

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**José Manoel Vitolo**

**Noções introdutórias à ideia de função:  
uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**São Paulo  
2010**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**José Manoel Vitolo**

**Noções introdutórias à ideia de função:  
uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Professor Doutor Armando Traldi Junior**.*

**São Paulo**

**2010**

*Banca Examinadora*

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

*A minha mãe D. Lourdes  
pelas lições de fé e perseverança  
ao longo da minha vida e formação.  
Que DEUS ilumine todos os dias de sua vida.*

## AGRADECIMENTOS

---

---

*À Deus, pelo dom da vida e, por sempre me apresentar caminhos que me levam a continuar na fé.*

*Ao professor Doutor Armando Traldí Junior, orientador e cooperador, que com dedicação, compreendeu minhas limitações, contribuindo significativamente para meu crescimento acadêmico.*

*À profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires pela coordenação do grupo de pesquisa responsável pela inserção de meu trabalho no projeto e pela honra por ter aceitado o convite para participar da banca examinadora. Suas valiosas considerações, muito enriqueceram meu trabalho.*

*Ao prof. Dr. Marcio Antonio da Silva, por ter examinado meu trabalho com tanto carinho e sugerido valiosas contribuições para a elaboração final.*

*À minha esposa e companheira Sidnéa pelo incentivo a ingressar no curso e pela paciência e compreensão.*

*Aos meus filhos, Danilo e Angélica, pelo incentivo e compreensão nos momentos em que estive ausente.*

*Às minhas irmãs, Margarida e Rosa, pelo carinho e apoio nos momentos mais difíceis desta da minha formação.*

*Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pelo carinho e dedicação profissional.*

*Ao secretário Francisco Olímpio da Silva, por sua organização e atenção as nossas solicitações.*

*Aos colegas do curso de mestrado, em especial à Márcia Aparecida Nunes Mesquita, pelo convívio e amizade.*

*Aos professores, alunos e equipe gestora da EE. Prof. Símon Mathias, que carinhosamente permitiram vivenciar com eles o desenvolvimento desta pesquisa.*

*À Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, pelo apoio financeiro.*

*A todos que de uma forma ou de outra colaboraram com meu trabalho e que desde já, peço desculpas por não citar.*

*Muito Obrigado.*

*O Autor*

## RESUMO

---

---

O presente trabalho tem como objetivos: investigar a construção, discussão e avaliação de um planejamento de ensino para a aprendizagem de noções introdutórias à ideia de função, dentro de uma perspectiva construtivista de aprendizagem; investigar como as pesquisas, na área de Educação Matemática, contribuem para a organização do ensino deste tema e analisar a atuação de professores de Matemática, diante de uma proposta de ensino com esta característica. A fundamentação teórica está baseada nas formulações propostas por Simon (1995), sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). O estudo realizado é de natureza qualitativa envolvendo dois professores de Matemática de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo, e suas atuações junto a 77 alunos distribuídos em duas turmas que frequentam o primeiro ano do ensino médio. Os dados foram coletados por entrevistas semiestruturadas, questionário e observações. Embora a THA, tendo sido elaborada com tarefas que envolvam resolução de problemas, uso de tecnologia, abordagens interdisciplinares, aplicações em situações do cotidiano e em outras áreas do conhecimento e sejam potencialmente ricas, no sentido de produzir situações de aprendizagem, sem a participação constante do professor na (re)organização do planejamento, a THA por si só não garante uma aprendizagem sob perspectivas construtivistas. Ainda em relação ao professor, cabe ressaltar que o principal desafio é aproximá-lo das pesquisas acadêmicas e que continuem sempre em processo de formação.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Noções de Função. Perspectiva Construtivista. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

## ABSTRACT

---

---

This work has as its intents: to investigate the construction, discussion and evaluation of a teaching planning that gives an introductory notion to the idea of function, inside a constructivist learning perspective; to investigate how the researches in the Mathematics Education field contribute to the teaching organization and to analyze Mathematics teachers' performance before a teaching proposal with this characteristic. The theoretic foundation is based on the formula proposed by Simon (1995), about Hypothetical Learning Trajectory (HLT). The study achieved has qualitative aspect and had the involvement of two Mathematics teachers of a public school, in the state of Sao Paulo, and their work with seventy-seven students shared in two groups, all of them in their first year of High School. The data came through interviews, questionnaires and observations. Although the HLT has been worked out with tasks that include problems resolution, technology, interdisciplinary approaches and application in day-to-day situations, the HLT *per se* does not guarantee learning under a constructivist perspective, without the constant support of the teacher in the planning (re)organization. About the teachers, it is important emphasizing that the main challenge is to approach them of the academic researches and keep them in continuous learning process.

**Keywords:** Mathematics Education. Notions of function. Constructivist perspective. Hypothetical Learning Trajectory.

## SUMÁRIO

---

---

<b>APRESENTAÇÃO DA PESQUISA</b> .....	11
I Introdução .....	11
II Motivações e relevância do Projeto de Pesquisa .....	12
III Relevância do Tema .....	17
IV Questões de Pesquisa .....	18
V Procedimentos Metodológicos .....	19
VI Desenvolvimento da Pesquisa .....	20
VII Cenário da Pesquisa .....	21
VIII Estrutura do Trabalho .....	23
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	25
<b>Aportes teóricos e revisão bibliográfica</b> .....	25
1.1 Aporte teórico .....	25
1.2 Revisão Bibliográfica .....	42
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	55
<b>A construção da primeira versão da THA</b> .....	55
2.1 Objetivos, do professor pesquisador, relativamente à aprendizagem que pretende que seus alunos construam sobre o assunto .....	55
2.2 Hipóteses, do professor pesquisador, sobre o processo de aprendizagem dos alunos .....	56
2.3 Elaboração do plano do professor pesquisador para atividades de aprendizagem .....	58
2.4 Análise da primeira versão da THA pelos professores colaboradores, com base em sua avaliação do conhecimento .....	78

<b>CAPÍTULO 3</b> .....	81
<b>As THA em sala de aula</b> .....	81
3.1 Relatórios sobre as aulas em que a THA se desenvolveram .....	81
3.2 Análise sobre as aulas da THA .....	82
3.2.1 Papel assumido pelo professor e alunos durante a realização do trabalho .....	82
3.2.2 Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos .....	84
3.2.3 Interesse despertado por situações contextualizadas e possíveis influências na aprendizagem .....	85
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	87
<b>Novos conhecimentos adquiridos após a THA</b> .....	87
4.1 Os novos conhecimentos construídos após a THA .....	87
4.1.1 Os novos conhecimentos do professor pesquisador construídos após a THA .....	87
4.1.2 Os novos conhecimentos dos professores colaboradores .....	89
4.2 As sugestões de modificação na THA .....	90
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	91
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	95
<b>ANEXOS</b> .....	101
Anexo 1. Questionário do professor .....	101
Anexo 2. Relatório para acompanhamento do desenvolvimento da trajetória .....	103
Anexo 3. THA Modificada .....	104

# APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

---

---

## I Introdução

Como professor da Rede Pública Estadual desde 1995, algumas inquietações referentes ao processo ensino-aprendizagem da Matemática sempre me acompanhavam.

A partir dos cursos de capacitação oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, e, especialmente após o curso de especialização oferecido por esta Universidade, em parceria com a Secretaria de Educação, muitas dúvidas foram dirimidas. Porém julguei ainda serem insuficientes minha formação e percepções, decidindo ingressar no curso de Mestrado.

Ao ingressar no curso, elegendo a formação de professores e o desenvolvimento curricular, pela complexidade no tratamento de ambos, procurei o grupo dedicado à linha de pesquisa “A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores” do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

O grupo de pesquisa intitulado “Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores”, que tem como coordenadores a Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires e o Professor Doutor Armando Traldi Junior, sendo este o orientador do presente trabalho.

O grupo está desenvolvendo o projeto de pesquisa denominado “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de

inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio” que tem como motivação a necessidade de desenvolver propostas de apoio à inovação curricular na área de Matemática para o Ensino Médio.

O propósito é o de construir, discutir e avaliar, para diferentes expectativas de aprendizagem do ensino médio, trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), que consistem de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas que poderão ser usadas para promover a aprendizagem dos estudantes e do levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, segundo Simon (1995). Essas THA procuram envolver resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações de conceitos e procedimentos matemáticos à situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento, conforme prescrições curriculares atuais.

Nossa dissertação focaliza as noções introdutórias à ideia de função, tema que tem presença a partir do terceiro ciclo do ensino fundamental com maior aprofundamento no primeiro ano do ensino médio.

## **II Motivações e relevância do Projeto de Pesquisa**

Segundo Pires (2009b), nos últimos anos, a discussão curricular no Brasil foi impulsionada especialmente pelo processo desencadeado pelo Conselho Nacional de Educação e pelo Ministério da Educação, de proposição de Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM). Imerso em muitas polêmicas, esse processo revelou inúmeras divergências e dúvidas referentes à organização e à implementação de currículos em nosso país.

A autora destaca:

<sup>1</sup>Uma das questões em debate refere-se à própria competência para definição de currículos. Embora não seja consensual, há uma tendência a se considerar a importância da participação ampla de setores da sociedade na discussão curricular. Também se concebe como tarefa dos diferentes níveis do sistema educacional

---

<sup>1</sup> PIRES (2008) em comunicação verbal, durante discussão teórica com o grupo de pesquisa em Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

– união, estados, municípios – a busca de acordos sobre o que ensinar às novas gerações. Em qualquer circunstância, uma questão sempre presente é a seguinte: qual o papel e qual a participação dos professores no processo de organização e desenvolvimento curricular?

Buscando respostas a essa questão, Pires comenta que elas estão localizadas, muitas vezes, em pólos totalmente opostos:

<sup>2</sup>(...) de um lado há uma defesa de que cabe a cada professor, individualmente, em sua sala de aula, definir o que, porque e como ensinar e avaliar; de outro, há uma concepção de que o professor deve ser tão somente, aplicador de atividades elaboradas por supostos especialistas e que chegam às escolas por meio de pacotes apostilados.

E ressalta que há décadas, essa questão vem sendo internacionalmente discutida. Em seu texto Keitel e Kilpatrick evidenciam um ponto bastante importante sobre a participação dos professores, quando fazem referência à “currículos planejados” e “currículos implementados”:

Uma tentativa para lidar com a complexidade curricular foi a de distinguir entre o currículo planejado e o currículo implementado. Uma distinção entre o currículo planejado (tal como está representado em documentos oficiais, manuais, ou em ambos) e o currículo implementado (normalmente medido através de questionários aos professores) foi feita no Second International Mathematics Study – SIMS (Travers e Westbury, 1989). A distinção já tinha sido antecipada no First International Mathematics Study – FIMS (Husén, 1967) – pela utilização de classificações dos professores das oportunidades de aprendizagem dos conteúdos relativos a cada item testado. Apesar dos termos planejado e implementado transportarem a infeliz conotação de que as únicas intenções que contam são as oficiais, e de que os professores não passam de meros executores que implantam no terreno planos de outras pessoas, esta distinção foi útil, na medida em que ajudou a distinguir o planejado do que é a realidade curricular. (KEITEL & KILPATRICK, 1989, apud PIRES, 2009).

No âmbito da pesquisa, Pires (2009b) considera que são poucas as fontes teóricas no campo específico da organização e desenvolvimento curricular em Matemática.

---

<sup>2</sup> PIRES (2008) em comunicação verbal, durante discussão teórica com o grupo de pesquisa em Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Nas investigações que conduzimos no Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática da PUC/SP, inicialmente nos apoiamos em trabalhos como os de Bishop (1991) e Doll (1997), que apresentam alguns princípios orientadores e que podem sustentar a construção de critérios de avaliação, mas que ainda estão pouco discutidos entre nós.

A autora prossegue comentando que na área de Educação Matemática, parte bastante significativa das pesquisas que foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas situam-se no campo da Didática da Matemática, e se inscrevem no campo de influência das abordagens construtivistas, colocando o foco na construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes. Porém, os resultados dessas pesquisas não têm influência direta na elaboração ou re-significação de propostas de ensino compatíveis com o que indicam as pesquisas a respeito das formas de aprendizagem.

Também considera que é bastante frequente a explicitação de certo desconforto na discussão sobre currículo entendido como planificação de uma trajetória a ser realizada por alunos, seja ao longo da educação básica ou do ensino superior, desconforto causado por uma ideia bastante comum de que numa perspectiva construtivista, esse percurso deva ser ditado por interesses dos alunos e sem definições prévias de conteúdos.

Pires retoma que alguns artigos traduzidos pelo grupo<sup>3</sup>, em especial o artigo de Simon (1995), estimularam as reflexões do grupo e forneceram subsídios teóricos para o desenvolvimento da pesquisa.

Nos estudos realizados coletivamente pelo grupo de pesquisa, as prescrições curriculares oficiais tiveram lugar de destaque e a finalidade era a de captar o que os documentos oficiais sugerem para a organização de currículos para essa etapa da escolaridade.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – DCNEM<sup>4</sup> propõem que o currículo para o Ensino Médio seja organizado a partir de três

---

<sup>3</sup> Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. Texto traduzido pelo grupo. Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.

<sup>4</sup> Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, 1998.

áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias. No entanto essa proposição, potencialmente rica no sentido de apontar para as conexões entre diferentes campos do conhecimento, com destaque para a abordagem interdisciplinar, precisa ser implementada com muita clareza para que a especificidade e a contribuição de cada um desses campos não se perca.

Outra ideia central é a da importância de exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e/ou da modelagem. Esta perspectiva de trabalho, embora tenha o apoio teórico e uma gama considerável de experiências é certamente muito "desconhecida" dos professores, que tiveram uma formação exatamente na direção oposta. É, portanto, aprofundar a discussão sobre o que significa "contextualizar" em Matemática, para que não caiamos na mera simplificação do "fazer parte do cotidiano ou da realidade". Há outras formas de contextualização igualmente ricas e importantes, como as que são feitas a partir da própria história da matemática, de sua aplicação em outras áreas e as internas à própria Matemática, como as que relacionam aspectos numéricos, geométricos, algébricos, entre outros, de um mesmo conceito.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM<sup>5</sup> enfatizam que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo (que ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo) ou instrumental (ferramenta que auxilia em todas as atividades humanas), mas que ela também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Nesse sentido, destaca a importância do aluno perceber que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Defendem que cabe apresentar ao aluno o conhecimento matemático de modo a que ele possa buscar novas informações e instrumentos necessários para que seja possível continuar aprendendo. Essas diferentes funções da Matemática devem ser discutidas e estimuladas de modo que sejam equilibradamente trabalhadas.

---

<sup>5</sup> Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1999.

Além da seleção de conteúdos é fundamental discutir a sua organização. Tradicionalmente, a organização é linear, guiada por pré-requisitos internos que dificultam uma abordagem interdisciplinar. Além disso, há uma tradição de organização em que um dado tema é visto uma única vez, extensivamente. As propostas de organização curricular em espiral ou rede, já razoavelmente incorporadas inclusive pelos livros didáticos, ainda não estão presentes nas propostas para o Ensino Médio. Por esse motivo, essa é uma temática interessante e desafiadora.

Outros aspectos que merecem atenção são os chamados conteúdos atitudinais. Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes é fundamental para que o aluno aprenda a aprender. Omitir ou descuidar do trabalho com esse aspecto da formação pode impedir a aprendizagem inclusive da própria Matemática. Dentre esses valores e atitudes, podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas idéias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho. A questão dos professores é: como fazer isso?

Nas DCNEM defende-se a ideia de que o Ensino Médio não deve ter como objetivo principal a preparação dos exames vestibulares. Concebem a aprendizagem como construção de competências em torno do conhecimento. Tal aspecto é sempre questionado pelos professores que identificam um descompasso entre essa proposta curricular e a sistemática de acesso ao ensino superior. Assim, é importante discutir esse impasse, que tem implicações tanto para a seleção de objetivos e conteúdos, como para a avaliação de desempenho dos alunos do Ensino Médio.

Além da discussão sobre os documentos oficiais, outra reflexão importante realizada no grupo foi a referente ao processo de implementação de inovações curriculares, particularmente no caso do Ensino Médio e à chamada “resistência” dos professores às pretendidas “inovações curriculares”.

Uma das questões relacionadas a esse problema pode ser a forma muito burocrática pela qual é conduzido o processo de planejamento na escola, com o preenchimento de formulário em que devem ser descritos objetivos, conteúdos, metodologia e avaliação, que na maior parte das vezes pouca utilidade tem para o professor.

Em função dessas constatações, justifica-se a proposição de projetos de pesquisa que envolva professores pesquisadores e professores que estão atuando na educação básica, no nosso caso, no Ensino Médio, com vistas a vivenciar situações que indiquem possibilidades de implementação de uma proposta curricular na prática, mais condizente com pressupostos curriculares inovadores.

### **III Relevância do Tema**

Como já mencionamos anteriormente, nosso trabalho focaliza a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem que busca contemplar noções introdutórias à ideia de função.

Pela nossa experiência sabemos que esse assunto começa a ser abordado no terceiro do Ensino Fundamental, com maior destaque e aprofundamento no primeiro ano do Ensino Médio, etapa esta foco do nosso trabalho, em propostas que priorizam a apresentação de definições, propriedades, roteiro de construção de gráficos e exercícios.

Tal fato nos desafia a trabalhar na perspectiva de discutir situações contextualizadas e interdisciplinares, com uso de resolução de problemas que tenham a intenção de que o aluno possa construir seu conhecimento com base em situações do cotidiano, em outras áreas de conhecimento e internas à própria matemática.

Considerando a aprendizagem como um processo de construção de significados e levando em conta que a presença da Matemática na escola é consequência de sua presença na sociedade, optamos por iniciar, pela

exploração dos conceitos de grandezas direta ou inversamente proporcionais, e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais.

Da mesma forma, expressar algebricamente a relação entre duas grandezas e a dependência de uma variável em relação à outra, através da discussão das regularidades presentes em diferentes situações, e pela observação de aspectos que permanecem fixos, dentre outros que variam. A compreensão de que alguns fatores se modificam regularmente, quando existe a variação em outros fatores, para que construam generalizações; reconheçam e saibam fazer uso da representação de número generalizado ou de incógnitas e variáveis, pode facilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Neste sentido, a interpretação que quando duas grandezas mantêm uma relação de proporcionalidade direta, apresentam-se como uma função polinomial do 1º. Grau, torna-se oportuno na discussão de nosso trabalho.

Decorrente da explanação acima, a representação gráfica desta função e vice-versa, são tópicos que procuraremos contemplar entre os objetivos da nossa THA.

#### **IV Questões de Pesquisa**

Assim, buscaremos responder às seguintes questões:

- Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino de noções introdutórias à ideia de função?
- Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino sobre noções introdutórias à ideia de função que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos?
- Como é a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino de noções introdutórias à ideia de função, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

## V Procedimentos metodológicos

No intuito de atingir o nosso objetivo de pesquisa – verificar quais as contribuições e dificuldades dos professores ao analisarem a possibilidade de compatibilizar perspectivas de aprendizagem com a planificação de ensino relacionada às noções introdutórias à ideia de função – e buscando responder as questões propostas, passamos a descrever a fundamentação metodológica em que nos embasamos e os procedimentos metodológicos para a coleta de dados.

Pelas características de nossa pesquisa podemos defini-la, de acordo com Ludke e André (1986), como de natureza qualitativa, pois o interesse é descrever e interpretar os fenômenos educativos durante o processo de elaboração e desenvolvimento da THA.

Os dados coletados são predominantemente descritivos: foram elaborados relatórios das aulas e discussões com os professores, que serão analisados no terceiro capítulo deste trabalho.

O principal interesse da investigação não é o de mostrar se a THA elaborada funciona, mas sim verificar qual a atuação do professor colaborador e sua interação com os alunos, tendo como base uma THA elaborada por um pesquisador e que contemple alterações e/ou sugestões discutidas com os professores colaboradores.

A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo: não procuraremos buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos.

Para a coleta de dados utilizamos os seguintes instrumentos:

- questionário distribuído aos professores colaboradores com objetivo de colher informações a respeito da formação acadêmica, tempo de magistério, cursos que frequentou (ou frequenta), a maneira como entendem o processo de ensino e aprendizagem, envolvendo noções introdutória à ideia de função.

- observações durante as intervenções dos professores: na leitura da THA; no decorrer do desenvolvimento da THA realizadas na sala de aula e nas interações professor/aluno. Como elemento norteador das observações, sintetizamos algumas categorias constantes do anexo 2 deste trabalho.
- entrevistas com os professores colaboradores com objetivo de complementar, de maneira informal, dados em relação à prática pedagógica e colhidos durante as observações, de modo a capturar suas ideias e concepções.
- análise de protocolo dos alunos com objetivo de verificar o grau de entendimento da atividade proposta, bem como identificar possíveis dificuldades na resolução de modo a subsidiar a elaboração da nova THA.

## **VI Desenvolvimento da Pesquisa**

O desenvolvimento da presente pesquisa foi organizado em três fases:

Fase 1 – preparação para o estudo: encontros e discussões no grupo de pesquisa, revisão bibliográfica referente a pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de noções introdutórias à ideia de função.

Fase 2 – elaboração da trajetória hipotética de aprendizagem pelo pesquisador, ou seja, definição de objetivos de aprendizagem, indicação das hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos e escolha das atividades; discussão da trajetória hipotética de aprendizagem no grupo de pesquisa; entrevista e apresentação da trajetória hipotética de aprendizagem com os dois professores colaboradores que desenvolveram as atividades; avaliação da THA, pelos professores colaboradores, com base em seu conhecimento docente.

Fase 3 – desenvolvimento da THA em duas salas de aula pelos professores colaboradores, com observação direta do pesquisador. Entrevista com os dois professores, buscando a avaliação do desenvolvimento da THA, na interação com os alunos. Discussão com os dois professores a respeito de possíveis mudanças na THA; finalização da pesquisa; escrita da dissertação e considerações finais.

A pedido da coordenação pedagógica da escola, o projeto foi desenvolvido em conformidade com o calendário escolar e com o planejamento pedagógico desenvolvido pela comunidade escolar no início do ano letivo. Dessa forma iniciamos o desenvolvimento das THAs no bimestre em que o tema seria abordado junto os demais alunos do primeiro ano do ensino médio.

Nesse contexto, a pesquisa foi realizada com dois professores colaboradores da rede estadual de São Paulo em uma escola de Ensino Fundamental II e Ensino Médio. As THAs foram desenvolvidas e acompanhadas pelo pesquisador em 14 aulas de cinquenta minutos, ministradas por cada professor colaborador junto às suas turmas do primeiro ano do Ensino Médio, no período matutino.

