

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Priscila Glauce de Oliveira

**Probabilidade: Concepções construídas e
mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da
Teoria das Concepções (CKç)**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2010

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Priscila Glauce de Oliveira

**Probabilidade: Concepções construídas e
mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da
Teoria das Concepções (CKç)**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora
da Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo como exigência parcial para obtenção do
título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**, sob orientação da **Profª Drª
Cileda de Queiroz e Silva Coutinho**.*

São Paulo

2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de foto-copiadora ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

*Dedico este trabalho primeiramente ao meu pai,
que, onde estiver, sei que está feliz por essa finalização.
A minha mãe querida, por acreditar em mim, pelo incentivo,
colaboração e paciência ao longo da formação,
sem a qual não chegaria até aqui.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, sem o qual na existe, pelo seu amor incondicional e por me guiar na eterna busca do seu caminho.

À minha mãe Iracema, pela infra-estrutura, apoio, paciência e confiança depositada.

À minha irmã Cláudia, que acompanhou esta caminhada.

Especialmente à Prof^a Dr^a Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pela orientação, incentivo, sugestões e principalmente pela amizade.

Aos Professores da banca examinadora, Prof^o Dr^o Saddy Ag Almouloud, e Prof^a Dr^a Auriluci de Carvalho Figueiredo, pelas ricas contribuições.

À Prof^a Sílvia Dias Alcântara Machado, que de certa forma, durante suas aulas, colaborou para esta pesquisa.

À todos os professores do curso, pela aprendizagem que provocaram.

À todos os colegas do curso, Joyce, Ana Rebeca, Sandra, Solange, Sônia, Déborah Carlos, Enéas, Jean, Maurício, Lucimar, Denílson e Juliano, pela amizade, companheirismo, pelos momentos de partilha e de aprendizagem.

Em especial à amiga Márcia Varella, pela paciência e confiança, pela amizade, pelos momentos de partilha,, de companheirismo, por me compreender, por ser amiga de verdade, me ouvir e me entender. Obrigado por compreender minhas angústias. Agradeço pelas sugestões e sábios conselhos.

Aos meus amigos, pela ausência durante a realização deste trabalho, em especial, ao Mateus e a Giovanna.

Aos alunos que participaram da pesquisa, meu eterno agradecimento.

À Secretaria Estadual da Educação de São Paulo, pela concessão da bolsa.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo diagnosticar quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas pelos alunos do Ensino Médio em situação de resolução de problemas, quando a aprendizagem é feita tendo como material didático o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno, elaborados segundo a nova proposta curricular implementada no estado de São Paulo, em 2008. Com isso buscamos responder à questão: *Quais concepções probabilísticas são mobilizadas por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas, quando submetidos a uma aprendizagem baseada na nova proposta implementada na rede estadual de São Paulo a partir de 2008?* Para respondê-la, optamos em realizar um estudo de caso e o quadro teórico utilizado para fundamentar as análises busca articular a Teoria das Concepções (CK ϕ) e as categorias probabilísticas identificadas em pesquisas anteriores, particularmente as propostas por Pilar Azcárate em sua tese de doutorado. Para responder nossa questão de pesquisa, analisamos alguns documentos oficiais, tais como Parâmetros Curriculares Nacionais, Exame Nacional do Ensino Médio e em especial os cadernos do professor e do aluno, integrantes da nova Proposta Curricular do estado de São Paulo. Ao final, aplicamos um questionário com três grupos de alunos voluntários, cursando o segundo e o terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de ensino. A análise da nova proposta juntamente com a análise dos protocolos construídos a partir da aplicação do questionário nos permitiu identificar concepções do enfoque clássico de probabilidade, porém a partir de uma visão puramente determinista de probabilidade.

Palavras-Chave: Probabilidade, Concepção, Teoria CK ϕ , Proposta Curricular do Estado de São Paulo, Ensino Médio.

ABSTRACT

The purpose of this presentation is to diagnose which probabilistic conceptions are construed and mobilized by High School students under condition of problem solving when the learning is acquired by having as didactic material the Teacher's Book and the Student's Book that were prepared according to the new curriculum proposal implemented at state of São Paulo in 2008. Based on this, we are trying to answer the question: *Which are the probabilistic conceptions mobilized by High School students in problem solving when submitted to a learning based on the new proposal implemented at the network of state of São Paulo up from 2008?* To ask it, we decided to perform a case study and the theoretical chart that was used to validate the analyses tries to argue the Conception Theory (CK ϕ) and the probabilistic categories that are identified in the former surveys, especially those that were proposed by Mrs. Pilar Azcárate's doctorate thesis. To answer our survey issue, we have checked some official documents, such as National Curriculum Parameters, *National Higher Education Entrance Examination* and especially the Teacher's Book and the Student's Book that make part of the Curricular Proposal for the state of São Paulo. At the end, we applied a questionnaire for three groups of volunteer students that are attending the second and third level of High School at a public school of the state teaching network. The analysis of the new proposal analysis along with the analysis of protocols that were construed based on the application of the questionnaire allowed the identification of conceptions of classical approach of Probability, but based on a purely deterministic vision of Probability.

Keywords: Probability, Conception, Theory (CK ϕ), Curricular Proposal for the state of São Paulo, High School.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 - ESTUDOS PRELIMINARES	19
1.1. PROBABILIDADE: Contexto Histórico	19
1.2. PROBABILIDADE: Algumas pesquisas publicadas.	25
2 – DELIMITAÇÃO DA PESQUISA.....	33
2. 1. Problemática e questão de pesquisa	33
2.2. Metodologia.....	35
2.2.1. Estudo de Caso.....	35
2.2.2. Características do Estudo de Caso	37
2. 3. Procedimentos Metodológicos	39
3 – REFERENCIAL TEÓRICO	41
3.1. Teoria das Concepções (ck ϕ)	41
3.2. Concepções Probabilísticas propostas por Azcárate (1996).....	45
3.3. Organização Praxeológica	49
4 – ANÁLISE DOS DOCUMENTOS OFICIAIS	53
4.1. Parâmetros Curriculares Nacionais.....	53
4.2. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).....	56
4.3. Análise dos Livros Didáticos	58
4.4. A Proposta Curricular do Estado de São Paulo	60
4.4.1. Análise da Proposta Curricular.....	60
4.4.2. Análise dos Cadernos do Professor e do Aluno.....	62
5. APLICAÇÃO, ANÁLISE <i>A PRIORI</i> E <i>A POSTERIORI</i> DAS ATIVIDADES DIAGNÓSTICAS.	99
5.1. Aplicação da Atividade	100
5.2. Análise das Questões da Atividade Diagnóstica	102
5.2.1. Questão 1.....	102
5.2.2. Questão 2.....	111
5.2.3. Questão 3.....	119
5.2.4. Questão 4.....	126
5.2.5. Questão 5.....	135
5.2.6. Questão 7.....	144
5.2.7. Questão 8.....	152

5.2.8. Questão 9.....	158
5.2.9. Questão 10.....	163
5.2.10. Questão 11.....	171
5.2.11. Questão 12.....	176
CONSIDERAÇÕES FINAIS	182
REFERÊNCIAS.....	186

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema das relações possíveis entre concepções, conhecimentos e conceitos, propostas por Balacheff (1995).	43
Figura 2 - Esquema das relações entre concepções e conhecimentos, para constituir o conceito de Probabilidade	44
Figura 3 - Enunciado da primeira Situação de Aprendizagem proposta no Caderno do Professor	66
Figura 4 - Quadro com solução do problema proposto no Caderno do Professor. ...	66
Figura 5 - Caderno do aluno - Atividade preliminar - 1ª Situação de Aprendizagem.	68
Figura 6 - Enunciado do Problema 1, apresentado no Caderno do Aluno.	69
Figura 7 - Explicação do Jogo contido no Caderno do Professor.....	70
Figura 8 - Resolução do Problema 1 apresentada no Caderno do Professor.	73
Figura 9 - Enunciado do Problema 1 - Atividade 3 no Caderno do Aluno.	74
Figura 10 - Resolução do Problema 2 – Atividade 3 apresentada no Caderno do Professor.....	75
Figura 11 - Resolução do Problema 3 apresentada no Caderno do Professor.	76
Figura 12 - Resolução do Problema 4 apresentada no Caderno do Professor.	77
Figura 13 - Resolução do Problema 5 proposta no Caderno do Professor	78
Figura 14 – Problema 1- 3ª Situação de aprendizagem - Caderno do Aluno	80
Figura 15 - Resolução e Considerações contidas no Caderno do Professor sobre o problema 1	81
Figura 16 - Problema 1 - 3ª Situação de aprendizagem - Caderno do Aluno.....	81
Figura 17 - Problema 3 - 3ª Situação de aprendizagem - Caderno do Aluno.....	82
Figura 18 – Resolução apresentada no Caderno do Professor do Problema 3 do Caderno do Aluno	82
Figura 19 - Problema 1 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor	83
Figura 20 - Problema 4 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Aluno	84
Figura 21 - Problema 2 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor	85
Figura 22 - Problema 3 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor	86
Figura 23 - Problema 4 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor	87
Figura 24 - Problema 5 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor	89
Figura 25 - Problema 6 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor 2008	91

Figura 26 - Resolução Correta do Problema 6 apresentada no Caderno do Professor de 2009	92
Figura 27 - Apresentação da idéia da distribuição binomial contida no Caderno de Professor	93
Figura 28 - Problema 6 apresentado na quarta situação de aprendizagem no caderno de 2008	96
Figura 29 - Gráfico adequado para solução do problema 6	97
Figura 30 – Protocolo 1 - Resposta dos alunos para a Questão 1, item a).....	104
Figura 31 - Protocolo Resposta do aluno para questão inicial	105
Figura 32 - Resposta da questão por meio da linguagem corrente.....	110
Figura 33 - Utilização de representação pictórica	115
Figura 34 – Resposta do item (b) do problema 2	117
Figura 35 - Resposta da pergunta inicial da questão 2	118
Figura 36 - Respostas da questão 2	118
Figura 37 - Respostas dos alunos da 3ª série do EM para os conceitos de evento e espaço amostral	125
Figura 38 - item (a) da questão 4 - atividade realizada antes do ensino formal	128
Figura 39 - item (a) da questão 4 - atividade realizada depois do ensino formal	128
Figura 40 - Resposta do item (d) da questão 4	129
Figura 41 - Resposta apresenta para o item (e) da questão 4	130
Figura 42 - Resposta do item (f) da questão 4	131
Figura 43 - Resposta do item (a) da questão 4	131
Figura 44 - Respostas da questão 5 realizada pela dupla de alunos antes do ensino formal	137
Figura 45 - Respostas da questão 5 realizada pela dupla de alunos depois do ensino formal	138
Figura 46 - Respostas da questão 5 – Alunos 2ª série EM que não realizou a atividade antes do ensino formal.....	141
Figura 47 - Respostas da questão 5 - alunos 3ª série do EM	143
Figura 48 - Respostas da questão 7- Atividade realizada antes do ensino formal..	147
Figura 49 - Respostas da questão 7- Atividade realizada depois do ensino formal.	148
Figura 50 - Respostas da questão 7- Alunos 2ª série EM.....	149

Figura 51 - Respostas da questão 7 - Alunos da 3ª série do EM.....	150
Figura 52 - Respostas da questão 8 - Atividade realizada antes do ensino formal.	153
Figura 53 - Respostas da questão 8 - Atividade realizada depois do ensino formal	154
Figura 54 - Respostas da questão 8 - Alunos 2ª série EM.....	155
Figura 55 - Respostas da questão 8 - Alunos 3ª série EM.....	157
Figura 56 - Respostas da questão 9 - Atividade realizada antes do ensino formal.	160
Figura 57 - Respostas questão 9 - Atividade realizada após o ensino formal.....	161
Figura 58 - Respostas da questão 9 - Alunos 2ª série EM.....	162
Figura 59 - Respostas da questão 9 - Alunos 3ª série EM.....	162
Figura 60 - Resposta da questão 10 - Atividade realizada antes do ensino formal.	165
Figura 61 - Resposta da questão 10 - Atividade realizada depois do ensino formal	166
Figura 62 - Questão 10 - Aluno 2ª série EM.....	166
Figura 63 - Resposta da questão 10 - Alunos 3ª série EM.....	167
Figura 64 - Respostas da questão 11 - Atividade realizada após o ensino formal..	174
Figura 65 - Respostas da questão 11 - Alunos 2ª série EM.....	175
Figura 66 - Respostas da questão 11 - Alunos 3ª série EM.....	176
Figura 67 - Questão 12 - Atividade realizada antes do ensino formal.....	178
Figura 68 - Resposta da questão 12 - Atividade realizada após o ensino formal....	179
Figura 69 - Resposta da questão 12 - Alunos 2ª série EM.....	180
Figura 70 - Resposta da questão 12 - Alunos 3ª série EM.....	181

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Conteúdos Probabilísticos na Proposta Curricular do Estado de São Paulo	63
Quadro 2 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 1 da atividade realizada antes do ensino formal e análise da pesquisadora	106
Quadro 3 - Diálogo dos alunos da 2ª Série EM na resolução da questão 1 e análise da pesquisadora	107
Quadro 4 – Continuação do diálogo dos alunos da 2ª Série EM na resolução da questão 1 e análise da pesquisadora	109
Quadro 5 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada antes do ensino formal e análise da pesquisadora	113
Quadro 6 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora	114
Quadro 7 – Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora	114
Quadro 8 - Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora	115
Quadro 9 - Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora	115
Quadro 10 – Finalização do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora	116
Quadro 11 – Diálogo dos alunos da 2ª série na resolução da questão 2	117
Quadro 12 - Diálogo dos alunos da 2ª série na resolução da questão 3	122
Quadro 13 – Novo diálogo dos alunos da 2ª série na resolução da questão 3	123
Quadro 14 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 4 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora	129
Quadro 15 – Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 4 da atividade e análise da pesquisadora	130
Quadro 16 – Diálogo dos alunos da 3ª série EM na resolução da questão 4 da atividade e análise da pesquisadora	132
Quadro 17 – Continuação do diálogo dos alunos da 3ª série EM na resolução da questão 4 da atividade e análise da pesquisadora	134

Quadro 18 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 5 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora.....	139
Quadro 19 – Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 5 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora.....	140
Quadro 20 - Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 5 e análise da pesquisadora.....	142
Quadro 21 – Continuação do diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 5 e análise da pesquisadora.....	142
Quadro 22 – Diálogo dos alunos da 3ª série EM na resolução da questão 7 e análise da pesquisadora.....	151
Quadro 23 – Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 8 e análise da pesquisadora.....	156
Quadro 24 - Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 8 e análise da pesquisadora.....	157
Quadro 25 – Diálogo do alunos da 2ª série EM com a pesquisadora na questão 10	167
Quadro 26 – Diálogo dos alunos da 3ª série EM na questão 10 e análise da pesquisadora.....	170

INTRODUÇÃO

Nosso primeiro contato com a Probabilidade se deu na escola básica, e posteriormente na graduação, mas foi durante o curso de especialização que tivemos contato com pesquisas sobre o ensino e aprendizagem desse tema. As pesquisas nos mostraram sua importância desde a escola básica, porém apontavam também as muitas dificuldades que os estudantes enfrentam no tocante ao conceito de Probabilidade. Os resultados obtidos nessas pesquisas motivaram nossos estudos no sentido de buscar respostas a estas dificuldades, bem como categorizar as concepções que estes estudantes apresentam, buscando a possível relação entre elas e as dificuldades.

Em nosso trabalho de especialização, pudemos apontar que a Estatística e a Probabilidade, cada vez mais, veem estendidas suas aplicações aos mais diversos campos científicos ou administrativos, tornando-se indispensáveis a todo aquele que tenha de examinar fatos e dados para a tomada de decisões. São encontradas aplicações em quase todos os campos da atividade humana, e tanto o educador, como o político, o economista, o médico, o industrial, o agricultor, o biólogo ou o cientista, utilizam a Estatística e a Probabilidade em seus respectivos campos de ação. (OLIVEIRA, 2007).

Neste sentido, citamos e concordamos com Rotunno (2007), para quem aplicações específicas à Teoria das Probabilidades encontram-se presentes nas sondagens de opiniões, nos fundos de previdência, na genética, nas companhias de seguros, nos esportes, etc.

Desde o final do século XIX e ao longo do século XX, o desenvolvimento dos modelos probabilísticos e estatísticos passou a ocupar um posto relevante em um mundo no qual a ciência era determinista. Para Davis e Hersh (1998, citado em ROTUNNO, 2007), estes modelos desenvolvem-se paralelamente aos modelos matemáticos usuais e por isto, possuem códigos diferentes: ao passo que um estuda a ordem, o outro se ocupa com a aparente desordem do caos e de suas regularidades macroscópicas.

Segundo Rodrigues (2007), muitas decisões que ocorrem no mundo são tomadas após estudos minuciosos de suas probabilidades, avaliando-se a margem de acertos ou de erros, conquistas ou derrotas, ganhos ou perdas. Esta ideia reforça

a já defendida por Lopes (2004, *apud* ROTUNNO, 2007), para quem a Combinatória, a Probabilidade e a Estatística, presentes em nosso cotidiano, interrelacionam-se, proporcionando assim uma filosofia do acaso e do aleatório, desempenhando um papel importante na compreensão da natureza. Ainda segundo Lopes, a presença marcante da Estocástica¹ em nossas vidas influencia a forma de pensarmos e de agirmos, nos instrumentaliza para que tomemos decisões quando somente dispomos de dados afetados pela incerteza, situações que permeiam nosso cotidiano.

A autora acima afirma, em relação à Probabilidade, que não devemos percebê-la somente como meio de uma definição matemática, pois desprezamos seu caráter estocástico, deixando de considerar as percepções aleatórias trazidas pelo acaso. A esta ideia, Rotunno (2007) acrescenta que seu significado conceitual não se baseia simplesmente em definição matemática, determinista, como habitualmente ocorre com outros conceitos nesta área do saber.

Desta forma, compactuamos com o pensamento de Borovcnik e Peard (1996, *apud* FERNANDES, 1999), que defendem a ideia de que a introdução das probabilidades deve ser inserida no currículo escolar em qualquer nível, e para justificar isto relatam que:

[...] o pensamento probabilístico é um tipo específico de pensamento, tal como o pensamento geométrico e o pensamento algébrico. Face à Matemática, as probabilidades constituem uma oportunidade de questionar a dicotomia verdade *versus* falsidade, acrescentando-se a categoria do possível; destacando a importância do valor aproximado em relação ao valor exato e salientam a impossibilidade de controlar o resultado de uma única experiência. Este tipo de pensamento pode beneficiar do estudo das probabilidades na escola. (BOROVCHNIK e PEARD, 1996 *apud* FERNANDES, 1999, p. 11)

Isto também é reforçado por Fischbein (1991, *apud* COUTINHO, 1994), em trabalho que apontou que muitas crianças identificam como “raro” como “impossível”, e “impossível” como “incerto”, tendendo a substituir significados matemáticos como expectativas subjetivas.

Pode-se assim reforçar a importância da inserção deste tema no currículo escolar, o que no Brasil ocorreu com a implantação dos Parâmetros Curriculares

¹ A palavra Estocástica é usada quando nos referimos ao uso articulado dos conceitos de natureza probabilística e estatística.

Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), dentro do bloco de conteúdos Tratamento da Informação. Para o Ensino Médio, também há uma proposta similar, formulada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006).

Consideramos também a atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo, que foi implementada em 2008. Segundo esta proposta, o ensino de Probabilidade encontra-se dentro do eixo do tratamento da informação que deve ser explorado ao longo das sete séries da escolaridade básica, numa perspectiva de desenvolvimento de competências relacionadas à argumentação e à decisão. Desta forma percebemos, novamente, a importância da inserção deste tema no currículo escolar.

Como pesquisadora e professora da rede estadual do Estado de São Paulo, acreditamos que a utilização da atual proposta no ensino de Probabilidade apresenta algumas características que incitam investigações. Assim, decidimos por aprofundar nossos estudos, relacionando nossa pesquisa com a atual proposta curricular. Sendo assim, nosso objetivo de pesquisa é diagnosticar quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas pelos alunos do Ensino Médio quando estes utilizam como material didático a nova proposta curricular implementada no estado de São Paulo, em 2008.

Para alcançar o objetivo, estruturamos nossa pesquisa da seguinte forma:

No primeiro capítulo apresentamos uma revisão bibliográfica que compreende um estudo histórico do conceito de Probabilidade e uma análise de pesquisas já publicadas sobre o ensino e aprendizagem de Probabilidade.

O segundo capítulo, denominado “Delimitação da Pesquisa”, apresenta a problemática que nos levou à realização desta pesquisa, bem como a questão de pesquisa e metodologia utilizada.

Já o terceiro capítulo compreende a análise do referencial teórico utilizado em nossa pesquisa, que abrange a Teoria das Concepções (ck ϕ) de Balacheff (1995), as categorias de concepções probabilísticas apresentadas por Azcárate (1996) e a Organização Praxeológica desenvolvida por Chevallard (1999).

O quarto capítulo foi destinado à análise dos Documentos Oficiais, particularmente os Parâmetros Curriculares Nacionais, as provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

O quinto e último capítulo apresenta a análise do instrumento de pesquisa aplicado, bem como os principais resultados alcançados.

Por fim, apresentamos as considerações finais, nas quais buscamos responder nossa questão de pesquisa a partir dos resultados observados.

1 - ESTUDOS PRELIMINARES

A finalidade deste capítulo é apresentar um estudo sobre nosso objeto de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Probabilidade. Compreende uma análise do contexto histórico no qual o conceito de Probabilidade está inserido, bem como os resultados de pesquisa na área do ensino e aprendizagem deste tema.

1.1. PROBABILIDADE: Contexto Histórico

A finalidade desta seção é resgatar alguns fatos que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, tal como é conhecida hoje, e levantar as principais características identificadas nas pesquisas sobre o surgimento dos diferentes enfoques de Probabilidade.

Bellemain e Lima (2002), citando Artigue (1990), afirmam que a análise histórico-epistemológica do objeto em questão tem contribuído com o estudo das concepções dos sujeitos sobre tal objeto:

Segundo Artigue (1990), uma das contribuições da análise epistemológica para os estudos da didática da Matemática é a reflexão crítica acerca de certas “representações epistemológicas errôneas que a prática de ensino tende a induzir” (p. 245). Com efeito, o ensino tende a apresentar os conceitos matemáticos como universais, no tempo e no espaço, e a cultivar uma “ficção de rigor eterno e perfeito da Matemática” (p. 243). O recurso à análise epistemológica ajuda a invalidar tais concepções, na medida em que recupera a historicidade, tanto dos conceitos matemáticos, quanto das noções metamatemáticas (como a noção de rigor, por exemplo) (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 13-14)

Assim, acreditamos que buscar como surgiram as primeiras concepções relacionadas à Probabilidade, pode apontar alguma relação entre os problemas e as dificuldades encontrados na aprendizagem dos alunos nos dias de hoje.

Este resgate apoiou-se nos trabalhos de Coutinho (1994, 2001 e 2007), Silva e Coutinho (2005) e Rotunno (2007) que muito contribuíram nesta área.

Segundo Davis e Hersh (1998, *apud* ROTUNNO, 2007), o nascimento da Probabilidade praticamente coincide com o nascimento das teorias matemáticas abrangentes, que produziram outra visão do mundo – a mecânica determinista de Galileu e Newton.

A Probabilidade começou, como afirmam Silva e Coutinho (2005), na forma de uma ciência empírica, na qual vários dos problemas propostos nesta área do saber foram pensados por matemáticos, filósofos, naturalistas, advogados, respondendo a uma necessidade social: o estudo de jogos de azar, largamente difundidos desde a antiguidade.

A ideia de acaso, sua existência, significado, caráter e relevância, segundo Rotunno (2007), está presente na filosofia grega. Para este autor, Aristóteles (384 - 322 a.C.) já reconhecia a sorte como uma causa acidental, provocadora de eventos inopinados, na qual o homem, por ser um ser racional, poderia escolher e a consequência desta escolha poderia trazer uma “boa” ou uma “má” sorte.

Coutinho (2007) relata que os textos históricos mostram que os jogos, praticados desde a antiguidade, eram utilizados com o objetivo de lazer, integrando uma dimensão mística ou psicológica do acaso. A autora afirma ainda que as ferramentas matemáticas necessárias ao desenvolvimento deste ramo do conhecimento, tais como o raciocínio combinatório e o cálculo de proporções, já eram conhecidos há muitos séculos, sendo poema “*De Vetula*” (1250) a primeira publicação que continha esta ideia.

Rotunno (2007) cita Davis e Hersh (1998) para afirmar que o atraso no avanço da Teoria das Probabilidades se deve primeiramente ao fato de se pensar que a consulta a um acontecimento aleatório, como ler as cartas, tirar a sorte e lançar dados, revelaria a vontade de Deus. Além disto, acreditava-se que construir uma teoria baseada nestes tipos de acontecimentos, seria cometer um ato ímpio perante Deus. Outro aspecto que explicaria este atraso seria o nível do desenvolvimento da Matemática anterior ao século XVI, ainda insuficiente.

Ainda segundo este autor, a necessidade de prever os resultados que poderiam ocorrer, ou seja, a busca por regularidades, desencadeou a procura por alguma lei ou regra que regulasse o funcionamento do acaso.

Um dos precursores dos estudos dos jogos de azar foi Girolamo Cardano (1501-1576), que era matemático, filósofo, médico e jogador, jogando por mais de 40 anos. Como não queria consumir seu tempo com atividades ou jogos que não lhe fossem promissores, Cardano passou a analisar seriamente a Probabilidade de tirar uma determinada carta do baralho ou de obter uma determinada soma no lançamento de dois dados, relatando todos os resultados das suas experiências em um manual de jogos chamado *Liber De Ludo Aleae*, que foi sua primeira obra, escrita no século XVI e publicada somente em 1665. Nesta obra já se encontravam as primeiras citações sobre as regras da adição e multiplicação (axioma do condicionamento e da independência) e também sobre a regra que podemos interpretar como a primeira avaliação muito próxima de uma Probabilidade. (COUTINHO, 1994)

O enfoque tradicional de Probabilidade, como conhecemos hoje, surgiu da primeira tentativa de axiomatização da Teoria das Probabilidades, feita por Pierre Simon Laplace (1749-1827) na sua obra intitulada *Teoria Analítica das probabilidades*, publicada em 1812. Nesta obra, Laplace organizou tudo o que era conhecido sobre a teoria probabilística em itens que ele chamou de princípios. Em seu segundo princípio, Laplace define a Probabilidade como: “[...] a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta Probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.” (Laplace, 1814, apud COUTINHO, 2007, p.65).

Porém, este tipo de raciocínio para a determinação de uma Probabilidade, já podia ser encontrado no poema *De Vetula*, citado anteriormente, do qual também, seguiram outros escritos, culminando na correspondência entre Blaise Pascal (1623-662) e Pierre de Fermat (1601-1665), já no século XVII, em que surge a denominação de “Geometria do Acaso”.

Segundo Coutinho (2007, p.53), essas correspondências [...] levavam em conta as regularidades macroscópicas observadas em jogos de azar (fenômeno reprodutível que tem intervenção do acaso) para a busca de um modelo matemático que as explicasse.

A maneira como Pascal e Fermat resolviam o problema, indicou como eles lidavam com os fundamentos da Teoria das Probabilidades, o que é considerado por alguns historiadores como o início da Teoria das Probabilidades. Estas correspondências, segundo Bru (1981, *apud* COUTINHO, 2007), já mostravam regularidades relacionadas ao raciocínio simétrico no tempo: “o jogo, se renovando identicamente no tempo e de forma regular, dá ritmo ao acaso”. (p. 53)

Ainda segundo esta autora, Laplace trouxe, em seu segundo princípio, a chave para a ampliação deste conceito, deixando lugar para a concepção moderna em termos de medida, supondo-se que obrigatoriamente para isto, os diversos casos fossem igualmente possíveis. Se não o fossem, a autora afirma que Laplace sugere que se “determinem primeiramente suas possibilidades respectivas às quais a justa apreciação é um dos pontos.” (COUTINHO, 2007, p.65)

O primeiro tratado formal de Probabilidade foi escrito por Christian Huygens (1629-1695) em 1657, e chamava *De Ratiocinus in Ludo Aleae*, tendo sido baseado nas correspondências entre Fermat e Pascal.

Segundo Lightner (1991, *apud* SILVA e COUTINHO, 2005), Laplace é considerado o pai da Teoria das Probabilidades porque entendeu, talvez melhor que todos de sua época, a significância da Probabilidade para o mundo. Em seus trabalhos, Laplace coloca definitivamente a Probabilidade no quadro matemático.

O enfoque frequentista surgiu somente em 1713, com a publicação póstuma da obra *Ars Conjectandi*, de Jakob Bernoulli (1654-1705), e aproximava a Probabilidade da frequência observada de um experimento repetido por um grande número de vezes. (COUTINHO, 1994 e SILVA e COUTINHO, 2005)

Assim, a Probabilidade da ocorrência de um evento A pode ser compreendida, nos termos de uma Matemática atual, como: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n(A)$, logo, esta aproximação se dá por uma convergência e não por uma igualdade.

Segundo Batanero (2006), Bernoulli sugeriu que fosse associado à probabilidade dos sucessos aleatórios que aparecem nas diversas áreas do saber, um estudo histórico de experimentos nas mesmas condições. Desta forma, se pode estimar a Probabilidade procurada a partir da estabilização da frequência relativa observada em uma série grande de ensaios do experimento. Assim “[...] a Probabilidade de que a frequência relativa de um experimento repetido nas mesmas condições se aproxima tanto como queremos da Probabilidade teórica de sucesso, podendo aproximar-se suficientemente a uma, mas sem aumentar o número de prova”. (BATANERO, 2006, p. 254).

Outros estudiosos da área de Probabilidade foram Leonhard Euler (1707-1783), que sistematizou e organizou problemas probabilísticos e Joseph Lagrange (1736-1836), que avançou na Teoria das Probabilidades aplicando o Cálculo Diferencial em seu desenvolvimento disponível na época.

Para Rotunno (2007), um trabalho, também importante foi o de *De Moivre* (1667-1754), de 1730 que demonstrou um interesse especial em desenvolver métodos matemáticos e generalizações para a Teoria das Probabilidades.

Esse autor aponta ainda que depois dos trabalhos de Laplace, o estudo da Teoria das Probabilidades, sofreu um aparente abandono, enquanto que se multiplicaram os estudos sobre as aplicações da Probabilidade e suas possíveis interpretações na sociedade, e passou-se a acreditar que o comportamento humano dependia de leis estatísticas e probabilísticas. Isto levou a implicações incorretas da Probabilidade e conclusões errôneas. Esta crença juntamente com os estudos teóricos muito avançados para a época, levou a uma reputação da Teoria das Probabilidades.

Uma formalização do cálculo de probabilidades ocorreu no início do século XIX com Henri Poincaré (1854-1912). Conforme Coutinho (1994), Poincaré deu à

noção do acaso um enfoque moderno, ligando-o à complexidade dos fenômenos observados sem, contudo, tentar mudar os instrumentos fundamentais do Cálculo de Probabilidades. Segundo a autora, esta noção apresentada por Poincaré pode ser compreendida sob um ponto de vista determinista: resultado de um processo aleatório devido a uma complexidade de causas imperceptíveis, complexidade esta que escapa à compreensão do homem e seus instrumentos.

Para Coutinho (1994), com a publicação da obra *Le Hasard*, em 1914, de Émile Borel (1871-1956), que forneceu mais uma contribuição axiomática ao Cálculo de probabilidades e da obra *A Treatise on Probability*, em 1926, de John Maynard Keynes (1883-1946), a Teoria das Probabilidades obteve forte impulso. Já Henri Lesbegue (1875-1941), segundo esta autora, de certa forma contribuiu para o avanço dessa teoria, colocando a Análise Matemática em uma perspectiva revolucionária.

Ainda segundo Coutinho (1994), a Teoria das Probabilidades deu um salto definitivo com os estudos de Andrei Kolmogorov (1903-1987), que em 1933 publicou a obra *Foundations of theory of probability*, contendo a axiomatização dessa teoria, A autora afirma que:

Kolmogorov dá uma apresentação axiomática à Teoria das Probabilidades, colocando-a no quadro da Teoria dos Conjuntos e tornando-a mais clara em suas limitações (1933). No plano matemático, Kolmogorov, percebeu que seria possível, através da associação de Probabilidade e medida, utilizar todo o arsenal de resultados conhecidos neste domínio (devidos a Borel e Lesbegue) e, por outro lado, relegar à etapa das aplicações o difícil problema da relação com o real. No prefácio de sua obra, ele destaca que seu objetivo é explicitar e sistematizar o conjunto dos axiomas que já estavam sendo utilizados, embora de forma implícita, pela maioria dos teóricos contemporâneos do Cálculo de probabilidades. (COUTINHO, 1994, p. 25)

Neste trabalho, Kolmogorov apresenta uma axiomatização da Teoria das Probabilidades, nomeando de E o espaço amostral associado a um experimento aleatório e A como um subconjunto formado pelos sucessos de E , assim uma função P definida sobre A é uma medida de Probabilidade de E se:

- Todo sucesso $S \in A$ corresponde um número $P(S)$, tal que $0 < P(S) < 1$;

- A Probabilidade do sucesso certo é dado por $P(E)=1$;
- A Probabilidade de um sucesso impossível é dado por $P(E)=0$;

Segundo Carvalho e Oliveira (2002), a Probabilidade formal carregada da teoria axiomática surgiu em oposição às restrições mantidas na concepção clássica de Laplace: a equiprobabilidade para os casos favoráveis e número finito de elementos na composição do espaço amostral.

Diante do contexto acima exposto e de acordo com o objetivo deste capítulo, é possível levantar alguns fatos que podem estar relacionados aos problemas e dificuldades dos alunos no ensino e aprendizagem da Matemática, bem como podem evidenciar os tipos de concepções² mobilizadas:

- A dificuldade da escolha, pelo sujeito, de um modelo adequado para expressar situações reais na resolução de problemas;
- A dificuldade da falta de suporte matemático adequado, que nos dias de hoje pode ser interpretada como a falta de conhecimentos matemáticos básicos que permitem o cálculo adequado da Probabilidade;
- Concepções decorrentes da complexidade da Teoria das Probabilidades, que levou séculos para ser compreendida e aceita matematicamente.

Além disto, com base nas informações encontradas, é possível definir o enfoque clássico de Probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o total de casos possíveis; o enfoque frequentista como o que permite inferir a Probabilidade de um evento observando-se sua frequência quando é repetido por um grande número de vezes e o enfoque axiomático como unificador, que permite a construção da Teoria das Probabilidades como um campo próprio, tal como a Geometria.

1.2. PROBABILIDADE: Algumas pesquisas publicadas.

Nesta seção apresentamos as pesquisas já realizadas sobre o ensino e aprendizagem do conceito de Probabilidade, com o objetivo que verificar o que vem

² Utilizamos aqui o termo “concepção” como construto mental, e seu entendimento será melhor discutido no capítulo 3 deste texto.

sendo estudado sobre o tema. Em busca destes trabalhos, encontramos as pesquisas de Steinbring (1991), Coutinho (1994, 2001, 2002 e 2007), Morgado et al (1997), Lopes (2000), Silva (2002), Gonçalves (2004), Batanero (2005 e 2007), Bayer et al (2005), Kataoka et al (2007), Friolani (2007), Goulart (2007) e Welker (2010).

Em nossa leitura, buscamos identificar as convergências e divergências entre os trabalhos, ou seja, como as pesquisas estão relacionadas e o que elas apontam sobre o ensino de Probabilidade na escola básica. Desta forma, nossa análise não apresenta os trabalhos em ordem cronológica, e optamos por apresentar as relações entre as pesquisas independentemente de sua data de publicação.

Começamos com o trabalho de Coutinho (1994), que estudou como se dava a aquisição dos primeiros conceitos de Probabilidade utilizando a visão frequentista. Para alcançar este objetivo, a autora utilizou como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. Para a coleta de dados, a autora aplicou primeiramente um questionário com o intuito de investigar a aquisição das primeiras noções de Probabilidade utilizando a visão frequentista. Tal questionário foi respondido pelos alunos antes mesmo que eles recebessem qualquer aprendizagem sobre o tema.

Numa 1ª etapa da pesquisa, o questionário foi aplicado com alunos franceses, da segunda série do segundo grau francês (Lycée), com idades entre 15 e 18 anos. Já numa 2ª etapa, o mesmo questionário foi aplicado no Brasil, com alunos da 1ª série de um curso de Fonoaudiologia, com idades entre 17 e 19 anos.

Após a aplicação do questionário com os alunos franceses, a autora pôde elaborar uma sequência de ensino que partisse da visão frequentista. A aplicação desta seqüência ocorreu em três sessões de duas horas cada, e objetivou corrigir as concepções errôneas identificadas e permitir a construção do conceito³, partindo de experimentos realizados pelos próprios alunos.

No Brasil, a autora, com base nos resultados da análise dos questionários e da experiência junto aos alunos franceses, elaborou uma nova sequência a ser utilizada.

³ O termo “conceito” será explicitado em seu significado no capítulo 3 deste texto.

Após certo tempo de aprendizagem, foi aplicado um teste tanto para os alunos franceses como para os brasileiros, que tinha por objetivo verificar a correção ou não das concepções errôneas identificadas pelo questionário, como consequência da sequência de ensino aplicada. Este teste era composto de cinco questões dissertativas.

Ao afinal das atividades, a autora concluiu que:

O fato de alguns alunos terem recebido noções de Probabilidade durante o segundo grau, sem, contudo tê-las assimilado como uma interpretação da realidade, provocou uma dificuldade maior no aprendizado, muito embora a utilização da visão frequentista tenha minorado, conforme pudemos constatar nesta situação.

(...) os alunos conseguiram assimilar proporção como Probabilidade, o que foi mais difícil para a relação “frequentista relativa-Probabilidade”, ou seja, verificamos que uma única observação da estabilização desta freqüência não foi suficiente, principalmente quando estudamos eventos cuja Probabilidade não pode ser calculada “a priori”.

(...) o fato de termos realizado a análise do lançamento das moedas anteriormente à análise do lançamento da tacinha nos parece ter sido reforçado a utilização de um raciocínio não científico para a estimação da Probabilidade, reforçando a concepção errônea sobre a existência da equiprobabilidade quando da ausência de informações suficientes sobre o evento observado. (COUTINHO, 1994, p. 132-135)

Finalizando, a autora apontou para uma necessidade deste tipo de ensino antes do Ensino Médio, pois proporciona uma leitura da realidade na qual estamos inseridos e que pode ser acompanhada pelos noticiários, que estão repletos de dados estatísticos.

Neste mesmo sentido, Batanero (2005), analisando os diferentes significados históricos de Probabilidade, e como eles vem sendo abordados na escola básica, afirma que o interesse pela introdução à Probabilidade pelo enfoque frequentista vem aumentando. Segundo ela, o desenvolvimento dos computadores colaborou para este interesse, pois os experimentos e as simulações ajudam os estudantes a vencer certos obstáculos do ensino e aprendizagem de Probabilidade e a resolver os paradoxos que se apresentam nos problemas aparentemente simples.

O avanço da informática colaborou para este interesse, pois para o ensino de Probabilidade por meio da abordagem frequentista é necessário que haja uma repetição de um número significativo de vezes de um experimento e que seus resultados mostrem sinais de estabilização. Conforme aponta Kataoka et al (2007), com recursos computacionais que atualmente temos disponíveis, *é possível utilizar processos de simulação para mostrar que, para um “n” grande, os resultados das estimativas de probabilidades podem atender aos critérios de convergência e terem uma boa precisão* .(KATAOKA et al 2007, p.6).

A possibilidade do uso de simulação informática também foi estudada por Coutinho (2001), em sua tese de doutorado. Neste trabalho, a autora desenvolveu atividades com alunos franceses do último ano do Ensino Fundamental e primeira série do Ensino Médio. As atividades envolviam simulações de experimentos aleatórios, que eram realizadas por meio de recursos computacionais, mais especificamente com o *software* Cabri-géomètre II. Segundo ela, estas atividades favoreceram a construção da relação entre ideia intuitiva de Probabilidade e a frequência estabilizada como medida aproximativa de Probabilidade.

Batanero (2005), porém, declara que o ensino da Probabilidade puramente por experimentos e simulações não é suficiente, uma vez que este deve ser um estudo formal apoiado nos experimentos:

Mas, um enfoque experimental puro do ensino de Probabilidade não é suficiente. Inclusive, quando a simulação não ajuda a encontrar a solução dos problemas de Probabilidade que surgem da vida real, não podendo provar que esta solução é a mais adequada, porque a simulação depende das hipóteses estabelecidas inicialmente e do modelo teórico que implantamos no computador. Um conhecimento genuíno de Probabilidade só é alcançado no estudo de alguma Probabilidade formal, além deste estudo ser gradual e apoiado na experiência estocástica dos estudantes. (BATANERO, 2005, p. 17)

Neste sentido, Coutinho (2001) também afirma que os enfoques clássico e frequentista se completam e por isto devem ser relacionados no ensino de Probabilidade.

Ainda neste sentido, Silva (2002), em sua dissertação de mestrado, desenvolveu uma sequência didática⁴ com o objetivo de verificar se a integração dos enfoques frequentista e clássico de Probabilidade permitiriam uma abordagem mais significativa e abrangente do conceito de Probabilidade. Desta forma, o autor verificou ao final das atividades, que estas permitiram condições de validar a proposta, considerando que:

Os alunos concretizaram seu estudo sobre a teoria probabilística tendo uma visão mais significativa e abrangente do conceito de Probabilidade: as visões laplaciana e frequentista de Probabilidade parecem ter sido incorporadas/construídas pelos alunos (...).

Um número considerável de alunos parece ter iniciado uma aprendizagem significativa das noções constitutivas do campo conceitual probabilístico;

Ainda de acordo com este pensamento, nos deparamos com o trabalho de Friolani (2007), que buscando verificar qual organização os livros didáticos do Ensino Fundamental fazem para o tema “tratamento da informação” e como esta organização favorece a construção do pensamento estocástico, também apontou que o ensino de Probabilidade deve ser feito por meio da visão frequentista, acreditando ser um agente facilitador, pois se aproxima da realidade dos alunos. Porém Friolani (2007) também acredita que este ensino deve ser associado ao enfoque clássico, pois, segundo ele, é com a confrontação entre os dois enfoques que o aluno constrói o significado para os conceitos de Probabilidade.

Assim, percebemos mais uma vez, a importância da relação dos dois enfoques (Clássico e Frequentista) na introdução ao conceito de Probabilidade, assim como a pouca importância dada ao enfoque subjetivo da Probabilidade, que teve seu início com Thomas Bayes, e que hoje é pouco ou nada explorado na escola, conforme aponta Batanero (2007).

Percebe-se assim, que nos dois enfoques, o objetivo é ter uma visão clara e completa do conceito de Probabilidade, conforme já havia apontado Steinbring (1991), porém segundo ele, antes, é preciso que se saiba o que é aleatoriedade e que os alunos tenham a oportunidade de experimentá-la. Para o autor, o conceito de aleatoriedade pode ser entendido como experimentos ou fenômenos cujo resultado

⁴ No sentido proposto por Brousseau (1986).

não pode ser previsto ou determinado. Este enfoque também é defendido por Lopes (2000):

A realização de experimentos que envolvem a aleatoriedade e estimativas, bem como, a vivência de coletar, representar e a analisar dados que sejam significativos e inseridos no seu contexto pode ampliar seu universo de competências e acentuar seu potencial criativo. (LOPES, 2000, p. 2)

Ainda sobre o conceito de aleatoriedade, Morgado et al (1997) afirma que os experimentos aleatórios são aqueles que, se repetidos sob as mesmas condições, não necessariamente produzem resultados iguais. Com isto entendemos que mesmo que se conheçam todas as variáveis envolvidas em um experimento e se tenha controle sobre elas, o resultado final não pode ser conhecido *a priori*.

Para Spiegel (2004, *apud* BAYER et AL, 2005), o experimento aleatório pode ser compreendido como aquele onde:

o pesquisador não é capaz de conhecer nem controlar o valor de certas variáveis durante a execução do experimento. Este conceito de experimento aleatório traz um pouco de determinismo na sua definição, mas, sem dúvida, é o mais adequado para descrever o que a comunidade científica considera como experimento aleatório. (BAYER et AL, 2005, p. 5)

Acreditamos que a realização (com os alunos) de experimentos que envolvam aleatoriedade, bem como um ensino centrado na relação entre os enfoques clássico e frequentista de Probabilidade, depende das concepções do professor. Assim, buscando um estudo que apontasse as concepções que podem ser identificadas no ensino de Probabilidade, encontramos o trabalho de Gonçalves (2004), que pesquisou os professores de Matemática em exercício e verificou se há relação entre suas concepções probabilísticas e as diferentes tendências do ensino de Probabilidade nas décadas de 70, 80 e 90, quando estes professores tiveram sua formação no Ensino Médio. Desta forma, pôde apontar:

Alguns professores possuem a Concepção Probabilística Normativa⁵, ou seja, professores que compreendem as diferentes abordagens e modelos probabilísticos e possuem habilidades para comparar, relacionar, construir exemplos e justificativas para diferentes

⁵ No sentido proposto por Azcárate (1996), mais especificada no capítulo 3 deste texto.

situações, e assim apresentam concepções aos enfoques Clássico e Frequentista. (GONÇALVES, 2004, p. 119)

Ainda segundo Gonçalves (2004), o ensino de Probabilidade no Brasil no decorrer das décadas de 70, 80 e 90, ocorreu por meio das abordagens Clássica e Axiomática havendo variação somente nos tipos de exercícios. Assim, na década de 70, os exercícios abrangiam a Teoria dos Conjuntos, na década de 90, a Análise Combinatória e, na década de 80, ambas as teorias.

