configurados, as noções de acaso e de incerteza, que se manifestam intuitivamente, nas situações experimentais e, na observação dos eventos (espaços equiprováveis).

$\tau_{13AIII} \rightarrow$ O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Horácio se dá, considerados $P(H)$ e $P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)}$, onde $n(H)$ é a quantidade de caminho para

Mônica chegar à casa de Horácio e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos.

$\tau_{13AIII} \rightarrow$ O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Cebolinha se dá, considerados $P(C)$ e $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)}$, onde $n(C)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Cebolinha e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos.

$\tau_{14AIII} \rightarrow$ O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Magali se dá, considerados é dado por $P(M)$ e $P(C) = \frac{n(M)}{n(\Omega)}$, onde $n(\Omega)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Magali e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos.

$\tau_{15AIII} \rightarrow$ O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Cascão é dado por $P(S)$ e $P(S) = \frac{n(S)}{n(\Omega)}$, onde $n(S)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Cascão e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos.

$\tau_{13AIII} \rightarrow$ O Cálculo da probabilidade da Mônica visitar Bidu é dado por $P(B)$ e $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$, onde $n(B)$ é a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Bidu e, $n(\Omega)$ é a quantidade total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos.

$\tau_{14AIII} \rightarrow$ Chamar de “H”, o evento “a Mônica visita o Horácio”, de “ Ω ”, o espaço amostral, a probabilidade do evento “H” ocorrer será indicada por $P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)}$, onde $n(H)$ designa o número de caminhos existentes para que a Mônica visite o Horácio e, $n(\Omega)$ designa o número de caminhos existentes para que a Mônica visite um dos seus amigos, considerando o experimento aleatório de lançamento da moeda honesta.

$\theta_{1AIII} \rightarrow$ Evidenciar a experimentação dos sorteios aleatórios, descrevendo os caminhos (sequência obtida no sorteio) possíveis da Mônica chegar à casa

de Magali, por meio de retas e usando lápis colorido para diferenciar cada configuração.

θ_{2AIII} → A configuração dos possíveis caminhos existentes para Mônica chegar à casa de Magali, indicada na quadriculada fornecida a cada dupla, corresponde aos sorteios aleatórios que seguem na linguagem escrita: (coroa, coroa, cara, cara), (coroa, cara, coroa, cara), (coroa, cara, cara, coroa), (cara, cara, coroa, coroa), (cara, coroa, coroa, cara), (cara, coroa, cara, coroa).

θ_{3AIII} → A configuração dos códigos (simbólica) representando os possíveis caminhos de Mônica visitar Magali é: (XXCC), (XCXC), (XCCX), (CCXX), (CXXC), (CXCX).

θ_{4AIII} → A configuração dos códigos (simbólica) representando os possíveis caminhos de Mônica visitar Cascão é: (XXXC), (XCXX), (XCCX), (CXXX).

θ_{5AIII} → A configuração dos códigos (simbólica) representando os possíveis caminhos de Mônica visitar Cebolinha é: (CCCX), (CCXC), (CXCC), (XCCC).

θ_{6AIII} → A configuração do código (simbólica) representando o possível caminho de Mônica visitar Bidu é: (XXXX).

θ_{7AIII} → A configuração do código (simbólica) representando o possível caminho de Mônica visitar Horácio é: (CCCC).

Não podemos deixar de considerar que, ao invés de símbolos, a tecnologia pode ser mencionada como segue:

θ_{8AIII} → A configuração dos possíveis caminhos na quadriculada fornecida a cada dupla, em que o sorteio aleatório corresponda aos resultados (coroa, coroa, cara, cara), (coroa, cara, coroa, cara), (coroa, cara, cara, coroa), (cara, cara, coroa, coroa), (cara, coroa, coroa, cara), (cara, coroa, cara, coroa).

θ_{9AIII} → Considerando os quatro lançamentos da moeda honesta, é possível evidenciar dezesseis resultados possíveis e, caracterizando o espaço amostral da experimentação, as configurações e regularidades, há de se considerar que o espaço amostral com base na modelagem é representado,

simbolicamente por: {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC, XXXX}.

θ_{10AII} → A quantificação dos eventos possíveis da situação, com base na modelagem e, usando os conceitos matemáticos envolvendo a probabilidade, de Mônica visitar cada um de seus amigos pode ser dada, por exemplo, por: A indicação do número de caminhos existentes ao todo, é definido, por exemplo, nas seguintes partes: $n(H) = 1$; $n(C) = 4$; $n(M) = 6$; $n(S) = 4$; $n(B) = 1$; Dessa forma, $n(\Omega) = n(H) + n(C) + n(M) + n(S) + n(B)$ e isso implica que $n(\Omega) = (1 + 4 + 6 + 4 + 1)$ e, concluindo, que $n(\Omega) = 16$.

θ_{11AIII} → Considerando que $n(H) = 1$ e $n(\Omega) = 16$, então
 $P(H) = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$.

θ_{12AIII} → Considerando que $n(C) = 4$ e $n(\Omega) = 16$, então
 $P(C) = \frac{4}{16} = 0,2500 = 25\%$.

θ_{13AIII} → Considerando que $n(M) = 6$ e $n(\Omega) = 16$, então
 $P(M) = \frac{6}{16} = 0,3750 = 37,5\%$.

θ_{14AIII} → Considerando que $n(S) = 4$ e $n(\Omega) = 16$, então
 $P(S) = \frac{4}{16} = 0,2500 = 25\%$.

θ_{15AIII} → Considerando que $n(B) = 1$ e $n(\Omega) = 16$, então
 $P(B) = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$.

Θ_{AIII} → Ao quantificar todos os resultados referentes ao experimento aleatório caracteriza-se, por meio de situações reais e observação dos eventos, a introdução de conceitos da Teoria da Probabilidade. Ao atribuir notação

⁹ Usamos o símbolo “S” para representar o número de caminhos existentes para que “a Mônica visite Cascão”, diferenciando de $n(C)$ que representa o número de caminhos existentes para que “a Mônica visite Cebolinha”.

simbólica para representar o número de observações, a análise matemática de entes probabilísticos ocorre.

3.4.4 – ETAPA IV – CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES E A TAD

T →: Completar o quadro, efetuar a contagem dos caminhos, analisar e sistematizar os resultados do Diagrama de Árvore e preencher a tabela de dupla entrada, e opinar se “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados”.

t_{1AIV} → Completar a árvore de possibilidades com o terceiro e quarto sorteio.

t_{2AIV} → indicar a sequência sorteada por meio de esquema codificados (sequência de sorteio).

t_{3AIV} → Observar em suas configurações o número de caras e anotar em coluna própria.

t_{4AIV} → Observar o caminho na malha quadriculada e indicar o amigo a ser visitado.

t_{5AIV} → Preencher a TDF considerando a árvore de possibilidades.

t_{6AIV} → Situa na percepção da diferença existente entre esta e a experimentação aleatória, como forma de estimar a probabilidade de ocorrência de certo evento (visita à personagem).

t_{7AIV} → Realizar por meio da sistematização dos resultados do diagrama, a regra de formação para que cada amigo possa ser visitado, a formação da sequência sorteada, o número de caras associado aos quatro lançamentos das moedas, a existência de regularidades e a indicação do amigo a ser visitado.

t_{8AIV} → Perceber que existe diferença entre a realização e construção dos eventos, considerados o diagrama de árvores e a experimentação aleatória, como forma de estimar a probabilidade de ocorrência de um evento.

τ_{1AIV} → Com auxílio da malha do material de apoio fornecido, indicar e completar o quadro com configurações que possibilitem indicar todos os caminhos possíveis de ser realizados pela Mônica em visita a seus amigos.

$\tau_{2AIV} \rightarrow$ Usando a contagem do número de caras, enumerar as observações de cada configuração dos experimentos aleatórios, e preencher a coluna “números de caras”.

$\tau_{3AIV} \rightarrow$ Para evidenciar o amigo a ser visitado, a regularidade quanto ao número de caras permitirá a sua indicação.

$\tau_{4AIV} \rightarrow$ Buscar no quadro preenchido com os resultados que levam aos amigos e mencionar a frequência absoluta, relativa e porcentual.

$\theta_{1AIV} \rightarrow$ Fazendo uso da linguagem escrita, e com base nos conhecimentos adquiridos na realização da modelagem, preencher o quadro de forma organizada e precisa, observar o conceito de amostra, evento aleatório, espaço amostral, regularidades observadas e caminhos realizados.

$\theta_{2AIV} \rightarrow$ Observando os caminhos sistematizados pelo diagrama da árvore, indicar a existência de 16 caminhos, que de forma codificada será: {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC, XXXX}.

$\theta_{3AIV} \rightarrow$ A contagem do número de caras considera a configuração codificada do (simbólica) e representada pelo único e possível caminho de Mônica visitar Horácio que é (CCCC), ou seja, apresenta 4 caras.

$\theta_{4AIV} \rightarrow$ A contagem do número de caras considera a configuração codificada do (simbólica) e representada pelos quatros único e possível caminho de Mônica visitar Horácio que é A configuração dos códigos (simbólica) representando os possíveis caminhos de Mônica visitar Cebolinha é: (CCCX), (CCXC), (CXCC), (XCCC).

$\theta_{5AIV} \rightarrow$ A configuração dos códigos (simbólica) representando os possíveis caminhos de Mônica visitar Magali é: (CCXX), (CXXC), (CXCX), (XXCC), (XCXC), (XCCX).

$\theta_{6AIV} \rightarrow$ A configuração dos códigos (simbólica) representando os possíveis caminhos de Mônica visitar Cascão é: (CXXX), (XXXC), (XCXX), (XCCX).

θ_{7AIV} → A configuração do código (simbólica) representando o possível caminho de Mônica visitar Bidu é: (XXXX).

θ_{8AIV} → A determinação dos valores mencionados na tabela, conhecida como “forma laplaciana” de probabilidade, considera um modelo como forma de determinação dos elementos de seu espaço amostral.

θ_{9AIV} → Entender que ao retomar este questionamento “todos os amigos tem a mesma chance de ser visitado”, buscar-se-á verificar a percepção da existência ou não da diferença entre a forma de realizar as visitas (predeterminado e aleatório), e considerando aqueles que perceberam em questionamento anterior, confirmar suas realizações.

θ_{10AIV} → Explorar o conceito de probabilidade e amostragem, pois os resultados até aqui evidenciados são frutos de simulação e modelagem.

θ_{11AIV} → Com os resultados do diagrama da árvore, a configuração do espaço amostral vinculado ao experimento indica que os caminhos existentes são equiprováveis, mas que, apesar disso, a visita associada aos amigos não são equiprováveis, pois existem quantidades de caminhos diferentes para que a Mônica visite cada um de seus amigos.

3.4.5 – ETAPA V - AS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES E A TAD

T → Analisar e comparar a atribuição de probabilidades por meio da experimentação e pela modelagem.

t_{1AV} → Preencher o quadro comparativo do cálculo de probabilidades e buscar o entendimento quanto à diferença na forma de atribuir probabilidades.

t_{2AV} → Entender o conceito de amostra aleatória e modelo.

t_{3AV} → Usar o conceito de fração ou número decimal, inclusive aproximações.

t_{4AV} → Compreender que a simulação introduzida com o lançamento da moeda e, a visita da Mônica aos seus amigos dependem dos sorteios aleatórios realizados.

t_{5AV} → Responder se acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos.

t_{6AV} → Responder ao questionamento, se gostaram ou não das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica, indicando o que despertou interesse ou não, se o desenvolvimento das tarefas tinha algo de chata.

t_{7AV} → Comparar e analisar a realização da atividade, as estratégias utilizadas na experimentação, simulação e modelagem.

t_{8AV} → Evidenciar se houve ou não evolução no processo de ensino e aprendizagem de assuntos relacionados à probabilidade, assim como, analisar se foram interessantes ou não tais atividades.

t_{9AV} → Responder ao questionamento que indica, dentre todas as atividades propostas e realizadas, qual foi (ou quais foram) a mais legal.

τ_{1AV} → Realizar a comparação entre os resultados obtidos na experimentação e na construção da árvore de possibilidades.

τ_{2AV} → Entender que a forma frequentista e laplaciana de atribuir probabilidades, dão suporte à construção da TDF.

τ_{3AV} → Compreender a simulação realizada ao lançar a moeda, a relação existente entre a frequência dos resultados nos quatro lançamentos simultâneos, que a visita da Mônica aos amigos depende dos sorteios aleatórios (amostra correspondente aos trinta eventos em que a moeda é lançada quatro vezes consecutivas).

τ_{4AV} → Os sujeitos de nossa pesquisa compararão e analisarão os resultados que obtiveram com outras duplas, após elaborar a Tabela 3.

τ_{5AV} → emitir opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade acham mais justa, além de justificar sua escolha.

τ_{6AV} → sociabilizar os resultados obtidos com outras experimentações realizadas nas mesmas condições, verificando semelhanças, proximidades ou não entre os valores de suas composições.

τ_{6AV} → Elencar entre as atividades desenvolvidas, qual foi a mais interessante, qual despertou maior interesse ou, que tenha colaborado para o desenvolvimento de novos conhecimentos no processo de ensino e aprendizagem.

τ_{7AV} → Elencar dentre os assuntos desenvolvidos, os conteúdos assimilados (quais assuntos) e considerados mais atraentes, e que constituem os passeios aleatórios da Mônica.

θ_{AV} → Apresentar os possíveis resultados para configurar a formação da distribuição de probabilidades, usando inclusive, formas alternativas de expressar probabilidades.

θ_{1AV} → A confrontação da probabilidade com os resultados da experimentação (probabilidade frequentista) e aquela calculada a partir do diagrama da árvore (probabilidade laplaciana), objetiva tornar explícito o significado da atribuição de probabilidades por meio de uma experimentação aleatória e outra, pela modelagem teórica.

θ_{2AV} → Ao considerar o modelo descrito pela árvore de possibilidades, compreender que todos os caminhos possíveis são determinados pela sua construção (diagrama da árvore), e confirmam que a possibilidade de cada amigo ser visitado pela Mônica é diferenciada pelo número de caminhos. A determinação da probabilidade é fator de evidência da modelagem teórica.

θ_{3AV} → Elaborando a tabela, comparar a forma frequentista de realizar os sorteios e aquela determinada pela utilização do esquema (diagrama de árvore).

θ_{4AV} → Na comparação entre os resultados obtidos nas duas formas de determinação da probabilidade, utilizar conhecimentos que estejam relacionados à frequência relativa e a probabilidade.

θ_{5AV} → Analisar os resultados indicados na Tabela 3, emitindo opinião sobre qual das maneiras de calcular probabilidade (frequentista e determinista) é mais justa, justificando sua escolha, verificando semelhanças e aproximações entre elas e, emitir pareceres.

Θ_{AV} → Os estudantes finalizam sua participação no desenvolvimento das atividades “Os passeios aleatórios da Mônica”, apontando os assuntos

aprendidos, com relação aos conceitos probabilísticos, tais como: experimentos determinísticos e aleatórios, espaço amostral, eventos simples e compostos, probabilidade de eventos, eventos equiprováveis. Também é possível considerar as estratégias utilizadas, tais como: os caminhos possíveis, o diagrama da árvore, o cálculo de probabilidade de eventos simples (cara e coroa) e dos eventos compostos (caminhos), a probabilidade das visitas aos amigos por meio da frequência relativa ou segundo Laplace, a elaboração das Tabelas de distribuição de frequências (absoluta, relativas) e outras formas de atribuição de probabilidades.

Capítulo IV

A Análise das Atividades

O presente capítulo tem por objetivo apresentar a análise das concepções das duplas sobre os conceitos básicos de probabilidade, ao longo do desenvolvimento da experimentação e modelagem da atividade de ensino “Os passeios aleatórios da Mônica”. Nessa análise serão consideradas tanto as produções das duplas registradas nas fichas de atividade, bem como os comentários e informações verbais que áudio - gravamos. Buscaremos comparar os resultados obtidos considerando o nosso referencial teórico e, é com base nestes, que buscaremos justificar as nossas considerações finais.

Como desenvolvemos nossa intervenção de ensino com duas turmas, iniciaremos a análise quantitativa comparando os desempenhos dos estudantes dessas turmas. Para dar maior confiabilidade aos resultados, aplicaremos por meio do aplicativo estatístico SPSS (Statistical Package for Social Science), o teste t de Student. A inexistência de diferenças entre os desempenhos dessas duas turmas permitir-nos-á juntá-las, de tal forma a tratá-las como um só grupo.

4.1 – ANÁLISE GERAL DE DESEMPENHO DAS TURMAS

Ao iniciar os trabalhos de análise das atividades desenvolvidas pelos estudantes, achamos por bem comparar, de forma geral, se havia diferenças entre as respostas dadas pelas turmas do 8º ano A e B, a fim de identificar se as trataremos como duas populações distintas, ou se juntas formam uma única população.

Uma discussão sobre a nossa amostra se faz necessária, pois descartamos duas duplas do 8º ano A e quatro outras, do 8º ano B, por

considerarmos que, se um dos elementos da dupla, ou a dupla de participantes faltassem à realização de uma das atividades, estes seriam descartados, ou seja, só consideraríamos as duplas que estivessem presentes em todas as etapas do estudo. Assim, foram consideradas para efeito deste estudo 35 duplas, 18 advindas da 8ª A e 17 duplas da 8ª B.

Como se trata de duas amostras pequenas e independentes, decidimos realizar um teste t para verificar se há diferença entre as duas médias populacionais, adotando o nível de significância $\alpha = 0,05$, supondo que ambas são normalmente distribuídas e serem constituídas de forma aleatória, condições estas que favorecem a sua utilização. Considerando essas situações, adotamos as seguintes hipóteses:

$H_0 : \mu_{8A} = \mu_{8B}$ (a média de acertos na realização das atividades pelo 8º ano A é igual, em relação à média de acertos na realização das atividades pelo 8º ano B).

Dessa forma não há diferença significativa entre as turmas, estatisticamente falando, configurando o ponto de partida de nosso teste (a hipótese nula).

$H_1 : \mu_{8A} \neq \mu_{8B}$ (a média de acertos na realização das atividades pelo 8º ano A é diferente, em relação à média de acertos na realização das atividades pelo 8º ano B).

Assim sendo, estatisticamente falando, existe diferença significativa entre as turmas, configurando a hipótese alternativa de nosso teste.

Note na Tabela 1, que ao comparar as respostas dadas pelos estudantes e considerando o total de acertos, as médias das duas turmas são relativamente aproximadas, e este fato nos remeteu à indicação de que poderíamos analisar as informações como um único conjunto (trinta e cinco duplas).

TABELA 1 – MÉDIA DE DESEMPENHO GERAL DAS TURMAS

Turmas \ Teste	N	Média	DP	t(33)	p-valor
8º ano A	18	30,11	2,564	-0,852	0,069
8º ano B	17	30,24	4,944		

Ao partir do resultado do teste t de Student ($t(33) = 0.852$; $p = 0.069$) podemos aceitar a hipótese nula “ H_0 ” (a média de acertos na realização das atividades pelo 8º ano A é igual, em relação à média de acertos na realização das atividades pelo 8º ano B) e refutar a hipótese alternativa “ H_1 ”.

Depois de verificarmos que poderíamos considerar os resultados da realização da atividade como um todo, passaremos a realizar uma análise indicando a porcentagem de acerto, e justificando aqueles que não foram realizados positivamente (pontuando por tarefa e sub-tarefa).

4.2 – ANÁLISES DE DESEMPENHO EM RELAÇÃO ÀS QUESTÕES

Nesta seção consideraremos o desempenho geral dos alunos. Isto é, será considerada a média de acerto do grupo, enquanto um todo, em cada uma das cinco atividades, a fim de inferirmos se houve ou não uma interferência positiva na aprendizagem dos estudantes.

Constate na Tabela 2, que houve um crescimento no entendimento dos estudantes, quanto ao tipo de atividade e, aquela que tratou da experimentação (A2) foi a que os estudantes mais se envolveram. Em Coutinho (2001) vemos que a introdução ao aleatório por um enfoque experimental, com atividades de observação e experimentação efetiva, encaminha os estudantes para a construção do conceito de probabilidades por meio de um trabalho conjunto sobre os dois enfoques deste conceito: o enfoque laplaciano e o frequentista.

De forma geral, apresentamos na Tabela 2, a porcentagem de acertos, erros e respostas em branco (atividades sem resposta).

ATIVIDADES	A1	A2	A3	A4	A5
CERTO	77,62	85,97	86,67	87,14	75,10
ERRADO	22,38	14,03	4,73	4,26	13,50
EM BRANCO			8,6	8,6	11,40
TOTAL	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

TABELA 2 – DESEMPENHO GERAL DOS ESTUDANTES NAS ATIVIDADES

Se considerarmos a análise geral de acertos na atividade veremos que 85,3% dos questionamentos foram respondidos em conformidade com a análise das atividades, outras 13,9% das questões foram indicadas de forma equivocada e apenas 0,8% delas não foram respondidas, conforme mostra a Tabela 3.

A1, A2, A3, A4, A5	%
CERTO	85,3
ERRADO	13,9
BRANCO	0,8
TOTAL	100,0

TABELA 3 – SÍNTESE GERAL DE RESULTADOS

Já a Figura 30 apresenta o gráfico box-plot acompanhado de uma tabela estatística, para que desta forma se possam observar, não só as diferentes médias em cada atividade, mas também as diferenças significativas, ou não, entre essas médias.

A partir da análise Tabela 2 somos possíveis observar um crescimento significativo no desempenho destes estudantes entre as atividades 1 e 2, e esse crescimento se mantém alto entre as atividades 2 e 3 e 3 e 4. Em outras palavras, houve uma significativa evolução em termos de conhecimento, partindo da contextualização, a qual se manteve, com pequenina evolução, passando pela experimentação, modelagem e diagrama de árvore.