## **VII Cenário da Pesquisa**

A seguir descrevemos o cenário do projeto de pesquisa, caracterizando a escola, professores e alunos.

### **Caracterização da escola**

O desenvolvimento das THAs ocorreu em uma escola da rede estadual de ensino localizada na zona leste da Capital Paulista. A escola tem área construída de 2500 m<sup>2</sup>, distribuídos em 16 salas de aula, um laboratório para ciências físicas, químicas e biológicas, sala de vídeo, sala de informática, biblioteca, pátio coberto, cozinha e refeitório, além de contar com duas quadras poliesportivas.

Possui aproximadamente 2200 alunos, distribuídos em três turnos: matutino com 16 salas de Ensino Médio; Vespertino que conta com 16 salas para o Ensino Fundamental II (3º. E 4º. Ciclos); e mais 16 salas no período noturno destinadas ao Ensino Médio.

### **Caracterização dos professores colaboradores**

Na busca pela compreensão da perspectiva dos professores colaboradores, suas crenças e concepções, bem como sua prática docente e os conhecimentos pedagógicos, elaboramos um questionário<sup>6</sup> contendo algumas informações acadêmicas e profissionais. A partir desses dados elaboramos uma síntese das respostas dadas por esses professores. Identificados como Paulo<sup>7</sup> e Carla<sup>8</sup>.

#### **O professor Paulo**

O professor Paulo, 29, tem cinco anos de experiência, três deles dedicados a ministrar aulas exclusivamente no Ensino Fundamental. Possui licenciatura em Matemática e está na Rede Pública Estadual há 2 anos.

Ao ser questionado sobre sua metodologia e estratégias, afirma que ao iniciar um conteúdo procura facilitar o desenvolvimento de competências para a solução, utilizando revistas, livros diversos, áudio e vídeo.

#### **A professora Carla**

A professora Carla, 26, tem quatro anos no magistério. Sua graduação é plena em matemática, alega que ainda não teve oportunidade de participar de cursos de extensão nem mesmo das capacitações oferecida pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo. Comentando sobre sua participação no presente trabalho, menciona que, embora considere que não tenha grande

---

<sup>6</sup> Anexo 1.

<sup>7</sup> Nome fictício.

<sup>8</sup> Nome fictício.

experiência, gosta de enfrentar novos desafios, considerando-o uma forma de aprimorar sua prática e conhecimento.

Como metodologia a professora baseia-se em aulas expositivas com apresentação dos conceitos matemáticos, seguidos de exemplos e exercícios para abordá-los, nos dois últimos anos apóia-se quase que exclusivamente no material fornecido pela Secretaria Estadual de Educação.

Possui algum conhecimento a respeito de software que trata de construção de gráficos, mas nunca se sentiu à vontade para ministrar aulas utilizando-os por sua pouca experiência e das dificuldades internas da escola para uma aula no laboratório de informática.

### **Caracterização dos alunos envolvidos na investigação**

Realizamos a pesquisa de campo com duas turmas da 1ª série do Ensino Médio em uma escola localizada na zona leste da Capital Paulista, da rede Estadual de Ensino. Não estabelecemos nenhum tipo de critério para a escolha das turmas, portanto cada professor escolheu uma turma em que mais se identificava, sendo que a 1ª série A é a turma da professora Carla e a 1ª série B a turma do professor Paulo. As atividades foram realizadas em encontros dos professores com suas turmas de acordo com o horário escolar. As aulas foram ministradas no período matutino com duração de 50 minutos para cada aula.

A turma da 1ª série A é composta por 38 alunos, sendo 20 meninas e 18 meninos, todos na faixa entre 14 e 15 anos de idade.

A turma da 1ª série B é composta por 39 alunos, sendo 22 meninas e 17 meninos, todos também entre 14 e 15 anos de idade.

## **VIII Estrutura do trabalho**

Organizamos nosso trabalho em cinco capítulos.

No Capítulo 1, inicialmente descreveremos as formulações de Simon (1995) que constituem o referencial teórico de nosso trabalho. Na sequência, apresentamos uma revisão bibliográfica referente a pesquisas sobre ensino e aprendizagem de noções introdutórias à ideia de função e sobre o tratamento do assunto em documentos curriculares.

No Capítulo 2, descrevemos o processo de construção da primeira versão da THA, em que selecionamos objetivos de aprendizagem, indicamos hipóteses sobre aprendizagem dos alunos e escolhemos as tarefas que nos pareciam adequadas. Em seguida, apresentamos a análise da primeira versão da THA realizada por dois professores de escolas de ensino médio e as alterações por eles sugeridas.

No Capítulo 3, fazemos o relato do desenvolvimento da THA em sala de aula, e, que atuamos como observador e também apresentaremos alguns resultados de avaliação do conhecimento dos estudantes após o desenvolvimento da THA.

No Capítulo 4, buscamos identificar como (e se) esse trabalho de realização da THA contribuiu para a constituição de novos conhecimentos tanto do professor pesquisador quanto dos professores que as desenvolveram com seus alunos e indicaremos as modificações que faríamos na THA, dando continuidade ao ciclo descrito por Simon.

Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as considerações finais do estudo realizado.

### **APORTES TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

No artigo “Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon”, Pires (2009) discute vários pontos das proposições feitas por esse autor e que serviram de base para os trabalhos realizados no âmbito do projeto de pesquisa.

De acordo com Pires, para esse autor, o construtivismo epistemológico tem sido fonte de pesquisas no ensino da Matemática e tem oferecido bases para reformas na Educação Matemática. Ele considera, porém, que embora o construtivismo tenha potencialidade para sustentar mudanças no ensino da Matemática, é necessário formular modelos de ensino baseados no construtivismo. Com tal preocupação, Simon propõe que se pense num ciclo do ensino da matemática, em que inclui a ideia de Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA.

Na sequência, apresentamos as ideias de Simon, apoiando-nos no artigo ao qual fizemos referência.

#### **1.1 Aporte teórico**

Simon discute, em seu artigo, a tensão criativa entre a meta dos professores para o ensino e o compromisso de ser sensível ao pensamento

matemático dos seus alunos, além disso, inclui reflexões de outros temas, a saber, como:

- As atividades de ensino sendo estruturadas e implementadas tendo como ponto central à consideração do pensamento/entendimento dos alunos;
- O planejamento do ensino sendo gerado a partir de uma trajetória hipotética de aprendizagem dos alunos;
- A formação continuada dos professores apoiada em reflexões sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem de seus alunos, num processo de permanente elaboração.

O autor destaca que a perspectiva construtivista no ensino tem sido foco para pesquisas na área da Educação Matemática e, tem contribuído para inovações nas reformas do ensino da Matemática. Para ele, embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa da reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática” baseada na visão construtivista de ensino é um desafio considerável, em que a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar.

Pires aponta que na opinião de Simon:

O construtivismo pode contribuir com importantes caminhos para o ensino da Matemática em sala de aula, embora não estipule um modelo particular (2009, p. 150).

Além disso, Pires faz referência à explicação de Simon para o termo “Pedagogia Matemática”:

Ao referir-se à “Pedagogia da Matemática”, Simon explica que o termo “Pedagogia” tem a intenção de significar todas as contribuições para a educação matemática na sala de aula. Dessa maneira, Simon inclui não apenas um trabalho multifacetado do professor, mas também o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino. O foco específico de seu trabalho está na tomada de decisão a respeito de conteúdos matemáticos e nas tarefas de ensino da Matemática em sala de aula (2009, p. 150).

Segundo Pires, para expor sua proposta de Ciclo de Ensino de Matemática e de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, Simon busca situar sua posição em relação às perspectivas construtivistas e as relações entre construtivismo e pedagogia da Matemática que resumimos nos dois próximos itens.

### **Recuperando aspectos da perspectiva construtivista**

Simon destaca inicialmente que o interesse na difusão do construtivismo entre teóricos da Educação Matemática, pesquisadores e praticantes tem moldado o discurso para diferentes pretensões do construtivismo:

De expressões como “Construtivismo Radical” e “Construtivismo Social” derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Conseqüentemente, parece importante uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada. (SIMON 1995, p. 4, apud PIRES, 2009, p. 150).

Ele retoma o fato de que, na perspectiva construtivista, nós seres humanos, preferivelmente construímos nosso conhecimento de mundo, por meio de nossas percepções e experiências, mediadas pelo nosso conhecimento prévio. E prossegue:

Nosso interesse está no trabalho (adaptação com a nossa experiência de mundo). Para esclarecer essa concepção de trabalho precisamos fazer uma extensão: construir nosso senso de percepção ou dados, construir um prognóstico adequado para resolver um problema ou para realizar uma meta. (SIMON 1995, apud PIRES, 2009, p. 151).

Para o autor, a maior parte das informações que dividem os recentes debates epistemológicos sobre o conhecimento são, fundamentalmente, as que o identificam como um processo social e as que o tomam como um processo cognitivo.

Simon declara que sua posição evita qualquer extremo e busca construir um trabalho teórico baseado em trabalhos que cita: Blumer (1969), Bauersfeld (1988), Cobb, Yackel, e Wood (1989) e Von Glasersfeld (1991).

Ao referir-se aos trabalhos de Cobb (1989), Simon destaca que para esse autor a coordenação das duas perspectivas construtivistas é necessária para entender a aprendizagem em sala de aula. Ela não está somente no social ou na dimensão cognitiva, mas preferencialmente, na combinação da análise dessas duas perspectivas.

Simon formula uma analogia à luz das teorias psíquicas:

Nenhuma teoria em particular acena um enfoque suficiente para caracterizar dados psíquicos. Porém cada teoria tem construído uma contribuição significativa para basear teoricamente a pesquisa; considerando ser um enfoque particular e considerando ser um enfoque que acena também para cada teoria em particular, coordena a descoberta que se origina de cada perspectiva moldada para avanços neste campo. (SIMON, 1995, apud PIRES, 2009, p. 152).

Pires aponta ainda que para Simon é proveitoso ter uma visão da Matemática como uma atividade cognitiva apreendida por processos culturais e sociais e como fenômenos sociais e culturais constituídos por uma comunidade altamente conscientizada.

De acordo com Pires, a organização do desenvolvimento do conhecimento em sala de aula parece uma análise particular coordenada, baseada nas perspectivas cognitivas e sociológicas.

A análise psicológica da aprendizagem da Matemática em sala de aula foca-se no conhecimento individual sobre a Matemática, seu entendimento para o outro, e seu senso de funcionamento na aula de Matemática. A análise sociológica toma como ponto de partida o conhecimento e as normas sociais da sala de aula. As “normas sociais” referem-se àquilo que está entendido como a construção do conhecimento com a efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Incluem também expectativas que os membros da comunidade têm sobre os professores e os alunos, conceitos dos meios utilizados para a elaboração da aula de matemática e o caminho utilizado para validar a aula de matemática (PIRES, 2009, p. 152)

### **Construtivismo e Pedagogia da Matemática**

Para Simon, a aprendizagem é entendida como um processo de construção individual e social mediados por professores, com a concepção de um trabalho estruturado no qual se entende a aprendizagem dos alunos.

Compreender o desenvolvimento da aprendizagem é extremamente útil e tal fato leva à questão de como o construtivismo poderia contribuir para a reconstrução de uma Pedagogia da Matemática.

Simon, novamente referindo-se aos autores Wood, Cobb e Yackel para os quais os professores devem ter como finalidade a construção de uma prática que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem matemática, construindo e (re)construindo os meios para tal.

Simon destaca mais uma vez que ao citar o construtivismo como uma teoria epistemológica pondera que ela não define uma orientação particular de ensino. O desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado. Afirma que o construtivismo epistemológico não determina a apropriação ou inapropriação de estratégias de ensino.

Para Bauersfeld (1988), citado por Simon (apud PIRES, 2009), a construção cognitiva, de natureza essencialmente humana, e a processual emergente dos temas, regularidades e normas entrecruzando Matemática, interação social, para trazer a cognição e o social juntos, não podem ser construídas com simples sumários prescritivos de ensino. Assim, não há referências a respeito da operacionalização de uma perspectiva construtivista social, sem contradizê-la. Comumente é usada a denominação “ensino construtivista”. No entanto, o construtivismo não oferece uma noção de como resolver os problemas de ensino ou de como efetivá-los.

Simon propõe: Para uma perspectiva teórica a questão que precisa de atenção é a seguinte: “Em que o construtivismo contribui para o desenvolvimento de um proveitoso trabalho teórico estruturado pela Pedagogia da Matemática?”.

Simon conta que em sua experiência com alunos perguntava-se: como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos? E conclui que, nessas experiências com alunos ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades e que conduzem à formulação da ideia de trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

## **Trajétoria(s) hipotética(s) de aprendizagem, segundo Simon**

Simon defende a ideia de que a consideração do objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, parte chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática.

No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, além de suas hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm como, por exemplo: teorias de ensino sobre Matemática, representações matemáticas, materiais didáticos e atividades, e também teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto, saberes esses derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente.

Durante o desenvolvimento de atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado geralmente deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se nas atividades planejadas, os professores deveriam “comunicar-se” com as observações dos alunos, nas quais eles formatam novas ideias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de aprendizagem envolve resultados da interação entre o professor e os alunos e como eles se engajam em um conteúdo matemático.

Simon refere-se a um comentário de Steffe (1990): um professor pode propor uma tarefa; contudo, como os alunos constroem suas tarefas e suas experiências é que vai determinar seu potencial de aprendizagem. Assim por exemplo, se um aluno dá uma resposta a um problema elaborado pelo professor e, no entendimento do professor não foi uma compreensão adequada sobre conceitos ou procedimentos envolvidos, isso deve resultar num novo objetivo de ensino sobre o assunto. Este objetivo, temporariamente, substitui o original.

Simon afirma que, em suas experiências, a discussão na sala de aula o impulsionou a reexaminar diversos conhecimentos para favorecer a elaboração do seu “mapa conceitual” e destaca que o uso do termo “mapa” neste contexto é para enfatizar que o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz

como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem.

Ressalta que o que foi observando em seus alunos mudou suas perspectivas sobre o conhecimento dos alunos e sua perspectiva na concepção Matemática envolvida (seu mapa interno). Esta reorganização de perspectivas contribuiu para a modificação de seus objetivos, planos para atividades de ensino / aprendizagem que havia elaborado anteriormente.

### O Ciclo de Ensino de Matemática, segundo Simon

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon contribuiu para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino Matemático (Figura 1), como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, pensamento, tomada de atitudes.

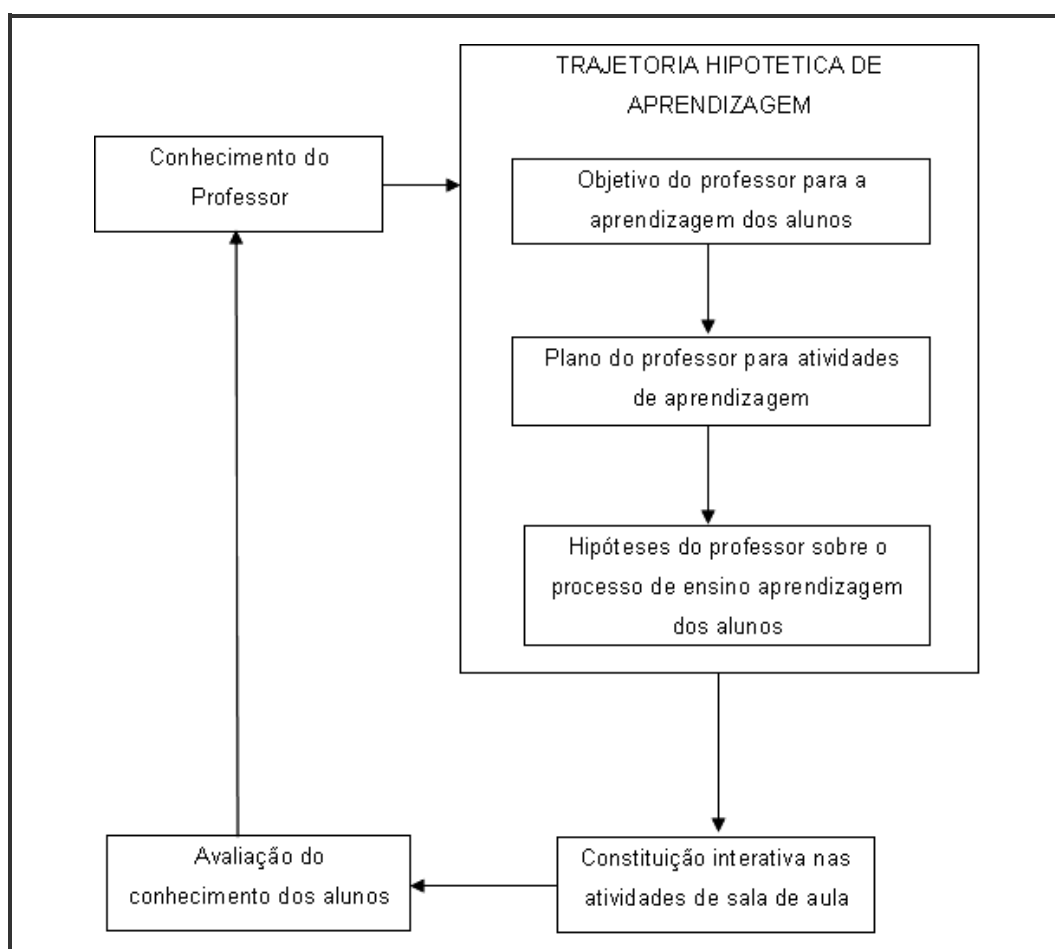


Figura 1: Ciclo de ensino de Matemática abreviado (Simon, 1995)

Simon refere-se a hipóteses sobre o conhecimento dos alunos para enfatizar que não temos acesso direto ao conhecimento deles. E destaca:

Como professor, minha concepção do conhecimento matemático dos alunos, está estruturada pelo meu conhecimento da Matemática em questão. Convenientemente, o que observei no gosto pelo pensamento matemático dos alunos e meu entendimento das idéias matemáticas envolveram interconexões. Estes dois fatos são interessantes na esfera do ensino do professor (SIMON, 1995, apud PIRES, 2009, pp. 155-156).

E faz uma referência a Steffe (1990) para o qual, usando seu próprio conhecimento matemático, os professores de Matemática devem interpretar a linguagem e as ações dos seus alunos e tomar decisões sobre possíveis conhecimentos matemáticos dos alunos e sua possibilidade de aprendizagem.

Para Simon é meta da aprendizagem que o professor tem para seus alunos que possibilita uma direção para uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Usaremos o termo trajetória hipotética de aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor, como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa. O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora freqüentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfeld, Richards e Cobb, 1983), que em sala de aula adquire com atividades matemáticas freqüentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas. (SIMON, 1995, apud PIRES, 2009, pp. 156-157).

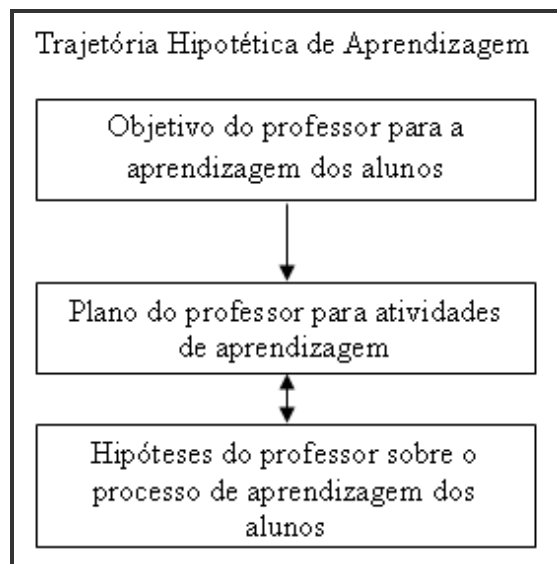
Para Simon a trajetória hipotética de aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

### **Composição da Trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon:**

Uma trajetória hipotética de aprendizagem – THA – é composta por três componentes:

- o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
- as atividades de ensino;
- o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos será colocado em ação no contexto de aprendizagem das atividades)

A criação das possibilidades de modificações da trajetória hipotética de aprendizagem é a parte central do modelo em que está diagramado na figura abaixo.



Para Simon, a noção da trajetória hipotética de aprendizagem pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem tem uma relação simbólica e a geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos.

A escolha da palavra "trajetória" é significativa para designar um caminho. Simon convida a uma analogia.

Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética". (SIMON, 1995, apud PIRES, 2009, p. 158)

Ainda nesse artigo, Pires também faz uma analogia apontando suas investigações sobre Currículos em Rede (2000), em que apresentou um modelo de organização curricular que buscava trazer alternativas de superação de mitos como os da linearidade/acumulação, na construção do conhecimento. Assim, em vez de comporem-se por uma sucessão de pontos que devem ser dados numa certa ordem e que têm conduzido a uma prática educativa inadequada, os currículos de matemática podem ter como modelo a rede, num desenho curricular, composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por uma pluralidade de ramificações/caminhos, em que nenhum ponto (ou caminho) é privilegiado em relação a um outro, nem univocamente subordinado a qualquer um.

Nessa proposta, Pires aponta que é possível imaginar um desenho curricular básico, mas que não seja rígido, nem inflexível. Ele deve representar também, a cada instante (ou a cada período de tempo) uma situação móvel. Desse modo, permitirá concretizações específicas diferenciadas, favorecerá abordagens interdisciplinares e a realização de projetos de professores e alunos.

Pires destaca que os caminhos percorridos, embora lineares, não devem ser vistos como os únicos possíveis. Com isso, deve-se garantir que o estudo de qualquer conteúdo seja significativo para o aluno, e não justificado apenas pela sua qualidade de "pré-requisito" para o estudo de outro conteúdo. Sabemos que o

estudo de um assunto não se torna significativo para o aluno apenas porque eventualmente lhe será útil no futuro, na profissão ou nos cursos que fará posteriormente.