Sobre o conhecimento profissional, encontramos o trabalho de Welker (2010), que por meio de entrevistas com professores, buscou reconhecer a influência que o conhecimento profissional acarreta para o ensino de Probabilidade. Assim, ao término da pesquisa, o autor pôde observar que, independentemente do tema a ser ensinado, o conhecimento profissional do professor de Matemática influencia diretamente uma abordagem de ensino e em relação à abordagem de Probabilidade aponta que ela se desenvolve em processos contínuos e crescentes, envolvendo diferentes perspectivas de ensino, representando uma relação biunívoca, na qual:

[...] o conhecimento específico do conhecimento profissional está para o enfoque formal de Probabilidade da mesma forma que o conhecimento pedagógico do conhecimento profissional está para o enfoque experimental de Probabilidade. (WELKER, 2010, p. 141)

Outro autor que pesquisou sobre o ensino de Probabilidade foi Goulart (2007). Ele buscou relacionar as questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), os livros didáticos e o discurso institucional, que é aquele encontrado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Orientações Curriculares, que indica ao professor que o conceito de Probabilidade deve ser ensinado de forma significativa, favorecendo o desenvolvimento do pensamento Estocástico. No entanto, analisando tal discurso e as ferramentas disponibilizadas ao professor nestes documentos, o autor afirma que as orientações referentes às probabilidades não instrumentalizam o professor de modo que este possa ensinar os conceitos probabilísticos de forma significativa.

Diante dos resultados das pesquisas, percebemos que a construção do conceito de Probabilidade é favorecida pela abordagem que considera a dualidade de enfoques. Com isto, ao analisarmos os documentos oficiais, buscaremos

identificar se a relação entre estes enfoques está sendo abordada e como isto ocorre, além de contemplar esta dualidade nas atividades que aplicaremos.

2 – DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos os principais motivos que nos levaram à escolha do tema e de nossa questão pesquisa, bem como os aspectos metodológicos que nortearão nosso trabalho.

2. 1. Problemática e questão de pesquisa

Em nosso levantamento bibliográfico, verificamos que há poucas pesquisas destinadas ao ensino de Probabilidade, e estas centram seu interesse mais na relação entre os enfoques clássico e frequentista como forma de abordagem. Em nenhuma destas pesquisas encontramos estudos que buscassem apontar concepções que os estudantes da escola básica mobilizam quando resolvem problemas em contexto probabilístico. As pesquisas existentes neste eixo – concepções probabilísticas – têm foco no professor e não no aprendiz.

Além disto, em 2008, a Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) implementou, na rede estadual, uma nova proposta curricular, buscando unificar o currículo da rede e melhorar a qualidade de ensino. Integrando a nova proposta, a SEE/SP enviou para todos os professores o chamado “Caderno do Professor”, organizados em volumes distintos por série e bimestre. Estes cadernos contemplam orientações didáticas, além de propor situações de aprendizagem sobre o assunto do bimestre. Em 2009, a SEE/SP enviou também os cadernos do aluno, que contêm as atividades propostas no Caderno do Professor. Esta inovação curricular suscitou discussões por parte dos professores, que tinham que aplicar as atividades propostas, e também por parte dos pesquisadores, que diante do contexto, viram surgir algumas inquietações sobre a aprendizagem baseada nesta proposta.

Durante as leituras das pesquisas que compõem a revisão bibliográfica, nossa problemática e objetivo de pesquisa foram delineando-se. Neste processo, buscamos estabelecer os fundamentos teóricos e metodológicos que nortearam nossa pesquisa.

Neste contexto, e percebendo a necessidade de uma pesquisa que buscasse apontar as concepções probabilísticas que os estudantes mobilizam na resolução de problemas, nossa pesquisa apoiar-se-á nos estudos de Balacheff (1995), sobre Teoria das Concepções⁶ (ckç - *concept, knowledge, conception*), assim como nas categorias de concepções probabilísticas apresentadas por Azcárate (1996) e também usadas por Gonçalves (2004), indicando convergência de resultados tanto para professores generalistas (séries iniciais – Azcárate), como para professores do Ensino Fundamental II e Médio (Gonçalves).

A convergência do tema de nossa pesquisa com o novo cenário proposto pela SEE/SP levou-nos ao nosso objetivo de pesquisa, que é diagnosticar quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio quando estes utilizam como material didático os cadernos gerados segundo a nova proposta curricular, implementada no estado de São Paulo em 2008. Para alcançar este objetivo, formulamos a seguinte questão de pesquisa:

✓ **Quais concepções probabilísticas são mobilizadas por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas, quando submetidos a uma aprendizagem baseada na nova proposta implementada na rede estadual de São Paulo a partir de 2008?**

Como metodologia, faremos um estudo de caso, nos termos de Yin (2005), acreditando que um estudo minucioso de um número reduzido de estudantes possa apontar mais detalhadamente as concepções probabilísticas que estes mobilizam em situações de resolução de problemas. Para constituição do *corpus* da pesquisa, faremos a observação e a coleta da produção de alunos submetidos a uma atividade diagnóstica especificamente elaborada para este tema. Além da observação do desenvolvimento da atividade preparada, gravamos o áudio dos diálogos desenvolvidos nas atividades e faremos uma análise da referida proposta. A análise do conjunto dos dados nos possibilitará a identificação dos elementos que caracterizam as concepções mobilizadas.

⁶ A teoria das concepções visa estudar as relações entre os conceitos, os conhecimentos e as concepções que porventura os estudantes podem vir a apresentar sobre determinado conteúdo matemático e será estudada no próximo capítulo.

O preparo das atividades se fundamenta em um estudo teórico, que compreende além de uma revisão bibliográfica abrangente, a análise do ensino atual deste conteúdo nos livros didáticos e nos documentos oficiais, verificando como estes abordam a noção de Probabilidade no Ensino Médio.

2.2. Metodologia

2.2.1. Estudo de Caso

Como metodologia de pesquisa, nos apoiaremos nos princípios da metodologia do Estudo de Caso, nos termos de Yin (1984), utilizando texto traduzido para o Português em 2005. Escolhemos esta metodologia por acreditar ser a mais adequada para nosso estudo.

Para representar a aplicabilidade do estudo de caso como metodologia de pesquisa, recorreremos às palavras de Coutinho e Chaves (2002): *“Um aluno, um professor, uma turma, uma escola, um projeto curricular, a prática educativa, eis apenas alguns exemplos de variáveis educativas para as quais o estudo de caso é a metodologia que melhor se aplica.”* (p. 230)

Segundo Yin (2005), o estudo de caso como estratégia de pesquisa é utilizado em muitas situações para *“contribuir com o conhecimento que temos de fenômenos individuais, organizacionais, sociais, políticos e de grupo, além de outros fenômenos relacionados.”* (p. 20). Podemos assim supor que o estudo por nós pretendido pode atingir seus objetivos pelo uso de tal metodologia.

Assim, um estudo de caso visa estudar uma entidade bem definida, podendo ser uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. Desta forma, nossa pesquisa assume como unidade, cada dupla (ou trio) de alunos que participaram de nossas atividades.

O objetivo do estudo de caso é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” da entidade que se estuda, evidenciando a sua identidade e

características próprias e que pode ser conduzido por três propósitos básicos: explorar, descrever ou ainda explicar. Esta ideia vai ao encontro da teoria escolhida para a pesquisa, já que na Teoria das Concepções, o objetivo é verificar como os alunos constroem e validam suas estratégias e como tal validação pode caracterizar uma determinada concepção. Ou seja, queremos compreender em profundidade como estes alunos mobilizam seus conhecimentos probabilísticos na resolução de problemas, e porque os mobilizam da forma como o fazem.

Para Coutinho e Chaves (2002), *no estudo de caso examina-se o “caso” em detalhe, em profundidade, no seu contexto natural, reconhecendo-se a sua complexidade e recorrendo-se para isto a todos os métodos que se revelam apropriados.* (p. 223) Desta forma, o grupo de alunos de nossa pesquisa será “estudado” em contexto escolar, ou seja, a aplicação da atividade será realizada na própria escola, como uma atividade habitual. Acreditamos que, desta forma, o ambiente torna-se natural e o caso pode ser estudado em profundidade.

A investigação no estudo de caso deve limitar-se a uma situação específica, que se supõe ser única ou especial, procurando descobrir nela o que há de mais essencial e característico e, deste modo, contribuir para a compreensão global de certo fenômeno de interesse. Com isto, acreditamos ter escolhido adequadamente a metodologia, pois as concepções apresentadas pelos alunos baseiam-se em um material específico, no qual seu uso aponta algumas características e fenômenos próprios. Acreditamos que o material enviado pela Secretaria da Educação para o ensino de Probabilidade traz consigo características e fenômenos didáticos próprios e específicos, que queremos compreender.

O estudo de caso como metodologia de pesquisa que visa questões de aprendizagem, em especial em Educação Matemática, também foi apontado por Ponte (2006), que diz que tal metodologia é utilizada para investigar questões de aprendizagem dos alunos, conhecimento e prática de professores e também projetos de inovação curricular, como é o caso de nossa pesquisa.

Para Yin (2005), um estudo de caso é uma investigação empírica que:

[...] investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos e [...] enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que de pontos de dados e, como resultado baseia-se em várias fontes de evidências, com os dados precisando convergir em formato de triângulo e, como outro resultado, beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise de dados. (p. 32-33)

Desta forma, o estudo de caso pode ser considerado como uma maneira de investigar um tópico empírico seguindo-se um conjunto de procedimentos pré-especificados. Assim nossa pesquisa pode ser caracterizada como um estudo de caso, pois investigaremos um fenômeno, que é apontar as concepções mobilizadas por alunos do Ensino Médio com uma aprendizagem baseada na nova proposta curricular do estado de São Paulo.

Segundo Ponte (2006), o caso depende dos componentes internos e externos do contexto, por isto é preciso dar uma atenção especial à história e ao seu contexto, ou seja, é preciso verificar como se desenvolveu e o meio no qual está inserido. Verificamos com isto que, em nossa pesquisa, além de analisar as atividades desenvolvidas pelos alunos, é preciso verificar em qual contexto o ensino de Probabilidade se desenvolveu, e assim acreditamos que a análise da proposta curricular e dos cadernos que compõem esta proposta, que são utilizados pelos professores e alunos da rede estadual e que também foram utilizados pelos sujeitos desta pesquisa, mostrarão em que contexto o ensino de Probabilidade da rede pública estadual está inserido.

2.2.2. Características do Estudo de Caso

Ponte (2006) afirma que o estudo é mais que uma metodologia de pesquisa, é essencialmente um *design* de investigação, podendo ter propósitos variados e utilizar uma grande variedade de instrumentos e estratégias, assumindo formatos específicos e envolvendo técnicas de coleta e análise de dados muito diversificadas.

Primeiramente, é preciso entender o estudo de caso como uma investigação de natureza empírica, baseado no trabalho de campo ou em análise experimental, além de ser utilizado para compreender a situação tal como ela é. Para este autor,

faz-se um estudo de caso quando não se tem controle sobre os acontecimentos, não sendo possível, portanto, manipular as causas potenciais do comportamento dos participantes.

Assim, segundo Ponte (2006), um estudo de caso pode seguir duas perspectivas essenciais:

- (a) uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes;
- (b) uma perspectiva pragmática, cuja intenção fundamental é proporcionar uma perspectiva global do objeto de estudo do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente. (p. 12)

E em ambas as circunstâncias, verificamos que no estudo de caso procura-se algo muito universal no mais particular. Assim, nossa pesquisa englobará uma perspectiva pragmática, já que nosso objetivo é apontar características dos objetos de estudo sob nosso ponto de vista, com base em uma teoria específica, que é a Teoria das Concepções.

O estudo de caso pode ser diferenciado ainda por outros aspectos diversos. Apresentamos a seguir, os propostos Stake (1995, *apud* Coutinho e Chaves, 2002);

- **estudo de caso intrínseco:** quando o investigador pretende uma melhor compreensão de um caso particular que contém em si mesmo o interesse de investigação;
- **o instrumental:** quando um caso é examinado para fornecer introspecção sobre um assunto, para refinar uma teoria, para proporcionar conhecimento sobre algo que não é exclusivamente o caso em si; o estudo do caso funciona como um instrumento para compreender outro(s) fenômeno(s);
- **coletivo:** quando o caso instrumental se estende a vários casos, para possibilitar, pela comparação, conhecimento mais profundo sobre o fenômeno, população ou condição. (p.226, grifo nosso)

Assim, nossa pesquisa pode ser caracterizada pelo aspecto instrumental, já que nosso objetivo é refinar uma teoria, visando compreender quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas pelos alunos. Com isto podemos considerar nossa pesquisa como um estudo de caso, pois visa fazer um estudo profundo sobre um novo projeto curricular em implantação, que é a Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008, em uma situação única, que é o ensino

de Probabilidade por meio dos cadernos pertencentes a esta proposta; mais especificamente, quais concepções probabilísticas os alunos apresentam ao utilizar estes cadernos e como validam essas concepções. Igualmente, pretendemos contribuir para a compreensão de um fenômeno de interesse no meio acadêmico, que é o ensino e a aprendizagem das noções probabilísticas.

Os dados coletados serão analisados à luz da Teoria das Concepções, proposta por Balacheff (1995), e dos resultados de pesquisas elencados no capítulo “Estudos Preliminares”.

2. 3. Procedimentos Metodológicos

Inicialmente, fizemos um levantamento de pesquisas que abordaram o tema Ensino e Aprendizagem de Probabilidade. Estes estudos nos levaram à formulação de nossa questão de pesquisa, assim como nos indicaram alguns elementos para o reconhecimento de concepções probabilísticas.

Acreditamos que uma análise dos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares, o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e a Proposta Curricular da SEE, para tecer o caminho do ensino de Probabilidade na educação do Brasil nos dias de hoje, também se faz necessária.

Com base nesta análise, elaboramos uma atividade com 11 questões a serem resolvidas por alunos da segunda e da terceira séries do Ensino Médio da rede pública estadual de São Paulo. Desta forma, o público alvo de nossa pesquisa é formado por alunos de uma escola da rede estadual, localizada no município de São Bernardo de Campo, estado de São Paulo. As atividades foram planejadas de forma a serem trabalhadas pelos alunos em duplas ou trios, pois acreditamos que muitas concepções podem emergir ou serem explicitadas nas conversas e “discussões” entre os alunos durante a resolução dos problemas propostos.

A escolha pelos alunos da rede pública se deu pela nova proposta que vem sendo implantada pela Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo,

desde o início de 2008. Acreditamos que as escolhas feitas pela proposta influenciam as concepções construídas e mobilizadas pelos alunos, daí a realização do experimento com alunos da rede estadual.

Foram realizadas duas atividades com os alunos da segunda série e uma atividade com os alunos da terceira série, com o objetivo de verificar quais concepções os alunos mobilizam antes do ensino formal, ao término deste, e passado um ano deste ensino. Como o conteúdo Probabilidade é abordado na segunda série do Ensino Médio, no terceiro bimestre aplicamos uma atividade antes do ensino formal e uma outra logo após o término do mesmo, com uma das duplas, formada por alunos da pesquisadora, que é professora da turma. Outras duas atividades foram aplicadas, sendo uma com alunos da segunda série de outra professora e uma com alunos da terceira série, também de outro professor. Nosso objetivo com isto é verificar se as concepções construídas são as mesmas devido à proposta que é seguida, ou se, porventura, podem surgir concepções diferentes, devido à metodologia utilizada pela professora-pesquisadora.

A atividade também foi realizada com alunos da terceira série, com o objetivo de verificar quais concepções foram construídas e permaneceram estáveis, passado um ano do ensino formal. Como a proposta foi implementada em 2008, o conteúdo trabalhado foi o mesmo trabalhado com os alunos da 2ª série em 2009, inclusive, as situações propostas.

3 – REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. Teoria das Concepções (ckç)

Para Balacheff (1995), a palavra “concepção” não é definida explicitamente, afirmando que as pesquisas que visam estudar o ensino e aprendizagem da Matemática a utilizam no senso comum, por isto buscou estudar formas de definir o termo.

A Teoria das Concepções (ckç - *concept, knowledge, conception*) foi introduzida por este autor e visa estudar as relações entre os conceitos, os conhecimentos e as concepções que porventura os estudantes podem vir a apresentar sobre determinado conteúdo matemático.

Com isto, o autor tenta, por meio desta teoria, desenvolver um significado, uma definição para o termo “concepção”, mais especificamente o sentido dela nas pesquisas em Educação Matemática.

Para este autor, resgatar a noção de concepção é mobilizar ações no sujeito, mediante a realização de uma atividade. Este, em situações específicas, pode agir racional e coerentemente para resolver a questão. Para isto considera que uma concepção C envolve uma quádrupla (P, R, L, Σ) na qual:

- P é um conjunto de problemas, sobre o qual C é operatório;
- R é um conjunto de operadores (ferramentas cognitivas para ação);
- L é um sistema de representação, que permite exprimir os elementos de P e de R;
- Σ é uma estrutura de controle, que assegura a não contradição de C.

Nesta quádrupla, um sujeito diante de um problema a resolver, pode dispor de várias concepções sobre um mesmo objeto matemático e mobilizar uma ou outra em função do problema proposto. Estas concepções podem ser localmente ou globalmente verdadeiras, considerando que cada uma delas tem um domínio de

validade, mas que o sujeito pode, eventualmente, mobilizá-las fora deste domínio. Isto pode ser a origem de vários obstáculos identificados no ensino e na aprendizagem do conceito.

A caracterização do conjunto de problemas é considerada por Balacheff (1995) como muito complexa, afirmando que a opção sugerida por Vergnaud (1996) de considerar todos os problemas para os quais a concepção considerada fornece ferramentas eficientes para elaborar uma solução e aquela apontada por Brousseau, de considerar um conjunto finito de problemas com a ideia de que outros problemas que dela derivam, não são suficientes. Assim, considera que o conjunto de problemas deve ser formulado de forma empírica, partindo da caracterização das situações e permitindo diagnosticar as concepções dos estudantes, ou seja, o conjunto de problemas que dá significado à concepção.

Os operadores são as ferramentas cognitivas que estes estudantes mobilizam para resolver os problemas, ou seja, são meios que possuem para obter uma evolução nas relações com o milieu⁷. Esta ação pode ser considerada concreta quando permite uma ação material, ou abstrata, quando permite transformações linguísticas, simbólicas ou representações gráficas. Um exemplo de operador seria o uso de regra sintática para transformar uma expressão algébrica ou teorema.

Para Balacheff (1995), o sistema de representação consiste num conjunto de significantes, que podem ser compreendido como a representação de um objeto ou pensamento e deve ser adequado para dar conta dos problemas e permitir a ação dos operadores. São exemplos de sistemas de representação a linguagem algébrica, o desenho geométrico e a representação gráfica.

Por último, este autor define a estrutura de controle como a estrutura que permite exprimir os meios do estudante fazer escolhas, tomar decisões e validar uma ação. Balacheff considera esta estrutura muito mais complexa do que a estrutura proposta por Vergnaud (1996), que faz referências aos teoremas-em-ação e aos invariantes operatórios. Ela é considerada mais complexa e inovadora, pois

⁷ No sentido proposto por Brousseau (1986), das relações do sujeito com o "milieu". Para Brousseau, o "milieu" é tudo o que interage com o aluno de forma antagônica, ou seja, de forma a desafiar o aluno a encontrar respostas das situações problemas.

Balacheff (1995) acredita que a problemática da validação está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, a estrutura de controle têm a função de julgar a validade e a adequação da ação realizada pelo sujeito que resolve um problema, enquanto que para Vergnaud (1996), as ações vão apenas até os procedimentos utilizados para se verificar que as ações são legítimas e corretas, sem a preocupação de validá-las, e desta forma propiciar a compreensão.

Assim, a Teoria das Concepções se diferencia da teoria dos Campos Conceituais no sentido dos invariantes operatórios. Enquanto na segunda, eles estão agrupados em uma ampla classe (o controle está inserido nos invariantes), na primeira, estão organizados em duas categorias: operadores e estrutura de controle. Para Balacheff (1995), os operadores são os instrumentos necessários à resolução do problema e as estruturas de controle fazem a validação ou não da concepção. É esta validação que nos permitirá identificar determinada concepção.

Balacheff (1995) acredita ainda que a caracterização de uma concepção não envolve mais o conceito do que o meio com o qual o sujeito interage. Pelo contrário, permite uma caracterização do sujeito com o meio e o sistema, assim o sistema de representação permite a formulação e uso dos operadores.

Para este autor, o conjunto de todas as concepções que um estudante tem de determinado conteúdo forma um conhecimento e o conjunto de todos os conhecimentos forma o conceito. Para explicar melhor, apresentamos o seguinte esquema, proposto por Balacheff (1995):

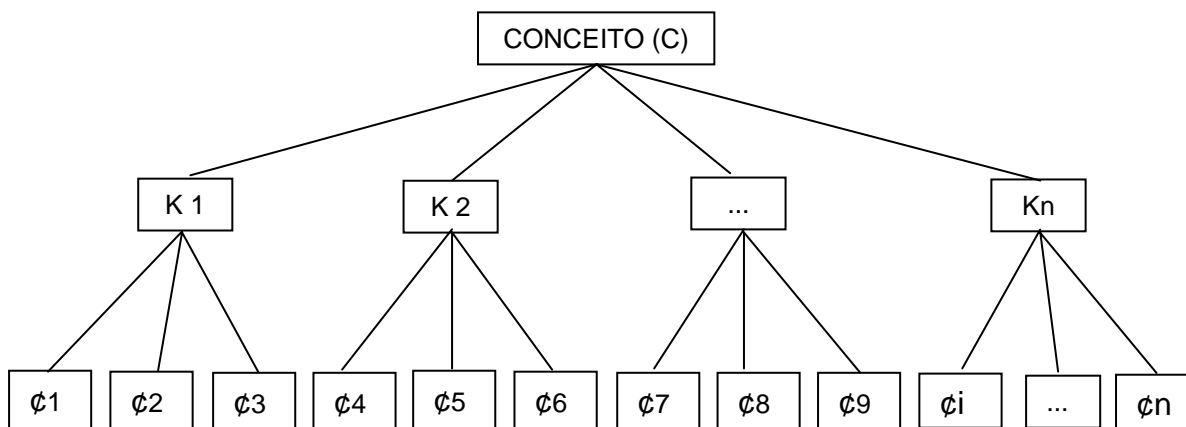


Figura 1 - Esquema das relações possíveis entre concepções, conhecimentos e conceitos, propostas por Balacheff (1995).

Neste esquema, $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ constituem o conjunto de concepções que forma o conjunto de conhecimentos K_1, K_2, \dots, K_n , que forma o conceito. A título de exemplo, podemos considerar a Probabilidade como um conceito que possui diversos enfoques: clássico, frequentista, subjetivo e axiomático, que são os conhecimentos que um sujeito tem sobre Probabilidade e os invariantes operatórios que o sujeito utiliza para “trabalhar” com a Probabilidade, caracterizando as concepções.

Neste caso, para o Conceito de Probabilidade, nossa proposta pode ser ilustrada pelo esquema mostrado na figura 2.

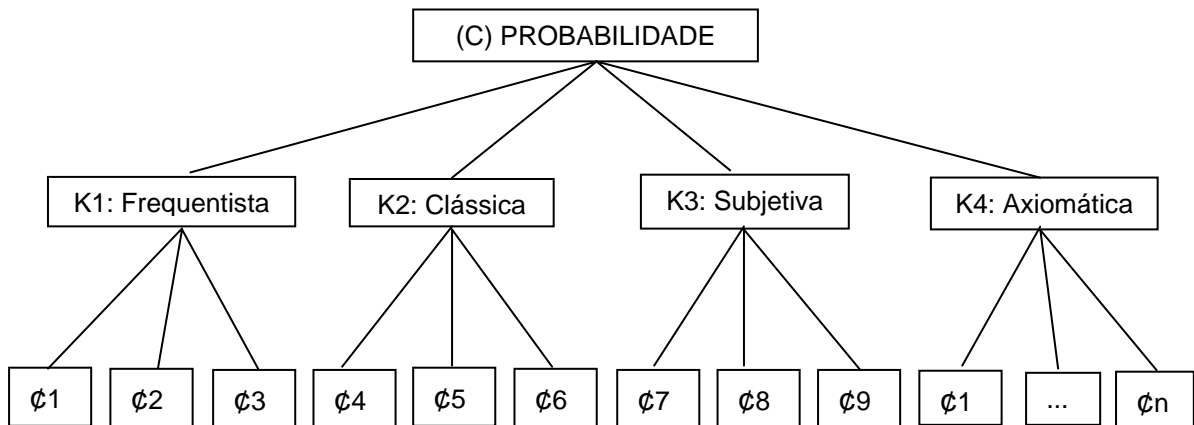


Figura 2 - Esquema das relações entre concepções e conhecimentos, para constituir o conceito de Probabilidade

Para que se possa identificar alguma concepção, a aplicação de uma atividade se faz necessária, pois segundo Balacheff (1995), a concepção é uma instanciação do conhecimento de um sujeito com o *milleu*, ou seja, as concepções são influenciadas pelo *millieu*. Além disto, Lopes (2008) acredita que a realização de uma atividade que envolva contextos que sejam significativos ao aluno se faz necessária, pois a aprendizagem só complementar a sua formação caso ela seja significativa.

Acreditamos que é necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, as quais considerem seus contextos e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta, de coleta e de organização de dados. A aprendizagem da

Estocástica só complementar a formação dos alunos se for significativa, se considerar situações familiares a eles, que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas. (LOPES, 2008, p. 59-60)

Diante disto, a elaboração da situação problema deverá ser feita cuidadosamente, considerando-se as condições de aplicação, os conhecimentos disponíveis e os contextos, para que seja possível identificar as concepções.

3.2. Concepções Probabilísticas propostas por Azcárate (1996)

Como o objetivo de nossa pesquisa é diagnosticar quais concepções probabilísticas são mobilizadas pelos alunos do Ensino Médio que participaram de nossa pesquisa, optamos por estudar as categorias propostas por Azcárate (1996), como ponto de partida para nosso trabalho. Destacamos, no entanto, que o termo “concepções” é utilizado por esta autora com significado distinto do proposto por Balacheff (1995). Ela utiliza o termo concepção sob o ponto de vista de Thompson (1992 *apud* Azcárate, 1996), que considera a concepção como *“uma estrutura mental de caráter geral, que inclui crenças, conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências, conscientes ou inconscientes”*. (p. 41)

Em sua pesquisa, a autora definiu quatro categorias de concepções probabilísticas, com o objetivo de identificá-las nos professores que participaram de sua pesquisa (professores espanhóis para as séries iniciais da escolarização), de modo que as informações encontradas pudessem auxiliar os cursos de formação docente.

Apresentamos a seguir as quatro concepções apresentadas por esta autora.

→ Concepção “Não Probabilística” da Realidade

Para Azcárate (1996), a “Concepção Não Probabilística da Realidade” pode ser caracterizada por uma falta de compreensão do azar e/ou dos sucessos aleatórios. Segundo ela, esta compreensão é:

[...] algo desconhecido; portanto, não consideram viável a predição de algo dependente do azar ou, simplesmente, consideram dita predição como resultado de uma percepção

peçoal, subjetiva, do que se espera que ocorra. As respostas estão baseadas em crenças, com modelos deterministas de raciocínio. Suas explicações se apoiam normalmente em relações causais diretas e na explicação da ocorrência de sucessos simples e imediatos. (AZCÁRATE, 1996, p. 66, tradução nossa).

Neste caso, os sujeitos não concebem o sucesso aleatório como um resultado entre muitos possíveis dentro de um experimento aleatório. Segundo a autora, são:

[...] estratégias dominadas por modelos deterministas causais em que não há nenhum raciocínio estocástico, nem são subjacentes à percepção alguma do aleatório, se raciocina sob esquemas causais diretos. (AZCÁRATE, 1996, p. 66, tradução nossa).

Para caracterizar esta concepção, a autora apresenta alguns indicadores que exprimem tal concepção e que serão utilizados em nossa pesquisa para apontar as concepções probabilísticas dos estudantes:

- Não reconhecimento claro do azar e dos sucessos aleatórios;
- Modelos de raciocínio determinista;
- Respostas baseadas em crenças e critérios de causalidade e/ou expectativa de resultados imediatos.

→ **Concepção “Probabilística Intuitiva”**

A segunda concepção apresentada por Azcárate é a “Concepção Intuitiva”. Segundo a autora, nesta concepção, os sujeitos apresentam alguma compreensão do acaso e sua relação com os sucessos aleatórios, mas de forma parcial. Para ela os sujeitos que apresentam esta concepção:

[...] consideram os fenômenos aleatórios como algo de difícil tratamento matemático, só o veem como realizáveis em casos muito conhecidos, como os jogos de azar, por exemplo. Reconhecem a aleatoriedade como uma propriedade de certos fenômenos da realidade, mas seu tratamento probabilístico não é considerado como algo viável. [...] O raciocínio submetido à incerteza está dominado fundamentalmente por juízos heurísticos: representatividade, disponibilidade, etc.; Suas respostas em geral não são normativas, mas utilizam os heurísticos como esquema alternativo para a resolução dos problemas que se apresentam. O uso de um ou outro heurístico,

inclusive de alguma explicação normativa parcial, depende dos contextos, e sua base fundamentalmente está na experiência que o sujeito se coloca sobre cada situação e em sua percepção dos processos estocásticos em cada contexto [...] (AZCÁRATE, 1996, p. 66-67, tradução nossa)

São considerados indicadores desta concepção:

- Possuir alguma compreensão do azar e dos sucessos aleatórios;
- Raciocínios baseados fundamentalmente no uso heurístico de juízo;
- Respostas baseadas em modelos não normativos, com muitos valores diferentes das situações, dependendo da experiência pessoal.

→ **Concepção “Probabilística Emergente”**

O penúltimo nível de concepção apresentado pela a autora é a concepção “Probabilística Emergente”. Nesta concepção o sujeito deve apresentar uma relativa aceitação e compreensão das múltiplas representações matemáticas do azar, além disto:

[...] reconhecem o aleatório como algo possível de ser estudado. Apresentam um nível maior de elaboração, em que podemos considerar aquelas respostas em que se detecta uma diferenciação reconhecida entre as crenças intuitivas e os modelos matemáticos e mostram certa habilidade para aplicar estes modelos a problemas simples. (AZCÁRATE, 1996, p. 67, tradução nossa).

Nesta concepção o sujeito deve apresentar também:

[...] certa compreensão das distintas interpretações do modelo probabilístico, como pode ser a clássica ou a frequencial (frequentista) e certa capacidade de aplicação em determinados casos. Habitualmente esta habilidade está limitada àqueles fenômenos onde são familiares, mas pode confundir-se facilmente ao deparar-se com tarefas desconhecidas, buscando explicações causais e juízos heurísticos novamente. Em geral, esta concepção supõe a presença de alguma instrução em Probabilidade e Estatística, ainda que seja de caráter inicial.

Para esta concepção temos como indicadores:

- Uma compreensão inicial sobre a existência de múltiplas

representações matemáticas do azar, a partir de diferentes perspectivas;

- Habilidade para aplicar modelos normativos a problemas simples e familiares;
- Diferenciação reconhecida entre as crenças intuitivas e os modelos matemáticos.

→ **Concepção "Probabilidade normativa"**

Por fim, Azcárate (1996) aponta a concepção "Probabilidade Normativa" que considerada como a de nível mais elevado. Para este tipo de concepção:

A aleatoriedade é reconhecida como um modelo matemático que aplicamos a certos fenômenos ou situações para estudá-las e chegar a uma maior compreensão de seu funcionamento. É um modelo explicativo e não uma qualidade dos fenômenos. Em suas explicações há uma profunda compreensão dos modelos matemáticos para o tratamento da incerteza (clássico, aproximação bayesiana, frequentista, etc), de suas interações e complexidade de sua aplicação nas distintas situações. (AZCÁRATE, 1996, p. 68, tradução nossa)

Portanto, para mobilizar esta concepção, os sujeitos devem apresentar uma respeitável habilidade para comparar e contrastar as diferentes situações aleatórias em função dos referidos modelos, e uma capacidade desenvolvida para:

- Selecionar e aplicar o modelo normativo adequado aos distintos contextos, relacionados com situações de incerteza;
- Calcular as probabilidades correspondentes, reconhecendo as limitações e pressupostos de cada modelo;
- Modificar estes modelos e adaptá-los a situações não familiares para eles.

Segundo a autora, os sujeitos que apresentam este nível de concepção probabilística possuem um alto nível de formação e experiência neste campo. Segundo ela é um estado dificilmente alcançado, inclusive pelos especialistas no tema, pois estudos têm comprovado que a maioria dos adultos utiliza em sua vida cotidiana juízos heurísticos, ainda que inconscientemente.

Como indicadores desta concepção, aponta:

- Uma profunda compreensão da noção de aleatoriedade e sua aplicação ao estudo da realidade;
- Habilidade para selecionar e aplicar modelos normativos e sua relação com diferentes contextos e fenômenos;
- Capacidade para comparar e contrastar os diferentes modelos e raciocínios sob critérios normativos nas distintas situações aleatórias.

Por fim, ressaltamos que essas categorias foram elaboradas de forma a atingir quatro níveis de concepções no ensino de Probabilidade e estão classificadas de forma hierárquica. Assim nossa pesquisa parte da hipótese de que índices que permitam reconhecer cada uma poderão ser identificados como operadores ou estrutura de controle quando o campo de problemas é da determinação de uma probabilidade de um evento resultante de um experimento aleatório.

Conforme dito anteriormente, a atividade proposta foi elaborada de maneira a facilitar uma evolução para as categorias mais elevadas. Assim, de acordo com as concepções que identificarmos nos sujeitos, buscaremos explicações nas categorias elencadas, para que assim possamos definir pontos a serem trabalhados no ensino de Probabilidade.

3.3. Organização Praxeológica

O quadro teórico apresentado na sequência é baseado na Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1999), na interpretação realizada por Sabo (2007) e nas referências de Almouloud (2007) e embasará nossa análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo e das questões do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

A noção de Organização Praxeológica está inserida na Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard (1999) e situa a atividade matemática no conjunto de atividades humanas e das instituições sociais. Segundo

Sabo (2007), a utilização desta teoria proporciona um procedimento de análise de livros didáticos acerca dos conhecimentos matemáticos e didáticos e com isto justificamos nossa escolha para a análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo e das questões do ENEM. A teoria fornece condições e subsídios para analisar como os conhecimentos estão relacionados e como essas relações podem objetivar efetivamente a transposição didática⁸ dos conceitos matemáticos envolvidos.

Chevallard (1999) apresenta a TAD como uma teoria que estuda o homem frente ao saber matemático e mais especificamente, frente às situações matemáticas. O postulado básico desta teoria é admitir que qualquer atividade humana possa ser descrita por um modelo único, que se resume na palavra *praxeologia* (do grego *prâksis*, e os, ação, o fato de agir e do grego *logía*, indicativo de ciência). Para Sabo (2010) pode-se observar o ato de ensinar e aprender Matemática como sendo, também, o resultado de atividades humanas.

A Organização Praxeológica, segundo Almouloud (2007), é formada por um conjunto de *técnicas*, *tecnologias* e *teorias* para serem usadas na execução de uma determinada *tarefa*. A funcionalidade destas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias pode ser compreendida da seguinte maneira: uma tarefa está ligada a uma ou mais técnicas. Estas por sua vez, estão associadas a uma tecnologia, que é justificada por uma teoria.

A noção de *tarefa* está relacionada com o objetivo que se deve alcançar e na maioria dos casos, é identificada por um verbo que sugere uma ação, como por exemplo, calcular a Probabilidade de um evento acontecer, porém, calcular somente não é, caracterizando um gênero de tarefa.

Segundo Chevallard (1999):

[...] tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas não são dados da natureza, são “artefatos”, “obras”, construções institucionais, cuja

⁸ Interpretada na TAD como uma noção que desenvolve a tripla ruptura epistemológica provocada pela teoria das situações, pois a noção de transposição didática mostra que o saber matemático (saber científico, ensinado ou a ensinar) está no centro de toda problematização didática. Em consequência, este saber jamais pode ser considerado como algo inquestionável. (ALMOULOU, 2007, p. 112)

reconstrução desta instituição, e, por exemplo, desta classe, é um problema completo, que é um objeto próprio da didática.⁹ (p. 3)

A execução de uma tarefa necessita de uma maneira, um método ou um procedimento que a execute. Esta maneira de executar uma tarefa é chamada de *técnica*. No caso de Probabilidade, uma técnica seria o cálculo de Probabilidade por meio da razão entre o número de sucessos sobre o número total de possibilidades. A palavra técnica vem do grego *tekhnikós*, ê, on, relativo à arte, à ciência ou ao saber, ao conhecimento ou à prática de uma profissão (SABO, 2007).

A existência de uma técnica supõe também a existência de uma justificativa que valide sua aplicabilidade. Este discurso de justificativas sobre a técnica é chamado de *tecnologia*. Vale ressaltar que qualquer que seja o tipo de tarefa, a técnica relativa a esta tarefa está sempre acompanhada de pelo menos um vestígio de tecnologia. A tecnologia tem a função de explicar, justificar e demonstrar as técnicas utilizadas, por isto, podemos entender a tecnologia como o conjunto de propriedades, definições, teoremas ou axiomas, assim, para o exemplo anterior, sobre o cálculo de Probabilidade, teríamos como tecnologia que justificaria a técnica: a definição clássica de Probabilidade, a definição de eventos e as operações entre eles (operações entre conjuntos). Segundo Coutinho (2001), a definição clássica é aquela proposta no segundo princípio enunciado por Pierre-Simon Laplace em sua obra *Essai Philosophique des Probabilités*, na qual foi feita a primeira tentativa conhecida de axiomatização da Teoria das Probabilidades, conforme apresentado no capítulo 1 deste trabalho.

Chevallard (1999) destaca também, que a tecnologia tem uma segunda função, que é a de explicar, esclarecer e tornar inteligível as técnicas. Enquanto a primeira se relaciona diretamente com a técnica, a segunda tenta explicar por que ela é correta, ou seja, porque ela se justifica como técnica para a tarefa com a qual está relacionada.

A tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, que é definida por *teoria* e segundo Chevallard (1999):

⁹ Tradução nossa.

[...] o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas de que se pode pedir razão. Passe-se então, a um nível superior de justificação – explicação – a teoria, que retoma, em relação à tecnologia, o papel que a última tem a respeito da técnica. (p. 5)

Em nosso exemplo, a Teoria que justifica a tecnologia é uma composição entre a Teoria das Probabilidades e a Teoria dos Conjuntos.

Assim, a Organização Praxeológica é constituída, segundo Chevallard (1999), por dois blocos: o *prático – técnico*, que constitui o saber fazer e o *tecnológico – teórico*, que constitui o saber.

Em nossa pesquisa, a organização praxeológica estará relacionada diretamente ao conjunto de concepção que pretendemos identificar. As técnicas e tecnologias identificadas nos problemas propostos nos cadernos integrantes da proposta curricular do Estado de São Paulo poderão apontar possíveis estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas propostos em nossa atividade, e por consequência, possíveis operadores e elementos da estrutura de controle.

4 – ANÁLISE DOS DOCUMENTOS OFICIAIS

4.1. Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) surgiram a partir da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (Lei 9394/96, de 20 de dezembro de 1996) e estão divididos em duas áreas: Ensino Fundamental (PCN-EF) e Ensino Médio (PCN-EM). Como esta pesquisa tem por finalidade o estudo do ensino e aprendizagem do conteúdo de Probabilidade na segunda série do Ensino Médio, optamos por analisar os documentos destinados a este nível de ensino (PCN-EM, PCN+ e Orientações Curriculares).

Segundo o trecho apresentado pelo MEC em seu portal, sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM):

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio são o resultado de meses de trabalho e discussão realizados por especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional. (BRASIL, 1998¹⁰)

Além disto, o PCNEM tem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor na busca de novas abordagens e metodologias. (BRASIL, 2000, p. 4). Ele está dividido em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Tendo em vista o objetivo do presente estudo, observaremos os documentos referentes à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, mais especificamente o conteúdo de Probabilidade. Desta forma, verificamos que o PCNEM propõe que o aluno compreenda o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilize instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de Probabilidade. Porém, em todo o

¹⁰http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12598:publicacoes. Acessado em 05/01/2008

documento desta área de conhecimento, nos deparamos com apenas um trecho relacionado ao conteúdo de Probabilidade, mas que mostra a importância da abordagem do tema no Ensino Médio:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias de Probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de Contagem, Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 2000, p. 44-45).

Desta falta de explicitação de conteúdos a serem abordados, também apontados e comentados por Goulart (2007), originaram-se os PCN+ (2000), que vieram suprir esta necessidade. Segundo o mesmo autor, estes documentos apresentam com maior detalhe as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas neste período de escolaridade.

Analisando este documento, verificamos que os conteúdos de matemática estão divididos em três temas; 1 - Álgebra: números e funções; 2 – Geometria e medidas; 3 – Análise de Dados. O conceito de Probabilidade está inserido no tema 3, ou terceiro eixo de ensino. Segundo o PCN+, a análise de dados é considerada essencial em problemas sociais e econômicos, como nas estatísticas relacionadas à saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado. Este eixo de ensino está organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade. Nosso objetivo é analisar o tema Probabilidade, mas como este está intimamente ligado à Estatística e à Contagem, o PCN+ mostra isto fortemente, faremos uma análise dos três temas.

Primeiramente, o PCN+ propõe, como uma das grandes competências, a contextualização sócio-cultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade. Desta forma, o aluno deve ser capaz de compreender as informações que circulam na

mídia e em outras áreas do conhecimento na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico e mais do que isto, ultrapassar a leitura de informações e refletir mais criticamente sobre seus significados. Assim, o tema proposto deve ir além da simples descrição e representação de dados, atingindo a investigação sobre estes dados e a tomada de decisões. (BRASIL, 2000)

Em relação ao tema Probabilidade, verificamos que:

A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de idéias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente. Cabe à Estatística, por exemplo, analisar a intenção de voto em uma eleição ou o possível êxito do lançamento de um produto no mercado, antes da eleição em si e da fabricação do produto. Isto é feito através da pesquisa estatística, que envolve amostras, levantamento de dados e análise das informações obtidas. (BRASIL, 2000, p. 126)

Desta forma, a Probabilidade:

Acena com resultados possíveis, mas não exatos. Ao afirmar que o resultado 1 tem $1/6$ de Probabilidade no lançamento de um dado, não há certeza de que em seis lançamentos do dado o número 1 sairá exatamente uma vez. Assim como ao afirmarmos que determinado tratamento médico tem 90% de probabilidade de cura para uma doença, não garante que em um grupo de 10 pessoas submetidas a este tratamento exatamente uma pessoa continuará doente. (BRASIL, 2000 p. 126)

Com isto, o PCNEM orienta para que Estatística e Probabilidade lidem com dados e informações em conjuntos finitos e que utilizem procedimentos que permitam controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados. Por isto, a contagem ou análise combinatória é apenas parte instrumental deste tema, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da Probabilidade por si só, permitindo o desenvolvimento de uma outra forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório.

Os conteúdos e habilidades propostos para a unidade temática de Probabilidade a serem desenvolvidas neste tema seriam:

- *Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da Probabilidade como meio de prever resultados;*
- *Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolva o pensamento probabilístico;*
- *Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.*

Embora optemos por analisar os documentos do Ensino Médio, duas abordagens sugeridas nos documentos do Ensino Fundamental são de suma importância para esta pesquisa:

- A Probabilidade é apresentada com a finalidade de promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Destacam-se o acaso e a incerteza que se manifestam intuitivamente, portanto cabendo à escola propor situações em que as crianças possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos; (p. 52)
- O raciocínio estatístico e probabilístico seja desenvolvido por meio da exploração de situações de aprendizagem que levam o aluno a coletar, organizar e analisar informações, formular e fazer inferências convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas. Desta forma, justificam o ensino de Probabilidade e da estatística acenando para a necessidade do indivíduo compreender as informações veiculadas, tomar decisões e fazer previsões. (BRASIL, 1998 p. 65)

Com isto, é possível perceber que os PCN já sugerem um enfoque frequentista de Probabilidade, conforme apontam alguns pesquisadores, tais como Coutinho (1994).

4.2. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)

O Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM foi criado a partir da atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB (Lei 9394/96, de 20 de dezembro de 1996) e tem como objetivo avaliar o desempenho do aluno ao final da

escolaridade básica, para aferir o desenvolvimento das competências e habilidades requeridas para o exercício pleno da cidadania¹¹.

O objetivo de analisar o Exame Nacional do Ensino Médio é verificar o que o exame exige do aluno sobre o conceito de Probabilidade ao fim da escolaridade básica, em especial, ao fim do Ensino Médio, bem como comparar o resultado obtido com as recomendações propostas para o ensino de Probabilidade nos cadernos da nova proposta curricular do estado de São Paulo, verificando se estão de acordo ou não com o que é exigido neste exame.

Desta forma, consideraremos os resultados obtidos por Goulart (2007), que em sua dissertação de mestrado realizou uma análise minuciosa das edições de 1998 a 2007 do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

Em suas considerações sobre o ENEM, Goulart (2007) aponta que o exame aborda algumas questões nas quais a Probabilidade está sendo abordada com a estatística, e afirma que o ENEM provocou mudanças na prática docente e nos livros didáticos.