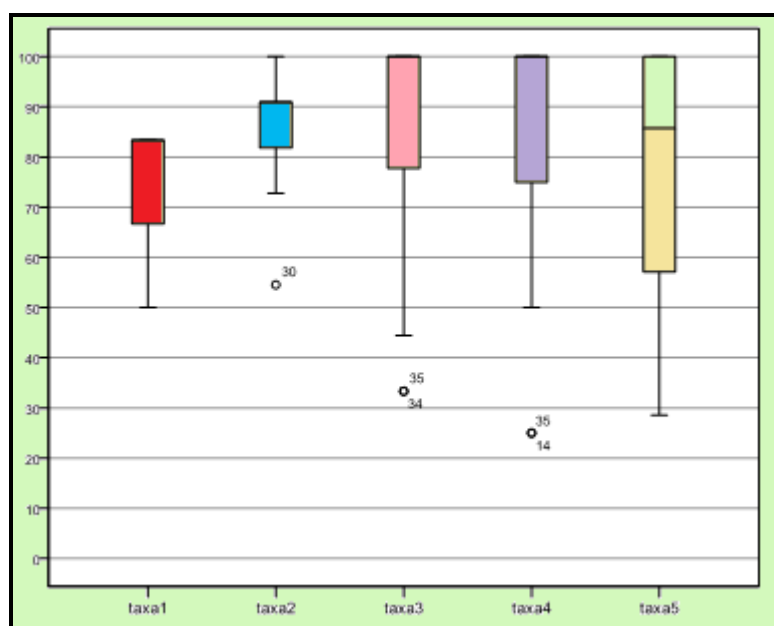


FIGURA 30 – ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS RESULTADOS POR ATIVIDADE

Já na atividade que enfatizava a formalização (A5), o trabalho com ênfase na abstração e a indicação de conclusões, os estudantes encontraram dificuldades.

Fichas \ Teste	N	Média	DP	t(34)	p-valor
Atividade 1	35	77,62	8,99	-3,899	0,000
Atividade 2	35	85,97	9,18		
Atividade 2	35	85,97	9,18	-0,178	0,860
Atividade 3	35	86,67	21,18		
Atividade 3	35	86,67	21,18	-0,129	0,898
Atividade 4	35	87,14	22,17		
Atividade 4	35	87,14	22,17	3,175	0,003
Atividade 5	35	75,10	24,34		

TABELA 4 – ANÁLISE GERAL COMPARATIVA ENTRE AS ATIVIDADES

Embora essa queda no desempenho das duplas tenha sido estatisticamente significativa, o percentual de acerto indica que aproximadamente setenta e cinco por cento das duplas apresentaram aptidão para responder corretamente a atividade.

É nossa hipótese que as duplas que não acertaram encontravam-se em fase de assimilação, porém só poderemos comprovar tal hipótese quando examinarmos qualitativamente as respostas das duplas na atividade 5.

4.2.1 – ANÁLISE DA "CONTEXTUALIZAÇÃO"

No que diz respeito ao questionamento: “Qual é a diferença entre a forma antiga de a Mônica visitar seus amigos e a nova, a Tabela evidencia que 94,3% das duplas indicam que a forma sistemática que a Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida, a chance de os amigos serem visitados é a mesma.

ATIVIDADE 1		FICHA 1 - CONTEXTUALIZAÇÃO						
QUESTÕES		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	TOTAL
%								
	CERTO	94,3	94,3	97,1	97,1	0,0	82,9	77,6
	ERRADO	5,7	5,7	2,9	2,9	100,0	17,1	22,4

TABELA 5 – DESEMPENHO NA ATIVIDADE 1

Supostamente, os estudantes indicaram que tratavam de experimentos determinísticos e, que as visitas realizadas a cada semana, conduziam ao mesmo resultado. A resposta da dupla D28B apresentada na Figura 31 configura o entendimento e a argumentação em relação ao evento determinista e ao acaso.

F1D38B

1) Qual é a diferença entre a forma antiga de a Mônica visitar seus amigos e a nova forma?

Na primeira forma, a Mônica tinha certeza de onde ela iria de acordo com o dia. Já na nova forma, ela dependeria da possibilidade

FIGURA 31 – PROTOCOLO DA ARGUMENTAÇÃO DA A1D28BQ1¹⁰

Considerando os resultados apresentado na Tabela 5, afirmamos que ao considerar a situação de tornar mais emocionantes os encontros, os estudantes entenderam que o acaso faz parte da segunda organização de visitas aos amigos, caracterizando os experimentos aleatórios.

Dentre aqueles que responderam de forma equivocada, está à resposta dada pela dupla D48B (Figura 32), dando indícios que a forma antiga é determinista, mas sem referenciar a forma atual (aleatória).

F1D48B

1) Qual é a diferença entre a forma antiga de a Mônica visitar seus amigos e a nova forma?

A forma antiga é que ela iria às casas dos amigos que escolhesse

FIGURA 32 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D48BQ1¹¹

Considerando o questionamento: “Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda?”, 94,3% das duplas indicaram corretamente a resposta, dizendo que são possíveis dois, e somente dois resultados, dado que a moeda é honesta e apresentamos na Tabela 5. No que diz respeito à segunda questão da Atividade 1, verificamos que apenas 5,7% dos sujeitos não estabeleceram de forma completa o entendimento da questão, conforme mostra a Tabela 5.

Segundo suas resoluções, é nossa hipótese que os estudantes entenderam a sub-tarefa sugerida do experimento aleatório e, que esta depende do sorteio resultar em cara (C) ou coroa (X) indicando assim, que não poderia prever qual dos amigos seria visitado. Outra sub-tarefa buscou o entendimentos

¹⁰ Transcrição do protocolo: Na primeira forma a Mônica tinha certeza de onde ela iria, de acordo com o dia, já na nova forma, ela dependeria da possibilidade da moeda de cair cara ou coroa.

¹¹ Transcrição do protocolo: A forma antiga é que ela iria às casas dos amigos que escolhesse.

dos estudantes quanto à conversão dos resultados obtidos nos símbolos sugeridos, e que segundo Cazorla e Santana (2006), a forma lúdica favoreceria a resolução do problema apresentado.

Dois de nossos sujeitos de pesquisa não responderam conforme nossa suposição, cometendo equívoco quanto à apresentação do questionamento “Quais são os possíveis resultados ao lançar a moeda”. Note na Figura 33 que a resposta da dupla D28A não informa em seu protocolo que os resultados possíveis no lançamento de uma moeda correspondem à cara (C), ou coroa (X).

F1D28A

2) Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda: (C)(X), (C)(C), (X)(X), (X)(C)

FIGURA 33 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D28AQ2¹²

Da mesma forma, a resposta da D188B na mesma questão, é equivocada, pois considera a probabilidade e, não os resultados possíveis.

F1D188B

2) Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda: 1/2, 0,5, 50%

Respostas: 5 perguntas

FIGURA 34 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D18BQ2¹³

Mesmo assim, consideramos que os sujeitos aqui mencionados, entenderam a situação, compreenderam a sub-tarefa apresentada, aplicaram convenientemente a técnica/tecnologia, o que entendemos ser, de alguma forma, um avanço no processo de ensino e aprendizagem. Conforme o exposto na Figura 34, os estudantes atingiram o objetivo de, por meio de conhecimentos relacionados à pré-probabilidade, indicar que a chance de se obter cara ou coroa no lançamento da moeda é a mesma.

Convém salientar que, conforme se apresenta a Tabela 5, apenas 2,9% dos sujeitos de nossa pesquisa, não observaram corretamente o que foi solicitado, e isso vai corroborar com o que expõe Cazorla e Santana (2009, p.46) quando expõe que em suas concepções associaram a ocorrência dos eventos aleatórios a uma medida probabilística.

¹² Transcrição do protocolo: (C)(X), (C)(C), (X)(X), (X)(C).

¹³ Transcrição do protocolo: 1/2; 0,5, 50%.

Apresentamos na Figura 35 a realização da D188B, devido ao equívoco apontado na realização da atividade, pois ao invés de considerar o lançamento da moeda honesta e os possíveis resultados da face voltada para cima, entendeu em sua análise que considerariam o experimento determinista, ao invés do aleatório.

F1D188B

3) Qual é a chance de sair cara P(C): $\frac{1}{6}$ e de sair coroa? P(X): $\frac{1}{6}$ Por que vocês acham isso?
Porque são 5 amigos.

FIGURA 35 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D188BQ3¹⁴

Ao nos referirmos ao questionamento em que solicitamos a indicação da chance da Magali ser visitada pela Mônica, as duplas responderam intuitivamente e considerando a situação determinista. A tarefa (sub-tarefas), técnicas (sub-técnicas), e tecnologias foram desenvolvidas, positivamente, assim como a utilização de conceitos subjetivos da teoria da probabilidade, favorecendo as escolhas e opiniões dos estudantes, conforme apresentamos na Figura 36.

F1D88A

4) Qual é a chance de Magali ser visitada: 25%. Por que vocês acham isso?
Por que são 4 opções de lugares. $\frac{1}{4} = 25\%$ de chance de Magali ser visitada.

FIGURA 36 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA D88AQ4¹⁵

Usando a intuição, indicaram que a chance da Magali ser visitada pela Mônica é de “um para cinco”, e subjetivamente utilizaram a notação matemática $P(M) = \frac{n(M)}{n(V)}$, de forma implícita, na qual a probabilidade de Magali ser visitada é indicada por P(M), o número de dias da semana reservado para Mônica visitá-la por n(M) e, o total de dias da semana que Mônica poderia realizar as visitas por n(V). Conforme apresenta a Figura 36, apenas uma dupla indicou valor diferente de 20%, para a chance de Magali ser visitada pela Mônica.

¹⁴ Transcrição do protocolo: P(C): 5 – P(X): 1/5 – Porque são cinco amigos.

¹⁵ Transcrição do Protocolo: 25% - Porque são 4 opções de lugares. $\frac{1}{4} = 25\%$ de chance de Magali ser visitada.

De forma equivocada, a resposta intuitiva da dupla D88A (Figura 36) apontou que o total de dias da semana, reservado para a realização das visitas eram quatro, ao invés de cinco. No entanto, o conceito de probabilidade foi utilizado corretamente.

Considerando o questionamento “Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?” e, conforme nossa análise a priori, todas as duplas responderam sim a este questionamento, e é nossa hipótese que consideraram desta forma, o fato de que a probabilidade de obter cara no lançamento de uma moeda é a mesma que a de obter coroa, sem comparar os caminhos escolhidos.

Momentaneamente, não apresentaremos nenhum dos protocolos criados pelas duplas, deixando para mostrar a evolução de entendimento ou não deste questionamento, ao final desta análise, pois compararemos as questões A1Q5, A2Q6, A2Q10, A3Q8 e A4Q4 entre si.

Na realização da Atividade 1, nenhum dos sujeitos perceberam a variação da quantidade de caminhos que Mônica teria para visitar seus amigos considerando o lançamento da moeda, ou seja, não evidenciaram o número de caminhos que levaria Mônica a casa de cada uma das personagens citadas na atividade. Considerando o questionamento “Imagine que você jogou 4 vezes a moeda” (A1Q6), note na Tabela 5 que 82,9% dos estudantes indicaram corretamente, pelo menos um dos dezesseis resultados possíveis no lançamento da moeda quatro vezes e, configuraram seus lançamentos por meio de código, estabelecendo suas anotações conforme o esperado e usando suas intuições.

A seguir, na Figura 37, apresentamos as respostas das duplas D38A, D68A, D48B e D78B em forma de protocolos, que se equivocaram ao realizar a atividade deixando de configurar seus resultados imaginários, ou seja, elaborar um dos dezesseis resultados possíveis {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, ..., XXXX}.

F1D38A
6) Imagine que você jogou 4 vezes a moeda, como você anotaria seu resultado imaginário? <i>Anotaria por meio de uma árvore de possibilidades ou jogando as moedas e anotando os resultados.</i>
F1D68A
6) Imagine que você jogou 4 vezes a moeda, como você anotaria seu resultado imaginário? <i>Um deles seria visitado, pra onde ela for ela visitará um amigo. Dependendo do amigo, ela verá quantas vezes tirou cara (C) ou coroa (K).</i>
F1D48B
6) Imagine que você jogou 4 vezes a moeda, como você anotaria seu resultado imaginário? <i>P(C) P(C) ; P(C) P(X) ; P(X) P(X) ; P(X) P(C)</i>
F1D78B
6) Imagine que você jogou 4 vezes a moeda, como você anotaria seu resultado imaginário? <i>São 4 caras ou 4 coroas, 8 possibilidades.</i>

FIGURA 37 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA D3 E 68AQ4; E DA D4 E D78B¹⁶

Note que, 17,1% dos sujeitos de nossa pesquisa não indicaram os resultados corretamente, e o que foi apresentado na Figura 37, configura quatro dentre aqueles protocolos, que apresentaram argumentos superficiais e divergentes aos esperados. Como mencionamos anteriormente, bastava configurar os lançamentos da moeda usando os símbolos (códigos) “C”, para indicar que o sorteio resultou em cara, ou “X” para coroa.

Entendemos então, que a descoberta de relações entre os objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos e a identificação de suas respectivas propriedades, foi contemplada na realização desta etapa de pesquisa, como considera Ponte, Brocado e Oliveira (2005).

4.2.2 – ANÁLISE DA “EXPERIMENTAÇÃO”

Na atividade contida na Ficha “2, 3 e 4”, os estudantes realizaram a experimentação do lançamento de uma moeda honesta e, em seguida,

¹⁶ Transcrição do protocolo conjunto: (D38A) Anotaria por meio de uma árvore de possibilidades ou jogando as moedas e anotando os resultados. (D68A) Um deles seria visitado, pra onde ela for visitará um amigo. Dependendo do amigo, ela verá quantas vezes tirou cara (C) ou coroa (X). (D48B) P(C)P(C); P(C)P(X); P(X)P(X); P(X)P(C). (D78B) São 4 caras ou 4 coroas, 8 possibilidades.

anotaram seus resultados na coluna da sequência, indicando o amigo visitado ao lançar a moeda quatro vezes consecutiva.

A Tabela 6 apresenta uma análise quantitativa dos acertos obtidos, evidenciando que 100% dos estudantes realizaram com sucesso a experimentação, questão indicada por A2Q1.

ATIVIDADE 2		FICHA 2, 3 E 4 - EXPERIMENTAÇÃO											
QUESTÕES		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	TOTAL
%													
CERTO		100,0	97,1	80,0	88,6	93,3	82,9	91,4	91,4	100,0	97,1	97,1	91,4
ERRADO		0,0	2,9	20,0	11,4	20,0	17,1	8,6	8,6	0,0	2,9	2,9	8,6

TABELA 6 – DESEMPENHO DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 2

A tarefa, técnica e tecnologia citadas em nossa análise, considerando a TAD, puderam ser evidenciadas nas realizações das atividades pelos sujeitos de nossa pesquisa, pois a regra citada na estória - “Ficha 1”, e complementada pela Experimentação - “Ficha 2”, foi suficiente para a elaboração, em forma de desenho e na transparência, de um possível caminho para a Mônica chegar à casa de um de seus amigos, modelando o caminho aleatório e indicando a realização da visita ao amigo.

Apresentamos na Figura 38 a resposta da dupla D98B, representando a Experimentação, em que a sugestão (tarefa) foi consolidada com o lançamento da moeda quatro vezes, e a apresentação de trinta sequências configurando os caminhos aleatórios, além da indicação do amigo visitado.

F2D98B

II. Atividade referente à experimentação a ser realizada em dupla

Você está recebendo uma moeda. Para Mônica visitar um amigo, vocês têm que lançar a moeda quatro vezes, que denominamos de experimento.

Se sair cara (C), Mônica andar um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste.

Você e seu/sua colega devem repetir esse experimento trinta vezes e anotar os resultados no Quadro 1.

Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa, cara, anotar na coluna sequência: CCXC e na coluna do amigo visitado: Cebolinha.

Quadro 1. Resultados da experimentação.

Repetição	Seqüência	Amigo visitado	Repetição	Seqüência	Amigo visitado
1.	CCXX	Magali	16.	CCCC	Florencio
2.	CCXC	Cebolinha	17.	CCCX	Cebolinha
3.	CXXC	Magali	18.	XXXC	Caxão
4.	CCCX	Cebolinha	19.	CCCX	Cebolinha
5.	XXXX	Caxão	20.	CCXC	Cebolinha
6.	CXCX	Magali	21.	CXXC	Magali
7.	XCCX	Magali	22.	XXCX	Caxão
8.	XCCX	Magali	23.	CXXC	Magali
9.	XCCX	Caxão	24.	CXXC	Magali
10.	CCXC	Cebolinha	25.	CXXX	Caxão
11.	CCXX	Magali	26.	XCCC	Cebolinha
12.	XCCC	Cebolinha	27.	CXCX	Cebolinha
13.	XXXX	Bidu	28.	XXXX	Caxão
14.	XCCX	Caxão	29.	CCCC	Florencio
15.	CCCC	Florencio	30.	XXXX	Caxão

FIGURA 38 – PROTOCOLO DA EXPERIMENTAÇÃO REALIZADA PELA D98B

Considerando uma das repetições realizadas, a tarefa que solicitava a confecção de um desenho qualquer, do percurso percorrido pela Mônica na visita de um determinado amigo no papel transparente, todas as duplas construíram com sucesso o seu gráfico evidenciando a tarefa e a técnica de associar o sorteio aleatório dos lançamentos da moeda, com a noção dos caminhos aleatórios obtidos e, evidenciando a tecnologia em forma de esquema, de um ou mais passeios aleatórios realizados.

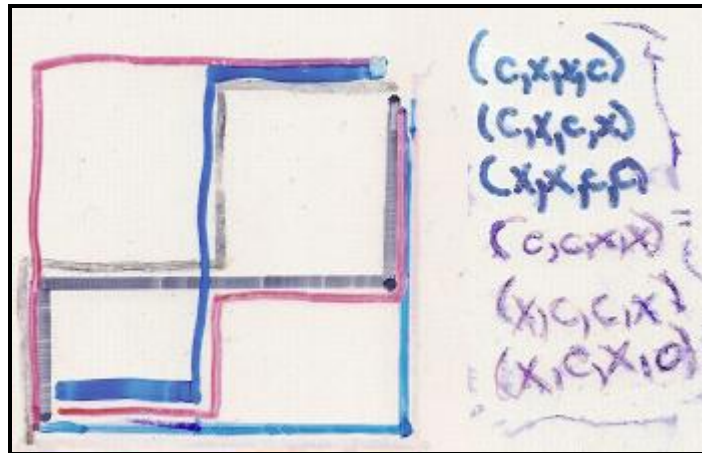


FIGURA 39 – CAMINHOS ALEATÓRIOS POSSÍVEIS DE MÔNICA VISITAR MAGALI

A Figura 39 apresenta a configuração dos esquemas elaborados pelos estudantes e este evidencia os caminhos possíveis que Mônica poderia realizar para visitar Magali. A tecnologia utilizada se configurou na utilização de régua, transparências, canetas especiais e, evidenciaram os resultados (CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC).

Conforme nossa análise a priori desta atividade, mencionamos que as duplas poderiam construir seus desenhos considerando suas configurações, compartilhando suas decisões em forma de diálogo com outras duplas e, estes apontariam para qualquer um dos resultados possíveis da experimentação realizada e registrada na Ficha 2. Os estudantes realizaram a atividade de forma positiva por evidenciar o entendimento da tarefa (sub-tarefa) citada, por determinar todos os possíveis caminhos para Mônica visitar a casa de Magali. Tendo em vista a estratégia de realização, exploraram a ideia intuitiva entre evento determinístico e aleatório, utilizando a linguagem simbólica.

Em resposta ao questionamento “Quem tem mais chance de ser visitado (a), Magali ou Horácio? Por quê?”, os estudantes entenderam as experimentações realizadas, configurando corretamente a visita de Mônica a casa de Magali e do Horácio, indicando que a primeira tem maior chance de ser visitada, pela existência de mais caminhos, enquanto que a visita a Horácio apresentava a tendência situada na dificuldade de obter os quatro resultados iguais.

O trabalho desenvolvido até aqui, aponta para uma possível compreensão dos estudantes que a aplicação da modelagem pode ser um fator motivacional para a compreensão do modelo empírico (experimental) e,

posteriormente o modelo teórico (racional), como aponta Cazorla e Gusmão (2009)

A Tabela 6 mostra-nos que, apenas uma das duplas não respondeu em conformidade a A2Q2, e este procedimento permitiu indicar que 97,1% dos estudantes realizaram de forma positiva atividade. Observe no protocolo evidenciado na Figura 40, que a resposta dada pela dupla D148B é equivocada, pois menciona em seu registro que as personagens Magali e Horácio têm a mesma chance de serem visitados.

F3D148B

2) Quem tem mais chance de ser visitado(a) Magali ou horácio? Os dois têm a mesma chance de serem visitados

Por que? Pois pela sorte, depende de cair cara ou coroa.

FIGURA 40 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D148BQ2¹⁷

Como se tratava de observar a experimentação realizada, é nossa hipótese que a dupla D148B considerou o evento determinista e não o experimental, pois aquele apresentava chance igual de serem visitados.

Apesar de indicar corretamente que Magali tinha mais chance de visitar a personagem Magali do que Horácio, a resposta da dupla D98A indicou sua justificativa com base na proximidade em relação ao ponto de partida que indicamos, ao iniciar a aplicação desta atividade, conforme mostra a Figura 41.

F3D98A

2) Quem tem mais chance de ser visitado(a) Magali ou horácio? Magali

Por que? Pois ela tá no centro, e tem mais chance de cair nela.

FIGURA 41 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D98AQ2¹⁸

O correto seria se a dupla justificasse mencionando, a existência de dezesseis caminhos possíveis de serem configurados, que a distância de uma residência para outra era a mesma, pois todas as residências se apresentavam a uma distância de quatro quarteirões do ponto que Mônica partia, ou que

¹⁷ Transcrição do Protocolo da Figura 44: Os dois têm a mesma chance de serem visitados. Vai pela sorte, depende de cair cara ou coroa.

¹⁸ Transcrição do Protocolo da Figura 45: Magali; Pois ela tá (está) no centro, e tem mais chance de cair nela.

existiam seis caminhos para que Magali recebesse a visita de Mônica, contra um possível caminho para que Horácio a recebesse em sua casa.

A técnica e tecnologia aplicada aqui se basearam na confecção dos caminhos possíveis em forma de esquema e na transparência, conforme mostra a Figura 39.

Aqueles indivíduos que responderam com sucesso a questão 2 da atividade de Experimentação entenderam a técnica e compreenderam que, para visitar o Horácio a configuração CCCC teria que ser evidenciada, e ainda, que é mais fácil ocorrer duas caras e duas coroas do que quatro resultados iguais. Algumas duplas indicaram que os quatro resultados teriam que ser iguais a cara, e esta argumentação também evidencia o entendimento da tarefa, cuja técnica utilizada se apresenta indicada por palavras (linguagem escrita).