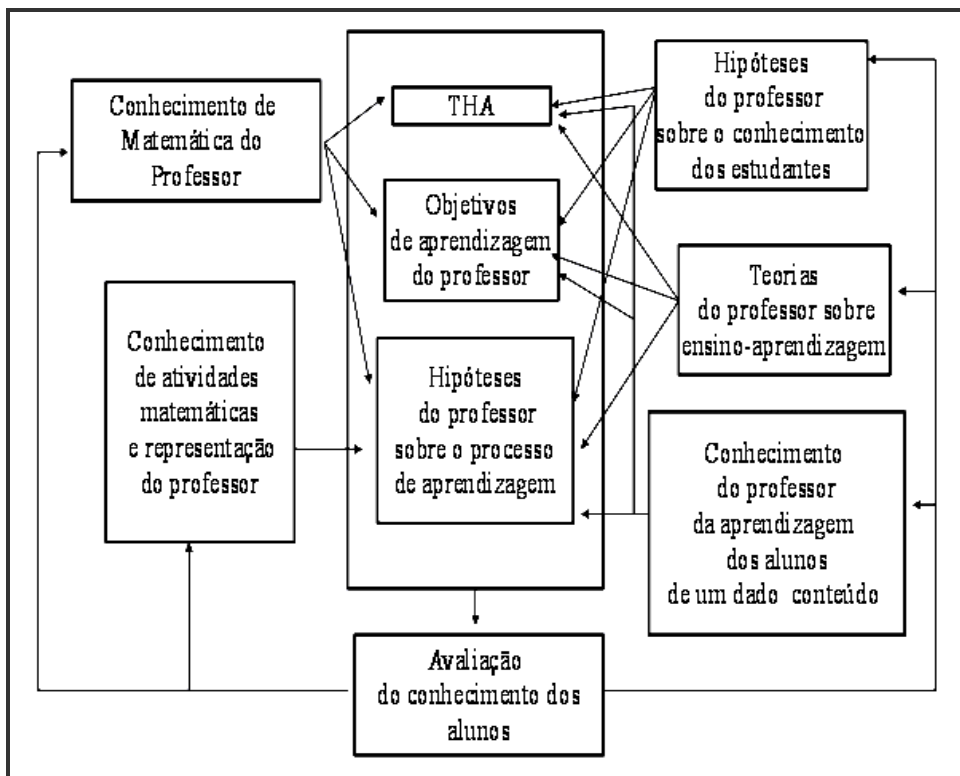
### **A geração de uma trajetória hipotética de aprendizagem.**

Simon destaca que a geração de uma THA prioriza buscar as formas pelas quais o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também identificar como o professor interage com as observações dos alunos, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

Esta experiência pela essência da sua construção social é diferente das primeiras antecipações dos professores. Simultaneamente ocorre uma construção social de atividades em sala de aula e a modificação das idéias e conhecimento do professor, que ele vai construir em função do que está acontecendo ou do que aconteceu na sala de aula. (SIMON, 1995, apud PIRES, 2009, pp. 158-159).

O diagrama da figura 1, mostrado anteriormente, indica que a avaliação do pensamento do aluno (com constantes idas no modelo de ensino apresentado), pode trazer muitas adaptações a respeito de qualquer conhecimento do professor, possibilitando uma nova ou modificada trajetória hipotética de aprendizagem.

Simon destaca a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem, e as interações com os alunos (figura 2). O conhecimento matemático do professor contribui para a identificação de um objetivo de ensino. Estes domínios de conhecimento, a meta de ensino e o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem individual do aluno bem como a concepção de aprendizagem e ensino (ambos em geral dentro da Matemática) contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e processos de aprendizagens hipotéticas.



**Figura 2:** Domínios do conhecimento do professor, trajetória hipotética de aprendizagem e interações com os alunos.

Simon ressalta que a modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é alguma coisa que somente ocorre durante o planejamento entre aulas. O professor está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que “hipotetizou”, para melhor refletir sobre suas práticas e sobre as modificações em seu conhecimento de professor. Ele está constantemente percebendo a extensão das modificações e transformações que podem ser construídas por algum ou todos os componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: o método, as atividades e o processamento hipotético da aprendizagem e teria nesse processo possibilidades de compatibilizar naturalmente, currículo prescrito e currículo praticado.

### **Outras contribuições para a reflexão sobre THAs**

De acordo com Pires (2009), o artigo de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez, de 2007, intitulado “Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria”, os autores fazem uma análise sobre o interesse de diferentes pesquisadores sobre a noção de

THAs, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores.

Os autores começam destacando que o interesse pelas THAs foi reconhecido com a publicação de um número de *Mathematics Thinking and Learning*, dedicado à sua discussão (Clements y Sarama, 2004). Steffe (2004, apud Gomez e Lupiáñez) ressalta a relevância desta noção dentro da Educação Matemática da seguinte forma (apud Pires, 2009, p. 160).

A construção de THAs dos alunos é um dos desafios mais urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da matemática dos alunos e, de que forma, nós professores, podemos influir nessa matemática.

Não obstante, revelam, mesmo que os diversos investigadores reconheçam os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemática e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitem os quatro pressupostos mencionados anteriormente, cada um interpreta e usa a noção com propósitos e maneiras distintas. Para Gomez e Lupiáñez são perceptíveis dois usos claramente diferenciados: como ferramenta de investigação e como ferramenta para planejamento.

Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) e Clements, Wilson e Sarama (2004) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos. Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon e Tzur (2004) mesmo explorando também THA, preocupam-se com maior ênfase por seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Batista (2004) centra-se na avaliação (apud PIREs, 2009, p. 161).

Gómez e Lupiáñez (2007) apontam que em todos os trabalhos desenvolveram-se exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais.

Mesmo que haja professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações. De fato, alguns destes trabalhos, como o de Steffe (2004) e de Gravemeijer (2004), vêem a construção de THAs como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor (apud PIREs, 2009, p. 161).

E destacam que uma das principais diferenças de interpretação da noção entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planeamento de várias aulas, até o trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula. Vejamos algumas análises feitas por Gómez e Lupiáñez sobre alguns autores:

Gravemeijer (2004) indica que sua proposta de teorias locais de ensino é a “descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação a uma coleção de atividades de ensino para um tema” (p. 107).

Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) também utilizam a noção para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões nas quais se trabalha um tema.

Simon e Tzur (2004) vêem a THA como uma ferramenta para o planeamento de atividades matemáticas no dia- a- dia de uma aula.

Finalmente Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o “desenvolvimento micro-conceitual”, sendo esta a atividade central do ensino na aula.

Uma questão importante discutida por Gómez e Lupiáñez (2007) indaga sobre a relação que há entre a atividade diária do professor e a noção de THA. Para eles, um aspecto ligado à atuação do professor tem a ver com o carácter reflexivo inerente à noção de THA: “há uma relação reflexiva em que a THA é o subsídio de juízos e decisões locais que, por sua vez, modificam a THA (Gravemeijer, Cobb, Bowers e Whitenack, 2000, pp. 249-250, apud Gómez e Lupiáñez)”.

Gómez e Lupiáñez destacam que, em seus trabalhos, Simon e Tzur (2004, p. 93), também enfatizam o papel do professor na construção e revisão permanente da THA. Mas mostram um desafio: como fazer compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA com o fato que a totalidade dos exemplos que se tem de THA foram desenvolvidos por investigadores que assumiram o papel de professor?

Para Gómez e Lupiáñez (2007), propostas como as desenvolvidas por Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) são tão complexas e técnicas que acabam sendo pouco práticas para os professores. Por outro lado, as propostas de Simon e Tzur (2004) e Gravemeijer (2004) têm um caráter essencialmente prático.

Gómez e Lupiáñez lembram que outro ponto essencial é referenciado por Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004, p. 233). Eles nos alertam para o fato de que a validade ecológica se conquista às custas da falta de universalidade: se é comprovado que uma THA é válida em uma circunstância particular (em um contexto e com alguns estudantes e um professor particular), isto não quer dizer que essa THA tenha sentido em outras circunstâncias.

Gómez e Lupiáñez trazem ao debate preocupações como as expressas por Gravemeijer (2004, p. 107) que reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras seqüências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) seqüências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: porém, que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

Tais questionamentos mostram, a nosso ver, a necessidade de discutir as questões sobre organização e desenvolvimento curricular já na formação inicial de professores, proporcionando-lhes experiências tematizadoras de trajetórias de aprendizagem.

### **Considerações e reflexões do nosso grupo de pesquisa**

No tocante às questões de como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino e de como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos, o grupo encontrou no trabalho de Simon elementos importantes:

- A afirmação de que as visões construtivistas da aprendizagem têm dado sustentação a fundamentos teóricos na pesquisa no campo da Educação Matemática;
- Sugestões importantes para que os professores possam compreender e antecipar a forma de construção dos conhecimentos matemáticos de seus alunos.

Mas o grupo considera particularmente importante o alerta de Simon no sentido de que o construtivismo também aponta um desafio para a Educação Matemática, qual seja o de desenvolver propostas de ensino em que a construção de conhecimentos seja tomada como perspectiva teórica.

No entanto, adverte também que a Educação Matemática não produzirá métodos com ideias fixas ou plataformas para as ações docentes, e as estruturas metodológicas deverão sempre suportar transformações experimentais. Segundo Simon, o Ciclo de Ensino Matemático retrata uma visão das resoluções construídas pelo professor, a respeito do conteúdo e das tarefas, modeladas pelo encontro de uma perspectiva do construtivismo social com o desafio das aulas de Matemática.

Nesse Ciclo, são particularmente importantes algumas premissas:

- (a) O pensamento/entendimento dos estudantes é especialmente considerado e tem o lugar central na formatação e implementação de instruções. O pensamento/entendimento é um processo contínuo do conjunto de dados e hipóteses construídas.
- (b) O conhecimento do professor envolve-se simultaneamente com o crescimento do conhecimento do aluno. Como os alunos estão aprendendo Matemática, o professor está aprendendo sobre Matemática, aprendendo, ensinando, a respeito do pensamento matemático dos seus alunos.
- (c) O planejamento das instruções é similar à criação de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Esta visão reconhece e valida o método de ensino do professor e a importância de hipóteses sobre o processamento da aprendizagem dos alunos (ideias nas quais eu espero ter demonstrado que não estão em conflito com o construtivismo).
- (d) A transformação continuada do conhecimento do professor cria mudanças contínuas na sua própria trajetória hipotética de aprendizagem.

A leitura dos textos motivou a ampliação das discussões sobre a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino e que leve em conta que o aluno desempenha papel central na construção de suas aprendizagens.

A esse respeito, Simon destaca que indicações para o professor sobre a importância da interação de pequenos grupos e a manipulação de materiais, por exemplo, podem ser instrumentos valiosos nas mãos dos professores de Matemática. No entanto, estes instrumentos não são suficientes para permitir que os professores sejam arquitetos da produção de situações de aprendizagens que resultem num crescimento conceitual de seus alunos. Professores novatos, por exemplo, muitas vezes questionam o conhecimento de seus alunos, consciente ou inconscientemente, esperando que no mínimo um aluno esteja habilitado a explicar sua ideia para os outros. E perguntam o que devem fazer com um grupo de alunos, para que construam conceitos matemáticos.

Essas situações são bastante comuns em termos de Brasil e tempos atuais. Nos cursos de formação inicial a chamada “Prática de Ensino” e mesmo as atividades de estágio, de modo geral, estão bastante defasadas no que se refere aos estudos sobre os elementos que possibilitem ao futuro professor a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, tanto em termos teóricos como em termos práticos.

Desse modo, o jovem professor tende a usar modelos em geral ultrapassados sem perceber a necessidade de conhecer e de construir modelos de ensino que sejam consistentes e construídos de forma coerente com teorias, como é o caso das teorias de perspectiva construtivista.

Para mudanças significativas, os jovens professores precisam de conhecimentos sobre o conhecimento dos alunos, conhecimentos para gerar trajetórias hipotéticas de aprendizagem, análises conceituais para que possam ensinar Matemática. Enfim, é fundamental que se apropriassem efetivamente de resultados de pesquisas relevantes sobre o conhecimento matemático de crianças e jovens, inovações curriculares, planejamento, construções de atividades e que se apropriassem da ideia de que suas hipóteses e metas sobre as aprendizagens de seus alunos e a própria formatação de atividades mudam

continuamente e promovem novos conhecimentos e seu efetivo envolvimento na cultura matemática em sala de aula.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Como vimos, para Simon (1995) o objetivo de aprendizagem, as atividades de aprendizagem e pensamento e conhecimento dos estudantes é elemento importante na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, além disso, outros conhecimentos dos professores intervêm como os conhecimentos de resultados da pesquisa em literatura, bem como das recomendações sugeridas pelos documentos oficiais, ou da própria experiência docente.

Desse modo realizamos uma revisão bibliográfica encontrando diversos trabalhos de pesquisa com estudos voltados ao ensino de Funções. Nesse tópico ressaltaremos algumas dessas pesquisas, as influências nas mesmas pelos documentos oficiais, relevantes ao tema: noções introdutórias à ideia de função.

Em geral, os alunos não entendem como resultado de uma atividade, algo que não seja expresso em valores numéricos definidos. Muitas vezes a forma como as expressões algébricas são introduzidas não tem nenhum sentido para os alunos.

Neste sentido, a preocupação de Chalouh e Herscovics (1995) em ***“Ensinando expressões algébricas de maneira significativa”***, foi tornar a expressão algébrica significativa para os alunos, e não mera “regra” onde utilizamos letras para representar números. O objetivo primordial é que os alunos construam um significado de modo que este tenha uma formação com base cognitiva. Para isso utilizaram-se de um esquema de ensino no qual as expressões algébricas são introduzidas como respostas a problemas.

Os autores escolheram problemas que comportam uma fácil representação visual, fazendo uso de uma abordagem geométrica, introduz-se o emprego de letras representando quantidades ocultas e só depois as utilizando para representar quantidades incógnitas específicas, isso faz com que o aluno construa um significado para as expressões, dando assim uma resposta ao seu

problema e conseguindo também trabalhar um processo inverso; de uma expressão algébrica, escrever um problema que a represente.

Essa experiência de ensino foi concebida para determinar a exequibilidade do novo método e para revelar quaisquer problemas cognitivos que pudessem ser introduzidos inadvertidamente.

Ao aplicar o esquema de ensino, foram levados em conta quatro obstáculos cognitivos já identificados em pesquisas anteriores sobre o aprendizado de expressões algébricas: – Davis (1975) e Wagner (1981) apontaram a falta de referencial numérico no uso de letras pelo aluno; – Collins (1974), afirma que a percepção de expressões algébricas são afirmações incompletas, os alunos são incapazes de manter as operações sem resolvê-las; Davis (1975), aponta o dilema nome-processo, ou seja, o aluno não distingue a álgebra da aritmética; Matz (1979), descreveu os diferentes significados associados à justaposição em álgebra.

Esta preocupação também aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN EF), pois o tema aparece fortemente já no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, o documento destaca:

Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo (BRASIL, 1998, PCN EF II, p. 68).

Keppke (2007), desenvolvendo sua dissertação de mestrado “**Álgebra nos currículos do Ensino Fundamental**” buscou identificar como a álgebra aparece nos currículos do ensino fundamental nos últimos 50 anos realizou uma análise comparativa entre os documentos oficiais que guiam a composição curricular de matemática no ensino fundamental nas últimas décadas e o depoimento, por meio

de aplicação de questionário, de professores que atuam na rede pública e privada.

Keppke apoiando-se no trabalho de Boyer (1978) cita três momentos no desenvolvimento da álgebra:

- Primitivo ou retórico – época em que não se usavam símbolos ou abreviações. Toda expressão era em língua natural (egípcios, babilônicos e gregos, antes de Diofanto).
- Intermediário ou sincopado – teve Diofanto como introdutor de um símbolo para representar uma grandeza.
- Estágio final ou simbólico – as idéias da álgebra passaram a ser expressas por meio de símbolos. Um destaque dessa época foi Viéte (1510-1603), principal introdutor de novos símbolos à álgebra:

[...] Viéte introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em Álgebra, uma quantidade supostamente desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou número supostos conhecidos ou dados (BOYER, 1978, p. 223 *apud* KEPPKE, 2007, p. 19).

Keppke ao se referir ao trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993b), destaca que para esses autores, no ensino e aprendizagem de álgebra, a ênfase é dada à habilidade manipulativa das expressões algébricas, em detrimento da construção do pensamento algébrico<sup>9</sup> e de sua própria linguagem e significação. Segue ponderando:

[...] o pensamento algébrico é caracterizado pela existência de certos elementos como: percepção de regularidades, de aspectos invariantes contrastando com os variantes, de tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e da presença de um processo de generalização (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993b, *apud* KEPPKE, 2007, p. 24)

Dentre os resultados da pesquisa o autor ressalta que entre os professores que participaram do estudo, apesar de considerarem a álgebra como importante elemento para o desenvolvimento de habilidades de generalização, abstração e

---

<sup>9</sup> Entendido por nós como a base cognitiva referida pelos autores.

interpretação, encontraram severas dificuldades justamente no desenvolvimento dessas habilidades, destacando como problemas mais frequentes a incompreensão no uso de letras atuando como barreiras para generalizar e abstrair.

Na pesquisa de Silva (2007) sobre **“Análise da Abordagem de Função Adotada em Livros Didáticos de Matemática da Educação Básica”**, tem por objetivo verificar quais são as estratégias utilizadas pelos autores de livros didáticos para apresentar a noção de função. Se a relação discreto/contínuo fica evidente (ou seja, se as funções cujo domínio é formado por um conjunto de números discretos ou se é formado por um conjunto de números reais), e se existe uma relação entre as representações gráficas e algébricas.

O trabalho é fundamentado em uma análise documental de caráter qualitativo, e os dados foram obtidos por meio da análise livros didáticos, sendo dois da 8ª série do Ensino Fundamental e três da 1ª série do Ensino Médio.

Silva adotou critérios para analisar as abordagens de função adotada nos livros selecionados, abaixo apresentaremos cada um deles:

- Critério 1 – O desenvolvimento da noção de função se dá a partir da exploração da relação de dependência entre grandezas, ou via conjuntos, com base no conceito de par ordenado e relação?
- Critério 2 – São propostas situações que envolvem a generalização de regularidades em seqüências numéricas, ou padrões geométricos?
- Critério 3 – As articulações entre campos matemáticos e/ou as conexões da Matemática com outras áreas do saber são exploradas?
- Critério 4 – Na construção de gráficos utiliza-se o procedimento global das propriedades da figura-forma, ou somente os procedimentos por pontos e por extensão do traçado efetuado?
- Critério 5 – Na construção de gráficos, a relação discreto/contínuo é explicitada satisfatoriamente?

Critério 6 – São propostas atividades constituídas por tarefas de articulação entre as representações gráfica e algébrica?

O pesquisador após analisar cada um dos livros selecionados por meio desses critérios constatou que, a maioria dos livros analisados adotou como ponto de partida para a construção do conceito de função a exploração da relação de dependência entre grandezas por meio da resolução de problemas. No entanto, Silva aponta que ainda existe certa preocupação de alguns autores com o conceito formal de função como um caso particular de relação.

Silva conclui ainda que a relação do discreto ao contínuo nos gráficos de funções, é feita de maneira bastante automática e insuficiente na maioria dos livros didáticos em que analisou. A ideia de que é suficiente obter alguns pares  $(x, y)$  de números inteiros, em uma tabela, em que  $y = f(x)$ , sua localização no plano cartesiano e o desenho de um traçado contínuo ligando esses pontos, sem se discutir a representatividade do gráfico nos intervalos em que os pontos não foram calculados, aparece com bastante frequência.

E finalmente conclui que os livros analisados não enfatizam as questões relacionadas especificamente à representação gráfica e algébrica, ou seja, as variáveis visuais pertinentes não são levadas em consideração. Silva destaca que o esboço de gráficos é tratado exclusivamente por meio da junção de alguns pontos marcados no plano cartesiano, obtidos por meio da substituição de valores inteiros de  $x$  na expressão  $y = f(x)$  da função, em que o aluno não consegue fazer uma leitura global do gráfico, mas apenas uma leitura pontual.

Em relação ao estudo das funções os PCNS+ afirmam que:

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p. 121).

Segundo o documento, tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função que descrevem relações de dependência entre duas grandezas em diferentes situações contextualizadas, descrita algébrica e graficamente.

O documento destaca ainda que os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final do assunto, portanto, devem ser trabalhados durante todo o processo do desenvolvimento desse conteúdo.

Ainda neste sentido, encontramos menção nos PCN EF II, quando sugere:

O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano (BRASIL, 1998, p. 84-85).

Outro ponto a observar é a associação que os alunos fazem das notações “x” e “y” com outras variáveis no estudo de funções, e suas relações de dependência e independência. Zuffi e Pacca (2002), em sua pesquisa concluem que as dificuldades no estabelecimento dessas relações estão na relutância dos professores de matemática em utilizar outras letras que não “x” e “y” para as variáveis, enquanto os professores de física utilizam outras notações para as variáveis dependentes e independentes, e seguem observando “como estes fatos podem não estar sendo explicitados, nem por um, nem por outro professor, alguns alunos poderão ter a impressão de que estão lidando com conceitos estanques, totalmente independentes, não percebendo que a ideia de dependência [...], caracteriza o que se chamou de função matemática” (p. 8).

Em um dos destaques do relatório enviado à Câmara de Educação Básica (CEB) do Conselho Nacional de Educação (CNE) em 1998 apresentando as

propostas de regulamentação da base curricular nacional e de organização do Ensino Médio, sugere que a interdisciplinaridade poderá ser uma prática pedagógica e didática adequada aos objetivos do Ensino Médio<sup>10</sup>, mantendo um diálogo permanente com outros conhecimentos destacando-se a ampliação e iluminação de aspectos não distinguidos.

Neste sentido, atividades que permitam o estabelecimento de conexões interdisciplinares, por exemplo, situações que envolvam conhecimentos matemáticos com a física, favorecem a percepção do objeto matemático em estudo. Na concepção de Pires e Pietropaolo:

A contextualização, do mesmo modo que a interdisciplinaridade, se bem trabalhadas, possibilitam ao aluno uma aprendizagem significativa do conteúdo ensinado, estabelecendo entre ele (o aluno) e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. Por essa razão, a contextualização busca resgatar áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural do aluno e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. (2006, p. 9).

O documento (Brasil, 1999) enfatiza que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo ou instrumental, mas também deva ser visto como ciência, com características estruturais específicas, destacando a necessidade de o aluno perceber definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos, com a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros para servir de validação de intuições, dando sentido às técnicas aplicadas.

Em relação ao ensino de função que é o que nos interessa, o documento afirma que:

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas, por meio de situações problemas

---

<sup>10</sup> Entre os objetivos do ensino médio citados na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional podemos destacar: o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico e a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 1999, p. 255).