Assim, aponta que entre as edições de 1998 a 2007, foram 12 as questões que tinham como assunto o cálculo de Probabilidade, número este próximo ao que esperava, devido à estrutura do exame, havendo uma proporção entre os temas ao longo do período considerado.

Goulart (2007) apresentou um quadro de tarefas, obtidos a partir das análises das questões do ENEM, e ao compará-lo com o quadro proposto por Silva (2002) sobre as noções probabilísticas¹², conclui que as noções integrantes para introdução dos conceitos de Probabilidade estão presentes no ENEM.

Já comparando com as concepções probabilísticas propostas por Azcárate (1996), apresentadas no capítulo anterior, Goulart (2007) conclui que o exame exige dos alunos a concepção probabilística normativa, afirmando que há várias questões onde se é necessário comparar probabilidades em diferentes contextos. (p. 82)

¹¹ As informações estão disponíveis em: <http://www.enem.inep.gov.br>

¹² O quadro integra as noções para a introdução ao conceito de Probabilidade e, segundo o autor, pode ser utilizado para análise de livros didáticos, propostas curriculares e avaliações.

Este autor também evidencia o baixo índice de acertos das questões que envolviam o cálculo de probabilidades, considerando assim, que os alunos da escola básica apresentam as concepções não probabilísticas da realidade e/ou probabilísticas intuitivas.

Outro ponto negativo apontado por Goulart (2007) é a presença de obstáculos epistemológicos, que podem causar prejuízos à aprendizagem dos alunos, como por exemplo, a interpretação incorreta dos problemas devido à ausência de informações sobre o experimento – segundo Lecoutre (1985, *apud* COUTINHO, 1996) o aluno atribui ao experimento a equiprobabilidade de seus eventos devido à falta de informações no enunciado do problema.

Mas Goulart (2007) não apresenta só críticas aos exames do ENEM, ele aponta como ponto positivo a utilização da árvore e da construção de tabelas na resolução de algumas questões.

4.3. Análise dos Livros Didáticos

Conforme citado no item 2.1. do capítulo 2, faremos uma breve análise dos livros didáticos, com o objetivo de identificar como estes abordam o conteúdo de Probabilidade, embora a análise de livros não seja o foco desta pesquisa. Ela nos servirá como ferramenta, na análise das concepções mobilizadas pelo aluno.

Existe atualmente uma considerável variedade de livros didáticos para o Ensino Médio, porém com a nova proposta implementada nas escolas da rede estadual de São Paulo, que exige a utilização de cadernos “apostilados” por parte dos professores e também dos alunos, os livros didáticos não vêm sendo adotados pelos professores, embora tenham sido enviados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM/2009). Com isto, optamos por não analisar nenhum livro específico e sim considerar as análises já realizadas por outros pesquisadores como Oliveira (2006) e Goulart (2007).

Os livros analisados por Oliveira (2006) foram considerados uma amostra representativa dos livros utilizados no Ensino Médio, por ser indicado e/ou utilizados pela maioria dos 48 professores entrevistados, que foram escolhidos por abranger diferentes perfis, tais como: tempo de magistério, grau de instrução, conhecimento e utilização dos Parâmetros Curriculares Nacionais, além da abordagem do tema Probabilidade e Estatística. Desta forma as considerações de Oliveira (2006) são válidas.

Assim, em sua pesquisa, o autor aponta que o enfoque frequentista de Probabilidade não é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio, apenas o enfoque clássico é contemplado: “*A Probabilidade é apresentada por meio de sua definição clássica. A definição frequentista e a axiomática não são exploradas.*” (OLIVEIRA, 2006)

Além disto, evidencia que os livros não contemplam exercícios que abordem a identificação de experimentos aleatórios, que é um conceito básico no ensino de Probabilidade:

Há poucos exercícios relacionados com experimento aleatório, que é um conceito básico para o desenvolvimento do conteúdo de Probabilidade. Os livros didáticos analisados não dedicam a atenção que deveriam a este conteúdo. (OLIVEIRA, 2006, p. 58)

O autor enfatiza ainda que nos capítulos destinados ao conteúdo de Probabilidade, os conceitos e as atividades são apresentados de forma complexa e não respeitam a gradualidade dos conteúdos desenvolvidos, reforçando assim a ideia de introduzi-los no Ensino Fundamental com continuidade no Ensino Médio:

No capítulo de Probabilidade dos livros didáticos, os conceitos e propriedades são apresentados de forma complexa para um nível introdutório de Ensino Médio, uma vez que não respeitam a gradualidade dos conteúdos desenvolvidos. O mesmo ocorre com as atividades que poderiam levar os alunos à construção desses conceitos, o que vem reforçar a ideia de alguns autores, como Celi Aparecida Espasandin Lopes, que propõem o ensino da Estatística e da Probabilidade nas séries iniciais do Ensino Fundamental, com continuidade no Ensino Médio. Segundo estes autores, os conceitos poderiam ser construídos ao longo da trajetória dos estudantes, com níveis crescentes de complexidade, diminuindo a aflição do professor da graduação, o qual, ao invés de alfabetizar matematicamente o aluno, poderia aprofundar o assunto, uma vez que hoje a maioria

desses cursos tem somente uma disciplina de Estatística. (OLIVEIRA, 2006, p. 89)

Desta forma, acreditamos que nossa pesquisa possa apontar concepções probabilísticas mobilizadas de forma que explicita esta falta de organização cognitiva na construção dos conhecimentos.

Por fim, Oliveira (2006) aponta que apesar de a maioria dos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio apresentarem os conteúdos de Probabilidade, os mesmos aparecem de maneira repetida e, na maioria das vezes, sem relação com o dia-a-dia dos alunos, o que contradiz com os objetivos dos PCN+. Além disto, afirma que a Probabilidade e a Estatística ainda estão muito distantes das propostas apresentadas nos PCN+, pois a maioria dos livros didáticos do Ensino Médio não aborda os conteúdos com o objetivo de incentivar a curiosidade, motivar seu estudo e propor atividades interessantes.

Indo ao encontro deste pensamento, Lopes e Moran (1997 *apud* GOULART, 2007) consideram que os livros didáticos não relacionam a Probabilidade com a estatística e desta forma contrapõe-se ao trabalho que recomenda que o ensino de Probabilidade e Estatística seja realizado de forma integrada, conforme apontam as pesquisas realizadas por Batanero (1996, 2005, 2006 e 2009).

Goulart (2007) em sua análise sobre as influências do ENEM sobre os livros didáticos, afirma que a elaboração destes é influenciada pelo exame e, citando Paiva (2003, *apud* GOULART, 2007), acrescenta ainda que as matrizes do referido exame também influenciam o desenvolvimento da disciplina de matemática no currículo escolar, assim como a prática docente.

4.4. A Proposta Curricular do Estado de São Paulo

4.4.1. Análise da Proposta Curricular

A nova Proposta Curricular foi apresentada pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo (SEE-SP) no início de 2008, com o objetivo de oferecer a todas as escolas públicas estaduais uma base comum de conhecimentos e competências, para que, de fato, estas escolas funcionem como uma rede.

A SEE-SP sentiu a necessidade da unificação do currículo devido à grande variedade de currículos diferentes existentes na rede, além da intensa mobilidade dos alunos entre escolas e, muitas vezes, de professores.

Outro fator que levou à elaboração da Nova Proposta Curricular foi a melhoria da qualidade de ensino, uma vez que os últimos resultados dos alunos da rede, em exames como o ENEM¹³, SARESP¹⁴ e SAEB¹⁵ foram insatisfatórios, conforme avaliação da própria SEE-SP.

Desta forma, no início de 2008, a SEE-SP enviou para todos os professores da rede o chamado “Caderno do Professor”, parte integrante desta Proposta. Os cadernos são distribuídos por série e bimestre e com isto, o caderno analisado nesta pesquisa, que contempla os conteúdos referentes à Probabilidade, é o caderno destinado ao 3º bimestre da 2ª série do Ensino Médio¹⁶.

Em 2009, a SEE-SP enviou, além dos cadernos do professor, o Caderno do Aluno, com o objetivo de facilitar o desenvolvimento dos conteúdos propostos pelo Caderno do Professor. O Caderno do Aluno é composto pelos exercícios que são propostos no Caderno do Professor e são separados em sessões: *Você aprendeu?*, na qual os alunos realizam as atividades juntamente com as orientações do professor, e *Lição de Casa*, na qual os alunos devem realizar tarefas de forma autônoma.

Em nossa análise, buscaremos estudar como os problemas e atividades propostos permeiam o ensino de Probabilidade, bem como analisar estes problemas sob a ótica da Organização Praxeológica proposta por Chevallard (1999), identificando se envolvem a relação entre os enfoques clássico e frequentista, conforme sugerem as pesquisas citadas no item 1.2. do capítulo 1. Estudaremos também, se favorecem a mobilização e/ou construção de concepções probabilísticas adequadas ao problema proposto.

¹³ Exame Nacional do Ensino Médio

¹⁴ Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

¹⁵ Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

¹⁶ O quadro 1, mais adiante, apresentará em quais momentos a proposta aborda conteúdos relacionados à Probabilidade.

4.4.2. Análise dos Cadernos do Professor e do Aluno

Como dito na seção anterior, os conteúdos referentes ao ensino de Probabilidade estão inseridos no caderno do 3º bimestre da 2ª série do Ensino Médio. Assim como nos demais cadernos do professor, o conteúdo do bimestre está organizado em quatro situações de aprendizagem e abordam, além da Probabilidade, conteúdos referentes à análise combinatória. Segundo as orientações dadas ao professor no início do caderno, as situações de aprendizagem pretendem ilustrar a forma de abordagem sugerida, instrumentalizando o professor para sua ação em sala de aula.

Quanto aos conteúdos básicos a serem desenvolvidos no bimestre, as orientações do início do caderno afirmam que os conteúdos sobre Probabilidade e Combinatória costumam trazer certo desconforto aos estudantes e também aos professores (p. 9), ressaltando com isto que tais conteúdos dependem apenas de ferramentas básicas da Matemática: as quatro operações com números naturais e a ideia de comparação entre a parte e o todo.

Diante disto, vemos uma preocupação em desmistificar o tratamento dado a estes conteúdos e propõem que a classificação e formalismo tradicional sejam, inicialmente, relegados a um segundo plano, para que apenas ao final do módulo sejam formalizados pelo professor. Observamos, no entanto, que o material não alerta o professor quanto a um dos principais motivos das dificuldades observadas nas pesquisas na área da Educação Estatística: a apreensão do acaso, a consideração da ação do acaso na produção de eventos dos quais se querem determinar a Probabilidade. Ou seja, o material não aborda a Probabilidade como uma medida da incerteza, mas simplesmente como uma fração a ser interpretada pelo aluno, denotando uma visão determinista que está na base das dificuldades observadas nas pesquisas, segundo aponta Coutinho (2003).

Série	Conteúdo
5ª série	Problemas de Contagem
6ª série	Noções de Probabilidade
8ª série	Contagem Indireta e Probabilidade

Quadro 1 - Conteúdos Probabilísticos na Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Com base na hipótese de que o raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades são apresentados aos alunos, e trabalhados por eles desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, conforme Quadro 1 (acima), o Caderno do Professor propõe que os conteúdos do bimestre iniciem-se com o cálculo de probabilidades, desprovidas do cálculo de combinatória, afirmando que:

Apresentar o cálculo de probabilidades sem a exigência de raciocínio combinatório significa priorizar o fato de que podemos expressar a chance de ocorrência de um evento por intermédio de uma razão entre dois valores, a parte e o todo. O numerador desta razão coincide com o número de resultados esperados para o experimento, enquanto o denominador coincide com o número de resultados possíveis. (São Paulo, SSE¹⁷, 2008. p. 9)

Esta citação sobre o não uso do raciocínio combinatório, também converge para resultados de pesquisas na área, tais como Coutinho (1994), que afirma que a utilização de problemas que envolvam o raciocínio combinatório pode aumentar as dificuldades da resolução de problemas nos quais a intenção é introduzir o conceito de Probabilidade. Na referida pesquisa, a autora opta por problemas de contagem que podem ser solucionados com o auxílio da árvore de possibilidades, de forma que estes não sejam um fator de complicação para a introdução do conceito de Probabilidade.

No entanto, a citação acima nos permite inferir o uso do enfoque tradicional dado ao ensino de Probabilidade, com uso unicamente da definição clássica ou laplaciana e sem o devido trabalho com a percepção ou explicitação da experiência aleatória em jogo. Visando aprofundar nossa compreensão sobre esta proposta de enfoque, passamos à análise das situações de aprendizagem propostas no material.

¹⁷ Caderno do Professor: Matemática, 2ª série do Ensino Médio, 3º bimestre, p. 9.

Situações de Aprendizagens propostas no Caderno do Professor

A primeira Situação de Aprendizagem proposta, intitulada *Probabilidade e Proporcionalidade no Início da Era do Jogo*, tem por objetivo, explorar a noção teórica¹⁸ de Probabilidade por intermédio de jogos pedagógicos. A segunda, *Análise Combinatória: raciocínios aditivos e multiplicativos*, têm por objetivo a resolução de situações-problema que envolvam simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades. Neste momento já podemos apontar um equívoco com as orientações dadas inicialmente pelo caderno, que prevê o cálculo de Probabilidade desprovido do raciocínio combinatório. A terceira apresenta *As Probabilidades e o Raciocínio Combinatório*, e propõe problemas que envolvam o cálculo de Probabilidade que exija dois aspectos: a independência¹⁹ de dois ou mais eventos para os quais se quer calcular a Probabilidade e as diferentes possibilidades de ordenação para ocorrência simultânea. Por fim, a quarta Situação de Aprendizagem aborda situações em que o cálculo de Probabilidade e o raciocínio combinatório envolvam o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.

→ Primeira Situação de Aprendizagem: Probabilidade e Proporcionalidade no início da era do jogo.

A presente situação de aprendizagem inicia-se com um roteiro de aplicação que traz algumas premissas, tais como:

- o cálculo de probabilidades deve estar relacionado com os jogos de azar;
- a Probabilidade pode ser compreendida como a razão entre parte e todo (desde que não envolvam raciocínio combinatório);
- a Probabilidade de dois ou mais eventos pode ser calculada pela multiplicação das probabilidades de cada um dos eventos,;
- o cálculo de probabilidades pode ser desvinculado dos problemas associados ao raciocínio combinatório;

¹⁸ O termo noção teórica foi utilizada pela equipe de autoria do caderno.

¹⁹ Termo utilizado pelos autores do caderno.

- o cálculo de Probabilidade em jogos de azar são realizados intuitivamente pelos alunos desde o Ensino Fundamental.

Diante destas premissas, já é possível perceber, que o caderno não contempla o enfoque frequentista. O que se percebe, até então, é a intenção de desvincular o cálculo de Probabilidade do formalismo presente nesta teoria e de uma primeira abordagem excessivamente teórica, partindo de premissas como a utilização de jogos pedagógicos.

Embora caracterizada num contexto diferenciado, ao afirmar que a Probabilidade pode ser calculada por meio da razão entre parte e todo, a situação já traz um caráter determinista: a razão entre parte e todo só é Probabilidade quando considerado um sorteio aleatório que envolva esta razão. Além disto, a primeira premissa limita os conteúdos aos jogos de azar, excluindo assim, diversos contextos familiares e acessíveis aos alunos, tais como o controle de qualidade em uma indústria, a escolha aleatória de sujeitos para participar em pesquisas eleitorais, entre outros.

Esta primeira situação de aprendizagem é organizada em duas atividades. A primeira, intitulada “Uma narrativa e um problema de Probabilidade”, situa o cálculo de probabilidades num contexto histórico, e apresenta o problema como uma situação que pode ser vivenciada e reproduzida pelos alunos conforme figura 3:

Atividade 1 – Uma narrativa e um problema de probabilidades

Um dos problemas apresentados e discutidos na correspondência entre os matemáticos do século XVII foi o “problema do jogo interrompido”, no qual se questionava sobre a divisão justa de um prêmio, no caso de um determinado jogo não chegar ao fim. Como dividir com justiça, por exemplo, um prêmio **X** entre dois competidores **A** e **B** que disputam uma partida interrompida quando o placar apontava **2×0** para o competidor **A**, se de acordo com a regra inicial, levaria o prêmio total o competidor que vencesse primeiro 3 partidas? Quanto de **X** deve, nesse caso, caber a cada jogador? **A** fica com tudo? **B** fica com $\frac{1}{3}$ de **X** e **A** com $\frac{2}{3}$ de **X**?

Para introduzir o cálculo das probabilidades, o professor pode propor a seus alunos, durante uma aula de 50 minutos, situação semelhante à histórica, aproveitando o momento para compor uma narrativa interessante sobre o tema. Nesse sentido, o professor poderá contar aos alunos sobre um amigo que presenciou uma partida de

tênis programada para cinco *sets*, em que o vencedor ganharia 40 pontos no *ranking* da confederação. Um dos jogadores precisaria vencer primeiro três *sets* para ganhar o jogo. Entretanto, relatou o amigo, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o terceiro *set*, com o placar apontando dois *sets* para o jogador **A** e um *set* para o jogador **B**. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, por volta de 30 de dezembro. O que fazer se um ou outro jogador pudesse vir a se consagrar o número 1 do mundo dependendo do número de pontos que conseguisse naquele último jogo do ano? Os organizadores do torneio se reuniram às pressas e decidiram que os 40 pontos seriam divididos entre os dois jogadores proporcionalmente à probabilidade que cada um teria de sair vencedor, caso a partida chegasse ao final.

Feito o relato, o professor propõe que os alunos opinem sobre o destino dos 40 pontos e, depois de algum tempo, apresenta a seguinte solução:

Figura 3 - Enunciado da primeira Situação de Aprendizagem proposta no Caderno do Professor

A solução apresentada pelo Caderno do Professor foi a seguinte:

1º set	2º set	3º set	4º set (não ocorreu)	5º set (não ocorreu)
A vence: (1×0)	B vence: (1×1)	A vence: (2×1)	50% de chance de A vencer; o jogo acaba em 3×1	
			50% de B vencer; o jogo empata em 2×2 e continua	Se A vencer, 3×2. Chance de 50% de 50%, ou 25% para A
				Se B vencer, 2×3. Chance de 50% de 50%, ou 25% para B

Figura 4 - Quadro com solução do problema proposto no Caderno do Professor.

Diante disto, podemos considerar que a atividade propõe que os alunos calculem a chance de um jogador de tênis vencer uma partida que foi interrompida no terceiro *set*, sabendo que a partida teria cinco *sets*. Com dois jogadores, inicialmente pode-se supor 50% de chance para cada um, porém para o jogador que estiver com vantagem (com dois *sets* a favor), teria os reais 50% de chance de vencer o terceiro, mas se este jogador não vencesse, teria outro *set* e assim, 25% para cada um. Com isto o jogador que estivesse com a vantagem teria 75% de chance (50% no 4º *set* e mais 25% no 5º *set*), enquanto que o outro jogador teria apenas 25% de vencer a partida no 5º *set*. A partir disto, a atividade explora outras situações neste mesmo contexto da partida de tênis interrompida. Ressaltamos que este problema “reproduz” o contexto do problema proposto por Pascal e Fermat, citado no item 1.1 desta pesquisa.

A atividade explora intuitivamente²⁰ o cálculo de probabilidades, já que a situação apresenta apenas dois jogadores, e assim o cálculo é sempre dividido por 2. Desta forma, entendemos que a atividade explora minimamente a noção de Probabilidade subjetiva, pois envolve estimativas a serem feitas pelo sujeito a partir de uma análise de contextos, e não de cálculos *a priori* ou observação de estabilização de frequências.

Nesta atividade, é possível perceber que o enunciado do problema apresenta orientações para o professor, dificultando o entendimento da questão e até mesmo seu objetivo. Acreditamos que isto seja um fator relevante para a não compreensão do enunciado do problema por este professor leitor e que pode causar entraves, conforme apontou Goulart (2007).

Ressaltamos que no Caderno do Aluno, antes deste problema, há uma atividade de leitura e análise de texto no qual está inserido, a título de exemplo, um problema preliminar idêntico ao problema proposto, como é possível verificar na figura 5:

²⁰ Batanero (2006) considera a Probabilidade intuitiva como sendo problemas que envolvem sorteios, adivinhações, nos quais há manipulação de dados, mas não há propriedades, apenas opiniões e crenças e conceitos relacionadas a sorte e ao destino. (p. 4)

Atividade 1 – Uma narrativa e um problema de probabilidades



Leitura e Análise de Texto

O estudo das probabilidades iniciou-se, segundo a história da Matemática, a partir da correspondência trocada entre dois pensadores do século XVII, Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Nas cartas que trocavam entre si, eles analisavam problemas de cálculos de chances de determinados jogos de azar, principalmente os que envolviam cartas e dados. Um desses problemas foi o “problema do jogo interrompido”, no qual se questionavam sobre a divisão justa de um prêmio, no caso de um determinado jogo não chegar ao fim. Vamos reproduzir aqui uma adaptação desse problema para que você possa avaliar como está seu bom senso para o cálculo de probabilidades.

Duas pessoas **A** e **B** disputam uma partida de um jogo que terminará quando um dos dois participantes ganhar três rodadas. Para o vencedor há certo prêmio **X**. A primeira rodada aconteceu e o jogador **A** ganhou. A segunda rodada aconteceu e o jogador **A** também ganhou. Quer dizer, o jogo está 2×0 para **A**. Se, por algum motivo, a partida for interrompida agora, antes que ocorra a próxima rodada, o prêmio **X** deverá ser dividido entre os dois participantes. A pergunta é: quanto você acha que deve receber o jogador **A** e quanto deve receber o jogador **B**?

Se você pensou em dividir o prêmio em 3 partes e dar 2 delas para o jogador **A** e 1 para o jogador **B**, lamento, mas se enganou. Se você pensou em dividir o prêmio em 4 partes, destinando 3 delas para **A** e apenas 1 para **B**, é uma pena, pois também não é essa a resposta correta. Mas, se você pensou em dividir o prêmio em 8 partes e dar 7 delas para **A**, parabéns, seu bom senso para o cálculo de probabilidades está em dia. Vamos ver o porquê.

- **Primeira rodada** (já ocorreu): 1×0 a favor de **A**.
- **Segunda rodada** (já ocorreu): 2×0 a favor de **A**.
- **Terceira rodada**: 50% de chance para **A** e 50% de chance para **B**. Se **A** ganhar, termina o jogo.
- **Quarta rodada**: para que exista essa rodada, **A** deve ter perdido a rodada anterior e o jogo agora está 2×1 a seu favor. A chance de **A** vencer e acabar com o jogo é de 25%, isto é, metade dos 50% da chance da terceira rodada. A chance de **B** é igual à de **A**, isto é, 25%. Mas só haverá outra rodada se **B** ganhar. Quer dizer, até agora, o jogador **A** teve 50% de chance de ganhar o jogo na terceira rodada e mais 25% de ganhar o jogo nessa rodada. Suas chances já somam 75%, enquanto as chances de **B** são iguais a 25%.
- **Quinta rodada**: para que aconteça essa rodada, o jogo deve estar empatado em 2×2 . Os 25% de chance da rodada anterior dividem-se agora entre **B** e **A**, isto é, 12,5% para **A** e 12,5% para **B**. As chances do jogador **A**, que na quarta rodada somavam 75%, somam agora 87,5%, enquanto **B**, que só pode ganhar o jogo se essa rodada chegar a acontecer, tem 12,5%.

Essas porcentagens traduzidas em fração equivalem a $\frac{7}{8}$ e $\frac{1}{8}$.

Figura 5 - Caderno do aluno - Atividade preliminar - 1ª Situação de Aprendizagem.

Este texto apresenta a resolução esperada do problema, que é idêntica à resolução proposta no problema que os alunos devem resolver em seguida. Desta

forma, o caderno tira totalmente do aluno a expectativa de vivenciar os problemas encontrados por Pascal e Fermat, no século XVII, para resolver a situação, anunciada no começo do texto, pois apresenta a resolução pronta. Com isto o problema que é proposto no Caderno do Professor (figuras 3 e 4), e no Caderno do Aluno (figura 5), acaba tornando-se apenas um exercício que envolve o cálculo de divisão e porcentagem, deixando de ser um problema no qual os alunos poderiam vivenciar uma situação que os remetesse ao cálculo de probabilidades. Os alunos não estimam a Probabilidade de cada jogador ganhar, apenas reproduzem alguns cálculos.

Outro aspecto que podemos observar no Caderno do Aluno sobre este problema, é que na parte destinada às respostas, o problema apresenta as mesmas tabelas do Caderno do Professor, porém com os espaços em branco, que devem ser preenchidos pelas respostas obtidas, como é possível observar na figura 6.

Problema 1

Em uma partida de tênis programada para 5 *sets*, o vencedor ganharia 40 pontos no *ranking* da confederação. Para isso, um dos jogadores precisaria vencer primeiro 3 *sets* e ganhar o jogo. Entretanto, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o 4º *set*, com o placar apontando 2 *sets* para o jogador **A** e 1 *set* para o jogador **B**. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, por volta de 30 de dezembro, não havendo mais possibilidade de continuá-lo em outro dia do ano. O que fazer se um ou outro jogador pudesse vir a se consagrar o número 1 do mundo dependendo do número de pontos que conseguisse naquele último jogo do ano? Os organizadores do torneio reuniram-se às pressas e decidiram que os 40 pontos seriam divididos entre os dois jogadores proporcionalmente à probabilidade que cada um teria de sagrar-se vencedor, caso a partida chegasse ao final. Dos 40 pontos, quantos caberão ao jogador **A** e quantos caberão ao jogador **B**? Utilize a tabela seguinte para elaborar a solução.

1º <i>set</i>	2º <i>set</i>	3º <i>set</i>	4º <i>set</i> (não ocorreu)	5º <i>set</i> (não ocorreu)
A vence (1 × 0)	B vence (1 × 1)	A vence (2 × 1)		

Figura 6 - Enunciado do Problema 1, apresentado no Caderno do Aluno.

Desta forma, percebemos que o caderno induz o aluno a fazer o cálculo de maneira similar à proposição do texto (ilustração 5), não incentivando a utilização de

outras estratégias. A primeira atividade do Caderno do Aluno contempla ainda um segundo problema com as mesmas características do problema 1.

A segunda atividade, intitulada “Lançando dois dados: um jogo e alguns cálculos de Probabilidade” propõe um jogo, representado na figura 7 com o objetivo do professor introduzir a definição teórica de Probabilidade: razão entre parte e todo.

► Um tabuleiro, semelhante ao modelo seguinte, que pode ser produzido pelos alunos ou disponibilizado pelo professor.

ANEXO – Nível 2		JOGO BÁSICO – Nível 1							
Número par e outro ímpar	Números iguais nos dois dados		1	2	3	4	5	6	Q ₁
Números pares nos 2 dados	Número primo nos dois dados	1							Q ₂
Números cujo produto é par	Números cuja soma é 6	2		Q ₂			Q ₁		Q ₃
Números cuja soma é 5	Números que estão em Q ₁	3							Q ₄
Número par em um dado	Números cuja soma é maior que 8	4							VERMELHO
Número 6 em um dos dados	Números cujo produto é ímpar	5		Q ₃			Q ₄		VERDE
Um número é o dobro do outro	Números primos entre si	6							AZUL

2) Instruções para o jogo – nível 1

A classe deve estar dividida em grupos de quatro alunos cada. A competição, em cada grupo, ocorrerá na forma de dupla contra dupla.

Cada dupla recebe uma ficha de acompanhamento para o registro das apostas. Neste nível, as duplas podem apostar apenas nos eventos relacionados no tabuleiro na parte "Jogo Básico".

Antes que algum participante lance os dados, cada dupla escolhe um evento, apenas um, registra sua aposta na ficha de acompanhamento e, o mais importante, registra a probabilidade de ocorrência do evento escolhido. Veja o exemplo:

Rodada	Aposta	Probabilidade	Resultado	Débito/Crédito
1	2 · Q ₂ Aposta de 2 fichas em Q ₂	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ Há 9 resultados possíveis em Q ₂ entre o total de 36 resultados possíveis.		

Feitos os registros, são lançados os dados e observados os resultados das faces superiores. O passo seguinte é o cálculo do crédito ou do débito, dependendo, respectivamente, de ter ocorrido ou não o evento escolhido.

Não tendo sido sorteado o evento escolhido, a dupla perde as fichas apostadas. Em caso de acerto, a probabilidade determina o número de fichas a serem recebidas.

Figura 7 - Explicação do Jogo contido no Caderno do Professor.

Observa-se que a definição introduzida aqui não abrange todo o enunciado proposto por Laplace, pois não explicita a necessidade da equiprobabilidade e nem a consideração ou não do experimento aleatório em jogo.

O objetivo do jogo é apostar fichas nos quadrados coloridos ou nos quadrantes e calcular a Probabilidade de ocorrência do evento escolhido (quadrado ou quadrante escolhido). Esta Probabilidade é calculada em relação ao total de quadrados que há no tabuleiro. Em seguida os jogadores devem lançar dois dados, verificando se a resposta encontrada favorece sua aposta (vitória) ou não (derrota). Assim, as duplas vão ganhando fichas de acordo com a quantidade apostada e de acordo com a probabilidade do evento apostado. Por exemplo, se apostam três fichas no quadrante 2 (o tabuleiro é dividido em quatro partes), a probabilidade deste evento é de $\frac{1}{4}$ e a resposta dos dados estão neste quadrante, o aluno recebe 8 fichas, pois como a probabilidade é $\frac{1}{4}$, para cada ficha apostada recebem 4 fichas e como apostaram duas, recebem 8 fichas.

A partir desta situação, percebemos que a atividade envolve a visão clássica de Probabilidade, porém é estimulada por meio de um jogo (enfoque experimental). Com isto, percebemos que o tradicionalismo dado a este tipo de enfoque foi deixado em segundo plano. Entretanto, a resolução do problema não é guiada pelo experimento, o jogo é apenas um elemento motivador para o uso da resolução usual. Para resolver o problema, o aluno precisa mobilizar: operações no conjunto dos números racionais e razão como comparação entre parte e todo.

O jogo contempla ainda um segundo nível, que apenas apresenta outras possíveis apostas que não estão no tabuleiro, como por exemplo, sair dois números pares no lançamento dos dados.

Interpretando esta questão sob a ótica da Organização Praxeológica (Chevallard, 1999), podemos identificar a seguinte tarefa: se um dado é lançado, determinar a Probabilidade da ocorrência de um evento. Uma *técnica* possível para a tarefa seria a de utilizar a fórmula $P = \frac{k}{n}$, sendo k o número de elementos do

evento solicitado e n o número total de elementos do conjunto. Utilizando esta técnica e calculando todos os casos possíveis para o jogo, teremos:

- Evento 1: Apostar nos quadrados vermelhos: $P(E1) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$;
- Evento 2: Apostar nos quadrados azuis: $P(E2) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$;
- Evento 3: Apostar nos quadrados verdes: $P(E3) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$;
- Evento 4: Apostar no quadrante²¹ ($Q1 = Q2 = Q3 = Q4$): $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;

Considerando esta técnica para solucionar o problema, conforme sugere o Caderno do Professor, acreditamos que ela traria dificuldade ao aluno, pois a atividade é apresentada no início do caderno sem antes contemplar a definição clássica de Probabilidade. Explicar durante o jogo, como calcular a Probabilidade e porque se calcula assim, desviaria o aluno do foco do jogo.

Conforme dito anteriormente, para Chevallard (1999), a utilização de uma técnica deve ser justificada por uma *tecnologia*, assim para esta questão temos as definições de espaço amostral, evento, experiência aleatória e a definição clássica de Probabilidade.

Espaço amostral²²: *Conjunto dos resultados possíveis de um experimento aleatório;*

Evento: *Resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório;*

Experimentos Aleatórios: *Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não necessariamente produzem o mesmo resultado;*

Probabilidade: *Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de k eventos simples, a Probabilidade de A , que denotaremos de $P(A)$, é definida por: $P(A) = \frac{k}{N}$*

²¹ ²¹ A notação Q1, Q2, Q3 e Q4 foi utilizada pelos autores do caderno, para representar os quatro quadrantes que compõem o tabuleiro do jogo.

²² As definições apresentadas, bem como a demonstração, encontram-se em DANTAS, A. B., Carlos. *Probabilidade: Um curso introdutório*. São Paulo: editora da Universidade de São Paulo, 2004.

Desta forma, temos como Teoria, que justifica a uso desta tecnologia, a Teoria das Probabilidades.

A primeira situação de aprendizagem apresentada pelo Caderno do Professor ainda contempla alguns problemas que envolvem a aplicação do conceito clássico de Probabilidade que serão analisados a seguir, com base na organização praxeológica proposta por Chevallard (1999).

Problema 1:

Problema 1 – Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em uma caixa.

	Triangulares	Circulares	Retangulares	Total
Branças	12	10	6	28
Pretas	15	11	7	33
Amarelas	8	9	2	19
Total	35	30	15	80

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que ocorra uma peça:

a) triangular?
 $\frac{35}{80} = 43,75\%$

b) amarela retangular?
 $\frac{2}{80} = 2,5\%$

c) não circular?
 $\frac{50}{80} = 62,5\%$

d) não preta?
 $\frac{47}{80} = 58,75\%$

e) circular não preta?
 $\frac{19}{80} = 23,75\%$

f) não circular e não preta?
 $\frac{28}{80} = 35\%$

Figura 8 - Resolução do Problema 1 apresentada no Caderno do Professor.

Diante da resolução apresentada, é possível perceber que o primeiro problema já apresenta a definição da Probabilidade por meio do enfoque clássico, ou seja, todos os resultados são apresentados dividindo-se a quantidade de peças do evento solicitado pelo total de peças, supondo-se a equiprobabilidade. Além disto, o problema envolve o conceito da negação, mas o caderno não explora conceito de eventos complementares. Neste momento, as atividades foram propostas de forma que suscite nos alunos algumas ideias sobre este conceito, mas sem uma orientação clara.

É possível perceber também que o caderno envolve, de forma implícita, a intersecção de eventos. Neste caso os resultados devem ser encontrados de forma intuitiva pelos alunos e, além disto, o caderno sugere a solução ao professor sem considerar a discussão sobre a aleatoriedade, tornando-se apenas um exercício de identificação de proporcionalidade e não de Probabilidade.

Ressaltamos que no Caderno do Aluno este problema, assim como os demais da situação de aprendizagem 1, é apresentado exatamente da mesma forma como no Caderno do Professor, porém sem a resolução e com espaços destinados aos cálculos e respostas, como podemos verificar na ilustração:

Atividade 3 – Situações-problema para o cálculo de probabilidades

Problema 1

Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em uma caixa.

	Triangulares	Circulares	Retangulares	Total
Branças	12	10	6	28
Pretas	15	11	7	33
Amarelas	8	9	2	19
Total	35	30	15	80

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que a peça seja:

a) triangular?

b) amarela retangular?

c) não circular?

d) não preta?

e) circular não preta?

f) não circular e não preta?

Figura 9 - Enunciado do Problema 1 - Atividade 3 no Caderno do Aluno.

Problema 2:

Problema 2 – Os 200 alunos das seis classes da segunda série do Ensino Médio de uma escola fizeram um teste na aula de Educação Física e foram classificados em quatro níveis, de acordo com a resistência física maior ou menor. Alunos de nível 4 são mais resistentes do que alunos de nível 3, que, por sua vez, são mais resistentes que alunos de nível 2 e assim por diante. Os resultados desse teste estão representados na tabela seguinte:

	2º A	2º B	2º C	2º D	2º E	2º F
Nível 1	12	14	12	11	13	12
Nível 2	9	8	11	10	10	9
Nível 3	10	8	7	7	6	9
Nível 4	3	2	3	4	5	5
Total de alunos	34	32	33	32	34	35

Um dos alunos da segunda série dessa escola será sorteado. Qual é a probabilidade de o aluno sorteado

a) estudar no 2º D?
 $\frac{32}{200} = 16\%$

b) não estudar no 2º A nem no 2º B?
 $\frac{134}{200} = 67\%$

c) ter conseguido nível 3 no teste?
 $\frac{47}{200} = 23,5\%$

d) ter conseguido nível abaixo de 3 no teste?
 $\frac{131}{200} = 65,5\%$

Figura 10 - Resolução do Problema 2 – Atividade 3 apresentada no Caderno do Professor.

O problema 2 tem a mesma proposta e estrutura do problema 1, pois novamente a definição de Probabilidade é apresentada por meio do enfoque clássico, além dos valores também estarem apresentados por meio de uma tabela. A diferença deste problema para o primeiro, é que não é apresentado o número total de elementos, mas apenas o número de alunos de cada turma. Assim, para resolver corretamente a questão, os alunos devem somar todos os valores contidos na linha "Totais de alunos", para obter o número total de possibilidades do sorteio aleatório de 1 aluno.

Ressaltamos que se este fato não for muito bem enfatizado pelo professor, os alunos poderão considerar os totais parciais e mobilizar concepções errôneas de Probabilidade. Novamente a discussão sobre aleatoriedade não é explorada no Caderno do Professor.

Problema 3:

Problema 3 – Em relação à tabela apresentada no problema anterior, se for sorteado um aluno da 2ª série C e outro da 2ª série E, de qual dessas classes é mais provável ocorrer um aluno com nível superior a 2 no teste?

A probabilidade de que um aluno da 2ª C tenha nível superior a 2 é $\frac{10}{33}$, enquanto a probabilidade correspondente para um aluno da 2ª E é igual a $\frac{11}{34}$. Assim, é maior a chance de sortear na 2ª E um aluno com nível superior a 2.

Figura 11 - Resolução do Problema 3 apresentada no Caderno do Professor.

Assim como nos primeiros problemas, a questão 3 apresenta uma resolução com o cálculo da Probabilidade por meio do enfoque clássico. A diferença neste problema é que os alunos precisam comparar dois resultados, elevando a complexidade cognitiva. Nota-se que nesta resolução, o caderno não apresenta a resposta por meio da porcentagem como nos problemas anteriores. O caderno não explicita o objetivo desta mudança no registro da representação do resultado. O professor deverá explorar com os alunos as diferentes possibilidades de representação de uma Probabilidade.

Podemos apontar também, que este problema complementa o problema anterior e novamente o papel do professor é de suma importância para enfatizar a diferença em se considerar o total de elementos e o total parcial por turma, trabalhando as primeiras idéias de Probabilidade condicional. Ressaltamos que o caderno não destaca esta importância e continua sem apresentar uma discussão sobre a noção de aleatoriedade. Destacamos também, que o Caderno do Aluno, como dito anteriormente, apresenta o problema igualmente como o do Caderno do Professor, apenas com espaços para a resolução.

Problema 4:

Problema 4 – Dos 300 alunos de uma escola, 45% são meninas, sendo que apenas 20% delas têm idade acima de 16 anos. Dentre os meninos, 40% têm idade acima de 16 anos. Sorteando um dos alunos dessa escola, qual é a probabilidade de que seja sorteado um menino com idade igual ou menor que 16 anos?

Podemos organizar os dados em uma tabela:

Idade	Meninos	Meninas	Total
Acima de 16 anos	(40%) 66	(20%) 27	93
16 anos ou menos	(60%) 99	(80%) 108	207
Total	(55%) 165	(45%) 135	300

Há nessa escola 99 meninos com idade menor ou igual a 16 anos. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{99}{300} = 33\%$.

Figura 12 - Resolução do Problema 4 apresentada no Caderno do Professor.

Diferentemente dos problemas anteriores, enunciado do problema 4 fornece as proporções em representação percentual, cabendo ao aluno determinar os valores absolutos para a resolução do problema. Assim, para resolver o problema, o aluno deverá mobilizar conceitos referentes à porcentagem, pois para responder qual é a probabilidade de que seja sorteado um menino com idade igual ou menor que 16 anos, é preciso descobrir qual o número de alunos com esta característica, para então compará-lo com o número total de alunos. Uma estratégia possível é recorrer ao algoritmo da regra de três para encontrar os valores. Como é possível perceber, o Caderno do Professor já traz estes resultados prontos, acreditando que este tenha conhecimento das possíveis estratégias para o seu cálculo. Apresenta a solução também por meio do enfoque clássico de Probabilidade. Ressaltamos que no Caderno do Aluno, a tabela não é apresentada. Assim, a sugestão do uso da tabela para organizar os dados é dada ao professor, que poderá ou não sugerir aos seus alunos. Esta tabela não é proposta no Caderno do Aluno.

Problema 5:

Problema 5 – Em relação aos dados do problema anterior, considere agora o caso do sorteio de uma pessoa que, se sabe de antemão, terá idade acima de 16 anos. Nessa condição, qual é a probabilidade de que seja sorteada uma menina?

Trata-se de um problema envolvendo o cálculo de uma probabilidade condicional. Cabe ao professor chamar a atenção dos alunos para o fato de que o conhecimento prévio de uma condição – ter idade acima de 16 anos – determina um novo espaço

amostral. Para o cálculo da probabilidade desejada, devemos considerar o sorteio de uma menina dentre as pessoas com idade superior a 16 anos.

Quantidade de pessoas com idade superior a 16 anos: 93.

Meninas com idade superior a 16 anos: 27.

$$P(\text{menina com idade superior a 16 anos}) = \frac{27}{93} \cong 29\%.$$

Figura 13 - Resolução do Problema 5 proposta no Caderno do Professor

Este problema apresenta o nível mais elevado de complexidade cognitiva desta seção, pois envolve a noção de Probabilidade condicional. A resolução apresentada instrui o professor a levar os alunos a perceberem a condição existente (ter idade acima de 16 anos), e resolverem o problema sem o formalismo geralmente presente no cálculo de Probabilidade condicional.

Ao fim da primeira situação de aprendizagem é possível verificar uma evolução nos níveis das tarefas e da concepção probabilística necessária para a resolução dos problemas, porém, percebe-se quem em nenhuma das situações é solicitado ou se orienta o professor para trabalhar a noção de experiência aleatória. Além disto, foi possível perceber que a maior parte dos problemas apresenta as mesmas características, envolvendo o enfoque clássico de Probabilidade.

O Caderno do Aluno apresenta ainda, na seção “Lição de Casa”, outros três problemas relacionados aos anteriores, também apresentados no Caderno do Professor como sugestões de trabalho envolvendo Probabilidade condicional.

Desta forma, sob a ótica da Organização Praxeológica de Chvallard (1996), podemos identificar em todos os problemas citados, a seguinte **tarefa**: se um elemento é sorteado dentro de um conjunto de elementos, determinar a Probabilidade da ocorrência de um evento.

Para realizar a tarefa, a **técnica** sugerida pelo Caderno do Professor é a de utilizar a fórmula $P = \frac{k}{N}$, sendo k o número de elementos do evento solicitado e N o número total de elementos do conjunto. Utilizando esta técnica e calculando todos os casos possíveis para o jogo, encontramos as soluções apresentadas no Caderno do Professor. Em alguns casos, o problema limita o espaço amostral ao número de elementos do evento em questão, com o objetivo de conduzir o aluno ao cálculo da Probabilidade condicional²³.

A utilização da técnica acima é justificada por uma **tecnologia**: definição clássica de Probabilidade, definição de eventos, intersecção de eventos, operações entre números racionais, porcentagem (conversão da representação percentual para a representação decimal) e ideia de experimento aleatório que gera o evento resultado que se quer estudar e noções de Probabilidade condicional. Assim, para estes problemas temos como **teoria**, que justifica a tecnologia, a Teoria das Probabilidades.

→ **Segunda Situação de Aprendizagem. Análise Combinatória: Raciocínios Aditivos e Multiplicativos.**

Embora as orientações do início do caderno afirmem que na situação 2, o raciocínio combinatório estaria relacionado a problemas que envolvessem Probabilidade, ao analisarmos cada um dos problemas, não identificamos nenhum que exigisse o cálculo de probabilidades e/ou estivesse relacionado ao raciocínio combinatório. O que encontramos foram problemas que envolviam o raciocínio multiplicativo. Segundo as orientações dadas ao longo da situação de aprendizagem, o raciocínio combinatório não deveria ser aplicado por meio do contexto habitual, com fórmulas, assim é possível verificar a presença de alguns exercícios nos quais o aluno pode utilizar como registro, o diagrama da árvore de possibilidades.

Como nosso objetivo é verificar a abordagem dos tópicos referentes à Probabilidade, a análise desta situação de aprendizagem não é foco na presente

²³ Não apresentamos neste momento uma técnica para o uso da Probabilidade condicional, pois faremos isto na análise do problema apresentados na terceira situação de aprendizagem.

pesquisa, destacamos, no entanto, que das 48 páginas que compõem o Caderno do Aluno, 19 são destinadas a esta seção, ou seja, praticamente metade do que é proposto para o bimestre envolve o raciocínio combinatório. Desta forma, novamente verificamos uma discrepância com o que é proposto no início do caderno.

→ Terceira Situação de Aprendizagem: Probabilidade e Raciocínio Combinatório

A terceira situação de aprendizagem tem por objetivo apresentar aos alunos o cálculo de probabilidades de eventos que exigem a mobilização do raciocínio combinatório. A instrução (roteiro de aplicação) dada no início da situação mostra dois procedimentos sobre a ordenação ou não dos resultados de um sorteio. A seção é iniciada com uma situação-problema que exige reflexões sobre a questão da ordenação, de forma a atribuir significado à noção/conceito de probabilidades, enquanto que uma segunda utiliza fórmulas de combinação. Estas situações-problema são apresentadas como exercícios 1, 2 e 3 no Caderno do Aluno, de forma mais clara, já que no Caderno do Professor elas são apresentadas no decorrer do texto que contém as instruções, dificultando o entendimento. O objetivo destas situações é suscitar nos alunos a discussão sobre o fato de um problema envolver ou não a questão da ordenação. A primeira situação é mostrada na figura 14:

Problema 1

Considere a seguinte situação: duas pessoas serão sorteadas de um grupo formado por 8 pessoas, em que 3 são homens e 5, mulheres. Para essa situação, calcule a probabilidade de ocorrência de:

- a) dois homens;

- b) duas mulheres;

- c) uma pessoa de cada sexo.