Ao considerar suas experimentações e o questionamento “Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? Por quê?”, 80% dos sujeitos de nossa pesquisa mencionaram que não havia diferença entre suas probabilidades, pois ambos apresentavam a menor chance de serem visitados. Dentre as respostas dos estudantes, analisamos alguns relatos que divergiram em suas respostas e considerando nossa análise à priori das atividades, concluímos o que segue:

F3D128B	
3) Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu?	<u>Ninguém</u>
Por que?	<u>Pois a sorte que escolhe os amigos</u>

FIGURA 42 - PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D128BQ3¹⁹

A resposta da D128B, conforme mostra a Figura 42, evidencia um equívoco, pois menciona que ninguém tem mais chance de ser visitado entre eles, enquanto que o mais correto seria mencionar que as chances são iguais, pois dentre todos os caminhos possíveis, Horácio e Bidu apresentam apenas os caminhos CCCC (Horácio é visitado) e XXXX (Bidu é visitado).

¹⁹ Transcrição do Protocolo da Figura 42: Ninguém; Pois a sorte que escolhe os amigos.

F3D68A	
2)	Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? <u>50% para cada</u>
	Por que? <u>pois os dois tem 1 único caminho para chegar em suas casas no qual envolve 1 único caminho 4 vezes</u>

FIGURA 43 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D68AQ3²⁰

Na resposta da D68A, ao invés de argumentar que as chances de Horácio e Bidu são iguais, indica que ambos têm 50% de chance de ser visitados (50% para cada), evidenciando o entendimento do questionamento sem indicar de forma clara suas intenções. Quando justifica sua resposta, a D68A aponta para o caminho único de acesso a casa de Horácio e Bidu, conforme comprovamos com a Figura 44.

F3D98A	
3)	Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? <u>Horácio e Bidu</u>
	Por que? <u>Porque todos tem a mesma chance, por exemplo: se sair tudo coroa (XXXX) dá Bidu e se sair cara (CCCC) dá Horácio</u>

FIGURA 44 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D98AQ3²¹

A resposta da dupla D98A menciona que quem tem mais chance de ser visitado é Horácio e Bidu, porém justifica mencionando que os dois tem a mesma chance. É nossa hipótese que houve um equívoco dos estudantes neste apontamento e, talvez, tenham observado o que se apresenta na questão 4. Conforme protocolo indicado na Figura 44, nota-se que a justificativa é clara quanto ao entendimento do questionamento e, apesar de não mencionar corretamente o seu pensamento, evidencia de certa forma o entendimento da indagação.

F3D108A	
3)	Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? <u>Bidu</u>
	Por que? <u>Porque é mais fácil cair 4 coroa do que quatro cara</u>

FIGURA 45 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D108AQ3²²

²⁰ Transcrição do Protocolo da Figura 43: 50% para cada; pois os dois tem 1 único caminho para chegar a suas casas no qual envolve 1 único caminho 4 vezes.

²¹ Transcrição do Protocolo da Figura 44: Horácio e Bidu; Porque todos têm a mesma chance, por exemplo: se sair tudo coroa (XXXX) dá Bidu e se sair (CCCC) dá Horácio.

Já a dupla D108A indica que, quem tem mais chance de ser visitado entre os dois personagens é o Bidu, e conforme a Figura 45 justifica de forma equivocada que isto ocorre, porque é mais fácil ocorrer quatro resultados iguais a coroa do que cara.

A maior parte das duplas que acertaram a resposta justificou a resposta considerando que no lançamento da moeda quatro vezes, é evidente a tendência de dificuldade em obter os quatro resultados iguais, uma vez que para visitar o Horácio ou Bidu, a sequência CCCC (quatro resultados iguais a cara) ou XXXX (quatro resultados iguais a coroa) são eventos mais difíceis de ocorrer.

F3D118A

3) Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? *Os dois*

Por que?
Porque os dois tem só uma sequência para chegar na casa de, (C;C;C;C) e (X;X;X;X)

FIGURA 46 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D118AQ3²³

Finalmente, as duplas D118A e D208A respondem que os dois têm mais chance de ser visitado, conforme Figura 46, porém entendemos que completando a frase com as palavras “têm chances iguais” seria mais conveniente. Quando justificam suas respostas há indícios de que entenderam o questionamento, mesmo não utilizando argumentação por meio de palavras, a fim de sustentar seus registros.

Considerando o questionamento “De todos, quem tem menos chance de ser visitado? Por quê?”, e ainda, a experimentação realizada pelos estudantes, e conforme a análise apresentada na Tabela 6, 11,4% das duplas não indicaram Horácio ou Bidu, como amigos da Mônica com a menor chance de ser visitados.

A resposta “ninguém ou nenhum” preponderou entre as argumentações e, a justificativa de que a sorte é que determinaria as visitas teve destaque entre os protocolos evidenciados, conforme mostra a Figura 47. A resposta da dupla D208A, assim como as outras três duplas, sequer mencionam que, experimentalmente, Horácio e Bidu tinham chance próxima de ser visitado, ou

²² Transcrição do Protocolo da Figura 45: Bidu; Porque é mais fácil sair 4 coroa do que quatro cara.

²³ Transcrição do Protocolo da Figura 46: Os dois; Porque os dois tem só uma sequência para chegar à casa de, (C;C;C;C) e (X;X;X;X).

por considerar que no lançamento da moeda quatro vezes, que existe uma tendência de ser mais difícil obter os quatro resultados iguais (a sequência CCCC ou XXXX apresenta menor chance de ocorrer).

Considerando o questionamento “De todos, quem tem menos chance de ser visitado? Por quê?”, e ainda, a experimentação realizada pelos estudantes, e conforme a análise apresentada na Tabela 6, 11,4% das duplas não indicou Horácio ou Bidu, como amigos da Mônica com a menor chance de ser visitados. As respostas das duplas D168A e D208A, assim como as outras três duplas, sequer mencionam que, experimentalmente, Horácio e Bidu tinham chance próxima de ser visitado, ou por considerar que no lançamento da moeda quatro vezes, que existe uma tendência de ser mais difícil obter os quatro resultados iguais (a sequência CCCC ou XXXX apresenta menor chance de ocorrer), conforme indicamos na Figura 47.

The image shows two handwritten forms. The first form, labeled F3D168A, asks 'De todos, quem tem menos chance de ser visitado?' and is answered 'Horácio'. The reason given is 'Pois a moeda é mais difícil de cair na sequência dele'. The second form, labeled F3D208A, asks the same question and is answered 'Nenhum'. The reason given is 'Pois você não sabe se na moeda vai cair cara ou coroa'.

FIGURA 47 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D16 E D208AQ4²⁴

A justificativa dada pela dupla D148B (Figura 48), assim como outras três duplas, sequer mencionam que, experimentalmente, Horácio e Bidu tinham chance próxima de ser visitado, ou por considerar que no lançamento da moeda quatro vezes, existia uma tendência de que é mais difícil obter os quatro resultados iguais (a sequência CCCC ou XXXX apresenta menor chance de ocorrer).

The image shows a handwritten form labeled F3D148B. It asks 'De todos, quem tem menos chance de ser visitado?' and is answered 'ninguém'. The reason given is 'pois duvidar tem a menor chance de serem visitados, depende do resultado da da moeda (cara ou coroa)'.

²⁴ Transcrição do Protocolo da Figura 47: D168A – Horácio; Pois a moeda é mais difícil de cair na sequência dele; D208A – Nenhum; Pois você não sabe se na moeda vai cair cara ou coroa.

FIGURA 48 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D148BQ4

A justificativa dada pela dupla D148B em sua resposta à questão, assim como as outras três, sequer mencionam que, experimentalmente, Horácio e Bidu tinham chance próxima de ser visitado, ou por considerar que no lançamento da moeda quatro vezes, existia uma tendência de que é mais difícil obter os quatro resultados iguais (a sequência CCCC ou XXXX apresenta menor chance de ocorrer).

A maioria dos estudantes não recorreu a sua experimentação, conforme nossa análise inicial, para verificar os lançamentos da moeda e os caminhos aleatórios listados no Quadro 1²⁵, conforme consta a Figura 38. Mesmo realizando os trinta eventos e indicando os caminhos configurados, não observaram que ao lançar a moeda quatro vezes, havia uma tendência de que algumas das sequências ocorressem menor número de vezes, ou até nem ocorressem.

Ao realizar a experimentação aleatória, os estudantes tiveram dificuldade em entender que todos os resultados tinham a mesma chance de ocorrer, e diante de suas realizações e resultados, não perceberam que a equiprobabilidade dos eventos não poderia ser sustentada. Dentre os 80% respondentes que se equivocaram por não observar corretamente a possibilidade de algum amigo não ser visitados, destacamos o que segue:

F3D68A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? (X) Não () Sim

Por que? *Pois aonde ela for vai encontrar um amigo pois os dois tem um único caminho para ser seguido*

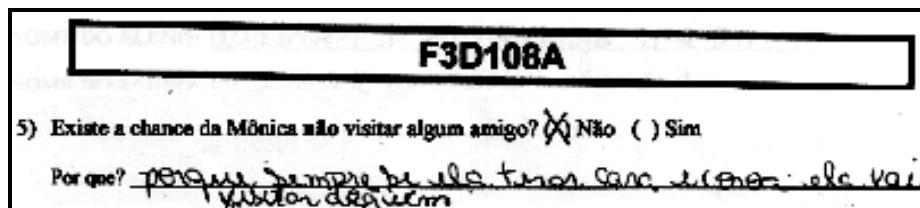
FIGURA 49 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D68AQ5²⁶

A resposta dada pela dupla D68A não é conclusiva, conforme consta na sua argumentação no protocolo apresentado na Figura 49; Já a dupla D108A, que se apresenta no protocolo da Figura 50, condiciona sua resposta aos quatro quarteirões existentes na malha quadriculada para justificar sua resposta, ou

²⁵ O Quadro 1 é aquele que consta na Ficha 2 que, conforme o lançamento da moeda quatro vezes consecutiva, configurou um dos possíveis caminhos de Mônica visitar um de seus amigos.

²⁶ Transcrição do Protocolo da Figura 49: Não; Pois aonde ela for vai encontrar um amigo pois os dois tem um único caminho para ser seguido.

seja, não observou a configuração de sua experimentação e anotações da F2A2²⁷.



F3D108A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? Não () Sim

Por que? *porque sempre se ela tirar cara e coroa ela vai visitar alguém*

FIGURA 50 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D108AQ5²⁸

Outros argumentos superficiais são evidenciados na Figura 51, tais como: Pois para chegar a qualquer um deles precisa de 4 jogadas; Existe uma sequência de moedas para cada personagem; Porque não importa as coordenadas, ela sempre irá visitar um amigo; Pois todos os caminhos que cair ela irá dar (visitar) na casa de um amigo; Pois a sequência dele (personagem) é mais difícil de cair; Porque qualquer combinação (Mônica) vai visitar um amigo²⁹.

Neste questionamento foi retomada a indagação, quanto “a chance de todos os amigos serem visitados” e a opinião das duplas, comparadas com aquela anotadas na Ficha 1, considerando o caráter determinista e aleatório. A compreensão das possíveis variabilidades dos resultados obtidos por outras duplas, também se incorporam nos objetivos propostos nesse item. Os estudantes perceberam que os personagens situados nos extremos tinham menor probabilidade de ser visitados pela Mônica e investigaram sobre qual a razão de tal constatação.

²⁷ A “Atividade II” apresenta-se evidenciada por três fichas que denominamos F2, F3 e F4. (é na F2 que as duplas indicaram suas sequências – caminhos aleatórios – e o nome dos personagens que seriam visitados).

²⁸ Transcrição do Protocolo da Figura 50: Não; Porque sempre se ela tirar cara e coroa, ela vai visitar alguém.

²⁹ Tais observações foram realizadas pelas D128A, D138A, D148A, D158A, D168A e D128B.

F3D128A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? Não () Sim
 Por que? *Pois para chegar a qualquer um deles precisa de 4 jogadas.*

F3D138A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? Não () Sim
 Por que? *Existe uma sequência de moeda para cada personagem.*

F3D148A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? Não () Sim
 Por que? *Porque não importa as coordenadas ela sempre irá visitar um amigo.*

F3D158A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? Não () Sim
 Por que? *Pois todos os caminhos que cair irá das na casa de um amigo..*

F3D168A

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? () Não Sim
 Por que? *Para a sequência dele é mais difícil de cair.*

F3D128B

5) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? Não () Sim
 Por que? *Pois qualquer combinação vai visitar um amigo.*

FIGURA 51 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A2Q5330

Considerando os resultados obtidos na Tabela 6, verificamos que 82,9% das duplas realizaram positivamente as tarefas/técnicas/tecnologia relacionadas ao que foi solicitado nas F2, F3 e F4, porém percebemos indícios significativos de dificuldades, quando solicitamos que comparassem a experimentação e a chance dos personagens serem visitados por Mônica, considerando o caráter determinista e a experimentação aleatória.

F3D108A

6) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
 NÃO mudariam porque
Não tem como ela não visitar ninguém

FIGURA 52 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D108AQ6³¹

³⁰ Transcrição do Protocolo da Figura 51: D128A – Não; Pois, para chegar a qualquer um deles precisa de 4 jogadas.; D138A – Não; Existe uma sequência de moeda para cada personagem.; D148A – Não; Porque não importa as coordenadas ela sempre irá visitar um amigo.; D158A – Não; Pois todos os caminhos que cair irá das na casa de um amigo.; D168A – Sim; Pois a sequência dele é mais difícil de cair.; D128B – Não; Pois qualquer combinação vai visitar um amigo.

³¹ Transcrição do Protocolo da Figura 52: Não tem como ela não visitar ninguém.

O protocolo da resposta da dupla D108A apresentado na Figura 52 menciona equivocadamente que todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados, mas não justifica se estão considerando o caráter determinista de atribuir probabilidade.

F3D118A

6) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"

NÃO mudariamos porque
Porque todos têm a mesma chance = 1/5 de chance, ou seja,
0,2, 20%

FIGURA 53 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D118AQ6³²

Já a resposta da dupla D118A (Figura 53), evidencia em seu protocolo que a opinião dada baseia-se no caráter determinista, pois estabelece que todos apresentem a mesma chance de serem visitados.

F3D168A

6) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"

NÃO mudariamos porque

SIM mudariamos porque
Na sorte a moeda caiu repetindo várias sequências e muitas vezes acabam não fazendo a sequência daquele personagem

FIGURA 54 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D168AQ6³³

Indicam esta probabilidade na forma decimal e porcentual, sem considerar a experiência aleatória para responder a questão. Quando a dupla D168A, opta por indicar que mudaria de opinião, deixa claro que toma como ponto de partida a Experiência Aleatória, o lançamento da moeda, a configuração das sequências, e percebe que se depender do lançamento da moeda, pode ocorrer que um ou mais amigos não recebam visita de Mônica (Figura 54).

³² Transcrição do Protocolo da Figura 53: Porque todos têm a mesma chance = 1/5 de chance, ou seja, 0,2; 20%.

³³ Transcrição do Protocolo da Figura 54: Na sorte a moeda cai repetindo várias sequências e muitas vezes acabam não fazendo a sequência daquele personagem.

F3D178A
6) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
<input type="checkbox"/> NÃO mudariam porque
<input checked="" type="checkbox"/> SIM mudariam porque <i>Todos os amigos foram visitados pelo menos uma vez.</i>

FIGURA 55 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D178AQ6³⁴

A resposta que a dupla D178A apresenta, busca na experimentação justificar sua resposta, considerando a configuração das sequências que consta na Ficha 2, onde todos os amigos são visitados pelos menos uma vez e, é nossa hipótese que esta constatação proporcionou a elaboração do protocolo apresentado na Figura 55.

A resposta que a dupla D128B é equivocada, pois menciona que não mudariam de opinião, por considerar que todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados por Mônica, conforme menciona a Figura 56.

F3D128B
6) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariam porque <i>Pois eles tem a mesma chance de serem visitada</i>

FIGURA 56 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D128AQ6³⁵

Como esta questão figura em todas as etapas de nossa pesquisa, ao final desta análise realizaremos uma comparação evidenciando todos os resultados das cinco fases³⁶ de nosso trabalho. A experimentação aleatória foi entendida por 91,4% dos estudantes e os possíveis resultados sistematizados positivamente pelos estudantes, conforme consta na Tabela 6. Por meio de uma linguagem formal, dão indicação de entendimento de que esta etapa favoreceu o entendimento de conceitos matemáticos e probabilísticos associados às experimentações realizadas.

³⁴ Transcrição do Protocolo da Figura 55: Todos os amigos foram visitados pelo menos uma vez.

³⁵ Transcrição do Protocolo da Figura 56: Não; Pois eles têm a mesma chance de serem visitados.

³⁶ As etapas de nossa pesquisa são: A estória, a Experimentação, a Modelagem, o Diagrama de Árvores e, a Comparação das duas formas de atribuir Probabilidades.

Quanto a conjunto tarefa/técnica/tecnologia associada à questão, nossos sujeitos de pesquisa ordenaram o conjunto de dados, compreenderam a noção de eventos elementares associados ao subconjunto do espaço amostral e, sistematizaram os possíveis resultados da experimentação, desenvolvendo uma linguagem formal, promovendo seu nível de conhecimento e formalizando generalizações.

Associaram por meio de seus experimentos, valores probabilísticos, avaliando o conceito de chance, organizando e configurando as informações e a seguir, apresentamos alguns protocolos elaborados pelos estudantes que merecem uma atenção. Como mencionado anteriormente, ao listar as possibilidades utilizando conceitos matemáticos, erros de contagem contribuíram para a atribuição de probabilidades consideradas equivocadas.

DO ALUNO: <i>Lucas</i> F4D188B			
Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica			
Amigo	Nº de vezes que foi visitado (f_i)	Frequência relativa (h_i)	Porcentagem $100 \cdot h_i$
Horácio	Dois	$2/30$	6,6%
Cebolinha	Cinco	$5/30$	16,6%
Magali	Sete	$7/30$	23,3%
Cascão	Oito	$8/30$	26,6%
Bidu	Dois	$2/30$	6,6%
Total	30	1,00	100,00

Onde $h_i = f_i/30$ representa uma estimativa da probabilidade

FIGURA 57 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D188B

Na Figura 57, que apresenta a TDF protocolada pela dupla D188B, nota-se que a tarefa de contagem dos eventos configurados pela experimentação não é a correta, pois segundo a Ficha 2, o nome do Horácio figurou três vezes e indicado na Ficha 4, duas vezes; A sequência que configura o caminho para a casa de Magali foi mencionada oito vezes, porém indicado sete vezes; e Bidu foi indicado três vezes, mas mencionado duas vezes. Apesar de ser trinta, a D188B informou apenas vinte e sete sequências.

F4D38A			
Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica			
Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
Horácio	3	0,1	10
Cebolinha	8	0,26	26,6
Magali	10	0,3	33,3
Cascão	5	0,16	16,6
Bidu	3	0,1	10
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$ representa uma estimativa da probabilidade

FIGURA 58 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD38A

Ao realizar a tarefa proposta nesta situação, a dupla D38A sistematizou seus dados na TDF e, na realização da tarefa de tabulação de suas sequências cometeu erros de contagem, conforme consta na Figura 58. Sua técnica de contagem foi realizada de forma positiva, mas o uso da técnica/tecnologia não auxiliou a confecção correta da TDF. Foram quatro as sequências que indicou a visita a Horácio, porém apenas três foi mencionada, conforme consta no protocolo indicado pela Figura 59.

F4D88A			
Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica			
Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
Horácio	┌	0,04	4
Cebolinha	□□┌	0,3	30
Magali	□□□┌	0,4	40
Cascão	□┌	0,14	14
Bidu	┌	0,04	4
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$ representa uma estimativa da probabilidade

FIGURA 59 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD88A

Outra dupla (D88A), ao tabular suas informações equivocou-se e realizou a contagem de trinta e dois eventos, sendo que o correto seria trinta sequências. Novamente indicamos que a tarefa de contagem foi solicitada nesta, porém o uso da técnica/tecnologia visando sistematizar positivamente a situação, não evidenciou a indicação correta da frequência relativa e porcentagem, conforme apresenta a Figura 59.

A resposta da dupla D178A dá indício de equívoco, pois quando indicou a porcentagem de visita de cada amigo, não considerou a frequência relativa condizente com a sua experimentação. O erro na indicação da porcentagem ocasionou o equívoco que apresenta a Figura 60.

A tarefa/técnica/tecnologia que envolvia o uso de estimativa e porcentagem, possibilitou a aquisição de concepções por ser o valor calculado a partir de uma amostra, permitindo de forma geral, a observação da variação dos resultados obtidos na experimentação e nas várias amostras. É esse modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o meio que percebemos o desenvolvimento dos envolvidos na aprendizagem de conceitos matemáticos e probabilísticos.

F4D178A			
Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica			
Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
Horácio	2	0,0666	6,666%
Cebolinha	8	0,2666	2,666%
Magali	11	0,3666	36,666%
Cascão	8	0,2666	26,666%
Bidu	1	0,0333	3,333%
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$ representa uma estimativa da probabilidade

FIGURA 60 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD178A

Considerando o questionamento em que analisa a porcentagem de Mônica visitar alguns amigos, na elaboração da TDF os estudantes associaram de forma positiva a tarefa/técnica/tecnologia que indica a porcentagem de visitar cada um dos amigos (Magali, Horácio e Bidu). A Tabela 6 indica que 91,4% dos sujeitos de nossa pesquisa entendem que a porcentagem é um conceito importante usado como ferramenta matemática necessária para a construção do conceito de probabilidade e de experiências probabilísticas.

Em nossa atividade os estudantes observaram que o trabalho com porcentagem aparece vinculado ao raciocínio probabilístico, sendo que ao transformar seus resultados em porcentagem e comparar com a definição clássica de probabilidade, os mesmos não observaram que a experimentação é

insuficiente para concluir a equiprobabilidade dos eventos. Estes estudantes perceberam a variabilidade dos eventos e, as análises apresentadas na Tabela 6 comprovam nossa argumentação. É nossa crença que esta situação favorece o entendimento de saberes matemáticos e, faz com que os estudantes superem os obstáculos a fim de fortalecer o ato de conhecer.