Observamos que o documento aponta para a necessidade de desenvolver o conceito de função, relacionando-o a outros conteúdos dentro da própria Matemática, e também por em prática a interdisciplinaridade, ou seja, desenvolver o conceito de função em situações-problema provenientes de outras disciplinas, procurando relacionar conteúdos escolares com assuntos do cotidiano dos alunos.

Além disso, os PCNEM enfatizam a resolução de problemas, o processo histórico e o uso das novas tecnologias como eixos organizadores no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Neste sentido, Valente (1999) pondera que o uso do computador em ambientes de aprendizagem enfatiza a construção do conhecimento, e, ao mesmo tempo, apresenta enormes desafios.

Segue afirmando que usar o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento provocando um redimensionamento dos conceitos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas ideias e valores, requer uma análise cuidadosa do que significa ensinar e aprender, bem como o papel do professor nesse contexto.

[...] Assim, a questão que se coloca é: “Como as mudanças que estão acontecendo na sociedade deverão afetar a Educação e quais serão suas implicações pedagógicas?”

A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma Educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: na sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos e na relação com o conhecimento. Embora tudo indique que a escola deverá sofrer ajustes para se adequar aos novos tempos, o quanto ela deverá mudar é polêmico. [...] (VALENTE, 1999, pp. 31-32).

Ao tratar da natureza do Ensino Médio, os PCN+ (2002), declaram que o Novo Ensino Médio deixa de ser apenas profissionalizante ou preparatório para o Ensino Superior, para assumir a responsabilidade de completar a educação básica, e apontam a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática.

Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido (BRASIL, 2002, p. 113).

Podemos observar que uma das preocupações no ensino da matemática que os documentos oficiais apontam é a leitura e interpretação de texto que envolve a Matemática.

A leitura, a discussão e a interpretação de textos matemáticos desenvolvem o domínio da linguagem matemática, o entendimento do enunciado de problemas, a compreensão de ideias matemáticas, entre outras habilidades ressaltando a importância de desenvolver no aluno a capacidade de compreender, fazer analogias e construir estratégias para resolver uma situação-problema, configurando excelente estratégia para a introdução de novos tópicos da teoria, fornecendo ao aluno um espaço de reflexão e crítica que a aula expositiva pode não permitir.

Neste sentido encontramos a dissertação de Salmazo (2005), “**Atitudes e Procedimentos de Alunos frente à Leitura e Interpretação de Textos nas Aulas de Matemática**”, que teve como objetivo principal estudar atitudes e procedimentos de alunos frente à leitura e interpretação de textos nas aulas de Matemática, contribuindo para o debate e a reflexão de professores desta disciplina.

Investigou como alunos de 5<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental e alunos de 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio, reagem frente a leitura de textos nas aulas de matemática, identificando atitudes e procedimentos presente nesta situação.

Dentre as conclusões afirma que atividades que envolvem leitura, escrita e interpretação de textos na aula de Matemática estão praticamente ausentes, estabelecendo uma grande dependência dos alunos em relação ao professor.

Salmazo identificou ainda que atividades que envolvem leitura, escrita e interpretação de textos na aula de Matemática, se apresentam como algo penoso e desestimulante, devido a grande dificuldade de concentração observada.

Finaliza suas considerações propondo que se fizermos largo uso da resolução de problemas, de investigações matemáticas, de sequências de atividades interessantes, o desempenho na leitura, escrita e interpretação de textos será favorecido.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, vem apresentar um conjunto de reflexões que alimente a prática docente e que levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, segundo o documento, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teorema e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (Brasil, 2006, p. 69).

O documento recomenda que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas de conhecimento como, por exemplo, os modelos lineares, quadrático e exponencial. Lembrando que os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento e decréscimo entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

Em se tratando das Tecnologias para o ensino da Matemática, o documento aborda que há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar, fazer experimentos, testar hipóteses, esboçar

conjecturas, criar estratégias para resolução de problemas e construir diferentes conceitos matemáticos.

Neste sentido Valente (1999) observa:

Sistemas computacionais para modelagem podem constituir ambientes de aprendizado poderosos, por envolver o aprendiz no ciclo básico de expressão, avaliação e reflexão sobre o domínio considerado. A exigência do computador para expressão formal de um modelo leva o aprendiz a definir mais precisamente seu conhecimento sobre o assunto. Além disso, a execução do modelo na máquina possibilita uma avaliação que pode levar o aprendiz a questionar o modelo, reavaliar seu conhecimento e expressá-lo novamente, continuando o ciclo de ações, ao estilo construcionista de aprendizagem (p. 52).

Para o estudo específico das funções os documentos afirmam que os recursos disponíveis nos softwares facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação-inequação.

Nesse sentido, em nosso trabalho evitamos repetir o modelo curricular das famosas listas de exercícios “siga o modelo”, realizadas de maneira mecânica e sem significado algum para os alunos. Seguindo as orientações dos Documentos Oficiais buscamos em nossa trajetória hipotética de aprendizagem dar destaque à realização de uma abordagem interdisciplinar dos conhecimentos e à exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e / ou da modelagem, com recursos de simulações por meio de softwares.

No entanto a seleção de conteúdos, nos documentos oficiais, ainda apresenta pouco debate e a organização linear é predominante, é o que afirma Silva (2009) em sua tese de doutorado intitulada “**Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos**”.

Silva, em sua análise dos documentos oficiais recentes, considera que o foco maior referentes à abordagem dos conteúdos é a contextualização e a interdisciplinaridade, ressaltando que os autores dos documentos, apontam exemplos pontuais, sem deixar claro suas concepções sobre esses conceitos.

Segue pontuando sua impressão que não há qualquer tipo de divergência sobre o que deva ser ensinado, até mesmo no Ensino Médio, em que a diversidade de interesses dos estudantes é bastante acentuada.

No entanto ressalta:

É evidente que, para abordar esses aspectos, precisamos realizar escolhas e, para fazê-las, é necessário buscar critérios. Ao buscarmos tais critérios, acabamos por expressar neles nossas crenças e opiniões decorrentes do tipo de “lentes” que utilizamos para enxergar o mundo. Portanto, temos consciência de que a construção de fundamentos implica assumir posições e correr riscos. [...] seja qual for a expressão que quisermos utilizar para nos referir a conceitos ensinados (ou com a intenção de ensinar) aos alunos em sala de aula (SILVA, 2009, p. 9).

Posto esta análise e destacando a posição de Silva na citação acima, elaboramos nossa THA, sabendo que não pode ser considerada ideal nem definitiva, e que deverá passar por modificações/revisões sempre após seu desenvolvimento, de acordo com composição formulada por Simon, já descrita anteriormente.

### **A CONSTRUÇÃO DA PRIMEIRA VERSÃO DA THA**

Neste capítulo vamos descrever o processo de construção da primeira versão da THA, em que selecionamos objetivos de aprendizagem, indicamos hipóteses sobre aprendizagem dos alunos e escolhemos as tarefas que nos pareciam adequadas. Em seguida, apresentamos a análise da primeira versão da THA realizada por dois professores de escolas de ensino médio e as alterações por eles sugeridas.

#### **2.1 Objetivos, do professor pesquisador, relativamente à aprendizagem que pretende que seus alunos construam sobre o assunto.**

- Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, em situações-problema e a partir de uma tabela de valores ou gráficos.
- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como forma para expressar relação entre duas grandezas e expressar algebricamente a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da construção e análise de tabelas e gráficos cartesianos.
- Compreender o conceito de função a partir da exploração de situações-problema.

- Reconhecer e identificar gráficos que descrevem funções polinomiais do 1º grau, representadas algebricamente, em situações-problema que as envolvam.

## **2.2 Hipóteses, do professor pesquisador, sobre o processo de aprendizagem dos alunos**

Os resultados da pesquisa em literatura as orientações didáticas sugeridas em documentos oficiais, bem como nossa experiência docente foram elementos importantes na construção de nossa trajetória hipotética de aprendizagem para desenvolver o tópico de introdução à ideia de função.

Nortearam nosso trabalho as dificuldades e propostas apontadas em nossa revisão bibliográfica, de acordo com a breve síntese que elaboramos abaixo.

- leitura e interpretação de textos nas aulas de matemática (Salmazo, 2005), no qual aponta dificuldades pelos alunos e grande dependência do professor.
- tornar uma expressão algébrica significativa para os alunos (Chalouh e Herscovics, 1995), sugere sequência de ensino para tal, levando em consideração quatro obstáculos cognitivos apurados em pesquisas anteriores: falta de referencial numérico no uso de letras; a dificuldade em manter as expressões algébricas sem resolvê-las; a não distinção da álgebra da aritmética e os diferentes significados associados à justaposição em álgebra.
- a associação que os alunos fazem das notações  $x$  e  $y$  com outras variáveis no estudo de funções (Zuffi e Pacca, 2002), apontando que parte das dificuldades encontradas pelos alunos está na relutância dos professores de matemática utilizar outras notações, induzindo alunos terem a impressão que estão lidando com conceitos estanques.

- os critérios para analisar as abordagens para estudo de função nos livros didáticos (Silva, 2007), salientando que existe ainda certa preocupação de alguns autores com o conceito formal de função como um caso particular de relação.
- as dificuldades encontradas por professores e alunos no desenvolvimento do pensamento algébrico (Keppke, 2007), destacando entre suas conclusões que a incompreensão no uso de letras, atua como barreira para generalizar e abstrair.
- o uso de sistemas computacionais para modelagem (Valente, 1999) afirmando que a execução do modelo na máquina pode levar o aprendiz a questionar o modelo, re-avaliando seu conhecimento.

Influenciaram também a nossa THA as sugestões contidas nos documentos oficiais, principalmente as referentes à interdisciplinaridade e à contextualização: seja com a própria matemática ou com outras áreas do conhecimento.

Verificamos também a ênfase dada para a resolução de problemas nos documentos oficiais.

Com base nessas pesquisas, propomos atividades em nossa trajetória que possibilitem situações de aprendizagem contextualizadas por meio da resolução de problemas, de modo a favorecer que os alunos atribuam significado ao estudo das noções introdutórias à ideia de função. Com essas situações de aprendizagem buscamos beneficiar as relações entre as diferentes articulações de representação das funções (língua natural, gráfica e algébrica) e tratar algumas propriedades principalmente a relação de interdependência entre as variáveis envolvidas.

Enfim, esperamos que ao final do tema os alunos possam reconhecer quando duas grandezas mantêm relação de interdependência, em especial, quando esta relação tem uma dependência direta, é uma função polinomial do 1º grau, cuja representação gráfica é uma reta, resolvendo situações-problema que as envolvam.

## **2.3 Elaboração do plano do professor pesquisador para atividades de aprendizagem**

Iremos apresentar nosso plano para as atividades de aprendizagem para que possamos orientar o professor que desenvolverá as atividades em sala de aula. Dessa maneira vamos apresentar as atividades, o número de aulas necessárias para aplicação e as estratégias para serem exploradas pelo professor.

### **Atividade 1**

#### **Tempo previsto: 2 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, em situações-problema e a partir de uma tabela de valores ou gráficos.

**Estratégia:** Entregar a atividade impressa para cada aluno, propondo para o professor colaborador que dê um tempo para que os alunos interpretem a situação proposta e possam responder os questionamentos. Em seguida, o professor poderá propor para que algumas duplas exponham oralmente suas respostas para que ele possa concluir a atividade discutindo com o grupo de estudantes.

A atividade foi proposta para ser trabalhada em duplas, pelo fato da leitura conjunta atuar como agente facilitador da compreensão dos textos.

Ao final da atividade, durante a fase de socialização dos resultados, o professor deverá colocar na lousa as observações colocadas no quadro, como resposta ao objetivo da atividade.

## 1.1 Continuando em linha reta<sup>11</sup>

O canguru<sup>12</sup> adulto pode medir até 2 m de altura. As patas traseira e a cauda formam um tripé que o sustenta quando se alimenta. Ele dá saltos de até 10 m de comprimento e consegue correr mais de 50 km/h.

A tabela mostra alguns dados sobre a distância percorrida pelo canguru e a velocidade em cada salto, entre 10 e 30 km/h.

Velocidade em quilômetros por hora (v)	10	15	20	25	30
Distância percorrida em metros (d)	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6

- O que acontece com a distância quando a velocidade aumenta?
- De acordo com a tabela, qual seria a distância percorrida se a velocidade do canguru fosse de 35 km/h ? E de 50 km/h?
- Se a distância percorrida em cada salto fosse de 4,5 m qual a velocidade que o canguru atingiria?
- Quais as grandezas envolvidas?
- Qual é a razão entre as grandezas?

## 1.2 O sucesso do veículo bicombustível

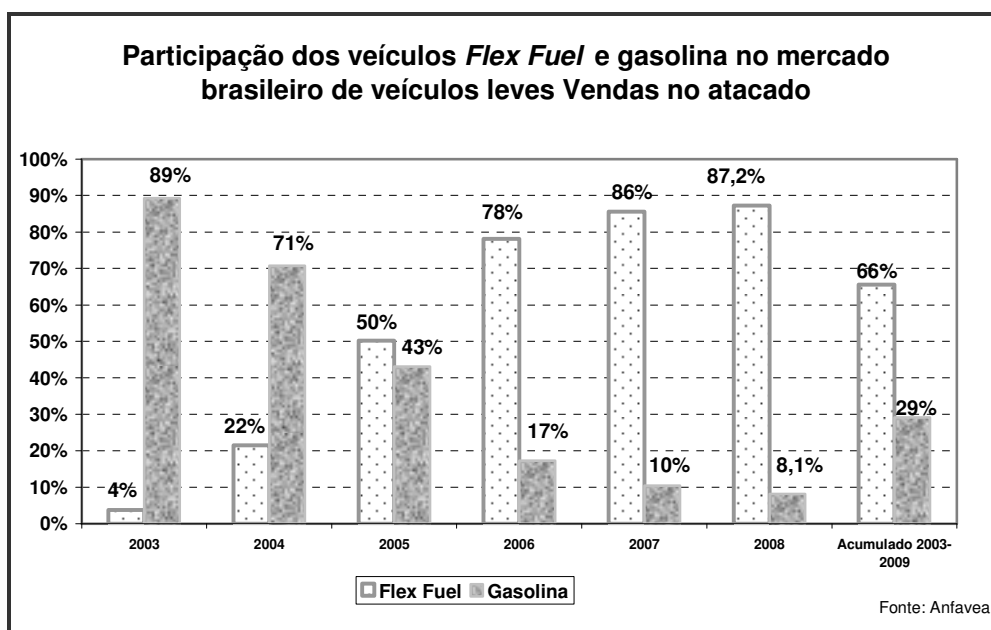
A quantidade de veículos equipados com o sistema flex fuel no Brasil já supera 5 milhões unidades. A marca foi atingida no dia 6 de março. Segundo dados da Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores (Anfavea), divulgados nesta segunda-feira (10), os veículos bicombustíveis já representam 88% das vendas no mercado nacional. No primeiro bimestre deste ano foram comercializadas 348.475 unidades de veículos com motorização flex fuel, contra 31.374 unidades com motor a gasolina. Na avaliação do presidente da Anfavea, Jackson Schneider, a tendência é de que a participação dos veículos

<sup>11</sup> Adaptado de Carvalho, Maria C. C. e Silva: Padrões Numéricos e Funções. São Paulo: Moderna, 2001.

<sup>12</sup> O canguru é um mamífero marsupial, ou seja, é dotado de uma bolsa (o marsúpio), dentro da qual o filhote se desenvolve. Ele vive, dentre outras regiões, nas planícies da Austrália.

flex no mercado continue a aumentar. Na comparação com março de 2007, a participação dos bicombustíveis na frota brasileira quase dobrou – na época a Anfavea somou 2,6 milhões de unidades e estimou que até 2013 os veículos flex terão participação de 52% da frota brasileira total.

A tecnologia flex fuel foi regulamentada no final de 2002 e, no início de 2003, chegou ao mercado pela Volkswagen, quando lançou o Gol Total-Flex. Logo em seguida, a General Motors passou a oferecer o Corsa FlexPower. O sistema caiu no gosto do consumidor devido à possibilidade de escolha do combustível, de acordo com a variação dos preços da gasolina e do álcool. O sucesso dos veículos flex fuel no Brasil é reconhecido mundialmente.



Disponível em: [www.mdic.gov.br/arquivos/dwnl\\_1252504710.xls](http://www.mdic.gov.br/arquivos/dwnl_1252504710.xls). Acesso em 29/09/2009.

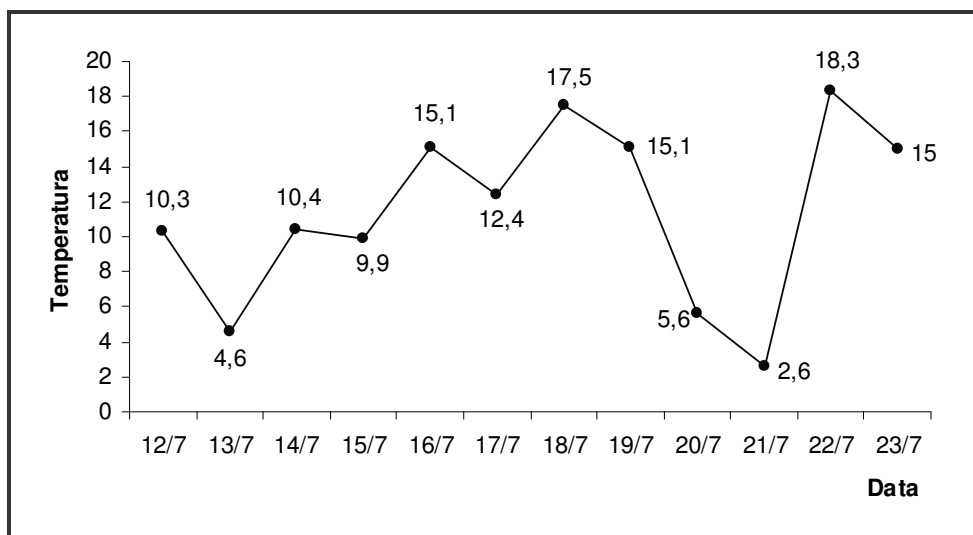
Fonte: Portal G1, 10 mar. 2008.

De acordo com o texto e o gráfico acima responda:

- a) Quais são as grandezas envolvidas?
- b) O que acontece com a participação dos veículos Flex Fuel no mercado brasileiro durante o período 2003 a 2008?
- c) Neste mesmo período, o que acontece com os veículos movidos a gasolina?
- d) Existe uma única razão entre as grandezas? Justifique.

### 1.3 Este “tempo” imprevisível

O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura máxima (em °C) registrada em determinada cidade entre os dias 12 a 24 de julho:



- Quais são as grandezas envolvidas no gráfico?
- Quanto variou a temperatura máxima entre os dias 12 e 13 de julho?
- Como variou a temperatura entre os dias 16 e 18 de julho?
- De acordo com o gráfico, é possível afirmar a temperatura máxima no dia 11 de julho? Justifique.
- Ainda de acordo com o gráfico, qual a previsão da temperatura máxima para o dia 24 de julho? Justifique.

### 1.4 Água: uso consciente

O número **N** de dias necessários para esvaziar um reservatório de 40 000 litros depende do consumo diário de água.

Consideremos **x** o consumo diário de água desse reservatório.

- a) Considerando o consumo constante e não havendo reposição, o que acontece diariamente com o volume de água do reservatório?
- b) Monte uma tabela que mostre a quantidade de dias para esvaziamento do reservatório considerando consumo diário de 250, 500, 800, 1000, 1600 e 2000 litros.
- c) Determine as razões entre as grandezas da tabela.

Os resultados das razões são iguais? Caso não sejam efetue o produto entre as grandezas. O que você observa?

Ao efetuarmos operações com grandezas proporcionais, podemos observar algumas regularidades:

- os produtos entre os pares de grandeza são idênticos.
- a razão entre os pares de grandezas é a mesma.
- obtemos resultados distintos tanto no produto como na razão entre os pares de grandezas.

## **Atividade 2**

### **Tempo previsto: 2 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, a partir de uma tabela de valores ou gráficos.

**Estratégia:** Está atividade deverá ser realizada individualmente, pois ao final da atividade será possível verificar o grau de assimilação em cada aluno, dos objetivos das atividades 1 e 2. Cada aluno receberá uma cópia da atividade.

O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas. Ao final do exercício 2.1, o professor deverá solicitar uma pausa e escrever na lousa as observações constantes do quadro anexo, para a familiarização e socialização dos alunos com os termos e as notações matemáticas.

## 2.1 Observe as tabelas abaixo:

a)

p	1	2	3	5	8	15
q	3	6	9	15	24	45

b)

p	32	24	14	10	6	2
q	16	12	7	5	3	1

c)

p	450	300	225	150	100	50
q	2	3	4	6	9	18

d)

p	1	2	3	4	5	6
q	10	9	8	7	6	5

Para todos os pares de grandezas p e q das tabelas acima e efetue o produto e a razão entre os mesmos. O que você observa?

Quando x e y são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultaneamente na mesma proporção, ou seja, a razão  $y/x$  é constante, e resulta que  $y = kx$  (k é uma constante).

Quando x e y são duas grandezas inversamente proporcionais, sempre que uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa, de modo que o produto das duas permanece constante:  $x \cdot y = k$  em que k é uma constante.

## 2.2 Escreva as constantes k de proporcionalidade das tabelas acima:

**2.3** A tabela abaixo, relaciona os valores de três grandezas a, b e c, que variam de modo inter-relacionado.

a	1	3	5	9	10	15	18	45	60	180	225	360
b	450	150	90	50	45	30	25	10	7,5	2,5	2	1,25
c	6	18	30	54	60	90	108	270	360	1080	1350	2160

a – verifique se os diversos pares de grandezas (a e b, b e c, a e c) são direta ou inversamente proporcionais, ou nem direta nem inversamente proporcionais. Justifique sua resposta com base nas conclusões do exercício 2.1.

**2.4** Em cada um dos casos a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade, caso haja, determine a constante de proporcionalidade<sup>13</sup>.

- a) A altura a de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade t?
- b) A massa m de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade t?
- c) O perímetro p de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado a?
- d) A diagonal d de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado a?
- e) O comprimento C de uma circunferência é diretamente proporcional ao seu diâmetro d?