Figura 14 – Problema 1- 3ª Situação de aprendizagem - Caderno do Aluno

Sobre este problema, o Caderno do Professor afirma que não são poucos os alunos que apresentam o cálculo erroneamente, considerando a resolução a seguir e não levando em conta o fato “ordenação”:

Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 3

Os casos mais comuns de probabilidade envolvendo raciocínio combinatório estão associados à formação de grupos não ordenáveis, sendo esse o principal aspecto que merece atenção no desenvolvimento metodológico que ora será proposto. Para exemplificar, consideremos a situação-problema em que 2 pessoas serão sorteadas de um grupo formado por 8 pessoas, sendo 3 homens e 5 mulheres. Nessa situação, não são poucos os alunos que efetuam os seguintes cálculos:

► Probabilidade de ocorrência de 2 homens:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

► Probabilidade de ocorrência de 2 mulheres:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

► Probabilidade de ocorrência de 1 pessoa de cada sexo:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

A simples soma dos três resultados obtidos, $\frac{41}{56}$, revela que algum elemento não foi considerado nos cálculos realizados, visto a soma das três probabilidades não igualar 100%. *O que está faltando? O que é mais provável ocorrer numa situação como essa: duas pessoas de mesmo sexo ou pessoas de sexos diferentes?*

Figura 15 - Resolução e Considerações contidas no Caderno do Professor sobre o problema 1

Subestimando este erro, é proposto no Caderno do Aluno, um segundo problema, no qual os alunos devem verificar se a soma de todos os eventos do problema anterior resulta em 100%, e caso não resulte, é solicitado que os alunos descubram o erro. A figura 16 mostra este problema.

Problema 2

Calcule a soma dos resultados que você obteve nos itens a, b e c do problema anterior e, se não obtiver 100%, descubra o que está errado.

Figura 16 - Problema 1 - 3ª Situação de aprendizagem - Caderno do Aluno

Acreditamos que, embora o objetivo desses problemas é fazer com que o aluno perceba que existe uma diferença entre questões nas quais o fator “ordenação” interfere nos resultados, supor que muitos alunos certamente irão errar o problema, e ainda apresentar outro problema que incentive isto, é contradizer com tudo o que foi explorado até o momento, pois na situação de aprendizagem 2, esta questão da “ordenação” já deve ter sido discutida, mesmo que agora ela esteja

envolvida com o cálculo de probabilidades. Além disto, esta afirmação é feita sem embasamento teórico e sem dados estatísticos que a comprovem.

Em seguida, é proposto o terceiro problema, que envolve a questão da “ordenação”, como é possível verificar no protocolo a seguir, porém, no Caderno do Professor, é apresentado dentro do roteiro de aplicação, com base no primeiro, dificultando mais uma vez a leitura e entendimento da questão. Questionamos porque não apresentar o problema igualmente como o apresentado no Caderno do Aluno?

Problema 3

Será realizado um sorteio de 3 pessoas entre 8, em um grupo formado por 5 mulheres e 3 homens. Determine a probabilidade de que sejam sorteados:

- um homem, outro homem e uma mulher, nesta ordem;
- dois homens e uma mulher, em qualquer ordem;
- um homem, uma mulher e outra mulher, nesta ordem;
- um homem e duas mulheres, em qualquer ordem.

Figura 17 - Problema 3 - 3ª Situação de aprendizagem - Caderno do Aluno

Ainda no contexto desse problema, *como poderíamos calcular a probabilidade de sortear 3 pessoas e ocorrerem 2 homens e 1 mulher?* A estratégia de cálculo que pretendemos valorizar nesta Situação de Aprendizagem consiste em estabelecer uma ordem para os resultados sorteados e, em seguida, contar todas as seqüências possíveis de resultados iguais a este. Para tanto, precisaremos do raciocínio combinatório abordado anteriormente.

- ▶ Probabilidade de ocorrer “Homem-Homem-Mulher”, nessa ordem:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$$
- ▶ Cada agrupamento com dois homens e uma mulher pode ser associado a $\frac{3!}{2!}$ seqüências, que diferem pela ordem de seus elementos.
- ▶ Probabilidade de 2 homens e 1 mulher, em qualquer ordem:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{5}{56} \cdot 3 = \frac{15}{56}$$

Tradicionalmente esse tipo de problema é resolvido utilizando-se a fórmula das combinações:

- ▶ Número de elementos do espaço amostral =

$$= n(S) = C_{8,3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$
- ▶ Número de elementos do evento desejado =

$$= n(E) = C_{3,2} \cdot C_{5,1} = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = 3 \cdot 5 = 15$$
- ▶ Probabilidade procurada =

$$\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{56}$$

Figura 18 – Resolução apresentada no Caderno do Professor do Problema 3 do Caderno do Aluno

A partir disto, é proposto que os problemas de Probabilidade que apresentam situações de ordenação ou não, sejam realizados inicialmente sem fórmulas, de forma que os alunos, ao explorarem o problema, percebam a questão da ordem. As instruções ressaltam ainda que a apresentação das fórmulas de cálculo das combinações não seja vetada, mas sim, deixada para segundo plano.

Desta forma, verificamos uma preocupação por parte dos organizadores do caderno, de não trabalhar o cálculo de probabilidades a partir de fórmulas da análise combinatória, o que, segundo Coutinho (1994), aumentaria o grau de dificuldade para os alunos, já que aos obstáculos inerentes da Probabilidade, acrescentar-se-iam aqueles relativos à combinatória. No entanto, o contexto dos problemas exige dos alunos a mobilização de concepções relacionadas fortemente ao raciocínio combinatório.

Problema 1

<p>Problema 1 – Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas?</p> <p><i>Supomos uma ordem para o sorteio, como, por exemplo, esta:</i></p> $P(\text{Menino, Menino, Menina, Menina}) = \frac{15}{28} \cdot \frac{14}{27} \cdot \frac{13}{26} \cdot \frac{12}{25}$	<p><i>Em seguida, consideramos todas as diferentes ordenações dos 4 elementos, introduzindo no cálculo anterior o fator $\frac{4!}{2!2!}$.</i></p> <p><i>Assim, temos:</i></p> $P(2 \text{ meninos e } 2 \text{ meninas}) = \frac{15}{28} \cdot \frac{14}{27} \cdot \frac{13}{26} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{2}{5} \text{ ou } 40\%$
---	--

Figura 19 - Problema 1 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor

Observa-se que neste tipo de problema, a ordenação é fator importante para a construção da estratégia de resolução. Embora o problema possa ser resolvido sem a fórmula de Análise Combinatória (verificando a quantidade de possibilidades de o evento ocorrer e multiplicando pela Probabilidade de um deles), a resolução apresentada para o professor, utiliza esta fórmula. Com isto verificamos uma contradição com o que é proposto no início da situação, de não iniciar este tipo de cálculo por meio de fórmulas. Observa-se também que a árvore de possibilidades

não é cogitada neste problema, e que ela seria uma forma eficaz de construção de estratégia independentemente do uso de fórmulas da combinatória.

Assim, percebemos que logo no primeiro problema desta situação de aprendizagem, as orientações ao professor reduzem-se apenas ao “*como fazer*”, sem procurar justificar a resolução proposta. No Caderno do Aluno, este problema, assim como os demais desta situação de aprendizagem, é apresentado exatamente igual ao do Caderno do Professor, porém com espaços reservados para as resoluções, como é possível verificar na figura 20. Ressaltamos, no entanto, que a numeração dos problemas do Caderno do Aluno não segue a numeração do Caderno do Professor devido aos três primeiros problemas não estarem em forma de questões no Caderno do Professor, como citado anteriormente. Novamente verificamos um fator que dificulta a ação do professor (o professor deve utilizar os dois cadernos no momento da explanação da aula).

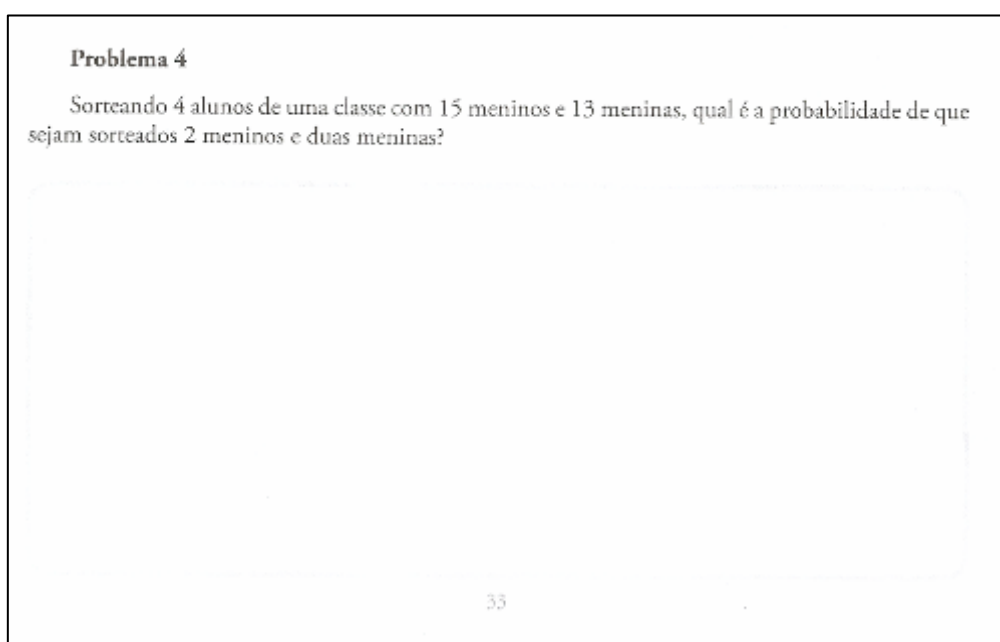


Figura 20 - Problema 4 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Aluno

Diferentemente da situação de aprendizagem 1, alguns problemas desta situação de aprendizagem apresentam situações diferenciadas, necessitando de uma análise praxeológica para cada situação. Para este problema temos como **tarefa**: se quatro elementos são sorteados dentro de um conjunto de elementos, determinar a Probabilidade de ocorrência deste evento.

Para realizar a tarefa delimitada no problema, a **técnica** sugerida pelo Caderno do Professor é a de utilizar a método das probabilidades sucessivas, ou binomial, ou seja, utilizar a fórmula $P(X = x) = p^x(1 - p)^{n-x}$ (com $x = 0, 1, 2, \dots$). Utilizando-se esta técnica, porém, calcula-se a Probabilidade de uma única ordenação possível, necessitando assim, multiplicar este resultado pela quantidade de ordenações possíveis, que no caso do problema é encontrado pela utilização da

$$\text{fórmula de combinação } C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

A utilização das técnicas acima é justificada por uma **tecnologia**, assim para a questão temos: definição clássica de Probabilidade, definição de eventos, intersecção de eventos, definição de combinação, operações entre números racionais, porcentagem (conversão da representação percentual para a representação decimal) e ideia de experimento aleatório que gera o evento resultado que se quer estudar e noções de Probabilidade Condicional. Assim, para estes problemas, temos como **teoria**, que justifica a tecnologia, a Teoria das Probabilidades.

Problema 2

<p>Problema 2 – No jogo de loteria oficial Mega-Sena, um apostador escolhe no mínimo 6 dezenas dentre 60. São sorteadas 6 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve ter escolhido todas as sorteadas. Qual é a probabilidade de ganho do prêmio maior para um apostador que escolheu 8 dezenas?</p>	<p><i>Supondo que o apostador acertou todas as dezenas, como pede o enunciado da questão, não será necessário considerar a troca de ordem dos sorteios, uma vez que há apenas uma categoria envolvida: acertos.</i></p> <p><i>$P(6 \text{ acertos em } 6 \text{ sorteios tendo escolhido } 8 \text{ dezenas}) =$</i></p> $\frac{8}{60} \cdot \frac{7}{59} \cdot \frac{6}{58} \cdot \frac{5}{57} \cdot \frac{4}{56} \cdot \frac{3}{55} = 0,000056$
--	--

Figura 21 - Problema 2 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor

O segundo problema apresenta uma situação em que o fator da “ordenação” novamente é considerado: possibilidade de acertar seis dezenas dentre 60, apostando 8 dezenas. Com isto, a resolução apresentada pelo Caderno do Professor, novamente propõe que o cálculo das probabilidades seja realizado por meio de multiplicações de probabilidades sucessivas. Igualmente ao problema 1, o

recurso da árvore de possibilidades não é explorado, não favorecendo a possibilidade de o aluno construir mais de uma representação para a mesma situação explorada, sem necessidade de explicitar fórmulas e teoremas.

Sob o ponto de vista da análise praxeológica, temos como **tarefa** para este problema: se seis elementos são sorteados dentro de um conjunto de elementos, determinar a Probabilidade de ocorrência deste evento.

Para realizar a tarefa delimitada no problema, a **técnica** utilizada pelo Caderno do Professor é a de utilizar o método das probabilidades sucessivas, ou binomial, ou seja, utilizar a fórmula $P(X = x) = p^x(1 - p)^{n-x}$ (com $x = 0, 1, 2, \dots$).

A utilização das técnicas acima é justificada por uma **tecnologia**, assim para a questão temos: definição clássica de Probabilidade, definição de eventos, intersecção de eventos, operações entre números racionais, porcentagem (conversão da representação percentual para a representação decimal) e ideia de experimento aleatório que gera o evento resultado que se quer estudar e noções de Probabilidade condicional. Assim, para este problema temos como **teoria**, que justifica a tecnologia, a Teoria das Probabilidades.

Problema 3

<p>Problema 3 – Qual é a probabilidade de o apostador descrito no enunciado do problema anterior acertar 4 das 6 dezenas sorteadas?</p> <p><i>Fixaremos uma ordem para os resultados do sorteio, calcularemos a probabilidade dessa ordenação e, em seguida, introduziremos o fator que considera a troca de ordem. A ordem fixada será esta: Acerto, Acerto, Acerto, Acerto, Erro, Erro.</i></p> $P(A,A,A,A,E,E) = \frac{8}{60} \cdot \frac{7}{59} \cdot \frac{6}{58} \cdot \frac{5}{57} \cdot \frac{52}{56} \cdot \frac{51}{55} \cdot \frac{6!}{4!2!} \approx 0,18\%$ <p><i>É preciso atentar para os dois últimos fatores dessa multiplicação, que correspondem à chance de erros. Nesse caso, devemos lembrar que são 60 dezenas no total e que o apostador escolheu 8.</i></p>	<p><i>delas. Assim, há 52 dezenas não escolhidas e que poderão ser sorteadas no caso de o apostado não ter sucesso em suas escolhas.</i></p> <p><i>O fator que considera todas as ordenações possíveis entre as 6 elementos AAAAEI é este: $\frac{6!}{4!2!}$. Assim, a probabilidade de 4 acertos, e portanto de 2 erros, em 6 sorteios consecutivos é esta:</i></p> $P(4 \text{ acertos e } 2 \text{ erros em } 6 \text{ sorteios}) = \frac{8}{60} \cdot \frac{7}{59} \cdot \frac{6}{58} \cdot \frac{5}{57} \cdot \frac{52}{56} \cdot \frac{51}{55} \cdot \frac{6!}{4!2!} \approx 0,18\%$ <p style="text-align: center;"><u>6 sorteios</u></p>
--	--

Figura 22 - Problema 3 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor

O terceiro problema é uma continuação do problema anterior, porém pergunta-se qual é a probabilidade do apostador acertar 4 dezenas dentre as 6 sorteadas. Em termos de complexidade do problema, nada muda a não ser o cálculo necessário para as possibilidades para escolha das 4 dezenas em questão, o que envolve um agrupamento de 6 elementos, sendo 4 de um tipo (acertos) e 2 de outro (erros), configurando a permutação com repetição, a ser acrescentada ao cálculo original. Novamente percebemos uma contradição com o que é proposto no início desta seção, já que o uso da fórmula de combinação é utilizado nesta resolução. A análise praxeológica desta questão é exatamente igual a do problema 1.

Após estes três problemas, uma interessante informação é apresentada pelo caderno. São aspectos relacionados aos jogos de azar como: as pouquíssimas chances de vitórias em jogos com valores altos e tais jogos contribuírem para a concentração de renda, que já é mal distribuída em nosso país – arrecadam-se pequenos valores de uma grande população e destinam o montante a apenas uma ou duas pessoas.

Problema 4

<p>Problema 4 – Em um determinado jogo lotérico, um apostador pode escolher de 5 a 10 dezenas de um total de 50. São sorteadas 5 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve acertar todas elas. Se uma aposta em 5 dezenas custa R\$ 2, quanto deve custar uma aposta em 10 dezenas?</p>	<p>No caso de uma aposta em 10 dezenas, a probabilidade de que 5 delas sejam sorteadas é:</p> $P(\text{acerto em 5 dezenas tendo apostado em } 10) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} \cdot \frac{7}{47} \cdot \frac{6}{46}$
<p>O preço de uma aposta é relacionado à probabilidade dessa aposta ser sorteada, de maneira que quanto maior a probabilidade, maior também o valor a ser pago. No caso de uma aposta em 5 números, a probabilidade de que todos sejam sorteados é:</p>	<p>A pergunta que resume a questão é esta: quantas vezes a segunda probabilidade é maior do que a primeira? Podemos obter a resposta dividindo os dois resultados anteriores.</p> $\frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} \cdot \frac{7}{47} \cdot \frac{6}{46} \cdot \sqrt{\frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46}} = 252.$
$P(\text{acerto de 5 dezenas tendo apostado em 5 dezenas}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \cdot \frac{2}{47} \cdot \frac{1}{46}$	<p>Portanto, se a aposta em 5 dezenas custa R\$ 2, a aposta em 10 dezenas deve custar 252 vezes mais, isto é, deve custar R\$ 504.</p>

Figura 23 - Problema 4 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor

O contexto proposto para este problema, além de contemplar o já explorado nos problemas anteriores, introduz uma necessidade de comparação entre resultados pela associação de um valor monetário a cada uma das apostas citadas,

caracterizando uma complexidade deste contexto. O preço de uma aposta é relacionado à Probabilidade desta aposta ser sorteada, e assim, o cálculo da Probabilidade da aposta com cinco dezenas ser sorteada, pode ser feito com multiplicações sucessivas. A Probabilidade da aposta com 10 dezenas ser sorteada também foi calculada por meio de multiplicações de probabilidades sucessivas. A ideia de variável aleatória é introduzida (valor monetário associado à aposta), mas não explorada, e novamente a árvore de possibilidades é um recurso (um registro) não trabalhado.

Assim, analisando praxeologicamente o problema, temos como **tarefa**: encontrar o valor de uma aposta (de um jogo de loteria) com 10 dezenas, considerando o valor cobrado para uma aposta de 5 dezenas; sendo assim, para este problema temos como **tarefa**: se quatro elementos são sorteados dentro de um conjunto de elementos, determinar a Probabilidade de ocorrência deste evento.

Para realizar a tarefa delimitada, a **técnica** sugerida pelo caderno do professor é a de utilizar, novamente, a método das probabilidade sucessivas ou binomial, ou seja, utilizar a fórmula $P(X = x) = p^x(1 - p)^{n-x}$ (com $x = 0, 1, 2, \dots$). Além disso, após esse cálculo, para encontrar o valor da aposta de 10 dezenas, uma segunda técnica utilizada: a divisão dos dois resultados (probabilidade da aposta de 10 dezenas e probabilidade da aposta com 5 dezenas). O valor encontrado nessa divisão significa quantas vezes mais o apostador tem de chance de acertar a aposta, com isso esse valor deve ser multiplicado (nova técnica: algoritmo da multiplicação) pelo valor da aposta de 5 dezenas

A utilização das técnicas acima é justificada por uma **tecnologia**, assim para a questão temos: definição clássica de Probabilidade, definição de eventos, intersecção de eventos, definição de combinação, operações entre números racionais, divisão e multiplicação de números racionais, ideia de experimento aleatório que gera o evento resultado que se quer estudar e noções de Probabilidade condicional. Assim, para estes problemas temos, como **teoria** que justifica a tecnologia, a Teoria das Probabilidades.

Problema 5:

Problema 5 – Numa caixa há 20 bolas iguais a não ser pela cor. Dessas bolas, $\frac{1}{4}$ são verdes, $\frac{2}{5}$ são amarelas e o grupo restante é formado apenas por bolas da cor rosa. Serão realizados três sorteios com reposição de uma bola a cada vez. Nessa condição, uma mesma bola pode ser sorteada mais de uma vez. Qual é a chance de serem sorteadas:

a) bolas de uma única cor?

As frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ determinam as proporções na caixa de bolas, respectivamente, das cores verde e amarela. A proporção de bolas da cor rosa é:

$$\left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} \right) = \frac{7}{20} \right\}$$

Essas frações correspondem, portanto, à probabilidade de cada cor em um sorteio. No caso de sorteios de bolas de uma única cor, podemos ter bolas verdes, bolas amarelas ou bolas da cor rosa. Assim, trata-se de calcular a chance de cada cor e apenas somar os três resultados, visto não haver qualquer intersecção entre eles.

$$P(3 \text{ verdes}) = \left(\frac{1}{4} \right)^3$$

$$P(3 \text{ amarelas}) = \left(\frac{2}{5} \right)^3$$

$$P(3 \text{ rosa}) = \left(\frac{7}{20} \right)^3$$

$$P(3 \text{ bolas de única cor}) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \left(\frac{7}{20} \right)^3$$

b) apenas bolas verdes ou amarelas?

O fato de que apenas bolas verdes ou amarelas sejam sorteadas implica que não sejam sorteadas bolas cor-de-rosa. Há duas maneiras aparentemente diferentes de resolvermos este problema. Analisemos cada uma delas.

Primeira maneira: Podemos analisar as possibilidades de que sejam sorteadas 3 bolas divididas entre verdes (V) e amarelas (A). São estes os casos e suas probabilidades:

$$P(VVV) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 \quad P(VVA) = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^1 \cdot 2!$$

(Atenção ao fator de não ordenação)

$$P(VAA) = \left(\frac{1}{4} \right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \frac{3!}{2!}$$

$$P(AAA) = \left(\frac{2}{5} \right)^3$$

A probabilidade procurada é a soma desses casos. Assim:

$$P(\text{não cor-de-rosa}) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^1 \cdot \frac{3!}{2!} + \left(\frac{1}{4} \right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \frac{3!}{2!} + \left(\frac{2}{5} \right)^3$$

Segunda maneira: Visto que as bolas cor-de-rosa não podem ser sorteadas, podemos adicionar a probabilidade de bolas de cor verde com a de bolas de cor amarela, para ter a probabilidade desejada em cada sorteio.

$$P(\text{não rosa em cada sorteio}) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$$

$$P(\text{não rosa em 3 sorteios consecutivos com reposição}) = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} \right)^3$$

Figura 24 - Problema 5 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor

O problema 5, representado na figura 26 na próxima página, pode ser considerado “um clássico” na abordagem do conceito de probabilidades: uma urna com bolas coloridas, porém não é dado de imediato quantas bolas de cada cor

existem, sendo dado apenas o total de bolas e a proporção correspondente a cada cor. Com isto, é possível verificar a intenção de se introduzir certo grau de dificuldade, mas que é facilmente superado por alunos que possuam construído o conceito de proporcionalidade. Observa-se na resolução apresentada ao professor o uso da fórmula de distribuição binomial, mas sem o trabalho necessário com a ideia de variável aleatória. Novamente, o recurso da árvore de possibilidades é ignorado, dificultando ao aluno a percepção da recorrência nos resultados que levam à configuração de uma distribuição binomial. Fica assim a cargo do professor fazer tal complementação, caso se queira cumprir o objetivo de conduzir o aluno na construção do raciocínio probabilístico.

No que diz respeito à sequência em relação aos problemas anteriores, mantém-se o tipo de estratégia iniciada nesta situação de aprendizagem: uso de fórmulas e ênfase no raciocínio combinatório. Observa-se que são sugeridas unicamente as representações numéricas (multiplicação de frações) e simbólicas (fórmulas). Assim, a análise praxeológica pode ser considerada a mesma do problema 1.

Problema 6

Problema 6 – Lucia e Jair estão, com outras 8 pessoas, esperando o sorteio de 4 pessoas para a formação de um grupo de trabalho. Qual é a probabilidade de Jair e Lucia **não** fazerem parte, os dois, do grupo sorteado?

Podemos resolver este problema de duas maneiras.

Primeira maneira: Calculamos a probabilidade de que Jair e Lucia façam parte do grupo sorteado e, em seguida, consideramos o complemento para 100% do valor obtido.

$$P(\text{Jair, Lucia e outras duas pessoas}) = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{8}{8}\right) \cdot \left(\frac{7}{7}\right) \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{2}{15}$$

Devemos observar o fator contendo os fatoriais, que considera a não ordenação da sequência (Jair, Lucia, Pessoa, Pessoa). Se a probabilidade de os dois serem sorteados juntos é igual a $\frac{2}{15}$, a probabilidade de que não sejam sorteados juntos é $\frac{13}{15}$.

Segunda maneira: Vamos analisar os casos possíveis, que são estes: apenas Jair sem Lucia, apenas Lucia sem Jair, nem Lucia nem Jair.

$\frac{1}{10}$ é a chance de Jair; $\frac{8}{9}$ corresponde à chance das 8 pessoas, excluídos Jair e Lucia.

$$P(\text{apenas Jair sem Lucia}) = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!}$$

$$P(\text{apenas Lucia sem Jair}) = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!}$$

$$P(\text{nem Lucia nem Jair}) = \left(\frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right)$$

A probabilidade desejada é o resultado da adição desses três casos, isto é:

$$P = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!} + \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!} + \left(\frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) = \frac{4}{15}$$

De qualquer maneira, a probabilidade procurada é igual a $\frac{13}{15}$.

Figura 25 - Problema 6 - 3ª Situação de Aprendizagem - Caderno do Professor 2008

O sexto e último problema desta situação de aprendizagem apresenta uma situação na qual se deve calcular a Probabilidade de duas pessoas não serem selecionadas para um grupo de trabalho. O caderno apresenta duas maneiras de solução, porém as duas utilizam a mesma estratégia. Primeiramente, é apresentado o cálculo (por multiplicações sucessivas de probabilidades), da probabilidade de ambos fazerem parte do grupo selecionado (neste caso a ordenação não é considerada e por isto o cálculo foi multiplicado pelas possíveis combinações) e, em seguida, considerar o complemento para 100% do valor obtido (noção de eventos complementares e propriedade para o cálculo de Probabilidade de eventos complementares). A outra maneira apresentada é a de calcular (também por multiplicações sucessivas de probabilidades), os outros casos possíveis para a escolha das duas pessoas (uma delas ou nenhuma delas ser selecionada) e depois também aplicar a propriedade que permite calcular a Probabilidade de eventos complementares (ou seja, $X \cup \bar{X} = \Omega$ e $\bar{X} \cap X = \phi$, então $P(X \cup \bar{X}) = P(X) + P(\bar{X}) = 1$).

Embora consideremos a última apresentação como a melhor para o trabalho com este tipo de problema, o material não explica como se chegou do valor obtido $\frac{4}{15}$ ao valor procurado $\frac{13}{15}$. Vali aqui ressaltar que o problema acima foi extraído do Caderno do Professor entregue pela Secretaria Estadual da Educação em 2008. Em 2009 o caderno entregue já apresentou as correções necessárias, como podemos verificar:

A probabilidade desejada é o resultado da adição desses três casos, isto é:

$$P = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!} +$$

$$+ \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!} +$$

$$+ \left(\frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) =$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{13}{15}$$

Confirmamos então, que a probabilidade procurada é igual a $\frac{13}{15}$.

Figura 26 - Resolução Correta do Problema 6 apresentada no Caderno do Professor de 2009

A organização praxeológica deste problema pode ser representada pela mesma organização do problema anterior, acrescido de uma nova técnica que é a de utilizar a noção de eventos complementares.

Ao final dos problemas propostos pela terceira situação de aprendizagem, podemos considerar que mais uma vez o enfoque dado ao cálculo de Probabilidade é o clássico e determinista. Todos os problemas envolviam multiplicações sucessivas de Probabilidade. Em nenhum momento, questões exploram um enfoque experimental que permite ao aluno o contato com o aspecto frequentista da Probabilidade, foram abordadas. No Caderno do Aluno, os problemas foram apresentados da mesma forma, conforme anunciado ao final da análise do problema 1, nesta seção.

→ **Quarta Situação de Aprendizagem: probabilidades e Raciocínio Combinatório: O Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.**

Iniciamos a análise da quarta Situação de Aprendizagem com a seguinte afirmação do Caderno do Professor, anunciada no início do roteiro de aplicação da 4ª situação de aprendizagem:

Se um evento é repetido n vezes nas mesmas condições e de modo independente, e queremos a probabilidade da ocorrência do resultado esperado em p dessas n vezes, estamos diante de um caso **binomial**, isto é, um caso em que devemos considerar, a cada repetição do experimento, apenas dois casos, sucesso ou fracasso. Daí o termo **binômio**, que tem como um dos exemplos mais comuns o lançamento de uma moeda em um certo número de vezes.

Figura 27 - Apresentação da idéia da distribuição binomial contida no Caderno de Professor

Neste grupo de atividades, é abordado o modelo clássico do lançamento de uma moeda comum²⁴, para introduzir a noção de modelo probabilístico, mais especificamente, o modelo binomial. Propõem-se, a título de exemplo, oito lançamentos de uma moeda e pergunta-se a Probabilidade de ocorrência de três caras e nos três primeiros lançamentos e cinco coroas nos outros cinco. Depois é perguntado qual seria a probabilidade desta mesma ocorrência, porém, com a ordenação dos eventos não definidas, ou seja, as faces cara e coroa, poderiam aparecer em qualquer ordem.

Em seguida, também a título de exemplo, são propostos seis lançamentos sucessivos de um dado, e deseja-se saber a Probabilidade da face “4” estar voltada para cima nos dois primeiros lançamentos e em seguida em qualquer dos lançamentos. Além desses, outro exemplo proposto é o caso de cinco lançamentos de dado com o objetivo de verificar em quantas destas vezes a face voltada para cima contém um número maior ou igual a “4”. A partir disto, a situação explora todas as possibilidades para o evento, mostrando ao final que a soma de todas essas probabilidades deve ser igual a 1, visto que aí estão todos os casos possíveis. Observa-se assim um avanço na complexidade cognitiva em relação às atividades propostas nas situações de aprendizagem anteriores, pelo aumento do número de

²⁴ Uma moeda é considerada comum (ou honesta) quando a Probabilidade de cada face é $\frac{1}{2}$, o que é explicado pela simetria geométrica da moeda, devido à localização do centro de simetria (centro de massa da moeda).

repetições do experimento aleatório (no caso o lançamento da moeda ou do dado), mas sem que isto seja discutido com o professor, ou sem que se oriente ao mesmo como abordar esta complexidade com os alunos.

O objetivo desta última atividade é mostrar como o binômio de Newton é desenvolvido. Assim, é proposto ao professor que seu desenvolvimento seja realizado por intermédio das probabilidades, de forma que cada termo corresponda à probabilidade de ocorrência de um determinado número de resultados esperados e de não esperados em n repetições de determinado evento, sempre nas mesmas condições. A partir disto, é proposto um problema análogo ao do lançamento do dado, para que se verifique a probabilidade desejada. Novamente fazemos aqui uma crítica: a não abordagem da noção de variável aleatória, como sendo a função que associa a cada evento resultante da experiência aleatória o número de sucessos observados, pode provocar uma maior dificuldade na atribuição de significado pelo aluno, o que justificaria o uso do modelo binomial de distribuição de Probabilidade.

Em seguida, são propostas duas atividades com o cálculo de probabilidades, cuja finalidade é iniciar a abordagem do estudo das propriedades do Triângulo de Pascal. Ao lermos a primeira atividade, embora envolva o cálculo de probabilidades, de forma análoga às demais até aqui analisadas, não verificamos nenhuma relação com o triângulo de Pascal. Já no segundo, que se refere ao clássico²⁵ problema do nascimento de “ n ” crianças, verificamos que o objetivo é fazer os alunos relacionarem o raciocínio combinatório com os binômios e ao triângulo de Pascal. A atividade proposta também apresenta uma situação em que se deve calcular a probabilidade de todos os eventos possíveis que podem ocorrer no nascimento de seis crianças. A relação feita com o triângulo de Pascal é a de que os numeradores das probabilidades, ou dos termos do binômio, são os termos da linha seis do triângulo de Pascal. Como o total de possibilidades de nascimento das seis crianças é 64 e a probabilidade disto corresponde a 1, a soma da linha 6 do triângulo de Pascal também é 64 ($1+6+15+20+15+6+1$).

Ao fim destas atividades, os autores do caderno comentam que a abordagem metodológica dada às atividades desenvolvidas até o momento na situação de

²⁵ Considerado pelos autores

aprendizagem 4, estão calcadas totalmente na resolução de problemas e no estabelecimento de conclusões a partir de induções e afirmam que, desta forma, o professor deve adotar uma rotina de aula que proporcione tempo para os alunos refletirem sobre os problemas e a partir do raciocínio que cada aluno mobiliza, estabeleça com a classe, as necessárias generalizações.

Diante deste fato, afirmando auxiliar o professor, propõem uma lista de situações-problema. Os problemas propostos seguem a mesma linha das atividades desta situação de aprendizagem. O problema número 6 (figura 28) a seguir, nos chama atenção.

Ao solicitar que os alunos construam um gráfico de colunas para representar todas as probabilidades envolvidas, vemos uma preocupação, mesmo que pequena, de relacionar a Probabilidade com a Estatística, relação que ultimamente vem sendo discutida por vários pesquisadores, como uma etapa na construção do raciocínio estatístico e probabilístico. No entanto, o Caderno do Professor orienta erroneamente quanto ao gráfico, pois o solicitado no problema é um gráfico de barras (que no caso deveria ser de colunas, já que a variável será representada no eixo horizontal), pois trata-se de uma variável discreta. O erro cometido é que o caderno ilustra a resolução com um histograma que, além disto, apresenta as cores de suas colunas erroneamente, distintas duas a duas para evidenciar a simetria do gráfico. Ou seja, recurso visual (representação visual) mal utilizada, podendo constituir um entrave para a aprendizagem das formas de representação de uma variável.

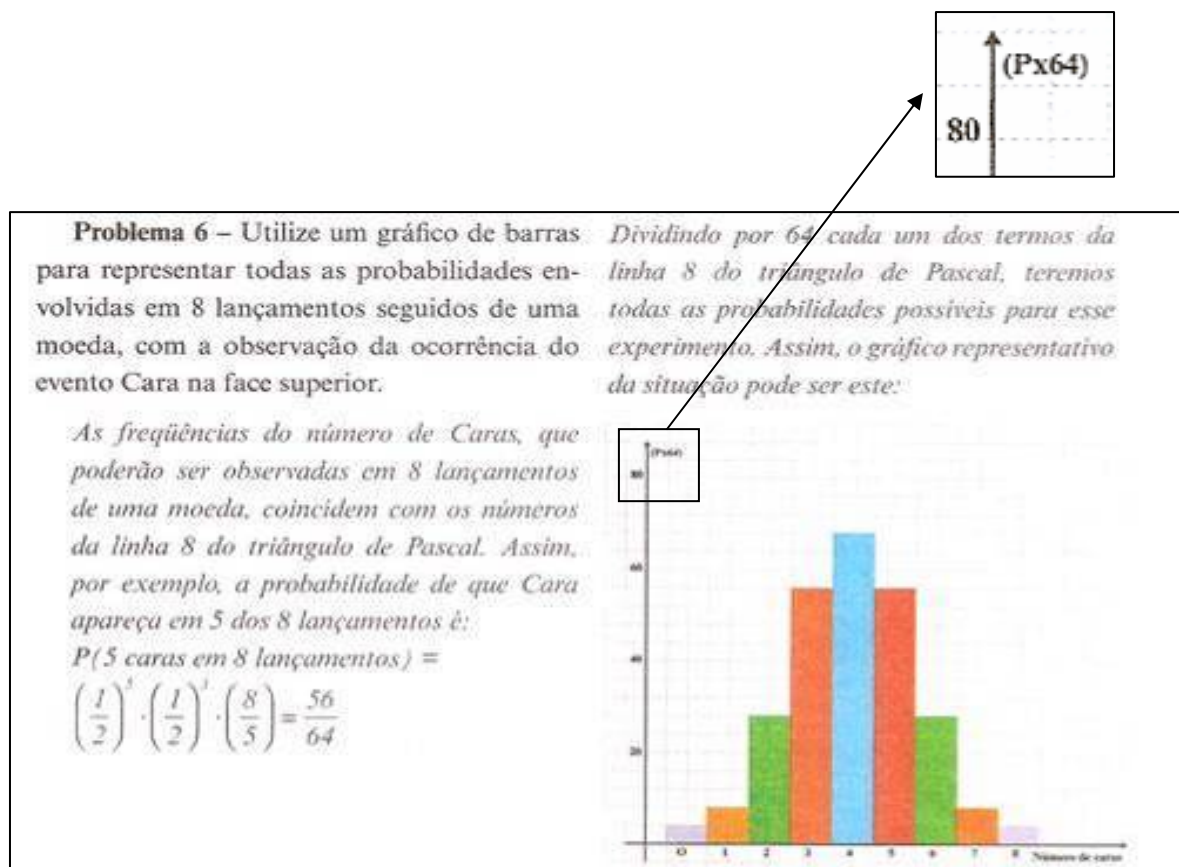


Figura 28 - Problema 6 apresentado na quarta situação de aprendizagem no caderno de 2008

Ao comentarem a situação, os autores afirmam que a análise do gráfico de tal problema pode introduzir a ideia da curva Normal, que será discutida posteriormente em outro bimestre. Novamente, uma inadequação, já que a Curva Normal representa uma distribuição de variável contínua.

Como é possível verificar na edição de 2008, aparece um erro na expressão da binomial, pois a combinação de 8 elementos tomados em grupos de 5 (ou seja, $\binom{8}{5}$), aparece como uma fração, $\left(\frac{8}{5}\right)$, induzindo ao erro, além disto, a notação utilizada pelo gráfico no eixo das probabilidades também apresenta um erro, pois sugere que as Probabilidades sejam multiplicadas por 64, enquanto que o correto seria $\frac{1}{64}$ (se o correto fosse 64). Estes resultados foram corrigidos na versão de 2009, porém a notação utilizada para representar o eixo das probabilidades não é utilizada pela mídia e nem pelos livros didáticos. Acreditamos que um outro tipo de notação, já com o valor da Probabilidade seria uma forma de facilitar a percepção da Probabilidade.

Apresentamos a seguir, o que consideramos ser uma solução correta para o problema:

Se chamarmos de X a variável aleatória que conta o número de caras ocorrido em 8 lançamentos de uma moeda equilibrada, então X é um número natural entre 0 e 8, e tem distribuição binomial com Probabilidade de sucesso igual a 0,5, ou seja, $X: b(8; 0,5)$. Construindo a distribuição de probabilidades:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	0,0039	0,0312	0,1093	0,2187	0,2734	0,2187	0,1093	0,0312	0,0039

Um gráfico de colunas que represente esta distribuição poderia ser:

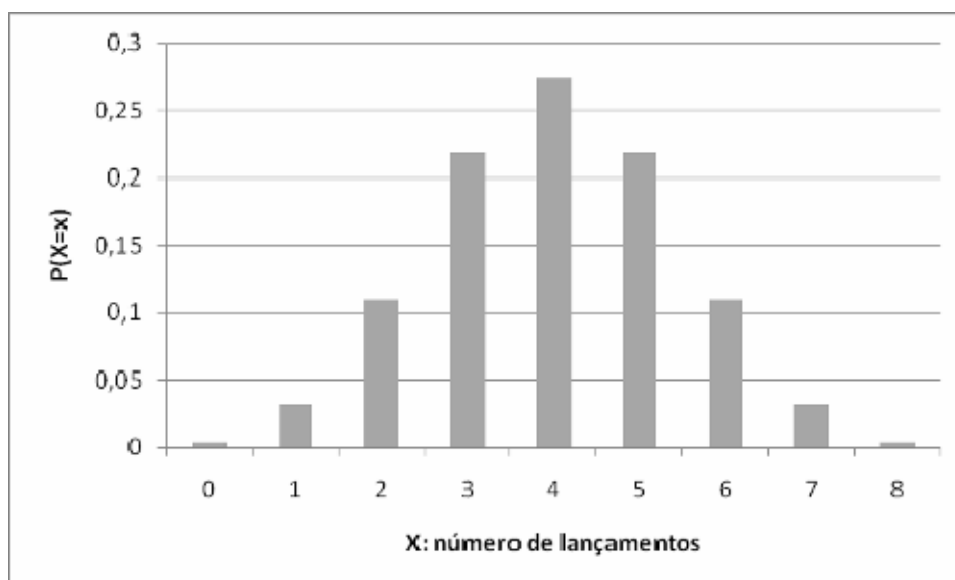


Figura 29 - Gráfico adequado para solução do problema 6

Finalizando a análise da quarta situação de aprendizagem, retomamos nosso objetivo de verificar qual enfoque está sendo dado ao cálculo de Probabilidade no material construído e distribuído pela SEE-SP. As atividades não abordam aspectos frequentistas de Probabilidade e também não se encontram propostas de situações nas quais o aluno realize experimentos repetitivos, nos quais estimem e verifiquem a probabilidade de ocorrência de determinado evento pela observação da estabilização das frequências relativas deste evento. As atividades exploram situações nas quais os alunos devem “imaginar” o desenvolvimento do experimento,

associando a probabilidade de sucesso ou fracasso, porém não participam efetivamente da situação.

As análises realizadas permitiram verificar características do enfoque clássico (ou laplaciano), numa visão determinista de Probabilidade. As atividades apresentadas nas situações de aprendizagens 1 e 2 abordam unicamente a definição clássica de Probabilidade, a de Laplace, porém percebemos uma preocupação, por parte dos autores do Caderno, em desvincular o formalismo dado a esta teoria, uma vez que abordaram o conceito por meio de jogos e situações-problema.

Ao término da análise do Caderno do Professor, podemos inferir que a proposta apresentada para o ensino de Probabilidade na rede estadual de São Paulo não permite ao aluno reconhecer o caráter aleatório de fenômenos naturais, científicos ou sociais, e nem compreender a Probabilidade como uma ferramenta de previsão, como recomendam os PCNEM. Tal inferência pode ser feita a partir da análise do conjunto de tarefas e técnicas apresentadas: nenhuma delas faz apelo à identificação da experiência aleatória à qual o evento do qual se quer a Probabilidade está vinculado. Além disto, as tarefas identificadas podem ser, em grande parte, categorizadas em um mesmo “tipo de tarefa”, pouco favorecendo a construção do raciocínio probabilístico e de concepções probabilísticas mais “completas”, segundo níveis propostos por Azcárate (1996).

Ainda em desconformidade com as recomendações dos PCN, as situações propostas pelo caderno não permitem aos alunos, identificar em diferentes áreas e atividades práticas, a utilização da Probabilidade e não levam o aluno a realizar experimentos, fazer observações, compreender informações, tomar decisões e fazer precisões, conforme recomendam os PCN.

5. APLICAÇÃO, ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DAS ATIVIDADES DIAGNÓSTICAS.

Conforme dito na seção 2.1 deste trabalho, acreditamos que a aplicação de uma atividade diagnóstica que envolva diversos enfoques de Probabilidade é necessária para que possamos identificar como os alunos mobilizam as concepções espontâneas ou construídas a partir do ensino, e com isto responder nossa questão de pesquisa e também para confirmar o observado na análise da proposta curricular da SEE-SP.

Assim, elaboramos uma atividade com 11 questões²⁶ para serem resolvidas por um grupo de sete alunos voluntários, da 2ª e da 3ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de São Paulo. O conjunto de atividades encontra-se apresentado no Apêndice 1.

As atividades foram planejadas para serem trabalhadas pelos alunos em duplas, pois acreditamos que muitas concepções podem ser explicitadas pelas conversas e “debates” entre eles.

O objetivo principal da atividade é o levantamento de dados que permitam diagnosticar como estes alunos mobilizam suas concepções probabilísticas, sejam estas espontâneas ou construídas após aprendizagem. A escolha pelos alunos da rede pública se deu pela nova proposta que vem sendo implantada pela Secretaria Estadual da Educação, desde o início de 2008.

Foram aplicadas duas atividades com os alunos da 2ª série e uma atividade com os alunos da 3ª série. Nosso objetivo é verificar quais concepções os alunos mobilizam antes do ensino formal, ao término deste, e passado um ano deste ensino. Como o conteúdo Probabilidade é abordado na 2ª série do Ensino Médio, 3º bimestre, aplicamos uma atividade antes do ensino formal e outra logo após o término do mesmo, com duas duplas, uma das quais formada com alunos da pesquisadora, que era professora da turma, e outra formada por alunos de outra

²⁶ Inicialmente nosso objetivo era elaborar uma atividade com 12 questões, porém, por falta de atenção a questão 6 não digitada e com isto a atividade passou a contar com 11 questões, numeradas de 1 a 5 e de 7 a 12.

professora da mesma escola. Esperamos com isto, estudar as diferenças que podem ser justificadas pelas escolhas contidas no material didático da proposta curricular e pela metodologia utilizada pela pesquisadora-professora.