A resposta da dupla D178A indicou a probabilidade considerando sua TDF e, conforme se apresenta a Figura 61, cometeu equívoco no lançamento dos valores, pois a probabilidade de Mônica visitar Magali e Horácio não são os verdadeiros valores obtidos na experimentação. O equívoco ocorreu, muito mais por dispersão do que por falta de compreensão da situação apresentada.

F4D178A

8) Olhando a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF), qual é a probabilidade de Mônica visitar:

a) Magali? 6%

b) Horácio? 8%

c) Bidi? 3%

FIGURA 61 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D178AQ8

Conforme a Figura 62, que apresenta a resposta da dupla D188B, no desenvolvimento de cada experiência que sistematizou os resultados na Tabela de Distribuição de Frequências (TDF), e os diversos valores obtidos nas diferentes amostras concebidas pelas duplas, estes se aproximam dos resultados citados em nossa análise a priori.

F4D188B

8) Olhando a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF), qual é a probabilidade de Mônica visitar:

a) Magali? Sete = 7/30 = 23,3%

b) Horácio? dois = 2/30 = 6,6%

c) Bidi? dois = 2/30 = 6,6%

FIGURA 62 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D188AQ8

Todos os estudantes sistematizaram corretamente seus resultados (TDF), indicando corretamente a probabilidade de Mônica visitar Cascão relacionado às suas experimentações. Tal situação justifica o que diz Almouloud (2007), quando fala que os conhecimentos matemáticos só podem ser aprendidos e compreendidos por meio de atividades e problemas que mobilizem esses conhecimentos.

F4D128B			
Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica			
Amigo	Nº de vezes que foi visitado (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
Horácio	4	0,13	13%
Cebolinha	6	0,2	20%
Magali	7	0,23	23%
Cascão	9	0,3	30%
Bidu	4	0,13	13%
Total	30	1,00	100,00
9) Quanto por cento das visitas foram para Cascão?			30%

FIGURA 63 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2TDFD128BQ9

A Figura 63 apresenta a TDF elaborada pela dupla D128B, e foi com base em sua experimentação, que os estudantes indicaram a resposta em relação à pergunta que solicitava a porcentagem de visitas que Cascão recebeu.

A tarefa/técnica/tecnologia se faz presente, quando da realização da experimentação, quando os estudantes elaboraram a TDF e a partir dela, a resposta indicadas às várias indagações desta etapa de realização da atividade “Os passeios aleatórios da Mônica”

Ao responder a questão 10 da atividade de experimentação, os estudantes apontaram sim, que mudariam de opinião quanto ao questionamento “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”, pois anteriormente haviam mencionado que não, justificando de várias formas sua posição. A Tabela 6 indica que 97,1% dos estudantes perceberam que havia diferença entre as chances dos amigos de serem visitados pela Mônica, e por outro lado, aqueles que já haviam percebido que mediante a experimentação aleatória, existia variabilidade dos resultados, mantiveram sua posição.

Observe na Figura 64, que apenas os estudantes da dupla D178A analisam a situação de forma superficial, indicando que não mudariam por achar que todos têm a mesma chance de serem visitados, partindo do pressuposto de que tal fato se dá porque todos os amigos foram visitados pelo menos uma vez.

F4D178A	
10) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"	
<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariam porque	
<i>Porque os amigos foram visitados pelo mesmo tempo</i>	
<i>ney</i>	
<input type="checkbox"/> SIM mudariam porque	

FIGURA 64 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D178AQ10

Entendemos que a dupla não tenha entendido que os resultados isolados são equiprováveis, nem que a quantidade de caminhos que os amigos apresentam em suas configurações é quantitativamente diferente (o número de caminhos possíveis de chegar à residência de cada personagem não é equiprovável).

Quando solicitamos aos estudantes a comparação de seus resultados com a dupla mais próxima e, que verificasse a igualdade ou não dos resultados, 97,1% das duplas indicaram que eram diferentes, dada a forma experimental de obter seus resultados e atribuíram o fato ao acaso. A tabulação das sequências, a indicação do amigo a ser visitado e a porcentagem atribuída, foi determinante para obtermos o levantamento apresentado na Tabela 6.

Na Figura 65 apresentamos o protocolo da resposta dada pela dupla D68A, indicando indícios de equívoco ao mencionar que seus resultados são iguais, e ainda, quando justificam sua resposta de forma superficial, o que corresponde aos 2,9% indicados na Tabela 6.

F4D68A	
11) Comparem seus resultados sistematizados na Tabela 1 com os resultados da dupla ao lado. Esses são iguais? <input checked="" type="checkbox"/> Sim () Não.	
Se forem iguais como vocês explicam essa igualdade nos resultados? <i>Porque só existe um método para chegar aos resultados.</i>	

FIGURA 65 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A2D68AQ11

De forma geral, os estudantes consideraram que os resultados são provenientes de uma simulação envolvendo o acaso, e aqueles obtidos na amostra não são todos iguais, reforçando nossa indicação de que, pelo fato da aleatoriedade e da experimentação, dificilmente encontrariam nos resultados obtidos duas amostras idênticas.

Considerando os resultados obtidos, verificamos que as duplas realizaram positivamente as tarefas/técnicas/tecnologia relacionadas ao que foi

solicitado nas F2, F3 e F4. Percebemos na questão 5³⁷ que os estudantes apresentaram dificuldades quando solicitamos que comparassem as experimentações e a chance dos personagens serem visitados por Mônica, justificando sua resposta.

Como se trata de uma questão presente em todas as etapas de pesquisa, ao final desta análise realizaremos uma comparação evidenciando todos os resultados das cinco fases de nosso trabalho.

Concordamos com Batanero (2001) quando menciona que a atividade matemática pode ser descrita por meio do processo de modelização e, que o trabalho envolvendo probabilidade experimental será mais difundido.

Merece destaque a organização dos dados por meio da representação gráfica, a ordenação do conjunto de dados, e o entendimento relacionado a eventos elementares associados ao subconjunto do espaço amostral, a sistematização dos possíveis resultados dos eventos, promovendo o nível de conhecimento, a formalização e a socialização dos eventos.

4.2.3 – ANÁLISE DA “MODELAGEM MATEMÁTICA”

Ao realizar a análise da atividade que trata da Modelagem Matemática, percebemos que a tarefa/técnica/tecnologia utilizada pelos estudantes foi determinante para um melhor entendimento e compreensão da diferença entre a equiprobabilidade dos eventos e, da não equiprobabilidade dos caminhos, sendo que foram determinantes para tal, os desenhos realizados em forma de croqui, dos percursos possíveis para que a Mônica pudesse chegar à casa de Magali. A técnica que solicita o uso de linhas diferentes utilizando lápis de cor ou canetas coloridas ajudou no entendimento, compreensão e assimilação das diferenças existentes na situação apresentada.

³⁷ A questão 5 solicita a opinião dos estudantes se “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados” considerando o caráter determinista e a experimentação aleatória.

ATIVIDADE 3		FICHA 5 E 6 - A MODELAGEM									
QUESTÕES		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	TOTAL
%											
CERTO		94,3	94,3	88,6	82,9	80,0	82,9	80,0	91,4	80,0	86,0
ERRADO		5,7	5,7	11,4	17,1	20,0	17,1	11,4	8,6	20,0	13,0
BRANCO								8,6			1,0

TABELA 7 –DESEMPENHO DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 3

A Tabela 7 nos permite mencionar que 94,3% dos estudantes indicaram corretamente os caminhos possíveis de a Mônica visitar Magali. Os sujeitos de nossa pesquisa construíram organizadamente todos os caminhos possíveis, favorecendo a determinação de todos os resultados possíveis (Espaço Amostral), utilizando a quadrícula, lápis de cor e canetas coloridas, além do decalque criado para a realização da experimentação, conforme Figura 66.



FIGURA 66 – QUADRICULA DAS ATIVIDADES DE PESQUISA.

Os trabalhos dos estudantes consideraram os resultados provenientes de sua simulação, da aleatoriedade e experimentação, confirmando por meio de seus desenhos a descrição dos resultados do experimento.

Os sujeitos de nossa pesquisa entenderam a atividade descrita e cremos que, por partir da situação contextualizada construíram hipóteses sobre o significado de cada um dos resultados, reelaborando seus conhecimentos sobre linguagens simbólicas e códigos matemáticos.

Além de realizarem a tarefa, utilizando as técnicas e tecnologias pertinentes à atividade, se sentiram estimulados em desenvolver a modelagem probabilística, cujo aporte teórico é base de nossa pesquisa.

Quanto à questão solicitando a quantificação dos caminhos existentes para a Mônica chegar à casa de Magali, quais são esses caminhos e, o estabelecimento do que esses caminhos têm em comum, cabe-nos dizer que,

20% das duplas não conseguiram evidenciar que eram seis caminhos ao todo, e que as sequências eram (XXCC), (XCXC), (XCCX), (XCCX), (CXCX) e (CCXX).

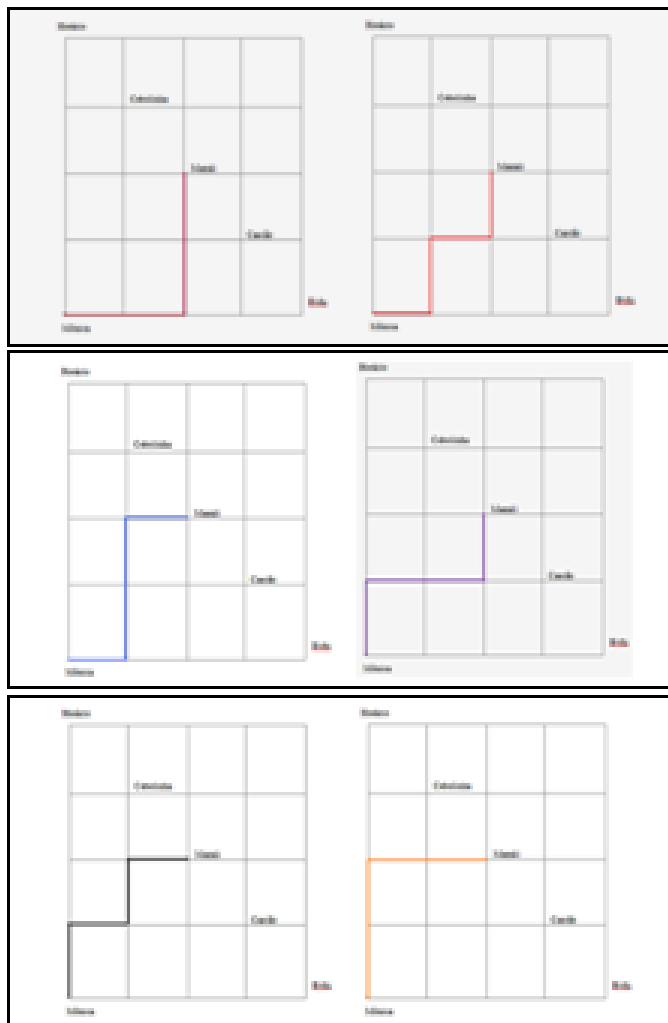


FIGURA 67 – APRESENTAÇÃO DO CROQUI (XXCC) E (XCXC)

Os caminhos configurados obedeceram à organização que aparece descrita na Figura 68, construída pelas duplas D148A e D38B, e que apresentam os caminhos aleatórios corresponde às sequências (XXCC), (XCXC), (XCCX), (XCCX), (CXCX) e (CCXX), respectivamente.

Mesmo aqueles que quantificaram e qualificaram corretamente cada situação, também não conseguiram descrever com exatidão que os caminhos apresentavam em sua configuração, exatamente duas caras e duas coroas.

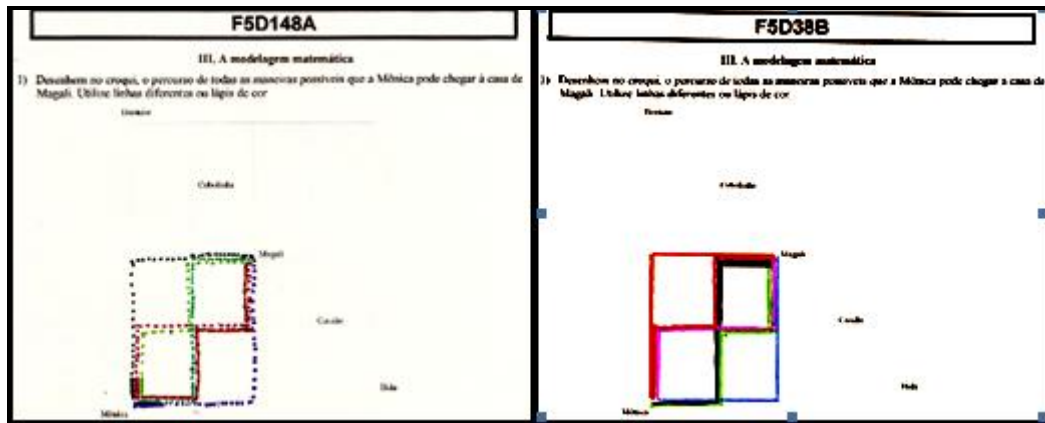


FIGURA 68 - PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D148A E D38BQ1

Salientamos que a tarefa de quantificar, qualificar e verificar as regularidades existentes em cada um dos caminhos remeteu as duplas ao procedimento de, com base na tarefa mencionada anteriormente, desenhar cada uma das sequências em forma de códigos, buscando indicar o que a configuração de todos os caminhos tem em comum e, isto nos remete ao estudo do processo evolutivo pelo qual passa um objeto de ensino, citado por Chevallard, por considerar as transformações ocorridas em um saber, desde o sua criação até o momento em que é ensinado.

Conforme a Tabela 7, 86% das duplas desenvolveram, de forma geral, positivamente a tarefa proposta, usando as técnicas e tecnologias pertinentes, e que buscou evidenciar o experimento dos sorteios aleatórios e a descrição dos caminhos (sequência obtida no sorteio) possíveis da Mônica chegar à casa de Magali, além de caracterizar a introdução de experiência aleatória por meio de situações reais e observação de eventos.

Os estudantes apresentaram aptidão para atribuir notações simbólicas, representando seus sorteios e indicando as regularidades na maioria de suas anotações corretamente.

Depois de considerar suas regularidades, os possíveis caminhos desenhados anteriormente, a caracterização e a listagem de todos os resultados possíveis do evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Magali” os estudantes apontaram em seus protocolos o que segue: Seis caminhos; {CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC} não necessariamente nesta ordem; os caminhos têm em comum, configuração contendo duas cara e duas coroas.

Seus protocolos evidenciaram que as sequências apresentavam em suas configurações, exatamente duas caras e duas coroas, conforme consta na Figura 69.

F5D98B	
2) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Magali?	6
Quais são?	CXCC; CCXX; XXCC; XCXC; CXXC; XCCX
O que esses caminhos têm em comum?	Têm sempre 2 "C" e dois "X"

FIGURA 69 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D98BQ2

Vinte por cento das duplas não indicaram todos os caminhos possíveis e a Figura 70 apresenta um dos protocolos dentre aqueles quatro que indicaram 5 caminhos (outros três indicaram a existência de quatro caminhos) e, ao referenciar seus protocolos quanto às regularidades, argumentaram: todos chegam à casa da Magali; todos saem de um mesmo lugar e chegam a um mesmo ponto, etc.

F5D18A	
2) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Magali?	5
Quais são?	CCXX - XCXC - XXCC - CXCX - XCCX
O que esses caminhos têm em comum?	Já vem da Magali

FIGURA 70 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D18AQ2

Mesmo respondendo de forma inconsistente a regularidade dos caminhos, é nossa hipótese que os estudantes realizaram a atividade com sucesso, além de codificar as sequências que entenderam ser possível configurar. Consideramos esta realização, uma transformação de saberes provocada pela teoria das situações.

No questionamento “Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?”, as duplas realizaram de forma positiva a atividade, mencionando que é quatro o número de caminhos. Possíveis. Conforme consta na Tabela 7, 88,6% das duplas representaram suas configurações em notações simbólicas, como segue: (XXXC), (XCXX), (XXCX), (CXXX). Os estudantes destacaram, em sua maioria que as regularidades das sequências evidenciam uma cara (C) e três coroas (X) em suas configurações.

A Figura 71 apresenta o protocolo da dupla D18A, que indica corretamente a quantidade de caminhos para Mônica chegar à casa de Cascão, assim como, cada um deles em forma de código, mas não consegue mencionar que a regularidade reside no fato de que cada um dos caminhos apresenta configuração com uma cara e três coroas.

F5D18A	
3) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão?	<u>4</u>
Quais são?	<u>XXCX - XXXC - CXXX - XCXX</u>
O que esses caminhos têm em comum?	<u>Jádo chegou na casa</u>

FIGURA 71 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D18BQ3

No entanto, a D128A responde corretamente a regularidade e não indica, nem codifica corretamente todos os caminhos possíveis para realização do evento “quantos caminhos existem ao todo, para Mônica chegar à casa de Cascão”, conforme o que consta na Figura 72.

F5D128A	
3) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão?	<u>3</u>
Quais são?	<u>(XCXX) (XXCX) (CXXX)</u>
O que esses caminhos têm em comum?	<u>Uma tem 3x e cada um.</u>

FIGURA 72 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D128AQ3

Finalmente, apresentamos os protocolos das duplas D28B, D168B e D188B, que informam a quantidade de caminho, suas configurações e regularidades de forma equivocada, conforme se apresenta a Figura 73.

No questionamento em que indagamos a quantidade de caminhos existentes, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha, a descrição de cada um deles e, o que esses caminhos têm em comum, as duplas indicam com base em suas resoluções (levantamento qualitativo e quantitativo), caracterizaram a introdução de experiência aleatória por meio das situações reais configuradas na atividade e nas observações dos eventos, além de associar o uso de notações simbólicas para representar os sorteios aleatórios.

F5D28B
3) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão? <u>Apenas 3</u> Quais são? <u>(XXCX); (XXC); (CXX)</u> O que esses caminhos têm em comum? <u>O ponto de chegada e o ponto de partida</u>
F5D168B
3) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão? <u>3 caminhos</u> Quais são? <u>X, X, X, C - C, X, X, X - X, C, X, X -</u> O que esses caminhos têm em comum? <u>Todos vão a casa de Cascão</u>
F5D188B
3) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão? <u>5 caminhos</u> Quais são? <u>CCCX, XCCC, CCXC, XCXX</u> O que esses caminhos têm em comum? <u>Chegam ao mesmo lugar</u>

FIGURA 73 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A38BQ3

Como se apresenta a Tabela 7, 82,9% dos estudantes realizaram a tarefa corretamente, utilizando as técnicas e tecnologias mencionadas em nossa análise à priori. Caracterizaram o evento, indicaram a sua representação e regularidades. A representação em notações simbólicas, assim como, a indicação das regularidades e características das configurações foram evidenciadas com as palavras: apresentam três caras e uma coroa.

F5D18A
4) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha? <u>3</u> Quais são? <u>CCCX - XCCC - CXCC</u> O que esses caminhos têm em comum? <u>Todos chegam ao Cebolinha</u>
F5D28B
4) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha? <u>Apenas 3</u> Quais são? <u>(CCCX); (CXCC); (XCCC)</u> O que esses caminhos têm em comum? <u>O ponto de chegada e o de partida são</u>
F5D168B
4) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha? <u>3 caminhos</u> Quais são? <u>X, X, X - X, C, C, C - X, C, C -</u> O que esses caminhos têm em comum? <u>Todos vão a casa de Cebolinha</u>

FIGURA 74 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A38A E 8BQ4

Apenas 17,1% das duplas não listaram os caminhos como segue: {CCCX, CCXC, CXCC, XCCC}; não quantificaram em 4 a quantidade de caminhos e nem apresentaram por meio de palavras, a regularidade das configurações (exatamente 3 cara e uma coroa).

As frases: Todos chegam ao Cebolinha, O ponto de partida e de chegada são os mesmos; Todos levam a casa de cebolinha; foram respostas dadas pela maioria das duplas, e a Figura 74 que apresenta os protocolos das duplas D18A, D28B, D168B e o da Figura 75, protocolo da dupla D188B.

F5D188B	
4) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha?	6
Quais são?	<i>CCCL, XCC, CXC, CCC, XCC</i>
O que esses caminhos têm em comum?	<i>Todos chegam no mesmo lugar</i>

FIGURA 75 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D188BQ4

Observem na Figura 75 que a resposta indicada pela dupla D188B indica corretamente os caminhos, porém menciona duas vezes o caminho XCCC e, com a frase “Todos chegam ao mesmo lugar” busca justificar a regularidade dos caminhos citados em seu protocolo.

Analisando as respostas dos estudantes, quanto ao questionamento de “quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bidu, ou do Bidu? Quais são? O que esses caminhos têm em comum?” ³⁸ percebemos que todas as duplas acertaram suas respostas, conforme as porcentagens apresentadas na Tabela 7 e, grande parte das duplas não indicaram corretamente a regularidade existente no caminho configurado. As Figuras 76 e 77 apresentam o protocolo da resposta aos questionamentos 5 e 6 da Ficha 5 (Modelagem Matemática) que as duplas D18A e D88B realizaram, a fim de mostrar que as respostas consideradas corretas não indicam de forma convincente as regularidades.

F5D18A	
5) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bidu?	1
Quais são?	<i>XXXX</i>
O que esses caminhos têm em comum?	<i>Chega no Bidu</i>
6) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Horácio?	1
Quais são?	<i>CCCC</i>
O que esses caminhos têm em comum?	<i>Chega no Horácio</i>

FIGURA 76 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3D18AQ5 E Q6

Somente oito duplas perceberam e indicaram corretamente as regularidades em que a sequência dada por {XXXX} constitui-se em quatro

³⁸ Analisamos as questões 5 e 6 conjuntamente, pelo fato de as respostas da duplas serem semelhantes, inclusive nas justificativas quanto às regularidades dos dois eventos.

resultados iguais e todos eles, coroa, enquanto que a sequência dada por {CCCC} constitui-se em quatro resultados iguais e todos eles, cara.

A seguir apresentamos os protocolos da Figura 77 que mencionam de maneira própria a resposta correta, quanto às regularidades. Veja que o mesmo ocorre em relação ao que explicitamos anteriormente, ou seja, a D88B realizou de forma positiva a tarefa relacionada à experiência aleatória por meio de situações reais, a observação de eventos, descrevendo-os utilizando notações simbólicas, caracterizando e representando o sorteio aleatório envolvendo “Os passeios aleatórios da Mônica”.