Em tempo:

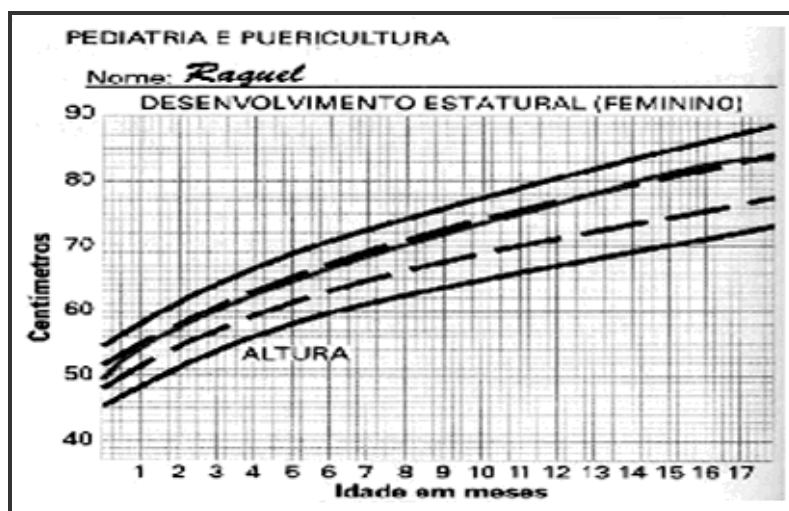
No **item a** deste exercício é importante observar quando a referência é uma criança, sua altura é uma função de sua idade, como podemos observar no quadro abaixo.

<sup>13</sup> Adaptado de SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Caderno de apoio ao Professor: Matemática - Ensino Médio - 1ª. Série, volume 2. São Paulo, 2009. p. 12.

O gráfico do quadro mostra o desenvolvimento estatural de uma menina. Observe que a altura dela era de 64 cm aos 5 meses de idade e passou a ser de 73 cm aos 10 meses.

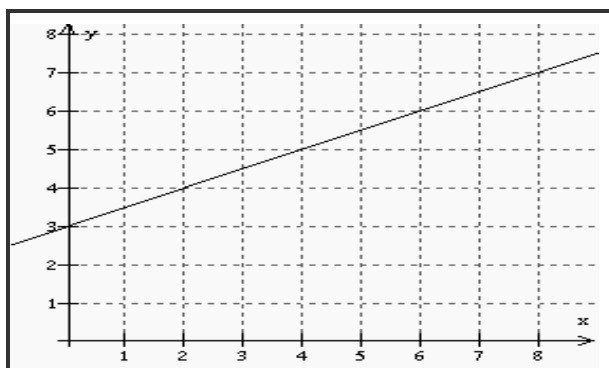
As duas linhas contínuas externas correspondem às maiores e menores alturas esperadas para crianças do sexo feminino com desenvolvimento normal.

Os pediatras usam este tipo de gráfico para acompanhar o desenvolvimento das crianças.

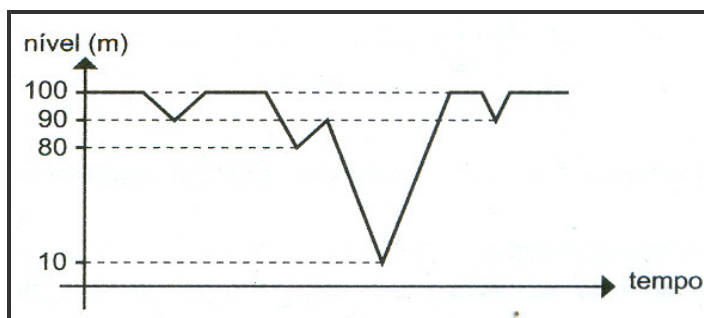


2.5 Nos gráficos abaixo, identifique se a relação entre as grandezas envolvidas é direta ou inversamente proporcional, ou nem direta nem inversamente proporcional.

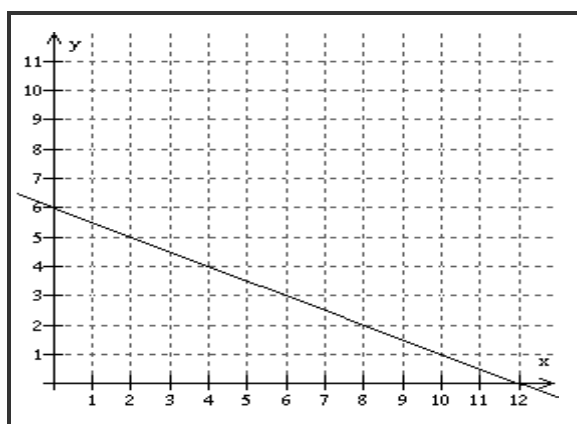
a)



b)



c)



### Atividade 3

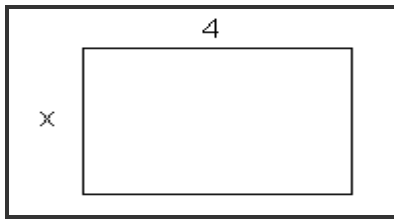
**Tempo previsto: 2 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como forma para expressar relação entre duas grandezas e expressar algebricamente a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da construção e análise de tabelas e gráficos cartesianos.

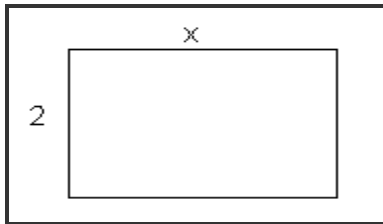
**Estratégia:** Esta atividade deverá ser realizada individualmente. Cada aluno irá receber uma cópia da atividade. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

**3.1** Para cada um dos retângulos abaixo determine a área **A** e esboce no sistema cartesiano o gráfico que permita mostrar a área para qualquer valor de **x**.

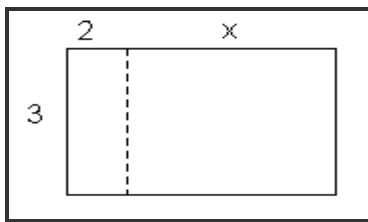
a)



b)



c)



**3.2** A tabela a seguir foi elaborada a partir da expressão  $y = 2x - 3$ .  
Complete as lacunas.

x	1	5		6	10			8	
y		7	15			-3	1		19

#### Atividade 4

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como forma para expressar relação entre duas grandezas e expressar algebricamente a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da construção e análise de tabelas.

**Estratégia:** As planilhas estarão previamente disponibilizadas na área de trabalho de cada máquina. Os alunos deverão sentar-se em duplas junto ao computador para buscar a solução da atividade. O professor irá familiarizá-los com o aplicativo antes do início da atividade. Ao final deverá solicitar aos alunos as respostas, para discussões e socialização.

**4.1** Em cada uma das planilhas abaixo, insira valores numéricos nas diversas células da coluna A, observando o respectivo resultado que aparecerá na coluna C.

Nas células da coluna B existe uma mesma relação, utilizando o valor que você escolheu e gerando os valores numéricos da Coluna C. Descubra esta relação e a escreva na célula D2.

Obs. Cada planilha contém uma relação diferente.

Para facilitar a visualização o total de inserções foi limitado a 30 linhas.

C2		fx = A2*3		
	A	B	C	D
1	a		b	relação entre a e b
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Planilha 1.  $b = 3a$

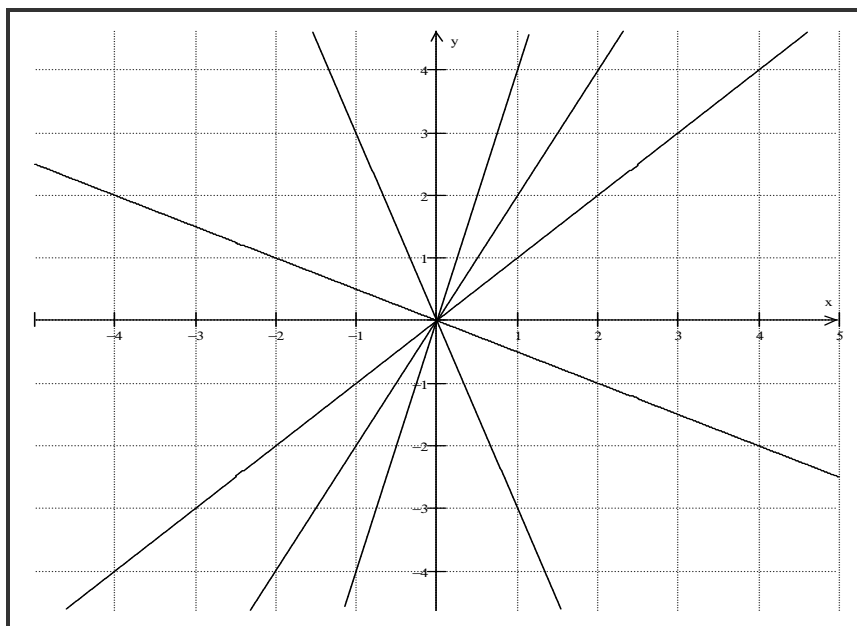
Planilha 2.  $v = 4t$

Planilha 3.  $r = 2q + 4$

Planilha 4.  $y = -2x - 1$

Planilha 5.  $p = s/2 + 1$

**4.2** No gráfico abaixo estão representadas a relação entre as grandezas x e y. Escreva esta relação para cada uma das retas dadas.



### Atividade 5

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Compreender o conceito de função a partir da exploração de situações-problema.

**Estratégia:** As atividades realizadas individualmente. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas. Ao final o professor deverá escrever na lousa as observações constantes do quadro anexo, para a familiarização e socialização dos alunos com os termos e as notações matemáticas.

**5.1** Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 2 litros de água para obtermos o suco reconstituído. Assim, cada garrafa de suco concentrado corresponde a 2,5 litros de suco pronto. Estabeleça na tabela abaixo a relação entre a quantidade (**n**) de suco concentrado e a quantidade (**Q**) de suco pronto.

Suco concentrado (número de garrafas)	1	3	4	8	10	12	n
Suco pronto (em litros)	2,5	7,5	10	20	25	30	

**5.2<sup>14</sup>** Quando uma pedra é abandonada em queda livre (sem considerar a resistência do ar ao movimento), a distância vertical **d** que ele percorre em queda é diretamente proporcional ao quadrado do tempo **t** de queda, ou seja, **d = kt<sup>2</sup>**. Observando-se que após 1 segundo a pedra caiu 4,9 metros, pergunta-se:

- a) Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?
- b) Qual é a distância vertical percorrida após 5 segundos?
- c) Quanto tempo a pedra levará para cair 49 m?
- d) Construa a tabela que representa a queda da pedra (em metros) para os primeiros 8 segundos de movimento.

**5.3<sup>15</sup>** Determinada família consome, em média, um botijão doméstico de gás com 13 kg a cada 26 dias.

- a) Determine o consumo médio (**C**) diário de gás desta família.
- b) Quantos kg de gás esta família consome em 10 dias?
- c) Calcule o número de dias necessários para consumir-se 8 kg de gás.
- d) Qual a massa de gás que resta no botijão após 8 dias de uso?
- e) Escreva a relação que permite determinar a massa (**m**) de gás restante no botijão em função do tempo (**t**) em dias.

Ao expressarmos por meio de variáveis uma situação de interdependência envolvendo grandezas diretamente proporcionais, chegamos a uma função polinomial de 1º grau. De forma geral, esta função pode ser expressa por uma fórmula do tipo  $f(x) = ax + b$ , em que **a** é a constante de proporcionalidade estudada acima e **b** é o ponto onde a reta intersecta o eixo **y**, ou seja, para  $x = 0$ .

<sup>14</sup> Adaptado de SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Caderno de apoio ao Professor: Matemática - Ensino Médio - 1ª. Série, volume 2. São Paulo, 2009. p. 15.

<sup>15</sup> Adaptado de SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Caderno de apoio ao Professor: Matemática - Ensino Médio - 1ª. Série, volume 2. São Paulo, 2009. p. 17.

## Atividade 6

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Compreender o conceito de função a partir da exploração de situações-problema.

**Estratégia:** As atividades realizadas em duplas ou grupos de no máximo 4 alunos. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas, principalmente na interpretação do texto do exercício 6.3.

**6.1** Para não precisar fazer contas a toda hora, o proprietário de um bazar afixou a seguinte tabela incluindo as quantidades de cópias mais solicitadas:

Número de cópias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço a pagar (R\$)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50

- Existe proporção entre os pares de grandezas acima? Justifique sua resposta.
- O valor a ser pago depende da quantidade de cópias?
- Qual é o valor a ser pago para um cliente que solicitar 8 cópias?
- E para 32 cópias?
- Considerando que o cliente não obteve qualquer desconto, qual o número máximo de cópias que poderá pagar com R\$ 25,00.
- Como se exprime, matematicamente, o preço a pagar (**P**) por um número (**n**) de cópias?
- Represente a tabela acima no sistema cartesiano abaixo:

**6.2** Uma certa quantia (**Q**), apurada em determinado concurso de uma loteria, deverá ser distribuída uniformemente cabendo um prêmio (**P**) a cada um dos (**n**) ganhadores. Supondo tenha sido apurada a quantia de R\$ 1 200 000,00:

- a) elabore uma tabela relacionando 1, 2, 4, 5, 8, 10, 15 e 30 ganhadores com os respectivos prêmios pagos a cada um.
- b) Como se exprime, matematicamente, o prêmio que cada um dos ganhadores deve receber?
- c) Represente a tabela acima no sistema cartesiano abaixo:

### 6.3 Medida de temperatura<sup>16</sup>

As partículas constituintes dos corpos estão em contínuo movimento. Entende-se temperatura como sendo uma grandeza que mede a maior ou menor intensidade dessa agitação térmica.

Como a agitação térmica não pode ser medida diretamente, medimos a temperatura de um corpo indiretamente, com base nas propriedades que variam com ela.

A avaliação da temperatura é feita por meio de um termômetro, que, após permanecer algum tempo em contato com o corpo, apresenta a mesma temperatura.

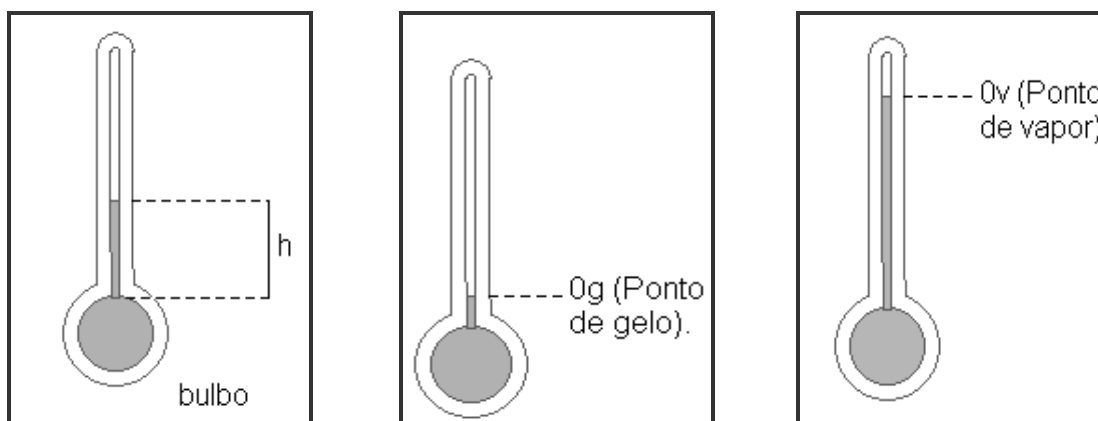
O termômetro mais utilizado é o termômetro de mercúrio, no qual a grandeza termométrica é a altura  $h$  de uma coluna de mercúrio numa haste capilar, ligada a um reservatório (bulbo) que contém mercúrio. A cada temperatura corresponde um valor para a altura da coluna. A correspondência entre os valores da altura  $h$  e da temperatura  $\theta$  constitui a função termométrica.

Ao graduar o termômetro, fazendo corresponder a cada altura  $h$  uma temperatura  $\theta$ , estamos criando uma escala termométrica.

Esquemáticamente:

---

<sup>16</sup> Texto adaptado de Ferraro, Nicolau G., Soares, P. A. Toledo. Física Básica: volume único. São Paulo: Atual, 1998, pp. 262-263.



A escala mais utilizada é a escala Celsius, que adota os valores  $0^{\circ}\text{C}$  e  $100^{\circ}\text{C}$ , respectivamente para  $\theta_g$  e  $\theta_v$ . Esses valores são marcados na haste do termômetro, em correspondência às alturas da coluna.

Há países em que é mais usada a escala Fahrenheit, na qual  $\theta_g = 32^{\circ}\text{F}$  e  $\theta_v = 212^{\circ}\text{F}$ .

Admitindo que as variações no comprimento da coluna de mercúrio são sempre diretamente proporcionais às variações de temperatura que as provocaram, responda:

- 6.3.1** Qual a relação com a escala quando a coluna de mercúrio de um termômetro graduado na escala Celsius, estiver apontando  $48^{\circ}\text{C}$ ?
- 6.3.2** Um termômetro graduado na escala Fahrenheit, tem sua coluna de mercúrio, estabilizada em  $\frac{2}{3}$  de sua escala. Qual a temperatura que estará indicando?
- 6.3.3** Suponha dois termômetros de mercúrio, um graduado na escala Celsius e outro na escala Fahrenheit, em contato com um mesmo corpo. O termômetro graduado na escala Celsius indica  $35^{\circ}\text{C}$ , qual a temperatura estará indicando o termômetro graduado na escala Fahrenheit?

**6.3.4** Escreva a expressão que relaciona a variação da temperatura na escala Celsius ( $\theta_C$ ), com a correspondente na escala Fahrenheit ( $\theta_F$ ).

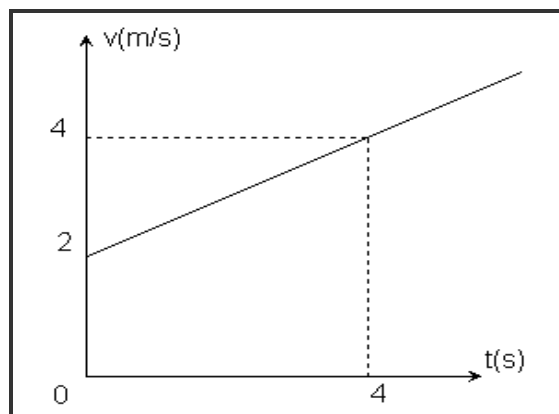
### Atividade 7

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer gráficos que descrevem funções polinomiais de 1º grau, representadas algebricamente, em situações-problema que as envolvam.

**Estratégia:** As atividades realizadas individualmente. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

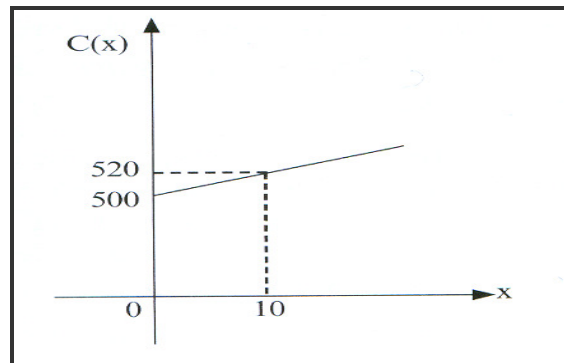
**7.1** O gráfico abaixo representa os valores de uma velocidade ( $v$ ) de um determinado corpo, em função do tempo ( $t$ ).



**7.1.1** Escreva a expressão algébrica da interdependência entre as grandezas:

**7.1.2** Qual a velocidade do corpo após 7 segundos de deslocamento?

**7.2** O gráfico a seguir mostra a relação entre a quantidade de  $x$  litros de xampu produzida e o custo  $C(x)$ , em R\$, da produção caseira.



**7.2.1** Qual é o possível motivo de um gasto de R\$ 500,00 quando não se está produzindo?

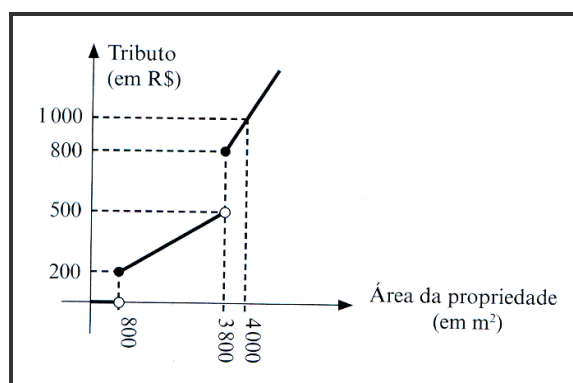
**7.2.2** Qual é a função  $C(x) = ax + b$  representada no gráfico? Essa expressão da interdependência entre o custo  $C$  e a quantidade produzida  $x$  é válida para qualquer valor de  $x$ ?

**7.2.3** Qual é o gasto para se produzir 1500 litros de xampu?

**7.2.4** Quantos litros de xampu podem ser produzidos com R\$ 10 000,00?

**7.2.5** Qual é a variação no gasto para a produção de cada litro adicional de xampu?

**8** O gráfico a seguir indica o valor de um determinado tributo territorial em função da área de uma propriedade.



**8.1** Qual é o imposto a pagar de uma propriedade de  $800 \text{ m}^2$ ?

**8.2** Existe algum tamanho de propriedade (em  $\text{m}^2$ ) cujo imposto cobrado seja exatamente R\$ 500,00?

**8.3** Determine uma função do tipo  $y = ax + b$ , com  $y$  sendo o tributo em R\$, e  $x$  a área em  $\text{m}^2$ , válida para o intervalo  $800 \leq x < 3800$ .