A aplicação da atividade com os alunos da 3ª série do Ensino Médio teve por objetivo verificar quais concepções permaneceram estáveis, passado um ano do ensino formal. A proposta foi implementada em 2008, sendo que o material didático relativo à Probabilidade permaneceu o mesmo em 2009.

Assim, verificaremos e compararemos quais concepções probabilísticas são construídas pelos alunos ao longo do Ensino Médio, e também o efeito do processo de ensino e aprendizagem na evolução destas concepções, uma vez que para Balacheff (1995), uma aprendizagem se caracteriza pela mudança de concepções sobre um objeto matemático específico (no caso, sobre Probabilidade).

A atividade é composta por 11 questões que foram construídas de forma a contemplar os quatro níveis de concepções propostos por Azcárate (1996), que apresentamos no capítulo 2 e, além disto, que também sejam trabalhados os enfoques Clássico (Laplaciano), Frequentista e Axiomático de Probabilidade.

Assim, utilizando o quadro teórico da Teoria das Concepções, o objetivo é identificar quais operadores estes estudantes mobilizam para resolver os problemas, qual o sistema de representação utilizado, quais invariantes operatórios constituem a estrutura de controle, que permitirá exprimir as decisões e validações de uma determinada ação do aluno.

5.1. Aplicação da Atividade

A aplicação da atividade aconteceu em quatro momentos diferentes. Num primeiro momento, realizamos a atividade com a dupla de alunos que ainda não tinha tido contato com o ensino formal de Probabilidade e foi aplicada em dois dias. No primeiro dia foram reservadas duas horas/aulas e no segundo dia três horas-aulas, totalizando cinco horas/aulas. Os alunos que participaram desta fase da

aplicação eram alunos do período noturno, considerados pela professora/pesquisadora como alunos interessados e esforçados.

A dupla que iniciou a atividade não foi a mesma no segundo dia de aplicação, pois um dos integrantes quebrou o braço e ficou afastado da escola por mais de uma semana, assim optamos por continuar a atividade com uma nova integrante, que também não havia tido contato com o ensino formal de Probabilidade, porém já havia participado das primeiras aulas.

No primeiro dia de aplicação, a dupla resolveu as cinco primeiras questões, e no segundo dia, as questões seguintes. Contudo vale observar que as questões 11 e 12 foram deixadas em branco.

Em um segundo momento, desenvolvemos a atividade com os alunos da 3ª série²⁷. Os alunos foram organizados em trio, sendo reservadas 3 horas/aula de um único dia para sua aplicação. Os alunos que realizaram esta atividade também foram escolhidos por serem interessados e esforçados e também eram alunos da professora/pesquisadora, porém não na disciplina de Matemática. Ressaltamos que estes não foram alunos da professora/pesquisadora na segunda série do Ensino Médio, momento que tiveram contato com o ensino de Probabilidade.

A terceira aplicação foi realizada com alunos da 2ª série que não eram alunos da professora/pesquisadora e que não tinham realizado a atividade anteriormente, porém já haviam recebido o ensino formal de Probabilidade regularmente nas aulas de Matemática. Estes alunos foram escolhidos por suas professoras de matemática, que os consideravam alunos interessados e os únicos que demonstraram interesse em participar da pesquisa. A aplicação foi realizada em um único dia, durante três horas/aulas. Estes alunos eram do período da manhã.

Enfim, a última aplicação foi realizada com a dupla que já havia realizado a atividade antes do ensino formal. O tempo destinado a esta aplicação foi de quatro horas/aula e foi realizada logo após o término do ensino. Ressaltamos que a dupla participante desta última aplicação foi a mesma que iniciou a atividade da primeira

²⁷ Não houve uma ordem específica na aplicação das atividades. Foi realizada de acordo com a disponibilidade dos alunos. Preocupamo-nos apenas em aplicar uma atividade antes do ensino formal com a dupla formada por alunos da professora/pesquisadora.

aplicação, no primeiro dia, ou seja, a dupla formada pela aluna que havia quebrado o braço.

Como é possível verificar, o tempo destinado para a aplicação não foi o mesmo para todas as duplas. Isto se deu pelo fato de que queríamos que os alunos terminassem a atividade que busca diagnosticar concepções e não a habilidade de resolver mais ou menos rapidamente uma atividade.

5.2. Análise das Questões da Atividade Diagnóstica

5.2.1. Questão 1

Questão 1: Um probleminha para aquecer... A escolha do carro novo.

Em uma loja de carros usados um cliente percebe que o modelo que ele procura está disponível em 3 cores diferentes: azul, vinho e prata. Existem no pátio da loja 2 veículos azuis, 4 vinho e 1 prata. Gostando das três cores e com a informação que todos os carros são exatamente iguais, a menos da cor, decide escolher uma chave ao acaso na mesa do vendedor. Qual é a probabilidade de que ele compre um carro prata? Justifique.

Agora vamos pensar juntos alguns detalhes.

- a) A escolha da chave é feita ao acaso? Justifique.
- b) Podemos descrever todas as possibilidades de resultados antes da escolha da chave? Se sim, quais? Se não, justifique.
- c) Se a cada carro vendido pudermos supor que a loja repõe a cor escolhida de forma a manter o estoque sempre o mesmo, podemos repetir o processo de escolha da chave ao acaso tantas vezes quantas desejarmos, sempre nas mesmas condições, ainda que apenas mentalmente? Justifique.

Análise *a priori*

O objetivo geral desta questão é fazer com que o aluno se familiarize com a ideia do acaso. Os itens a), b) e c) foram propostos com a intenção de provocar no aluno uma reflexão sobre a identificação de uma experiência aleatória, para que em seguida, responda a questão. A partir da discussão entre os alunos, que foram áudio-gravadas, e do material escrito produzido e que foi fotocopiado, buscaremos identificar a concepção de acaso mobilizada. Como a pergunta principal é responder

qual é a probabilidade de sortear um carro prata em um conjunto de carros pré-determinado, buscaremos também, identificar a concepção de Probabilidade mobilizada pelos alunos.

Esperamos que o aluno responda que a probabilidade de comprar um carro prata seja $\frac{1}{7}$ ou aproximadamente 14,28%, uma vez que existem sete carros no pátio do qual será escolhido aleatoriamente um carro e, entre estes sete carros, apenas um na cor prata. A resposta em porcentagem se justifica em nossa resolução por sua utilização no Caderno do Professor (conforme mostramos no capítulo 4). Quanto à percepção do acaso, acreditamos que nesta questão, a dupla da 2ª série que realizar a atividade antes do ensino formal possa apresentar algumas ideias intuitivas sobre o aleatório.

As atividades devem permitir ao aluno externar suas concepções sobre acaso pela forma de análise da escolha do carro: determinista ou não. Considerando-se que os alunos têm contato com situações não deterministas desde antes do início de sua escolaridade, seja por jogos, por resultados de loterias, entre outras situações possíveis, tal como aponta Coutinho (2001), esperamos aqui poder identificar o tipo de concepção mobilizada para eventual aprofundamento nos aspectos não determinísticos.

Os **conteúdos matemáticos** que os alunos deverão mobilizar são: operações no conjunto dos números racionais e conceito de razão como comparação entre parte e todo.

As **variáveis didáticas**²⁸ identificadas são:

- *A cor do carro a ser escolhido ser prata, pois só há um carro prata e como já foi dito anteriormente, uma concepção já identificada por Lecoutre (1985) é a de que o aluno, com um conjunto com n elementos, considere que cada um tem probabilidade $1/n$ de ocorrer, independentemente da proporcionalidade observada neste conjunto. Com isto identificaremos se o aluno considera apenas um elemento*

²⁸ Embora a expressão “variável didática” designe as escolhas feitas pelo professor ou pesquisador para o desenvolvimento global ou pontual da atividade ou do conjunto de atividades, neste caso estamos identificando as possíveis escolhas feitas pelos autores do material didático em uso pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo.

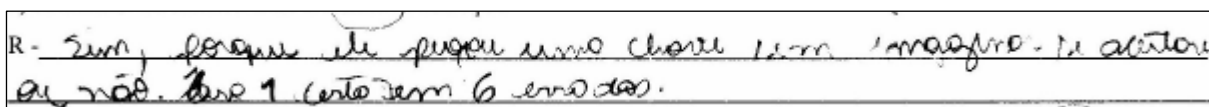
do conjunto (o que significa a resposta 1/3) ou a proporção solicitada (o que significa a resposta 1/7);

- Perguntar se a escolha da chave do carro é feita ao acaso, pois acreditamos que irá suscitar discussões sobre o experimento aleatório em jogo.

Análise a posteriori

→ Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal

A hipótese que tínhamos, de que a questão poderia suscitar algumas ideias sobre o significado do acaso com os alunos que não tiveram o ensino formal de Probabilidade, foi confirmada. Ao responder que a escolha da chave do carro é feita ao acaso, afirmando que o cliente pegou a chave sem imaginar se acertaria ou não a cor do carro, conforme figura 30 abaixo, percebemos uma ideia, mesmo que não muito clara, do significado do acaso. Observamos que os alunos reconheceram a ação do acaso, embora não conseguissem explicar o que fosse.



R- Sim, porque ele pegou uma chave sem imaginar se acertou ou não. São 7 cartas com 6 cores.

Figura 30 – Protocolo 1 - Resposta dos alunos para a Questão 1, item a).

Quanto ao cálculo da probabilidade procurada, podemos identificar uma primeira concepção, à qual chamaremos “proporcionalidade dentro do conjunto”, para a qual temos:

- Campo de problemas: determinação da probabilidade de um evento resultante de um sorteio aleatório em um conjunto finito de elementos;
- Conjunto de representações: linguagem corrente e representação numérica;
- Operadores: conceito-em-ação segundo o qual é a probabilidade de um elemento em um conjunto de n termos, dos quais k possuem certa característica, definindo a probabilidade por k/n (razão entre número de sucessos e número total de casos);

- Estrutura de controle: a probabilidade como a razão k/n em um sorteio aleatório (sorteio das chaves em um saco com as sete chaves).

Na atividade que realizaram após o ensino formal, percebemos que as alunas responderam corretamente a questão, demonstrando terem noção do acaso. É possível perceber também que as alunas já apontam uma compreensão de Probabilidade. Percebemos ainda, que as alunas utilizaram um invariante, que é a razão entre parte e todo, e como este invariante está sendo usado para desenvolver a resolução, é considerado um operador. Para validarem o resultado explicam o que significa esta fração. Esta validação se apresenta como estrutura de controle e é apresentada na Figura 31.

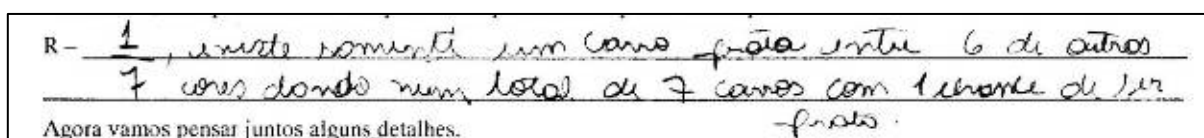


Figura 31 - Protocolo Resposta do aluno para questão inicial

Neste caso, podemos identificar uma concepção clássica de Probabilidade, à qual chamaremos “comparação entre parte e todo”, para a qual temos:

- *Campo de problemas*: determinação da Probabilidade de um evento resultante de um sorteio aleatório em um conjunto finito de elementos;
- *Conjunto de representações*: linguagem corrente, representação numérica e pictográfica (desenho das bolinhas representando as chaves);
- Operadores: razão entre parte e todo;
- Estrutura de controle: validação dos operadores por meio da linguagem corrente – existe uma opção correta entre as sete possíveis, o controle sendo feito pela associação entre opção e chave.

O diálogo entre os alunos é apresentado no extrato que segue:

Diálogo	Nossa Análise
T: Tem um saquinho, com 7 chaves, são 7 carros. Tem duas chaves lá do carro azul, 4 do vinho e 1 do prata. Ele tem uma chance, não... ele tem..., como eu posso falar..., ó, ele tem 7 opções de	Percebe-se que M não percebe a proporção existente no conjunto do qual se fará o sorteio, que é a proporção no conjunto de carros segundo suas cores. Neste caso, pode-se inferir

chave lá dentro, só que ele vai puxar uma vez só, entendeu? Ai, não é isto que eu quero falar.	a mobilização de um invariante operatório: “em um sorteio, importa o número de elementos dos quais se fará este sorteio e não a proporção existente neste conjunto devido à características diferentes dos seus elementos”.
M: Se você for raciocinar por este sentido, vai ser isto ó: um saquinho que eu tenho 7 lápis de cores diferentes.	
T: Não é isto que eu estou querendo dizer.	
M: O que você quis dizer...	
Pesquisadora: Põe no papel para eu ver se eu entendo o que você está querendo dizer.	
M: Eu entendi.	
...	
M: Ó, tem 7 chaves e ele quer pegar, ele tem uma chance de pegar uma chave, é..., um prata, porque só tem uma chave do prata, certo? Para pegar um prata... Por mais que tenha sete chaves, só uma chave prata, então é uma opção.	Associação entre cada chave e a opção correspondente para escolha no sorteio.
T: Eu tava fazendo isto no 9º ano, deixa eu ver se eu consigo usar o mesmo exemplo que ele usou. Ó, tem 7 chaves, só que ele tem uma chave prata, uma desta aqui é prata, só que ..., ai a palavra “foge”.	Neste momento a fala do aluno indica uma aprendizagem anterior, ou seja, existe uma concepção não espontânea, construída a partir de aprendizagem anterior.
M: Vai, vai fazendo.	
T: Deixa eu ver...	
M: Mas foi o que eu quis dizer, ó: no caso ele tem 7 chaves, digamos que a bolinha...	
T: Não, espera ai, espera ai.	
M: Vamos fazer assim.	
T: Eu quero explicar por quê.	
M: Oh: 2 veículos azul, a bolinha aqui é azul, 4 veículos pretos, triângulo é o preto.	
T: Não tem nenhum preto, é vinho e prata.	
M: Desculpa. 4 vinho, 2 azul e 1 prata, eu vou “enfiar” a mão aqui uma vez para pegar uma chave, ta vendo a mãozinha aqui, rsrs, para pegar uma chave. Qual é a probabilidade de eu pegar, se só tem uma chave prata? Uma.	Uso de representação pictográfica para explicitar a composição do conjunto no qual se fará o sorteio – associa cada bolinha a uma chave.
T: Então, você tem uma chave para 7 chaves.	
M: Ou 7 opções, isto. Então eu tenho uma chance em 7 opções.	
T: Então é isto mesmo.	

Quadro 2 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 1 da atividade realizada antes do ensino formal e análise da pesquisadora

Assim, podemos afirmar que a concepção que as alunas apresentam nesta questão é a razão entre parte e todo e a noção que possuem do acaso é percebida embora não explicitada. Percebemos que as alunas evoluíram no sentido da justificativa e validação. Enquanto que na primeira atividade a ideia do acaso parecia algo não muito claro, na segunda atividade apareceu de forma mais clara, pois ao recorrerem ai ideia do “saquinho”, imaginando que não vissem as chaves, as alunas percebem que todas as chaves tem a mesma Probabilidade, e ainda que não podem prever qual será sorteado (ideia de experiência aleatória).

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Percebemos que estes alunos demonstram dúvidas sobre o que é o acaso, aceitando que há ação do acaso no desenrolar da atividade apenas porque foi dito no enunciado. Os alunos não conseguem explicitar o que entendem por acaso, o que também foi observado em Coutinho (2001).

Diálogo	Nossa Análise
D: A escolha da chave é feita ao acaso? Justifique.	
A: Sim, porque disse no texto, que ele vai escolher ao acaso. Quer ver? ... escolher uma chave ao acaso. Não é matemática, agora é interpretação de texto também?	
D: É mesma coisa.	
A: A escolha da chave é feita ao acaso?	
D: É.	
A: É.	
D: Sim, porque, porque, desde o início...	
A: Ele decide escolher uma chave ao acaso na mesa do vendedor, qual é a probabilidade de que ele escolha o carro prata? É relativo, isto daqui é relativo. Como se diz, ah, na mesa do vendedor, quem disse que só tinha aqueles carros na mesa do vendedor?	Dificuldade na compreensão do texto com o enunciado do problema, tentativa de alteração do contexto apresentado. Dificuldade de focar no problema proposto. Este tipo de dificuldade já foi observado em pesquisas, tal como Maury (1986, <i>apud</i> COUTINHO, 1994, p.35)
Pesquisadora: Leia o problema novamente.	
A: Na mesa do vendedor, só tem estes dois?	
Pesquisadora: Leia do começo.	
D: Ó, existe no pátio da loja 2 veículos azuis..	
A: Mas e se tivesse o carro do vendedor também, e ele tivesse colocado a chave em cima da mesa.	
Pesquisadora: Não inventa	
A: É relativo, mas tudo bem. Porque estavam as chaves embaralhadas na mesa do vendedor e ele escolheu uma.	Identificação, pelo aluno, das condições de um sorteio aleatório (experimento aleatório em jogo)
D: Sim, porque ele resolveu... (o aluno continua escrevendo no espaço reservado para a resposta)	

Quadro 3 - Diálogo dos alunos da 2ª Série EM na resolução da questão 1 e análise da pesquisadora

As falas e a escrita dos alunos indicam que eles sabem o que é acaso, mas não conseguem explicar. Com isto identificamos um conceito-em-ação: acreditam que o acaso é tudo o que torna um resultado inesperado, agindo como se esta afirmação fosse verdade e que justifica suas ações.

Inicialmente, ao tentar determinar a probabilidade de sortear um carro prata no conjunto dos sete carros da loja, os alunos consideraram “7 carros para 1” e não

“1 para 7”, indicando que o conceito de Probabilidade não está relacionado, para eles, à definição que garante que uma Probabilidade é um número pertencente ao intervalo real $[0, 1]$. Observe-se que “7” é o número total de carros, enquanto “1” é o número de carros prata, a cor da qual queremos calcular a Probabilidade. Aqui percebemos mais um conceito-em-ação: Probabilidade é a razão entre os dois valores a serem comparados sem, contudo, considerar a ordem na construção desta razão. Este invariante está sendo usado para desenvolver a resolução, logo, como um operador.

Para calcular a probabilidade solicitada, os alunos recorreram ao cálculo de porcentagem, que se apresenta como outra representação desta Probabilidade e é aquela utilizada no Caderno do Professor. Primeiramente, os alunos calculam a porcentagem de sortear um carro dentre os sete existentes, e em seguida multiplicam este valor pela quantidade de carros de cada cor, encontrando a Probabilidade de sorteio de cada cor, ou seja, eles criam uma etapa intermediária, que é achar a probabilidade de uma única unidade.

Nas gravações dos diálogos, é possível perceber que os alunos validam sua ação, pois afirmam que a soma dos três resultados tem que ser 100% (já que não há outro tipo de carro na loja) e que não estão alcançando este número devido a erros de arredondamento, mas isto não os impede de concluir pela validade da resolução feita. Esta estrutura de controle justifica o operador utilizado, “Probabilidade é a porcentagem calculada no conjunto”.

Nota-se que o número 14,28%, calculado por A no extrato que segue, indica a Probabilidade de escolha de um (1) carro e que foi encontrado dividindo-se 1 por 7, que é o total de possibilidades da escolha de um carro. Neste caso, o invariante mobilizado é o do cálculo da porcentagem.

Diálogo	Nossa Análise
A: <u>14,28%</u> vezes 2	O aluno calcula o valor para a probabilidade de ocorrência de um elemento do conjunto e multiplica este valor pelo número de elementos da proporção considerada.
B: <u>28,56%</u>	
A: então você é o bonzão	
B: eu tenho que fazer minha parte	
A: de pegar o carro azul, não vai dar 100% isto	
B: ah é, lógico que não, azul, é....	
A: 14,28% vezes 4	

B: <u>57,12%</u>	
A: falei pra você não...., deu 99,96%, e agora?	Estrutura de controle explicitada: a soma de porcentagens é sempre igual a 100%, embora possam ser admitidos erros devidos ao arredondamento.
B: porque você não me deu o resultado exato, tipo..., aqui tá só arredondando, há faz de novo, 7 dividido por 100, 100 dividido por 7, é 100 por 7	
A: 14,2827	
B: é..., o próximo é 5 e 5 não arredonda.....	
A:.....	
B: <u>deixa assim mesmo</u>	

Quadro 4 – Continuação do diálogo dos alunos da 2ª Série EM na resolução da questão 1 e análise da pesquisadora

Nos diálogos acima, os números 28,56% e 57,12% indicam a Probabilidade da proporção esperada²⁹ e com isto outro invariante mobilizado é de multiplicar a probabilidade encontrada pela proporção esperada. Os alunos validam a concepção, afirmando que a soma de todas as probabilidades tem que ser 100%.

Com isto, percebem-se aqui duas concepções interrelacionadas, a quais chamaremos de concepção “unitária de Probabilidade” e concepção “Probabilidade como porcentagem”, para a qual teremos:

- *Campo de problemas:* determinação da probabilidade de um evento resultante de um sorteio aleatório em um conjunto finito de elementos;
- *Conjunto de representações:* linguagem corrente e representação percentual;
- *Operadores:* conceito-em-ação que define a probabilidade de um elemento em um conjunto de n termos como $1/n$ e multiplicar o valor obtido pelo número de elementos da proporção considerada;
- *Estrutura de controle:* afirmar que a soma de todos os resultados tem que ser 100%.

Percebemos neste caso que as respostas são baseadas em características da concepção “Não probabilísticas” da Realidade, de acordo com Azcárate (1996), já que preocupam-se com as quantidades apresentadas pelo problema, sem

²⁹ Consideraremos a expressão “proporção esperada” como o valor solicitado na questão.

necessariamente considerar a ação do acaso (já que aparentemente só aceitam isto por causa do enunciado).

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

Em nossa análise *a priori*, acreditávamos que alunos da 3ª série do Ensino Médio apresentassem mais conscientemente a ideia do acaso, porém o que percebemos foi a presença de alguma compreensão de forma parcial. Esta compreensão foi apontada após muitas discussões dos alunos sobre o que seria o acaso. Assim, para eles, o acaso seria algo do que não se sabe. Acerca de Probabilidade, verificamos que os alunos apontam de forma parcial também, uma mobilização intuitiva de invariantes operatórios (ou seja, de concepções espontâneas).

Inicialmente, os alunos resolveram a questão 1 multiplicando as opções do enunciado, após resolverem a questão 2 e percebendo que algo estava errado, voltaram à questão 1 e somaram as opções. Além disto, haviam somado 8 opções, considerando além das 7 opções, a escolha de um carro, ou seja confundiram o enunciado, pois somaram 7 com 1, sendo este 1, o carro a ser sorteado, em seguida perceberam que eram apenas 7 opções.

Verificamos neste caso, que as alunas souberam identificar quantas opções existiam para cada tipo de carro, porém não souberam calcular a Probabilidade de cada um desses eventos. O que se percebe é a comparação entre parte e todo por meio da linguagem corrente (figura 32) e o operador coincide com a própria estrutura de controle. Com isto identificamos novamente a concepção que anteriormente chamamos de “comparação entre parte e todo”, entretanto com uma diferenciação, já que os alunos não representam esta comparação por meio de uma fração.

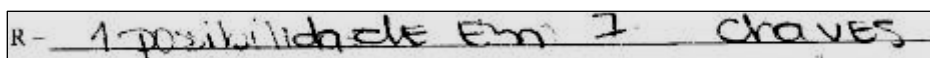
A rectangular box containing handwritten text in black ink. The text reads "R- 1 possibilidade em 7 chaves". The word "chaves" is written in a larger, bolder font than the rest of the text.

Figura 32 - Resposta da questão por meio da linguagem corrente

Ou seja, 1 possibilidade em 7, representando a probabilidade igual a $\frac{1}{7}$.

Observa-se que estes alunos não consideram o acaso (ao menos explicitado) e a não validação pelo fato que a soma das probabilidades dos eventos elementares é

sempre igual a 1. Embora tenham somado as opções, não usaram tal resultado para validar o raciocínio.

5.2.2. Questão 2

Questão 2: Outro probleminha para pensar e resolver... Que sorvete escolher

Querendo escolher um sorvete, Márcia deve decidir entre 3 tipos de sorvetes à base de frutas e 5 tipos de sorvetes que não são de frutas. Se ela não quer decidir sozinha e vai pegar um sorvete ao acaso dentro da geladeira, qual é a probabilidade de que este sorvete seja à base de frutas?

Para ajudar a pensar:

- a) Quantas e quais possibilidades existem para a escolha de um sorvete de frutas?
- b) Quantas e quais possibilidades existem, no total, para a escolha de um sorvete?
- c) Podemos conhecer, antes do ato efetivo da escolha, o sabor do sorvete que será escolhido?

Agora responda à pergunta inicial:

Análise a priori

O objetivo da questão 2 também é levar o aluno a pensar e “debater” o significado do acaso e de experiências aleatórias. Os itens (a), (b) e ((c) também foram elaborados de forma a suscitar discussões sobre “o acaso” na Probabilidade. O que diferencia a questão 2 da questão 1 é a pergunta apresentada pelo item c), a qual o aluno deve responder se é possível conhecer o sabor do sorvete antes do ato efetivo da escolha. Assim, considerando a experiência aleatória “escolher um tipo de sorvete, ao acaso, em uma geladeira contendo dois tipos distintos, sendo 3 de frutas e 5 que não são de frutas”, temos que a probabilidade de que o sorvete escolhido

seja de frutas é $\frac{3}{8}$, ou 37,5%. Tal cálculo se fundamenta na definição clássica, ou

seja, da comparação entre parte e todo pela relação

$$P(X) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de ocorrências de } X \text{ como resultado da Experiência Aleatória}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados possíveis dessa Experiência Aleatória}}$$

Os itens (a) e (b) foram elaborados de forma que o aluno pudesse trabalhar o raciocínio combinatório, que permitirá a ele identificar todos os elementos do espaço amostral da experiência que está sendo evocada. Nomeando os sorvetes de fruta

em F1, F2 e F3, observa-se que Márcia tem três possibilidades de escolher um sorvete de frutas, entre os oito tipos de sorvetes que estão na geladeira. Da mesma forma, ela tem oito possibilidades de escolha para os tipos de sorvete que estão na geladeira: F1, F2, F3, NF1, NF2, NF3, NF4.

Assim os **conteúdos matemáticos que deverão ser mobilizados** pelos alunos são idênticos aos da questão 1: operações com números racionais, razão no sentido de comparação entre parte e todo e contagem (elementos do raciocínio combinatório, para que o aluno estabeleça as possibilidades de escolha do sorvete).

As **variáveis didáticas** que podem ser identificadas para esta questão são:

- *O enunciado não explicitar o número total de sorvetes que estão na geladeira;*
- *A apresentação das quantidades referentes somente aos tipos de sorvetes, sem identificação da quantidade efetiva de sorvetes na geladeira;*
- *Os valores escolhidos para cada um dos tipos de sorvete, permitindo a enumeração (ou seja, permitindo visualização dos resultados possíveis);*
- *A escolha pela enumeração e contagem das possibilidades, complementando o cálculo da Probabilidade em questão;*
- *A pergunta se é possível conhecer antes do ato efetivo, o sabor do sorvete (ou seja, suscitando discussões sobre a percepção da ação do acaso).*

Análise a posteriori

→ *Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal*

Percebemos que os alunos responderam atentamente as questões solicitadas e não houve diferença na qualidade das respostas apresentadas nas duas atividades realizadas pela dupla. Os alunos identificaram a quantidade de cada tipo de sorvete, como esperávamos, porém na áudio-gravação da primeira atividade, é possível perceber que os alunos apresentavam dúvidas sobre esta quantidade, devido à pergunta sobre a possibilidade da escolha de um (1) sorvete à base de frutas, mas perceberam que era a quantidade total de possibilidades da escolha de um sorvete que estava sendo solicitada.

Diálogo	Nossa Análise
T: não, aqui ela quer saber a escolha de um sorvete no total.	Observa-se aqui um operador, pois os alunos demonstram dificuldade na identificação do evento considerado.
M: para a escolha é..., não sei se agora é de um (1) sorvete ou se é de todos os sorvetes à base de frutas, se é de um sorvete mesmo.	
T: não sei, eu também acho, por isto eu coloquei 1 em 8..., porque...	

Quadro 5 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada antes do ensino formal e análise da pesquisadora

Percebe-se aqui a confusão do aluno causada pela formulação do enunciado que não explicita o número de sorvetes na geladeira, mas apenas os tipos, e também se é para escolher um sorvete de fruta dentre os de frutas apenas ou dentre todos os sorvetes. Tal dificuldade na compreensão de enunciados foi identificado em pesquisas, tais como Maury (1986).

No diálogo acima, podemos apontar uma concepção (que inicialmente chamaremos de concepção 1), na qual o invariante que está sendo utilizado é o da equiprobabilidade, ou seja, a Probabilidade é determinada dividindo 1 pelo total de possibilidades, o que é usado como operador e no diálogo a seguir, a soma das possibilidades (8 sorvetes) é usada como estrutura de controle para o problema *“determinar quantos e quais sorvetes”*.

É possível também perceber que, os alunos iniciam a resolução calculando a probabilidade de escolher um sorvete e só depois percebem que deveriam encontrar o número de possibilidades, o que mostra a dificuldade na compreensão do enunciado (variável de contexto, nos termos de Maury, 1986)

Na segunda atividade, realizada após o ensino formal, percebemos que neste momento, as alunas também apresentaram dúvidas sobre a quantidade de sorvete, pelo fato da pergunta referir-se à escolha de um sorvete. Confundem o tipo de sorvete com quantidade, ou seja, inicialmente não consideram a quantidade de cada tipo de sorvete, porém percebem que algo está errado e corrigem a resolução.

No extrato que segue (Quadro 6), identificamos novamente a concepção 1, citada anteriormente.

Diálogo	Nossa Análise
M: ela quer pegar um de fruta, então no caso seria <u>1 em 8</u> , porém eu to com dúvidas <u>porque tem estes três à base de frutas...</u> quantas e quais possibilidades.	No trecho grifado percebemos uma estrutura de controle, ou seja, o aluno tenta validar sua açã, percebendo que existem três sorvetes à base de frutas e que poderiam ser três opções.
T: Aqui oh, acho que teria...	
M: Acho que tem que contar os 8 <u>porque são 8 sorvetes que estão na geladeira</u> . Pelo que ela está falando,...porque ela vai pegar um sorvete ao acaso dentro da geladeira.	Novamente percebemos uma estrutura de controle. O aluno confirma que são oito opções de sorvete.

Quadro 6 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

Neste trecho fica clara a confusão entre a quantidade de sorvetes de cada tipo e a quantidade total, ou seja, confusão entre quantidade de sorvetes a ser considerada como adequada para validar a resolução.

Diálogo	Nossa Análise
T: Ela não quer decidir sozinha e vai pegar um sorvete ao acaso dentro da geladeira. Qual é a probabilidade que este sorvete seja à base de frutas.	
M: Então, ela tem que somar os 8, porque tem 8 possibilidades de pegar qualquer sorvete, ela tem 8 possibilidades, isto não muda e ela quer pegar um sorvete só, então <u>ela tem uma possibilidade em 8</u> .	Novamente a concepção 1 é mobilizada. Temos como invariante: a Probabilidade é determinada dividindo o que se espera pelo total de possibilidades.
T: Entendi.	
M: Porém, eu acho que não seria 8, não, não vai ser 8, porque..., <u>não tem 8 sorvetes de fruta, só tem 3 sorvete de fruta</u> .	Neste momento, percebemos que persiste o conflito na estrutura de controle e outro invariante é mobilizado.
T: Mas só que dentro da <u>geladeira tem os 3 tipos de sorvete à base de frutas e os 5 sorvete que não são</u> . Na geladeira não vai ter só o de fruta.	

Quadro 7 – Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

No trecho acima (Quadro 7) apontamos uma nova concepção (a qual, em princípio, chamaremos de concepção 2). Neste acaso, temos como invariante o número a ser considerado, que é dado pelo que se quer observar – sorvete de fruta – e não pelo total disponível – sorvetes na geladeira. Com isto, os alunos percebem que na geladeira não existem somente os sorvetes à base de frutas, mas também os que não são à base de frutas.

Diálogo	Nossa Análise
M: Mas vamos pensar assim como eu desenhei: 1 sorvete, 2, 3, é 3 à base de frutas não é? Limão, manga e banana	Neste momento os alunos recorrem ao desenho (figura 33) para justificar a resolução proposta por elas. É uma representação pictórica pra induzir a mobilização do invariante.
M: tem 8 sorvetes dentro da geladeira, porém, só tem 3 de fruta, você entendeu?	
T: Mas agora, olha só...	
M: a gente só pode contar os de fruta, a gente não pode contar...	
T: Não, já sei, já sei, já sei. <u>É 3 mesmo, vai ser 3 em 8.</u>	

Quadro 8 - Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

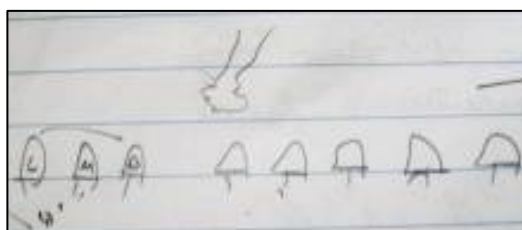


Figura 33 - Utilização de representação pictórica

Diálogo	Nossa Análise
T: Ela não quer decidir sozinha e vai pegar um sorvete ao acaso dentro da geladeira. Qual é a probabilidade que este sorvete seja à base de frutas.	
M: Então, ela tem que somar os 8, porque tem 8 possibilidades de pegar qualquer sorvete, ela tem 8 possibilidades, isto não muda e ela quer pegar um sorvete só, então <u>ela tem uma possibilidade em 8.</u>	Novamente a concepção 1 é mobilizada. Temos como invariante: a Probabilidade é determinada dividindo o que se espera pelo total de possibilidades.
T: Entendi.	Neste momento, percebemos que persiste o conflito na estrutura de controle e outro invariante é mobilizado.
M: Porém, eu acho que não seria 8, não, não vai ser 8, porque..., <u>não tem 8 sorvetes à base de frutas, só tem 3 sorvete de fruta.</u>	
T: Mas só que dentro da <u>geladeira tem os 3 tipos de sorvete à base de frutas e os 5 sorvete que não são.</u> Na geladeira não vai ter só o de fruta.	

Quadro 9 - Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

Assim, no trecho acima (Quadros 8 e 9 e figura 33), temos o invariante no qual a probabilidade é dada pela razão entre as duas quantidades observadas – número de sorvetes à base de frutas e número total de sorvetes. A caracterização da concepção é mostrada no Quadro 10.

Diálogo	Nossa Análise
M: Ah, é verdade.	Neste momento o invariante é usado como estrutura de controle, caracterizando finalmente a concepção 2.
T: Porque <u>ela tem 3 sorvetes à base de frutas para 8 sorvetes no total.</u> Entendeu?	

Quadro 10 – Finalização do diálogo dos alunos na resolução da questão 2 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

Com isto, percebemos que mesmo depois do ensino formal, ao iniciarem a atividade, as alunas apresentam dúvidas sobre como mobilizar a concepção de Probabilidade adequada. Iniciam a atividade considerando o cálculo da Probabilidade como a divisão do que se espera pelo total de possibilidades (concepção 1). Todavia o processo de aprendizagem, identificado aqui pela mudança na concepção mobilizada, na qual consideram o que se deve observar como o total de possibilidades, considerando o conjunto de todas as possibilidades (sorvetes à base de frutas e sorvete que não são à base de frutas). Esta evolução da concepção 1 para a concepção 2 permitiu que os alunos chegassem à resposta correta e neste caso, mobilizassem a concepção “comparação entre parte e todo”, citada em seção anterior. Nos termos de Balacheff (1995), a mudança de concepção caracteriza uma aprendizagem.

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Estes alunos também confundem os termos Probabilidade e Possibilidade, pois calculam a Probabilidade quando são solicitadas as possibilidades de escolha de determinado sorvete. Percebe-se então, que os alunos associam Probabilidade e Possibilidade como sinônimos, sendo assim não consideram a Probabilidade como um número entre zero e um que indica a medida de incerteza, mas apenas um número real que indica o número de possibilidades.

Independentemente de não responderem o item corretamente, a resolução permitiu identificar alguns dos invariantes mobilizados. Desta forma percebemos que eles, assim como na questão 1, calculam a Probabilidade por meio de porcentagem (representação), encontrando a Probabilidade de um sorvete qualquer ($\frac{1}{8} = 12,5\%$) e multiplicando este valor pela quantidade de cada tipo de sorvete. Com isto, foi possível notar que os alunos também mobilizam concepção intuitiva (ou espontânea)

de eventos complementares, pois ao encontrarem a porcentagem dos sorvetes à base de frutas, calcularam o restante que faltava para 100% para encontrar a porcentagem dos sorvetes que não são à base de frutas. Nossa análise se justifica pelo diálogo apresentado no Quadro 11.

Diálogo	Nossa Análise
D: 12,5% para cada sorvete, ..., 37,5% para frutas e..., qual o resto de 37,5%?	O aluno encontrou a Probabilidade da escolha de um sorvete qualquer, em seguida multiplicou este valor pela quantidade de sorvetes à base de frutas, encontrando a Probabilidade de escolha deste tipo de sorvete e para descobrir a Probabilidade da escola dos sorvetes que não são à base de frutas, recorreu ao cálculo de evento complementares calculando-se o restante para 100%)
A: ah, faz a conta ai...	
D: 2,5, 40 e 2,5, para não frutas. (sendo 2,5 o que falta de 37,5 para 40)	
D: "12,5% para cada sorvete e 37,5% para frutas e 62,5% para não fruta"	

Quadro 11 – Diálogo dos alunos da 2ª série na resolução da questão 2

Figura 34 – Resposta do item (b) do problema 2

Assim, podemos considerar que os alunos mobilizam uma outra concepção à qual chamaremos de “Probabilidade Complementar” para a qual temos:

- *Campo de problemas:* determinação da Probabilidade de um evento resultante de um sorteio aleatório em um conjunto finito de elementos;
- *Conjunto de representações:* linguagem corrente e representação percentual;
- *Operadores:* encontrar a Probabilidade calculando-se o restante de 100%
- *Estrutura de controle:* afirmar que a soma de todos os resultados tem que ser 100%.

Nota-se que os alunos não percebem a ação do acaso nesta experiência. Os diálogos e produções nos levam a inferir que a concepção “*Probabilidade complementar*” é construída e mobilizada em contexto determinístico, ou seja, pode-se dizer que os alunos apresentam características da “Concepção Não Probabilística da Realidade, nos termos de Azcárate (1996).

Embora mobilizem a concepção “unitária de probabilidade”, apontada na questão 1 para responder a pergunta principal, que era encontrar a probabilidade de escolher um sorvete à base de frutas, notamos que os alunos mobilizam outra concepção, que é a “comparação entre parte e todo”, porém invertem a parte com o todo. Isto ocorre porque eles associam a Probabilidade a um número real, mesmo considerando a razão com os valores adequados, mas não na ordem correta, comparando as quantidades corretas, mas para isto não respeitam a ordem na razão.

Agora responda à pergunta inicial:
R - 8 : 3

Figura 35 - Resposta da pergunta inicial da questão 2

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

Nesta questão, assim como na questão 1, após várias discussões sobre o que seria o acaso, percebemos que os alunos afirmam que não é possível conhecer o sabor do sorvete antes do ato efetivo da escolha, contudo apresentam concepções errôneas sobre Probabilidade. Consideram apenas a parte e não a razão entre parte e todo. Para o item (a), não percebem que há 3 opções de sorvetes à base de frutas, considerando 1, pois consideraram o que dizia a pergunta: deve-se escolher um sorvete.

a) *Quantas e quais possibilidades existem para a escolha de um sorvete de frutas?*
R - 1 probabilidade em 3

b) *Quantas e quais possibilidades existem, no total, para a escolha de um sorvete?*
R - 8 possibilidades

c) *Podemos conhecer, antes do ato efetivo da escolha, o sabor do sorvete que será escolhido?*
Não

Agora responda à pergunta inicial:
R - 1 possibilidade em 8

Figura 36 - Respostas da questão 2

Neste caso podemos identificar uma concepção, a qual chamaremos “considerar apenas a parte”, para a qual temos:

- *Campo de problemas*: determinação da probabilidade de um evento resultante de um sorteio aleatório em um conjunto finito de elementos;
- *Conjunto de representações*: linguagem corrente e representação fracionária;
- *Operadores*: razão, sendo k a quantidade de elementos do evento, ou seja, da parte considerada;
- *Estrutura de controle*: a probabilidade como $\frac{1}{k}$.

Percebemos que estes alunos confundem Probabilidade com Possibilidade, e como isto também ocorreu com as demais duplas, podemos apontar mais uma concepção errada de Probabilidade, a qual chamaremos de “confundir Probabilidade com Possibilidade”, para a qual temos:

- *Campo de problemas*: determinação das possibilidades de escolha de um elemento em um conjunto finito de elementos;
- *Conjunto de representações*: linguagem corrente e representação numérica;
- *Operadores e Estrutura de controle*: contar o número de elementos equivale a determinar sua Probabilidade;

5.2.3. Questão 3

Questão 3 – Experiência Aleatória e Experiência Determinística

a) Vamos supor que na aula de química você está realizando uma experiência que consiste em misturar 3 elementos, A, B e C, para estudar a reação obtida. Podemos dizer que existe ação do acaso no desenrolar desta experiência? Por que?

b) Qual a diferença entre as duas experiências, a escolha da chave e a experiência química?

c) Indique o significado dos termos abaixo antes de continuarmos nosso trabalho:

Experiência Aleatória: _____

Espaço Amostral: _____

Evento: _____

Experiência Determinística: _____

Assim, PROBABILIDADE é um número que expressa o grau de incerteza provocado pela ação do acaso em uma experiência aleatória.

Análise a priori

O objetivo da questão 3 é suscitar discussões sobre as diferenças entre experiência aleatória e determinística e, com isto, verificar e apontar concepções sobre o acaso, além de identificar noções de espaço amostral e evento. A pergunta apresentada no item (b) foi elaborada de forma que os alunos discutam as diferenças entre os dois tipos de eventos, aleatórios e determinísticos. Esperamos que os alunos, a partir das discussões encaminhadas, possam evoluir na atividade, auxiliando-os nas demais questões.

Assim, as respostas para os itens (a) e (b) podem ser descritas pelos alunos de diversas maneiras, com formulações pessoais construídas a partir das atividades anteriores.

Com isto, as **variáveis didáticas** são:

- *Perguntar se existe ação do acaso na mistura dos três elementos químicos;*
- *Perguntar qual a diferença entre as duas experiências, provocando a comparação entre aleatório e determinístico;*
- *Solicitar que indiquem o significado dos termos: experiência aleatória, experiência determinística, espaço amostral e evento, ao invés de fornecer definições prontas.*

Análise a posteriori

→ *Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal*

A análise desta questão permitiu verificar que os alunos não conseguem perceber a diferença entre a experiência aleatória e a experiência determinística. Para estes alunos, nas duas experiências há ação do acaso. Não previmos que os

alunos que não tiveram o ensino formal de Probabilidade poderiam não distinguir os dois experimentos.

Na primeira atividade, para responderem sobre o que é experiência aleatória, algo muito interessante ocorreu. Um dos alunos lembrou-se que em seu celular havia dois modos de tocar músicas: modo padrão e modo aleatório, porém não lembrava como era o modo aleatório, assim, ao verificar como as músicas tocavam modo aleatório percebeu que não seguiam um padrão, associando que experiência aleatória é uma experiência na qual não se segue um padrão. A situação permite apontar que os alunos muitas vezes têm contato com conceitos matemáticos mesmo antes do seu ensino formal e quando apresentado a estes, conseguem estabelecer uma relação e atribuir um significado para os procedimentos realizados. Neste caso, o aluno explicitou uma concepção sobre aleatoriedade, construída pela comparação com uma situação familiar, que era “ouvir músicas no celular”.

Na segunda atividade, após o ensino formal, os alunos também apresentaram confusões na compreensão de experiência determinística e do acaso, isto se deu pelo fato de acreditarem que não é possível saber o resultado da mistura de três elementos (ausência de conhecimentos ligados à química), interferindo na construção da concepção do acaso.

Novamente, para validarem sua ideia, os alunos recorreram a uma situação na qual imaginavam misturar substâncias que já conheciam, como a mistura de chá, sal e suco. Como afirmaram não saber qual gosto teria a nova mistura, não era possível saber qual seria o resultado, assim acreditaram que a experiência também tinha intervenção do acaso. Neste caso, percebe-se a mobilização de invariante, um teorema em ação – se não conheço o resultado, então tem intervenção do acaso.

Com isto, percebe-se que os alunos não conseguem distinguir os dois tipos de experimento, mesmo após o ensino formal de Probabilidade, mas entendem que experiência aleatória é uma experiência na qual não se segue um padrão. Quanto aos conceitos de espaço amostral e evento, podemos apontar que antes do ensino formal, os alunos não apresentam nenhuma noção do que é espaço amostral e evento, e depois, apontam algumas ideias, porém não muito claras.