F5D88B	
5) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa do Bida? <u>1 caminho</u>	
Quais são? <u>(X X X X)</u>	
O que esses caminhos têm em comum? <u>começa e termina no mesmo lugar</u>	
6) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa do Horácio? <u>1 caminho</u>	
Quais são? <u>(C C C C)</u>	
O que esses caminhos têm em comum? <u>começa e termina no mesmo lugar</u>	

FIGURA 77 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3D8BQ5 E Q6

A observância das regularidades também não procedeu como o esperado, pois mencionar que “começa e termina no mesmo lugar”, que “só existe 1 possibilidade e um caminho para chegar até lá”, “o ponto parte da Mônica e chega até o Horácio, e percorre 4 quarteirões” não são respostas que contemplam os questionamentos.

F5D68A	
5) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bido?	1
Quais são?	XXXX
O que esses caminhos têm em comum?	4 caras
6) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Horácio?	1
Quais são?	CCCC
O que esses caminhos têm em comum?	4 caras
F5D78B	
5) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bido?	1 caminho
Quais são?	XXXX
O que esses caminhos têm em comum?	4X
6) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Horácio?	1 caminho
Quais são?	CCCC -
O que esses caminhos têm em comum?	4C
F5D118B	
5) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bido?	1 caminho
Quais são?	(X;X;X;X)
O que esses caminhos têm em comum?	Todos os resultados são pares
6) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Horácio?	1 caminho
Quais são?	(C;C;C;C)
O que esses caminhos têm em comum?	Todos os resultados são pares

FIGURA 78 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3Q5 E Q6

Ao analisar qualitativamente o questionamento, “Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo?”, conforme se apresenta a Tabela 7, 80% das duplas realizaram a tarefa/técnica/tecnologia de forma a contemplar a evidência ao considerar aos quatro lançamentos da moeda honesta, dos dezesseis resultados possíveis e, caracterizaram o espaço amostral da experimentação.

Neste caso, os estudantes indicariam as configurações e regularidades, considerando a representação do espaço amostral por: {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC, XXXX}.

Em sua maioria (80% das duplas) modelaram a situação quantificando os eventos possíveis, usando conceitos matemáticos relacionados à probabilidade, indicando a probabilidade de a Mônica visitar cada um de seus amigos e, em seus protocolos apresentaram implicitamente o uso de conceitos relacionados à probabilidade clássica.

O uso da técnica/tecnologia configurada pelo uso da fórmula $P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)}$,

com $n(H)$ designando o número de caminhos existentes para que a Mônica

visitasse o Horácio e, $n(\Omega)$ designando o número de caminhos existentes para que a Mônica realizasse a visita a um dos seus amigos, configurou a determinação da probabilidade (clássica) que utilizou o experimento aleatório (lançamento da moeda honesta).

As duplas que responderam corretamente a indicação do número de caminhos existentes ao todo supostamente consideraram que: $n(H) = 1$, $n(C) = 4$, $n(M) = 6$, $n(S^{39}) = 4$, $n(B) = 1$ e, assim sendo: $n(\Omega) = n(H) + n(C) + n(M) + n(S) + n(B)$, implicando em $n(\Omega) = 16$.

Em nosso referencial teórico vimos que a TAD pode ser analisada de diferentes pontos de vista, e que o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.

Como mencionamos em nossa análise a priori, os estudantes quantificaram todos os resultados referentes ao experimento aleatório, caracterizando a introdução de conceitos da Teoria da Probabilidade, por meio de situações reais e observação dos eventos e o uso da Teoria que implica este trabalho.

Observe na Tabela 7 que apenas 11,4% dos estudantes não indicam as notações simbólicas representando o número correto de observações e, que estava relacionado aos caminhos existentes na concretização do experimento, o que caracterizaria quantitativamente todos os resultados possíveis na Modelagem Matemática e, dentre estes, apresentamos na Figura 79 alguns protocolos que evidenciaram tal aferição.

³⁹ Usamos o símbolo “S” para representar o número de caminhos existentes para que “a Mônica visite Cascão”, diferenciando de $n(C)$ que representa o número de caminhos existentes para que “a Mônica visite Cebolinha”.

F6D38A	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? <u>14</u>
F6D158A	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? <u>14 (0 minutos)</u>
F6D48B	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? <u>30</u>
F6D168B	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? <u>12 caminhos.</u>

FIGURA 79 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3Q7 – “EQUÍVOCOS”

Na Figura 80 apresentamos os protocolos das respostas das duplas D128B, D148B e D158B, que não responderam ao questionamento que indicaria o total de caminhos configurando o espaço amostral da experimentação com base na modelagem e, assim sendo, configurou 8,6% dos protocolos não responderam a questão, e a Tabela 7 mostra este levantamento indicando o termo “em branco”.

Seguimos o entendimento de Almouloud (2007) ao falar que a técnica de escrever supõe uma manipulação de objetos ostensivos de forma escrita, oral, gestual e que o processo de estudo é descrito por momentos em que se realiza tarefas e inicia a elaboração de uma técnica para desenvolver esse tipo de tarefa.

F6D128B	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? _____
F6D148B	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? _____
F6D158B	
7)	Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? _____

FIGURA 80 – PROTOCOLO CONJUNTO DA REALIZAÇÃO DA A3Q7 – “EM BRANCO”

Ainda pensando na qualidade das respostas das duplas, e considerando as configurações de sua experimentação e conforme a Figura 81 da Ficha 6, a D188B respondeu a este questionamento corretamente, porém sem indicar os eventos na realização das questões da Ficha 5.

F6D188B
7) Considerando todos os amigos, quantos caminhos existem ao todo? <u>16 possibilidades</u>

FIGURA 81 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D188BQ7

Apesar de ser a quantidade correta, é nossa hipótese que a troca de informações entre as duplas, serve de parâmetro para que a resposta fosse mencionada, pois o desenvolvimento das tarefas, a técnica e tecnologia utilizada, favoreceram as respostas dos estudantes.

Deparamo-nos novamente com o questionamento em que os estudantes tinham que responder se todos os amigos tinham a mesma chance de serem visitados, e se mudariam de opinião justificando sua escolha. Em 91,4% das respostas dadas pelas duplas configuramos o acerto da indicação de mudança conforme mostra a Tabela 7 e, inclusive aqueles que já haviam mencionado a mudança, ratificaram sua resposta.

Caracterizamos a tarefa, técnica e tecnologia considerando as representações e esquemas, desenhos, códigos, que após a enumeração caracterizaram a chance de ocorrência de cada evento, remetendo as duplas à indicação de que os amigos de Mônica não têm a mesma chance de serem visitados.

F6D48B
8) Depois que vocês analisaram quantos caminhos existem ao todo e quantos desses levam a Mônica para a casa da Magali, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
<input type="checkbox"/> NÃO mudariam porque
<input checked="" type="checkbox"/> SIM mudariam porque
<i>tem um (caldeirão) que tem uma chance maior (50% de chance) de ser visitado</i>

FIGURA 82 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D48BQ8

Dentre aqueles que responderam ao questionamento de forma equivocada, destacamos as duplas D48B, D58B e D128B que talvez não tenham dado a devida atenção para caracterizar suas respostas positivamente, conforme apresentamos no protocolo evidenciado pela Figura 83, 84 e 85.

F6D58B	
8)	Depois que vocês analisaram quantos caminhos existem ao todo e quantos desses levam a Mônica para a casa da Magali, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
	<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariamos porque
	Tudo depende da moeda, se sortamos pelo número de caminhos aí não
	não todos os amigos têm a mesma chance de ser visitado.

FIGURA 83 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D58BQ8

Considerando a Figura 83, a resposta da dupla D58B menciona em seu protocolo que não mudaria de opinião e justifica que os amigos não têm a mesma chance de ser visitado, e situa a dependência no lançamento da moeda e na contagem dos caminhos.

Nenhuma das duplas emitiu suas opiniões considerando que os eventos não eram equiprováveis e uma representação dessa situação é indicada pela Figura 84.

F6D128B	
8)	Depois que vocês analisaram quantos caminhos existem ao todo e quantos desses levam a Mônica para a casa da Magali, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
	<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariamos porque
	Porque é na sorte para pra cair cara ou coroa
	sempre vai em um amigo.

FIGURA 84 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D128BQ8

Em relação ao questionamento que solicitou das duplas a indicação da probabilidade, com base nos elementos listados em cada evento, configurados pelo espaço amostral de forma precisa e, buscando intuitivamente a caracterização das notações simbólicas para representar a frequência relativa, a porcentagem e a probabilidade de ocorrência dos eventos, afirmamos que o bloco tarefa/técnica/tecnologia/teoria foi utilizado e, nessa ordem.

Observe a Tabela 7 e note que, 80% das duplas consideraram as regularidades e os possíveis caminhos que foram observados e configurados, e por nossa hipótese dá indicações de que os sujeitos de nossa pesquisa entenderam e compreenderam as noções de acaso e de incerteza (teoria), intuitivamente, por meio de sua experimentação e observação de eventos.

Com apresentamos em nossa análise a priori, os estudantes realizaram a tarefa de observação da frequência de ocorrência de cada acontecimento, e com base em um número razoável de experiências, desenvolveram noções probabilísticas. Utilizaram a caracterização dos eventos, representando-os por meio de códigos, quantificando-os. Tal procedimento configurou também o estabelecimento da técnica e tecnologia envolvendo a TAD.

Os estudantes calcularam a probabilidade de a Mônica visitar Horácio, usando supostamente a formulação $P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)}$, onde $n(H)$ indicou a quantidade de caminho para Mônica chegar à casa de Horácio, $n(\Omega)$ o total de caminhos para Mônica visitar todos os amigos. Como em sua experimentação indicou $n(H) = 1$ e $n(\Omega) = 16$, então $P(H) = \frac{1}{16} = 0,0625 \times 100 = 6,25\%$.

Pela similaridade na realização da tarefa, usando a técnica e tecnologia pertinente, os demais cálculos indicaram: $n(C) = 4$ e $n(\Omega) = 16$, $P(C) = \frac{4}{16} = 0,25 \times 100 = 25\%$; $n(M) = 6$, $P(M) = \frac{6}{16} = 0,375 \times 100 = 37,5\%$; $n(S) = 1$, $P(S) = \frac{4}{16} = 0,25 \times 100 = 25\%$; $n(B) = 1$, $P(B) = \frac{1}{16} = 0,0625 \times 100 = 6,25\%$.

Apesar de indicar a quantidade de eventos e o total que caracteriza o espaço amostral de forma equivocada, as duplas D158A e D168A informaram a probabilidade de cada evento, corretamente. Se observarmos os resultados da questão 1, na Ficha 5, poderemos confirmar nossa hipótese, que considera positiva a troca de informação, o diálogo entre as duplas, pois acreditamos que tal atitude tenha favorecido o entendimento da tarefa, a aplicação da técnica e da tecnologia.

A D18A realizou a contagem de forma equivocada de sua experimentação e isto, configurou o equívoco apresentado na realização desta atividade, conforme protocolo apresentado na Figura 85.

Porém, considerando os seus resultados e o que foi realizado, os estudantes observaram corretamente a solicitação de indicação da probabilidade de cada personagem receber a visita de Mônica, aplicando corretamente as noções de probabilidade envolvidas.

F6D18A	
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:	
a. Horácio	$\frac{1}{4}$
b. Cebolinha	$\frac{3}{4}$
c. Magali	$\frac{5}{12}$
d. Cascão	$\frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{2}{2}$
e. Bidu	$\frac{1}{4}$

FIGURA 85 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D18AQ9

A D38A contradiz seus resultados, pois a resposta dada a este questionamento não considera contagem dos resultados mencionados na TDF solicitada na atividade, e isto pode ser verificado na Figura 86.

É nossa hipótese que houvera uma troca de informações quanto à realização desta e, no momento de configurar sua experimentação e posteriormente a modelagem na questão 9, os estudantes desta dupla perceberam que seus resultados seriam aqueles citados em nossa análise a priori.

F6D38A	
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:	
a. Horácio	$0,0625$
b. Cebolinha	$0,25$
c. Magali	$0,325$
d. Cascão	$0,25$
e. Bidu	$0,0625$

FIGURA 86 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D38AQ9

A resposta da dupla D128A informou seus valores com base nas questões 1 e 2, utilizando corretamente os conceitos probabilísticos envolvidos, apesar de não configurar os resultados que caracterizariam os eventos e o espaço amostral das observações realizadas conforme evidenciamos na Figura 87.

F6D128A	
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:	
a. Horácio	$\frac{4}{14}$. Pois ele tem uma chance a cada 14 chances.
b. Cebolinha	$\frac{4}{14}$. Pois ele tem 4 chances em 14.
c. Magali	$\frac{5}{14}$. Pois ela tem 5 chances em 14.
d. Cascão	$\frac{3}{14}$. Pois ele tem 3 chances em 14.
e. Bidu	$\frac{1}{14}$. Como Horácio ele só tem uma chance que é (XXXX).

FIGURA 87 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D128AQ9

Consideramos com relação à resposta da dupla D168A (por hipótese), a indicação dos resultados anotados em seu protocolo, aqueles obtidos por outra dupla, pois na Questão 1 da Ficha 5, respondeu que o número de visitas que a Magali receberia totalizam 4 caminhos ao invés de 6. Isto configurou o equívoco na indicação correta do número total de visitas, conforme mostra a Figura 88.

F6D168A	
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:	
a. Horácio	$0,25$ $\frac{4}{14}$ = $\frac{4}{16}$.
b. Cebolinha	$0,25$
c. Magali	$0,25$
d. Cascão	$0,25$
e. Bidu	$0,25$

FIGURA 88 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D168AQ9

Ao responder a questão 9 a dupla D168A, D148B e D168B não mencionou a probabilidade de Mônica visitar Magali corretamente, porém ressaltamos que os conceitos envolvendo probabilidade foram aplicados corretamente, conforme o que apresentamos na Figura 89, 90 e 91.

F6D148B	
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:	
a. Horácio	$\frac{2}{30}$
b. Cebolinha	$\frac{7}{30}$
c. Magali	$\frac{11}{30}$
d. Cascão	$\frac{9}{30}$
e. Bidu	$\frac{1}{30}$

FIGURA 89 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D148BQ9

A dupla D148B se equivocou ao considerar os caminhos e configurar os passeios aleatórios relacionados aos quatro lançamentos da moeda e, isto, ocasionou na indicação dos resultados descritos no protocolo da Figura 89.

Isto indica que a tarefa, técnica e tecnologia foram coerentes com as realizações e, merece destaque o fato dos estudantes corresponderem às expectativas de realização da atividade. Na Figura 89, a dupla D168A indica a probabilidade de Bidu ser visitado como 0,625, mas consideramos que equivocadamente a dupla deixou de mencionar 0,0625 como aquela mencionada na de Horácio.

F6D168B	
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:	
a. Horácio	$\frac{4}{10}$
b. Cebolinha	$\frac{5}{10}$
c. Magali	$\frac{4}{10}$
d. Cascão	$\frac{3}{10}$
e. Bidu	$\frac{1}{10}$

FIGURA 90 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D168BQ9

Já a dupla D168B e D188B se equivocam ao considerar os caminhos e configurar os passeios aleatórios relacionados aos quatro lançamentos da moeda e, isto, ocasionou na indicação dos resultados descritos no protocolo aqui indicado (Figura 90 e 91, respectivamente).

NOME DO ALUNO:		F6D188B
9) Com esses resultados, como vocês calculariam a probabilidade de Mônica visitar:		
a. Horácio	(6/16)	3/16
b. Cebolinha	(5/16)	5/16
c. Magali	(23/32)	7/16
d. Cascão	(3/16)	1/16
e. Bidu	(6/16)	3/16

FIGURA 91 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A3D188BQ9

Como mencionamos em nossa análise a priori da atividade, o embasamento teórico referente à Introdução a Probabilidade serão trabalhados de modo a estimular os estudantes a realizar indagações, estabelecer relações, construir justificativa e desenvolver o espírito de investigação.

Entendemos que tanto as tarefas (t), quanto às técnicas (τ) e tecnologias envolvendo a Modelagem Matemática incentiva ainda mais a aprendizagem dos estudantes, no que diz respeito à realização da leitura e interpretação gráfica dos caminhos aleatórios indicados em seus protocolos, assim como, tornando-os mais aptos a descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos probabilísticos, a teoria (Θ).

4.2.4 – ANÁLISE DA “ÁRVORE DE POSSIBILIDADES”

A tarefa (t) solicitada na atividade mediante a realização de experimentação visou o preenchimento e complementação do diagrama da árvore. Para completar a árvore de possibilidades as duplas indicaram a sequência sorteada, o número de caras e o amigo visitado corretamente, conforme mostra a Figura 92 com a realização da D198A.

A configuração da árvore de possibilidades indicando os caminhos aleatórios fez com que os estudantes percebessem a configuração do espaço amostral vinculado ao experimento, a equiprobabilidade de cada um dos caminhos existentes de forma isolada, associando estes aos amigos visitados.

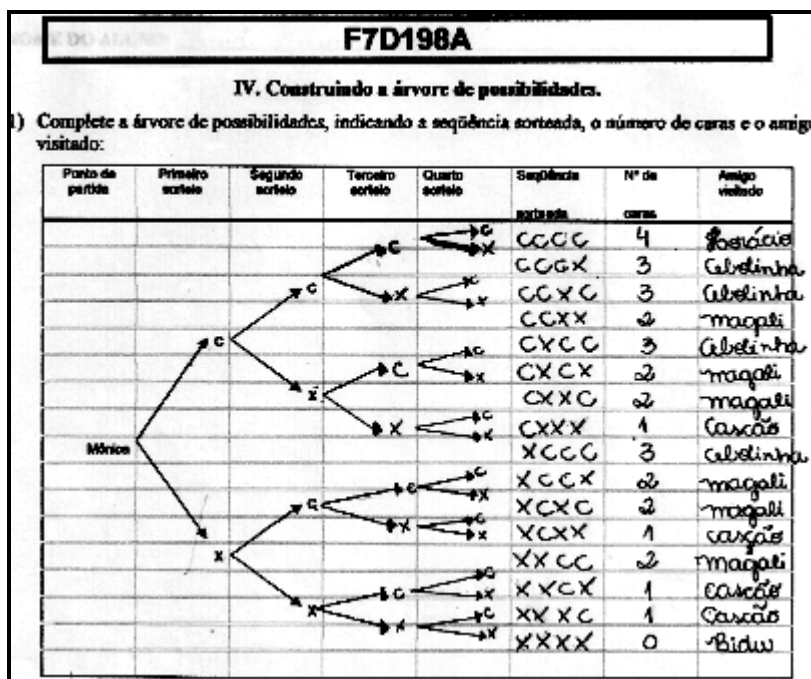


FIGURA 92 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D198AQ1

O uso da técnica e da tecnologia associada à atividade conduziu o entendimento das duplas de que a visita associada aos amigos não eram equiprováveis, dada a existência de quantidades diferentes de caminhos para que a Mônica visitasse um de seus amigos.

Supostamente, os estudantes realizaram a determinação do terceiro e quarto sorteios, dado que o primeiro e segundo sorteio ocorreria cara (CC). O mesmo foi imaginado considerando as configurações CX, XC e XX e, implicitamente praticaram a probabilidade condicional de eventos e que trata de uma teoria (⊕).

A sistematização dos resultados do diagrama, a regra de formação para que cada amigo fosse visitado, a formação da sequência sorteada, o número de caras associado aos quatro lançamentos das moedas, a existência de regularidades e a indicação do amigo a ser visitado, foi entendido por 88,6% das duplas, conforme mostra a Tabela 8.

ATIVIDADE 4		FICHA 7 E 8 - DIAGRAMA DA ÁRVORE				
QUESTÕES		Q1	Q2	Q3	Q4	TOTAL
%						
	CERTO	88,6	91,4	85,7	82,9	87,1
	ERRADO	11,4	2,9	14,3	14,3	10,7
	BRANCO		5,7		2,9	2,1

TABELA 8 – DESEMPENHO DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 4

A seguir, apresentamos alguns protocolos realizados e que de uma forma ou de outra, atingiram os objetivos propostos pela sujeição dos estudantes a realização dos passeios aleatórios, apesar dos equívocos.

Por exemplo, a resposta da dupla D18B é equivocada, pois anota em seus resultados dois caminhos CXCX, ao invés de CXCC e dois XXCX ao invés de XXCC. Consideramos que a resposta da dupla D38A também é equivocada, porque registrou em seus resultados, conforme consta na Figura 94, por apresentar dois caminhos CXCC, configurando 17 sequências. As respostas das duplas D28A, D128A e D188B também configuram equívocos semelhantes.

Conforme nossa análise a priori, estes estudantes apresentaram dificuldades na compreensão da não equiprobabilidade apresentada na experimentação, na percepção do espaço amostral associado ao experimento, assim como, o número de caminhos possíveis para que cada personagem fosse visitado pela Mônica.

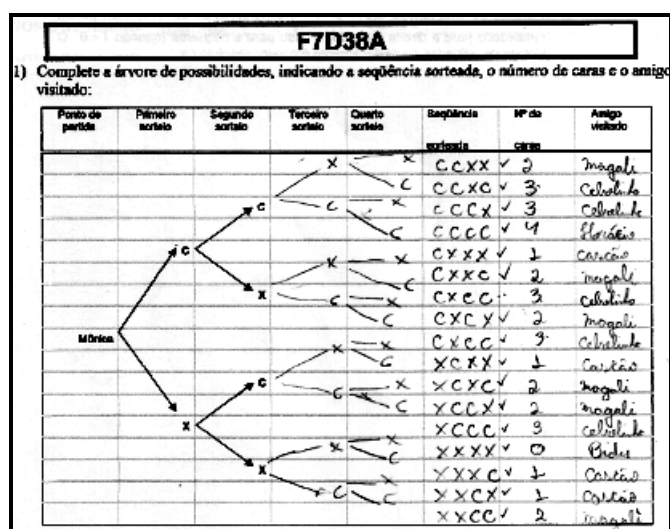


FIGURA 93 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D38AQ1

Houve também dificuldade na percepção da diferença existente entre esta situação e da experimentação aleatória, como forma de estimar a probabilidade de ocorrência dos eventos característicos de visita aos personagens.

No questionamento que solicitava a quantificação dos caminhos de todos os caminhos existentes, a resposta da dupla D128A indicou por meio de contagem, conforme o protocolo evidenciado na Figura 94, a existência de dezessete caminhos possíveis ao invés de dezesseis, e esta mesma dupla não confeccionou o diagrama da árvore de forma correta.