**9** Associe cada uma das funções abaixo com sua respectiva representação gráfica.

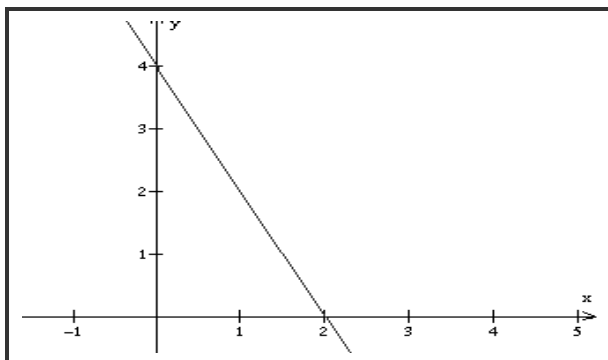
a)  $y = 4 + 2x$

b)  $y = 2x - 4$

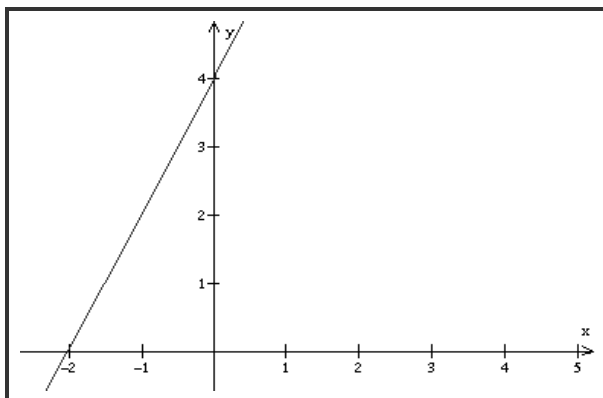
c)  $y = 4 - 2x$

d)  $y = -2x - 4$

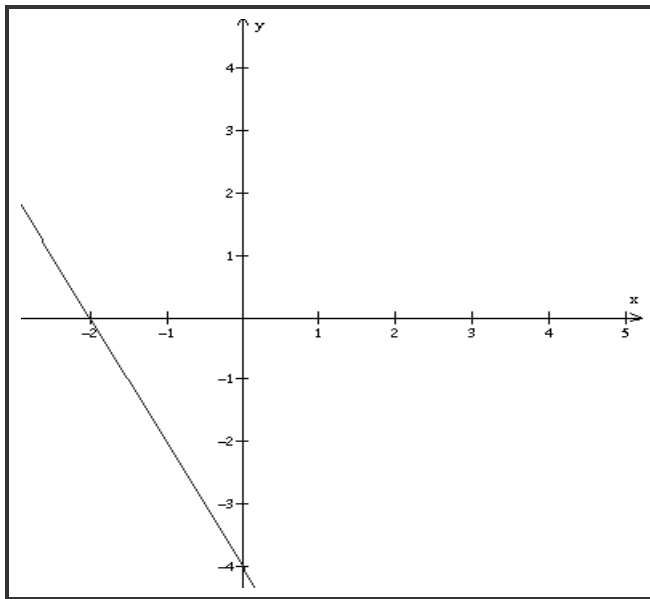
1)



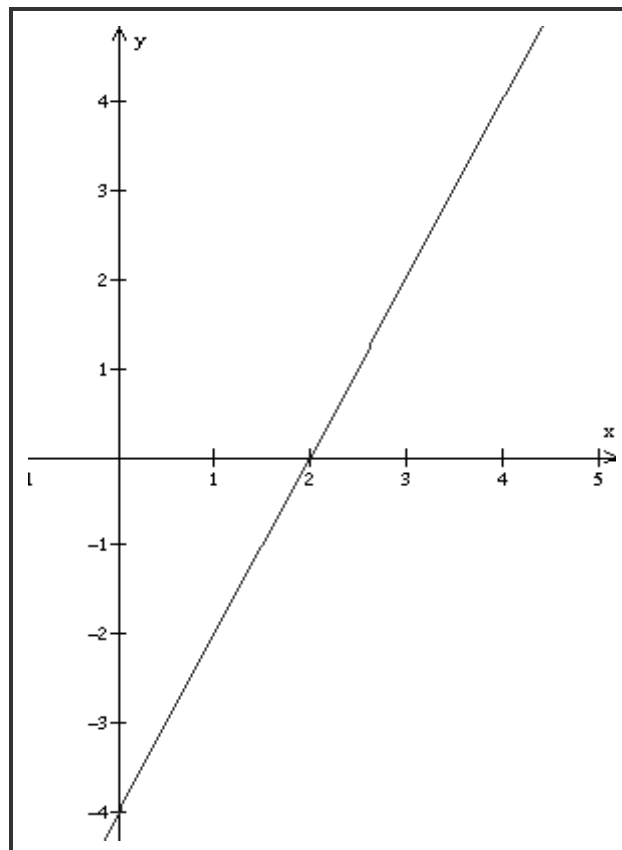
2)



3)



4)



## **2.4 Análise da primeira versão da THA pelos professores colaboradores, com base em sua avaliação do conhecimento atual dos estudantes aos quais serão oferecidas as atividades da THA**

Após a elaboração das atividades que constituem a THA, realizamos um estudo junto com os dois professores do Ensino Médio que participaram da pesquisa. Esse estudo ocorreu na própria unidade escolar fora do horário de aula. O estudo tinha como intuito apresentar o projeto de pesquisa para os professores e, em seguida analisarmos juntos cada atividade que constitui a THA para que os professores pudessem por meio do conhecimento atual de seus alunos, realizar sugestões, modificações ou alterações.

Dessa maneira apresentamos cada atividade com as respectivas resoluções, estratégias e número de aulas propostas.

Ao analisarem as atividades em que eram propostas situações-problema, os professores colaboradores concluíram que os alunos não encontrariam dificuldades para realizar. Disseram que as atividades eram interessantes, afirmando que as mesmas estavam em um contexto diferente do que normalmente trabalhavam, todavia acreditavam não ser necessário fazer alterações ou modificações.

Os professores alegaram que nunca tinham utilizado em suas aulas atividades que envolviam a sala de informática, pois normalmente seguiam os roteiros dos livros didáticos e mais recentemente o material fornecido pelo Estado.

Perguntamos aos professores se eles gostariam de dar alguma sugestão, ou efetuar alguma modificação nesta parte, eles disseram que não, alegando a atividade mostrar-se desafiadora aos alunos.

Quanto às atividades em que era necessário o auxílio do aplicativo *excel*<sup>17</sup>, os professores declararam que tinham certa familiaridade e em função da simplicidade da aplicação, não teriam dificuldades.

---

<sup>17</sup> Aplicativo do Microsoft Office.

Após o estudo, explicamos aos professores a necessidade de coletar dados e de obter instrumentos para observação durante a realização das atividades propostas em sala de aula. Então informamos que as aulas seriam gravadas e também atuaríamos como observador.

### AS THAS EM SALA DE AULA

Neste capítulo temos como objetivo relatar o desenvolvimento da THA em sala de aula, em que atuamos como observador e também apresentaremos as análises sobre as aulas dos professores colaboradores.

#### 3.1 Relatórios sobre as aulas em que as THA's se desenvolveram

Nesse tópico vamos apresentar nossas observações sobre as aulas em que a THA se desenvolveu nas duas turmas, a partir de algumas categorias que elegemos em função dos acontecimentos em sala de aula. Para tanto baseamos nos relatórios apresentados no Anexo 2.

As categorias selecionadas são as seguintes:

1. Papel assumido por professor e alunos durante a realização do trabalho (interação/não interação, autonomia, desempenho, etc).
2. Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos.
3. Interesse despertado por situações contextualizadas e possíveis influências na aprendizagem.

## **3.2 Análise sobre as aulas da THA**

### **3.2.1 Papel assumido pelo professor e alunos durante a realização do trabalho**

No início dos trabalhos os professores ressaltaram que se tratava de um projeto de pesquisa, e que o pesquisador atuaria como observador do desenvolvimento das atividades.

Ressaltaram que os conceitos abordados estavam de acordo com a proposta pedagógica da escola, e que somente a abordagem dos mesmos estava diferente da proposta contida nos cadernos fornecidos pelo Estado como material de apoio. Deixaram claro que o processo teria influência nas menções bimestrais de cada aluno e os conteúdos abordados estariam presentes nas avaliações durante o bimestre.

Notamos certa “euforia” dos alunos, visto alegarem ser a primeira vez que participavam de trabalho como esse.

Os professores organizaram os alunos de acordo com a estratégia proposta em cada atividade, explicando cuidadosamente o objetivo proposto em cada tarefa.

O professor Paulo solicitava aos seus alunos a leitura cuidadosa da questão antes do início da resolução e qualquer dúvida que porventura viesse a surgir, solicitasse atenção.

As dúvidas foram atendidas a duplas ou individualmente. Quando o professor Paulo percebia que a dúvida quanto ao significado da palavra era relativamente coletiva, procurava dirimi-la em voz alta, chamando a atenção da turma.

A professora Carla preferiu ler em voz alta com sua turma, já explicando alguns termos que julgou necessário. No entanto, notamos que boa parte dos alunos, durante estas considerações, mantiveram-se na leitura, pouco atentos a explanação da professora.

Esta “dispersão” gerou algumas perguntas como:

- *“professora o que é grandeza mesmo”?*
- *“professora não sei o que é razão”.*
- *nunca ouvi falar de tripé!*

Praticamente a cada item da atividade respondido, os alunos solicitavam a presença do professor para que verificasse se estava correto ou não.

Esta postura, normal aos alunos, gerava nos professores certa ansiedade em apresentar uma explicação do conteúdo como definição, elementos, propriedades.

Esperávamos esta situação, uma vez que procuramos argumentar com os professores durante os encontros que “via de regra”, não é comum na investigação de conceitos matemáticos, verificar os conhecimentos que os alunos disponibilizam durante as aulas, instigando-os a explorarem seus pensamentos e ideias, disponibilizando tempo para que encontrem possíveis soluções.

Observamos atitudes distintas dos professores nesta situação:

O professor Paulo, solicitou aos alunos que aguardassem os demais colegas terminar para que discutisse com a sala os resultados. A professora Carla confirmava ou não a exatidão da resposta. No caso de resposta errada auxiliava seus alunos na resolução, sem fornecer a resposta, buscando inferir novas perguntas de maneira a facilitar a compreensão do aluno.

Todas as aulas puderam ser desenvolvidas conforme as projeções previstas na elaboração da THA.

Notamos ainda que, apesar da nossa presença na sala de aula, com o passar das aulas, o caráter “novidade” do projeto de pesquisa passou, com muitos alunos dispersos, requerendo interferências do professor colaborador.

#### Atividade no laboratório de informática (4.1)

Os dois professores Paula e Carla, embora um pouco apreensivos com a atividade, mostraram-se confiantes pelo fato de considerarem a atividade relativamente simples, além de poderem contar com a participação do monitor do laboratório na organização da turma em duplas nos terminais e para a instalação da atividade nos computadores.

Os alunos sentiram-se motivados, visto declararem nunca terem participado de atividades nas aulas de Matemática utilizando computador.

Foi necessário solicitar ao monitor o bloqueio de acesso à internet, pois algumas duplas insistiam em abandonar a atividade e conectavam-se a sites, normalmente os de relacionamento.

#### **3.2.2 Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos**

Pelo fato de ter sido previamente discutidas as atividades com os professores e lhes foi entregue o material com nossa expectativa de resolução, os dois professores Paulo e Carla, não tiveram dificuldades relacionadas ao desconhecimento de conceitos ou procedimentos, se bem que ambos, em caso de dúvidas dos alunos, basearam-se exclusivamente em nossa perspectiva de resolução.

Notamos que os alunos mostravam-se menos inibidos no desenvolvimento de atividades e sua exploração quando trabalhavam em dupla ou em grupo, porém observamos pouco questionamento entre os integrantes do grupo quanto à solução que determinado aluno tenha efetuado.

A maior dificuldade observou-se na atividade 6.3, visto os alunos terem como parte da atividade a identificação no texto, dos parâmetros para estabelecer a proporção.

Nesta atividade observamos grande envolvimento professores colaboradores, diante das manifestações por vezes acaloradas, dos alunos na busca pela solução.

Os dois professores colaboradores recorreram à lousa no intuito de auxiliar os alunos a encontrarem a proporção entre as duas escalas termométricas.

Um ponto marcante a observar é que os alunos, após substituir uma grandeza por determinado símbolo passam a efetuar os cálculos aritméticos, sem considerar o contexto em que o símbolo foi criado parecendo-lhes vazio o resultado.

Nossa hipótese para tal situação é que normalmente os alunos, não são estimulados a validar o resultado de suas operações aritméticas. Evidência desta hipótese pode ser notada em tarefas que contemplam a contextualização com outras disciplinas (esta atividade em especial com a Física) em que normalmente não estão habituados a colocarem, após o resultado numérico da operação, as unidades de medida da grandeza avaliada.

O resultado obtido é somente mais um número, com pouco ou nenhum significado.

O estabelecimento do significado dos parâmetros  $a$  e  $b$  na função polinomial do 1º. Grau escrita sob a forma  $y = ax + b$ , e suas interferências no respectivo gráfico, foi outro ponto em que apresentaram ainda certa dificuldade.

### **3.2.3 Interesse despertado por situações contextualizadas e possíveis influências na aprendizagem**

Apesar de ficarem interessados na solução das situações propostas, pelo fato de conseguirem dar significado ao que lhes era proposto a resolver, os alunos encontraram dificuldades no entendimento dos textos, principalmente os mais extensos, em que declararam que as informações numéricas estavam muito dispersas.

Os alunos sempre questionavam e faziam explorações de como desenvolver a atividade, comparando os resultados encontrados entre as duplas ou individualmente, auxiliando os colegas quando apresentavam dificuldades que julgavam terem sido superadas para si. Notamos um agradável clima de interação entre os alunos e os professores.

Ao final do desenvolvimento das atividades, mesmo precisando de interferências mais efetivas dos professores, um número considerável de alunos conseguia efetuar observações pertinentes durante a socialização dos resultados efetuada pelos professores colaboradores.

Na atividade efetuada no laboratório de informática, declararam de aspecto desafiador, visto lançarem um número qualquer em uma coluna da planilha e a necessidade em “desvendar” qual/quais operações, o aplicativo efetuou a partir do número escolhido. Contudo as duas últimas planilhas, que adiciona ou subtrai um valor fixo, da operação mostraram dificuldades em perceber a regularidade.

Esta dificuldade apresentada atuou como agente desafiador entre os alunos, pois chegaram a disputar quem conseguiria “desvendar” a relação entre as grandezas, em todas as planilhas mais rapidamente.

### **NOVOS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS APÓS A THA**

#### **4.1 Os novos conhecimentos construídos após a THA**

Ao apresentarmos os novos conhecimentos do professor pesquisador e dos professores colaboradores remetemo-nos mais uma vez Ciclo de ensino de Matemática, formulado por Simon (1995) e apresentado na figura 1 deste trabalho (p. 31), percebendo que o conhecimento do professor é o ponto de partida e o ponto de chegada neste ciclo, e a transformação desses conhecimentos possibilita mudanças contínuas na THA, que por sua vez poderá conduzir a novos conhecimentos, em um ciclo praticamente contínuo.

Baseados nestas concepções, ao final dos trabalhos, propomos uma “mesa de debates” com os professores colaboradores, refletindo sobre as atividades, seu desenvolvimento em sala de aula, e procuramos identificar as mudanças que poderiam ser efetuadas na THA de forma a proporcionar aos alunos melhor apropriação de conhecimentos.

##### **4.1.1 Os novos conhecimentos do professor pesquisador**

No que se refere ao nosso desenvolvimento profissional, a percepção é que a maior construção de conhecimento foi na elaboração da THA, a partir das

pesquisas e reflexões que culminam com sua construção, e a utilização de um olhar crítico e determinado para propor sequências que possibilitem atingir os objetivos destacados.

Outro aspecto a considerar é que propomos atividades para outro professor desenvolver. Mesmo este professor tendo participado de um processo de discussões e inferido comentários e/ou sugestões, a THA reflete nossas crenças, percepções e estratégias para o desenvolvimento de determinado conteúdo.

Crenças e percepções raramente são comuns a dois ou mais professores, visto serem consolidadas ao longo do desenvolvimento profissional e da experiência individual de cada um de nós. Surge, portanto, um novo desafio: a modificação contínua da THA, considerando esta interação.

Ainda em relação a esta interação no que se refere ao fechamento das propostas de THA com acordos entre pesquisador e professores colaboradores reportamo-nos ao estudo de Traldi (2006) quando afirma:

A colaboração é um dos paradigmas mais promissores para o desenvolvimento profissional do formador de professores, pois possibilita que ele explicita suas dúvidas relacionadas à sua prática letiva, discuta conceitos que não teve a oportunidade de discutir durante sua formação formal e reelabore suas concepções de ensino-aprendizagem (HARGREAVES, 1994, apud TRALDI, 2006, p. 136).

Neste sentido, ao analisar as dificuldades que um grupo de trabalho coletivo enfrenta ao trabalhar de forma colaborativa conclui:

As principais dificuldades são: a falta de prática na organização da pauta que irá orientar os trabalho; o excesso de impressões pessoais desarticuladas com teorias que acaba gerando um esvaziamento das discussões; uma expectativa falsa de encontrar soluções mágicas; pouco conhecimento sobre a possibilidade de reflexão sobre a ação como uma estratégia de desenvolvimento profissional; a falta do hábito de pesquisar a própria prática. (TRALDI, 2006)

Cabe destacar que temos nesta relação de construção de conhecimentos, como elemento não menos importante, o aluno, que também interage, participa e contribui com suas crenças e percepções.

#### **4.1.2 Os novos conhecimentos dos professores colaboradores**

A “mesa de debates” formada com os professores colaboradores nos permitiu identificar os possíveis conhecimentos novos que construíram e que contribuirão para o seu desenvolvimento profissional, a partir da experiência nas atividades THA, e que poderão vir a interferir nas suas atividades docentes como o planejamento, a seleção de atividades, as estratégias, as metodologias de ensino, entre outras.

Neste sentido os professores concluíram que a experiência ajudou a perceber que diferentes metodologias podem facilitar o desenvolvimento da aula e potencializar os resultados de aprendizagem.

O desenvolvimento de parte da THA no laboratório de informática mostrou aos professores, uma nova concepção sobre como desenvolver em seus alunos o hábito de fazer conjecturas, argumentar, levantar hipóteses sobre um determinado conceito matemático, declarando que a relação de interdependência entre duas grandezas, pode ser explorada de forma divertida e curiosa.

Um ponto marcante na discussão foi a proposta da THA em não fornecer definições, nem respostas prontas já no início das atividades. Manifestaram sua apreensão quanto ao método, visto nunca terem utilizado. Acreditavam que os alunos teriam extrema dificuldade, e que o tempo destinado a realização das tarefas seria insuficiente.

No entanto salientaram que a atitude de observar as reações, discussões e indagações dos alunos, com a proposição de novas perguntas ao invés de fornecer respostas, direciona os alunos no sentido de perceber possíveis encaminhamentos no percurso do raciocínio.

Mencionaram a importância de desenvolver nos alunos a construção do pensamento algébrico, como um dos pilares para a construção do conhecimento no estudo de função.

Percebemos em suas declarações que a demanda de “tempo” para todo o processo, é um fator relevante. No entanto perceberam que é preciso disposição para mudar a rotina de trabalho, dentro deste “novo” conceito no processo ensino-aprendizagem.

Declararam ainda que muito ouviram falar sobre o construtivismo em sala de aula, porém o tema parecia ainda pouco confuso. Nossas discussões e a THA, trouxeram-lhes um novo olhar sobre o tema: o construtivismo não é meramente propor situações contextualizadas e interdisciplinares deixando os alunos à própria sorte de aprendizagem, como se fossem capazes de descobrir estratégias o tempo todo. A contínua interação do professor no processo pode garantir a construção do conhecimento para os alunos.

## **4.2 As sugestões de modificação na THA**

Com o desenvolvimento das atividades, identificamos alguns pontos que poderiam ser modificados ou melhorados a fim de facilitar a aprendizagem dos conceitos envolvidos em nossa THA.

Refletimos com os professores colaboradores sobre estes pontos, e procuramos elaborar a nova versão<sup>18</sup>.

Inicialmente, retiramos da versão desenvolvida em sala de aula a questão 8, que embora represente uma função polinomial do 1º. grau, é expressa através de duas sentenças, o que não compõe os objetivos da atividade.

Outra modificação que julgamos pertinente é a inclusão de atividade que utilize um software para construção de gráficos e possa auxiliar no entendimento dos parâmetros  $a$  e  $b$ , da função polinomial do 1º. grau escrita sob a forma  $y = ax + b$ .

Deste modo, acreditamos que permitiremos ao aluno perceber as modificações no gráfico e na expressão algébrica da função, por meio das variáveis visuais pertinentes.

---

<sup>18</sup> Anexo 3.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

---

Retornamos as nossas questões de pesquisa com o objetivo de apresentar nossas considerações:

A primeira questão que apresentamos: **Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino de noções introdutórias à ideia de função?**

A aprendizagem vista como um processo complexo, no qual são constantes as interações entre professor e aluno e o conteúdo matemático a ser ensinado, requer que o professor não garanta apenas a organização e decisão do conteúdo a ser ensinado, mas também perceba e pondere sobre as hipóteses que o aluno tem sobre a resolução de determinada tarefa em sala de aula.

Neste sentido, estamos certos que a teoria construtivista não estipula caminhos definitivos para a aprendizagem dos alunos, afirmando com Simon (1995):

Embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa de reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática” baseada na visão construtivista é um desafio considerável, no qual a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar (appud PIREZ, 2009, p. 150).

Na tentativa de elaboração da planificação do ensino de noções introdutórias à ideia de função, deparamo-nos realmente com grandes desafios, mas acreditamos que suas contribuições podem facilitar o processo ensino-aprendizagem.

Destacamos como principal desafio ao elaborar nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem, a escolha de atividades que pudessem contemplar os objetivos propostos no plano de ensino e essencialmente, a proposição de situações que pudessem facilitar ao aluno a reflexão no desenvolvimento das tarefas, considerando seus contextos e peculiaridades, de modo a construir ou reconstruir seu conhecimento.

Outro ponto desafiador a nosso ver foi o estabelecimento dos objetivos de aprendizagem. Tais objetivos deveriam ser propostos de modo a propiciar ao aluno o entendimento e apropriação dos conceitos principais do tema abordado pela tarefa, atuando como um “alicerce” para as tarefas seguintes.

Neste sentido nos reportamos a segunda questão proposta neste trabalho: **como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino sobre noções introdutórias à ideia de função que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos?**

O levantamento do referencial bibliográfico, igualmente não foi tarefa fácil. Não encontramos pesquisas que se destinaram a olhar sobre o processo de ensino e aprendizagem para grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nem direta nem inversamente proporcionais. Portanto baseamos as hipóteses de aprendizagem dos alunos, em nossa experiência docente.

Procuramos evidências nas pesquisas principalmente sobre as possíveis dificuldades que os alunos possam apresentar, seja na interpretação de textos, na percepção de expressões algébricas com a falta de um referencial numérico, a utilização e apropriação do conceito de um símbolo para representar determinada grandeza, bem como a relação de dependência entre duas grandezas.

Cabe ressaltar que ainda é comum se tratar essas dificuldades ou dúvidas simplesmente como “erros” cometidos pelos alunos, que normalmente procura-se corrigir repetindo-se as mesmas atividades, as mesmas explicações.