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Iniciamos sobre o que foi percebido sobre a noção de “acaso” com estes alunos. Ao pergunta-lhes o que seria acaso, já eles que não tinham apresentado até o momento nenhuma indicação do seu reconhecimento, um dos alunos recordou-se de uma música que fala do acaso, como é possível verificar no diálogo abaixo:

Diálogo	Nossa Análise
P: Primeiro, pensem. O que vocês acham o que é acaso?	O aluno relaciona o acaso com sorte recordando-se uma música
A: sorte!	
D: sorte? não, acaso	
A: a sorte, por causa daquela música: “O acaso vai me proteger...”. A sorte que vai proteger ele.	
D: Não, acho que não tem nada a ver com sorte. Acaso é acaso!	
A: ...por caso, não sei, do nada , sei lá porque.	

Quadro 12 - Diálogo dos alunos da 2ª série na resolução da questão 3

Isto já foi observado desde a antiguidade, conforme apresenta Coutinho (2001 e 2007) em seu estudo histórico-epistemológico sobre o conceito³⁰ de Probabilidade. Desta forma, podemos assumir como invariante operatório mobilizado, um conceito-em-ação que define o acaso como sendo algo que acontece devido à sorte do sujeito. Tal invariante foi mobilizado aqui como estrutura de controle, ou seja, estrutura de controle que assegurou para o aluno que o acaso pode estar relacionado à sorte, é o sentido que a música apresenta. Assim, a concepção que mobilizam sobre o acaso é a sorte e chamaremos esta concepção “o acaso está associado com sorte”, para a qual teremos:

- *Campo de problemas:* distinção entre experiência aleatória e determinística;
- *Conjunto de representações:* linguagem corrente:
- *Operadores:* recordar de uma música que fala do acaso;
- *Estrutura de Controle:* a letra da música estar relacionado com sorte.

³⁰ Embora não tendo trabalhado no quadro teórico ckc, a autora considera aqui conceito como o conjunto de conhecimentos disponíveis sobre o objeto matemático Probabilidade.

Quanto à distinção entre as experiências aleatória e determinística, queremos ressaltar que um dos alunos faz curso técnico em química e com isto recorreu à mistura de três substâncias, como é possível perceber no diálogo do Quadro 13:

Diálogo	Nossa Análise
A: O elemento A igual a ácido nítrico, o B é nitrato de prata e o C é tiocianato de potássio. O A com B vai dar..., perai, a mesma coisa, não pode ser, vamos colocar KCL, o A com B vai dar cloreto de prata, mais KNO3, se eu misturar o B com C, vai dar tiocianato de prata, mais...	
D: É matemática ou!!!!	
A: não, mas óh: Se misturar o A com C vai dar KCL, vai dar a mesma coisa, não vai mudar nada. O acaso não vai interferir em nada aqui! <u>Já está pré-determinado o que vai acontecer.</u>	O aluno percebe que a mistura só poderá ter um resultado, ou seja, que o evento já está determinado e com isto não há interferência do acaso. A reação química esperada é mobilizada com estrutura de controle.
D: Só que oh, presta atenção. Ai o que você quer fazer, você já sabe, você vai fazer o elemento que estava..	
A: Está te dando três elementos A, B e C ... porque é matemática e não química, se fosse química daria lá, vamos supor. Mas se o elemento A fosse KCL e fosse reagir com o B daria cloreto de prata, mas <u>o caso não vai determinar nada ai</u> , se misturar este com este vai dar este (e aponta para os elementos), não muda nada.	Novamente a reação química dos elementos pode ser considerada como estrutura de controle que permite ao aluno afirmar que o acaso não interfere na reação.
D: Então, espera ai. Então, você está dizendo...	
A: O que for para acontecer, não importa, vai acontecer...	
D: Hum! Agora eu estou começando a entender.	
A: Não importa o que você vai misturar, se for para acontecer, vai acontecer, entendeu?	
D: Não importa...	
A: A ordem dos fatores não altera o produto.	
D: Não. Não importa, ..., sempre vai ter que acontecer isto, <u>diferente da chave que pode escolher uma agora e uma depois, com as mesmas chaves, ele (a experiência química) não,....</u>	O aluno recorre à experiência da escolha da chave para comparar as duas experiências, conforme prevíamos em nossa análise <i>a priori</i> .
A: <u>É, porque aquele lá, você pode pegar qualquer uma e neste não, porque vai reagir de tal forma.</u>	

Quadro 13 – Novo diálogo dos alunos da 2ª série na resolução da questão 3

No diálogo do quadro 13, identificamos uma concepção, a qual chamaremos “*experiência determinística*”, e o invariante é afirmar que nesta experiência já está

pré-determinado o que vai acontecer e que o acaso não vai interferir. Para esta concepção temos:

- *Campo de problemas:* distinção entre experiência aleatória e determinística;
- *Conjunto de representações:* linguagem corrente:
- *Operadores:* relacionar os elementos A, B e C com determinados elementos químicos e prever o resultado da mistura destes elementos, afirmando que nesta experiência já está pré-determinado o que vai acontecer e que o acaso não vai interferir;
- *Estrutura de Controle:* afirmar que a mistura dos elementos resultará em um único resultado e que esta experiência diferencia-se da experiência da escolha da chave.

Como é possível verificar, a estrutura de controle que assegura a veracidade da resposta é afirmar que a experiência da mistura dos elementos diferencia-se da experiência da escolha da chave, pois na experiência da escolha da chave (aleatória), a escolha pode ser diferente, considerando-se as mesmas chaves (mesmas condições) e na experiência da mistura dos elementos (determinística), o resultado da reação vai ser o esperado. Foi possível notar também que estes alunos não mobilizam conhecimentos sobre evento e espaço amostral.

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

A aplicação da atividade com os alunos da 3ª série nos permite apontar que os alunos apresentaram certa confusão sobre a intervenção do acaso, experiência aleatória e determinística, com isso não souberam diferenciar tais conceitos. Os alunos acreditaram haver ação do caso na experiência da mistura de três elementos, afirmando que nesta experiência não é nada constante.

Os alunos acreditaram que a mistura dos três elementos formariam um novo elemento e com isto aumentaria a quantidade de elementos da experiência, o que a diferenciaria da experiência da escolha da chave, já que o número de chaves não

aumentaria. Dessa forma, percebemos uma falta de conhecimento em Química, o que indica uma mobilização de invariantes (conceito-em-ação) fora do seu domínio de validade. Assim, percebemos que as alunas não conseguem diferenciar experiência aleatória de experiência determinística, apenas tentam verificar alguma diferença entre as experiências, e não se a ação do caso interfere ou não no resultado da experiência.

Além disto, foi possível verificar que as concepções construídas a partir da aprendizagem ocorrida no ano anterior não se tornaram estáveis, pois as respostas não são sequer associadas ao termo que se solicita, como podemos ver.

b) Espaço Amostral	o resultado
c) Evento:	ação

Figura 37 - Respostas dos alunos da 3ª série do EM para os conceitos de evento e espaço amostral

Embora não expliquem completamente cada um dos itens, suas respostas expressam a ideia que possuem destes conceitos, porém, acreditávamos que os alunos deste nível apresentassem respostas mais formais.

Enfim, a análise da aplicação das três atividades, nos permite apontar três concepções sobre a ação do acaso em uma experiência:

- *Acaso associado à sorte;*
- *Acaso como algo que não é constante;*
- *Acaso como algo que não se imagina o que vai acontecer;*

Acreditamos que essas concepções revelam que os alunos possuem certa compreensão do acaso, porém não profundamente.

5.2.4. Questão 4

Questão 4 – O lançamento de moedas

Vamos agora fazer uma experiência aleatória e observar os resultados. Para começar, vamos jogar “cara ou coroa”.

a) Quais os resultados possíveis de um lançamento da moeda “honesta” neste jogo? Entendemos por moeda “honesta” aquela na qual as faces “cara” e “coroa” têm a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, as moedas que são perfeitamente simétricas em relação ao seu “centro de massa”.

b) Se lançarmos a moeda 50 vezes, quantas “caras” você espera observar?

c) Lance uma moeda qualquer 50 vezes e anote os resultados. O que você observa?

1		11		21		31		41	
2		12		22		32		42	
3		13		23		33		43	
4		14		24		34		44	
5		15		25		35		45	
6		16		26		36		46	
7		17		27		37		47	
8		18		28		38		48	
9		19		29		39		49	
10		20		30		40		50	

d) O experimento “lançar uma moeda e observar a face superior após imobilização” pode ser considerado um fenômeno aleatório?

e) Lance uma moeda quatro vezes, observe a sequência de caras (k) e coroas (c) e apresente um espaço amostral para este experimento?

f) Lance uma moeda 100 vezes. Qual é a probabilidade de ocorrer cara? E qual é a probabilidade de ocorrer coroa? Esta probabilidade depende do número de lançamentos? Justifique.

Análise a priori

Na questão 4, espera-se que a partir das questões anteriores, os alunos já tenham uma concepção estável sobre acaso. Assim, o objetivo desta questão é apontar possíveis concepções sobre o enfoque frequentista de Probabilidade. Com as questões elaboradas, esperamos que surjam concepções referentes ao enfoque frequentista de Probabilidade.

Para esta questão, alguns itens dependem do experimento e não é possível prever a resposta dos alunos. Porém, para aquelas que não dependem de experimento, apontaremos as soluções esperadas, sendo assim, temos:

a) cara ou coroa;

b) a resposta desta pergunta é pessoal, porém esperamos que os alunos respondam que podem observar 25 caras e 25 coroas, devido à equiprobabilidade, considerada uma concepção e mais adiante comentada;

c) a resposta depende da realização do experimento;

d) sim;

e) KKKK, KKKC, KKCK, KCKK, CKKK, KKCC, KCKC, CCKK, CKCK, KCCK, CKKC, KCCC, CKCC, CCKC, CCKK e CCCC;

f) esperamos que os alunos percebam que a probabilidade de ocorrer cara ou coroa não depende do número de lançamentos.

Para resolver esta questão, o aluno precisa **mobilizar conceitos** como: princípio multiplicativo, conceito de fração no sentido de comparação entre parte e todo, noções de aleatoriedade e espaço amostral.

As **variáveis didáticas** identificadas ao:

- A quantidade de lançamentos solicitados: 50 e depois 100, acreditamos que este número de lançamentos seja suficiente para os alunos perceberem o conceito de aleatoriedade que envolve o problema;

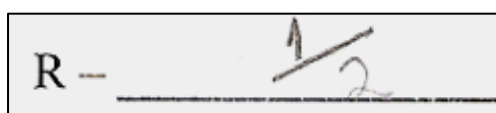
- A tabela apresentada, para que os alunos anotem os resultados dos lançamentos, facilitando o experimento;

- A solicitação do espaço amostral do lançamento de quatro moedas, no item (d). Esperamos desta forma, que os alunos percebam que não existe apenas o resultado do experimento do lançamento de quatro moedas, mas sim todos os resultados possíveis que constitui o espaço amostral.

Análise a posteriori

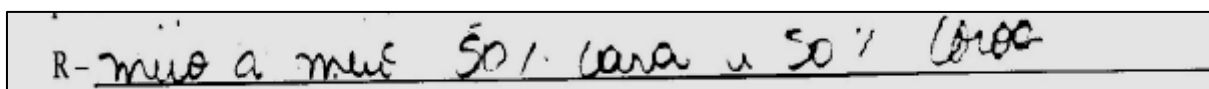
→ Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal

Analisando a questão, percebemos que no item (a), nas duas atividades, os alunos responderam qual era a probabilidade de sair cara ou coroa no lançamento de uma moeda, porém não responderam quais eram os resultados possíveis (cara e coroa) neste lançamento. Atribuímos a este fator, a explicação dada no item, sobre o que é uma moeda honesta – como a explicação tomou um espaço maior do que a pergunta inicial, esta conduz o aluno, ou o leitor a responder a probabilidade de ocorrer cara ou coroa. Ressaltamos que, ao analisar a primeira atividade, este fator foi considerado como erro dos alunos, devido ao fato dos mesmos ainda não terem tido contato com o ensino formal de Probabilidade, porém ao apresentarem uma resposta muito parecida na segunda atividade, conforme podemos ver nos protocolos abaixo, percebemos que a questão conduz o aluno a calcular a probabilidade de ocorrer cara ou coroa.



R - $\frac{1}{2}$

Figura 38 - item (a) da questão 4 - atividade realizada antes do ensino formal



R - meio a meio 50% cara e 50% coroa

Figura 39 - item (a) da questão 4 - atividade realizada depois do ensino formal

Analisando as respostas apresentadas para o item (b), percebemos que antes do ensino formal os alunos, consideram 50 lançamentos para cara e 50 lançamentos para coroa, totalizando 100 lançamentos. Não consideram que pode ocorrer cara ou coroa dentro dos 50 lançamentos, porém utilizando a concepção “comparação entre parte e todo” para representar esta Probabilidade, embora estejam considerando 100 lançamentos. Já na segunda atividade, os alunos consideram que o resultado será equilibrado, sendo 25 caras e 25 coroas.

Quanto a considerar o experimento “lançar uma moeda e observar a face superior após imobilização” como um fenômeno aleatório, na primeira atividade os

alunos consideram que sim, porém não justificam; já na segunda atividade os alunos também consideram que sim, justificando ser um experimento que não segue um padrão, como podemos verificar no diálogo abaixo:

Diálogo	Nossa Análise
M: O experimento aleatório “lançar uma moeda e observar a face superior após a imobilização”? O que é aleatório T.? Aleatório é...	
T: Pode.	
M: Pode?	
T: Pode. Porque ela não segue um...	
M: Ela não segue uma ordem na hora de cair: cara, coroa, cara, coroa, as vezes cai um monte de cara, um monte de coroa.	Neste momento uma estrutura de controle é mobilizada pelos alunos, pois percebem que a face da moeda obtida no lançamento não ocorre com determinada ordem. E por isto o evento pode ser considerado aleatório

Quadro 14 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 4 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Iniciando a análise da questão 4 desta dupla de alunos, no item (a), percebe-se que o fator “enunciado”, que influenciou as respostas da primeira dupla, não causou o mesmo efeito. Os alunos responderam corretamente quais eram os resultados possíveis no lançamento de uma moeda: cara e cora.

No item (b), os alunos responderam que esperam observar 25 caras no lançamento de 50 moedas, confirmando a hipótese que tínhamos na análise *a priori*.

Diante destas duas respostas, percebe-se que neste momento da atividade estes alunos mobilizam uma concepção sobre aleatoriedade. Isto pode ser confirmado na resposta apresentada no item (d), quando afirmam que o experimento “lançar uma moeda e observar a face superior após imobilização” pode ser considerado uma fenômeno aleatório, conforme figura 40.

d) O experimento “lançar uma moeda e observar a face superior após imobilização” pode ser considerado um fenômeno aleatório? R - <u>Sim</u>
--

Figura 40 - Resposta do item (d) da questão 4

A resposta ainda pode ser confirmada com a seguinte fala de um dos alunos:

Diálogo	Nossa Análise
“Então eu posso considerar aleatório porque ele deveria cair 25 caras e 25 coroas, então ele não sabe se realmente vai dar isto”	Observamos aqui, que o aluno percebe que o que deveria ocorrer não ocorre e que dessa forma, o evento pode ser considerado aleatório, ou seja, para ele uma experiência aleatório pode ser considerada como aquilo que não se sabe o vai acontecer.

Quadro 15 – Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 4 da atividade e análise da pesquisadora

Assim, podemos apontar uma “concepção de aleatoriedade”, onde temos:

- *Campo de problemas:* verificar se a experiência “lançar uma moeda e observar a face superior após imobilização” pode ser considerada uma experiência aleatória.
- *Conjunto de representações:* linguagem corrente;
- *Operadores:* afirmar que deveria ocorrer algo que não ocorreu, então não se sabe se realmente vai ocorrer;
- *Estrutura de Controle:* verificar que o resultado do experimento não é o mesmo do que aquele previsto (25 caras e 25 coroas).

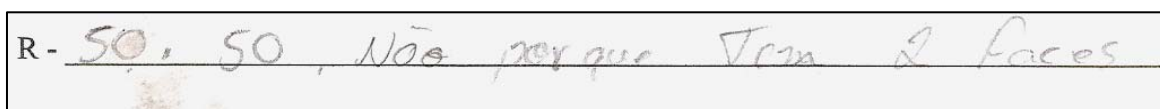
Continuando nossa análise, foi possível perceber que os alunos não apresentam concepção ou conhecimento estável de espaço amostral, pois ao responderem à pergunta do item (e), apresentam apenas o resultado do experimento realizado por eles, o de “lançar uma moeda quatro vezes” e não apresentam todas as possibilidades do espaço amostral, como podemos verificar na figura 41. Esta resposta confirma a já apresentada por esta dupla na questão 3, quando não respondem o que é espaço amostral.

e) Lance uma moeda quatro vezes, observe a sequência de caras (k) e coroas (c) e apresente um espaço amostral para esse experimento?
R - <u>C, C, K, K.</u>

Figura 41 - Resposta apresentada para o item (e) da questão 4

Finalizando a análise desta questão com esta dupla, podemos observar que ao responderem o item (f), os alunos não respondem qual seria a probabilidade de

ocorrer cara e também coroa no lançamento de 100 moedas. Influenciados pelas perguntas anteriores, respondem que podem ocorrer 50 caras e 50 coroas, porém não calculam a probabilidade de ocorrência de cada um destes eventos. Afirmando que a probabilidade não depende do número de lançamentos, o que aponta que os mesmos entendem que a probabilidade é calculada por meio da quantidade de faces e não de lançamentos. Para justificar isto, afirmam que a moeda só possui duas faces.



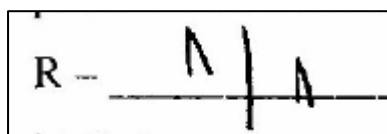
R - 50, 50, Não porque tem 2 faces

Figura 42 - Resposta do item (f) da questão 4

Esta resposta se diferencia das respostas apresentadas pela dupla anterior, que afirma que o cálculo da Probabilidade de ocorrer cara ou coroa depende do número de lançamentos, ou seja, eles mobilizam a concepção de equiprobabilidade, como tem duas faces só podem ter dois resultados, 50% de chance para cada um.

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

A análise da atividade com os alunos da 3ª série permite apontar que assim como a primeira dupla (que realizou duas atividades), os alunos erroneamente, tentam representar a probabilidade de ocorrer cara ou coroa e não identificam quais seriam as possibilidades (cara e coroa), para isso consideraram 1 probabilidade para cara e 1 probabilidade para coroa e representam isto da seguinte maneira:



R - 1 | 1

Figura 43 - Resposta do item (a) da questão 4

A forma como registraram, indica que os alunos tentaram representar a probabilidade sem considerar o número de elementos do espaço amostral, ou seja, sem considerar as duas possibilidades de resultado do experimento, número esse que determina o denominador da razão procurada (probabilidade do evento).

Entendemos que os alunos não utilizam a comparação entre parte e todo, apenas usam o “traço da fração” para comparar as duas opções (comparação parte/parte), que consideram sendo a probabilidade, embora no diálogo dos alunos não seja possível perceber porque usam esta representação, afirmam isto e partem para a próxima pergunta.

Desta forma é possível perceber neste momento, que os alunos ainda não consideram a probabilidade com um número real entre 0 e 1, para eles a probabilidade é representada pela quantidade de opções do evento. Dessa forma, podemos conjecturar que os alunos consideram que se a moeda tem uma cara e uma coroa, então tem uma probabilidade de ocorrer cara e uma probabilidade de ocorrer coroa. Ainda nesta questão, os alunos, assim como demonstraram nas questões anteriores, confundem probabilidade com o número de possibilidades e novamente apresentam a concepção “confundir Probabilidade com Possibilidade”, anunciada anteriormente.

Nas análises do item (b), percebe-se que os alunos mobilizam uma concepção de equiprobabilidade, afirmando que a probabilidade de ocorrer cara é metade dos lançamentos e a probabilidade de ocorrer coroa é a outra metade – já que a moeda só tem duas faces.

Diálogo	Nossa Análise
D: Se lançarmos 50 moedas, quantas “caras” você espera observar? 25.	
C: 25.	
D: 25 porque, se jogar 50 vezes, tem duas faces, tem 25 probabilidades de cair de um lado e 25 de cair do outro.	É possível verificar aqui a utilização de um operador: os alunos associam o número de faces da moeda com o número de lançamentos e como a moeda tem duas faces, deverá ter 25 caras e 25 coroas para a soma dar 50, que é o número de lançamentos
C: Tá, então tá	

Quadro 16 – Diálogo dos alunos da 3ª série EM na resolução da questão 4 da atividade e análise da pesquisadora

Neste caso, é facilmente percebida a concepção de equiprobabilidade, a qual nos referimos anteriormente e que chamaremos de “equiprobabilidade”, para a qual temos:

- *Campo de problemas:* verificar quantas caras e quantas coroas pode-se observar no lançamento de 50 moedas.
- *Conjunto de representações:* linguagem corrente;
- *Operadores:* relacionar o número de faces da moeda com o número de lançamentos, afirmando que ao lançar 50 vezes uma moeda, há 25 probabilidades para um lado e 25 para o outro lado.
- *Estrutura de Controle:* considerar que a moeda só tem duas faces e daí afirmar que do total de lançamentos, temos metade para cada lado da moeda.

Quanto à experiência ser considerada um fenômeno aleatório, os alunos consideram que sim, porém não explicitam nenhum questionamento ou justificativa para isto, apenas afirmam que sim.

Assim como as demais duplas, os alunos não apresentam um espaço amostral para o lançamento de quatro moedas, apenas realizam o experimento de lançar quatro vezes a moeda e anotar os resultados, indicando que não compreendem o significado de espaço amostral. Porém, ao responderem o item (f), discutiram se a probabilidade também podia ser dividida ao meio, ou como estavam lançando 100 moedas, que é o dobro de lançamentos do experimento anterior, deveriam dobrar o número dos resultados obtidos, assim no diálogo abaixo, é possível perceber que os alunos compreenderam que o experimento pode ser considerado aleatório e não depende de outro para ocorrer. Também partiram para a equiprobabilidade, além de considerarem a probabilidade como o número de possibilidades do evento ocorrer.

Diálogo	Nossa Análise
D: Lance uma moeda 100 vezes.	
F: aff.	
D: Qual é a probabilidade de ocorrer cara e qual é a probabilidade de ocorrer coroa? Esta Probabilidade depende do número de lançamentos. Não precisa jogar 100 vezes.	
C: É, rsrs...	
D: Se tem duas faces...	
F: 60 e 40. (dobrando o resultado obtido no experimento realizado com o lançamento de 50 moedas)	
D: É 50 e 50.	
F: Não. 60 e 40.	

D: Não, porque você vai jogar 100 vezes. Só que ela tem duas possibilidades.	
F: Mas agora a gente fez o experimento, deu quanto?	
D: ó o experimento é coisa do acaso, mas a Probabilidade, não é exato. É a Probabilidade, deu a diferença de 5 só, foi 30 e 20, mas ainda está dentro do número.	O aluno percebe a intervenção do acaso na experiência
F: Então está bom.	
D: Concorda C.?	
C: Sim.	
F: Tá.	
D: 50 e 50. Este número depende do lançamento? Não, ou depende?	
C: Não.	

Quadro 17 – Continuação do diálogo dos alunos da 3ª série EM na resolução da questão 4 da atividade e análise da pesquisadora

Ao final da análise desta atividade, não conseguimos apontar concepções relacionadas ao enfoque frequentista. Os alunos não conseguiram relacionar Probabilidade com a frequência que ocorria em cada evento - para responderem às perguntas mobilizavam a concepção de equiprobabilidade. Acreditamos que a formulação das perguntas não ocasionou tal fato, embora acreditássemos que elas levariam a essas concepções. Outro fator que pode ser considerado é o de o caderno utilizado pela proposta não apresentar nenhuma atividade que envolva este tipo de enfoque, conforme verificamos no capítulo anterior.

Além disto, nenhuma das duplas conseguiu apresentar um espaço amostral para o lançamento de 4 moedas, apenas realizaram o experimento e anotaram os resultados, confundindo espaço amostral, que é o conjunto das possibilidades, com resultado efetivo; assim, é possível perceber que eles mobilizaram um invariante para evoluir na resolução e não como estrutura de controle.

5.2.5. Questão 5

Questão 5: Verificando o tipo sanguíneo.

A tabela a seguir mostra o tipo de sangue de um grupo de funcionários de uma empresa.

Tipo do Sangue	Fator RH	
	Positivo	Negativo
O	620	800
A	460	650
B	350	350
AB	530	0

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a Probabilidade que ele tenha sangue:

a) do tipo O?	b) RH positivo (RH+)?	c) do tipo B e com RH + ?
d) do tipo AB ou do tipo A?	e) RH + ou RH – ?	f) do tipo AB com RH – ?

Análise a priori

Nesta questão, espera-se que os alunos mobilizem os conceitos de Probabilidade segundo a visão laplaciana. Esta é uma questão com um grau maior de complexidade cognitiva. Para responder as questões, é preciso que o aluno entenda o que é Probabilidade e saiba interpretar o que está sendo solicitado.

Acreditamos que ao responder esta questão corretamente, o aluno estará atingindo os níveis mais elevados das concepções propostas por Azcárate. Dessa forma, o aluno que responder corretamente à questão terá compreendido o significado de Probabilidade, como razão entre parte e todo e medida de incerteza. Como o total de funcionários não é explicitado no enunciado, o aluno terá que encontrar esta informação, somando o número de elementos de todos os eventos.

A questão poderá ainda apontar concepções sobre dependência e independência, além da união de eventos, como é o caso das questões apresentadas nos itens (c), (d), (e) e (f).

Assim, as respostas esperadas para as questões são:

a) $n = 3760$

evento: pessoas com sangue tipo O: $620 + 800 = 1420$

$$P(E) = \frac{1420}{3760} = \frac{71}{188} \text{ ou ainda } 37,76\%$$

b) evento: pessoas com RH+: $620 + 460 + 350 + 530 = 1900$

$$P(E) = \frac{1960}{3760} = \frac{98}{188} \text{ ou ainda } 52,12\%$$

c) evento: pessoas com sangue tipo B com RH+

$$P(E) = \frac{350}{3760} = \frac{35}{376} \text{ ou ainda } 9,3\%$$

d) evento A: pessoas com sangue tipo AB: 530

evento B: pessoas com sangue tipo: $460 + 650 = 1110$

$$P(A \cup B) = \frac{530}{3760} + \frac{1110}{3760} = \frac{1640}{3760} = \frac{41}{94} \text{ ou ainda } 43,6\%$$

e) evento A: pessoas com RH+: $620 + 460 + 350 + 530 = 1960$

evento B: pessoas com RH -: $800 + 650 + 350 = 1800$

$$P(A \cup B) = \frac{1960}{3760} + \frac{1800}{3760} = \frac{3760}{3760} = 1 \text{ ou ainda } 100\%$$

f) evento: pessoas com sangue tipo AB com RH -

$$P(E) = 0$$

Com isto, os **conteúdos matemáticos** a serem mobilizados pelos alunos são: soma, divisão, fração no sentido de comparação entre parte e todo, conceitos de Probabilidade como união de eventos e eventos independentes.

As **variáveis didáticas** escolhidas foram:

- *A diversidade dos tipos de perguntas, tais como questões que envolviam dependência ou união de eventos;*

- A questão envolver apenas a escolha de um funcionário ao acaso;
- A questão não apresentar o total de elementos, no caso, funcionários.

Análise a posteriori

→ Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal

Na atividade realizada antes do ensino formal, é possível perceber que os alunos não consideram parte/todo, mas apenas a parte – constroem a razão a partir da análise somente da parte – pois em todos os itens, consideraram um (1) funcionário em relação ao total do evento solicitado e não do total geral. Com isso, os alunos deixando claro a não compreensão da probabilidade como uma razão entre parte e todo que indica a medida de incerteza associada à evolução de um experimento aleatório. Outro fator que podemos observar é que os alunos consideram separadamente a união de evento, apresentando respostas distintas para um mesmo item.

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:		
a) do tipo O? $\frac{800}{620}$ $\frac{800}{1420} - \text{funcionários}$ R. $\frac{1}{1420} = 14,20\%$	b) RH positivo (RH+)? $\frac{620 + 460 + 350 + 530}{1090 + 870}$ 1960 R. $\frac{1}{1960} = 19,60\%$	c) do tipo B, com RH+? $\frac{1A}{1960 - RH+}$ $+ \frac{350}{2310} B$ R. $\frac{1}{2310} = 23,10\%$
d) do tipo AB ou do tipo A? $AB - A$ $530 - 110$ $R. \frac{1}{530} - \frac{1}{110} = 11,10\%$	e) R. RH+ ou RH-? $\frac{1960}{1960} / \frac{1800}{1800}$ $R. \frac{1}{1960} \sum \frac{1}{1800} = 4\%$	f) do tipo AB com RH-? $\frac{1800}{530 - AB}$ 2330 R. $\frac{1}{2330} = 23,30\%$

Figura 44 - Respostas da questão 5 realizada pela dupla de alunos antes do ensino formal

Neste caso, identificamos novamente a concepção “considerar apenas a parte”, já comentada anteriormente e mobilizada pelos alunos da 3ª série na questão 2.

Nota-se também, que os alunos registram o resultado em porcentagem, mostrando que ao montarem a fração de comparação (enfoque clássico), este resultado não lhes parece uma resposta válida, necessitando da transformação para porcentagem.

Ao analisar a atividade da dupla após o ensino formal, percebemos que os alunos já não consideram apenas a parte, eles calculam a probabilidade com a razão entre parte e todo, embora apresentem erros nos cálculos. Assim como na primeira atividade, os alunos registram o resultado em porcentagem, acreditando que a fração encontrada não é uma resposta.

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:

<p>a) do tipo O?</p> $\frac{1460}{3760} = 0,38 \times 100 = 38\%$ <p>R - <u>38%</u></p>	<p>b) RH positivo (RH+)?</p> $\frac{1960}{3760} = 0,52 \times 100 = 52\%$ <p>R - <u>52%</u></p>	<p>c) do tipo B com RH + ?</p> $\frac{1960}{3760} = 0,52 \times 100 = 52\%$ $\frac{350}{3760} = 0,09 \times 100 = 9\%$ <p>R - <u>61%</u></p>
<p>d) do tipo AB ou do tipo A?</p> $AB = \frac{580}{3760} = 0,14 \times 100 = 14\%$ $A = \frac{1110}{3760} = 0,29 \times 100 = 29\%$ <p>R - <u>43%</u></p>	<p>e) RH + ou RH - ?</p> $\frac{1960}{3760} = 0,52 \times 100 = 52\%$ $\frac{1800}{3760} = 0,47 \times 100 = 47\%$ <p>R - <u>99%</u></p>	<p>f) do tipo AB com RH - ?</p> $\frac{1800}{3760} = 0,47 \times 100 = 47\%$ $\frac{350}{3760} = 0,14 \times 100 = 14\%$ <p>R - <u>61%</u></p>

Figura 45 - Respostas da questão 5 realizada pela dupla de alunos depois do ensino formal

No diálogo a seguir (Quadro 18), é possível perceber que os alunos perguntam para a pesquisadora se precisam colocar o resultado após apresentaram a fração, indicando que não consideram a fração como resultado de uma probabilidade.

Diálogo	Nossa Análise
M: Qual é a probabilidade que ele tenha sangue tipo O+ ? agora tem que saber quantos funcionários tem.	
T. Não oh...	
M: é sim T.	
T: A sim, no caso você “pega” este com este.	(apontando para as somas parciais que haviam feito). 1960 mais 1800. 3760.
M: Põe “tipo” uma...	
T. Total. 3 7 6 0	(referindo-se ao total 3.760)
...	
M: Um funcionário é sorteado ao acaso.	
T: Tipo O. No caso seria. Então oh: 1420	
M: de 3760. Tem que fazer a..., o resultado professora?	
P: Vocês que sabem. Gente o que vocês estão fazendo eu não posso influenciar.	
M: então você está mais não está?	
P: sim.	
T: rrsr, é alma dela.	
M: Então você vai fazer a conta?	
T: Tem que fazer a Probabilidade para gente “por” o resultado. Óh: 1460 dividido por 3760. É 0,38 vezes 100, igual isto % (0,38) (registram 1460 no lugar de 1420, como disseram).	Os alunos não consideram a fração como resultado de uma Probabilidade. Transformam o resultado para uma representação percentual.

Quadro 18 – Diálogo dos alunos na resolução da questão 5 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

Nesta atividade é possível perceber também que eles já conseguem perceber a união de eventos, porém apresentam dificuldades nas questões que envolvem a intersecção. Nota-se também que os alunos escrevem acima das palavras “e” e “ou”, o significado matemático para elas, mostrando terem conhecimento da união e intersecção de eventos, embora ainda não estável, como indica o diálogo abaixo:

Diálogo	Nossa Análise
M: Do tipo AB ou do tipo A.	
T: Se é “ou”... Coloca tipo AB, coloca tipo AB....	
M: Sendo aqui “ou” na matemática era...	
T: Aqui é vezes	Apontando ao item anterior
M: Mais. “E” é vezes, então aqui é ...	
T: ...	
M: Explica a aquela parte para a gente, de “com” ou “ou”, que é vezes e multiplicação..	
T: Que é vezes e multiplicação? rrsrrs, é a mesma coisa.	
M: Que é multiplicação e soma? É só no arranjo ou na Probabilidade também.	
Pesquisadora: Em qualquer lugar na matemática	
M: Na matemática, toda vez que é ..	
T: Tá e qual é a ordem.	
M: É mais.... Toda vez que é “com” é multiplicação.	Neste momento, os alunos apresentam certa confusão sobre a união e intersecção de eventos. Pelo diálogo, é possível perceber que os mesmos recordam que os eventos devem ser calculados ou somados, mas não lembram o que
T: “com” ...	
M: “com” é multiplicação.	
T: Não, ah?	

M: rrsrs, “ou” é mais e “com” é multiplicação...	é cada um.	
T: No caso “ou” é mais.		
Pesquisadora: É “e” e “ou”.		
M: “e” e “ou”, óh então...		
T: “e” e “com”, é a mesma coisa.		
M: “e” “com” . è o “e” ou o “com”?		
T: “e”. “e” é mais não é? È vezes ou é mais?		
Pesquisadora: Não sei de nada, não posso falar.		
T: É só isto professora.		
Pesquisadora: É importante isto. Faz do jeito que vocês acharem.		
M: T. “e” é multiplicação e o “ou” é soma.		
T: Trouxe a apostila de matemática?		
M: Isto eu já sei, só não sei o “e” “com”.		
T: ...		
M: Isto vai ser a multiplicação.		
T: “e” “com” não tem nada a ver. O “com” esquece o “com”.		
M: Tá. Então o “e” é multiplicação... Não, não pode T.		
M: Vai 1960 vezes 350.		Estrutura de Controle: O aluno percebe que a operação realizada está errada, pois apresenta um resultado grande.
T: 1960 vezes 350. 68.... Este valor.		
M: Vai dar um número, bem, sei lá.		
T: Dividido por 3760. Nossa nem, não dá.		
M: Acho que não deve ser isto.		
T: Óh o resultado.		
M: Que é muito funcionário. Não tem tudo isto de funcionários.		
Pesquisadora: rrsr		
T: É ela dá risada.		
Pesquisadora: Gente, faz o que vocês acharem.		
M: Está errado.		

Quadro 19 – Continuação do diálogo dos alunos na resolução da questão 5 da atividade realizada depois do ensino formal e análise da pesquisadora

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Conforme podemos ver na figura 46 e no diálogo que segue (Quadro 20), esta dupla de alunos novamente recorreu ao cálculo da Probabilidade por meio do “algoritmo da regra de três”, mobilizando a concepção “unitária de Probabilidade”, já mobilizada por esta dupla na questão 1, embora neste momento esta concepção apresenta uma diferenciação, pois os alunos não encontram o valor unitário por meio da razão $\frac{1}{n}$. Eles encontram o valor unitário de um funcionário que será escolhido ao acaso por meio do “algoritmo da regra de três”, e ao encontrarem a

probabilidade de um funcionário qualquer ser escolhido, multiplicam este valor pela quantidade de funcionários de cada evento solicitado.

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:

a) do tipo O? $0,3 \cdot 1420 = 28,92$	b) RH positivo (RH+)? $1780 \cdot 0,03 =$	c) do tipo B e com RH + ? $350 \cdot 0,03$
R - <u>42,6%</u>	R - <u>53,4%</u>	R - <u>10,5%</u>
d) do tipo AB ou do tipo A? $530 \cdot 0,03$	e) B RH + ou RH - ? $1780 \cdot 0,03$	f) do tipo AB com RH - ?
R - <u>15,9%</u>	R - <u>53,4%</u>	R - <u>0</u>

Figura 46 - Respostas da questão 5 – Alunos 2ª série EM que não realizou a atividade antes do ensino formal

Diálogo	Nossa Análise
D: Soma tudo isto aqui óh! $620 + 860$ é igual a 1420...	
A: Não oh! Do tipo O, então vai ser $620 + 800$ igual a 100...	
D: Não.	
A: E 620 é o “quantos por cento”?	
D: Não. Soma tudo. Tudo isto vai dar a porcentagem.	
A: ... é só isto aqui “mano”... é só o O na primeira questão.	
D: Presta atenção oh! Um funcionário é sorteado ao acaso, ele é sorteado de todo.	
A: Tá..., mas aqui é só do tipo O, não é? Do tipo O.	
D: Não ele está perguntando a possibilidade de que o sangue seja O.	O aluno considera a probabilidade como possibilidade.
A: ...620 +	
D: 800	
A: $1420 + 460$	
D: + 650	
A: +	
D: 350	
A: +	
D: 350	
A: +	
D: 530	
A: 3760. Isto aqui é 100%	Estrutura de Controle: O aluno afirma que a

	soma de todos os valores é 100%
D: Isto.	
A: 620	
D: Não	
A: É “quantos por cento”, a possibilidade	Novamente o aluno considera a Probabilidade como possibilidade
D: Não, presta a atenção. É, agora faz 100 dividido por 3760.	
A: 100 dividido por 3760?	O aluno encontra o valor de um funcionário qualquer ser sorteado.
D: Isto.	
A: 0,02	Os alunos não fazem a aproximação correta, que seria 0,03.
D: agora você faz vezes, ..., 1420.	
A: Porque 1420?	
D: Porque oh: O+ e O-.	
A: Mas quer saber só o “O”	
D: Então o sangue tipo O, tem positivo e negativo.	

Quadro 20 - Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 5 e análise da pesquisadora

A análise da questão também permite inferir que os alunos não compreendem a união de eventos, pois “ignoram” um dos eventos, calculando apenas a probabilidade de um deles, interpretam “ou” como algo que podem escolher para calcular, conforme demonstra o diálogo abaixo, extraído da conversa entre os alunos ao resolverem o item (d):

Diálogo	Nossa Análise
D: Do tipo AB ou do tipo A.	
A: Soma estes dois? E multiplica por 0,03.	
D: Do tipo AB e tipo A... ah tá.	
D: Oh! do tipo AB o do tipo A, é para fazer um do dois?	Neste momento os alunos acreditam que devem escolher um dos dois eventos para resolver. Nota-se aqui um invariante operatório.
A: Não.	
D: É.	
A: É	
D: Faz o de 530 (referindo-se ao tipo AB)	
A: 530 vezes...	
D: 0,03.	Em seguida os alunos partem para o outro item e registram apenas o cálculo de dos eventos

Quadro 21 – Continuação do diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 5 e análise da pesquisadora

Na resolução do item (e), os alunos agem da mesma forma, demonstrando não compreender a noção de união de eventos. Já nos itens que envolvia a intersecção de eventos, percebe-se que os alunos agem de forma espontânea, devido ao enunciado já indicar como deve ser o tipo sanguíneo e qual fator RH deve apresentar. Acreditamos que a forma como os tipos de sangue foram apresentados – tabela separando os fatores RH positivo e negativo – influenciam as escolhas dos alunos, ou seja, eles procuram na tabela o evento solicitado, não precisando realizar a intersecção dos eventos.

→ Alunos da 3ª série do Ensino Médio

Analisando a resolução dos alunos da terceira série, percebemos que estes novamente mobilizam a concepção “considerar apenas a parte”, já mobilizada por eles na questão 2, ou seja, consideram um (1) funcionário dentro do número de funcionários do evento solicitado, e isto ocorre porque na pergunta é solicitada a probabilidade de um (1) funcionário ser sorteado ao caso.

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:		
a) do tipo O? R - $\frac{1}{1420}$	b) RH positivo (RH+)? $\begin{array}{r} 620 \\ 460 \\ 250 \\ 530 \\ \hline 1960 \end{array}$ R - $\frac{1}{1960}$	c) do tipo B e com RH + ? R - $\frac{1}{350}$
d) do tipo AB ou do tipo A? $\begin{array}{r} 460 + 1110 \\ 650 \quad 536 \\ \hline 1770 \\ 1640 \end{array}$ R - $\frac{1}{1640}$	e) R - RH + ou RH - ? $\begin{array}{r} 800 \\ 650 \\ 350 \\ \hline 1800 \end{array}$ R - $\frac{1}{1960}$ $\frac{1}{1800}$	f) do tipo AB com RH - ? R - Não há resposta

Figura 47 - Respostas da questão 5 - alunos 3ª série do EM

Além disto, estes alunos demonstram que o conceito de união de eventos não está totalmente estabilizado, pois ora realizam a união de eventos corretamente, somando os valores dos dois eventos, ora não somam e os consideram

independentes. No diálogo dos alunos esta questão não é discutida, bem como a da probabilidade ser calculada apenas considerando-se apenas a parte, pois os alunos acreditando que a probabilidade é calculada desta maneira, registram este cálculo rapidamente, sem discussões, acreditando estar correto.

5.2.6. Questão 7

Questão 7: Estudando a qualificação dos funcionários em função do sexo
Um grupo de 1000 pessoas apresenta, de acordo com o sexo e qualificação, a seguinte composição:

	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Escolhemos uma pessoa ao acaso. Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade do escolhido ser homem?	b) Qual é a probabilidade do escolhido ser mulher e não especializado?	c) Se o sorteado for homem, qual é a probabilidade de ser não especializado?
d) Qual a porcentagem de homens especializados?	e) Se o sorteado é especializado, qual é a probabilidade de ser mulher? (atenção: estamos limitando o conjunto dos pesquisados somente ao grupo “especializado”. Qual a diferença em relação aos outros itens?)	

Análise a priori

Esta questão apresenta um grau de complexidade cognitiva mais elevado. Desta forma, acreditamos que alunos que responderem corretamente à questão, apresentarão concepções próximas ao nível mais elevado propostos por Azcárate. Nesta questão, os conceitos como dependência, independência, união e interseção de eventos também estão presentes, mesmo que de forma implícita, além disto a questão envolve o conceito de probabilidade condicional. Acreditamos que a perfeita resolução desta questão, assim como da questão anterior, permitirá apontar várias concepções de Probabilidade, uma vez que são complexas.

As resoluções esperadas para a questão são:

$$a) n = 210 + 140 + 390 + 260 = 1000$$

evento: a pessoa escolhida ser homem

$$n(E) = 210 + 390 = 600$$

Neste item, o evento solicitado não especifica se o homem escolhido deve ser especializado ou não, assim, os alunos terão que entender que o evento será a soma dos homens especializados com os homens não especializados.

$$P(E) = \frac{600}{1000} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ ou } 60\%$$

b) evento: a pessoa escolhida ser mulher não especializada

$$P(E) = \frac{260}{1000} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50} \text{ ou } 26\%$$

c) evento: sabendo que o escolhido é homem, não ser especializado

$$P(E) = \frac{390}{600} = \frac{39}{60} = \frac{13}{20} \text{ ou } 65\%$$

Neste item, como o evento restringe o total para os homens, uma vez que afirma que o escolhido é homem, o aluno terá que entender a diferença do número total de possibilidades.

$$d) \frac{210}{1000} = \frac{21}{100} = 21\%$$

Acreditamos que neste item, os alunos possam deixar de usar o conceito de Probabilidade e utilizem o conceito de porcentagem, recorrendo assim, ao algoritmo da regra de três.

$$\left. \begin{array}{r} 1000 - 100\% \\ 210 - x \end{array} \right\} \text{ portanto } x = 21\%$$

e) Evento: sabendo que a pessoa escolhida é especializada, ser mulher.

$$P(E) = \frac{140}{350} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \text{ ou } 40\%$$

O item (e), assim, como o item (c) apresentam diferenciações no cálculo das probabilidades, uma vez que o total de possibilidades muda, ou seja, apresenta o conceito de probabilidade condicional – qual é a probabilidade de ocorrer um evento,

sabendo que já ocorreu outro que modifica o espaço amostral inicial. A pergunta presente no item (e), apresentada propositalmente, leva o aluno a refletir sobre esta questão. Desta forma, acreditamos ser possível apontar concepções de probabilidade condicional.

Os **conceitos matemáticos** que o aluno deve **mobilizar** para resolver esta questão são: soma, divisão, conceito de fração no sentido de comparação entre parte e todo, simplificação de fração, cálculo de porcentagem, conceitos intuitivos de probabilidade condicional.

Como **variáveis didáticas** para esta questão, temos:

- *O número total de pessoas apresentado, que é 1000, para facilitar os cálculos;*
- *A pergunta do item (e), que envolve o conceito de probabilidade condicional, que faz com que o aluno perceba uma diferença na questão;*

Análise a posteriori

→ *Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal*

Esta questão apresentava um nível mais complexo de Probabilidade, envolvendo probabilidade condicional, com isto foi possível perceber que os alunos que ainda não haviam tido um estudo formal de Probabilidade, não conseguiram responder corretamente às perguntas. Percebemos que os alunos apresentam a concepção “intuitiva de Probabilidade”, pois as respostas apresentadas não são normativas, ou seja, os alunos encontram um esquema alternativo para a resolução do problema, a partir do contexto apresentado. Estes esquemas envolvem, de forma implícita, o conceito clássico de Probabilidade, embora ainda de forma confusa.