F7D128A

2) Quantos caminhos existem ao todo? 17

FIGURA 94 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D128AQ2

Apresentamos a Figura 95 evidenciando as duplas que não quantificaram os eventos do espaço amostral, ou seja, deixaram de preencher a existência de 16 caminhos (sequências) correspondendo a 5,7% e, configurando os protocolos mencionados na Tabela 8 com a indicação “em branco”.

F7D188A

2) Quantos caminhos existem ao todo? _____

F7D188B

2) Quantos caminhos existem ao todo? _____

FIGURA 95 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D188AQ2

A Tabela 8 indica que na análise quantitativa realizada e, conforme a produção dos estudantes, 91,4% deles realizou corretamente a atividade, sendo que comentaremos deste ponto em diante, a análise e sistematização dos resultados obtidos na elaboração e complementação da árvore de possibilidades, e que solicitou o preenchimento da TDF (Tabela 2).

A Tabela 8 mostra uma análise quantitativa dos resultados obtidos nas experimentações realizadas. Determinar os valores que os estudantes mencionaram em suas experimentações e simulações, serviram de forma implícita para qualificar a Probabilidade Laplaciana, como um modelo de determinação dos elementos do espaço amostral.

Conforme consta na Tabela 8, 85,7% das duplas preencheram corretamente a TDF, pois ao criar os caminhos aleatórios utilizando a árvore de possibilidades, o fizeram positivamente.

A Figura 96 apresenta o protocolo da D18A com a configuração do número de caminhos para a visita dos amigos Cebolinha e Cascão indicados de forma equivocada, influenciando a determinação do número de caminhos e a probabilidade de cada evento associado a atividades, tanto na forma relativa, quanto na decimal.

F7D18A			
3) Analisando e sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencha a Tabela 2:			
Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Mônica a seus amigos			
Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade pi
Horácio	1	$\frac{1}{16}$	0,0625
Cebolinha	3	$\frac{3}{16}$	0,1875
Magali	6	$\frac{6}{16}$	0,375
Cascão	5	$\frac{5}{16}$	0,3125
Bidu	1	$\frac{1}{16}$	0,0625
Total	16	$\frac{16}{16}$	0,9

FIGURA 96 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D18AQ3

A resposta da dupla D18A, na Figura 96, indicou o número de caminhos para visitar Cebolinha e Cascão, conforme a contagem daqueles obtidos na árvore de possibilidades, configurando o equívoco mencionado ao anotar duas sequência CXCX sendo que o correto seria CXCC e CXCX, e ainda, ao anotar o caminho XXCX duas vezes, sendo que o correto seria XXCC e XXCX.

F7D38A			
3) Analisando e sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencha a Tabela 2:			
Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Mônica a seus amigos			
Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade pi
Horácio	3	$\frac{1}{14}$	0,25
Cebolinha	4	$\frac{4}{14}$	0,285714
Magali	4	$\frac{4}{14}$	0,285714 0,25
Cascão	4	$\frac{4}{14}$	0,285714
Bidu	3	$\frac{1}{14}$	0,25
Total			

FIGURA 97 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D38AQ3

A resposta da dupla D38A indica 14 caminhos no total, sendo que na realização do diagrama da árvore, apresenta 17 seqüências, onde a XXCC indicada duas vezes configurando o protocolo da Figura 97. A tarefa, técnica e tecnologia foram utilizadas nesta elaboração, porém com equívocos.

A D128A indica 15 caminhos no total, sendo que ao considerar a realização do diagrama da árvore, deixou de anotar um dos caminhos possíveis de se visitar Magali e, configuraram erroneamente dois dos caminhos possíveis e isto aparece configurado na Figura 98.

F7D128A			
3) Analisando e sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencha a Tabela 2:			
Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Mônica a seus amigos			
Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade p _i
Horácio	1	1/17	0,0588
Cebolinha	4	4/17	0,235
Magali	5	5/17	0,294
Cascão	3	3/17	0,176
Bidu	2	2/17	0,117
Total	15	15/17	

FIGURA 98 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D128AQ3

Equívocos semelhantes cometeram as D168A, D208A e D188B e isto ocorreu na elaboração da atividade de construção da árvore de possibilidade. Ao conduzir seus trabalhos assim, as duplas citadas configuraram aqueles 14,3% de indivíduos que erraram a confecção da atividade deste ponto em diante (Fichas 7 e 8).

Novamente nos deparamos com aquele questionamento contido nas atividades anteriores, e que depois de analisar e sistematizar os resultados na tabela 2, indaga as duplas se mudariam de opinião quanto à questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”, se mudariam ou não de opinião indicando sua razão.

Reiteramos que ao final desta nossa análise, dedicaremos uma parte especial para analisar a percepção dos estudantes quanto à existência ou não de diferença entre a forma de realizar as visitas (predeterminado e aleatório).

Queremos apresentar alguns protocolos que mostram a ideia que as duplas têm sobre as visitas possíveis, as chances que os amigos têm de serem visitados e opiniões anteriores.

F8D58A
Depois que vocês analisaram e sistematizaram os resultados na tabela 2, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariamos porque pois os do canto são mais difíceis de serem visitados.

FIGURA 99 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D58AQ4

Na Figura 99, a resposta da dupla D58A evidencia a dificuldade que os amigos Horácio e Bidu têm de ser visitados e é nossa hipótese que os estudantes tenham respondido nesta direção, pelo motivo de perceberem a existência de diferentes probabilidades, configurada pela experimentação, pela modelagem e árvore de possibilidades.

F8D98A
4) Depois que vocês analisaram e sistematizaram os resultados na tabela 2, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariamos porque Porque a Magali sempre está no centro, e ela sempre vai ter mais chance do que os outros.

FIGURA 100 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D98AQ4

Já a resposta da dupla D98A indica que está na proximidade linear do ponto de partida a condição para que a Magali seja a mais visitada, conforme mostra o protocolo da Figura 100.

F8D168A
4) Depois que vocês analisaram e sistematizaram os resultados na tabela 2, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"
<input checked="" type="checkbox"/> NÃO mudariamos porque Quando se faz um árvore de possibilidades, todos têm a mesma chance.

FIGURA 101 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D168AQ4

A resposta dada pela dupla D168B menciona a justificativa da não mudança de opinião equivocando-se, conforme mostra a Figura 101, pois na confecção da árvore de possibilidade configuram-se e evidenciam-se ainda mais a diferença quanto ao número de visitas que cada amigo pode receber. É nossa

hipótese que a dupla aqui citada não percebeu que o pressuposto da equiprobabilidade não podia ser citado em seu relato e as dificuldades surgiram com o uso das notações.

Concordamos com Cazorla e Gusmão (2009), quando mencionam que as dificuldades são decorrentes da não compreensão de alguns conceitos envolvidos, de sua familiarização com as representações da probabilidade na forma de fração, número decimal ou porcentagem, assim como o uso de aproximações e símbolos.

FORMULÁRIO DO ALUNO: F8D188B

NOME DO ALUNO: F8D188B

4) Depois que vocês analisaram e sistematizaram os resultados na tabela 2, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?"

NÃO mudaríamos porque

FIGURA 102 – PROTOCOLO DA REALIZAÇÃO DA A4D188BQ4

Apresentamos ainda, a Figura 102 mencionando o protocolo da resposta dada pela dupla D188B, a fim de caracterizar o protocolo indicado como "EM BRANCO" na Tabela 8. Tratamos de explorar a praxeologia usual invertida envolvendo o conceito de probabilidade e amostragem, sendo que os protocolos apresentados são frutos da simulação e modelagem de eventos probabilísticos.

4.2.5 – ANÁLISE DAS "FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADES"

O início da atividade apresentou como tarefa, o preenchimento de um quadro comparativo do cálculo de probabilidades buscando o entendimento dos estudantes por meio de técnicas e tecnologias para diferenciar as formas de atribuir probabilidades.

Conforme apresentamos na Tabela 9 a seguir, 74,3% das duplas participantes de nossa pesquisa indicaram corretamente os valores a serem confrontados.

A confecção da Tabela 3 sugeriu a confrontação da probabilidade que partiu do diagrama de árvore (laplaciana) com os da experimentação (frequentista). É nossa hipótese que a tarefa citada (preenchimento da Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2) demandou atenção dos

estudantes e, indicamos o fato de algumas duplas não terem confeccionado uma das tabelas (ou as duas) corretamente, configurando 25,7% de equívocos indicados na Tabela 9.

ATIVIDADE 5		FICHA 9 E 10 - COMPARANDO AS DUAS FORMAS DE ATRIBUIR PROBABILIDADE							
QUESTÕES		T3	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	TOTAL
%									
CERTO		74,3	48,6	71,4	68,6	77,1	91,4	94,3	75,1
ERRADO		25,7	45,7	28,6	31,4	17,1	8,6	5,7	23,3
BRANCO			5,7			5,7			1,6

TABELA 9 – DESEMPENHO, EM PERCENTUAIS, DAS DUPLAS NA ATIVIDADE 5

Conforme se apresenta as respostas nos protocolos da Figura 103, a dupla D18A considerou apenas a tabela 2, visto que os valores informados foram configurados por meio da árvore de possibilidades e, assim sendo, não confrontou os resultados da experimentação com a modelagem, enquanto que a D68A considerou apenas os resultados de sua experimentação,.

F9D18A			F9D68A		
1) Preencham a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2: Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades			1) Preencham a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2: Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades		
Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)	Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)
Horácio	$\frac{0}{20}$	0,0625	Horácio	0,04	4%
Cebolinha	$\frac{2}{20}$	0,1875	Cebolinha	0,23	23%
Magali	$\frac{4}{20}$	0,375	Magali	0,43	43%
Cacão	$\frac{5}{20}$	0,2625	Cacão	0,23	23%
Bidu	$\frac{8}{20}$	0,0625	Bidu	0,09	9%
TOTAL	$\frac{20}{20}$	1	TOTAL	1,00	100%

FIGURA 103 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA TDF 3 - A58A

A D38A e D68A considerou os dados de sua experimentação para determinar as informações da coluna (pi), ou seja, deixou de comparar os resultados da Tabela 1 com a 2, e sendo assim, também não realizou a tarefa que serviria de base para realizarem a comparação solicitada. Já a D68A considerou os dados da experimentação para determinar as informações da coluna relacionada com a árvore de possibilidades, e assim sendo, também não comparou os resultados envolvendo a etapa experimental e da árvore de possibilidades, conforme mostra a Figura 103.

Na resposta da dupla D78A, D98A e D138A observamos que os estudantes realizaram o mesmo procedimento ao preencher a Tabela 3, deixando de considerar na coluna da “Frequência relativa”, ou seja, não utilizaram os resultados das suas experimentações ao sistematizar a Tabela 1, e a Figura 104 confirma o que mencionamos.

F9D78A			F9D148A		
1) Preenchem a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2: Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades			1) Preenchem a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2: Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades		
Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)	Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)
Horácio	1/6	0,0625	Horácio	1/6	0,0625
Cebolinha	1/6	0,25	Cebolinha	1/6	0,25
Magali	1/6	0,375	Magali	1/6	0,375
Caio	1/6	0,25	Caio	1/6	0,25
Bibi	1/6	0,0625	Bibi	1/6	0,0625
TOTAL	16/16	1,0	TOTAL	1/6	1,0

F9D188A			F9D208A		
1) Preenchem a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2: Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades			1) Preenchem a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2: Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades		
Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)	Amigo	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)
Horácio	0,03	0,0625	Horácio	0,07	0,16
Cebolinha	0,34	0,25	Cebolinha	0,3	0,25
Magali	0,25	0,25	Magali	0,37	0,375
Caio	0,33	0,25	Caio	0,16	0,25
Bibi	0,03	0,0625	Bibi	0	0,16
TOTAL	0,99	0,375	TOTAL	4,00	1,495

FIGURA 104 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA TDF 3 - A58A

Nos protocolos apresentados na Figura 104, a resposta da dupla D148A e D188A não apresenta os valores da linha que indica o total da frequência relativa (hi) e/ou da probabilidade (pi), corretamente, dados os problemas que surgiram na compreensão de regras de arredondamento .

De forma geral, os estudantes (45,7% das duplas) apresentaram dificuldade acentuada para compreender a simulação por eles realizada ao lançar a moeda, e a relação entre a frequência dos resultados nos quatro lançamentos simultâneos. Os estudantes que mencionamos (duplas), não perceberam que a primeira situação se sustentava pela experiência aleatória, enquanto que a segunda tinha como base a modelagem.

Ao responder ao questionamento “Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?”, argumentos superficiais foram apontados

pela maioria dos estudantes, e alguns destes são apresentados nos protocolos da Figura 105.

The figure shows four separate student protocols, each with a title and a question. The answers are handwritten in cursive.

- F9D48A**
1) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades:
Uma foi na prática e outra foi pela conta.
- F9D78A**
1) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades:
A é em fração (h) e a segunda é frequência relativa número de vezes que foi visitado: 2/30
- F9D118A**
1) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades:
A frequência relativa (h) isto para ser calculado em porcentagem, p' o inverso de probabilidade (P) isto em probabilidade, mais de possibilidades há
- F9D78B**
1) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades:
Uma é fracionária e a outra é decimal

FIGURA 105 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A58AQ1

Apenas 48,6% das duplas entenderam a situação apresentada determinando a probabilidade e evidenciando a modelagem teórica, conforme mostra a Tabela 9. As duplas D48B e a D128B não responderam ao questionamento, configurando os 5,7% dos protocolos considerados perdidos.

O modelo descrito pela árvore de possibilidades (diagrama da árvore) proporcionou o entendimento dos estudantes de que todos os caminhos possíveis foram determinados pela construção da árvore de possibilidades, que a possibilidade de cada amigo ser visitado pela Mônica foi diferenciada pelo número de caminhos que poderia utilizar para visitar seus amigos.

Ao responder ao questionamento “Analisando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta?”, a maioria dos sujeitos de nossa pesquisa indicou a forma frequentista de realizar os sorteios a mais correta e, atribuímos sua escolha ao fato de terem utilizado o lançamento de moedas um grande número de vezes, e por ter sido o procedimentos que envolveu os estudantes de forma mais positiva (lúdica) na realização das atividades (tarefa/técnica/tecnologia).

Como menciona Lopes e Ferreira (2004),

[...] o ensino da Probabilidade e da Estatística na escola básica contribui para que os estudantes tenham uma formação que os permita realizar uma leitura diversificada da realidade à medida que desenvolve a elaboração de questões para responder a uma investigação, que possibilita o fazer conjecturas, formular hipóteses, estabelecer relações, processos necessários à resolução de problemas.

Essa perspectiva exige uma prática pedagógica que promova a investigação e a exploração, tornando possível aos estudantes tomarem consciência de conceitos estatísticos e probabilísticos, que os auxiliem em sua leitura de mundo. (LOPES e FERREIRA, 2004, p.2)

Compreendemos que o ensino da Probabilidade é desprovido de situações que favoreçam a manipulação de dados, que possibilite aos estudantes entender situações de sua realidade, utilizando objetos reais ou envolvendo modelos.

Entendemos que a situação determinada pela utilização do esquema (diagrama de árvore), de certa forma dificultou o entendimento dos estudantes quanto à comparação dos resultados obtidos nas duas formas de determinação da probabilidade, pois 28,6% das duplas apresentaram dificuldades para confeccionar a TDF e, posteriormente, utilizar seus levantamentos relacionados à frequência relativa e a probabilidade, com a finalidade de responder aos questionamentos.

De forma geral, os estudantes tiveram dificuldade em comparar as duas formas de calcular a probabilidade estimada a partir da frequência observada (experimentação) e a frequência esperada (árvore de possibilidades). No entanto, consideramos que as duplas se posicionaram corretamente diante dos resultados mencionando, indiretamente, o processo envolvendo a frequência observada como a forma mais adequada de atribuir probabilidades, conforme apresentamos na Figura 106.

The image shows two questionnaires, F9D148A and F9D188B, which are part of a protocol for the A58AQ2 task. Both questionnaires ask the question: "2) Analisando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta?" (Analyzing the results, for you, which of these two ways of calculating probabilities is the most correct?). In the first questionnaire (F9D148A), the response is "Da frequência observada" (From the observed frequency). In the second questionnaire (F9D188B), the response is "Da frequência observada" (From the observed frequency).

FIGURA 106 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A58AQ2

A seguir, na Figura 107, apresentamos as respostas em forma de protocolos das duplas D18A, D78A, D138A, D168A e D48B, analisando as duas situações e, aquela relacionada à experimentação aleatória foi a que mais chamou a atenção dos estudantes, pela forma lúdica de realização.

F9D18A

2) Analizando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta? De fração, pois é mais fácil.

F9D78A

2) Analizando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta? A frequência relativa.

F9D138A

2) Analizando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta? A de fração, frequência relativa (h), pois a fração é mais exata.

F9D168A

2) Analizando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta? A frequência relativa.

F9D48B

2) Analizando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta? A de frequência relativa, pois é mais fácil e rápida de desenvolver.

FIGURA 107 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A5Q2

É nossa hipótese de que os estudantes indicaram que a forma fracionária de indicar a probabilidade dos eventos realizados é a mais correta de calcular, pelo fato de ter considerado a experimentação (momento em que os estudantes criaram com a situação seus resultados), o momento de interação com a situação apresentada e a percepção da tarefa, técnica e tecnologia utilizada, além do seu envolvimento com a situação lúdica. No questionamento solicitando que os sujeitos de nossa pesquisa analisassem os resultados obtidos por outra dupla, verificamos que 68,6% deles compararam de forma positiva os seus resultados e, além disso, entre aqueles 31,4% que respondeu de forma equivocada, consideramos por hipótese, que ao indicar a diferença dos

resultados, o fez observando as experimentações e a modelagem intra-duplas, conforme apresentamos na Figura 108.

F9D18A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <i>A probabilidade de colegas não diferentes, conclui-se que tem um consenso e os totais.</i>
F9D128A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <i>Que tem algumas diferenças, pois uma das duplas fez errado.</i>
F9D148A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <i>Que a probabilidade delas com a nossa é diferente.</i>
F9D68A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <i>Que todos devem estar iguais pois só existe um método.</i>
F9D208A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <i>Que os resultados não diferem.</i>
F9D188B
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <i>Que são diferentes.</i>

FIGURA 108 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A5Q3

As respostas apresentadas nos protocolos da Figura 109, indica as realizações das D68A, D128A e D138A, cujos registros configuram equívocos.

Merece destaque o protocolo da dupla D138A que ao comparar seus resultados aponta para o erro cometido pela dupla com quem compartilhou os resultados e comparações.

F9D68A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <u>Que todos devem estar iguais pois só existe um método</u>
F9D128A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <u>Que tem algumas diferenças, pois uma das duplas fez errado.</u>
F9D138A
3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? <u>Sejam as duplas possuem os mesmos resultados.</u>

FIGURA 109 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A58AQ3

Os sujeitos de nossa pesquisa compararam, analisaram e inter-relacionaram seus resultados e, considerando a Tabela 3, emitiram suas opiniões sobre uma possível estratégia de calcular a probabilidade, de forma mais justa.

Considerando que 77,1% dos sujeitos de nossa pesquisa justificaram suas escolhas, sociabilizando seus resultados com outras duplas, e ainda, que as experimentações foram realizadas nas mesmas condições, houve quem se equivocou ao verificar semelhanças ou proximidades entre os valores de suas composições, conforme apresentamos na Tabela 9.

As respostas representadas pelos protocolos da Figura 110 foram indicadas pelas duplas D148A, D128B, D148B e D188B e nelas, os estudantes se equivocaram dando respostas superficiais à questão 4, pois a forma sugerida na Ficha 1 (predeterminada) era condicionante para a possibilidade de Mônica ser justa ao realizar as visitas aos seus amigos (personagens).

Quanto à indicação de outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica, as duplas indicaram em sua maioria a forma sistemática (determinista) a forma mais justa de sortear um amigo a ser visitado pela Mônica, apenas 8,6% das duplas indicaram suas respostas contendo equívocos.

F9D148A
4) Vocês acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos?
<input checked="" type="checkbox"/> Sim, porque Porque eles pediram sua visitação como a mesma chance.
F9D128B
4) Vocês acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos?
<input checked="" type="checkbox"/> Sim, porque Pois é a Base de sorte e quem fez a escolha foi a Base de sorte.
F9D148B
4) Vocês acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos?
<input checked="" type="checkbox"/> Sim, porque Pois não tem como se não chegar a visitar alguém, não pela sorte, assim os amigos dela não ficam brava
F9D188B
4) Vocês acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos?
<input checked="" type="checkbox"/> Sim, porque Pois todos tem chances iguais

FIGURA 110 – PROTOCOLO CONJUNTO DE ELABORAÇÃO DA A5Q4

A resposta da dupla D28A, por exemplo, indica de forma equivocada sua opinião, conforme mostra a Figura 111, pois a altura ou a idade não são parâmetros mencionados em nossa atividade, de forma que pudessem utilizar como justificativa em seus protocolos.

F10D28A
5) Caso vocês achem injusta essa distribuição, vocês poderiam indicar uma outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica?
altura ou idade

FIGURA 111 – PROTOCOLO DE ELABORAÇÃO DA A5D28AQ5

A resposta da dupla D68A que apresentamos no protocolo mencionado da Figura 112, temos como sugestão de outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica, utilizando um dado de seis faces para realizar os sorteios e, atribuem a função de descanso para Mônica se acaso a face 6 for sorteada.

F10D88A	
5)	Caso vocês achem injusta essa distribuição, vocês poderiam indicar uma outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica?
	<i>Usando um dado, sendo que ele vai: 1 - Perácio 2 - Celso / 3 - Drago / 4 - Cássio / 5 - Bidua e quando cair no 6, ela fica encarando em casa.</i>

FIGURA 112 – PROTOCOLO DE ELABORAÇÃO DA A5D88AQ5

A resposta da dupla D188B, apresentada na Figura 113 não sugere outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica de forma clara e, consideramos que esse também é uma indicação equivocada, pois não mostra uma estratégia clara para a metodologia de escolha do amigo a ser visitado.