Tais dificuldades ficam aparentes e tendem a ser progressivamente amenizadas quando buscamos atividades que possam permitir que o aluno reflita sobre a situação que lhe propõe, quando a resolução das tarefas leva em

consideração seus conhecimentos prévios, abordagens em situações-problema através de tarefas que abordam situações do cotidiano, também em outras áreas do conhecimento, facilitando ao aluno interagir, construir estratégias para resolução, esboçar conjecturas, argumentar, relacionar e analisar.

Em relação ao uso de novas tecnologias e, reconhecendo que nossa THA mostrou certa deficiência em sua elaboração em relação a este item – fato que procuramos revisar na nova versão – acreditamos ser importante instrumento para potencializar situações de aprendizagem, tomamos como exemplo, a assimilação e entendimento dos alunos referentes aos parâmetros  $a$  e  $b$  da função polinomial do 1º. grau escrita na forma  $y = ax + b$ .

Entendemos que as pesquisas na área de Educação Matemática e que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem podem contribuir para a organização de um ensino sobre noções introdutórias à ideia de função potencializando boas situações de aprendizagem.

No entanto, concordamos com Gravemeiler (2004) reconhecendo a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores, afirmando que não se pode entregar aos professores, meras sequências de ensino para usar.

A consideração acima nos remete à terceira questão proposta: **como é a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino de noções introdutórias à ideia de função, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?**

Evidências no perfil e depoimento dos professores que atuaram como colaboradores, verificadas também no nosso levantamento bibliográfico, apontam que normalmente os jovens professores apóiam-se quase que exclusivamente em livros didáticos para ministrar suas aulas, por esse motivo tomamos cuidado especial na elaboração de nossa THA.

De acordo com as reflexões do nosso grupo de pesquisa, o jovem professor tende a usar modelos em geral ultrapassados, sem perceber a necessidade de conhecer e de construir modelos de ensino que sejam

consistentes e coerentes com teorias, como é o caso das teorias de perspectiva construtivista.

Tal reflexão nos reporta às observações de Tardif quando afirma:

[...] Os conhecimentos proposicionais sobre o ensino baseados na lógica disciplinar, veiculados durante a formação, constituem uma falsa representação dos saberes profissionais a respeito de sua prática. Esse modelo trata os alunos como “espíritos virgens”, limitando-se na maioria das vezes fornecer-lhes conhecimentos proposicionais, informações, mas sem executar um trabalho profundo sobre os filtros cognitivos, sociais e afetivos através dos quais os futuros professores recebem e processam essas informações. Na verdade, eles terminam sua formação sem terem sido abalados em suas crenças, e são essas crenças que vão se re-atualizar no momento de aprenderem a profissão na prática, crenças essas que serão habitualmente reforçadas pela socialização na função de professor e pelo grupo de trabalho nas escolas, a começar pelos pares, os professores experientes. (TARDIF, 2000, pp. 19-20).

Faz-se necessário, portanto que o professor tenha uma atuação frente às novas possibilidades metodológicas, enfrentando o desafio de estar atualizado com pesquisas em sua área de atuação e cursos de formação continuada.

Este foi mais um grande desafio em nosso trabalho, deixar claro para os professores que colaboraram com o desenvolvimento das atividades, os objetivos e estratégias propostas, insistindo para que sua análise das atividades levasse em consideração o conhecimento que tinham sobre sua prática e de seus alunos.

Os professores considerados no estudo tinham familiaridade com o tema, mas afirmaram ser relativamente nova a opção de iniciar o estudo de função, através da proporcionalidade direta entre duas grandezas. Normalmente abordam o tema de acordo com o proposto em livros didáticos, nos quais, de acordo com nosso levantamento bibliográfico, existe ainda certa preocupação de alguns autores com o conceito formal de função como um caso particular de relação.

## REFERÊNCIAS

---

---

BARRODY, A. J., Cibulskis, M., Lai, M. y Li, X. (2004). **Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research.** *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 227-260.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural.** Barcelona: Paidós. 1991.

BRASIL. Secretária da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2006.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Mais (PCN +): Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Fundamental: Matemática – Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental.** Brasília: MEC, SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 1999.

CARVALHO, Maria C. C. e Silva. **Padrões Numéricos e Funções.** São Paulo: Moderna, 2001.

CHALOUH, Louise. HERSCOVICS, Nicolas. **Ensinando expressões algébricas de maneira significativa.** In: Coxford, Arthur F.; Shulte, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra.* São Paulo: Atual, 1995, pp. 37-48. Tradução: Hygino H. Domingues.

CLEMENTS, D. H. y Sarama, J. (2004). **Learning trajectories in mathematics education**. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.

DOLL JR., W.E. **Currículo: uma perspectiva pós moderna**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese.

FERRARO, Nicolau G.; SOARES, P. A de Toledo. **Física Básica: volume único**. São Paulo: Atual, pp. 262-263, 1998.

GÓMEZ, P. y LUPIÁÑEZ, J. L. (2007). **Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. *PNA*, 1(2), 79-98.

GRAVEMEIJER, K. (2004). **Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education**. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.

GRAVEMEIJER, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), **Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design** (pp. 225-273). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

KEPPKE, Charston L. **Álgebra nos currículos do Ensino Fundamental**. 2007. 181 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LESH, R. y YOON, C. (2004). **Evolving communities of mind –In which development involves several interacting and simultaneously developing strands**. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: E. P. U., 1986.

PIRES, C. M. C.; PIETROPAOLO, R. C. **Matemática e suas interfaces com outras disciplinas**. In: PIRES, C. M. C.; CAMPOS, T. M. M. (Org.). Curso de Especialização em Educação Matemática. São Paulo: Proem Editora, 2006.

PIRES, C. M. C. e TRALDI, A. **Implementação de inovações curriculares em matemática no ensino médio: ferramenta de investigação e ferramenta para planejamento**. Submetido ao encontro da Anpedinha. 2009b.

PIRES, C.M.C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon**. Educação Matemática Pesquisa, v. 11, n<sup>o</sup>. 1, pp. 145 -166, 2009.

\_\_\_\_\_. **Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil**. Bolema (Rio Claro), v. 1, p. 1, 2008.

\_\_\_\_\_. **Implementação de inovações curriculares em matemática e embates com concepções, crenças e saberes de professores: breve retrospectiva histórica de um problema a ser enfrentado**. Revista Ibero-americana de Educación Matemática, v. 12, pp. 53-72, 2007.

\_\_\_\_\_. **Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da Matemática no currículo visando a superação do binômio máquina e produtividade**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 6, pp. 29-61, 2004.

\_\_\_\_\_. **Orientações Curriculares para a Educação Básica: qual o caminho?** Revista de educação PUC-Campinas, Campinas, v. 18, pp. 25-34, 2005.

\_\_\_\_\_. **Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede**. São Paulo, FTD, 2000.

SALMAZO, Rodrigo. **Atitudes e Procedimentos de Alunos Frente à Leitura e Interpretação de Textos nas Aulas de Matemática**. 2005, 134 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Caderno de apoio ao Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª. Série, volume 2.** São Paulo, 2009.

SILVA, Marcio A. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos.** 2007, 248 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, U. A. **Análise da Abordagem de Função Adotada em Livros Didáticos de Matemática da Educação Básica,** 2007, 110 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SIMON, M. A. (1995). **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

SIMON, M. A. y Tzur, R. (2004). **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory.** Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

STEFFE, L. P. (2004). **On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions.** Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.

TARDIF, Maurice. **Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários.** *Revista Brasileira de Educação*, São Paulo, n. 13, pp. 5-24, jan.-fev.-mar.-abr.,2000.

TRALDI, Armando Jr. **Formação de Formadores de Professores de Matemática: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos,** 2006, 189 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

VALENTE, J.A. (1999). **O computador na Sociedade do Conhecimento.**

Disponível em:

[http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select\\_action=&co\\_obra=40246](http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=40246)

ZUFFI, Edna M.; PACCA, J. L. de Almeida. **O conceito de função e sua linguagem para professores de matemática e de ciências.** Revista Ciência e Educação, Bauru, n.1, v.8, pp. 1-12, 2002. Disponível em:

[www2.fc.unesp.br/cienciaeeducacao/include/getdoc.php?id=525&article=183&mode=pdf](http://www2.fc.unesp.br/cienciaeeducacao/include/getdoc.php?id=525&article=183&mode=pdf). Acesso em: 14/11/2007.

## Anexo 1

### Questionário do professor

1) Gênero:            ( ) Masculino        ( ) Feminino

2) Idade:

- ( ) de 21 a 30 anos
- ( ) de 31 a 40 anos
- ( ) de 41 a 50 anos
- ( ) acima de 50 anos

3) Há quanto tempo leciona Matemática?

- ( ) de 1 a 4 anos
- ( ) de 5 a 9 anos
- ( ) de 10 a 20 anos
- ( ) mais de 20 anos

4) Em que grau(s) de ensino leciona?

- ( ) Ensino Fundamental II
- ( ) Ensino Médio
- ( ) Ensino Superior

5) Em qual(is) escola(s) leciona?

- ( ) Municipal
- ( ) Estadual
- ( ) Particular

6) Qual sua formação acadêmica?

- Graduação
- Extensão
- Aperfeiçoamento
- Especialização
- Mestrado
- Doutorado

7) Levando em consideração a sua experiência e o seu conhecimento, como você abordaria o ensino de funções polinomiais do 1º grau de modo a reforçar o entendimento e aprendizado por parte dos alunos no Ensino Médio?

8) No momento de interpretar a forma algébrica da relação entre duas grandezas, você costuma ressaltar para os alunos suas principais características?

- Sim. Quais?
- Não.

9) Você tem conhecimento de algum software que trata de construção de gráficos?

- Sim. Qual(is)?
- Não

10) Já trabalhou com alguma atividade que envolvesse seus alunos com softwares/aplicativos para construção de gráficos e/ou reconhecimento de relações?

11) Na sua opinião, um software pode ajudar o aluno a entender melhor a representação gráfica de uma função?

12) Você costuma contextualizar a função polinomial do 1º grau com a relação entre duas grandezas?

### Relatório para acompanhamento do desenvolvimento da trajetória

Professor Colaborador:

Atividade:

N.º de aulas utilizadas:

Dificuldades que o professor encontrou para desenvolver os conteúdos/atividades em sala de aula com os alunos.

Em qual parte da atividade foi necessária a intervenção do professor? Como realizou essa intervenção?

Essa atividade despertou o interesse dos alunos?

Os alunos apresentaram dificuldades para realizar as atividades? Quais?

O que o professor colaborador mudaria nessa atividade?

O professor colaborador está de acordo com a metodologia que o pesquisador sugeriu? Dê sugestões.

### THA Modificada

#### Atividade 1

#### Tempo previsto: 2 aulas

**Objetivo:** Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, em situações-problema e a partir de uma tabela de valores ou gráficos.

**Estratégia:** Entregar a atividade impressa para cada aluno, propondo para o professor colaborador que dê um tempo para que os alunos interpretem a situação proposta e possam responder os questionamentos. Em seguida, o professor poderá propor para que algumas duplas exponham oralmente suas respostas para que ele possa concluir a atividade discutindo com o grupo de estudantes.

A atividade foi proposta para ser trabalhada em duplas, pelo fato da leitura conjunta atuar como agente facilitador da compreensão dos textos.

Ao final da atividade, durante a fase de socialização dos resultados, o professor deverá colocar na lousa as observações colocadas no quadro, como resposta ao objetivo da atividade.

#### 1.1 Continuando em linha reta<sup>19</sup>

O canguru<sup>20</sup> adulto pode medir até 2 m de altura. As patas traseira e a cauda formam um tripé que o sustenta quando se alimenta. Ele dá saltos de até 10 m de comprimento e consegue correr mais de 50 km/h.

A tabela mostra alguns dados sobre a distância percorrida pelo canguru e a velocidade em cada salto, entre 10 e 30 km/h.

---

<sup>19</sup> Adaptado de Carvalho, Maria C. C. e Silva: Padrões Numéricos e Funções. São Paulo: Moderna, 2001.

<sup>20</sup> O canguru é um mamífero marsupial, ou seja, é dotado de uma bolsa (o marsúpio), dentro da qual o filhote se desenvolve. Ele vive, dentre outras regiões, nas planícies da Austrália.

Velocidade em quilômetros por hora (v)	10	15	20	25	30
Distância percorrida em metros (d)	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6

- a) O que acontece com a distância quando a velocidade aumenta?
- b) De acordo com a tabela, qual seria a distância percorrida se a velocidade do canguru fosse de 35 km/h ? E de 50 km/h?
- c) Se a distância percorrida em cada salto fosse de 4,5 m qual a velocidade que o canguru atingiria?
- d) Quais as grandezas envolvidas?
- e) Qual é a razão entre as grandezas?

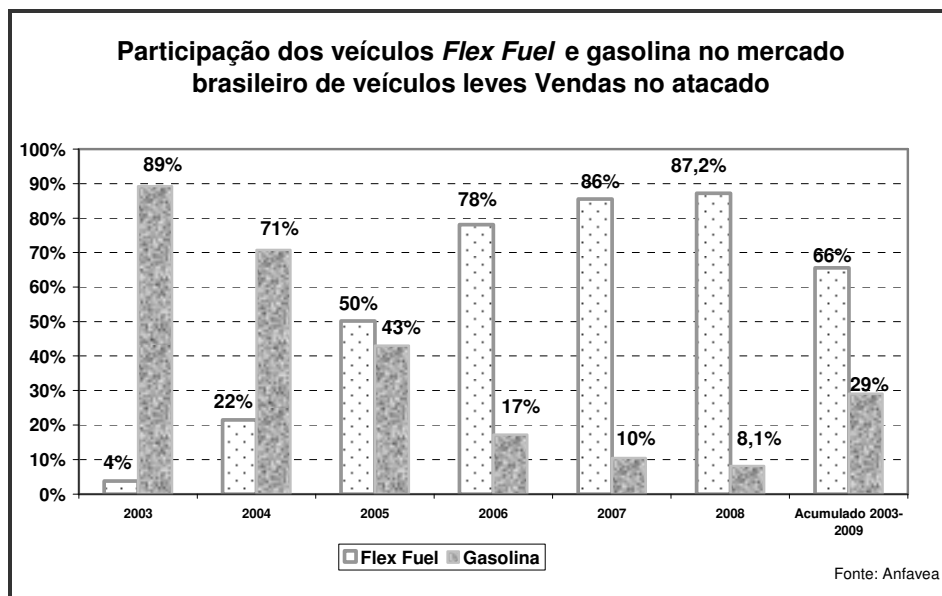
## 1.2 O sucesso do veículo bicombustível

A quantidade de veículos equipados com o sistema flex fuel no Brasil já supera 5 milhões unidades. A marca foi atingida no dia 6 de março. Segundo dados da Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores (Anfavea), divulgados nesta segunda-feira (10), os veículos bicombustíveis já representam 88% das vendas no mercado nacional.

No primeiro bimestre deste ano foram comercializadas 348.475 unidades de veículos com motorização flex fuel, contra 31.374 unidades com motor a gasolina. Na avaliação do presidente da Anfavea, Jackson Schneider, a tendência é de que a participação dos veículos flex no mercado continue a aumentar.

Na comparação com março de 2007, a participação dos bicombustíveis na frota brasileira quase dobrou – na época a Anfavea somou 2,6 milhões de unidades e estimou que até 2013 os veículos flex terão participação de 52% da frota brasileira total.

A tecnologia flex fuel foi regulamentada no final de 2002 e, no início de 2003, chegou ao mercado pela Volkswagen, quando lançou o Gol Total-Flex. Logo em seguida, a General Motors passou a oferecer o Corsa FlexPower. O sistema caiu no gosto do consumidor devido à possibilidade de escolha do combustível, de acordo com a variação dos preços da gasolina e do álcool. O sucesso dos veículos flex fuel no Brasil é reconhecido mundialmente.



Disponível em: [www.mdic.gov.br/arquivos/dwn/1252504710.xls](http://www.mdic.gov.br/arquivos/dwn/1252504710.xls). Acesso em 29/09/2009.

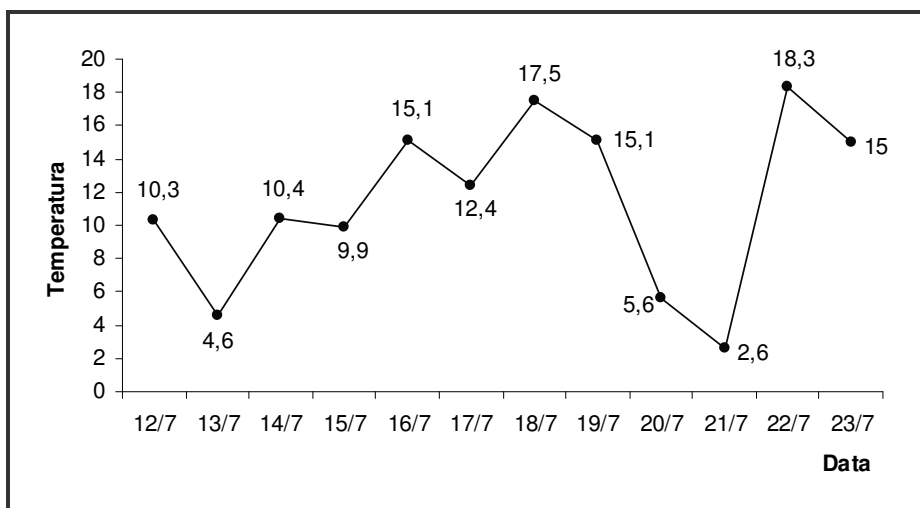
Fonte: Portal G1, 10 mar. 2008.

De acordo com o texto e o gráfico acima responda:

- a) Quais são as grandezas envolvidas?
- b) O que acontece com a participação dos veículos Flex Fuel no mercado brasileiro durante o período 2003 a 2008?
- c) Neste mesmo período, o que acontece com os veículos movidos a gasolina?
- d) Existe uma única razão entre as grandezas? Justifique.

### 1.3 Este “tempo” imprevisível

O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura máxima (em °C) registrada em determinada cidade entre os dias 12 a 24 de julho:



- Quais são as grandezas envolvidas no gráfico?
- Quanto variou a temperatura máxima entre os dias 12 e 13 de julho?
- Como variou a temperatura entre os dias 16 e 18 de julho?
- De acordo com o gráfico, é possível afirmar a temperatura máxima no dia 11 de julho? Justifique.
- Ainda de acordo com o gráfico, qual a previsão da temperatura máxima para o dia 24 de julho? Justifique.

#### 1.4 Água: uso consciente

O número **N** de dias necessários para esvaziar um reservatório de 40 000 litros depende do consumo diário de água.

Consideremos **x** o consumo diário de água desse reservatório.

- Considerando o consumo constante e não havendo reposição, o que acontece diariamente com o volume de água do reservatório?
- Monte uma tabela que mostre a quantidade de dias para esvaziamento do reservatório considerando consumo diário de 250, 500, 800, 1000, 1600 e 2000 litros.
- Determine as razões entre as grandezas da tabela.

Os resultados das razões são iguais? Caso não sejam efetue o produto entre as grandezas. O que você observa?

Ao efetuarmos operações com grandezas proporcionais, podemos observar algumas regularidades:

- os produtos entre os pares de grandeza são idênticos.
- a razão entre os pares de grandezas é a mesma.
- obtemos resultados distintos tanto no produto como na razão entre os pares de grandezas.

## Atividade 2

### Tempo previsto: 2 aulas

**Objetivo:** Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, a partir de uma tabela de valores ou gráficos.

**Estratégia:** Está atividade deverá ser realizada individualmente, pois ao final da atividade será possível verificar o grau de assimilação em cada aluno, dos objetivos das atividades 1 e 2. Cada aluno receberá uma cópia da atividade.

O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas. Ao final do exercício 2.1, o professor deverá solicitar uma pausa e escrever na lousa as observações constantes do quadro anexo, para a familiarização e socialização dos alunos com os termos e as notações matemáticas.

#### 2.1 Observe as tabelas abaixo:

a)

p	1	2	3	5	8	15
q	3	6	9	15	24	45

b)

p	32	24	14	10	6	2
q	16	12	7	5	3	1

c)

p	450	300	225	150	100	50
q	2	3	4	6	9	18

d)

p	1	2	3	4	5	6
q	10	9	8	7	6	5

Para todos os pares de grandezas p e q das tabelas acima e efetue o produto e a razão entre os mesmos. O que você observa?

Quando x e y são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultaneamente na mesma proporção, ou seja, a razão  $y/x$  é constante, e resulta que  $y = kx$  (k é uma constante).

Quando x e y são duas grandezas inversamente proporcionais, sempre que uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa, de modo que o produto das duas permanece constante:  $x \cdot y = k$  em que k é uma constante.

**2.2** Escreva as constantes k de proporcionalidade das tabelas acima:

**2.3** A tabela abaixo, relaciona os valores de três grandezas a, b e c, que variam de modo inter-relacionado.

a	1	3	5	9	10	15	18	45	60	180	225	360
b	450	150	90	50	45	30	25	10	7,5	2,5	2	1,25
c	6	18	30	54	60	90	108	270	360	1080	1350	2160

a - verifique se os diversos pares de grandezas (a e b, b e c, a e c) são direta ou inversamente proporcionais, ou nem direta nem inversamente proporcionais. Justifique sua resposta com base nas conclusões do exercício 2.1.

**2.4** Em cada um dos casos a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade, caso haja, determine a constante de proporcionalidade<sup>21</sup>.

- a) A altura  $a$  de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade  $t$ ?
- b) A massa  $m$  de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade  $t$ ?
- c) O perímetro  $p$  de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado  $a$ ?
- d) A diagonal  $d$  de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado  $a$ ?
- e) O comprimento  $C$  de uma circunferência é diretamente proporcional ao seu diâmetro  $d$ ?

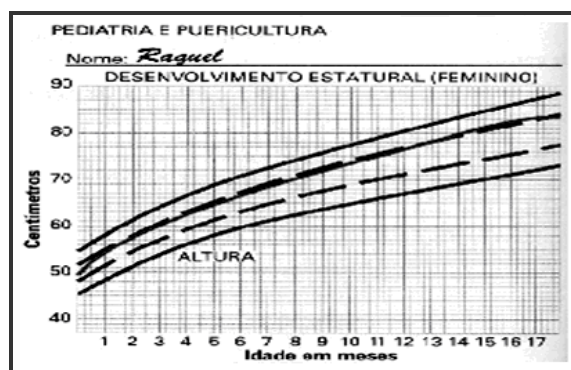
Em tempo:

No **item a** deste exercício é importante observar quando a referência é uma criança, sua altura é uma função de sua idade, como podemos observar no quadro abaixo.