<p>a) Qual a probabilidade do escolhido ser homem?</p> $\frac{210}{600} = 6\%$ <p>R - 6%</p>	<p>b) Qual a probabilidade do escolhido ser mulher e não especializado?</p> $\frac{360}{400} = 90\%$ <p>R - 90%</p>	<p>c) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado?</p> $\frac{390}{600} = 6,5\%$ <p>R -</p>
<p>d) Qual a porcentagem de homens especializados?</p> $600x = 100 \cdot 210$ $6x = 2100$ $x = 350$ <p>R - 35%</p>	<p>e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher? (atenção: estamos limitando o conjunto dos pesquisados somente ao grupo "especializado". Qual a diferença em relação aos outros itens?)</p> $\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ <p>R -</p>	

Figura 48 - Respostas da questão 7- Atividade realizada antes do ensino formal.

É possível perceber também que os alunos recorrem à estratégia do “algoritmo da regra de três” para resolver o item (d), buscando uma nova alternativa que solucione o problema, validando a concepção intuitiva – buscar esquemas alternativos que solucionem o problema. Acreditamos que a utilização desta estratégia se deu devido à pergunta deste item solicitar a “porcentagem” de homens especializados e não a probabilidade, como apontamos em nossa análise *a priori*, embora não consideram corretamente o número total de pessoas.

Além disto, é possível perceber que antes do ensino formal, os alunos não apresentam noções referentes à união e intersecção, pois não conseguem relacionar os eventos.

Na atividade realizada após o ensino formal, percebemos que os alunos dominam o conceito de Probabilidade clássica, porém ainda confundem questões que envolvem intersecção de eventos e conseqüentemente a noção de probabilidade condicional, como é possível verificar na figura 49.

<p>a) Qual a probabilidade do escolhido ser homem?</p> $\frac{600}{1000} = 0,6 \cdot 100 = 60\%$ <p>R - <u>60%</u></p>	<p>b) Qual a probabilidade do escolhido ser mulher e não especializado?</p> $\frac{260}{400} = 0,65 = 65\%$ <p>R - <u>65%</u></p>	<p>c) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado?</p> $\frac{390}{600} = 0,65 = 65\%$ <p>R - <u>65%</u></p>
<p>d) Qual a porcentagem de homens especializados?</p> $\frac{210}{600} = 0,35 = 35\%$ <p>R - <u>35%</u></p>	<p>e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher? (atenção: estamos limitando o conjunto dos pesquisados somente ao grupo "especializado". Qual a diferença em relação aos outros itens?)</p> $\frac{140}{350} = 0,4 = 40\%$ <p>R - <u>40% S / Resposta, 1</u></p>	

Figura 49 - Respostas da questão 7- Atividade realizada depois do ensino formal.

Ressaltamos que, embora não dominem conceitos como união e intersecção de eventos, ao ser explicado, no item (e), que estávamos limitando o conjunto dos pesquisados somente para o grupo de “especializados”, os alunos entenderam perfeitamente o que estava sendo solicitado. Percebemos com isto que o conhecimento sobre probabilidade condicional ainda não está completamente estável.

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Os alunos responderam corretamente a questão 7, recorrendo ao cálculo de porcentagem e implicitamente ao algoritmo da regra de três. Eles dividem 100% pelo total de pessoas que é 1000, calculando o valor para uma unidade, em seguida multiplicam esse valor pela quantidade do evento solicitado. Assim como na questão 5, estes alunos mobilizam a concepção “unitária de probabilidade”.

<p>a) Qual a probabilidade do escolhido ser homem?</p> $100 \cdot 1000 = 0,1$ $0,1 \cdot 600 = 60$ <p>R - 60%</p>	<p>b) Qual a probabilidade do escolhido ser mulher e não especializado?</p> $0,1 \cdot 260 = 26$ <p>R - 26%</p>	<p>c) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado?</p> $100 \cdot 600 = 1,6600$ $\frac{260}{11}$ <p>R - 65%</p>
<p>d) Qual a porcentagem de homens especializados?</p> $\frac{600}{100} = \frac{210}{x}$ <p>R - 35%</p>	<p>e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher? (atenção: estamos limitando o conjunto dos pesquisados somente ao grupo "especializado". Qual a diferença em relação aos outros itens?)</p> $100/350 = 0,285$ <p>R - 39,9%</p>	

Figura 50 - Respostas da questão 7- Alunos 2ª série EM

É possível perceber também, que, assim como a dupla anterior (que realizou duas atividades), no item (d), os alunos utilizaram a estratégia do “algoritmo da regra de três”, mesmo não considerando o total de funcionários – consideram apenas os funcionários homens – acreditamos que neste caso, a variável “encontrar a porcentagem”, também levou os alunos a utilizarem tal estratégia, com isto percebe-se que os alunos associam o cálculo de porcentagem com a utilização do “algoritmo da regra de três” e assim podemos apontar outra concepção, mesmo que não relacionada com Probabilidade, pois neste caso, os alunos não associam o cálculo de porcentagem como um cálculo de Probabilidade, caso contrário, utilizariam a estratégia utilizada nos outros itens. A esta concepção chamaremos de “associar porcentagem com o algoritmo da regra de três”, para a qual temos:

- *Campo de problemas*: determinação da porcentagem resultante de um subconjunto de um conjunto finito de elementos;
- *Conjunto de representações*: representação numérica e percentual;
- *Operadores*: conceito-em-ação que define a porcentagem como um conjunto de n termos como “n está para 100%, assim como k está para x”, sendo n o número total de termos e k o número de termos do subconjunto solicitado;

- *Estrutura de controle*: afirmar que o total de elementos é 100% (os alunos consideraram o total de homens como 100%).

É possível perceber também que, embora na questão anterior, estes alunos não tenham apresentado noções de probabilidade condicional, na presente questão responderam corretamente as questões que envolviam este conceito. Acreditamos que esta mobilização de conceitos se deu pelas variáveis escolhidas na elaboração das perguntas, que fizeram com que os alunos percebessem que a limitação do conjunto mudasse nos itens (c) e (e). Acreditamos que estas variáveis também influenciaram os alunos no item (d), pois acreditaram que a limitação do conjunto também mudaria, tendo que considerar apenas os funcionários homens.

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

Analisando as resoluções apresentadas pelos alunos da terceira série, é possível perceber que novamente estes alunos mobilizam a concepção “considerar apenas a parte”, como é possível perceber na figura 51.

<p>a) Qual a probabilidade do escolhido ser homem?</p> <p>R - $\frac{1}{600}$</p>	<p>b) Qual a probabilidade do escolhido ser mulher e não especializado?</p> <p>R - $\frac{1}{260}$</p>	<p>c) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado?</p> <p>R - $\frac{189}{390}$</p>
<p>d) Qual a porcentagem de homens especializados?</p> <p>$\frac{390}{600}$ 30 65</p> <p>R - 65%</p>	<p>e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher? (atenção: estamos limitando o conjunto dos pesquisados somente ao grupo “especializado”. Qual a diferença em relação aos outros itens?)</p> <p>R - $\frac{149}{350}$ Só foi usado os especi- alizados</p>	

Figura 51 - Respostas da questão 7 - Alunos da 3ª série do EM

Quanto às concepções de probabilidade condicional que poderiam ser apresentadas nesta questão, percebe-se que os alunos não compreendem os conceitos relacionados a este tópico, pois não conseguem estabelecer o novo conjunto de elementos para cada evento. Isto pode ser confirmado no diálogo

abaixo, no qual é possível verificar a dúvidas que os alunos possuem e a “confusão” que fazem quando tentam estabelecer o novo limite (total):

Diálogo	Nossa Análise
D: Se o sorteado for homem, qual é a probabilidade de ser não especializado?	
F: Uma...	
D: Tem que somar acho.	
F: Uma em...cadê...	
D: Não. São 390 chances no total acho, de não ser especializado, 390 sobre...	
C: Faz a diferença...	
D: Ah?	
C: Faz a diferença, 390 menos 210.	
F: 180.	
C: Então.	
D: 180...	
F: Não...	
D: Uma em 180?	
F: Será?	
D: Eu acho que não, porque oh: qual é a probabilidade do sorteado não ser especializado. Deste total aqui tem um (1) e deste total, qual é a probabilidade de não ser especializado. Eu acho que é 390 sobre o total. Será? O que você acha C.?	Os alunos acreditam que como será sorteada uma pessoa do evento solicitado, o total seria o número de elementos deste evento e não o total de pessoas, no caso 1000 pessoas.
C: 180 sobre 390.	colocam este resultado e seguem para o próximo item

Quadro 22 – Diálogo dos alunos da 3ª série EM na resolução da questão 7 e análise da pesquisadora

Desta forma percebemos que os alunos não compreendem a probabilidade condicional, ou seja, não conseguem estabelecer o novo total de elementos do conjunto a que foi limitado e também o número de elementos do evento solicitado, porém ao responderem o item (e), os alunos conseguem encontrar estes valores. Acreditamos que isto se deu pelo fato da questão explicar que estávamos limitando o conjunto para o conjunto dos funcionários especializados. Esta variável influenciou a resolução dos alunos. Novamente, observa-se que as concepções construídas no ano anterior não se tornaram estáveis, caracterizando aprendizagem.

5.2.7. Questão 8

Atividade 8: voltando ao tipo sanguíneo – outro problema.

A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos 4 tipos sanguíneos numa certa comunidade:

Dica: Lembre-se que a probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.

TIPO	A	B	AB	O
Probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = \underline{\quad}$	$P(AB) = \underline{\quad}$	$P(O) = \underline{\quad}$
Probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = \underline{\quad}$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\bar{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = \underline{\quad}$

- a) Complete a tabela adequadamente.
b) Qual é a probabilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?

Análise a priori

Esta questão tem por objetivo evidenciar o conceito de probabilidade como um valor entre 0 e 1, ou seja, esta questão foi elaborada de modo que os alunos tenham que trabalhar com o conceito de eventos complementares. Com ela, esperamos apontar concepções que os alunos possam apresentar sobre este conceito. A questão pode ser considerada simples, mas exige um entendimento claro do conceito de Probabilidade.

As respostas esperadas para responder a questão são:

a)

TIPO	A	B	AB	O
Probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = 0,1$	$P(AB) = 0,05$	$P(O) = 0,65$
Probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = 0,8$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\bar{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = 0,35$

b) $0,65$ ou $\frac{65}{100} = \frac{13}{20}$ ou ainda 65%

Para esta questão, os alunos deverão **mobilizar** os seguintes **conhecimentos matemáticos**: operações com números decimais, fração como comparação entre parte e todo, porcentagem e noções de eventos complementares.

Para esta questão temos como **variáveis didáticas**:

- Não apresentar nenhum valor para o sangue tipo O;
- Solicitar a Probabilidade de o indivíduo ter sangue tipo O, forçando o aluno a calcular esta Probabilidade;
- Solicitar que completasse a tabela adequadamente, fazendo com que o aluno não a preencha com qualquer valor;
- O enunciado da questão apresentar uma dica, lembrando os alunos de que a probabilidade deve estar entre 0 e 1.

Análise a posteriori

→ Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal

A questão 8 tinha como objetivo particular, verificar quais concepções os alunos mobilizam sobre eventos complementares. Assim, foi possível verificar na atividade realizada antes do ensino formal, que os alunos, após muitas discussões, perceberam que a união dos eventos complementares devia ser 1, porém apenas para os itens que já apresentavam algum valor, pois para o último item, que não continha nenhum valor, consideraram 50% para cada evento, apontando para a equiprobabilidade, já citada por Lecoutre (1985), e mobilizando a concepção “equiprobabilidade”, conforme podemos ver na figura 52.

Questão 8: voltando ao tipo sanguíneo – outro problema.

A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos 4 tipos sanguíneos numa certa comunidade:

Dica: Lembre-se que a probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.

TIPO	A	B	AB	O
probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = 0,1$	$P(AB) = 0,05$	$P(O) = \underline{\quad}$
probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = 0,8$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\overline{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = \underline{\quad}$

a) Complete a tabela adequadamente.

b) Qual a probabilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?

R - 50%

Figura 52 - Respostas da questão 8 - Atividade realizada antes do ensino formal

Percebe-se também que as alunas não compreenderam que existem apenas quatro tipos sanguíneos e que desta forma, para descobrir a probabilidade de uma pessoa ter tipo “O”, que era o tipo de sangue que não apresentava nenhum valor, teriam que descobrir o complementar da soma dos outros tipos de sangue. Isso ocorreu mesmo demonstrando ter alguma noção de eventos complementares, pois, perceberam que a soma da probabilidade de ter algum tipo de sangue com a probabilidade de não ter este tipo deveria ser 1, e desta forma completaram corretamente a tabela nas colunas dos sangues tipo “A”, “B” e “AB”, somando o que faltava para 1, como é possível perceber no registro abaixo da tabela (figura 52, página 149).

Assim, podemos apontar uma concepção relacionada à “noção de eventos complementares”, para a qual temos:

- *Campo de problemas*: encontrar a probabilidade de um evento dado o seu complementar.
- *Conjunto de representações*: linguagem numérica;
- *Operadores*: utilizar uma soma para verificar quanto falta para 1 (um);
- *Estrutura de Controle*: Somar os dois valores e encontrar 1.

Na atividade realizada após o ensino formal, os alunos apresentaram as mesmas respostas, mobilizando a concepção de “equiprobabilidade” e também de eventos complementares, como podemos ver na figura 53, a seguir:

Questão 8: voltando ao tipo sanguíneo – outro problema.
 A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos 4 tipos sanguíneos numa certa comunidade:
 Dica: Lembre-se que a probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.

TIPO	A	B	AB	O
probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = 0,5$	$P(AB) = 0,05$	$P(O) = 0,5$
probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = 0,8$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\overline{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = 0,5$

a) Complete a tabela adequadamente.
 b) Qual a probabilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?
 R - 0,5 = 50%.

Figura 53 - Respostas da questão 8 - Atividade realizada depois do ensino formal

Com isto, percebe-se que os alunos continuam mobilizando de forma estável, a concepção de “equiprobabilidade” e de “eventos complementares”.

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Percebemos nesta questão, que os alunos que não haviam realizado a atividade antes do ensino formal, apresentaram alguma compreensão de eventos complementares. Resolveram corretamente o cálculo da probabilidade entre os tipos de sangue, porém não perceberam que deveriam recorrer ao “complementar” para encontrar a probabilidade de uma pessoa ter sangue tipo “O”, já que só existem quatro tipos de sangue. Para este cálculo, os alunos perceberam que havia uma progressão geométrica decrescente entre as colunas e assim, seguindo a progressão, encontram o último valor (probabilidade de uma pessoa ter sangue tipo “O”), isto fica claro no registro feito pelo aluno por meio de uma flecha indicando que a progressão continua (figura 54) e também no diálogo que segue.

TIPO	A	B	AB	O
probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = 0,1$	$P(AB) = 0,05$	$P(O) = 0,025$
probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = 0,8$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\bar{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = 0,975$

a) Complete a tabela adequadamente.
b) Qual a probabilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?
R - 0,025

Figura 54 - Respostas da questão 8 - Alunos 2ª série EM

Diálogo	Nossa Análise
A: Mais 1, mais meio...	
D: Este aqui é sempre o menor 9 (aponta para a primeira linha) e seguinte é sempre o maior (aponta para a segunda linha).	
A: Acho que é... não.	
D: Não tem número de vírgula, nenhuma aqui.	Neste momento o aluno procura alguma outra questão que apresentasse número com vírgula.
A: Eu estou gostando que é número de virgula. Aqui oh, é mais 1, depois mais meio.	
D: quanto que é aqui?	
A: 0,975. Porque aqui oh:	
D: Está certo.	
A: Aqui é 2 (referindo-se a 0,2) divide por 2 dá 1 (0,1), divide por 2 dá isto (0,05), divide por 2 dá	

isto (0,025). Este aqui (aponta para a segunda linha), soma mais 1, soma mais meio..., tipo..., é só a diferença deles.	
D: Está bom.	
A: Complete a tabela adequadamente. Qual a possibilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?	Mesmo estando escrito Probabilidade, os alunos leem possibilidade
D: Não sei.	
P: como você chegou neste número?	A pesquisadora pergunta sobre encontram 0,025 para o indivíduo ter sangue tipo "O"
A: Eu... segui uma sequência aqui. "Tipo" aqui, segui esta sequência: Isto daqui (aponta para 0,2) dividido por 2, dá isto (0,1), dividido por 2 dá isto (0,5), dividido por 2 então dá este (0,025).	Os alunos recorrem ao conceito de progressão geométrica. Acreditamos que esta mobilização pode ser considerada uma estrutura de controle, pois todas as divisões realizadas resultam no valor apresentado pela próxima coluna
P: Está bom. (e partem para a próxima questão)	
A: Mais 1, mais meio...	

Quadro 23 – Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 8 e análise da pesquisadora

Desta forma, percebemos que os alunos não mobilizaram a concepção de eventos complementares, ou seja, não calcularam o restante para 1, que seria a soma de todos os tipos de sangue. Os alunos encontraram uma lógica para preencher a tabela. Não previmos que isto poderia acontecer e também não percebemos que os números colocados na tabela poderiam causar tal situação. Este fato poderia ser resolvido colocando-se outros valores na tabela, de forma que não siga uma ordem ou lógica.

Neste caso as respostas são baseadas em expectativa de resultados imediatos, ou seja, os alunos buscam algo que solucione o problema, sem se preocuparem se está correto ou não, assim apresentam a concepção "Não probabilística" da Realidade, de acordo com Azcárate (1996). Mesmo com um pensamento não probabilístico, podemos apontar para esta situação a mobilização de uma outra concepção, que chamaremos de "encontrar uma lógica", para a qual temos:

- *Campo de problemas*: encontrar a probabilidade de um evento.
- *Conjunto de representações*: linguagem numérica;
- *Operadores*: utilizar-se de uma lógica (no caso recorrer a uma progressão geométrica) para preencher a tabela;
- *Estrutura de Controle*: verificar que existe uma lógica de uma coluna para a outra e continuar seguindo esta lógica para preencher a última coluna.

→ Alunos da 3ª série do Ensino Médio

Conforme é possível verificar na figura 55, percebemos que os alunos mobilizam a concepção “noções de eventos complementares”, operando corretamente com eventos complementares, porém ainda consideram apenas a parte.

Questão 8: voltando ao tipo sanguíneo – outro problema.

A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos 4 tipos sanguíneos numa certa comunidade:

Dica: Lembre-se que a probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.

TIPO	A	B	AB	O
probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = 0,1$	$P(AB) = 0,05$	$P(O) = 0,65$
probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = 0,8$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\overline{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = 0,35$

a) Complete a tabela adequadamente.

b) Qual a probabilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?

R - 1/65

Figura 55 - Respostas da questão 8 - Alunos 3ª série EM

Para inserir o valor “0,65” para indivíduos com sangue tipo O, observa-se que os alunos, inicialmente, não percebem que só há 4 tipos de sangue e que a soma de todos deve ser 1, porém logo em seguida percebem a situação e preenchem corretamente a tabela, como é possível verificar no diálogo a seguir.

Diálogo	Nossa Análise
D: 2 com 1, 3, com meio.	
C: 35. Dá 0,35.	
Pesquisadora: Vocês leram todas as informações?	A pesquisadora solicitou que os alunos relesem todas as informações do problema.
C: Lembre-se que a Probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.	Os alunos releem a informação de que a Probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.
F: Então no O é zero.	
C: Não... Dá... 65.	
D: Como assim? Não estou entendendo. Porque 65?	
C: Oh: 2 com 1 e com 0,05, dá 35; 0,35. A diferença de 35 para 100?.	Nota-se aqui uma estrutura de controle, pois a aluna calcula a diferença de 35 para 100, que corresponde ao cálculo de eventos complementares.
D: É, dá quanto?	
C: 65.	
D: 0,65.	
C: É.	
D: E aqui? 95 com 9.	
C: 35 (e partem para próxima pergunta)	

Quadro 24 - Diálogo dos alunos da 2ª série EM na resolução da questão 8 e análise da pesquisadora

Com o diálogo, é possível perceber que a variável didática apresentada na questão – lembrar que a probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1 – interferiu no resultado apresentado. Desta forma podemos afirmar que os alunos não dominam, por completo, a noção de probabilidade como um número entre 0 e 1, eles operam com eventos complementares devido à questão apresentar uma informação que leve a isto.

5.2.8. Questão 9

Questão 9: As peças coloridas

Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em uma caixa.

	Circulares	Quadradas	Triangulares	Total
Azul	15	12	6	33
Amarela	5	8	4	17
Vermelha	20	5	10	35
Total	40	25	20	85

Sorteando-se uma das peças desta caixa, qual é a probabilidade de que ocorra uma peça:

a) triangular?	b) amarela quadrangular?	c) não circular?
d) não vermelha?	e) circular não vermelha?	f) não circular e não vermelha?

Análise a priori

A questão 9 é muito parecida com as questões 5 e 6, exigindo um entendimento complexo de Probabilidade. A diferença é que esta questão apresenta as somas parciais e total, que as outras não apresentavam, além de fazer parte do Caderno do Professor e do Caderno do Aluno, analisados no capítulo anterior. A atividade exige que o aluno saiba encontrar a probabilidade a partir do enfoque clássico, além de exigir concepções sobre eventos dependentes, e de união e intersecção de eventos.

As respostas esperadas para a questão são:

a)evento: sortear uma peça triangular

$$P(E) = \frac{20}{85} = \frac{4}{17} \text{ ou ainda } 23,5\%$$

b)evento: sortear uma peça amarela retangular

$$P(E) = \frac{8}{85} \text{ ou ainda } 9,4\%$$

c) evento: sortear uma peça não circular: $25 + 20 = 45$

$$P(E) = \frac{45}{85} = \frac{9}{17} \text{ ou ainda } 52,94\%$$

d) evento: sortear uma peça não vermelha

$$P(E) = \frac{50}{85} = \frac{10}{17} \text{ ou ainda } 58,82\%$$

e) evento: sortear uma peça circular não vermelha

$$P(E) = \frac{20}{85} = \frac{4}{17} \text{ ou ainda } 23,5\%$$

f) evento: sortear uma peça não circular e não vermelha: $12 + 8 + 6 + 4 = 27$

$$P(E) = \frac{30}{85} = \frac{6}{17} \text{ ou ainda } 35,29\%$$

Assim, os **conteúdos matemáticos** que os alunos deverão **mobilizar** para resolver a questão são: soma, divisão, fração no sentido de comparação entre parte e todo, simplificação de fração, noções de porcentagem, além de conceitos relacionados ao cálculo de Probabilidade: união e intersecção de eventos.

As **variáveis didáticas** escolhidas foram:

- *Apresentar as somas parciais e total, como um agente facilitador;*
- *Solicitar o cálculo da Probabilidade de eventos diversos, tais como união de eventos, intersecção de eventos e a negativa de um evento – com o objetivo de o aluno utilizar o completar para encontrar a resposta.*

Análise a posteriori

→ *Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal*

Embora apresentando um nível complexo de probabilidade, ao ser dado o número total de peças, percebe-se que na atividade realizada antes do ensino

formal, os alunos consideram a razão entre parte e todo, diferentemente das questões anteriores, em que estes alunos haviam considerado apenas a parte (estamos considerando a atividade realizada antes do ensino formal).

Vermelhas!

<p>a) triangular?</p> $\frac{20}{85} \stackrel{:5}{=} \frac{4}{17} = \frac{1}{4}$ <p>R - _____</p>	<p>b) amarela retangular?</p> $8/85$ <p>R - _____</p>	<p>c) não circular?</p> $\frac{35}{85} \stackrel{:5}{=} \frac{11}{16}$ <p>R - _____</p>
<p>d) não preta?</p> $\frac{45}{85} \stackrel{:5}{=} \frac{9}{17}$ <p>R - _____</p>	<p>e) circular não preta?</p> $\frac{20}{85} \stackrel{:5}{=} \frac{4}{17} = \frac{1}{4}$ <p>R - _____</p>	<p>f) não circular e não preta?</p> $\frac{30}{85} = \frac{6}{17} = \frac{3}{8}$ <p>R - _____</p>

Figura 56 - Respostas da questão 9 - Atividade realizada antes do ensino formal

No cálculo dos eventos que envolviam união, intersecção e dependência, os alunos apresentaram alguns cálculos errados, assim, podemos considerar que as alunas apresentaram uma aparente concepção intuitiva de Probabilidade. O invariante operatório utilizado foi o da razão entre parte e todo. Para validar a operação, as alunas foram simplificando as frações encontradas. Acreditamos que essas simplificações levaram os alunos a entender a resposta, pois é mais fácil entender, por exemplo, que a probabilidade de sortearmos uma peça triangular é 1 em 4, do que 20 em 85.

Já na atividade realizada após o ensino formal, ao iniciarem a resolução desta questão, os alunos somaram os totais parciais de cada coluna e linha, seguindo o processo de resolução de exercícios anteriores que exigia isto, mas perceberam que a tabela já continha os valores e assim recomeçaram o exercício. Os alunos mostraram apontar uma noção do cálculo de probabilidade por meio da razão entre

parte e todo, porém apresentaram dificuldade nas resoluções que envolviam a intersecção de eventos, como já foi apontado em questões anteriores. Acreditamos que as alunas validaram suas respostas quando transformaram as respostas em porcentagem, ou seja, possuem a concepção de que a probabilidade deve representar a chance (em porcentagem) de algo acontecer. Neste caso, podemos considerar também que as alunas atingem a concepção “Emergente” de Probabilidade, nos termos de Azcárate (1996), pois ainda não possuem o domínio total do conceito de Probabilidade, juntamente com suas definições e axiomas, mas já apresentam uma compreensão do modelo clássico de Probabilidade.

□		
a) triangular? $\frac{20}{85} = 0,23$ R - 23%	b) amarela retangular ? $\frac{17}{25} = 0,68 =$ R - 68%	c) não circular? $\frac{40}{85} = 0,47$ R - 50%
d) não preta ? VERMELHA $\frac{50}{85} = 0,58$ R - 58%	e) circular não preta ? VERMELHA $\frac{20}{85} = 0,23$ R - 23%	f) não circular e não preta VERMELHA $\frac{45}{85} = 0,52$ $\frac{35}{85} = 0,35$ R - 52% 35%

Figura 57 - Respostas questão 9 - Atividade realizada após o ensino formal

→ Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal

Novamente, para resolverem esta questão, estes alunos recorreram à concepção unitária de Probabilidade, já mobilizada por esta dupla na questão 5, ou seja, encontram a chance de sortear uma peça dentre todas, para depois multiplicar pela quantidade de peças do evento solicitado. Além disto, é possível perceber que os alunos operam corretamente com a união, intersecção e negação de eventos, pois respondem corretamente todos os itens. Acreditamos que o fato dos valores estarem representados por meio de uma tabela, tenha facilitado o cálculo da união e intersecção de eventos, pois é facilmente perceptível o que o evento solicita.

<p>a) triangular?</p> $100/85 = 1,17$ $1,17 \cdot 20 =$	<p>b) amarela quadrangular?</p> $1,17 \cdot 8$	<p>c) não circular?</p> $1,17 \cdot 45$
R - <u>28,5%</u>	R - <u>9,36%</u>	R - <u>52,65</u>
<p>d) não vermelha?</p> $1,17 \cdot 50$	<p>e) circular não vermelha?</p> $1,17 \cdot 20$	<p>f) não circular e não vermelha?</p>
R - <u>58,5</u>	R - <u>23,4</u>	R - <u>35,1</u>

Figura 58 - Respostas da questão 9 - Alunos 2ª série EM

→ Alunos da 3ª série do Ensino Médio

Como é possível perceber na figura 59, a seguir, estes alunos não responderam corretamente às questões, confundindo parte com todo, ou seja, mobilizam novamente a concepção “considerar apenas a parte”, além de não conseguirem realizar operações com união e intersecção de eventos.

<p>a) triangular?</p>	<p>b) amarela retangular?</p>	<p>c) não circular?</p>
R - <u>1/20</u>	R - <u>8/25</u>	R - <u>45/40</u>
<p>d) não preta? vermelha</p>	<p>e) circular não preta? vermelha</p>	<p>f) não circular e não preta? vermelha</p>
R - <u>35/50</u>	R - <u>29/40</u>	R - <u>75/85</u>

Figura 59 - Respostas da questão 9 - Alunos 3ª série EM

Percebe-se também, que os alunos confundem os eventos, e consideram o contrário do que está sendo solicitado. Além disso, somam duas vezes o mesmo tipo de peça, como por exemplo, o número 75 do item (f), que é a soma das 40 peças circulares com as 35 peças vermelhas, não consideram que destas, 20 são circulares e também vermelhas, e com isto o total seria 55 e não 75. Desta forma, podemos apontar que estes alunos apresentam a concepção “não probabilística da realidade”, pois as respostas são baseadas em crenças e critérios de causalidade.

5.2.9. Questão 10

Questão 10: Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas?

Análise a priori

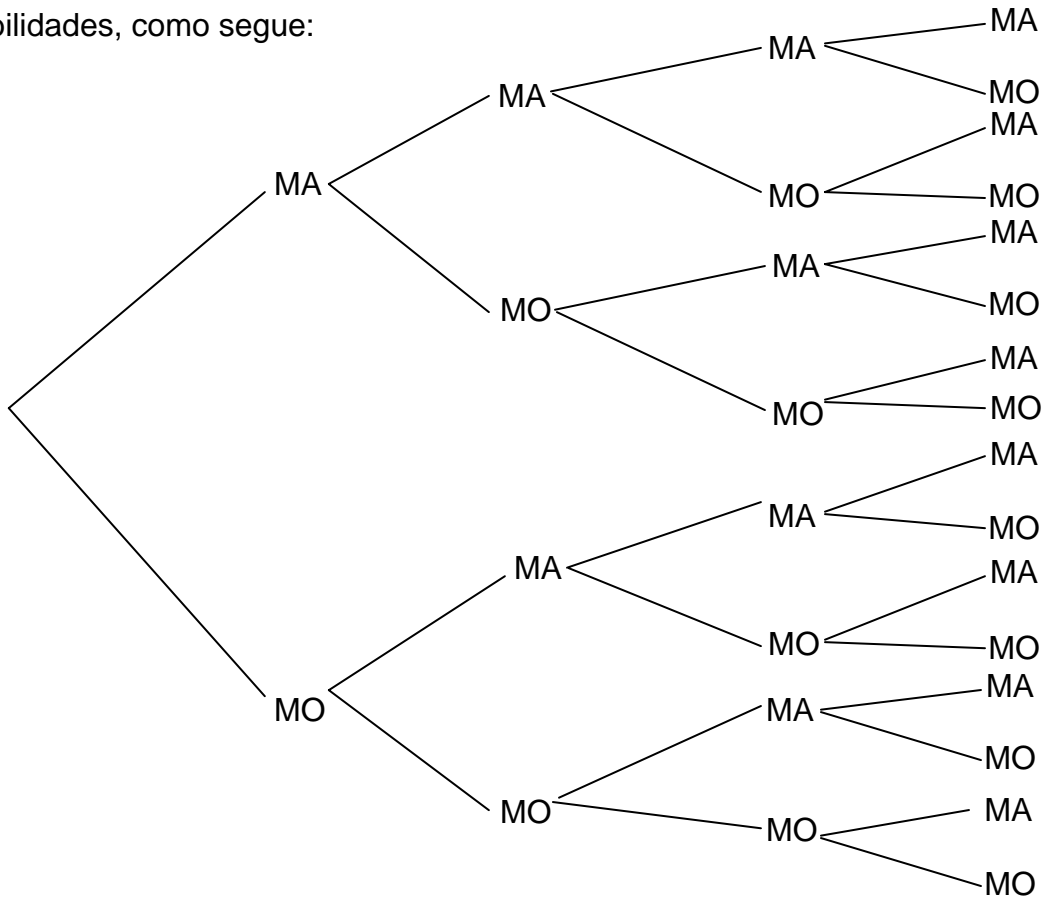
A presente questão, na qual os alunos deverão utilizar os conceitos de probabilidade condicional e probabilidades sucessivas (método binomial), apresenta um alto grau de complexidade cognitiva. Para responder à questão, os alunos terão que perceber que para a escolha de duas meninas e dois meninos, podem existir várias opções e com isto, várias possibilidades. Desta forma, o conceito de combinação também é utilizado, elevando o nível da questão. Além disto, os alunos também terão que perceber que a escolha dos alunos não tem reposição, uma vez que o aluno escolhido não volta para a sala.

Acreditamos que para responder esta questão, o aluno terá que mobilizar concepções bem claras e definidas do conceito de Probabilidade e desta forma, aponte características dos níveis mais elevados da concepções propostas por Azcárate (1996).

Uma resolução esperada para esta questão é: $n = 15 + 13 = 28$

Evento: serem sorteados 4 alunos, sendo dois meninos e duas meninas.

Opções: Considerando MO como menino e MA como menina, temos: MO MO MA MA; MO MA MO MA; MA MA MO MO; MA MO MA MO; MA MO MO MA; MO MA MA MO. O total de opções também pode ser obtido com uma árvore de possibilidades, como segue:



$$\text{Assim, } P = \left(\frac{13}{28} \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26} \cdot \frac{14}{25} \right) \cdot 6 = \frac{32760}{491400} \cdot 6 = \frac{1}{15} \cdot 6 = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \text{ ou ainda } 40\%$$

Os **conteúdos matemáticos** que os alunos deverão **mobilizar** para responder a esta questão são: soma, multiplicação, conceito de fração no sentido de comparação entre parte e todo, multiplicação de frações, noção de porcentagem, probabilidade e noções de combinatória.

As **variáveis didáticas** escolhidas foram:

- *Solicitar que sejam sorteados 4 indivíduos e não apenas 1, como nas questões anteriores;*

- Solicitar que dentre os 4 indivíduos, 2 sejam meninas e 2 sejam meninos; acreditamos que desta forma, poderemos apontar concepções referentes ao pensamento combinatório;

Análise a posteriori

→ Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal

A questão 10 apresentava conceitos de probabilidade condicional, elevando o grau de complexidade cognitiva. Assim, foi possível perceber que antes do ensino formal, os alunos não conseguiram responder corretamente a questão, como é possível verificar na figura 60, ou seja, antes do ensino formal os alunos não apresentam concepções sobre probabilidade condicional, além de não apresentarem noções de combinatória e nem do modelo binomial (probabilidades sucessivas).

Questão 10: Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas?

meninas 13
meninos: 13

$\frac{4}{28} = 7\%$

R - _____

Figura 60 - Resposta da questão 10 - Atividade realizada antes do ensino formal

O que pode ser observado é uma tentativa da utilização do enfoque clássico, ou seja, de comparação entre parte e todo, considerando erroneamente o número de sorteados como sendo o número de elementos do evento, ainda assim erram na divisão, pois $\frac{4}{28}$ é aproximadamente 14% e não 7%. Os alunos fizeram a divisão de 28 por 4 e não de 4 por 28.

Na atividade realizada após o ensino formal, é possível notar que os alunos continuam não dominando a noção de probabilidade condicional, apresentando o mesmo resultado encontrado na atividade antes do ensino formal, porém dividem corretamente a fração encontrada.

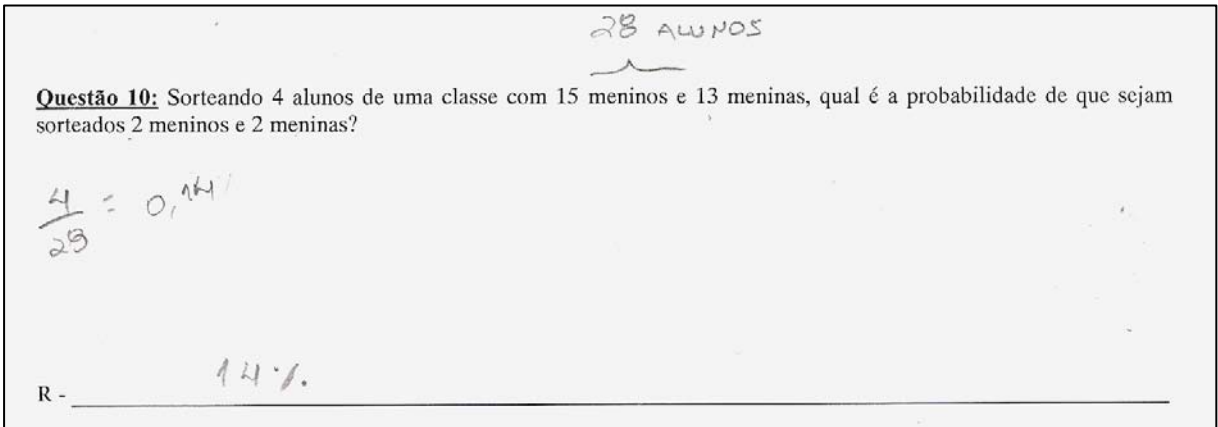


Figura 61 - Resposta da questão 10 - Atividade realizada depois do ensino formal

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

Antes de analisar a resolução desta questão com esta dupla, ressaltamos que ao iniciar a resolução do problema, um dos alunos precisou se ausentar e com isto as questões 10, 11 e 12 foram realizadas por apenas um aluno.

Como podemos verificar na figura 62, a questão não foi resolvida pelo aluno, que alegou não saber como fazer.

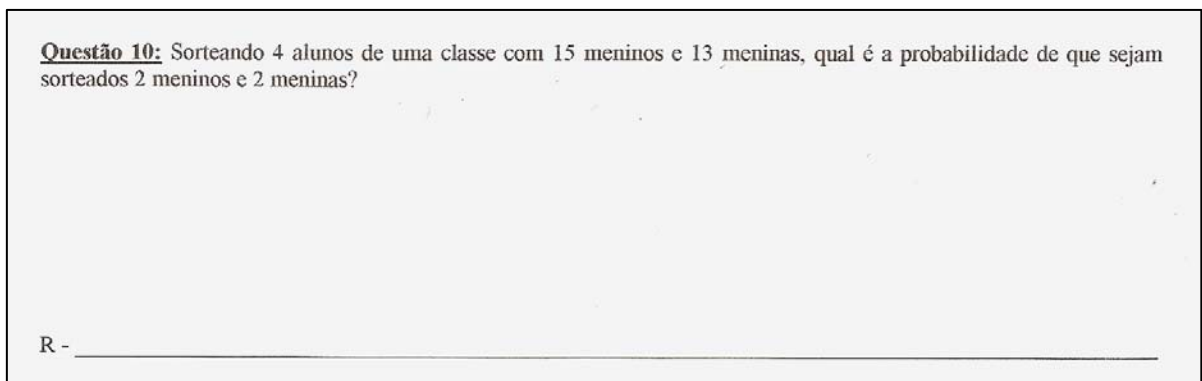


Figura 62 - Questão 10 - Aluno 2ª série EM

Mesmo sem resolver a questão, no diálogo entre o aluno e a pesquisadora, ele percebe que a chance de menino é maior, pois tem mais meninos do que meninas na sala, porém não consegue resolver a questão.

Diálogo	Nossa Análise
A: Ah, sei lá como eu faço esta... Aqui é proporcional... Sei lá, fazer esta.	
Pesquisadora: Quer que eu volte amanhã, para você terminar com ele?	
A: Eu não sei fazer não, o mecanismo...	
Pesquisadora: Então explique mais ou menos o que você acha?	
A: É assim: Tem 15 meninos e 13 meninas, tem que sortear 4 alunos, a chance de cair um menino é maior, porque tem 2 a mais, mas eu não sei colocar isto, porque é proporcional. Sorteado 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas. Eu não sei o correto.	O aluno percebe que a chance de ser sorteado um menino é maior do que a de sortear uma menina, porém alega não saber o mecanismo para solucionar a questão, com isto percebemos certa dificuldade na compreensão de probabilidade condicional.
Pesquisadora: Faz o que você acha.	
A: ...	

Quadro 25 – Diálogo do alunos da 2ª série EM com a pesquisadora na questão 10

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

Após muitas discussões para saber se o cálculo da Probabilidade deveria ser separado entre as meninas e os meninos, os alunos tentaram calcular a probabilidade separadamente, porém ainda considerando a parte como todo. Nesta questão, um invariante pode ser apontado, o das multiplicações sucessivas, pois foi com esta estratégia que os alunos se aproximaram do cálculo, como é possível verificar na figura 63. Ainda assim, percebemos certa confusão na razão entre parte e todo e em como multiplicar estas probabilidades, como é possível verificar no diálogo a seguir.

Questão 10: Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas?

$\frac{F}{13} \cdot \frac{F}{12} \cdot \frac{M}{15} \cdot \frac{M}{14} \cdot \frac{15}{756} \cdot \frac{13}{756} \cdot \frac{1}{12}$ $F F m m$
 $28.27 \cdot 26.25$

R - $\frac{15}{756} \cdot \frac{13}{756}$

Figura 63 - Resposta da questão 10 - Alunos 3ª série EM

Diálogo	Nossa Análise
D: Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados dois meninos e duas meninas? São 4 pessoas. São 4 chances em 28 pessoas. Certo? Alguém discorda?	Um dos alunos percebe que o fato de ter que sair duas meninas e dois meninos no sorteio interfere no resultado, porém não sabe como fazer para chegar a este resultado. Percebe-se que até aqui, que os alunos já não conseguem mobilizar os conhecimentos sobre análise combinatória, ou seja, existe uma lacuna de conhecimento que dificulta a organização do raciocínio adequado para a resolução do problema. Embora tenha sido um conteúdo trabalhado (pelo menos deveria ter sido), observa-se que os alunos não conseguem mobilizar estes conhecimentos. O esquema utilizado para a resolução que aparece na figura 61 mostra que eles entenderam o princípio multiplicativo, mas não conseguem adaptá-lo às necessidades impostas pelo problema.
F: É, só que ai você tem que saber de uma coisa: está separado. Se ele fosse falar com 4 alunos, seria 28.	
D: Tá, então foram sorteados, mas é do total, qual é a probabilidade de que sejam sorteados dois meninos e duas meninas. Destes 28 tem que ser 2 meninos e duas meninas.	
F: É ... só que é separado.	
D: Então tem a probabilidade de 2 por 28 e 2 por 28, não é C?	Com a fala ao lado, é possível verificar que D não percebe que o modelo adequado é o de um sorteio aleatório sem reposição, e que, portanto a cada sorteio o total de alunos que formam o “espaço amostral” é alterado. Este conceito em ação sobre sorteio aleatório é confirmado em sua fala a seguir:
C: Não sei não.	
D: Porque são 2 meninos de 28 e duas meninas dos 28.	Neste momento, podemos verificar a confusão que os alunos apontam, pois D e nem C não têm a menor ideia do que está acontecendo – apresentam idéias confusas, sem sentido.
D: Porque ele quer do total de uma classe, nesta classe tem este total, porque na classe tem 28 pessoas.	
F: Então porque ele separou?	
D: Porque ele quer saber a Probabilidade de tirar duas meninas da classe inteira, dos 28 e 2 meninos dos 28, ou você não entendeu?	
F: Entendi D, só o que eu achei estranho, porque se fosse...	
D: Mas...	
P: Entra num acordo.	
D: Então, é isto que estou perguntando, mas não sei se está certo. Porque depois desta Probabilidade, 28 dividido por 2?	
F: 14.	
C: Que 14?	
D: 28 dividido por é... 14 C. Não. 2 por 28.	
C: É então.	
D: Quanto que dá?	
C: Sei lá.	
F: Só que aqui tem diferença, por que tem 13 meninas e 15 meninos.	Neste momento, podemos perceber que mesmo com as informações sobre os dois subconjuntos formados, o aluno D se recusa a considerar a condição do problema. Para ele existe um único espaço amostral no problema, que é a classe toda com 28 alunos, desta forma o aluno D aponta a concepção de evento como sendo um subconjunto qualquer do espaço amostral, ou seja, o conceito de espaço amostral e evento não estão construídos, para isto, apontam um invariante: se o enunciado fala de um total, a
D: Só que F, ele só distinguiu que tem 15 meninos e 13 meninas, só que ele quer saber do total da sala inteira, são 28 pessoas numa sala, desta sala ele quer tirar 4.	