F10D188B	
5)	Caso vocês achem <u>injusta</u> essa distribuição, vocês poderiam indicar uma outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica?
	<i>Todos devem sempre numerar</i>

FIGURA 113 – PROTOCOLO DE ELABORAÇÃO DA A5D188BQ5

Acreditamos que para estas duplas o conceito de amostra aleatória e a modelagem não ficou transparente e, é nossa crença que seja necessário uma replicação da experiência, utilizando o tempo de forma mais adequada na aplicação da sequência de ensino.

4.2.6 – RESPOSTAS ÀS QUESTÕES A1Q5, A2Q6 E Q10, A3Q8 E A4Q4.

A partir de então, queremos analisar as respostas dadas pelos estudantes, que solicitava em cada etapa de nossa pesquisa, depois de sistematizar os resultados, se mudariam de opinião quanto à questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”, se mudariam ou não de opinião indicando sua razão. Utilizaremos aqui, os mesmos procedimentos indicados por Pagan (2010), em que compara o desempenho de um grupo (GI) por questão em relação ao tipo de ação requerida.

Os questionamentos a que nos referimos aparecem no desenvolvimento das etapas de nosso estudo como A1Q5, A2Q6, A2Q10, A3Q8 e A4Q4, e compararemos as atividades aos pares, como segue: (A1Q5 e A2Q6), (A2Q6 e A2Q10), (A2Q10 e A3Q8) e, por fim, (A3Q8 e A4Q4). Esta análise se dará na verificação da concentração das respostas na diagonal (0,0 e 1,1) ou se

consideradas as respostas das duplas, as mesmas se apresentam na diagonal (0,1 e 1,0).

Com a finalidade de aferir uma maior confiabilidade aos resultados obtidos em nosso estudo, com relação evolução da concepção de probabilidade, a partir da intervenção realizada, utilizamos o teste estatístico McNemar. Assim:

$H_0 : p = 0$ não houve mudança significativa de opinião.

E como hipótese alternativa:

$H_1 : p > 0$ houve mudança significativa de opinião

Iniciamos nossa análise na comparação das respostas dadas na questão cinco da atividade de “Contextualização” (A1Q5) e a questão seis, da atividade de “Experimentação” (A2Q6), conforme Quadro 11.

O teste apontou a existência de uma mudança estatisticamente significativa entre os resultados das questões A1Q5 e A2Q6 $\left[\chi^2(34) = 27,034; p = 0,000 \right]$, uma vez que na Contextualização, a maioria respondeu que todos os amigos tem a mesma chance de serem visitados pela Mônica. Após a experimentação 29 duplas responderam que não, mudando sua opinião. Este fato mostra a importância da experimentação na formação do conceito de probabilidade.

QUADRO 11 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A1Q5 E A2Q6

A1Q5 \ A2Q6	ERROU (0)	ACERTOU (1)	TOTAL
ERROU (0)	6	29	35
ACERTOU (1)	0	0	0
TOTAL	6	29	35

Confirma-se ainda que, ao responderem à questão A1Q5, os estudantes consideraram os resultados obtidos no lançamento da moeda {Cara (C); Coroa (X)}, ao invés da observância do números de caminhos existentes e que só foram percebidos ao realizarem a Experimentação (segunda etapa de nossa pesquisa) e as respostas dadas na A2Q6. Veja que, dentre as trinta e cinco

duplas de estudantes que indicaram que as personagens tinham a mesma probabilidade de serem visitados por Mônica, vinte e nove delas mudaram de opinião depois de realizar a experimentação.

Ao compararmos a resposta da questão A2Q6 com a A2Q10, na atividade de Experimentação, solicitamos a sistematização dos resultados obtidos na elaboração da TDF (Tabela 1 – Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica) e com isto, a determinação da probabilidade de Mônica visitar Magali, Horácio, Bidu e Cascão. O teste aponta que não existe mudança significativa na opinião dos alunos ($p = 0,125$), e, dentre os trinta e cinco estudantes que indicaram que as personagens tinham a mesma probabilidade de serem visitados por Mônica, vinte e nove deles mudaram de opinião depois da realização da experimentação. Isto era esperado, pois a TDF tinha apenas como função a sistematização dos dados.

QUADRO 12 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A2Q6 E A2Q10

A2Q10 \ A2Q6	ERROU (0)	ACERTOU (1)	TOTAL
ERROU (0)	0	6	6
ACERTOU (1)	1	28	29
TOTAL	1	34	35

Analisando o papel da modelagem matemática, na evolução da apropriação do conceito de probabilidade, por meio da exploração dos caminhos desenhados no croqui, observando os resultados da questão três da atividade de Experimentação (A2Q10), com os da questão oito da atividade de Modelagem (A3Q8), conforme consta no Quadro 13.

Notamos que trinta e duas duplas dentre as trinta e cinco apontaram para o entendimento do questionamento e, da proposta envolvendo modelos que possam representar e interpretar a realidade, ou seja, o domínio teórico. É nossa hipótese que as respostas sistematizadas pela Modelagem, a construção da TDF e a formalização possam ter corroborado na percepção de que as probabilidades não são iguais, mantendo firme essa nova opinião, não havendo mudanças de opinião ($p = 0,625$).

QUADRO 13 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A2Q10 E A3Q8

A2Q10 \ A3Q8	ERROU (0)	ACERTOU (1)	TOTAL
ERROU (0)	0	1	1
ACERTOU (1)	3	31	34
TOTAL	3	32	35

Com a realização da Experimentação os estudantes já haviam tido a oportunidade de verificar que o número de caminhos possíveis para visitar cada uma das personagens era diferente e, com a atividade de Modelagem, esta percepção se confirmou.

Finalizando nossa análise quanto ao questionamento sobre a opinião: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”, passamos a comparação entre as questões A3Q8 (Modelagem) e A4Q4 (Árvore de Possibilidades).

Apesar de algumas duplas mudarem de opinião, dado que na comparação anterior (Quadro 14), já havíamos notado uma diminuição do número de duplas que haviam entendido que o número de caminhos eram diferentes e os amigos de Mônica não apresentavam a mesma chance de serem visitados (de 34 para 32), com a construção da Árvore de Possibilidades (Atividade IV) esse número diminuiu ainda mais (de 32 para 29 e, uma resposta em branco).

QUADRO 14 – COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS A A3Q8 E A4Q4

A3Q8 \ A4Q4	ERROU (0)	ACERTOU (1)	TOTAL
ERROU (0)	1	1	2
ACERTOU (1)	4	28	32
TOTAL	5	29	34

O teste apontou que não há mudança estatisticamente significativa entre os resultados da comparação entre as questões A3Q8 (Modelagem) e A4Q4 (Árvore de Possibilidades), em que $p = 0,375$ ($p > 0$).

Em síntese, podemos concluir que os alunos iniciam com uma forte visão de equiprobabilidade para calcular as probabilidades dos amigos serem visitados. Mas já desde a experimentação, eles percebem que não é bem assim e que essa probabilidade depende dos caminhos possíveis que levam a Mônica a seus amigos. A partir disso, as outras atividades, como o desenho dos caminhos no croqui ou na exploração do diagrama da árvore, corroboram esses resultados. Embora, se observe que algumas duplas “regridem” na suas opiniões, mas isso está dentro do esperado.

Assim como Cazorla e Gusmão (2009), os trabalhos desenvolvidos pelos estudantes foram promissores e entendemos que, para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico há a necessidade de um melhor planejamento para a aplicação da mesma e, que seja dado um retorno aos envolvidos por meio de uma devolutiva, discussões e conclusões, a fim de esclarecer as dúvidas que surgiram.

Conforme menciona Lopes (1999), o estudo probabilístico é uma excelente oportunidade para mostrar aos estudantes como aplicar a Matemática para resolver problemas reais e que para isso é preciso que o ensino das noções probabilísticas aconteça mediante uma metodologia heurística e ativa, por meio de propostas envolvendo problemas concretos e da realização de experimentações reais, simuladas ou com a utilização da modelagem.

.Inferimos que, a sugestão de Lopes (2005) mereceu destaque, pois os estudantes realizaram positivamente as atividades considerando o contexto sugerido, mediante suas observações, dada a construção dos eventos possíveis por meio de experimentação concreta, da construção das Tabelas de Distribuição de Frequências, da coleta e organização dos dados observados, a modelagem matemática e, principalmente, considerando a organização praxeológica de forma invertida, conforme sugestão de Nagamine, Henriques e Cazorla (2010).

4.2.7 – A OPINIÃO DOS ESTUDANTES E A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Queremos evidenciar as opiniões e preferências dos estudantes, quanto às atividades que realizaram, a partir deste ponto. No questionamento “Vocês gostaram das atividades sobre os passeios da Mônica”, apenas 5,7% dos estudantes disseram não ter gostado a atividade.

F10D168A	
6) Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica?	<u>NÃO, (maneira ruim de explicar (que vem de um assunto) depois).</u>
Se SIM, o que elas tiveram de interessantes?	
Se NÃO, o que elas tinham de chata?	<u>Freqüência repetitiva.</u>

FIGURA 114 – OPINIÃO DA D168A SOBRE A ATIVIDADE

A resposta da dupla D168A, por exemplo, atribuiu ao fato de algumas perguntas repetitivas serem determinantes para que não gostassem da atividade, conforme mostra a Figura 114.

Veja que na Tabela 9, configura-se que 94,3% dos nossos sujeitos de pesquisa gostaram da atividade e destacamos um rol de opiniões mencionadas nos protocolos das atividades, em suas diversas etapas, realizadas e respondidas.

Apresentamos na Figura 115 os protocolos da resposta elaborada pelas duplas D18A, D28B, D118A e D58B, que destacam o fato de que aprender brincando, de forma diferente e divertida serviu de condicionante para os estudantes assimilarem o conteúdo. Há ainda, destaques quanto ao ambiente, material utilizado, assuntos trabalhados e, forma de tornar sociável resultados e ideias⁴⁰.

⁴⁰ Transcrição dos relatos dos alunos: “porque aprendemos na prática sobre probabilidade”, “aprendemos mais sobre matemática – os gráficos e as caras e coroas”, “Porque é uma forma de estudar e se divertir ao mesmo tempo”, “pois foi uma aula interativa”, “ensinou o conteúdo de forma lúdica”, “a diferença e que as outras são muito tensas”, “as varias possibilidades de visitar um amigo”, “Sim, pois quando aprendemos algo em que se mistura com diversão, o aprendizado e mais fácil”, “Sim, achamos interessantes, complexas, relaxantes e gostaríamos de fazer novamente... o conteúdo, a forma com que foram aplicadas e o capricho do professor”, “a probabilidade”, “Sim, pois achamos uma forma diferente e de certa forma divertida para estudarmos probabilidade”, “a chance de aprofundar os conhecimentos em probabilidades”, “é

F10D18A
6) Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? <i>Sim, pois é uma forma diferente e divertida de aprender.</i>
Se SIM, o que elas tiveram de interessantes? <i>A forma de aprender brincando.</i>
F10D28B
6) Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? <i>Sim, eu acho legal e nós gostamos da aula mais dinâmica, foi muito interessante, parecia um desafio.</i>
Se SIM, o que elas tiveram de interessantes? <i>eu gostei de fazer as possibilidades e de mudar a rotina da aula.</i>
F10D118A
6) Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? <i>Sim, pois foi interessante ao construir a árvore de possibilidades e as tabelas.</i>
F10D58B
6) Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? <i>Sim, foi uma aula muito lúdica e ainda experimental, uma das melhores aulas sobre probabilidade.</i>
Se SIM, o que elas tiveram de interessantes? <i>Estávamos brincando e ainda aprendendo; essa foi a aula mais interessante de todas.</i>

FIGURA 115 – OPINIÃO CONJUNTA SOBRE A ATIVIDADE⁴¹

Para responder a questão que busca destacar, qual (ou quais) dentre todas as atividades realizadas foi a mais legal, destacamos a Figura 116 com os protocolos de quatro duplas, que destaca as escolhas realizadas pelos estudantes.

A etapa de experimentação (Atividade II – Fichas 2, 3 e 4) foi a que mais envolveu os estudantes, totalizando 89% da preferência. Note que 8% dos sujeitos de pesquisa não responde nossa indagação, enquanto que outros 3%

uma maneira mais fácil de aprender”, “a gente aprendeu mais e se comunicou com os colegas”, “sim, pois executamos os cálculos de forma divertida”, “misturamos formas diferentes de atribuir probabilidades”.

⁴¹ Transcrição dos protocolos: D18A - Sim, pois é uma forma diferente e divertida de aprender; A forma de aprender brincando. D28B – Sim, eu achei legal e nós gostamos da aula mais dinâmica, foi interessante, parecia um desafio; eu gostei de fazer as possibilidades e de mudar a rotina da aula. D118A – Sim, pois foi interessante ao construir a árvore de possibilidades e as tabelas. D58B – Sim, foi uma aula muito lúdica e ainda experimental, uma das melhores aulas sobre probabilidade; Estávamos brincando e ainda aprendendo; essa foi a aula mais interessante de todas.

mencionam que apenas a atividade envolvendo a árvore de possibilidades merece destaque na aprendizagem.

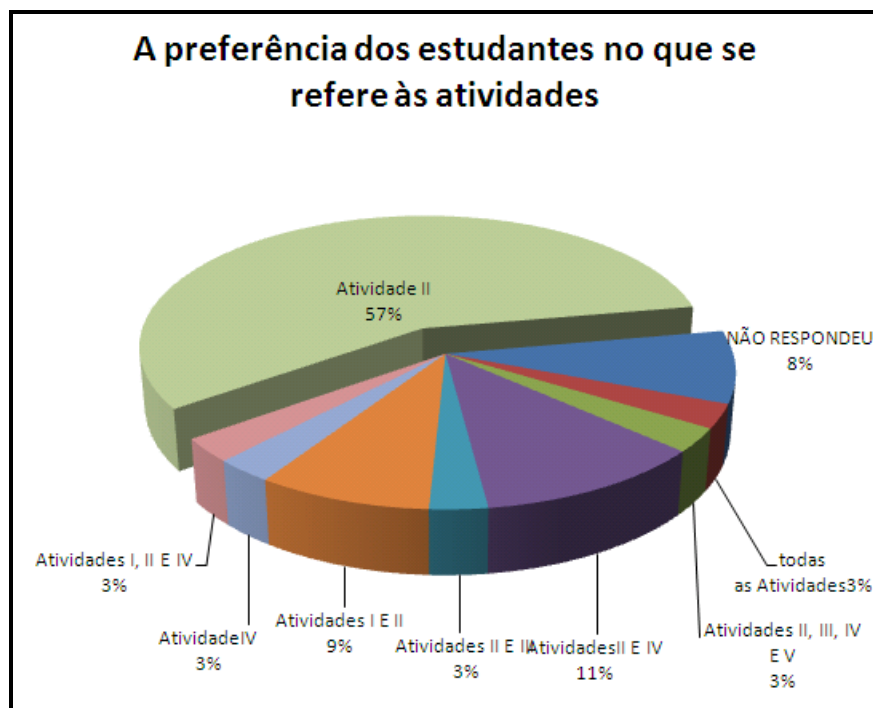


FIGURA 116 – PREFERÊNCIA DOS ESTUDANTES E AS ATIVIDADES TRABALHADAS
Fonte: Respostas dos estudantes do 8º ano A e B.

Para responder a questão que busca destacar, qual (ou quais) dentre os assuntos relacionados às atividades “Os passeios aleatórios da Mônica”, foi internalizado em forma de aprendizagem, apresentamos a Figura 116, no formato de um gráfico de setores, e segundo seus protocolos, a maioria dos estudantes elegeu a probabilidade como o assunto que favoreceu sua aprendizagem.

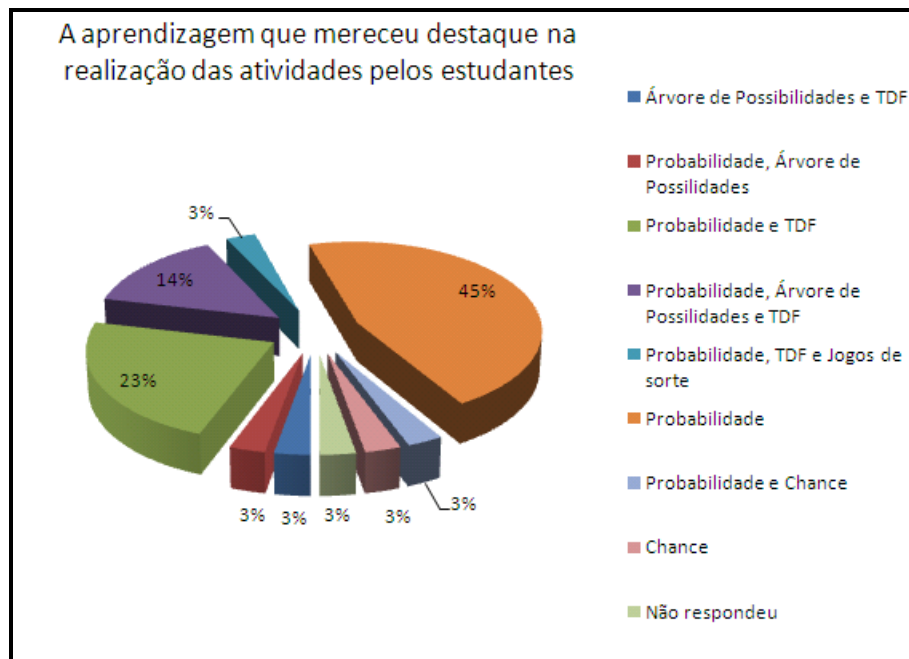


FIGURA 117 – PREFERÊNCIA DOS ESTUDANTES E OS ASSUNTOS TRABALHADOS
 Fonte: Respostas dos estudantes do 8º ano A e B.

Observando o gráfico apresentado na Figura 117, apenas 9% dos sujeitos de nossa pesquisa não elegeram a probabilidade como o assunto que mereceu destaque em sua aprendizagem, por não ter respondido a questão, ou por ter dado ênfase a assuntos correlacionados: Árvore de possibilidade, TDF e/ou Chance.

De modo geral, entendemos que a intervenção de ensino sobre Probabilidades por meio da sequência de ensino envolvendo a experimentação aleatória e a modelagem apresentada por Cazorla e Santana (2006), contribuiu com a aprendizagem dos estudantes envolvidos em nossa pesquisa.

Inferimos que, a sugestão de Lopes (2005) mereceu destaque, pois os estudantes realizaram positivamente as atividades considerando o contexto sugerido, mediante suas observações, dada a construção dos eventos possíveis por meio de experimentação concreta, da construção das Tabelas de Distribuição de Frequências, da coleta e organização dos dados observados, a modelagem matemática e, principalmente, considerando a organização praxeológica de forma invertida, conforme sugestão de Nagamine, Henriques e Utsumi (2009).

Capítulo V

Considerações Finais

Objetivamos com o presente trabalho investigar as contribuições que uma sequência de ensino, aplicada em sala de aula no sentido inverso da praxeologia escolar usual, traria para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade.

5.1 – REVISITANDO O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE “OS PASSEIOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA”

Utilizamos em nosso estudo a praxeologia de Chevallard (1992) no sentido invertido, buscando compreender a influência da estrutura metodológica de condução na aprendizagem dos conceitos trabalhados.

Nossos estudos foram realizados com duas turmas de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da Rede Privada de Ensino da cidade de São Paulo, escolhidas ao acaso e realizado com todos os alunos de cada uma delas, sendo que estas foram escolhidas entre as quais lecionávamos.

Para atingirmos nossos objetivos de estudo, planejamos cientificamente falando, as etapas de realização das atividades com a finalidade de responder a problemática de nossa dissertação, gerada a partir da questão: “Quais as contribuições que uma sequência de ensino, aplicada em sala de aula no sentido inverso da praxeologia usual traz para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade?”

5.1.1 – APRESENTAÇÃO GERAL

No Capítulo I apresentamos e discutimos as pesquisas voltadas ao ensino da Estatística e, em particular, à Introdução ao ensino e aprendizagem de conceitos relacionados à Probabilidade. Destacamos os estudos de Batanero (2001), de Cazorla e Santana (2006), de Cazorla e Gusmão (2009), de Nagamine, Henriques e Cazorla (2010) por tratarem especificamente a aleatoriedade, modelagem, simulação e das atividades “Os passeios aleatórios da Mônica: atividade para ensinar conceitos básicos de probabilidade”.

O Capítulo II foi dedicado a fundamentação teórica de nosso estudo a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, por ser uma contribuição importante para a Didática da Matemática com foco nas organizações praxeológica-didática, voltadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas, por estudar as condições de realização e funcionamento de sistemas didáticos relacionados ao sujeito-instituição-saber.

No desenvolvimento do Capítulo III apresentamos a metodologia desenvolvida no estudo e falamos inicialmente sobre a atividade “Os passeios aleatórios da Mônica”, proposta por Cazorla e Santana (2006), inspirado no trabalho de Fernandez e Fernandez (1999). Em seguida, o trabalho desenvolvido por Nagamine, Henriques e Cazorla (2010) que tratou da análise praxeológica das atividades no sentido não usual, utilizado em nosso trabalho de pesquisa.

Apoiado nas ideias teóricas, nas leituras correlacionadas ao nosso estudo e nos estudos de Rudio (2008), estabelecemos que nossa pesquisa fosse uma pesquisa ação, pois realizamos uma intervenção e este autor menciona que a pesquisa experimental estuda a relação entre fenômenos e procura saber se um é causa do outro.

Finalmente, no Capítulo IV dedicamos ao desenvolvimento de nossas análises, onde apresento e analiso as atividades “Os passeios aleatórios da Mônica”: atividade para ensinar conceitos básicos de probabilidade, com base nos estudos da TAD, segundo nosso parecer e aqueles realizados pelos estudantes.

Organizaremos a partir daqui, as conclusões finais de nossa dissertação, a fim de proporcionar uma melhor apresentação das conclusões de nossos estudos. Primeiro, sintetizaremos os principais resultados encontrados; em seguida buscaremos responder a nossa questão de pesquisa e seus desdobramentos e por último, dedicaremos algumas linhas para propor reflexões para futuras pesquisas envolvendo o tema estudado. Trata-se, inclusive, de sugerir outras intervenções de ensino envolvendo “Os passeios aleatórios da Mônica”, em apoio ao projeto “AVALE” e pesquisas ligadas ao Grupo “REPARE”.

5.1.2 – RESPOSTA À QUESTÃO DE PESQUISA

Ao iniciar este trabalho, mencionamos as dificuldades vivenciadas ao longo do tempo em que realizamos nossa atividade docente e, principalmente no ensino e aprendizagem envolvendo Probabilidades.