O gráfico do quadro mostra o desenvolvimento estatural de uma menina. Observe que a altura dela era de 64 cm aos 5 meses de idade e passou a ser de 73 cm aos 10 meses.

As duas linhas contínuas externas correspondem às maiores e menores alturas esperadas para crianças do sexo feminino com desenvolvimento normal.

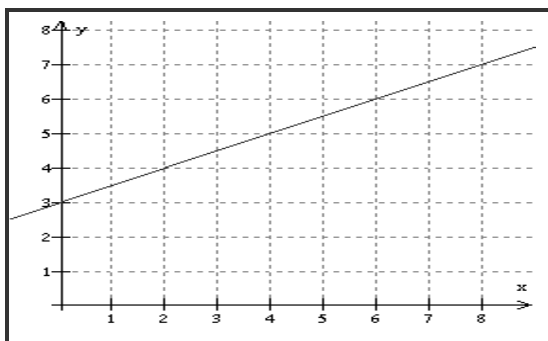
Os pediatras usam este tipo de gráfico para acompanhar o desenvolvimento das crianças.



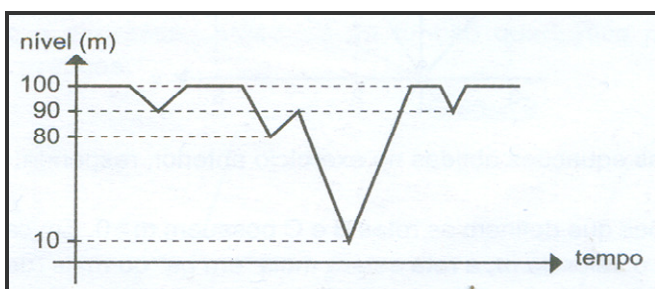
<sup>21</sup> Adaptado de SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Caderno de apoio ao Professor: Matemática - Ensino Médio - 1ª. Série, volume 2. São Paulo, 2009. p. 12.

**2.5** Nos gráficos abaixo, identifique se a relação entre as grandezas envolvidas é direta ou inversamente proporcional, ou nem direta nem inversamente proporcional.

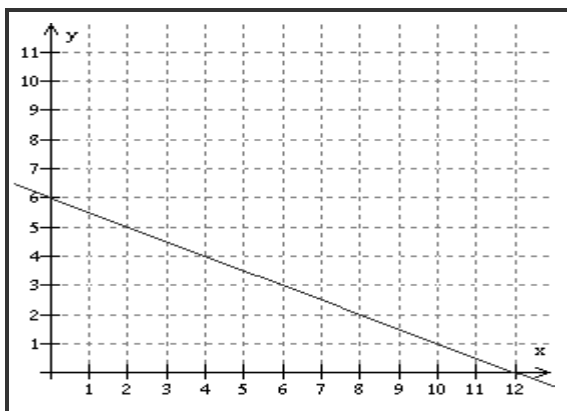
a)



b)



c)



### Atividade 3

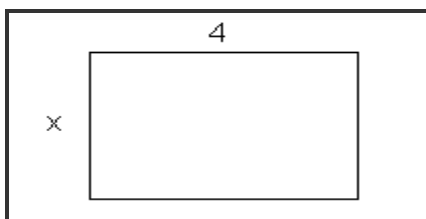
Tempo previsto: 2 aulas

**Objetivo:** Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como forma para expressar relação entre duas grandezas e expressar algebricamente a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da construção e análise de tabelas e gráficos cartesianos.

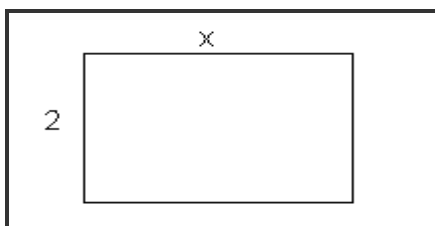
**Estratégia:** Esta atividade deverá ser realizada individualmente. Cada aluno irá receber uma cópia da atividade. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

**3.1** Para cada um dos retângulos abaixo determine a área **A** e esboce no sistema cartesiano o gráfico que permita mostrar a área para qualquer valor de **x**.

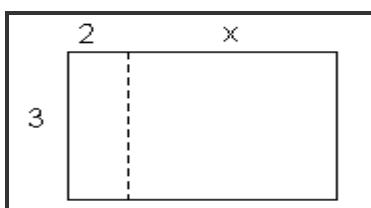
a)



b)



c)



**3.2** A tabela a seguir foi elaborada a partir da expressão  $y = 2x - 3$ .  
Complete as lacunas.

x	1	5		6	10			8	
y		7	15			-3	1		19

#### **Atividade 4**

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como forma para expressar relação entre duas grandezas e expressar algebricamente a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da construção e análise de tabelas.

**Estratégia:** As planilhas estarão previamente disponibilizadas na área de trabalho de cada máquina. Os alunos deverão sentar-se em duplas junto ao computador para buscar a solução da atividade. O professor irá familiarizá-los com o aplicativo antes do início da atividade. Ao final deverá solicitar aos alunos as respostas, para discussões e socialização.

**4.1** Em cada uma das planilhas abaixo, insira valores numéricos nas diversas células da coluna A, observando o respectivo resultado que aparecerá na coluna C.

Nas células da coluna B existe uma mesma relação, utilizando o valor que você escolheu e gerando os valores numéricos da Coluna C. Descubra esta relação e a escreva na célula D2.

Obs. Cada planilha contém uma relação diferente.

Para facilitar a visualização o total de inserções foi limitado a 30 linhas.

	A	B	C	D
1	a		b	relação entre a e b
2			0	
3				
4				
5				
6				
7				

Planilha 1.  $b = 3a$

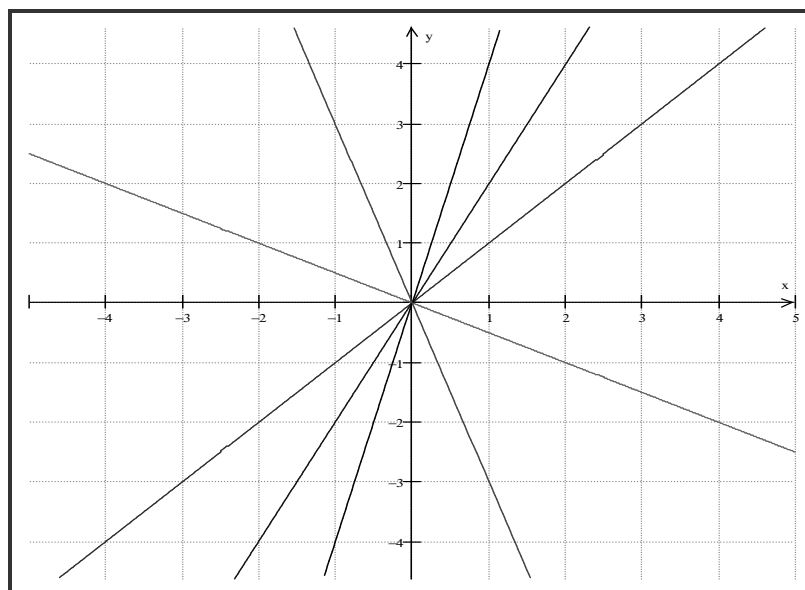
Planilha 2.  $v = 4t$

Planilha 3.  $r = 2q + 4$

Planilha 4.  $y = -2x - 1$

Planilha 5.  $p = s/2 + 1$

**4.2** No gráfico abaixo estão representadas a relação entre as grandezas  $x$  e  $y$ . Escreva esta relação para cada uma das retas dadas.



## Atividade 5

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Compreender o conceito de função a partir da exploração de situações-problema.

**Estratégia:** As atividades realizadas individualmente. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

**5.1** Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 2 litros de água para obtermos o suco reconstituído. Assim, cada garrafa de suco concentrado corresponde a 2,5 litros de suco pronto. Estabeleça na tabela abaixo a relação entre a quantidade (**n**) de suco concentrado e a quantidade (**Q**) de suco pronto.

Suco concentrado (número de garrafas)	1	3	4	8	10	12	n
Suco pronto (em litros)	2,5	7,5	10	20	25	30	

**5.2<sup>22</sup>** Quando uma pedra é abandonada em queda livre ( sem considerar a resistência do ar ao movimento), a distância vertical **d** que ele percorre em queda é diretamente proporcional ao quadrado do tempo **t** de queda, ou seja, **d = kt<sup>2</sup>**. Observando-se que após 1 segundo a pedra caiu 4,9 metros, pergunta-se:

- Qual é o valor da constante de proporcionalidade **k**?
- Qual é a distância vertical percorrida após 5 segundos?
- Quanto tempo a pedra levará para cair 49 m?
- Construa a tabela que representa a queda da pedra (em metros) para os primeiros 8 segundos de movimento.

<sup>22</sup> Adaptado de SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Caderno de apoio ao Professor: Matemática - Ensino Médio - 1ª. Série, volume 2. São Paulo, 2009. p.15.

**5.3**<sup>23</sup> Determinada família consome, em média, um botijão doméstico de gás com 13 kg a cada 26 dias.

- a) Determine o consumo médio ( **C** ) diário de gás desta família.
- b) Quantos kg de gás esta família consome em 10 dias?
- c) Calcule o número de dias necessários para consumir-se 8 kg de gás.
- d) Qual a massa de gás que resta no botijão após 8 dias de uso?
- e) Escreva a relação que permite determinar a massa (m) de gás restante no botijão em função do tempo (t) em dias.

### **Atividade 6**

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer as implicações dos coeficientes nos gráficos que descrevem funções polinomiais de 1º grau.

**Estratégia:** Utilizar o aplicativo *graphmatica*<sup>24</sup> instalado em cada máquina. Os alunos deverão sentar-se em duplas junto ao computador para a realização da atividade. O professor irá familiarizá-los com o aplicativo antes do início da atividade. Ao final das discussões e socialização, o professor deverá escrever na lousa as observações constantes do quadro anexo, para a familiarização e socialização dos alunos com os termos e as notações matemáticas.

**6.1** Digite as seguintes funções no campo apropriado do software:

- a)  $y = x$
- b)  $y = 2x$
- c)  $y = 3x$
- d)  $y = -2x$
- e)  $y = -3x$
- f)  $y = x/2$
- g)  $y = x/4$

---

<sup>23</sup> Adaptado de SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Caderno de apoio ao Professor: Matemática - Ensino Médio - 1ª. Série, volume 2. São Paulo, 2009. p. 17.

<sup>24</sup> Aplicativo da KSoft, inc. Disponível em [www.graphmatica.com](http://www.graphmatica.com).

h)  $y = -x/2$

i)  $y = -x/4$

**6.2** Agora responda:

a) O que está acontecendo com a inclinação das retas mostradas na tela em relação às expressões digitadas?

**6.3** Em uma nova tela, digite as seguintes funções:

a)  $y = x$

b)  $y = x + 1$

c)  $y = x + 2$

d)  $y = x - 1$

e)  $y = x - 3$

**6.4** De acordo com a observação das retas do gráfico apresentado na tela, o que acontece com o gráfico que representa cada função, toda vez que adicionamos ou diminuimos um valor qualquer na função?

Ao expressarmos por meio de variáveis uma situação de interdependência envolvendo grandezas diretamente proporcionais, chegamos a uma função polinomial de 1º grau. De forma geral, esta função pode ser expressa por uma fórmula do tipo  $f(x) = ax + b$ , em que **a** é a constante de proporcionalidade estudada acima e **b** é o ponto onde a reta intersecta o eixo y, ou seja, para  $x = 0$ .

## **Atividade 7**

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Compreender o conceito de função a partir da exploração de situações-problema.

**Estratégia:** As atividades realizadas em duplas ou grupos de no máximo 4 alunos. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas, principalmente na interpretação do texto do exercício 6.3.

**7.1** Para não precisar fazer contas a toda hora, o proprietário de um bazar afixou a seguinte tabela incluindo as quantidades de cópias mais solicitadas:

Número de cópias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço a pagar (R\$)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50

- Existe proporção entre os pares de grandezas acima? Justifique sua resposta.
- O valor a ser pago depende da quantidade de cópias?
- Qual é o valor a ser pago para um cliente que solicitar 8 cópias?
- E para 32 cópias?
- Considerando que o cliente não obteve qualquer desconto, qual o número máximo de cópias que poderá pagar com R\$ 25,00.
- Como se exprime, matematicamente, o preço a pagar (**P**) por um número (**n**) de cópias?
- Represente a tabela acima no sistema cartesiano abaixo:

**7.2** Uma certa quantia (**Q**), apurada em determinado concurso de uma loteria, deverá ser distribuída uniformemente cabendo um prêmio (**P**) a cada um dos (**n**) ganhadores. Supondo tenha sido apurada a quantia de R\$ 1 200 000,00:

- elabore uma tabela relacionando 1, 2, 4, 5, 8, 10, 15 e 30 ganhadores com os respectivos prêmios pagos a cada um.
- Como se exprime, matematicamente, o prêmio que cada um dos ganhadores deve receber?
- Represente a tabela acima no sistema cartesiano abaixo:

### 7.3 Medida de temperatura<sup>25</sup>

As partículas constituintes dos corpos estão em contínuo movimento. Entende-se temperatura como sendo uma grandeza que mede a maior ou menor intensidade dessa agitação térmica.

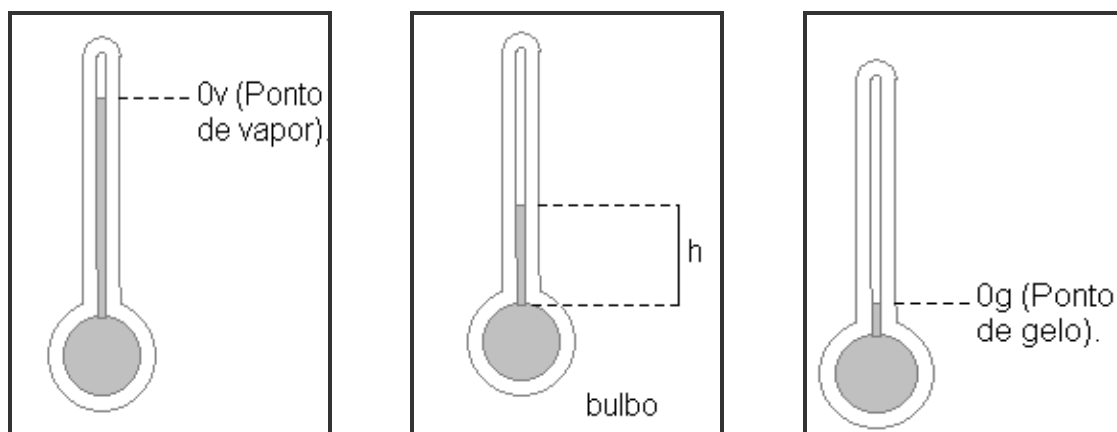
Como a agitação térmica não pode ser medida diretamente, medimos a temperatura de um corpo indiretamente, com base nas propriedades que variam com ela.

A avaliação da temperatura é feita por meio de um termômetro, que, após permanecer algum tempo em contato com o corpo, apresenta a mesma temperatura.

O termômetro mais utilizado é o termômetro de mercúrio, no qual a grandeza termométrica é a altura  $h$  de uma coluna de mercúrio numa haste capilar, ligada a um reservatório (bulbo) que contém mercúrio. A cada temperatura corresponde um valor para a altura da coluna. A correspondência entre os valores da altura  $h$  e da temperatura  $\theta$  constitui a função termométrica.

Ao graduar o termômetro, fazendo corresponder a cada altura  $h$  uma temperatura  $\theta$ , estamos criando uma escala termométrica.

Esquemáticamente:



<sup>25</sup> Texto adaptado de Ferraro, Nicolau G., Soares, P. A. Toledo. Física Básica: volume único. São Paulo: Atual, 1998 pp. 262-263.

A escala mais utilizada é a escala Celsius, que adota os valores  $0^{\circ}\text{C}$  e  $100^{\circ}\text{C}$ , respectivamente para  $\theta_g$  e  $\theta_v$ . Esses valores são marcados na haste do termômetro, em correspondência às alturas da coluna.

Há países em que é mais usada a escala Fahrenheit, na qual  $\theta_g = 32^{\circ}\text{F}$  e  $\theta_v = 212^{\circ}\text{F}$ .

Admitindo que as variações no comprimento da coluna de mercúrio são sempre diretamente proporcionais às variações de temperatura que as provocaram, responda:

**7.3.1** – Qual a relação com a escala quando a coluna de mercúrio de um termômetro graduado na escala Celsius, estiver apontando  $48^{\circ}\text{C}$ ?

**7.3.2** – Um termômetro graduado na escala Fahrenheit, tem sua coluna de mercúrio, estabilizada em  $\frac{2}{3}$  de sua escala. Qual a temperatura que estará indicando?

**7.3.3** – Suponha dois termômetros de mercúrio, um graduado na escala Celsius e outro na escala Fahrenheit, em contato com um mesmo corpo. O termômetro graduado na escala Celsius indica  $35^{\circ}\text{C}$ , qual a temperatura estará indicando o termômetro graduado na escala Fahrenheit?

**7.3.4** – Escreva a expressão que relaciona a variação da temperatura na escala Celsius ( $\theta_C$ ), com a correspondente na escala Fahrenheit ( $\theta_F$ ).

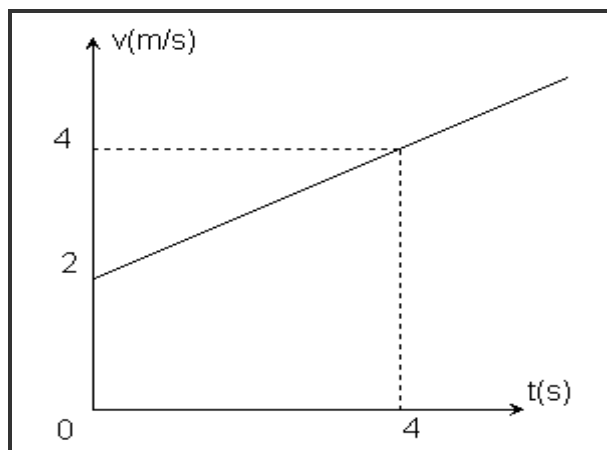
## **Atividade 8**

**Tempo previsto: 02 aulas**

**Objetivo:** Reconhecer gráficos que descrevem funções polinomiais de  $1^{\circ}$  grau, representadas algebricamente, em situações-problema que as envolvam.

**Estratégia:** As atividades realizadas individualmente. O professor deverá agir como um mediador e sempre que necessário deverá interromper o grupo para possíveis esclarecimentos e dúvidas.

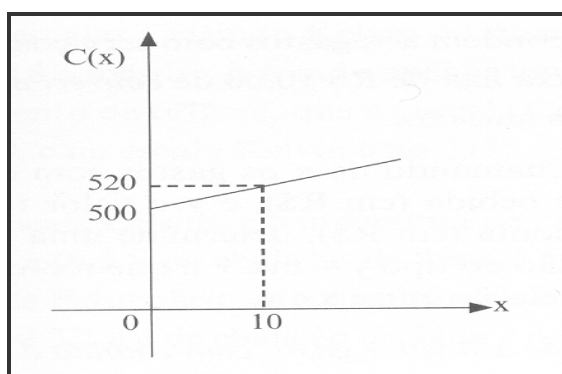
O gráfico abaixo representa os valores de uma velocidade ( $v$ ) de um determinado corpo, em função do tempo ( $t$ ).



**8.1.1** Escreva a expressão algébrica da interdependência entre as grandezas:

**8.1.2** Qual a velocidade do corpo após 7 segundos de deslocamento?

**8.2** O gráfico a seguir mostra a relação entre a quantidade de  $x$  litros de xampu produzida e o custo  $C(x)$ , em R\$, da produção caseira.



**8.2.1** - Qual é o possível motivo de um gasto de R\$ 500,00 quando não se está produzindo?

**8.2.2** - Qual é a função  $C(x) = ax + b$  representada no gráfico? Essa expressão da interdependência entre o custo  $C$  e a quantidade produzida  $x$  é válida para qualquer valor de  $x$ ?

**8.2.3** - Qual é o gasto para se produzir 1500 litros de xampu?

**8.2.3** - Quantos litros de xampu podem ser produzidos com R\$ 10 000,00?

**8.2.4** - Qual é a variação no gasto para a produção de cada litro adicional de xampu?

**9** Associe cada uma das funções abaixo com sua respectiva representação gráfica.

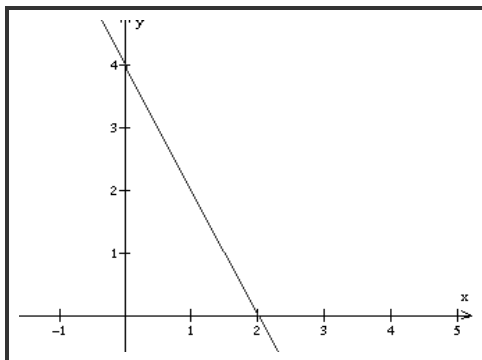
a)  $y = 4 + 2x$

b)  $y = 2x - 4$

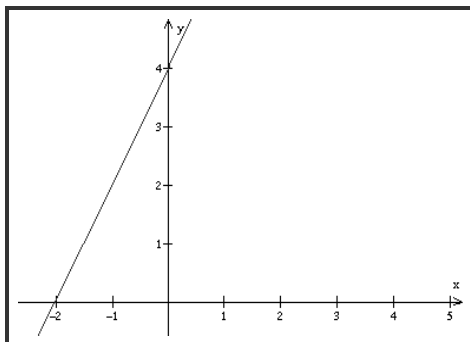
c)  $y = 4 - 2x$

d)  $y = -2x - 4$

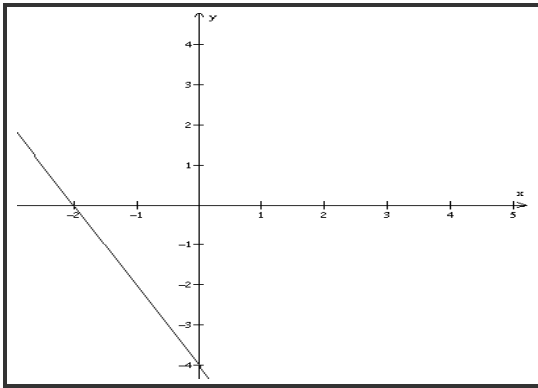
1)



2)



3)



4)