	Probabilidade tem que ser sempre considerada sobre este total.	
P: A briga está boa, continua brigando.	No trecho acima, novamente podemos apontar outro invariante que é utilizado como operador: a quantidade indicada ser a Probabilidade. Neste caso, D não utiliza a definição de Probabilidade como um valor entre zero e um, como controle para este raciocínio.	
D: A gente está discutindo.		
F: Eu não estou a fim de brigar.		
P: Mas explica o que você está pensando.		
F: Porque eu entendi o seguinte:		
D: mas...		
F: deixa eu terminar de falar? Obrigada. Este aqui tá. Ele está dando 4 alunos desta sala toda, mas porque se fosse ser o total ele já não falaria 4 alunos em vez desta especificação de duas meninas e dois meninos?		
D: Então, você está querendo dizer...		
F: Mesmo porque, se você dividisse 28 por 2 daria 14, e não ia ...		
D: Ma não é 28 por 2, é 2 por 28.		
F: Mesmo assim D, não tem como.		
D: Empresta a borracha, deixa eu fazer uma coisa aqui para ficar melhor, oh: tem que sair daqui, 2 meninos, feminino, feminino, menino, menino, tem que sair destes 4 aqui, tem 28 possibilidades de sortear aleatoriamente.		
F: tá, e?		
D: Ele só falou isto da menina e menino, porque ele quer dizer que tem mais meninos do que meninas, por isto ele distinguiu que tem 15 meninos e 13 meninas, porque lógico, a Probabilidade de ser menino vai ser muito maior.		
D: oh, vamos seguir o raciocínio da F. A Probabilidade de sair menina é 13. De ser menina é 13, não 12, porque já devia ter uma escolhida.		
F: É.		
D: A Probabilidade do feminino 15 e 14, agora multiplica tudo, é soma ou multiplica quando faz isto?		
F: Então, 12 vezes 13 vezes...		Neste momento do diálogo, é possível notar que F usa o princípio multiplicativo (raciocínio combinatório) como operador.
D: vezes 15 vezes 14.		
C: 12, 13, 14, 15, rsrs		
F: 12, 13, 14, rsrs, é.		
D: rsrsrs		
F: 32.760.		
D: Tem 32.760 possibilidades de acontecer isto, porque quando ele sortear, pode acontecer de vir: 1 menino e 1 menina, pode vir "tipo" 1 menina e 3 meninos no sorteio.		
F: Tá, então vamos ver pelo seu método, que seria 28.	Neste momento podemos identificar um erro de D, que é acreditar que a multiplicação de 28 por 27, 26 e 25 dará o mesmo resultado que a multiplicação de 13 por 12, 15 e 14. O aluno acredita que encontrará o mesmo resultado encontrado antes, porém não percebe que os números são diferentes e com isto, o resultado será diferente, desta forma, podemos apontar um invariante operatório importante, que aparentemente para este jovem está sendo utilizado tanto operador como estrutura de	
D: Divide 2 por 28, ..., quanto deu?		
F: 0,071		
C: Tem que ser 28 mais 27 então, ...		
F: 28, 27...		
D: 28, 27, 26 e 25.		
F: Está bom.		
D: Eu acho que vai dar a mesma coisa.		
F: É vezes?		
D: É.		

D: Acho que vai dar a mesma coisa. Eu não anotei o resultado F. Quando deu?	controle.
F: É só calcular de novo.	
D: espera aí, vamos pelo método do "..., deixa eu escrever aqui. De onde você tirou o 23?	
F: Espera.	
D: F. deixa eu fazer;	
F: Tá bom.	
D: 28 vezes 27, vezes 26, vezes 25... E vamos ver o seu: dá 13 vezes 12, vezes 15, vezes 14. Não deu a mesma coisa.	Na afirmação de D, de que o resultado apresenta um número muito grande, e por isto está errado, podemos apontar uma estrutura de controle: se o valor é muito grande, não pode ser considerado na resolução do problema. Mesmo assim, D continua não percebendo o que é probabilidade. Embora tenhamos identificado uma estrutura de controle, não é possível apresentar uma concepção, pois o aluno não percebe o que é Probabilidade.
C: É lógico, são números diferentes.	
D: Não, ..., é verdade, é muito maior 32760 pelo seu método e 491.400 pelo meu método, porque oh: uma coisa tem lógica, se ele sortear 4 pessoas numa sala de 28, pode cair 1 menina e 3 meninos, 3 meninos e 1 menina.	
D: É, só que ele quer 2 meninos e 2 meninas.	
D: A Probabilidade é: pode cair 1 menina e 3 meninos, 2 menina e 2 meninos, 3 meninas e 1 menino.	
C: não. Oh: 27 vezes 28, que é o total de tudo, primeira pega o 28, depois tira fica 28, dá 756, sobre, pelo total que são 13 meninas, é 13 de 756 e 15 sobre 756.	
D: Então faz as contas aí e vê quando vai dar. Então deixa apagar, eu acho que está muito grande estes números. Como você disse?	
C: oh, de menino: é 15 sobre 756.	
D: E de menina? 13 sobre?	
C: 756.	
D: F, concorda com a C?	
F: Concordo, tem mais convicção. Olha, este problema....	
D: A P. gosta de complicar.	
P: que problema é este?	
F: O dez.	

Quadro 26 – Diálogo dos alunos da 3ª série EM na questão 10 e análise da pesquisadora

Finalizando o diálogo, podemos apontar que o resultado apresentado pelos alunos caracteriza a falta de compreensão dos eventos aleatórios, do conceito de Probabilidade e de raciocínio combinatório. Estas características estão presentes na concepção “Não probabilística da Realidade”, apontada por Azcárate (1996).

5.2.10. Questão 11

Questão 11: Sorteando bolas de uma urna

Em uma caixa há 20 bolas, que diferem apenas pela cor. Dessas bolas, $\frac{1}{4}$ são verdes, $\frac{2}{5}$ são amarelas e o grupo restante é formado apenas por bolas da cor rosa. Serão realizados três sorteios com reposição de uma bola a cada vez. Qual é a chance de serem sorteadas:

a) bolas de uma única cor?	b) uma de cada cor?	c) Duas verdes e uma amarela?
a) três rosas?	e) Duas amarelas e uma rosa?	

Análise a priori

A questão 11 se diferencia das outras apresentadas até o momento, pois não apresenta explicitamente a quantidade de bolas de cada cor – é apresentado apenas o total de bolas que estão na caixa. A quantidade de bolas de cada cor é apresentada por meio de frações, com isto, primeiramente, o aluno terá que encontrar a quantidade de bolas de cada cor e para isto, deve ter claro o conceito de fração para, em seguida, resolver o problema. Além disto, a questão também envolve o conceito de probabilidade condicional e probabilidades sucessivas, uma vez que há sorteio de três bolas com reposição, além de envolver questões que apresentam união e intersecção de eventos.

A escolha da questão se deu por acreditarmos ser uma questão completa, que envolve diversas concepções de Probabilidade e também outros conceitos, assim, os alunos que a resolverem corretamente, demonstrarão um domínio do conceito e com isto poderemos apontar reais concepções de Probabilidade, ou seja, o aluno que resolver corretamente a questão terá claro, o conceito de Probabilidade.

Para resolver as questões apresentadas, inicialmente, deve-se encontrar a quantidade de bolas de cada cor, assim:

$$\text{Bolas verdes: } \frac{1}{4} \text{ de 20 bolas} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \text{ bolas verdes}$$

$$\text{Bolas Amarelas: } \frac{2}{5} \text{ de 20 bolas} = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ bolas amarelas}$$

$$\text{Bolas rosas: } 20 - (5 + 8) = 20 - 13 = 7 \text{ bolas rosas}$$

Desta forma, esperamos encontrar as seguintes respostas:

a) evento: sortear três bolas, todas de uma única cor: (VVV ou AAA ou RRR)

$$P(E) = \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{20}\right) + \left(\frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20}\right) + \left(\frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20}\right) =$$
$$= \frac{125}{8000} + \frac{512}{8000} + \frac{343}{8000} = \frac{980}{8000} = \frac{98}{800} = \frac{49}{400} \text{ ou ainda } 12,25\%$$

b) evento: sortear três bolas, sendo uma de cada cor: (VAR ou VRA ou ARV ou AVR ou RVA ou RAV)

$$P(E) = \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{20}\right) \cdot 6 = \frac{280}{8000} \cdot 6 = \frac{28}{800} \cdot 6 = \frac{7}{200} \cdot 6 = \frac{42}{200} = \frac{21}{100} \text{ ou ainda } 21\%$$

c) evento: sortear três bolas, sendo duas verdes e uma amarela: (VVA ou VAV ou AVV)

$$P(E) = \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{8}{20}\right) \cdot 3 = \frac{200}{8000} \cdot 3 = \frac{1}{40} \cdot 3 = \frac{3}{40} \text{ ou ainda } 22,5\%$$

d) evento: sortear três bolas, sendo as três rosas: (RRR)

$$P(E) = \left(\frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20}\right) = \frac{343}{8000} \text{ ou ainda } 4,28\%$$

e) evento: sortear três bolas, sendo duas amarelas e uma rosa: (AAR ou ARA ou RAA)

$$P(E) = \left(\frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{20}\right) \cdot 3 = \frac{448}{8000} \cdot 3 = \frac{7}{125} \cdot 3 = \frac{21}{125} \text{ ou ainda } 16,8\%$$

Desta forma, os **conteúdos matemáticos** que os alunos deverão **mobilizar** são: adição, multiplicação e divisão de números naturais, adição, multiplicação e

simplificação de frações, noções de porcentagem, princípio multiplicativo, união e interseção de eventos, probabilidade condicional.

As **variáveis escolhidas** foram:

- *Apresentar a quantidade de bolas por meio de frações;*
- *Solicitar o sorteio de três bolas e também com reposição – a variável com reposição foi escolhida para apresentar uma diferenciação da questão 10, na qual o sorteio não envolvia reposição;*
 - *Apresentar vários eventos com características diferentes para o cálculo da probabilidade, de forma que faça o aluno perceber as diferentes maneiras que se podem sortear três bolas de uma caixa;*
 - *A questão estar presente no Caderno do Professor e no Caderno do Aluno, que fazem parte da nova proposta curricular do estado de São Paulo;*

Análise a posteriori

→ *Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal*

Antes do ensino formal, os alunos não conseguiram responder esta questão. Não previmos em nossa análise *a priori*, que os alunos neste nível pudessem deixar de responder a questão, assim, não é possível apontar concepções.

Na atividade realizada após o ensino formal, novamente os alunos demonstram que não dominam o conceito de probabilidade condicional, apenas operam com a razão entre parte todo de forma a evoluir na resolução, como é possível verificar na figura protocolo abaixo.

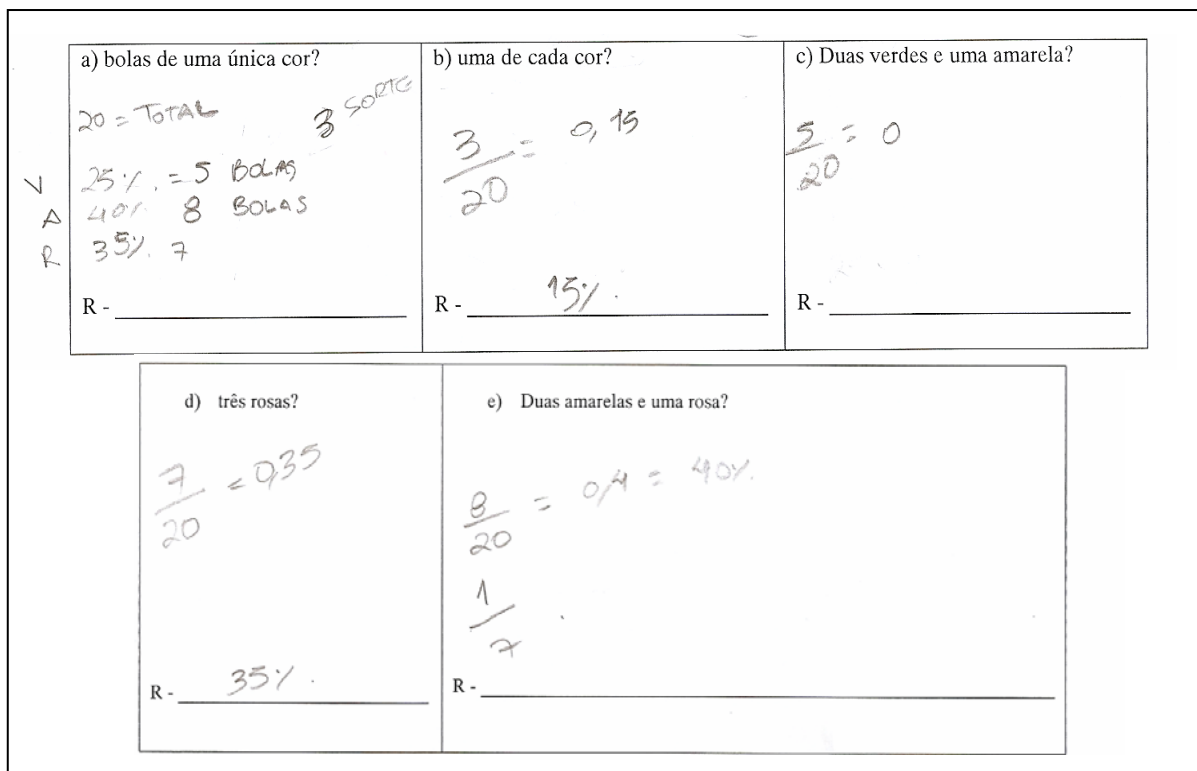


Figura 64 - Respostas da questão 11 - Atividade realizada após o ensino formal

Nota-se também que o fato da quantidade de bolas ser apresentada por meio de fração não foi fator que dificultasse a resolução da questão, pois os alunos encontraram corretamente a quantidade de bolas de cada cor. Novamente a dificuldade apresentada está em compreender o conceito de probabilidade condicional e do modelo binomial (probabilidades sucessivas).

→ Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal

Como podemos ver na figura 65 a seguir, o aluno não respondeu corretamente as questões solicitadas, demonstrando não compreender cálculos com probabilidades sucessivas e condicional.

<p>a) bolas de uma única cor?</p> <p>R - <u>25%</u></p>	<p>b) uma de cada cor?</p> <p>R - <u>1:20</u></p>	<p>c) Duas verdes e uma amarela?</p> $\frac{20}{4} + \frac{80}{25}$ <p>R - <u>6,5%</u></p>
$\frac{20}{5} = \frac{100}{x}$ 25%		
<p>d) três rosas?</p> $\frac{20}{7}$ <p>R - <u>2,85%</u></p>	<p>e) Duas amarelas e uma rosa?</p> $\frac{20}{2,5} + \frac{20}{7}$ <p>R - <u>5,35%</u></p>	

Figura 65 - Respostas da questão 11 - Alunos 2ª série EM

O que observamos é que houve uma tentativa de recorrer ao cálculo de porcentagem por meio do algoritmo da regra de três, porém sem êxito. Neste caso o aluno considerou a porcentagem de bolas verdes que estão dentro da urna e em nenhum momento calculou a Probabilidade. A utilização do algoritmo da regra de três pode ser apontado como um operador, porém não para o cálculo da probabilidade do evento solicitado. No item (c), é possível intuir que o aluno tenta calcular a probabilidade por meio da divisão entre parte e todo, porém não percebe que são solicitados três sorteios e que o modelo adequado é o de um sorteio aleatório com reposição, que envolve um raciocínio combinatório.

→ Alunos da 3ª série do Ensino Médio

A questão 11 era uma questão muito complexa, que envolvia muitos conceitos referentes à Probabilidade. Embora tenham conseguido calcular corretamente a quantidade de bolas de cada cor, os alunos da 3ª série não conseguiram resolver corretamente as questões, pois ainda mobilizam a *concepção unitária de Probabilidade* – utilizam-na apenas como um invariante para evoluir na questão. Apontamos também uma confusão nos conceitos que envolviam união e intersecção de eventos. Assim como na questão anterior, estes alunos parecem não compreender o conceito de probabilidade condicional e também o de raciocínio combinatório.

<p>a) bolas de uma única cor?</p> <p>R - <u>3/20</u></p>	<p>b) uma de cada cor?</p> <p>R - <u>3/20</u></p>	<p>c) Duas verdes e uma amarela?</p> $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \frac{16+5}{40} = \frac{21}{40}$ <p>R - <u>21/40</u></p>
<p>d) três rosas?</p> <p>R - <u>1/7</u></p>	<p>e) Duas amarelas e uma rosa?</p> $\frac{2}{8} + \frac{1}{7} = \frac{14+8}{56} = \frac{22 \cdot 2}{56 \cdot 2} = \frac{44}{112}$ <p>R - <u>11/28</u></p>	

Figura 66 - Respostas da questão 11 - Alunos 3ª série EM

5.2.11. Questão 12

Questão 12: O que é mais provável: duas caras no lançamento de 4 moedas ou uma face 6 no lançamento de dois dados? Justifique.

Análise a priori

A escolha desta questão se deu por acreditarmos que a comparação entre dois eventos, para saber qual é mais provável, faz com que o aluno reflita sobre o que é Probabilidade. Nosso objetivo com isto é apontar concepções sobre o que o aluno realmente entende de Probabilidade, ou seja, se ele entende a Probabilidade como um grau de incerteza.

A questão envolve o conceito de probabilidade condicional, além de envolver o raciocínio combinatório, assim as respostas esperadas para esta questão são:

Evento: sair duas caras (K) no lançamento de quatro moedas: (KKCC, CCKK, KCKC, CKCK, CKKC, KCCK) → 6 possibilidades..

$n = 2^4 = 16$ possibilidades no total (O número de possibilidades também pode ser encontrado por meio da árvore de possibilidades)

$$P(E) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \text{ ou ainda } 37,5\%$$

Evento: sair uma face 6 no lançamento de dois dados: {(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)} → 10 possibilidades

$$n = 6^2 = 36 \text{ possibilidades no total}$$

$$P(E) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ ou ainda } 27,78\%$$

Assim, é mais provável que saia duas caras no lançamento de quatro moedas, do que uma face 6 no lançamento de dois dados.

Os **conteúdos matemáticos** que o aluno deverá **mobilizar** para alcançar a resposta são: multiplicação ou potenciação de números naturais e divisão, fração no sentido de comparação entre parte e todo, principio multiplicativo de contagem, conceito de Probabilidade e noções de porcentagem.

A questão apresenta as seguintes variáveis didáticas:

- *Apresentar duas situações de forma a levar o aluno a compará-las e refletir sobre o conceito de Probabilidade;*
- *Envolver conceitos de probabilidade condicional e raciocínio combinatório, para que o aluno mobilize várias concepções;*
- *Solicitar que o aluno justifique a resposta, pois acreditamos que esta justificação nos permitirá apontar qual a compreensão que os alunos apresentam sobre o conceito de Probabilidade;*

Análise a posteriori

→ *Dupla que realizou a atividade antes e depois do ensino formal*

Assim como na questão anterior, estes alunos não responderam esta questão na atividade realizada antes do ensino formal. Já na atividade realizada após o ensino, percebemos que os alunos tentaram resolver a questão, porém, novamente não conseguem realizar cálculos com probabilidade condicional.

Questão 12:
O que é mais provável: duas caras no lançamento de 4 moedas ou uma face 6 no lançamento de dois dados? Justifique.

R - _____

Figura 67 - Questão 12 - Atividade realizada antes do ensino formal

Questão 12:

O que é mais provável: duas caras no lançamento de 4 moedas ou uma face 6 no lançamento de dois dados? Justifique.

MOEDA .

$$1 = 2L.$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

25%.

DADO

$$\frac{2}{12} = 0,16$$

12

16%

R - O mais provável é duas caras no lançamento de 4 moedas, porque chega a um total de 25% enquanto o dado tem mais possibilidades de cair sobre número.

Figura 68 - Resposta da questão 12 - Atividade realizada após o ensino formal

Observando a figura 68, percebemos que os alunos não compreendem que os eventos solicitados envolvem mais de um lançamento, e que com isso devem recorrer ao princípio multiplicativo e ao raciocínio combinatório para encontrar todas as possibilidades do evento solicitado. Além disto, os alunos consideram a concepção de espaço amostral como sendo o número de opções que possuem em cada um dos objetos, 8 lados (2 de cada moeda, considerando-se 4 moedas) e 12 faces (6 de cada dado), assim, o que podemos inferir, é que os alunos utilizam um invariante para evoluir na questão e não conseguem perceber que devem recorrer ao princípio multiplicativo para encontrar o total de possibilidades e que o evento solicitado está dentro deste total.

→ *Dupla de alunos da 2ª série do Ensino Médio que não realizou a atividade antes do ensino formal*

A linguagem utilizada pelo aluno mostra, conforme podemos ver na figura 69, a seguir, que ele não sabe como solucionar o problema, apenas tenta apresentar uma resposta para a questão. Acreditamos que o aluno utiliza esta linguagem como invariante para evoluir na resolução e não como estrutura de controle.

Questão 12:

O que é mais provável: duas caras no lançamento de 4 moedas ou uma face 6 no lançamento de dois dados? Justifique.

R - *As moedas pois a porcentagem de chance é maior com as moedas, ao total seria 8 faces nas moedas e 12 nos dados*

Figura 69 - Resposta da questão 12 - Alunos 2ª série EM

Assim como a outra dupla, o aluno considera o espaço amostral como a quantidade de opções de cada objeto, sendo 8 lados das quatro moedas e 12 faces dos dois dados, porém o aluno percebe com isto que, como nas moedas o número de opções é menor, a chance de cada um é maior, e conseqüentemente a probabilidade unitária é maior, mas não apresenta nenhuma concepção sobre probabilidade condicional, princípio multiplicativo e raciocínio combinatório.

Além disto, o aluno disse que o problema envolvia o que era mais provável e não Probabilidade, mostrando que o conceito de Probabilidade não está totalmente claro para este aluno.

→ *Alunos da 3ª série do Ensino Médio*

Analisando a atividade dos alunos da terceira série, foi possível perceber que os alunos não têm uma concepção clara de Probabilidade e resolvem a questão intuitivamente, utilizando-se de um invariante para solucionar o problema e não de uma estrutura de controle. A questão apresenta erros e assim como as outras duplas, consideram como espaço amostral a quantidade de opções que os objetos

possuem. Ressaltamos que estes alunos, porém, considerando apenas um dado com 6 faces e não as 12 faces dos dois dados, como as demais duplas.

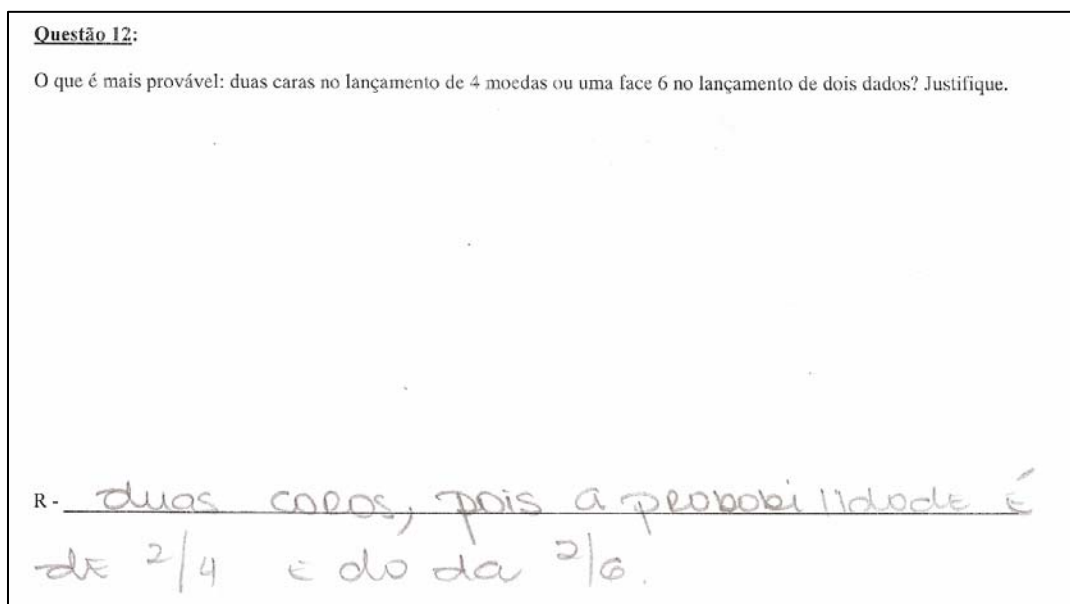


Figura 70 - Resposta da questão 12 - Alunos 3ª série EM

Novamente percebemos que os alunos não conseguem operar com probabilidade condicional e também não associam à questão, o princípio multiplicativo e o pensamento combinatório.

Ao término deste capítulo, acreditamos ter respondido nossa questão de pesquisa, pois como foi possível verificar, apontamos algumas concepções mobilizadas pelos alunos. Ressaltamos que não possível apontar concepções relacionadas com a probabilidade condicional, pois como pudemos ver, os alunos apresentaram muitas dificuldades nas questões que envolviam tal conhecimento. Além disto, o referencial teórico escolhido se mostrou bastante eficaz para apontar as concepções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por pesquisas na área de ensino e aprendizagem de Probabilidade permitiu apontar uma carência de trabalhos nesta área, principalmente sobre quais concepções probabilísticas são construídas ou mobilizadas. Neste sentido, encontramos um único trabalho, Azcárate (1996), que categorizou quatro níveis de concepções probabilísticas e desta forma apontou concepções de professores, porém nenhum trabalho buscou apontar quais concepções probabilísticas são mobilizadas por alunos da Escola Básica.

Ao mesmo tempo em que realizávamos esta busca, a Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo implementava uma Nova Proposta Curricular na rede estadual, que trouxe junto com ela os cadernos do professor, que continham atividades a serem desenvolvidas pelos professores da rede. A aplicação desta nova proposta suscitou discussões por parte dos professores e também por parte dos pesquisadores, que diante do contexto, viram surgir diversas questões e algumas inquietações sobre a aprendizagem baseada nesta proposta.

Diante deste cenário, decidimos realizar uma pesquisa que buscasse apontar quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas pelos estudantes do Ensino Médio que tiveram um ensino baseado nesta nova proposta. Diante deste objetivo, buscamos responder a seguinte questão:

✓ **Quais concepções probabilísticas são mobilizadas por alunos do Ensino Médio, quando submetidos a uma aprendizagem baseada na nova proposta implementada na rede estadual de São Paulo, a partir de 2008?**

Para alcançar este objetivo, optamos por um estudo de caso, nos termos de Yin (2005) e nos fundamentamos na Teoria das Concepções (CK ϕ) de Balacheff (1995). A fundamentação teórica foi completada com a Organização Praxeológica desenvolvida por Chevallard (1996), que permitiu uma análise minuciosa das atividades propostas pelo Caderno do Professor.

Verificamos ao término desta pesquisa, que a metodologia e fundamentação escolhidas proporcionaram condições de responder à questão formulada, pois conseguimos apontar algumas concepções. A estrutura desenvolvida por Balacheff (1995) para caracterização de uma concepção, permitiu apontar nas atividades e diálogos dos alunos os operadores e estrutura de controle que asseguraram a mobilização da concepção. Em outras palavras, foi possível apontar as validações que permitiram a mobilização desta concepção. Dentre as concepções apontadas, destacamos aquelas que respondem nossa questão de pesquisa:

- Probabilidade como Proporcionalidade dentro do conjunto;
- Probabilidade como Comparação entre parte e todo (definição clássica);
- Probabilidade como Unitária de Probabilidade;
- Probabilidade como Porcentagem;
- Probabilidade Complementar;
- Considerar apenas a parte;
- Confusão nos termos Probabilidade e Possibilidade;
- O acaso está associado à sorte;
- Experiência determinística;
- Concepção de aleatoriedade;
- Concepção Intuitiva de Probabilidade;
- Equiprobabilidade;
- Noção de eventos complementares;

Além de poder apontar algumas concepções probabilísticas, foi possível verificar que a nova proposta apresenta uma visão puramente determinista do conceito de Probabilidade, baseada no enfoque clássico de Probabilidade. Desta forma, o ensino de Probabilidade se distancia dos resultados de pesquisas que propõem a realização do Probabilidade por meio da relação entre os enfoques: clássico e frequentista.

Além disto, as atividades propostas não exploram a noção de aleatoriedade, e isto foi comprovado na análise *a posteriori* da aplicação da atividade, pois a maioria dos alunos não soube diferenciar eventos aleatórios de eventos determinísticos. Outro aspecto a ser considerado é o de que os problemas propostos no Caderno do

Professor também não suscitam discussões sobre a ação do acaso, como pode ser comprovado na análise *a posteriori* da atividade aplicada. Do mesmo modo, foi possível verificar que o ensino de Probabilidade baseado na nova proposta não permite uma compreensão clara do conceito de probabilidade condicional.

Analisando o Caderno do Professor, verificamos uma forte concentração de problemas que consideram a Probabilidade como razão entre parte e todo, com eventos simples (sorteio de apenas uma bola, uma peça, etc...) e uma proporção muito grande de problemas destinados ao cálculo de combinação. Conforme apontamos, 19 das 48 páginas que compõem o Caderno do Aluno são compostas por problemas da segunda situação de aprendizagem, que envolvem o conceito de combinação. Com isto, o tempo e o espaço destinados ao cálculo que envolve a probabilidade condicional podem ser considerados insuficientes, além de a proposta relacioná-los ao raciocínio combinatório, o que segundo autores como Coutinho (1994), representam um fator de dificuldades.

Comparando estes resultados com o as exigências que o Exame Nacional do Ensino Médio traz para o conceito de Probabilidade, podemos concluir que os alunos que obtiverem um estudo do conceito de Probabilidade baseado nesta proposta, não estarão preparados para responder às questões destinadas ao cálculo de Probabilidade, pois como foi possível verificar, as questões do ENEM exigem uma Concepção “Normativa de Probabilidade” e os alunos demonstraram possuir uma Concepção “Não Probabilística da Realidade”, já que demonstraram não possuir um reconhecimento claro do azar e dos sucessos aleatórios. Estes apresentaram um raciocínio determinista e suas respostas são baseadas em crenças e critérios de causalidade e/ou expectativa de resultados imediatos.

Além disto, a Concepção “Normativa de Probabilidade” exige que o sujeito faça uma comparação da Probabilidade em diferentes contextos, o que não ocorre com a proposta, como pudemos apontar no item 4.4.2. do quarto capítulo desta pesquisa.

Do mesmo modo, a nova proposta não atende o que é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, pois as atividades desenvolvidas no Caderno do

Professores não permitem ao aluno reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da Probabilidade como meio de prever resultados, quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico e a identificação em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas de modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades, conforme propõem os Parâmetros Curriculares.

Finalizando, acreditamos que nossa pesquisa tenha contribuído para uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem de Probabilidade no Ensino Médio. A presente pesquisa apontou falhas no ensino de Probabilidade baseado na nova Proposta Curricular implementada na rede estadual de São Paulo, pois foi possível comprovar a não contribuição da proposta para a construção de um raciocínio verdadeiramente probabilístico que envolva a consideração do aleatório. Além disso, a pesquisa pode apontar algumas concepções probabilísticas que são mobilizadas pelos alunos.

Diante dos resultados da pesquisa, como sugestão para trabalhos futuros, entendemos que seja interessante, organizar um estudo que possa evidenciar novas concepções probabilísticas mobilizadas por alunos da escola básica, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Fundamental, baseado em diferentes contextos de ensino, não apenas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Pesquisas que pudessem envolver um número maior de alunos participantes também seriam de suma importância para a academia.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba. Editora UFPR, 2007.

BALACHEFF, Nicolas. Conception, connaissance et concept. In: Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble : IMAG. 1995

BATANERO, Carmem. *Didáctica de La probabilidad y de la estadística*. Universidade de Granada, Espanha, 1996.

_____. *Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria*. Investigações sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: um reporte iberoamericano. Universidad de Granada, España (2005)

_____. *Razonamiento Probabilístico em la Vida Cotidiana: Un desafio Educativo*. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4 . CD ROM. España (2006)

BATANERO, Carmen; DÍAZ, Carmen. *Probabilidad, Grado de Creencia y proceso de aprendizaje*. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas, 2007.

BATANERO, Carmen; CONTRERAS, José Miguel; DÍAZ, Carmen; ARTEAGA, Pedro. *Paradojas em la História de la Probabilidad como recurso didáctico*. (XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Granada: Sociedad Thales, 2009.

BAYER, Arno; ECHEVESTE, Simone; ROCHA, Josy ; BITTENCOURT, Hélio Radke. *Probabilidade na Escola*. In: III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas, 2005, v. 1. p. 1-12.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais Matemática/Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília : MEC/SEF, 1998.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília : MEC/SEEMT, 2000.

CARVALHO, Dione Lucchesi; OLIVEIRA, Paulo César. *Quatro Concepções de Probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática: Clássica, Frequentista, Subjetiva e Formal*. 25ª Reunião Anual da Anped, , Caxambu, 2002.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. *Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista*. 1994. 151f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

_____. *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Grenoble, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Université Joseph Fourier.

_____. *Modelagem, simulação e as orientações dos PCN-EF para o ensino de Probabilidade*. In: SEMINÁRIO IASI DE ESTATÍSTICA APLICADA, 9., 2003, Rio de Janeiro, Estatística em Educação e Educação em Estatística, Rio de Janeiro, 2003. CD – ROM.

_____. *Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?* REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.3, p.50-67, UFSC: 2007.

COUTINHO, Clara Pereira; CHAVES, José Henrique. *O estudo de caso em tecnologia educativa em Portugal*. Revista Portuguesa de Educação, año/ vol. 15, número 001, Universidade do Minho, Portugal, pp. 221-243, 2002.

DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. *Probabilidade: Um curso introdutório*. São Paulo: editora da Universidade de São Paulo, 2004.

GOURLART, Amari. *Os discursos sobre os conceitos Probabilísticos para a Escola Básica*. 2007. Dissertação de Mestrado (mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

KATAOKA, Verônica Yumi, RODRIGUES, Adriano e OLIVEIRA, Marcelo Silva. *Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como recurso no ensino de Estatística*. IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, MG, 2007.

LECOUTRE, Marie-Paul. *Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes*. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 6/2-3, 193-213, 1985.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. *A PROBABILIDADE E A ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CURRICULAR*. Dissertação de Mestrado. Unicamp, Campinas, 1998.

MAURY, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes*. Thèse d'Etat. Montpellier: Université de Montpellier.

OLIVEIRA, Paulo Iorque Freitas. *A Estatística e a Probabilidade nos Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado. PUC/RS, Porto Alegre, 2006.

OLIVEIRA, Priscila Glauce. *Ensino-Aprendizagem de Probabilidade e Estatística: Um Panorama das Dissertações do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Puc-SP*. Monografia. Centro Universitário Fundação Santo André, Santo André, 2007.

PONTE, João Pedro. *Estudos de caso em educação matemática*. Grupo de Investigação DIF – Didáctica e Formação Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2006.

ROBERT, Aline. *Ferramentas de análise de conteúdos matemáticos à ensinar no liceu e na universidade (Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l'université)*, publicado em Recherches en didactique des Mathématiques, vol. 18, nº 2, p. 139-190, 1998.

RODRIGUES, Marcelo Rivelino. *A Urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de Probabilidade*. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2007.

ROTUNNO, Sandra Aparecida Martins. *Estatística e Probabilidade: Um Estudo sobre a inserção desses conteúdos no Ensino Fundamental*. 2007. Dissertação de Mestrado. (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

SABO, Ricardo D. *Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio: Um estudo dos conteúdos referentes à combinatória*. Monografia. Centro Universitário Fundação Santo André, Santo André, 2007.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: matemática, ensino médio – 2ª série, 3º bimestre* / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos

SILVA, Cláudia Borim e COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. *O nascimento da Estatística e sua relação com o surgimento da Teoria da Probabilidade*. Revista Integração, 2005.

VERGNAUD, Gerard. *A teoria dos campos conceituais*. In: Brun, Jean (dir.). *Didáctica das matemáticas*. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

WELKER, Márcio. *O Conhecimento Profissional e a Abordagem do Ensino de Probabilidade: Um Estudo de Caso*. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2010.

YIN, Robert K. *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. Trad. Daniel Grassi. 3. ed. Porto alegre : Bookman, 2005

APÊNDICE 1 – ATIVIDADE DIÁGNÓSTICA

Nome: _____ nº: _____ Série: _____
Nome: _____ nº: _____ Série: _____

Pesquisa de Mestrado – Atividade 1

Questão 1: Um probleminha para aquecer...A escolha do carro novo.

Em uma loja de carros usados um cliente percebe que o modelo que ele procura está disponível em 3 cores diferentes: azul, vinho e prata. Existem no pátio da loja 2 veículos azuis, 4 vinho e 1 prata. Gostando das três cores e com a informação que todos os carros são exatamente iguais a menos da cor, decide escolher uma chave ao acaso na mesa do vendedor. Qual a probabilidade de que ele compre um carro prata? Justifique.

R - _____

Agora vamos pensar juntos alguns detalhes.

a) A escolha da chave é feita ao acaso? Justifique.

R - _____

b) Podemos descrever todas as possibilidades de resultados antes da escolha da chave? Se sim, quais? Se não, justifique.

R - _____

c) Se a cada carro vendido pudermos supor que a loja repõe a cor escolhida de forma a manter o estoque sempre o mesmo, podemos repetir o processo de escolha da chave ao acaso tantas vezes quantas desejarmos, sempre nas mesmas condições, ainda que apenas mentalmente? Justifique.

R - _____

Questão 2: Outro probleminha para pensar e resolver... Que sorvete escolher?

Querendo escolher um sorvete, Márcia deve decidir entre 3 tipos de sorvetes à base de frutas e 5 tipos de sorvetes que não são de frutas. Se ela não quer decidir sozinha e vai pegar um sorvete ao acaso dentro da geladeira, qual a probabilidade de que este sorvete seja à base de frutas?

Para ajudar a pensar:

a) *Quantas e quais possibilidades existem para a escolha de um sorvete de frutas?*

R - _____

b) *Quantas e quais possibilidades existem, no total, para a escolha de um sorvete?*

R - _____

c) *Podemos conhecer, antes do ato efetivo da escolha, o sabor do sorvete que será escolhido?*

Agora responda à pergunta inicial:

R - _____

Questão 3 – Experiência Aleatória e Experiência Determinística

a) Vamos supor que na aula de química você está realizando uma experiência que consiste em misturar 3 elementos, A, B e C, para estudar a reação obtida. Podemos dizer que existe ação do acaso no desenrolar dessa experiência? Por quê?

R - _____

b) Qual a diferença entre as duas experiências, a escolha da chave e a experiência química?

R - _____

c) Indique o significado dos termos abaixo antes de continuarmos nosso trabalho:

a) Experiência Aleatória: _____

b) Espaço Amostra: _____

c) Evento: _____)) _____

d) Experiência Determinística: _____

Assim, PROBABILIDADE é um número que expressa o grau de incerteza provocado pela ação do acaso em uma experiência aleatória.

Questão 4 – O lançamento de moedas

Vamos agora fazer uma experiência aleatória e observar os resultados. Para começar, vamos jogar “cara ou coroa”.

a) Quais os resultados possíveis de um lançamento da moeda “honesta” neste jogo? Entendemos por moeda “honesta” aquela na qual as faces “cara” e “coroa” têm a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, as moedas que são perfeitamente simétricas em relação ao seu “centro de massa”.

R - _____

b) Se lançarmos a moeda 50 vezes, quantas “caras” você espera observar?

R - _____

c) Lance uma moeda qualquer 50 vezes e anote os resultados. O que você observa?

1		11		21		31		41	
2		12		22		32		42	
3		13		23		33		43	
4		14		24		34		44	
5		15		25		35		45	
6		16		26		36		46	
7		17		27		37		47	
8		18		28		38		48	
9		19		29		39		49	
10		20		30		40		50	

d) O experimento “lançar uma moeda e observar a face superior após imobilização” pode ser considerado um fenômeno aleatório?

R - _____

e) Lance uma moeda quatro vezes, observe a sequência de caras (k) e coroas (c) e apresente um espaço amostral para esse experimento?

R - _____

f) Lance uma moeda 100 vezes. Qual a probabilidade de ocorrer cara? E qual a probabilidade de ocorrer coroa? Essa probabilidade depende do número de lançamentos? Justifique.

R - _____

Questão 5: Verificando o tipo sanguíneo.

A tabela a seguir mostra o tipo de sangue de um grupo de funcionários de uma empresa.

Tipo do Sangue	Fator RH	
	Positivo	Negativo
O	620	800
A	460	650
B	350	350
AB	530	0

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:

a) do tipo O? R - _____	b) RH positivo (RH+)? R - _____	c) do tipo B e com RH + ? R - _____
d) do tipo AB ou do tipo A? R - _____	e) R - RH + ou RH - ? R - _____	f) do tipo AB com RH - ? R - _____

Questão 7: estudando a qualificação dos funcionários em função do sexo

Um grupo de 1000 pessoas apresenta, de acordo com o sexo e qualificação, a seguinte composição:

	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Escolhemos uma pessoa ao acaso. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade do escolhido ser homem? R - _____	b) Qual a probabilidade do escolhido ser mulher e não especializado? R - _____	c) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado? R - _____
--	---	---

d) Qual a porcentagem de homens especializados?	e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher? (atenção: estamos limitando o conjunto dos pesquisados somente ao grupo “especializado”. Qual a diferença em relação aos outros itens?)
R - _____	R - _____

Questão 8: voltando ao tipo sanguíneo – outro problema.

A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos 4 tipos sanguíneos numa certa comunidade:

Dica: Lembre-se que a probabilidade de qualquer evento deve estar entre 0 e 1.

TIPO	A	B	AB	O
probabilidade de ter o tipo	$P(A) = 0,2$	$P(B) = \underline{\hspace{1cm}}$	$P(AB) = \underline{\hspace{1cm}}$	$P(O) = \underline{\hspace{1cm}}$
probabilidade de não ter o tipo	$P(\bar{A}) = \underline{\hspace{1cm}}$	$P(\bar{B}) = 0,9$	$P(\bar{AB}) = 0,95$	$P(\bar{O}) = \underline{\hspace{1cm}}$

- a) Complete a tabela adequadamente.
b) Qual a probabilidade de um indivíduo ter sangue tipo O?

R - _____

Questão 9: As peças coloridas

Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em uma caixa.

	Circulares	Quadradas	Triangulares	Total
Azul	15	12	6	33
Amarela	5	8	4	17
Vermelha	20	5	10	35
Total	40	25	20	85

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que ocorra uma peça:

a) triangular?	b) amarela quadrangular?	c) não circular?
R - _____	R - _____	R - _____

d) não vermelha? R - _____	e) circular não vermelha? R - _____	f) não circular e não vermelha? R - _____
---	--	--

Questão 10: Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas?

R - _____

Questão 11: Sorteando bolas de uma urna

Em uma caixa há 20 bolas que diferem apenas pela cor. Dessas bolas, $\frac{1}{4}$ são verdes, $\frac{2}{5}$ são amarelas e o grupo restante é formado apenas por bolas da cor rosa. Serão realizados três sorteios com reposição de uma bola a cada vez. Qual é a chance de serem sorteadas:

a) bolas de uma única cor? R - _____	b) uma de cada cor? R - _____	c) Duas verdes e uma amarela? R - _____
---	--	--

d) três rosas? R - _____	e) Duas amarelas e uma rosa? R - _____
---------------------------------	---

Questão 12:

O que é mais provável: duas caras no lançamento de 4 moedas ou uma face 6 no lançamento de dois dados? Justifique.

R - _____

APÊNDICE 2 – CARTA DE APRESENTAÇÃO

São Bernardo do Campo, 15 de setembro de 2009.

Caro(a) diretor (a) da EE Profª Cynira Pires dos Santos

Eu, Priscila Glauce de Oliveira, professora de Matemática nessa escola, venho solicitar sua autorização para realização de uma pesquisa contando com a participação de alguns alunos da escola, no âmbito de nosso projeto de Mestrado, atualmente em desenvolvimento no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, sob orientação da Profa. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho. Esta pesquisa tem como objetivo, discutir o ensino e a aprendizagem do cálculo de probabilidades, particularmente as concepções probabilísticas que são construídas pelos alunos ao longo da escolaridade.

Salientamos que os dados serão mantidos em sigilo e só serão divulgados os resultados gerais da pesquisa, resguardando a identidade dos participantes. O nome da Escola também será mantido em sigilo, salvo concordância ou desejo dos dirigentes.

Após o término da pesquisa, o relatório com os dados será enviado para a escola, apresentado ao diretor, aos alunos e encaminhado aos pais, assim como um exemplar da redação final de nossa dissertação de mestrado (doação para a biblioteca da escola).

Grata pela atenção

Priscila Glauce de Oliveira
(pesquisadora e professora da escola)

APÊNDICE 3 - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

PESQUISA: Probabilidade - Quais concepções são construídas pelos alunos do Ensino Médio a partir do uso de material didático específico?

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, com _____ anos de idade, portador (a) do RG _____, residente à _____, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para participação do meu filho (a) _____, portador do RG _____, como voluntário da pesquisa supra citada, sob responsabilidade da pesquisadora Priscila Glauce de Oliveira, aluna do curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da PUC/SP e professora da E.E. Profª Cynira Pires dos Santos, e da Professora Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, orientadora da pesquisa e docente do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

Assinando o termo de consentimento estou ciente de que:

- 1) O objetivo da pesquisa é aplicar uma atividade sobre probabilidade para verificar quais concepções probabilísticas são construídas pelos alunos do ensino médio;
- 2) A realização desta pesquisa é fundamental para os professores saberem que concepções estão sendo construídas pelos alunos, e dessa forma aprimorarem suas aulas;
- 3) Durante o estudo os alunos realizarão duas atividades, uma antes do ensino formal e uma outra depois, com o objetivo de verificar a evolução dos conhecimentos e concepções e responderão à possíveis entrevistas;
- 4) O áudio do experimento estará sendo gravado, pois acredita-se que algumas concepções serão encontradas nas conversas da dupla, ressaltando que o áudio gravado não será divulgado em hipótese alguma;
- 5) Autorizo que o áudio gravado seja descrito e que se preciso, parte dele seja publicado na pesquisa;
- 6) Assim que terminar a pesquisa terei acesso aos resultados globais do estudo;
- 7) Os dados pessoais dos alunos e seus respectivos responsáveis serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos, incluindo a publicação literatura científicos especializada;
- 8) Poderei entrar em contato com a pesquisadora sempre que julgar necessário pelo e-mail priscila.cynira@gmail.com;
- 9) Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a participação do meu filho (a) referida pesquisa;
- 10) Este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com os pesquisadores responsáveis.

São Bernardo do Campo, ____ de _____ de 2009.

Assinatura do Participante

Assinatura do responsável pela pesquisa

Assinatura da pesquisadora