Considerando os resultados evidenciados, e partindo do pressuposto que queríamos investigar se a experimentação determinística e aleatória poderia ser entendida e diferenciada por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, tomando como referência a atividade de ensino “Os passeios aleatórios da Mônica”, de que queríamos verificar como os alunos realizariam a modelagem matemática com base na experimentação e observação de eventos, podemos enunciar que os estudantes:

TOMARAM POR BASE A EXPLORAÇÃO DA IDEIA DE PROBABILIDADE COM BASE NA SITUAÇÃO-PROBLEMA APRESENTADA, IDENTIFICANDO E VALIDANDO POSITIVAMENTE A AVALIAÇÃO DAS POSSIBILIDADES DE COMBINAR OS ELEMENTOS DE CADA EVENTO, A CARACTERIZAÇÃO DE SUAS ESTRATÉGIAS PESSOAIS E COLETIVAS.

EXAMINARAM A PERSPECTIVA TEÓRICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA, COMO METODOLOGIA QUE CONTRIBUIU PARA A AMPLIAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS ENVOLVENDO CONCEITOS INTRODUTÓRIOS DE PROBABILIDADES.

JUSTIFICARAM O RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO, MEDIANTE COLETA DE DADOS, ORGANIZAÇÃO, ANÁLISE, FORMULAÇÃO DE SEUS ARGUMENTOS, INFERÊNCIAS E REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS.

Apesar de estruturarmos o trabalho na contextualização, no lúdico, na experimentação, houve etapa de nosso estudo que configurou dificuldade no entendimento pelas duplas, no momento que deixaram de usar o intuitivo e passaram para a abstração de conceitos envolvendo probabilidades.

A atividade de ensino “Os passeios aleatórios da Mônica: atividade para ensinar conceitos básicos de probabilidade apresentou situações familiares ao cotidiano dos estudantes e, no desenvolvimento do processo de modelagem apresentou situações em termos simples (naturais) da língua natural”.

Buscando responder a pergunta: **“COMO OS ESTUDANTES DIFERENCIAM A EXPERIMENTAÇÃO DETERMINÍSTICA DA ALEATÓRIA, A PARTIR DA SEQUÊNCIA DE ENSINO?”**, defendemos a ideia de que outras experiências sejam realizadas e, de forma contextualizada, pois os estudantes evoluíram no entendimento com a situação apresentada, estabilizaram sua aprendizagem.

Considerando a indagação mencionada na introdução de nosso trabalho **“COMO OS ALUNOS REALIZAM A MODELAGEM MATEMÁTICA COM BASE NA EXPERIMENTAÇÃO E OBSERVAÇÃO DE EVENTOS?”**, entendemos que a situação serviu de preparação para que de uma forma mais evidente e futuramente, pudéssemos propor outras situações-problema matemáticos envolvendo conceitos probabilísticos abstratos, convidando os estudantes a descrever uma realidade mais complexa, segundo a proposta de modelagem.

Por fim, esperávamos que os estudantes, constituídos por suas duplas, traduzissem este modelo em termos matemáticos, auxiliando-os na interpretação das perguntas propostas, que resolvessem e analisassem por meio de protocolos, contratualmente falando, e isto se evidenciou na realização de nossa pesquisa.

Quanto à questão: “Quais contribuições da atividade envolvendo a modelagem matemática para ampliar a aprendizagem dos alunos quanto aos conteúdos abordados?”, entendemos que os estudantes produziram os comentários de seus resultados, conforme consta nas figuras apresentadas ao

longo de nossa análise (protocolos), e acreditamos ser necessária a apresentação da situação em outro momento, além daqueles cinco encontros que falamos em nossa metodologia.

Para responder ao último desdobramento da questão de pesquisa, “Como os alunos justificam seu raciocínio probabilístico, sua forma de coleta dos dados, sua organização e análise, assim como, a formulação de argumentos, inferências convincentes e representações matemáticas realizadas?”, entendemos que os estudantes podem realizar a descrição de outro tipo de abstração da realidade, com a finalidade de simplificar determinadas escolhas, e reter o que foi relevante, no que diz respeito ao problema estudado.

Foi nesta descrição, chamada de visão teórica, que os estudantes apresentaram maior dificuldade, pois tratou do conhecimento científico com base em modelo probabilístico pré-concebido, na apreciação precisa do que era realmente relevante.

Entendemos que a formação de cada distribuição de probabilidades, formas alternativas de expressar probabilidades (probabilidade em notação decimal, por exemplo) encaminhou a imaginação dos estudantes a analisar a situação frequentista e laplaciana de atribuir probabilidades envolvendo a modelagem matemática (probabilística).

5.2 – CONCLUSÕES

Concluimos que os estudantes evoluíram no entendimento ao confrontar a probabilidade com os resultados da experimentação (probabilidade frequentista) e aquela calculada a partir do diagrama da árvore (probabilidade laplaciana), tornando claro o significado da atribuição de probabilidades por meio de uma experimentação aleatória e outra, pela modelagem teórica.

O entendimento do conceito de amostra aleatória e o modelo teórico, também foram valorizados. Os valores mencionados na linha que indica o total figuraram na forma fracionária e decimal, e as aproximações realizadas pelos estudantes influenciaram os resultados mencionados na linha totalizadora, pois é nossa hipótese que os estudantes não têm conhecimentos prévios sobre regras de arredondamento.

O PCN, PCN+ e PCNEM mencionam em seu corpo que aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, instrumentalizando e estruturando o pensamento dos estudantes, capacitando-os para compreender e interpretar situações, além de apropriar-se de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e contribuir para sua formação. As respostas mencionadas pelos sujeitos de nossa pesquisa incorporam parte do que citamos aqui, no desenvolvimento das atividades.

Quanto a nossa questão de pesquisa, relacionada à TAD de Chevallard (1992), queremos ressaltar os trabalhos já realizados, que serviram como sustentação teórica para o desenvolvimento de nossa dissertação, consta em nosso referencial teórico.

Então, queremos responder a indagação que segue, entendendo que qualquer assunto matemático, depende da metodologia de aplicação do assunto, de sua introdução como meio de aprendizagem, conforme menciona Pires (2009).

Quais as contribuições que uma sequência de ensino, utilizada em sala de aula no sentido inverso da praxeologia usual traz, para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade?

Considerando a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, entendemos que os estudantes buscaram caracterizar a tecnologia da técnica por meio de suas resoluções, e a inversão praxeológica contribuiu para justificar a teoria probabilística envolvida em nosso estudo. A tecnologia usada buscou descrever e justificar, a técnica aplicada para cumprir corretamente as tarefas propostas.

Grande parte do sucesso dos estudantes na realização da atividade foi proveniente do conhecimento construído na realização das situações-problemas, onde a ênfase nos cálculos e fórmulas foi minimizada.

Os estudantes, de forma geral, compreenderam alguns conceitos básicos de probabilidade, que de forma contextualizada, buscaram o entendimento do

modelo teórico (fundamentado na hipótese) e do modelo empírico (fundamentado na experiência).

Entendemos que ao estruturar propriedades, comparar atividades experimentais e teóricas, fundamentados na praxeologia usual invertida pode facilitar aos estudantes, o reconhecimento da diferença entre a referência empírica e os modelos, mas se faz necessário um trabalho planejado além daquele tempo que realizamos nossa diagnose, a fim de que consigamos verificar se o processo de assimilação do tema foi consistente.

5.3 – SUGESTÕES PARA CONTRIBUIÇÕES FUTURAS

É de nossa crença que este estudo poderá trazer contribuições significativas para discussões científicas futuras a respeito da introdução aos conceitos de probabilidade por parte de professores e pesquisadores. Somos convictos de que a realização deste trabalho permitiu-nos responder nossa questão de pesquisa, assim como, seus desdobramentos mencionados no início desta pesquisa.

Partindo de nossa conclusão, sugerimos que seja realizado estudo futuro objetivando investigar de forma mais favorável, novas abordagens que propicie aos estudantes, conhecimentos básicos essenciais para compreender a ideia de probabilidade, articulando seus conhecimentos com outras áreas do conhecimento por meio da modelagem matemática, diminuindo assim, a distância existente entre a Matemática da escola e a relacionada com a vida.

Assim sendo, destacamos duas sugestões de pesquisa, sendo que a primeira proposta trata da realização de uma investigação pautada num maior número de encontros, destacando com mais ênfase as questões envolvendo a formalização dos conceitos de probabilidade desenvolvidos no trabalho dos estudantes, inclusive naquelas indicadas nossa análise, em que os estudantes apresentaram maiores dificuldades de entendimento.

A segunda proposta consiste na realização do trabalho utilizando a SAI existente nas escolas e com estudantes de uma escola pública, a fim de compararmos o desempenho de estudantes do ensino público e privado, destacar a construção gráfica e a análise das atividades pelos estudantes,

criando situação mais favorável para o trabalho com probabilidade, pois nosso pensamento corrobora com os de Cazorla e Gusmão (2009), Pires (2010), Pavan (2010) e Pereira (2010), dentre outros, que afirmam em suas pesquisas que o trabalho no ambiente computacional costuma ser mais dinâmico e, desta forma, permitiria maior vivência, entendimento menos atravancado e acurado das situações planejadas para a introdução ao ensino de probabilidades.

Referências

- ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da Didática da Matemática, Curitiba. UFPR, 2007.
- BATANERO, C. Significados de la Probabilidad em la Educación Secundaria. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: Um Report Iberoamericano - Universidad de Granada, Espana, 2005.
- BATANERO, C. Aleatoriedad, Modelización, Simulación: Ponencia presentada em la X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza, 2001. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Jaem2001.pdf>>. Acesso em: 20 out. 2009.
- BIEMBENGUT, M. S. e HEIN, N. Modelagem Matemática no Ensino, 8ª série. São Paulo: FTD, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998. MEC/SEF.
- _____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Ambiental. Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, 1998.
- _____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Brasília, 1999.
- CAZORLA, I.M.; SANTANA, E. dos S. Tratamento da Informação para o ensino Fundamental e Médio. Itabuna: Literarum. 2006.
- CAZORLA, I. M.; GUSMÃO, T. C. Uma análise semiótica dos passeios aleatórios da Mônica: atividade para ensinar conceitos básicos de Probabilidade. IV SIPEM. Brasília, 25-28 de outubro de 2009.
- COUTINHO, C. Q. S. Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement

informatique Cabri-géomètre II, Thèse Doctoral, Université Joseph Fourier, Grenoble I, França, 2001.

_____. Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Freqüentista, Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 1994.

_____. A percepção da aleatoriedade e o ensino de probabilidade: Um projeto para a formação continuada de professores. PUC, São Paulo, 2005.

LOPES, C.A.E.: A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular. Campinas, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação. Universidade de Campinas.

_____. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores. Cad. Cedes. Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: <<http://www.cedes.unicamp.br>>. Acesso em 15. Dez. 2009.

LOPES, C.A.E.; FERREIRA, A.C.: A estatística e a Probabilidade no Currículo de Matemática da Escola Básica – Artigo apresentado no VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, Pernambuco, Brasil – 15 a 18 de Julho de 2004. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR10.pdf>>. Acesso em 15 dez. 2009.

LOPES, C.A.E.; MORAN, R.C.C.P.: A estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o ensino fundamental - Artigo apresentado na Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística - Desafios para o Século XXI". Florianópolis, Santa Catarina, Brasil - 20 a 23 de Setembro de 1999. Disponível em: <<http://www.inf.ufsc.br/cee/pasta5/art2p5.html>>. Acesso em: 15 dez. 2009.

NAGAMINE, C. M. L.; HENRIQUES, A.; CAZORLA, I. M. Análise a priori dos passeios aleatórios da Mônica. X ENEM. Salvador, 7 a 9 de julho de 2010.

ORTIZ, J. SERRANO, L.; CAÑIZARES: Consideraciones sobre las ideas de aleatoriedad em alumnos de primaria y secundaria. Departamento de Didáctica de las matemáticas, Universidad de granada, 2005.

PAGAN, M. A. A Inderdisciplinaridade como proposta pedagógica para o ensino de Estatística na Educação Básica. Dissertação (MPEM) - PUC, São Paulo, 2010.

PEREIRA, S. A leitura e interpretação de tabelas e gráficos para alunos do 6º ano do ensino fundamental: Uma intervenção de ensino. Dissertação (MPEM) - PUC, São Paulo, 2010.

PESCUMA, D.; CASTILHO, A.P.F.: Referências Bibliográficas: Um guia para documentar suas pesquisas – Coleção Método, livro 1. Editora Olho d'água. São Paulo, 2005.

_____. Projeto de Pesquisa. O que é? Como Fazer? Um guia para a sua elaboração. Coleção Método, livro 1. Editora Olho d'água. São Paulo, 2005.

_____. Trabalho Acadêmico. O que é? Como Fazer? Um guia para suas apresentações – Coleção Método, livro 2. Editora Olho d'água. São Paulo, 2006.

PIRES, R. F. O uso da Modelação Matemática na construção do Conceito de Função. Dissertação (MPEM) - PUC, São Paulo, 2009.

RUDIO, F. V. Introdução ao projeto de pesquisa científica. 35. Ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

RUSSELL, B. Os Problemas da Filosofia – Filosofia e Educação: Uma escola para o século XXI – Álvaro Nunes, 2002. Disponível em: <<http://www.filedu.com/brussellprobfil11.html>>. Acesso em: 20 dez. 2009.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. São Paulo. SEE, 2008.

Anexos

Anexo 1 – As Atividades e Etapas – “Os Passeios Aleatórios da Mônica”

ATIVIDADE: “OS PASSEIOS ALEATÓRIOS DA MÔNICA”

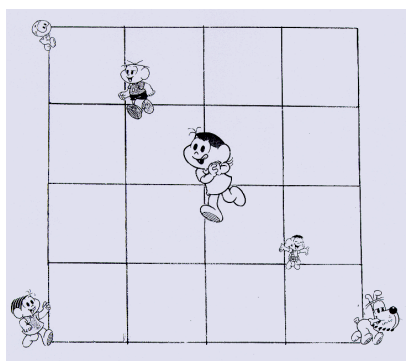
Nomes do aluno: _____

Nomes do aluno: _____

I. A estória

A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 1. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu.

Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que a sorte escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos.



Legenda:

Horácio (dinossauro)

Cebolinha (careca que tem 3 fios de cabelo)

Magali (a comilona que gosta de melancia)

Cascão (o menino que não gosta de tomar banho)

Bidu (o cachorrinho azul)

Norte: ↑ Leste: →

Figura 1: Cartaz dos passeios aleatórios da Mônica.

Lendo apenas a estória, sem jogar a moeda, responda:

- 1) Qual é a diferença entre a forma antiga de a Mônica visitar seus amigos e a nova forma? _____
- 2) Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda: _____
- 3) Qual é a chance de sair cara $P(C)$: _____ e de sair coroa? $P(X)$: _____

Por que vocês acham isso: _____

- 4) Qual é a chance de Magali ser visitada: _____ por que vocês acham isso? _____
- 5) Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados? () Não () Sim
Por que vocês acham isso: _____
- 6) Imagine que você jogou 4 vezes a moeda, como você anotaria seu resultado imaginário? _____

II. Atividade referente à experimentação a ser realizada em dupla

Você está recebendo uma moeda. Para Mônica visitar um amigo, vocês têm que lançar a moeda quatro vezes, que denominamos de experimento.

Se sair cara (C), Mônica andar um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste.

Você e seu/sua colega devem repetir esse experimento trinta vezes e anotar os resultados no Quadro 1.

Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa cara, anotar na coluna sequência: CCXC e na coluna do amigo visitado: Cebolinha.

Quadro 1. Resultados da experimentação.

Repetição	Sequência	Amigo visitado	Repetição	Sequência	Amigo visitado
1.			16.		
2.			17.		
3.			18.		
4.			19.		
5.			20.		
6.			21.		
7.			22.		
8.			23.		
9.			24.		
10.			25.		
11.			26.		
12.			27.		
13.			28.		
14.			29.		
15.			30.		

Selecione o resultado de uma repetição qualquer e desenhe o percurso percorrido pela Mônica no papel transparente. **Não se esqueça de escrever nesse papel transparente seus nomes e a sequência que vocês escolheram.**

- 1) Quem tem mais chance de ser visitados (a) Magali ou Horácio? _____
Por quê? _____
- 2) Quem tem mais chance de ser visitado Horácio ou Bidu? _____
Por quê? _____
- 3) De todos, quem tem menos chance de ser visitado? _____
Por quê? _____
- 4) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? () Não () Sim
Por quê? _____
- 5) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?” _____
() NÃO mudaríamos porque _____
() SIM mudaríamos porque _____

Sistematize os resultados do Quadro 1 na Tabela 1, chamada de Tabela de Distribuição de Frequência – TDF.

Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (f_i)	Frequência relativa (h_i)	Porcentagem $100 \cdot h_i$
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidu			
Total	30	1,00	100,00

Onde $h_i = f_i/30$ representa uma estimativa da probabilidade

- 6) Olhando a Tabela de Distribuição de Frequência (TDF), qual é a probabilidade de Mônica visitar:
 - a) Magali? _____
 - b) Horácio? _____
 - c) Bidu? _____
- 7) Quanto por cento das visitas foram para Cascão? _____
- 8) Depois que vocês realizaram o experimento, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?” _____
() NÃO mudaríamos porque _____

() SIM mudaríamos porque _____

- 9) Comparem seus resultados sistematizados na Tabela 1 com os resultados da dupla ao lado. Esses são iguais? () Sim () Não.

Se forem iguais como vocês explicam essa igualdade nos resultados? _____

Se forem diferentes como vocês explicam essa diferença nos resultados? _____

III. A modelagem matemática

- 1) Desenhe no croqui, o percurso de todas as maneiras possíveis que a Mônica pode chegar à casa de Magali. Utilize linhas diferentes ou lápis de cor:



- 2) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Magali? _____
Quais são? _____
O que esses caminhos têm em comum? _____
- 3) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cascão? _____
Quais são? _____
O que esses caminhos têm em comum? _____
- 4) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Cebolinha? _____
Quais são? _____
O que esses caminhos têm em comum? _____
- 5) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Bidu? _____
Quais são? _____
O que esses caminhos têm em comum? _____
- 6) Quantos caminhos existem ao todo, para a Mônica chegar à casa de Horácio? _____
Quais são? _____

Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Mônica aos seus amigos

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade p_i
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidú			
Total			

- 4) Depois que vocês analisaram e sistematizaram os resultados na tabela 2, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: “todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?”
- () **NÃO** mudaríamos porque _____
- () **SIM** mudaríamos porque _____

V. Comparando as duas formas de atribuir probabilidades.

- I) Preenchem a Tabela 3 utilizando os resultados contidos nas Tabelas 1 e 2:

Tabela 3. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades

Amigo	Frequência relativa (h_i)	Árvore de possibilidades (p_i)
Horácio		
Cebolinha		
Magali		
Cascão		
Bidu		
TOTAL		

- 1) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades: _____
- 2) Analisando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de calcular probabilidades é a mais correta? _____
- 3) Compare os resultados da Tabela 3, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir? _____
- 4) Vocês acham justa a distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos?
() **Sim**, porque _____
() **Não**, porque _____
- 5) Caso vocês achem injusta essa distribuição, vocês poderiam indicar outra forma de sortear o amigo a ser visitados pela Mônica? _____
- 6) Vocês gostaram das atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? _____
Se SIM, o que elas tiveram de interessantes? _____
Se NÃO, o que elas tinham de chata? _____
- 7) Dentre todas as atividades que vocês realizaram, qual foi (ou quais foram) a atividade que vocês acharam mais legal? _____
Por quê? _____
- 8) O que vocês aprenderam (quais assuntos) com as atividades sobre os passeios aleatórios da Mônica? _____

Anexo 2 – A Solicitação Para Procedimento de Pesquisa.

Ilma. Sra. _____

Diretora do Colégio _____

Ref.: Solicitação de deferimento dos procedimentos de pesquisa.

O presente documento tem como objetivo dar ciência e solicitar autorização para os procedimentos relativos à pesquisa, desenvolvida por PAULO AVELINO DOS SANTOS, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP, junto ao Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática – Grupo de Estudos e Pesquisa: A MATEMÁTICA ESCOLAR: CONSTRUÇÃO E TRANSFORMAÇÃO DO SABER MATEMÁTICO - Grupo Reflexão – Planejamento – Ação – Reflexão (REPARE), Coordenado e orientado pela Prof^a. Dr^a. Sandra M.P. Magina, principalmente ao que se refere à coleta e a utilização dos dados.

A coleta de dados se dará por meio de gravações em arquivos informatizados, fotos e registros escritos. Para tanto, sempre que necessário, nos comprometemos a solicitar autorização dos participantes, na figura de seus responsáveis por se tratar de estudantes menores de idade.

O material coletado servirá de base para análises que buscam entender melhor, se os estudantes são favoráveis ou não, quanto à aceitação das atividades de ensino intitulada de: “Os passeios aleatórios da Mônica” – Atividades para ensinar conceitos básicos de probabilidade.

O acesso aos registros será exclusivo dos pesquisadores e somente poderá ser apresentado com a autorização dos participantes. Nos registros escritos, terão os nomes substituídos por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, 26 de outubro de 2009.

Anexo 3 – A Autorização Para Aplicação das Atividades.

AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO

Eu, _____,
autorizo meu (minha) filho (filha) _____, estudante do 8º ano do Ensino Fundamental, a participar das atividades e procedimentos relativos à pesquisa, desenvolvida por PAULO AVELINO DOS SANTOS, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP, junto ao Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática – Grupo de Estudos e Pesquisa: A MATEMÁTICA ESCOLAR - CONSTRUÇÃO E TRANSFORMAÇÃO DO SABER MATEMÁTICO – Grupo REPARE.

Os encontros ocorrerão nos dias 3, 4, 5 e 6 de novembro do corrente ano. O material coletado servirá de base para análises que buscam entender melhor, se os estudantes são favoráveis ou não, quanto à aceitação das atividades de ensino intitulada “Os passeios aleatórios da Mônica” – Atividades para aprender conceitos básicos de probabilidade.

O acesso aos registros será exclusivo dos pesquisadores e, nos registros escritos, os estudantes participantes terão seus nomes substituídos por pseudônimos, preservando suas identidades.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, 26 de outubro de 2009.

Assinatura do responsável (pai ou mãe do estudante)